



# UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Astronomia

Tesi di Laurea Triennale

Campi di velocità peculiare e vuoti cosmici

Relatore

Prof. Alberto Franceschini

Laureando

Antonio Donà

Anno Accademico 2021-2022



# Indice

<b>1</b>	<b>Proprietà osservative della struttura su larga scala dell'Universo</b>	<b>2</b>
1.1	Considerazioni generali sulla struttura dell'Universo . . . . .	2
1.2	Struttura cosmica su grande scala: funzione di correlazione . . . . .	2
1.3	La relazione di Limber . . . . .	4
1.3.1	Il modello gerarchico . . . . .	5
1.4	Spettro di Potenza . . . . .	6
1.4.1	Dati osservativi sullo spettro di potenza . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Evoluzione di perturbazioni nella distribuzione di materia</b>	<b>11</b>
2.1	Teoria Newtoniana delle piccole perturbazioni . . . . .	11
2.1.1	Hubble Drag . . . . .	14
2.2	Perturbazioni adiabatiche di densità . . . . .	14
2.3	Soluzioni particolari dell'equazione perturbativa . . . . .	15
2.3.1	Soluzione perturbata di Friedmann . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Campi di velocità peculiare</b>	<b>20</b>
3.1	Moti peculiari come deviazioni del flusso di Hubble . . . . .	20
3.2	Moti di velocità peculiare . . . . .	22
3.2.1	Moti su piccola scala. Virgo Infall . . . . .	25
3.2.2	Moti su grande scala. Il dipolo cosmico . . . . .	26
3.3	Il metodo POTENT . . . . .	27
3.3.1	Determinazione iterativa dei campi di velocità peculiare . . . . .	27
3.3.2	Determinazioni di mappe 3D della distribuzione di materia . . . . .	29
<b>4</b>	<b>Grandi vuoti nel Cosmo</b>	<b>33</b>
4.1	La rete cosmica . . . . .	33
4.2	Vuoti Cosmici . . . . .	35
4.3	Formazione ed evoluzione . . . . .	36
4.3.1	Modello gerarchico e formalismo dell'excursion set . . . . .	37
4.4	Dinamica dei vuoti . . . . .	41
4.4.1	Super Hubble Bubbles . . . . .	41
4.4.2	Vuoti ed energia oscura . . . . .	42
	<b>Bibliografia</b>	<b>45</b>

# Capitolo 1

## Proprietà osservative della struttura su larga scala dell'Universo

### 1.1 Considerazioni generali sulla struttura dell'Universo

Tra i traguardi più importanti raggiunti dalla cosmologia nell'ultimo mezzo secolo c'è la descrizione generale della struttura dell'Universo su larga scala, la cosiddetta **Large Scale Structure (LSS)**: le osservazioni mostrano infatti un Universo altamente strutturato in galassie, ammassi e super ammassi in scale che vanno da qualche Mpc ad alcune decine di Mpc, ed un Universo via via più omogeneo ed isotropo man mano che si osserva a scale maggiori, dalle centinaia di Mpc in su. Quest'ultima evidenza osservativa si formalizza nel **Principio Cosmologico** introdotto come pura ipotesi (non si disponeva di dati osservativi) da Albert Einstein, per supportare i primissimi modelli cosmologici con un principio di simmetria generale che riducesse i gradi di libertà al minimo. Il *Principio Cosmologico* è l'affermazione che, su grandi scale, l'Universo appare omogeneo ed isotropo, ovvero qualsiasi osservatore fondamentale vede le stesse proprietà in ogni direzione a prescindere dal luogo in cui osserva.

Ovviamente, se ciò fosse completamente vero, ovvero se tutto lo spazio attorno a noi fosse perfettamente omogeneo ed isotropo, non osserveremmo alcuna stella, alcuna galassia e alcun ammasso, e molto probabilmente non ci sarebbe la Terra e la vita su essa. Devono essere avvenute, in qualche periodo nella storia cosmica, deviazioni dalla perfetta omogeneità che hanno portato ad anisotropie con le quali possiamo spiegare la complessità dell'Universo visibile ai nostri occhi.

### 1.2 Struttura cosmica su grande scala: funzione di correlazione

Iniziamo la nostra analisi della struttura dell'Universo su larga scala prendendo in considerazione un potente strumento statistico introdotto per la prima volta alla fine degli anni '60 da Totsuji e Kihara (1969) ed usato estensivamente da Peebles e colleghi nell'arco degli anni '70. La **funzione di correlazione** fornisce una descrizione delle proprietà di raggruppamento (*clustering*) di una serie di

punti nello spazio. Quest'ultimo può essere tridimensionale, anche se importanti risultati si sono ottenuti osservando posizioni di galassie proiettate sulla sfera celeste, in uno spazio bi-dimensionale. Nella nostra trattazione assumiamo che, come già accennato, "i punti" nello spazio siano galassie, tuttavia la tecnica si è dimostrata efficace anche con altri oggetti celesti.

Date due galassie situate in volumi infinitesimi  $\delta V_1, \delta V_2$ , la probabilità congiunta  $\delta^2 P_2$  di trovarle separate da una distanza  $r_{12}$  è

$$\delta^2 P_2 = n_V^2 [1 + \xi(r_{12})] \delta V_1 \delta V_2 \quad (1.1)$$

dove  $n_V$  è la concentrazione media delle galassie e la funzione  $\xi(r_{12})$  è chiamata *funzione di correlazione a due punti galassia-galassia*. Dal momento che assumiamo omogeneità ed isotropia generale,  $r_{12}$  non è in forma vettoriale, bensì semplicemente scalare, ovvero la proprietà di *clustering* è mediamente la stessa a prescindere da direzione e punto fisico considerato.

Il significato che  $\xi(r_{12})$  assume in 1.1 è legato al suo valore. Se le galassie fossero distribuite in maniera completamente casuale nello spazio, allora  $\xi(r_{12}) = 0$ . Con  $\xi(r_{12}) > 0$  siamo di fronte ad una tendenza all'ammasso, se invece  $\xi(r_{12}) < 0$  le galassie tendono a respingersi. In altre parole,  $\xi(r_{12})$  rappresenta la probabilità in eccesso, rispetto ad un fluido cosmico omogeneo, di trovare una seconda galassia a distanza  $r_{12}$  dalla prima.

Equazione 1.1 implica che il numero medio di galassie all'interno di una distanza  $r$  da una certa galassia sia

$$\langle N \rangle_r = \frac{4}{3} \pi n_V r^3 + 4\pi n_V \int_0^r \xi(r_{12}) r_{12}^2 dr_{12} \quad (1.2)$$

con il secondo termine nel membro a destra che rappresenta il numero in eccesso comparato ad una distribuzione uniforme casuale (primo termine). Nel momento in cui consideriamo volumi spaziali abbastanza grandi, sempre per il *Principio Cosmologico*, il secondo termine tende a zero, poiché se  $\xi(r_{12})$  assume valori positivi per certi valori di scala spaziale, allora dovrebbe diventare negativo per altri valori, in modo che la densità media si preservi (omogeneità) dunque l'integrale converga a zero in media.

Per funzionare correttamente, equazione 1.1 ha bisogno della distanza degli oggetti del campione. Nel momento in cui non si dispone di questa informazione ci si può limitare ad una versione bi-dimensionale della funzione di correlazione. La *funzione di correlazione angolare a due punti*, analogamente a quella tridimensionale, è la probabilità di trovare due galassie in piccole porzioni di angoli solidi  $\delta\Omega_1$  e  $\delta\Omega_2$  separate nella sfera celeste da un angolo  $\theta_{12}$ :

$$\delta^2 P_2 = n_\Omega^2 [1 + \omega(\theta_{12})] \delta\Omega_1 \delta\Omega_2 \quad (1.3)$$

con  $n_\Omega$  distribuzione media di galassie per angolo solido.

In una maniera completamente analoga a ciò che abbiamo appena presentato, è possibile costruire funzioni di correlazione di ordine maggiore, tra  $N$  sorgenti. Con riferimento a 1.1, la funzione di correlazione generalizzata dà la probabilità di trovare  $N$  galassie in  $N$  volumi infinitesimi  $\delta V_i$  separate dalle distanze  $r_{mn}$ , in funzione delle funzioni di correlazione  $\xi^{(N)}$ . La probabilità totale include contributi di funzioni di correlazione di ordine minore di  $N$ . La *Funzione di correlazione ridotta*  $\zeta(r_{mn})$  quantifica la parte di probabilità che non dipende dai termini di

ordine minore. Riportiamo come esempio il caso della funzione di correlazione a tre punti.

$$\delta^3 P_3 = n_V^3 [1 + \xi(r_{12}) + \xi(r_{13}) + \xi(r_{23}) + \zeta(r_{12}, r_{13}, r_{23})] \delta V_1 \delta V_2 \delta V_3 \quad (1.4)$$

Come prima, la funzione di correlazione angolare diventa

$$\delta^3 P_3 = n_\Omega^3 [1 + \omega(\theta_{12}) + \omega(\theta_{13}) + \omega(\theta_{23}) + z(\theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{23})] \delta \Omega_1 \delta \Omega_2 \delta \Omega_3 \quad (1.5)$$

Il metodo più utilizzato per stimare la funzione di correlazione angolare è quello di osservare un campione di  $N$  galassie limitato in flusso (o magnitudine), per ogni galassia calcolare la distanza angolare rispetto ai rimanenti oggetti e ripetere la procedura per ogni campione, in modo da ottenere misure di  $N \times N$  galassie a vari intervalli di flusso. La distribuzione viene poi confrontata con modelli simulati in modo da stimare  $\omega(\theta)$ :

$$\omega(\theta) \simeq \frac{n_{DD}(\theta)n_{RR}(\theta)}{n_{DR}^2} - 1 \quad (1.6)$$

dove i vari  $n$  corrispondono al numero di coppie formate da oggetti reali (D) e simulati (R). Le analisi di cataloghi di posizioni proiettate sulla sfera celeste (mappa di Lick o, più recentemente, le survey APM e COSMOS) hanno mostrato che la funzione di correlazione a due punti  $\omega(\theta)$  è ben descritta da

$$\omega(\theta) \simeq A^* \theta^{-\delta} \quad (\theta_{min} \leq \theta \leq \theta_{max}; \delta \simeq 0.8) \quad (1.7)$$

dove l'ampiezza  $A^*$  dipende dalle distanze caratteristiche  $D^*$  del campione di galassie. Come si vede chiaramente dalla figura 1.1, la funzione ha un andamento potenziale con esponente negativo. Al di fuori della legge di potenza la funzione di correlazione angolare crolla rapidamente a zero.

### 1.3 La relazione di Limber

La funzione di correlazione angolare è senza dubbio un importante strumento statistico, tuttavia non ci permette di indagare fisicamente la struttura tridimensionale dell'Universo; per fare questo bisognerebbe essere a conoscenza di tutte le distanze delle galassie campione, impresa fattibile in molti casi, ma sicuramente non facile. È fondamentale in questo momento introdurre una relazione che legghi la funzione di correlazione angolare a quella spaziale, la **relazione di Limber**. Definiamo con  $\Phi(L)$  la funzione di luminosità di una popolazione di galassie, che indica il numero di oggetti in funzione dell'unità di volume e intervallo di luminosità. La funzione di luminosità più comune ha la forma di funzione di Schechter, con un andamento esponenziale troncato ad alte luminosità ( $10^{11} L_\odot$ ). L'*ipotesi di Limber*, che assumiamo come vera in generale, afferma che le proprietà di clustering di una popolazione di galassie sono indipendenti dalla loro luminosità. Con le ulteriori assunzioni che l'angolo  $\theta_{12}$  di distanza tra due galassie sia piccolo,  $\ll 1 \text{ rad}$ , e la distanza fisica sottesa da  $\theta_{12}$  sia molto minore della distanza tra l'osservatore e la sorgente, introduciamo la relazione di Limber:

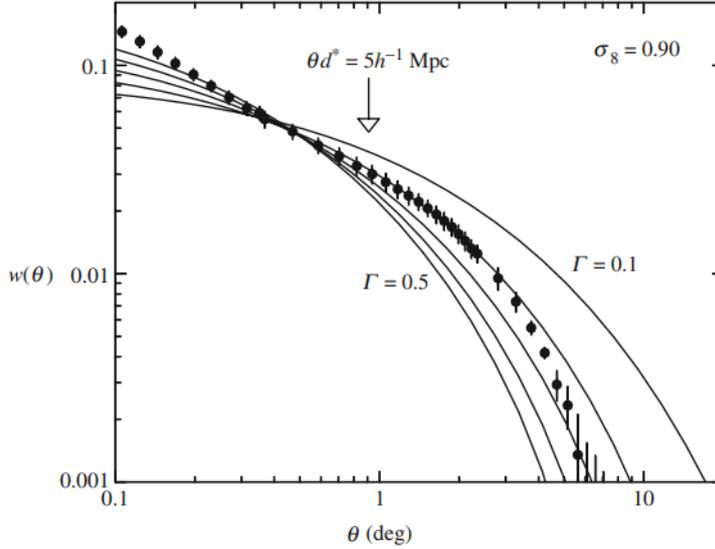


Figura 1.1: I punti con barre di errore determinano  $\omega(\theta)$  dalla survey APM. Le linee continue mostrano modelli CDM in funzione del parametro  $\Gamma$

$$\omega(\theta_{12}) \simeq \frac{\theta_{12} \int_0^\infty \psi^2(x) x^5 dx \int_{-\infty}^\infty \xi(x\theta_{12}\sqrt{1+y^2}d^*) dy}{\left(\int_0^\infty \psi(x) x^2 dx\right)^2} \quad (1.8)$$

dove  $\psi(x)$  è la funzione di visibilità di una galassia<sup>1</sup>,  $y = (x_1 - x_2)/(x\theta_{12})$ ,  $x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = d/d^*$  è la distanza ridotta e  $d^*$  è la distanza media delle sorgenti. Equazione 1.8 permette di conoscere l'andamento della funzione di correlazione spaziale da quella angolare (Eq.1.7), ottenendo una potenza del tipo

$$\xi(r) = Br^{-\gamma} \quad (1.9)$$

con  $\delta \simeq \gamma - 1$  (sempre in riferimento a 1.7). le osservazioni tramite funzione di correlazione angolare restituiscono  $\gamma \simeq 1.8$ . La forma 1.9 può essere riscritta come

$$\xi(r) = \left(\frac{r}{r_{0g}}\right)^{-\gamma} \quad (1.10)$$

dove  $r_{0g}$  è la *lunghezza di correlazione galattica*, che osservazioni mostrano essere  $r_{0g} \simeq 5h^{-1}Mpc$  nel range di scala spaziale  $0.1h^{-1}Mpc < r < 10h^{-1}Mpc$ . Su scale maggiori la funzione tende rapidamente a zero. La forma di  $\xi(r)$  è dimostrata da dirette osservazioni tridimensionali, come quella di figura 1.1.

### 1.3.1 Il modello gerarchico

L'analisi delle funzioni di correlazione può essere adattata anche ad altre sorgenti oltre alle galassie, inclusi quasar e radio galassie. Nel momento in cui si prendono in considerazione gli ammassi di galassie di Abell (ovvero quelli contenenti almeno

<sup>1</sup>la funzione di visibilità, analogamente a quella di luminosità, è la probabilità di trovare una galassia con magnitudine apparente compresa tra  $M$  e  $M+dM$  in un volume  $dV$

65 galassie entro un raggio di  $1.5 h^{-1} Mpc$ ) si ottiene la stessa relazione 1.10 con  $r_{0c} \simeq 12 - 25 h^{-1} Mpc$ ,  $5 h^{-1} Mpc < r < 75 h^{-1} Mpc$  e  $\gamma \simeq 1.8$ . La somiglianza con il caso di sole galassie è notevole, sebbene sia opportuno porre attenzione sul corretto valore di  $r_{0c}$ : ci sono evidenze che la lunghezza di correlazione scali con la densità dell'ammasso, essendo maggiore per quelli più numerosi (fino a  $r_{0c} \simeq 50 h^{-1} Mpc$  e minore per quelli più poveri di galassie ( $r_{0c} \simeq 10 h^{-1} Mpc$ ). Ci sembra essere quindi una forte evidenza che la forza di correlazione aumenti con la densità di materia dell'ambiente. L'idea sviluppata originariamente da Kaiser (1984) prende il nome di **clustering gerarchico** e prevede la presenza di picchi di densità nell'Universo generati in maniera graduale dall'accumulo progressivo (gerarchico) di materia, da galassie ad ammassi poveri fino a ricchi ammassi, dovuto a collassi gravitazionali. Questo implica che le ricche strutture che osserviamo oggi sono probabilmente le più antiche dell'Universo, formate da fluttuazioni casuali del campo di densità che sono collassate in tempi scala corrispondenti al tempo di *free-fall*

$$t_{ff} \approx \frac{1}{\sqrt{G\rho}}$$

con G costante di gravità,  $\rho$  densità della materia gravitante.

## 1.4 Spettro di Potenza

Per costruire funzioni di correlazione ci siamo serviti di sorgenti discrete puntiformi (galassie) assumendole traccianti della struttura a larga scala dell'Universo. Se però consideriamo lo spazio come fluido cosmico, possiamo introdurre una quantità alternativa che tenga conto delle deviazioni dalla totale omogeneità, una sorta di *campo di fluttuazione di densità*:

$$\Delta(\vec{x}) \equiv \frac{\rho(\vec{x}) - \langle \rho \rangle}{\langle \rho \rangle} \quad (1.11)$$

dove  $\rho(\vec{x})$  è il campo di densità in un specifico punto descritto da  $\vec{x}$  e  $\langle \rho \rangle$  è il valore medio del campo di densità in un certo volume  $V$ . Assumiamo che il volume preso in considerazione  $V$  fornisca una buona rappresentazione dell'Universo, dal momento che le fluttuazioni di densità dipendono dalla posizione spaziale e temporale.

Il teorema di Wiener-Khintchine<sup>2</sup> mostra che, per un campo statisticamente omogeneo e casuale, la funzione di covarianza a due punti è la trasformata di Fourier dello spettro di potenza. Considerando che  $\xi(r)$  presenta un andamento periodico man mano che la scala presa in considerazione cresce e il limite  $\xi(r) \rightarrow 0$  per  $r \gg r_0$  (ovvero  $\Delta(x) \rightarrow 0$  per  $x$  grande), è ragionevole passare alla trasformata di Fourier per descrivere  $\Delta(x)$ :

$$\Delta(\vec{x}) = \sum_k \delta_k(\vec{k}) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}) = \sum_k \delta_k^*(\vec{k}) \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{x}) \quad (1.12)$$

con il *numero d'onda*  $\vec{k}^3$  dato da

<sup>2</sup>Wiener, Norbert, *Generalized Harmonic Analysis*, vol. 55, Acta Mathematica, 1930, pp. 117-258.

<sup>3</sup>Si tenga a mente che il numero d'onda  $\mathbf{k}$  è inversamente proporzionale alla grandezza fisica della perturbazione descritta dalla lunghezza d'onda  $\lambda$ ,  $k \propto \frac{a(t)}{\lambda}$

$$k_x = n_x \frac{2\pi}{L}; k_y = n_y \frac{2\pi}{L}; k_z = n_z \frac{2\pi}{L} \quad (1.13)$$

con  $L$  valore della massima lunghezza entro cui ci aspettiamo che  $\Delta(\vec{x})$  sia non nulla in media. I coefficienti di Fourier sono descritti da

$$\delta_k(\vec{k}) = \frac{1}{V} \int_V \Delta(\vec{x}) \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{x}) d^3\vec{x} \quad (1.14)$$

in cui  $V = L^3$ . Poiché il campo  $\Delta(\vec{x})$  è reale, abbiamo che  $\delta_k^* = \delta_{-k}$ , utile in quanto permette di utilizzare solamente valori positivi di  $n$ . I coefficienti  $\delta_k$  variano leggermente da volume a volume, in maniera che nel prendere il valor medio  $\langle \Delta(\vec{x}) \rangle$ , questo sia nullo, ma la varianza  $\sigma^2 \neq 0$ :

$$\sigma^2 = \langle \Delta(\vec{x})^2 \rangle = \sum_k \langle \delta_k^2(\vec{k}) \rangle = \frac{1}{V} \sum_k \delta_k^2(\vec{k}) \quad ; \delta_k^2(\vec{k}) = \langle \delta_k^2(\vec{k}) \rangle \quad (1.15)$$

Equazione 1.15 è un applicazione del teorema di Parseval delle trasformate di Fourier sul campo reale  $\delta(\vec{x})$ : la potenza del campo totale è conservata dal caso reale alla trasformata:

$$\sigma^2 = \langle \Delta^2 \rangle = \frac{1}{V} \int_V \Delta(\vec{x})^2 d^3\vec{x} = \frac{1}{2\pi^2} \int \delta_k^2(\vec{k}) d^3\vec{k} = \frac{1}{V} \sum_k \delta_k^2(\vec{k}) \quad (1.16)$$

Generalizzando il *Principio Cosmico* ed assumendo il campo di densità  $\Delta(\vec{x})$  omogeneo ed isotropo su larghe scale, sostituiamo al vettore numero d'onda  $\vec{k}$  il suo modulo  $k = |\vec{k}|$  in modo che la varianza diventi

$$\sigma^2 = \frac{1}{V} \sum_k \delta_k^2 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty P(k) k^2 dk \quad (1.17)$$

dove abbiamo definito

$$\boxed{P(k) \equiv \delta_k^2} \quad (1.18)$$

Equazione 1.18 è lo **spettro di potenza** della struttura a larga scala. Si noti che la varianza  $\sigma^2$  dà informazioni sull'ampiezza media totale del campo di fluttuazioni di densità ad una certa scala, ma non ci dice quali siano i contributi delle varie onde  $k$  del volume  $V$ ; invece lo spettro di potenza indica quali scale contribuiscono maggiormente alle variazioni di campo.

Un altro modo per rappresentare lo spettro di potenza è dato dalla quantità  $\Delta^2(k)$ :

$$\Delta^2(k) \equiv \frac{1}{2\pi^2} P(k) k^3 \quad (1.19)$$

in modo che la varianza possa essere riscritta come

$$\sigma^2 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty P(k) k^2 dk = \int_0^\infty \Delta^2(k) d \ln k \quad (1.20)$$

La rappresentazione 1.19 è vantaggiosa perché adimensionale e il contributo allo spettro di potenza è misurato in funzione del decadimento logaritmico di  $k$ . La forma dello spettro di potenza è del tipo

$$P(k) = A k^n \quad (1.21)$$

con indice spettrale  $n$ . 1.21 sarà valida solo su un range di scala ridotto e l'indice  $n$  potrebbe variare in funzione della scala.

Siamo ora interessati a legare la funzione di correlazione spaziale a due punti con lo spettro di potenza. Partendo dalla probabilità congiunta di trovare una seconda galassia ad una distanza  $r$  dalla prima in un campo continuo  $\rho(\vec{x})$ :

$$d^2P = \frac{\langle \rho(\vec{x})\rho(\vec{x} + \vec{r}) \rangle}{m^2} dV_1 dV_2$$

con  $m$  la densità media di galassie, si può dimostrare (*teorema di Wiener-Khinchin*) che lo spettro di potenza è esattamente la trasformata di Fourier della funzione di covarianza o, come nostro caso, della funzione di correlazione spaziale a due punti.

Il vantaggio di lavorare con lo spettro di potenza del campo di fluttuazione di densità, anziché la funzione di correlazione a due punti, sebbene le due siano legate solo da una trasformata di Fourier, risiede nel fatto che in regime lineare del campo di densità,  $\delta(x) \ll 1$ , modi differenti della trasformata di Fourier evolvono in maniera indipendente uno dall'altro, mentre l'ampiezza della funzione di correlazione a due punti è influenzata da una serie di modi differenti in una maniera complicata. Di conseguenza, le ampiezze dello spettro di potenza su larga scala sono influenzate in maniera minima dalle strutture a piccola scala, e questo rende i risultati osservativi più facili da interpretare.

#### 1.4.1 Dati osservativi sullo spettro di potenza

Misure quantitative dello spettro di potenza da osservazioni di campioni di galassie nell'Universo locale forniscono un contributo fondamentale alla costruzione di un modello cosmologico teorico che descriva la formazione ed evoluzione delle strutture.

I modelli più accertati sono basati sull'assunzione che il contributo gravitazionale principale sia la materia oscura non barionica, chiamata materia oscura fredda (o Cold Dark Matter, da cui **CDM**) che si pensa abbia avuto origine nell'era di de-coupling. Fluttuazioni del campo di materia oscura hanno contribuito in maniera sostanziale alla creazione del potenziale gravitazionale determinante la struttura cosmica su larga scala.

Figura 1.2 è una buona rappresentazione dello spettro di potenza dell'Universo locale confrontato con modelli CDM aventi diversi parametri di  $\Omega_m$  e  $\sigma_8$  che sono rispettivamente il parametro di densità della materia barionica e la varianza media del campo di fluttuazione di densità entro una scala spaziale di  $8 h^{-1} Mpc$ . I dati seguono particolarmente bene la seguente funzione:

$$P(k)k^3 = \Delta^2(k) \simeq \frac{(k/k_1)^{1.8}}{1 + (k/k_2)^{-2.2}} \quad (1.22)$$

con  $k_1 \simeq 0.2 h^{-1} Mpc$  e  $k_2 \simeq 0.03 h^{-1} Mpc$ .

- Ricordando da 1.19 che  $P(k)k^{-3} \propto \Delta(k)^{-2}$ , su piccole scale spaziali (grandi valori del numero d'onda,  $k \approx 1$ ) il numeratore domina,  $\Delta^2(k) \simeq k^{1.8} \Rightarrow P(k) \propto k^{-3}\Delta^2(k) \propto k^{-1.2}$ , quindi  $P(k) \simeq k^n$  con  $n = -1.2$ ,  $\xi(r) \propto r^{-(3+n)} \propto r^{-1.8}$ .

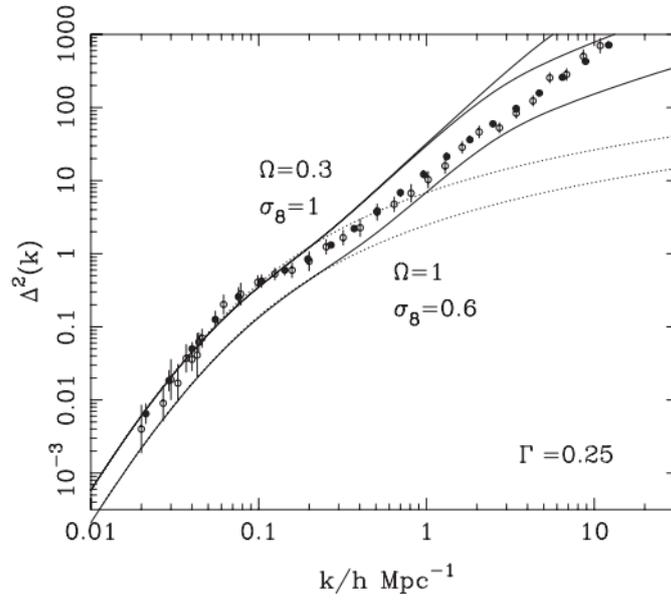


Figura 1.2: Spettri di potenza di galassie sono confrontati con modelli aventi valori diversi di parametri cosmologici: (1)  $\Omega_m = 1$ ,  $\Omega_\Lambda = 0$ ,  $\sigma_8 = 0.6$  (la curva continua inferiore); (2)  $\Omega_m = 0.3$ ,  $\Omega_\Lambda = 0$ ,  $\sigma_8 = 1$  (la curva continua superiore); (3)  $\Omega_m = 0.3$ ,  $\Omega_\Lambda = 0.7$ ,  $\sigma_8 = 1$  (la curva continua di mezzo). Le corrispondenti linee tratteggiate indicano modelli di spettro di potenza.

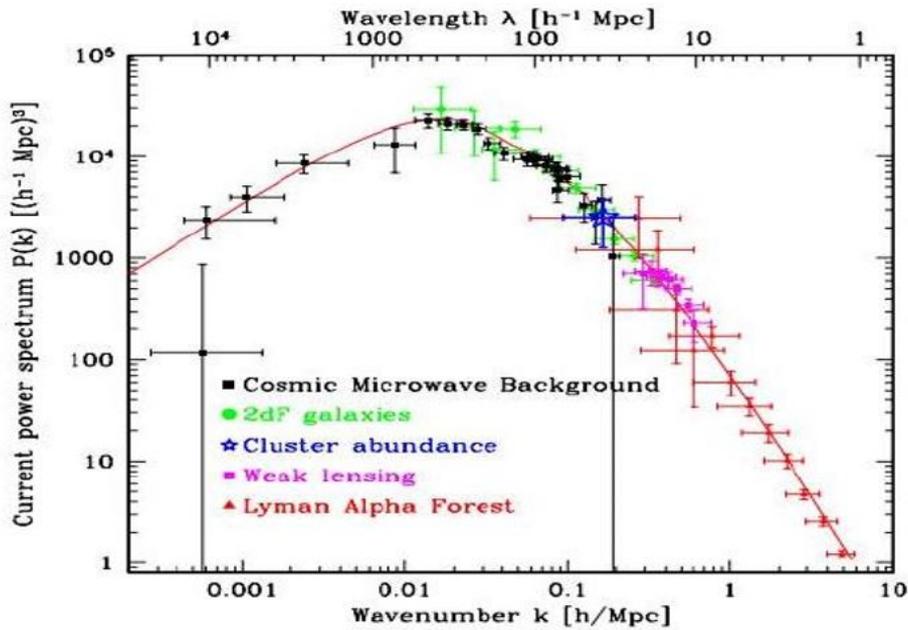


Figura 1.3: Come figura 1.2 ma con  $P(k)$  in funzione di  $k$ .

- Su grandi scale spaziali, piccoli numeri d'onda  $k$ , abbiamo

$$\Delta^2(k) \simeq \frac{(k/k_1)^{1.8}}{(k/k_2)^{-2.2}} \propto k^4$$

e  $P(k) \propto k^1 \Rightarrow \xi(r) \propto r^{-4}$ . Su grandi scale si vede che la funzione di correlazione converge velocemente.

Ultima nota importante riguarda la forma dello spettro di potenza su larga scala. Abbiamo visto che l'andamento sulle grandi scale è del tipo

$$P(k) \propto k^n \quad n = 1 \tag{1.23}$$

Su scale grandi il regime delle perturbazioni è in uno stato chiamato *lineare*, ovvero le fluttuazioni possono essere trattate come piccole perturbazioni del campo. La trattazione di queste perturbazioni (che svolgeremo nel capitolo seguente) mostra che esse evolvono mantenendo la forma generale dello spettro invariata. Possiamo allora pensare che lo spettro che vediamo ora su larghe scale ( $> 50Mpc$ ) sia del tutto simile a quello presente nelle prime epoche cosmologiche, sviluppato successivamente sotto l'effetto dell'auto-gravità. Per questo motivo la forma 1.23 prende il nome di **spettro di potenza primordiale**.

## Capitolo 2

# Evoluzione di perturbazioni nella distribuzione di materia

Sono state descritte nel primo capitolo alcune proprietà di un Universo che appare altamente strutturato in galassie ed ammassi di galassie su scala piccola e via via sempre più omogeneo ed isotropo con l'aumentare del raggio di osservazione.

Cerchiamo ora di analizzare la complessa interazione tra l'espansione di Hubble e le sue deviazioni dovute alla forza di gravità di strutture di materia, e lo facciamo limitandoci al **regime lineare** delle perturbazioni, ovvero analizzando l'evoluzione del LSS su scale maggiori di  $10 - 20 Mpc$ . Questa approssimazione ci consente di semplificare in maniera considerevole la trattazione. Un'altra approssimazione che facciamo è limitare lo studio ad una descrizione classica Newtoniana della gravità: una buona assunzione in quanto le forze gravitazionali considerate sono deboli e le particelle coinvolte sono principalmente non relativistiche.

L'argomento dell'evoluzione di perturbazioni nel fluido cosmico è di particolare importanza in quanto è la base di partenza per i due argomenti successivi: i campi di velocità peculiare, ovvero essenzialmente deviazioni dal flusso di Hubble dovute a concentrazioni di materia, e vuoti cosmici, zone di Universo con densità di materia quasi nulla generati dalla particolare evoluzione del LSS.

Prima di fornire la trattazione teorica definiamo l'ambiente di partenza, il **fluido cosmico**. Si tratta di immaginare tutte le componenti fisiche dell'Universo (stelle, galassie, pianeti, polveri, fotoni ecc...) distribuite in un substrato continuo.

### 2.1 Teoria Newtoniana delle piccole perturbazioni

Consideriamo la teoria Newtoniana che descrive l'evoluzione di un fluido non relativistico con densità  $\rho$  e velocità  $\vec{v}$  sotto l'influenza di un potenziale gravitazionale  $\phi$ . La descrizione è valida fintantoché il libero cammino medio delle particelle considerate sia molto minore della scala d'interesse. Questo è ben applicabile al gas barionico, in cui le frequenti collisioni stabiliscono localmente l'equilibrio termico; la trattazione tuttavia è sufficientemente generale da valere anche per la componente di materia oscura.

Le equazioni che descrivono il fluido sono: (2.1) l'equazione differenziale della conservazione della massa (*Equazione di continuità*), (2.2) l'equazione di conser-

vazione del moto (*Equazione di Eulero*), (2.3) l'*Equazione di Poisson* che descrive l'influenza del potenziale gravitazionale.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p - \vec{\nabla} \phi \quad (2.2)$$

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho \quad (2.3)$$

a cui associamo l'equazione di stato per un gas la cui pressione dipende solamente dalla densità  $\rho$  e non dall'entropia (condizione di adiabaticità)

$$p = p(\rho, S) \Rightarrow p = p(\rho) \quad (2.4)$$

Le equazioni si riferiscono ad un sistema di coordinate **Euleriano**, in cui le grandezze ( $\rho$ ,  $t$  e  $p$ ) descrivono proprietà di punti fissi nello spazio, e le derivate indicano come quelle grandezze varino in quei punti fissi.

Se consideriamo invece un sistema di riferimento che si muove con l'elemento di flusso in ogni punto del fluido, ci stiamo riferendo ad un sistema di coordinate **Lagrangiano**. Le derivate in quest'ultimo caso vengono indicate con il simbolo di *derivata totale*:

$$\frac{d}{dt} = \left[ \frac{\partial}{\partial t} \right]_{r=const} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})_{t=const} \quad (2.5)$$

Il significato di 2.5 si capisce considerando un campo  $Q(x, t)$  in un fluido: se il campo è statico e il fluido in movimento, allora l'unico termine non nullo in 2.5 è il secondo; viceversa per un campo non costante in un fluido immobile, solo il primo termine contribuisce.

Trasformiamo le equazioni 2.1-2.3 da un sistema di riferimento Euleriano fisso nella griglia del fluido cosmico in un sistema Lagrangiano in moto con l'elemento di fluido. Utilizzando  $\nabla \cdot (\rho \vec{v}) = \rho \nabla \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \nabla \rho$  e relazione 2.5, otteniamo:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \vec{v} \quad (2.6)$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \phi \quad (2.7)$$

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho \quad (2.8)$$

L'approccio per analizzare l'evoluzione di perturbazioni nel fluido in espansione prevede per prima cosa di considerare le soluzioni per un mezzo imperturbato, ovvero in uno stato in cui  $\rho$  e  $p$  assumono gli stessi valori ovunque e la velocità perturbata è  $\delta v = 0$ . Le equazioni riscritte in funzione delle condizioni imperturbate sono:

$$\frac{d\rho_0}{dt} = -\rho_0 \nabla \cdot \vec{v}_0 \quad (2.9)$$

$$\frac{d\vec{v}_0}{dt} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p_0 - \nabla \phi_0 \quad (2.10)$$

$$\nabla^2 \phi_0 = 4\pi G \rho_0 \quad (2.11)$$

Perturbiamo le equazioni. Vogliamo limitare la trattazione al regime lineare: scriviamo quindi gli sviluppi fino al primo ordine.

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \delta\vec{v}, \quad \vec{\rho} = \vec{\rho}_0 + \delta\vec{\rho}, \quad \vec{p} = \vec{p}_0 + \delta\vec{p}, \quad \vec{\phi} = \vec{\phi}_0 + \delta\vec{\phi} \quad (2.12)$$

Una volta sostituite in 2.6, 2.7, 2.8 si sottrae a quest'ultime le soluzioni imperturbate. Per l'equazione di continuità di massa, sottraendo 2.9 a 2.6 abbiamo

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\delta\rho}{\rho_0} \right) = \frac{d\Delta}{dt} = -\nabla \cdot \delta\vec{v} \quad (2.13)$$

dove abbiamo definito per il contrasto di densità:

$$\Delta \equiv \frac{\delta\rho}{\rho_0} \quad (2.14)$$

Perturbando l'equazione di Eulero, invece, omettendo i calcoli si ottiene:

$$\frac{d(\delta\vec{v})}{dt} + (\delta\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}_0 = -\frac{1}{\rho_0} \nabla\delta p - \nabla\delta\phi \quad (2.15)$$

Per quanto riguarda l'equazione di Poisson, abbiamo

$$\nabla^2\delta\phi = 4\pi G(\delta\rho) = 4\pi G\rho_0 \cdot \Delta \quad (2.16)$$

Considerando un fluido cosmico in espansione è utile lavorare in **coordinate comoving**. Abbiamo

$$\vec{x} = a(t)\vec{r}$$

dove  $\vec{r}$  è la coordinata del sistema comoving,  $\vec{x}$  la coordinata propria e  $a(t)$  il fattore di scala cosmologico. Riscrivendo  $\delta\vec{x}$  e  $\vec{v}$  in coordinate comoving otteniamo:

$$\delta\vec{x} = \delta[a(t)\vec{r}] = \vec{r}\delta a(t) + a(t)\delta\vec{r} \quad (2.17)$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{da}{dt}\vec{r} + a(t)\frac{d\vec{r}}{dt} \quad (2.18)$$

dove  $v_0 = H(t)\vec{x} = \frac{da}{dt}\vec{r} = \dot{a}\vec{r}$  rappresenta la componente di velocità dovuta all'espansione di Hubble e il termine di perturbazione a questa velocità è  $\delta\vec{v} = a(t)\frac{d\vec{r}}{dt}$ . Allora possiamo vedere il secondo termine di 2.18 come variazione di velocità misurata in un sistema di riferimento comoving sotto l'effetto di gradienti di pressione e gravità. Se definiamo  $\vec{u} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt}$  come la velocità comoving perturbata, la velocità perturbata nel sistema proprio  $\delta\vec{v}$  è semplicemente  $\delta\vec{v} = a(t)\vec{u}$ .

Trattando 2.15 in funzione di  $\vec{u}$  con passaggi che omettiamo si giunge alla relazione seguente:

$$\boxed{\frac{d\vec{u}}{dt} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)\vec{u} = \frac{d\vec{u}}{dt} + 2H(t)\vec{u} = -\frac{1}{\rho_0 a^2} \nabla_c \delta p - \frac{1}{a^2} \nabla_c(\delta\phi)} \quad (2.19)$$

con  $\vec{\nabla}_c \equiv a(t) \cdot \vec{\nabla}$ . Equazione 2.19 è allora scritta in coordinate comoving.

### 2.1.1 Hubble Drag

Il cosiddetto termine di *Hubble Drag* si ottiene nel momento in cui si pongono a zero tutte le forze agenti in 2.19, il che significa porre a zero i gradienti. Si ottiene:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{u}}{dt} &= -2 \left( \frac{\dot{a}}{a} \right) \vec{u} = -2H(t)\vec{u} \\ \frac{d\vec{u}}{dt} &= -2 \left( \frac{da}{a} \right) \Rightarrow \boxed{\vec{u} \propto a(t)^{-2}}\end{aligned}\tag{2.20}$$

che indica un'a dipendenza importante: se si escludono forze esterne agenti sul campo, le velocità peculiari comoventi  $\vec{u} = \vec{v}_{pec}/a(t)$  decadono nel tempo con la relazione  $\propto a(t)^{-2}$ . Trattando  $\vec{v}_{pec}$  anziché  $\vec{u}$  si ottiene la relazione in funzione delle velocità peculiari in unità proprie:  $\delta\vec{v} = \vec{v}_{pec} \propto a(t)^{-1}$ .

Dalle considerazioni appena svolte è evidente che nel momento in cui si misurano velocità peculiari di galassie diverse da zero è necessario considerare qualche tipo di forza che continuamente le mantiene (o amplifica).

## 2.2 Perturbazioni adiabatiche di densità

In generale due tipologie di perturbazione possono creare fluttuazioni di densità: **perturbazioni di entropia**  $\delta S_i$  che agiscono come variazioni spaziali nella pressione e possono generare fluttuazioni di densità attraverso espansione e compressione adiabatica; **perturbazioni di densità**  $\delta_i$  che, come il nome suggerisce, agiscono inizialmente su densità di materia. Le prime sono anche chiamate *Iso-termiche* o *Isocurve*, le seconde *Isentropiche* o *Adiabatiche*. Dal momento che perturbazioni della metrica spazio-temporale sono associate a perturbazioni nella densità di energia, è naturale associare a perturbazioni *Isentropiche* mutamenti nella curvatura spazio-temporale, al contrario delle *Isotermiche* che non prevedono cambiamenti particolari. Da notare che la distinzione tra le due classi di perturbazioni è associata in particolar modo alle condizioni iniziali delle perturbazioni piuttosto che alla loro evoluzione.

La relazione che lega velocità del suono alle perturbazioni di densità e pressione è  $c_s^2 = \delta p / \delta \rho$  in modo che il differenziale della pressione possa essere scritto come  $\delta p = c_s^2 \delta \rho$ . Calcolando divergenza in coordinate comoving di 2.19 e derivata temporale di 2.13 otteniamo:

$$\nabla \cdot \vec{u} + 2 \left( \frac{\dot{a}}{a} \right) \nabla \cdot \vec{u} = -\frac{c_s^2}{\rho_0 a^2} \nabla_c^2(\delta\rho) - \frac{1}{a^2} \nabla_c^2(\delta\phi)\tag{2.21}$$

e riscrivendo l'equazione di continuità come

$$\frac{d\Delta}{dt} = -\nabla \cdot \delta\vec{v} = -\nabla_c \cdot \vec{u}\tag{2.22}$$

la cui derivata temporale dà:

$$\frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\delta\rho}{\rho} \right) = \frac{d^2\Delta}{dt^2} = -\nabla_c \cdot \vec{u}\tag{2.23}$$

combiniamo le due equazioni sopra:

$$\boxed{\frac{d^2\Delta}{dt^2} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)\frac{d\Delta}{dt} = \frac{c_s^2}{\rho_0 a^2}\nabla_c^2(\delta\rho) + 4\pi G\delta\rho = \frac{c_s^2}{a^2}\nabla_c^2\Delta + 4\pi G\Delta \cdot \rho} \quad (2.24)$$

La forma 2.24 è l'equazione di riferimento per l'evoluzione di generiche perturbazioni in regime lineare. Tuttavia, scritta come in 2.24, è difficile da trattare per le dipendenze di  $\Delta$  da derivate di secondo ordine sia spaziali che temporali. Ci è utile pensare a soluzioni nelle fluttuazioni di campo di densità in termini di forma d'onda piana:

$$\Delta = \Delta_k \exp\left[i(\vec{k}_c \cdot \vec{r} - \omega t)\right] \quad (2.25)$$

con  $\vec{k}_c$  vettore d'onda comoving,  $\vec{r}$  coordinata radiale comoving e  $\omega$  la pulsazione d'onda.

Inserendo 2.25 in 2.24 e ritornando a coordinate fisiche proprie otteniamo una versione più semplice da trattare:

$$\boxed{\frac{d^2\Delta}{dt^2} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)\frac{d\Delta}{dt} = \Delta(4\pi G\rho_0 - k^2 c_s^2)} \quad (2.26)$$

Il vettore d'onda  $\vec{k}$  in coordinate proprie è legato a quello in coordinate comoving da  $\vec{k}_c = a\vec{k}$ .  $\Delta = \Delta_k$  è la componente di Fourier del campo  $\Delta$ . Equazione 2.26 mostra che per ogni componente di Fourier con numero d'onda  $k$ , l'evoluzione dell'ampiezza  $\Delta$  segue 2.26, in particolare se il termine di pressione è trascurabile, l'evoluzione risulta indipendente dal numero d'onda.

### 2.3 Soluzioni particolari dell'equazione perturbativa

Consideriamo equazione 2.26 nella sua forma più generale e nel limite di piccole perturbazioni,  $\Delta \leq 1$ . Inoltre vogliamo trattare perturbazioni su larghe scale spaziali: il numero d'onda è perciò piccolo e il termine  $c_s^2 k^2$  è trascurabile. Assumiamo implicitamente che anche il termine di pressione non influenzi in modo drastico la trattazione: siamo quindi nel caso di quello che viene chiamato *Dusty Universe*, ovvero la situazione, dopo l'era della ricombinazione, in cui non c'è particolare interazione tra materia e fotoni e la materia stessa non esercita alcuna pressione. Allora equazione 2.26 con il solo termine gravitazionale diventa:

$$\frac{d^2\Delta}{dt^2} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)\frac{d\Delta}{dt} = 4\pi G\rho\Delta \quad (2.27)$$

Il fatto che equazione 2.27 non dipenda da coordinate spaziali e la dipendenza da  $\Delta$  nel secondo termine sia semplicemente lineare ci permettono di fattorizzare la dipendenza temporale e spaziale tramite una funzione  $f(t)$  detto **fattore di crescita**.

$$\Delta(t) = f(t) \cdot \Delta(t)|_{t=0} \quad (2.28)$$

Prima di rivolgere lo sguardo al caso generale delle soluzioni di 2.27 è utile analizzare alcuni casi speciali:

- **Modello critico di Einstein-De Sitter:**  $\Omega_m = 1, \Omega_\Lambda = 0$ .

In questo caso abbiamo che

$$\Omega_m = \frac{8\pi G\rho}{3H^2} = 1$$

$$\frac{\dot{a}}{a} = \frac{2}{3t}$$

in modo che

$$4\pi G\rho = \frac{2}{3t^2}$$

per cui equazione 2.27 diventa

$$\frac{d^2\Delta}{dt^2} + \frac{4}{3t} \frac{d\Delta}{dt} - \frac{2}{3t^2}\Delta = 0 \quad (2.29)$$

Si dimostra che soluzioni di 2.29 sono della forma a legge di potenza:  $\Delta \propto f(t) = kt^n$  e inserendo quest'ultima in 2.29 otteniamo  $n = 2/3$  e  $n = -1$ . Solo la prima soluzione prevede un aumento di densità con il tempo,  $\Delta \propto t^{2/3} \propto a = (1+z)^{-1}$ . Quindi

$$\Delta(t) = \frac{\delta\rho}{\rho} \propto t^{2/3} \propto (1+z)^{-1} \quad (2.30)$$

Da notare che la dipendenza delle fluttuazioni di densità con il redshift, quindi con il tempo, è relativamente lenta: nell'interpretazione della formazione di strutture su larga scala questo può essere un problema dato il tempo finito da oggi al Big Bang.

- **Modello di Milne:**  $\Omega_m = 0, \Omega_\Lambda = 0$

In questo caso abbiamo che  $\rho = 0$  e  $\frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{t}$ . Le soluzioni sono anche in questo caso a legge di potenza e risolvendo

$$\frac{d^2\Delta}{dt^2} + \frac{2}{t} \frac{d\Delta}{dt} = 0 \quad (2.31)$$

si ottiene  $n = 0$  che corrisponde a un campo di densità  $\Delta$  imperturbato ed immobile nel tempo, che non si amplifica né si smorza.

Sappiamo che per una buona porzione dell'era dominata dalla materia, il modello di Einstein-de Sitter approssima ragionevolmente bene la dinamica dell'Universo, con l'ampiezza delle fluttuazioni di densità che aumentano linearmente con  $a(t)$ . In ere successive la dinamica si trasforma progressivamente seguendo il modello di Milne con l'ampiezza delle perturbazioni che aumenta molto lentamente. Si può dimostrare che il cambio di modello da Einstein de Sitter a Milne avviene in un'epoca corrispondente a

$$z \approx \Omega_m^{-1} - 2$$

ovvero per  $\Omega_m = 0.3$  a  $z \approx 1$ . In figura 2.1 è riportato l'andamento del contrasto di densità  $\Delta$  per vari valori di  $\Omega_m$  mantenendo  $\Omega_\Lambda = 0$

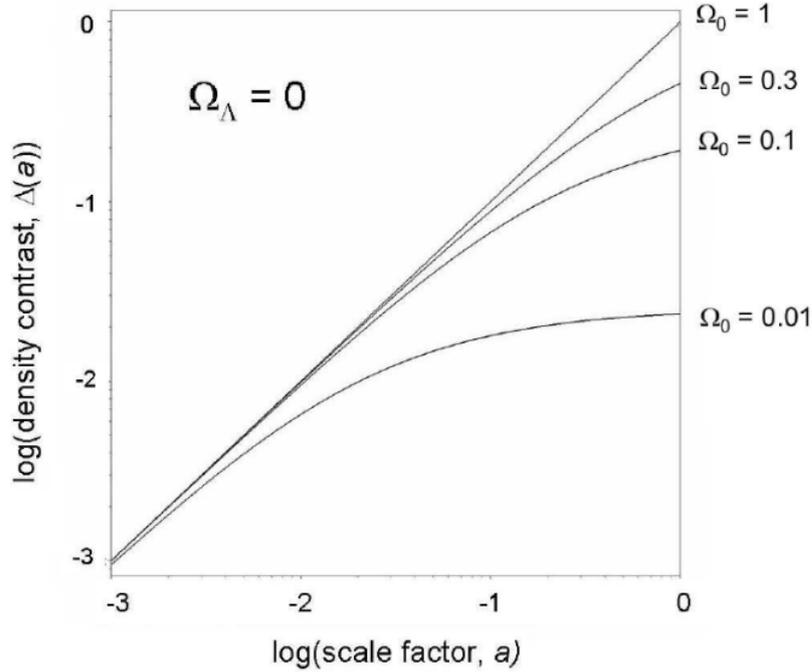


Figura 2.1: Evoluzione del parametro di contrasto  $\Delta$  in funzione del fattore di scala  $a(t)$  per vari valori di  $\Omega_m$ .  $\Delta = 10^{-3}$  a  $z = 1000$  è assunto in tutti i casi.

### 2.3.1 Soluzione perturbata di Friedmann

Volendo analizzare la crescita delle perturbazioni di materia in maniera più generale, dobbiamo necessariamente prendere in considerazione un Universo con energia del vuoto non nulla,  $\Omega_\Lambda \neq 0$ . L'equazione differenziale di partenza è la 2.27, ma riscrivendo il termine di densità otteniamo

$$\frac{d^2\Delta}{dt^2} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)\frac{d\Delta}{dt} = \frac{3\Omega_m H_0^2}{2} a^{-3}\Delta \quad (2.32)$$

con il parametro di Hubble scritto nel modo seguente:

$$\frac{\dot{a}}{a} = H_0 \left[ \Omega_m \left( \frac{1}{a} - 1 \right) + \Omega_\Lambda (a^2 - 1) + 1 \right]^{0.5} \quad (2.33)$$

Per trovare soluzioni generali dell'equazione 2.32 si utilizza un metodo, introdotto da Zeldovich e Barenblatt (1958) (e ripreso da Peebles e Peacock) chiamato *soluzione perturbata di Friedmann* che tratta la perturbazione come una porzione isolata di Universo in cui valgono le equazioni dinamiche dove l'auto-gravitazione dovuta all'eccesso di densità rallenta l'espansione di Hubble. In formule, si traduce in un fattore di scala  $a_p(t)$  ridotto di una quantità  $\epsilon$ :

$$a_p(t) = a(t)[1 - \epsilon(x, t)] \quad (2.34)$$

Dalla dipendenza  $\rho \propto a^{-3}$  otteniamo  $\Delta(t) = 3\epsilon(t)$ . Le soluzioni per  $\Delta$  vengono cercate tra le soluzioni dell'equazione di Friedmann ed espresse tramite  $a_p(t, \alpha)$  con  $\alpha$  rappresentante i parametri che deviano dalla soluzione imperturbata. Allora possiamo scrivere

$$\Delta(t) = -\frac{3}{a_p(t)} \frac{\partial a_p(t)}{\partial \alpha} \delta\alpha \quad (2.35)$$

Tramite l'equazione di Friedmann scriviamo un'espressione per il tempo che tenga conto delle perturbazioni sul fattore di scala e sul tempo cosmico:

$$t = \int_0^a \frac{da_p}{\dot{a}} + \Delta t_c = \int_0^a \frac{da_p}{(\pi G \rho_0 / 3a + \Lambda a^2 / 3 + k_p)} + \Delta t_c \quad (2.36)$$

dove  $\Delta t_c$ , una costante di integrazione, è il ritardo temporale indotto dalla perturbazione, e  $k_p$ , seconda costante di integrazione, è la deviazione dalla curvatura geometrica, sempre indotta dalla perturbazione. Differenziando 2.36 rispetto ai due parametri perturbativi  $k_p$  e  $\Delta t_c$  e sostituendo 2.35 otteniamo la seguente espressione per  $\Delta(a)$

$$\Delta(a) = -\frac{3\dot{a}k_p}{2a} \int_0^a \frac{da'}{\dot{a}^3} = \frac{5\Omega_m}{2} \left( \frac{d \ln a}{dt} \right) \int_0^a \frac{da'}{\dot{a}(a')^3} \quad (2.37)$$

Gli integrali di 2.37 possono essere risolti analiticamente, e per essi esiste una buona approssimazione trovata da Carroll (1992) valida al tempo attuale:

$$\Delta(a=1)|_{t=t_0} = \frac{5\Omega_m}{2} \left[ \Omega_m^{4/7} - \Omega_m + \left(1 + \frac{\Omega_m}{2}\right) \left(1 + \frac{\Omega_\Lambda}{70}\right) \right]^{-1} \quad (2.38)$$

Soluzioni grafiche per vari valori di  $\Omega_m$  e  $\Omega_\Lambda$  sono visibili in figura 2.2

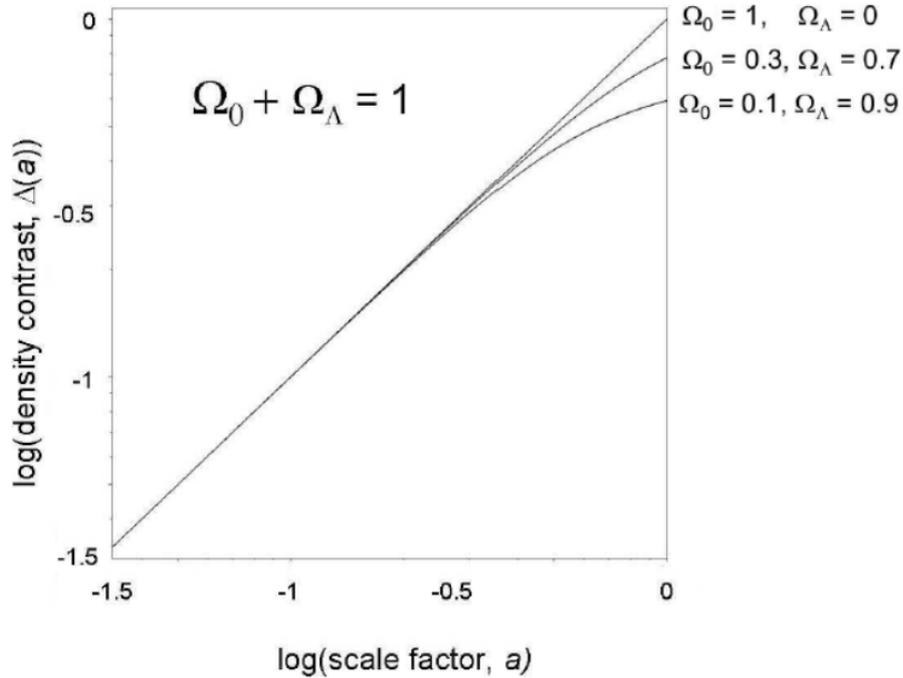


Figura 2.2: Evoluzione del parametro di contrasto  $\Delta$  in funzione del fattore di scala  $a(t)$  per valori tali che  $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$

Rispetto al grafico 2.1, notiamo che il caso con energia oscura  $\Lambda$  prevede una crescita nelle perturbazioni molto maggiore rispetto al caso di sola densità di materia. Nel caso di Universo piatto,  $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$ , la scala temporale è “allargata”

per cui le perturbazioni hanno avuto più tempo per espandersi, di conseguenza il modello Einstein de Sitter è valido per una scala di redshift maggiore, fino circa a  $z \approx 0.3$ , momento in cui sembra che il termine di densità di energia oscura diventi dominante su  $\Omega_m$ .

**Cenni di teoria perturbativa in un fluido relativistico** I modelli attuali ci indicano che nelle prime ere dell'evoluzione cosmologica l'universo era largamente dominato da un fluido di particelle relativistiche. La trattazione svolta finora, limitata ad uno sviluppo classico Newtoniano, non si rivela efficace nel descrivere la dinamica di quel periodo. Tuttavia, dato che i campi gravitazionali si rivelano deboli anche nell'era radiativa, alle equazioni Newtoniane è sufficiente associare un termine di sorgente relativistica.<sup>1</sup>

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \nabla \cdot \left[ \left( \rho + \frac{3p}{c^2} \right) \vec{v} \right] \quad (2.39)$$

$$\left( \rho + \frac{3p}{c^2} \right) \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right) = -\nabla p - \left( \rho + \frac{3p}{c^2} \right) \nabla \phi \quad (2.40)$$

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \left( \rho + \frac{3p}{c^2} \right) \quad (2.41)$$

Le equazioni sopra non sono altro che quelle di conservazione viste a inizio capitolo con il termine di densità  $\rho + 3p/c^2$  al posto di  $\rho$ . Usando  $p = \frac{\rho c^2}{3}$  caratteristico di un fluido relativistico, otteniamo le equazioni, scritte in forma Lagrangiana:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{4}{3}\rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \quad (2.42)$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{3}{4\rho} \nabla p - \nabla \phi \quad (2.43)$$

$$\nabla^2 \phi = 8\pi G \rho \quad (2.44)$$

L'equazione fondamentale 2.26 diventa

$$\frac{d^2 \Delta}{dt^2} + 2 \left( \frac{\dot{a}}{a} \right) \frac{d\Delta}{dt} = \Delta \left( \frac{32\pi}{3} G \rho_0 - k^2 c_s^2 \right) \quad (2.45)$$

con la differenza dal caso classico di un solo fattore numerico.  $\rho_0$  si riferisce in questo caso alla densità di materia-energia della componente relativistica. La lunghezza di Jeans è leggermente modificata:

$$\lambda_J = \frac{2\pi}{k_J} = c_s \left( \frac{3\pi}{8G\rho} \right)^{0.5} \quad (2.46)$$

Prima dell'equivalenza, su scale molto maggiori di  $\lambda_J$ , abbiamo le dipendenze  $a \propto t^{0.5}$  e  $\rho \propto a(t)^{-4}$ . Le soluzioni per  $\Delta \propto t^n$  si ottengono per  $n = \pm 1$ , per cui il contrasto di densità cresce come segue:

$$\boxed{\Delta \propto t \propto a^2 \propto (1+z)^2} \quad (2.47)$$

<sup>1</sup>Allo stesso risultato si sarebbe giunti utilizzando fin da subito un approccio completamente relativistico.

## Capitolo 3

# Campi di velocità peculiare

Fin dai primi anni '80 è apparso evidente che misurare le velocità peculiari di gruppi di galassie, ovvero le deviazioni dal normale flusso di Hubble su larga scala, poteva dare importanti informazioni sulla distribuzione di materia del LSS. Infatti in uno scenario di instabilità gravitazionale, la velocità di una particella test è indotta direttamente dal campo di densità di massa sottostante. Quindi, se le velocità peculiari non sono fortemente influenzate da processi non gravitazionali, il campo di velocità tracciato dalle galassie può essere usato per dedurre informazioni su fluttuazioni di densità di massa dell'Universo.

Come abbiamo già visto nei capitoli precedenti, le scale spaziali entro cui ci aspettiamo che il parametro  $\Omega_\Lambda$  sia rilevante sono nell'ordine delle centinaia o migliaia di Mpc. Su queste scale, le fluttuazioni di materia sono minime, per cui possiamo escludere il parametro di energia oscura come causa della formazione di campi di velocità peculiare.<sup>1</sup> Possiamo fin da subito individuare il parametro  $\Omega_m$  come principale contributo allo sviluppo di campi di velocità peculiare.

### 3.1 Moti peculiari come deviazioni del flusso di Hubble

Osservando gli spettri di galassie è possibile determinare le relative velocità radiali. Lo strumento fondamentale per l'analisi è l'effetto Doppler, che in forma non relativistica, ovvero per velocità  $v$  molto minori della velocità della luce  $c$ , si esprime come

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda_o - \lambda_e}{\lambda_e} = \frac{\nu_e - \nu_o}{\nu_o} \simeq \frac{v}{c} \equiv z \quad (3.1)$$

dove  $\lambda_o$  e  $\lambda_e$  sono rispettivamente le lunghezze d'onda osservate e quelle emesse (di laboratorio) e idem con le frequenze  $\nu$ . Nel caso di  $v$  negativa si assiste ad un **blueshift** (come avviene per le componenti del Gruppo Locale), con  $v$  positiva a **redshift**. Il contributo importante di Edwin Hubble<sup>2</sup> si concretizza nell'aver scoperto sperimentalmente una semplice relazione tra redshift spettroscopico e distanza della sorgente:

---

<sup>1</sup> $\Omega_\Lambda$  ha senza dubbio avuto un ruolo importante indirettamente, per quanto riguarda la storia di formazione e ed evoluzione delle strutture

<sup>2</sup>Edwin Hubble, *A Relation between Distance and Radial Velocity among Extra-Galactic Nebulae*, in *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, Issue 3, 15 marzo 1929, pp. 168-173.

$$cz \approx v \simeq H_0 \cdot d \quad (3.2)$$

$H_0$  è la costante di Hubble e il valore attuale stimato con metodi di distanza delle cefeidi nell'ammasso della Vergine è

$$H_0 \simeq 71.9 \pm 2.7 \text{ km s}^{-1}/\text{Mpc}$$

La velocità radiale di una galassia è dovuta in parte all'espansione di Hubble e in parte al suo moto peculiare. Per separare le due componenti è necessario conoscere la distanza  $\bar{x}$  della sorgente, in unità proprie, in modo da stimare la velocità di recessione  $H_0 x$ . Una volta determinata la distanza, per esempio con il metodo Tully-Fisher per galassie spirali o con la relazione diametro-dispersione di velocità ( $D_n - \sigma$ ) per galassie ellittiche, la velocità peculiare è descritta dalla relazione

$$\boxed{v_{pec} = v_{redshift} - v_{Hubble}} \quad (3.3)$$

con  $v_{redshift} = c \cdot z$  e  $v_{hubble} = H_0 x$ . Viceversa, nel momento in cui si ottengono misure di redshift e stime di velocità peculiare, è possibile costruire una mappatura 3D dell'Universo, invertendo 3.3:

$$d = \frac{v_{redshift} - v_{pec}}{H_0}$$

**Moti peculiari e LSS** È stata fatta l'ipotesi in passato che le strutture del LSS, quali filamenti, accumuli di materia e vuoti, possano essere generati dall'effetto cumulativo dei moti peculiari su larghe scale.

Tenendo conto di una dimensione media dei vuoti attorno al centinaio di Megaparsec, possiamo stimare la velocità necessaria alla loro formazione:

$$v_{pec} \approx \frac{100 \text{ Mpc}}{t_H} \approx \frac{100 \text{ Mpc}}{70 \text{ km s}^{-1}/\text{Mpc}} \approx 7000 \text{ km s}^{-1}$$

La teoria richiederebbe enormi velocità. Le osservazioni che disponiamo attualmente sono fortemente inconsistenti con questa stima, essendo i risultati dell'ordine di qualche centinaio di  $\text{km s}^{-1}$  al massimo.

Resta quindi l'opzione che la struttura su larga scala sia invece frutto di zone di Universo in cui la formazione di galassie è risultata più efficiente nel tempo (*filamenti*, *sheets* e *walls*) e zone in cui la carenza di formazione ha creato vuoti. Di conseguenza i moti peculiari vengono generati dall'effetto gravitazionale differenziato in base alle disomogeneità delle strutture di materia.

**Teorema del Viriale Cosmico** L'assunzione di equilibrio gravitazionale stabile che si applica ai singoli ammassi di galassie può essere esteso in senso statistico a tutto l'Universo. È un'ipotesi forte e, come vedremo, non corretta se non in prima approssimazione, ma è utile per dare un'idea del legame tra velocità peculiare e densità di massa.

Il teorema del Viriale lega due componenti fisiche: l'auto-gravitazione della distribuzione di massa considerata e l'energia cinetica delle particelle di test.

Per la prima, stimiamo che la massa in eccesso che produce il campo di velocità peculiare sia rappresentata dalla funzione di correlazione spaziale  $\xi(r)$  (la stessa

vista nel capitolo 1, misura l'eccesso di densità di materia rispetto al campo di densità omogeneo sottostante). Il termine cinetico è semplicemente  $v_{pec} \approx 2GM/r$ .

$$\begin{aligned} M(r) &\simeq \frac{4\pi}{3}\rho_0 r^3 \xi(r) \simeq \frac{4\pi}{3}\rho_0 r^3 \left(\frac{r}{8.3h^{-1}}\right)^{-1.8} \\ v_{pec}^2 &\simeq \frac{8\pi G}{3}\rho_0 r^2 \left(\frac{r}{8.3h^{-1}}\right)^{-1.8} \simeq \frac{8\pi G}{3}\Omega_m \rho_c r^2 \left(\frac{r}{8.3h^{-1}}\right)^{-1.8} \\ v_{pec} &\approx (1000 \text{ km s}^{-1})(\Omega_m)^{0.5} \left(\frac{r}{h^{-1} \text{ Mpc}}\right)^{0.1} \end{aligned}$$

L'ultima relazione può essere invertita per ottenere la dipendenza del parametro di densità dalla velocità misurata.

$$\Omega_m \approx \left(\frac{v_{pec}}{1000 \text{ km s}^{-1}}\right)^2 \left(\frac{r}{\text{Mpc}}\right)^{-0.2} \quad (3.4)$$

Inserendo tipici valori ottenuti osservando il Gruppo Locale otteniamo

$$\Omega_m \approx 0.16$$

Seppur non in linea con le stime attuali, il metodo del Teorema del Viriale ci è utile per evidenziare il legame tra velocità misurabili e parametro di densità di materia. Inoltre non è affetto da bias di massa:  $M$  racchiude tutta la massa che ha influenza dinamica, non solamente quella luminosa.

### 3.2 Moti di velocità peculiare

In accordo con la teoria dell'instabilità gravitazionale, la struttura su larga scala e i moti peculiari vedono la loro origine in fluttuazioni primordiali di piccola ampiezza nella materia generate prima della ricombinazione. Amplificate dalla gravità, queste fluttuazioni si manifestano in campi di densità su larga scala e campi di velocità.

L'assunzione principale che viene fatta nella teoria perturbativa è la proprietà del campo di velocità di essere irrotazionale,  $\nabla \times \vec{v} = 0$ . La condizione impone che il campo  $\vec{v}$  derivi da un potenziale scalare  $\Phi$ ,  $\vec{v} = -\vec{\nabla}\Phi$ . Se è vero che il moto potenziale predomina su larga scala, come dimostreremo tra poco, allora le componenti tangenziali del campo di velocità peculiare si possono derivare utilizzando

$$\vec{v}(r) = -\vec{\nabla}\Phi(r) \quad (3.5)$$

con il potenziale calcolato integrando la componente radiale della velocità,

$$\Phi(r) = - \int_0^r u(r', \theta, \phi) dr' \quad (3.6)$$

3.5 e 3.6 saranno di fondamentale utilizzo nel metodo POTENT descritto nella sezione 3.3.

**Moti rotazionali** Riprendiamo la formula 2.19, con il termine di pressione nullo in quanto trattiamo componenti non relativistiche come galassie e materia oscura, e riscriviamola:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} + 2\frac{\dot{a}}{a}\vec{u} = -\frac{1}{a^2}\nabla_c\delta\phi \quad (3.7)$$

essendo  $\vec{u}$  la componente di velocità peculiare in coordinate comoving, che separiamo in una componente  $\vec{u}_{\parallel}$  parallela al gradiente del potenziale gravitazionale perturbato  $\nabla_c\delta\phi$  e in una perpendicolare a esso  $\vec{u}_{\perp}$ . Quest'ultima componente racchiude i moti rotazionali del campo gravitazionale, chiamati *vortici*. Essi obbediscono a 3.7 ma essendo indipendenti dal gradiente gravitazionale decadono molto velocemente (seguendo l'*Hubble Drag*), infatti ponendo  $\nabla_c\delta\phi = 0$  otteniamo

$$\frac{d\vec{u}_{\perp}}{dt} = -2\frac{\dot{a}}{a}\vec{u}_{\perp} \Rightarrow \vec{u}_{\perp} \propto a(t)^{-2} \quad (3.8)$$

**Moti potenziali** I moti lungo la direzione del gradiente del campo di gravità sono mantenuti dal campo stesso. Partiamo considerando l'equazione di Poisson, scritta in forma comoving o in coordinate proprie.

$$\nabla^2\delta\phi = 4\pi G\delta\rho = 4\pi G\rho\Delta; \quad \nabla_c^2\delta\phi = 4\pi Ga^2\delta\rho \quad (3.9)$$

Ricordando che la densità di materia è  $\rho = \Omega_m\rho_c = \frac{3\Omega_m H^2}{8\pi G}$ , riscriviamo la condizione di Poisson,

$$\nabla_c^2\delta\phi = 4\pi G\left(\frac{3\Omega_m H^2}{8\pi G}\right)a^2\Delta = \frac{3}{2}\Omega_m H^2 a^2\Delta \quad (3.10)$$

Come abbiamo visto, il campo di velocità è irrotazionale. Sarebbe utile legare il potenziale scalare  $\Phi_v$  da cui deriva alle fluttuazioni di densità. Allora si ha che

$$\vec{v}_{pec} = -\frac{\nabla_c\Phi_v}{a(t)} = -\nabla\Phi_v \quad (3.11)$$

la cui divergenza dà

$$\nabla \cdot \vec{v}_{pec} = -\nabla^2\Phi_v = -\frac{\nabla_c^2\Phi_v}{a^2(t)} \quad (3.12)$$

Riprendiamo 2.13, equazione di continuità della distribuzione perturbata di massa,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta\rho}{\rho_0}\right) = \frac{d\Delta}{dt} = -\nabla \cdot \vec{v}_{pec} = -\frac{1}{a}\nabla_c \cdot \vec{v}_{pec} \quad (3.13)$$

ed inserendo in quest'ultima 3.12, otteniamo  $\nabla_c^2\Phi_v = a^2\dot{\Delta}$ , che moltiplicando e dividendo per  $\Delta$  e  $H = \dot{a}/a$ , restituisce

$$\nabla_c^2\Phi_v = H\frac{a}{\dot{a}}a^2\frac{\dot{\Delta}}{\Delta}\Delta = H(t)\mathfrak{S}(\Omega_m)a^2\Delta \quad (3.14)$$

dove abbiamo introdotto l'*indice di fattore di crescita*  $\mathfrak{S}(\Omega_m)$ , che tiene conto dell'evoluzione del contrasto di densità di materia, definito come

$$\boxed{\mathfrak{S}(\Omega_m) \equiv \frac{a \dot{\Delta}}{\dot{a} \Delta} = \frac{a}{\Delta} \frac{d\Delta}{da} = \frac{d \ln \Delta}{d \ln a}} \quad (3.15)$$

L'indice appena introdotto ha notevole importanza: indica che il campo di velocità è frutto di perturbazioni del potenziale gravitazionale integrate nel tempo, e non solamente al tempo attuale.

L'approssimazione più valida per  $\mathfrak{S}(\Omega_m)$  è fornita da Peebles (1980),

$$\mathfrak{S}(\Omega_m) \simeq \Omega_m^{0.6} \quad (3.16)$$

valore che è indipendente da  $\Omega_\Lambda$ .

Unendo 3.15 e l'equazione di Poisson, 3.10, abbiamo

$$\nabla_c^2 \Phi_v = \left[ \frac{3\Omega_m H}{2\mathfrak{S}(\Omega_m)} \right]^{-1} \nabla_c^2 \delta\phi \quad (3.17)$$

per la quale una soluzione è

$$\Phi_v = \left[ \frac{3\Omega_m H}{2\mathfrak{S}(\Omega_m)} \right]^{-1} \delta\phi \quad (3.18)$$

Applicando il gradiente otteniamo l'importante relazione:

$$\boxed{\vec{v}_{pec} = \nabla \Phi_v = \frac{2\mathfrak{S}(\Omega_M)}{3\Omega_m H_0} \nabla \delta\phi = \frac{2\mathfrak{S}(\Omega_M)}{3\Omega_m H_0} \vec{g}} \quad (3.19)$$

con  $\vec{g} = -\nabla \delta\phi = -\frac{1}{a(t)} \nabla_c \delta\phi$ . Possiamo ottenere anche un'altra importante relazione calcolando il gradiente della velocità:

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{v}_{pec} = -H(t) \mathfrak{S}(\Omega) \Delta} \quad (3.20)$$

### 3.2.1 Moti su piccola scala. Virgo Infall

L'applicazione più immediata della teoria dei campi di velocità peculiare su piccola scala riguarda senza dubbio la perturbazione del flusso di Hubble dovuta al super-ammasso centrato nel cluster della Vergine ad una velocità **eliocentrica**<sup>3</sup>  $cz \simeq 1000 \text{ km s}^{-1}$ .

Questa concentrazione di densità, approssimabile come sferica, dovrebbe ridurre la velocità di espansione del nostro sistema di riferimento rispetto all'ammasso della Vergine, di conseguenza noi osservatori terrestri misuriamo una velocità di recessione più piccola di quella predetta data la distanza.

Scrivendo l'accelerazione di gravità come

$$\vec{g} = \frac{4\pi G}{3} \frac{r^3 \Delta \cdot \rho_0}{r^2} \quad (3.21)$$

e riprendendo la formula della velocità peculiare 3.19,

$$\vec{v}_{pec} = \frac{2\mathfrak{S}(\Omega_M)}{3\Omega_m H_0} \vec{g} = \frac{\mathfrak{S}(\Omega_m)}{3} H_0 r \cdot \Delta \quad (3.22)$$

Dal momento che  $H_0 r = v_{Hubble}$  è la velocità di recessione di Hubble alla distanza  $r$ , abbiamo che

$$\frac{\vec{v}_{pec}}{v_{Hubble}} = \frac{|\vec{v}_{redshift} - v_{Hubble}|}{v_{Hubble}} = \frac{\mathfrak{S}(\Omega_m)}{3} \Delta \simeq \frac{\Omega_m^{0.6}}{3} \Delta \quad (3.23)$$

Da notare che in 3.23 la deviazione dal flusso di Hubble, espresso come rapporto tra velocità peculiare e velocità di Hubble, non dipende dalla scala spaziale ma unicamente dal parametro di densità  $\Omega_m$  e dalla percentuale di di fluttuazione di densità.

Equazione 3.23 è utile se utilizzata al contrario. Dalle distribuzioni 3D delle galassie nell'ammasso della Vergine è possibile quantificare la deviazione di densità di materia rispetto alla media,  $\Delta \approx 2.5$ . Da misure spettroscopiche invece si ricava  $cz$  e dalla distanza ottenuta con osservazioni di Cefeidi da parte di HST ( $d \simeq 18.5 \text{ Mpc}$ ) otteniamo la velocità di Hubble di circa  $v_H \approx 1300 \text{ km s}^{-1}$ . L'*infall peculiar velocity* è allora circa  $300 \text{ km s}^{-1}$ . Inserendo queste informazioni in 3.23 abbiamo una stima del parametro di densità di materia,  $\Omega_m \approx 0.18$ .

Il risultato è limitato dalla non-linearità su scale così piccole e dal fatto che il nostro sistema di riferimento è situato in una zona, seppur distante, che risente della perturbazione. In figura 3.1 è rappresentato l'ammasso differenziato per velocità e per magnitudine apparente.

L'analisi del *Virgo-centric Infall* è senza dubbio interessante, ma di difficile applicazione all'Universo nella sua interezza data l'ipotesi forte di simmetria sferica.

<sup>3</sup>Parliamo di velocità **eliocentrica** se riferita ad un osservatore posto sulla Terra (la correzione, ovvero il moto del pianeta attorno al Sole,  $\sim 28 \text{ km s}^{-1}$ , è trascurabile). Se riferita al sistema di riferimento del **gruppo locale**, allora bisogna correggere le misure di velocità di circa  $300 \text{ km s}^{-1}$ , ossia la velocità di rotazione del Sole attorno al centro galattico. Infine se si pone come sistema di riferimento la **radiazione cosmica di fondo** (CMB), le stime della velocità della Terra rispetto a esso danno  $v \approx 370 \text{ km s}^{-1}$  in direzione galattica  $l = 264 \text{ } b = 48$

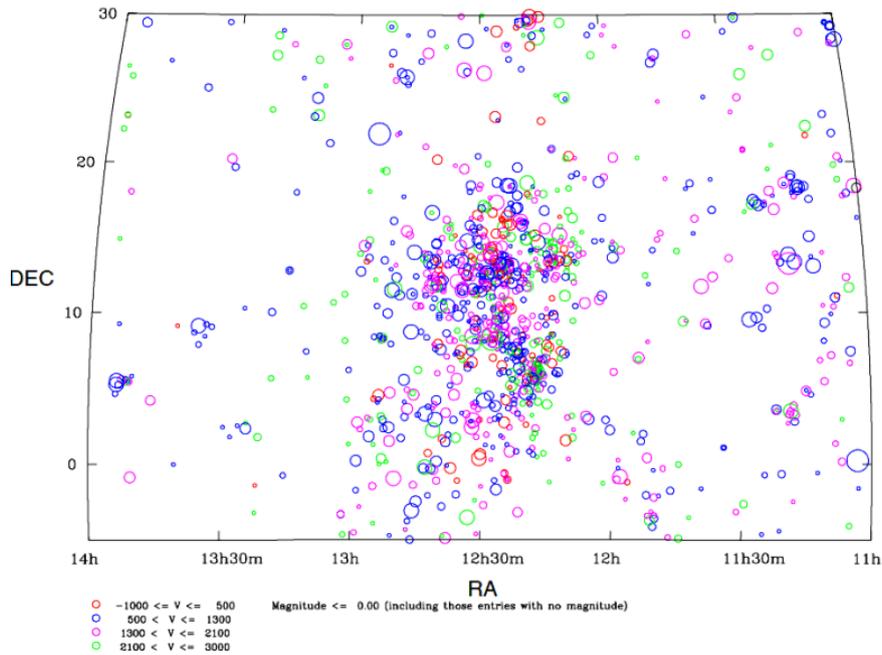


Figura 3.1: Distribuzione di galassie nella direzione dell’ammasso della Vergine. Ogni cerchio rappresenta una galassia, il diametro essendo proporzionale alla magnitudine apparente. Gli intervalli di velocità di recessione sono scritti sotto la figura.

### 3.2.2 Moti su grande scala. Il dipolo cosmico

Nel momento in cui espandiamo l’osservazione verso scale più grandi, le anisotropie di densità di materia  $\Delta$  diventano più piccole, e la stima di  $\Omega_m$  si fa più affidabile.

Consideriamo il contributo gravitazionale di una concentrazione di massa distribuita su un *muro* di una struttura su larga scala (*Cosmic Wall*).

La velocità peculiare che un osservatore misura rispetto ad un sistema di riferimento posto in una posizione generica  $\vec{x}$  deriva da 3.19,

$$\vec{v}_{pec} = \frac{H_0 \mathfrak{S}(\Omega_m)}{4\pi} \int \frac{\Delta(\vec{r})}{r^2} \hat{r} d^3r \quad (3.24)$$

Si noti che  $\Delta(\vec{r})$  si riferisce a tutta la materia non relativistica che genera moti peculiari, inclusa materia oscura.

Nelle survey di galassie, però, abbiamo a che fare solamente con la materia luminosa. La relazione tra  $\Delta_{mass}$  e  $\Delta_{light}$  si scrive in funzione di un parametro di bias  $b$ ,

$$\Delta_{mass} = \frac{\Delta_{light}}{b} \quad (3.25)$$

in modo che 3.24 diventi

$$\vec{v}_{pec} = \frac{H_0}{4\pi} \frac{\Omega_m^{0.6}}{b} \int \frac{\Delta_{light}(\vec{r})}{r^2} \hat{r} d^3r = \frac{H_0\beta}{4\pi} \int \frac{\Delta_{light}(\vec{r})}{r^2} \hat{r} d^3r \quad (3.26)$$

con  $\beta \equiv \frac{\Omega_m^{0.6}}{b}$

Il significato di 3.26 dipende dalle informazioni di partenza: data una mappatura della distribuzione galattica  $\Delta(r)$ , per esempio, possiamo predire il campo indotto di velocità. Un'applicazione importante a riguardo è la determinazione di  $\Omega_m$  a partire dalla velocità peculiare del nostro sistema di riferimento rispetto alla radiazione cosmica di fondo. Infatti osservazioni angolari delle anisotropie della **CMB** (*Cosmic Microwave Background*) ci consentono di misurare con precisione direzione ed intensità della velocità della Terra. Una volta corretto il moto sottraendo le componenti di velocità del Sole nella Galassia e della Galassia nel Gruppo Locale, abbiamo il moto assoluto del sistema di riferimento locale.

Di conseguenza, assumendo di conoscere  $\vec{v}_{pec}$  in 3.26, con un modello di distribuzione di materia  $\Delta(r)$  è possibile risalire ad una stima del parametro  $\beta$ , ed infine a  $\Omega_m$ .

Questo approccio è stato seguito da diversi autori, non sempre con risultati globalmente validi. Per esempio l'utilizzo del catalogo IRAS (circa 20 mila galassie limitate in flusso di distanza media 400 Mpc) ha portato ad una stima piuttosto alta del parametro  $\beta$ ,  $\beta = \Omega_m^{0.6}/b_{IRAS} \simeq 0.85 \pm 0.15$ , dove  $b_{IRAS}$  è il parametro di bias delle galassie di IRAS, il che porta alla stima  $\Omega_m \sim 0.7$ . Studi successivi hanno portato alla conclusione che i motivi della sovra-stima di  $\Omega_m$  sono da ricercare nella tendenza del campione di IRAS ad evitare ammassi e super ammassi (regioni in cui si concentra gran parte della materia gravitazionale) perché poveri di gas, polveri e formazione stellare. Analisi di clustering dei campioni di IRAS hanno confermato quest'ipotesi permettendo di correggere la stima fino ad ottenere  $\Omega_m = (0.85b_{IRAS})^{1/0.6} \simeq 0.32$ .

## 3.3 Il metodo POTENT

### 3.3.1 Determinazione iterativa dei campi di velocità peculiare

Come abbiamo accennato in sezione 3.1, su grandi scale spaziali (sopra al centinaio di Mpc) la relazione tra lo spazio del redshift e quello reale è definito in maniera diretta dalla legge di Hubble (eq. 3.2). Tuttavia, su scale spaziali più piccole, instabilità gravitazionali danno luogo a velocità peculiari galattiche (eq. 3.3) che devono essere prese in considerazione e corrette nell'ottica di compiere una corretta analisi cosmologica. A tal proposito la mappatura della distribuzione delle galassie e dei loro campi di velocità peculiare costituisce un'importante area di ricerca nella cosmologia moderna. In particolare, le misure di moti peculiari forniscono uno strumento fondamentale per sondare la distribuzione di massa nell'Universo locale, grazie specialmente a survey in redshift che rappresentano una delle fonti più importanti a tal scopo. Mappe 3D di campi di densità di materia da survey in redshift sono cruciali per studi su concentrazioni di massa, spettro di potenza di massa, analisi dinamiche per testare il legame tra materia luminosa ed oscura, e in molte aree di interesse cosmologico.

L'analisi del metodo POTENT<sup>4</sup> si propone di raggiungere almeno tre obiettivi:

- Testare il modello di instabilità gravitazionale come causa del moto peculiare
- Acquisire informazioni più precise per la stima del parametro  $\Omega_m$
- Creare parallelamente mappe 3D di velocità peculiari e di distribuzione di materia riguardo l'universo locale. Misure accurate di velocità peculiare permettono di ottenere valori reali di distanze cosmologiche da osservazioni spettroscopiche.

Nel regime lineare di instabilità gravitazionale, abbiamo già visto che è possibile ottenere una semplice relazione tra velocità peculiare  $v_{pec}$ , e contrasto di densità di massa (barionica più oscura in questo caso)  $\Delta$ . La relazione valida nell'universo locale è una modifica di 3.20:

$$\nabla \cdot \vec{v}_{pec} = -a_0 H_0 \Omega_m^{0.6} \Delta(\vec{x}) \quad (3.27)$$

Equazione 3.27 viene utilizzata per effettuare quella che viene chiamata *comparazione densità-densità*, svolta in maniera iterativa nel modo seguente:

1. Si costruisce il campo 3D di velocità ricavate dalle componenti radiali osservate dalle velocità delle galassie della survey
2. Si differenzia  $v_{pec}(\vec{x})$  utilizzando 3.27 per derivare  $\Delta_g$ , contrasto di densità galattica, legato al valore di contrasto globale di materia  $\Delta_m$  tramite la relazione 3.25,  $\Delta_g = b_g \Delta_m$ , con  $b_g$  parametro di bias galattico. Quest'ultima considerazione porta a riscrivere 3.27:

$$\nabla \cdot \vec{v}_{pec} = - \left[ \frac{a_0 H_0 \Omega_m^{0.6}}{b_g} \right] \Delta_g(\vec{x}) \quad (3.28)$$

3. Comparare la mappa di contrasto di densità ottenuta  $\Delta_g$  con il campo di densità di galassie osservato

Il primo punto è il meno banale da implementare e richiede alcuni presupposti teorici aggiuntivi.

Abbiamo visto nel paragrafo 3.2 che l'importante assunzione di irrotazionalità del campo di velocità porta a due importanti conclusioni: la prima è che qualsiasi moto vorticoso primordiale è destinato a dissiparsi nel tempo con l'espansione di Hubble, tanto che, sempre in contesti di scale spaziali grandi, attualmente possiamo considerare solamente flussi laminari; la seconda è che equazione 3.5 assicura che il campo di velocità  $\vec{x}$  sia derivabile da un campo scalare  $\Phi(x)$ .

Per misurare  $\Phi(x)$  è necessario innanzitutto ottenere la componente radiale del campo di velocità, definito da  $u(r, \theta, \phi)$ , unica componente ricavabile direttamente da misure di redshift sottraendo alla velocità di recessione  $cz$  la componente del

---

<sup>4</sup>Il metodo fu creato e sviluppato principalmente da A. Dekel, E. Bertsinger e S. M. Faber dal 1990 in poi, basandosi su una serie di survey svolte fino a quel momento.

nostro moto locale. Ottenuta la componente radiale, la si integra per ottenere il potenziale:

$$\Phi(r) = - \int_0^r u(r', \theta, \phi) dr' \quad (3.29)$$

Equazione 3.5 restituisce il campo tridimensionale di velocità.

Un aspetto rilevante del metodo POTENT è la trasformazione di dati di velocità di sorgenti discrete come galassie in un campo radiale continuo e fluido, mediante metodi di *smoothing*. Dekel, Bertschinger & Faber [9] hanno introdotto una funzione di smoothing a finestra tensoriale che tiene conto della natura radiale del campo di velocità osservato. In maniera più specifica, si “taglia” il campo di velocità radiale osservato in gusci sferici per poi calcolare i coefficienti di multipolo della distribuzione di velocità radiale attraverso ciascun guscio, o “finestra”. Questo metodo ha il vantaggio di conservare tutti i dettagli del flusso di campo di velocità e in più calcolare la distribuzione statistica dei coefficienti di multipolo è relativamente semplice.

### 3.3.2 Determinazioni di mappe 3D della distribuzione di materia

Riportiamo i risultati ottenuti da Dekel, Faber et al. in un articolo pubblicato nel 1998 [6], in cui il metodo POTENT è stato applicato al catalogo di velocità peculiari galattiche Mark III: figura 3.2 mostra i campi di velocità e densità ottenuti; figura 3.3 aiuta a comprendere meglio la distribuzione di materia tramite un grafico in cui l'altezza è proporzionale alla fluttuazione di densità. Figura 3.4, come figura 3.2, mostra campi di distribuzione di densità-velocità a  $Z = -25 + 20 h^{-1} Mpc$ . Infine figura 3.5 fornisce una rappresentazione tridimensionale del campo di fluttuazione di densità tramite superfici di valore costante  $\Delta_m = 0.4$ . Tutti i campi mostrati sono stati ottenuti con  $\Omega = 1$ .

La mappa di figura 3.2 mostra una chiara tendenza del moto da destra a sinistra nella direzione del moto generale del Gruppo Locale rispetto al sistema CMB (ovvero  $SGL=139^\circ$ ,  $SGB=-31^\circ$  in coordinate Super Galattiche). La velocità di flusso (*bulk velocity*) entro  $60 h^{-1} Mpc$  è approssimativamente  $300-350 km s^{-1}$  verso  $SGL=170^\circ$ ,  $SGB=-10^\circ$ , ma il flusso non è coerente su tutto il volume di campione: ci sono regioni (estrema sinistra o in basso a destra) dove le componenti XY della velocità si azzerano, indicando un flusso che è l'opposto a quello relativo al Gruppo Locale. Il campo di velocità mostra convergenze e divergenze locali che indicano forti variazioni di densità su scale grandi circa il doppio della scala di *smoothing*. La velocità del Gruppo Locale (situato al centro della figura) processata con un raggio gaussiano di  $12 h^{-1} Mpc$ , è  $547 km s^{-1}$  verso  $SGL=161^\circ$  e  $SGB=-19^\circ$ , mentre la velocità relativa al CMB non processata con *smoothing* risulta essere  $627 km s^{-1}$  verso  $SGL=139^\circ$  e  $SGB=-31^\circ$ .

Il Grande Attrattore<sup>5</sup> (GA), visibile in figura 3.2 nella parte sinistra, è una regione di alto contrasto di densità fino a  $\Delta_m = 1.4 \pm 0.3$  localizzato vicino al piano

<sup>5</sup>Il "mistero" del Grande Attrattore è dovuto al fatto che la sua posizione planare con il piano della galassia rendeva osservazioni in ottico molto difficili da effettuare a causa della presenza massiccia di polveri. Con lo sviluppo della radio-astronomia è stato possibile identificare questa regione di spazio con un super ammasso di galassie, tuttavia la materia visibile osservata non giustifica completamente la grande attrazione che questo super-ammasso esercita negli ammassi limitrofi. Dunque una parte di "mistero" ancora rimane

galattico a  $Y=0$  e  $X=-40 h^{-1}Mpc$ . Si estende nella direzione dell'ammasso della Vergine ( $X, Y \approx 0, 10$ ), verso i super-ammassi Pavo-Indo e Telescopio e verso la concentrazione di Shapley ( $X<0, Y>0$ ). Al di sopra del Grande Attrattore troviamo il Grande Muro (*Great Wall*) dell'ammasso della Coma, con  $\Delta \approx 0.5$ . Il picco di densità che domina la parte in basso a destra è il super-ammasso Perseo-Pesci (PP) con  $\Delta_m = 1.0 \pm 0.4$ . Regioni sotto-dense separano GA e PP espandendosi da in basso a sinistra a in alto a destra. La regione con  $\Delta_m = -0.7 \pm 0.2$  coincide con il vuoto dello Scultore.

Le due porzioni a  $Z \neq 0$  di figura 3.4 mostrano la continuità e l'estensione di GA e PP, e come grandi vuoti si estendano tra essi. Il flusso complessivo è visibile in tutte e tre le porzioni, mostrando la sua validità nel campione di volume considerato.

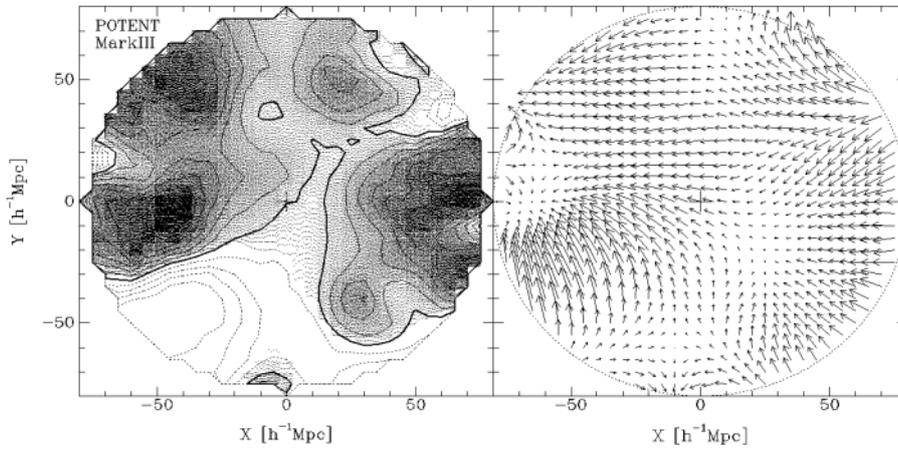


Figura 3.2: Risultati del metodo POTENT da dati presi dal catalogo delle velocità peculiari Mark III. A sinistra contorni di iso-densità: il contorno più marcato corrisponde a  $\Delta_m = 0$ , quelli tratteggiati a  $\Delta_m < 0$ . La scala del grigio è proporzionale a  $\Delta_m$ . Lo spazio tra diversi contorni è  $\Delta_m = 0.2$ . A destra il campo di velocità tri-dimensionale rispetto alla CMB è proiettato sul piano Super-Galattico.

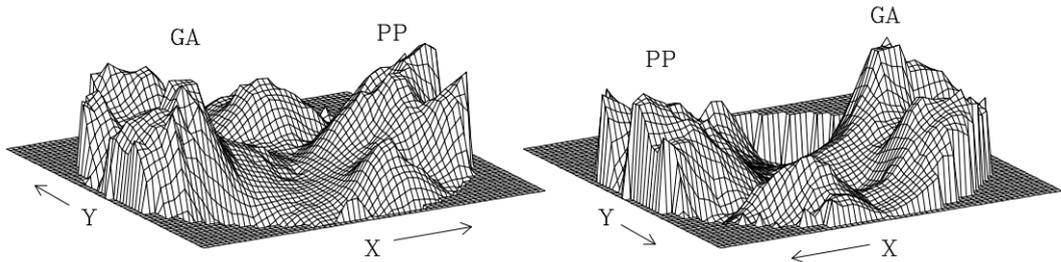


Figura 3.3: Ricostruzione POTENT del campo di densità come in figura 3.2 visto da due differenti direzioni. L'altezza della superficie è proporzionale a  $\Delta_m$

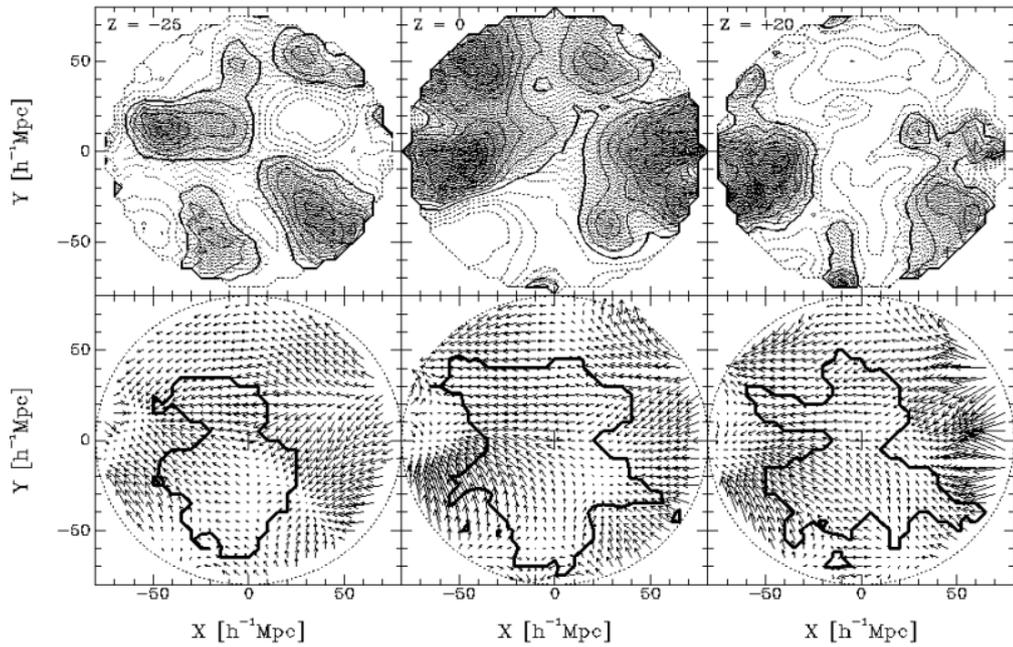


Figura 3.4: Stesso concetto di figura 3.2 ma con due piani aggiuntivi paralleli al piano Super-Galattico a  $Z=-25$  e  $Z=+20 h^{-1} Mpc$

La struttura tri-dimensionale dell'intero volume, delimitata dalla superficie a  $\Delta_m = 0.4$ , è mostrata in figura 3.5. Il Grande Attrattore e il super-ammasso Perseo-Pesci si estendono visibilmente lungo i due lati del piano super-galattico, così come il vuoto tra essi. Mentre l'Attrattore sembra essere una struttura estesa coerente e compatta, il super ammasso PP si sviluppa in strutture più complesse al di fuori del piano super-galattico e si connette con altre super-strutture.

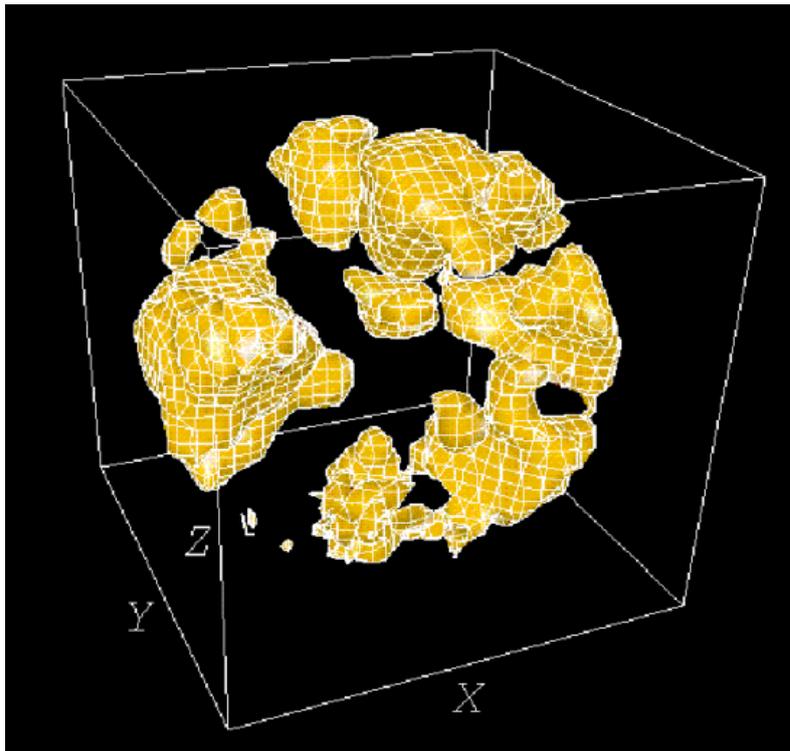


Figura 3.5: Campo di densità POTENT in tre dimensioni. É mostrata la superficie  $\Delta_m = 0.4$ . Il piano equatoriale è a  $Z=0$  e il Gruppo Locale è situato al centro del cubo. Il Grande Attrattore è la struttura estesa sulla sinistra, ed il complesso Perseo-Pesci si estende sulla destra sopra e sotto il piano Super-Galattico con estesi vuoti in mezzo.

## Capitolo 4

# Grandi vuoti nel Cosmo

### 4.1 La rete cosmica

Sulle scale spaziali più grandi che possiamo campionare la distribuzione di materia nell'universo attuale non è omogenea: l'instabilità gravitazionale dovuta a perturbazioni primordiali ha fatto sì che si organizzasse in una rete intricata di strutture connesse, chiamata **rete cosmica** (*Cosmic Web*).

Anche se è quasi impossibile fornire una rappresentazione formale matematica completa delle strutture della rete cosmica, è conveniente introdurre alcune approssimazioni: prima di tutto, consideriamo che la struttura cosmica sia caratterizzata da componenti discrete, come galassie e ammassi, buchi neri e pulsar, raggruppati in strutture allungate e strette denominati **filamenti**. I filamenti hanno dimensioni da 10 a 100 Mpc e forniscono il collegamento tra le regioni con densità di materia e luminosità più alta, i **nodi**, dove si concentra la materia visibile, come ammassi e super ammassi. Oltre ai filamenti, altre due strutture sono presenti nella rete cosmica: i **muri** (*walls*) e i **vuoti** (*voids*).

I muri sono strutture estese meno dense dei nodi e più dense dei vuoti; sono popolati da galassie nane o galassie con alta magnitudine, e per questo motivo osservazioni a loro dedicate sono ancora difficili.

I vuoti sono estese regioni con bassissima densità di materia che occupano in larga parte l'Universo. Il fatto che praticamente non si trovino galassie o altri oggetti cosmici rende i vuoti regioni incontaminate adatte a studiare l'Universo primordiale.

Dal momento che uno degli scopi della cosmologia è sempre stato il legame tra la struttura osservata della rete cosmica e l'evoluzione di materia nelle passate epoche dell'universo, sono stati creati e sviluppati numerosi e differenti metodi a tal proposito. La più grande simulazione a N-corpi svolta finora è la *Millennium Run*<sup>1</sup> o *Millennium Simulation*, una simulazione al computer che ha utilizzato oltre 10 miliardi di particelle-massa per tracciare l'evoluzione della distribuzione di materia (sia barionica che oscura) in una regione cubica di Universo di oltre 2 miliardi di anni luce di lato. In figura 4.1 è possibile vedere porzioni di questo Universo simulato a 4 differenti epoche.

---

<sup>1</sup>Per ulteriori informazioni visitare il sito  
<https://wwwmpa.mpa-garching.mpg.de/galform/virgo/millennium/>

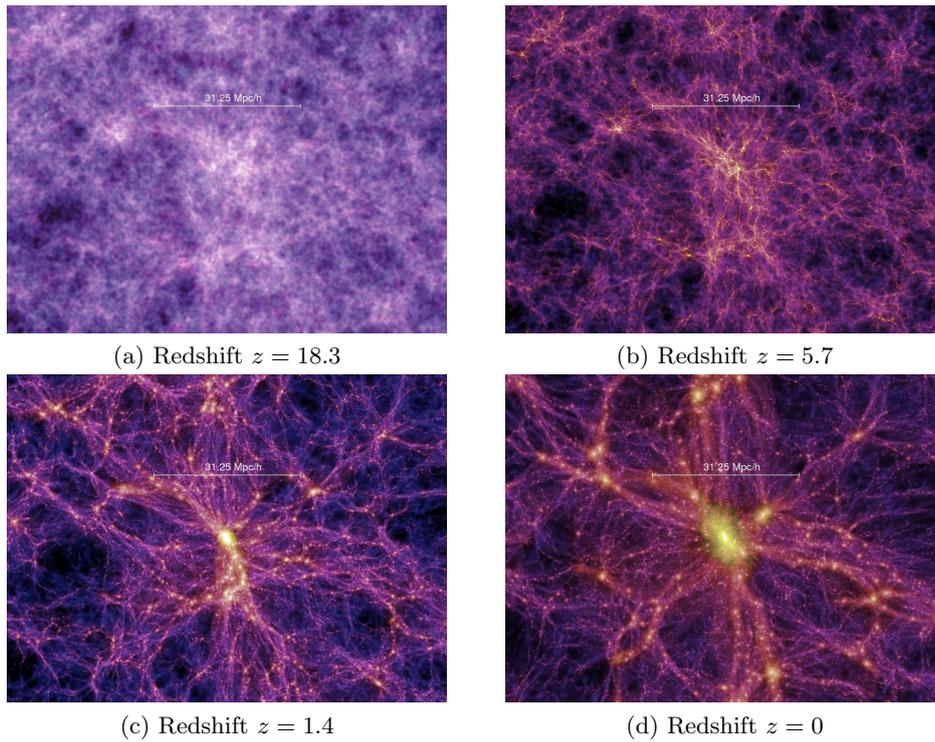


Figura 4.1: Singoli frames presi a 4 differenti epoche cosmiche in modo da riassumere l'evoluzione della materia (oscura e barionica in questo caso) dal Big Bang ad oggi. Si notano le componenti descritte: filamenti, nodi luminosi, regioni meno dense come muri e vuoti. Il segmento bianco di  $31.25 h^{-1} Mpc$  che si intravede dà la scala della mappa.

## 4.2 Vuoti Cosmici

I vuoti cosmici sono oggetto di studio fin dalle prime survey ad alto redshift effettuate dalla fine degli anni Settanta. A seguito della scoperta dell'esemplare più famoso di essi, il vuoto di Bootes, visibile in figura 4.2, essi hanno acquisito una posizione sempre più centrale nello studio dell'Universo su larga scala.

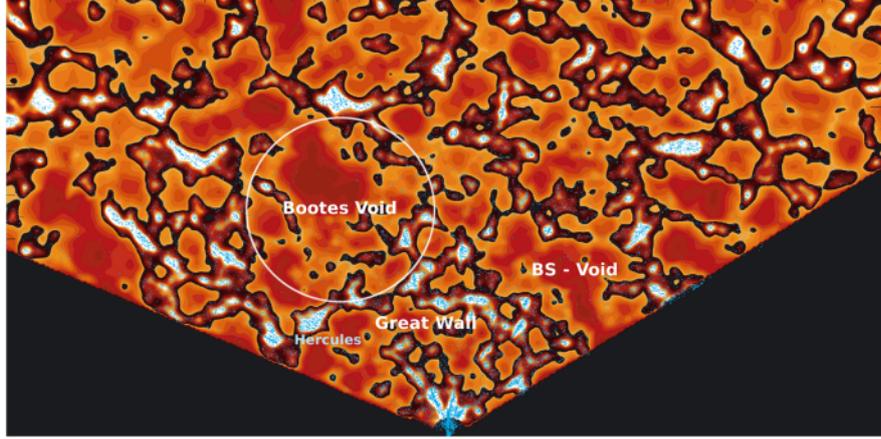


Figura 4.2: Illustrazioni basate su dati collezionati dalle survey SDSS (*Sloan Digital Sky Survey*, 2000) e 2dFGRS (*2dF galaxy Redshift Survey*, 2003). L'intensità del colore rappresenta la densità di materia, con massimi in bianco-azzurro e minimi in rosso. Sono evidenziate alcune zone di interesse, tra cui il super-vuoto Bootes

Simulazioni digitali come la *Millennium simulation* e survey ad alto redshift danno un'idea del ruolo centrale che hanno i vuoti, tanto che la stima attuale è che essi occupino il 77% del volume del cosmo, contenendo però solamente il 15% di materia. Questo implica che la densità dei vuoti sia meno del 20% della densità media cosmica.

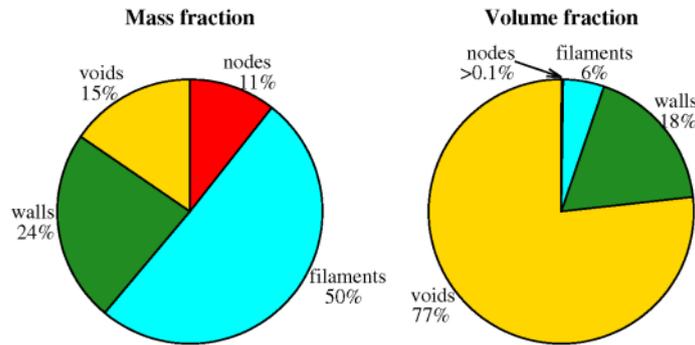


Figura 4.3: Frazioni di massa e volume occupate dalle componenti della rete cosmica. I dati derivano dal metodo NEXUS+ (Cautun et al. 2014)

I principali motivi di interesse dei vuoti sono i seguenti.

- Avendo dimensioni che vanno da 20 a  $50 h^{-1} Mpc$ , i vuoti sono una componente prominente dell'Universo su larga scala e hanno un ruolo decisivo

sull'organizzazione spaziale dell'Universo: il loro effetto repulsivo influenza le regioni circostanti.

- Contengono informazioni relative ai parametri cosmologici fondamentali. La quasi assenza di strutture come galassie rende la loro dinamica e struttura profondamente legata all'energia oscura tanto che fungono da test per il modello  $\Lambda$ CDM.
- La bassa densità crea un ambiente parzialmente incontaminato per lo studio della formazione di galassie, della loro evoluzione e dell'effetto gravitazionale che ha l'ambiente circostante su di esse

### 4.3 Formazione ed evoluzione

I vuoti emergono da fluttuazioni di densità del campo gaussiano primordiale. Le proprietà di base dei vuoti possono essere comprese in termini di evoluzione di depressioni di densità isolate nello spazio.

In coordinate fisiche, regioni sovra-dense si espandono meno velocemente rispetto al background, raggiungono una dimensione massima, e infine invertono la rotta collassando su di esse (questo è vero solo per universi strettamente chiusi o di EdS). Regioni sotto-dense, invece, non arrivano al collasso: esse subiscono l'espansione finché la materia al loro interno raggiunge i gusci esterni iniziali.

Le caratteristiche generali dei percorsi evolutivi dei vuoti possono essere apprezzate meglio in termini di evoluzione di perturbazioni di densità sferiche-simmetriche ed isolate, siano esse di sopra o sotto densità, in un Universo altrimenti omogeneo in espansione. Il **modello sferico** fornisce una chiave semplificata per interpretare processi piuttosto complessi. Come risultato di quest'approssimazione, il problema evolutivo diventa essenzialmente mono-dimensionale, permettendo una trattazione analitica seppur approssimata, completa.

Le proprietà base e più comuni dell'evoluzione di vuoti sferici sono le seguenti.

1. *Espansione*: I vuoti si espandono, in contrasto a regioni più dense, che collassano. La loro espansione è strettamente collegata all'espansione cosmica di fondo.
2. *Sfollamento*: Con l'espandersi dei vuoti, la loro densità diminuisce progressivamente. Al prim'ordine, la diminuzione di densità è dovuta al redistribuirsi della materia nel volume in espansione. La diminuzione di densità dovuta all'effettivo flusso di materia dalle zone centrali a quelle circostanti rappresenta un effetto di ordine superiore causato dall'attrazione gravitazionale delle zone sovra-dense limitrofe.
3. *Forma sferica*: L'espansione favorisce l'evoluzione dei vuoti verso una forma sferica
4. *Profilo di densità top-hat*: l'effettiva forza di repulsione della materia interna decresce dal centro del vuoto in funzione del suo raggio, formando un profilo di densità chiamato **top-hat** (*a cappello*, rovesciato) o **bucket profile** (*a secchio*). L'effetto è visibile in figura 4.4: mentre il contenuto di materia si accumula vicino e attorno a contorni marcatamente densi (*creste* o *ridges*), la depressione interna si evolve assomigliando progressivamente ad un Universo FRW omogeneo e sottodenso.

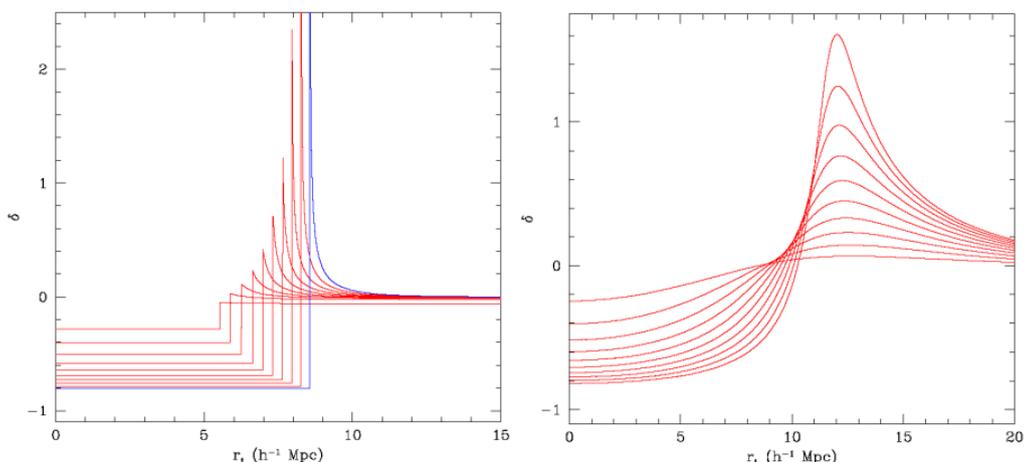


Figura 4.4: Modello sferico dell’evoluzione dei vuoti. A sinistra un vuoto puramente *tophat* che evolve fino al momento del *shellcrossing*. A destra un vuoto con profilo basato sul modello  $\Lambda$ CDM. Linee tratteggiate differenti fanno riferimento a diverse condizioni iniziali di densità.

5. *Campo di velocità super Hubble*: Coerentemente con la distribuzione omogenea interna di materia, il campo di velocità peculiare nei vuoti ha divergenza di velocità costante. Per questo motivo si dice che essi evolvano in **Super Hubble Bubbles** (più dettagli nella sezione 4.4.1).
6. *Soppressione delle strutture*: Con la crescita dei vuoti, le disomogeneità interne vengono soppresse e la formazione di strutture si “congela”.
7. *Formazione di creste nei bordi*: Col progressivo accumularsi di materia alle estremità dei vuoti, si creano delle strutture filamentose.
8. *Shell-crossing*: La transizione da uno stato quasi-lineare ad uno non lineare avviene nel momento in cui i gusci più interni, spostandosi più rapidamente per l’accelerazione peculiare che si forma, raggiungono e si mescolano con quelli esterni più lenti. Dopo aver raggiunto l’epoca del *shell-crossing*, si dice che il vuoto è diventato *maturo*, l’espansione continua ma molto più lentamente di prima (si veda figura 4.7). Si pensa che tutti i vuoti osservabili attualmente abbiano raggiunto questa fase.

Le caratteristiche appena elencate, valide come abbiamo visto in un modello sferico semplificato, sono comunque visibili in un contesto più generale e rappresentativo dell’Universo, in figura 4.5. Simulazioni a N-corpi, come questa, hanno dimostrato che l’evoluzione sferica a profilo *top-hat* rappresenta in maniera accurata la realtà.

### 4.3.1 Modello gerarchico e formalismo dell’excursion set

Abbiamo analizzato brevemente nella sezione precedente le caratteristiche principali dell’evoluzione di singoli vuoti in espansione non interagenti. Costruire uno scenario di distribuzione di materia su larga scala basandosi su di essi vorrebbe dire ignorare uno degli aspetti più cruciali e caratteristici della formazione

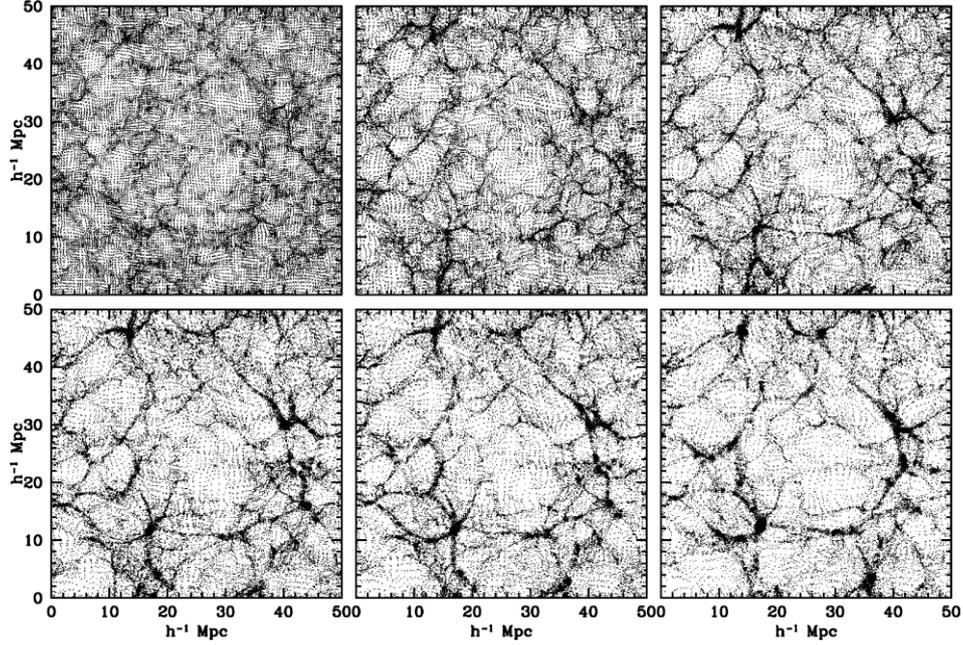


Figura 4.5: Evoluzione di un vuoto divisa in 6 frames. La ricostruzione prevede una simulazione N-corpi di  $128^3$  particelle. A partire da in alto a sinistra, il fattore di espansione è  $a_{exp} = 0.1, 0.2, 0.3, 0.35, 0.4, 0.5$  (il valore attuale è 1). Il diametro del vuoto è  $25 h^{-1} Mpc$ .

di strutture cosmiche: non esistono vuoti isolati o privi di strutture interne. Un'analisi completa dovrà tenere conto di due componenti fondamentali:

- Le sotto-strutture presenti nel volume primordiale occupato dal vuoto
- La distribuzione disomogenea di materia nelle vicinanze

Gli scenari di formazione di strutture cosmiche prevedono una modalità di crescita strutturale basata sul **modello gerarchico**: la formazione di un oggetto comporta la fusione di tutte le sotto-strutture legate gravitazionalmente in una regione di spazio, compresi oggetti di piccola scala condensati in epoche precedenti. Per quanto riguarda i vuoti, il loro sviluppo può essere descritto tramite due processi:

- **Merging**: il vuoto emerge dall'assemblamento graduale di vuoti di piccole dimensioni ed eliminazione di sotto-strutture interne. Simulazioni a N corpi hanno mostrato (Blumenthal et al. (1992)) che quando vuoti adiacenti collidono, schiacciano la materia tra di essi producendo sottili *walls* e filamenti. Le velocità peculiari perpendicolari alle pareti dei vuoti si elidono a vicenda lasciando che il flusso di materia venga incanalato verso l'esterno da moti tangenziali. Progressivamente, la materia confinata tra i due bordi dei vuoti svanisce in strutture limitrofe e le due regioni si fondono del tutto. Il processo di collisione si ripete seguendo scale via via maggiori
- **Collasso**: vuoti situati all'interno di zone sovra-dense risentono dell'attrazione gravitazionale della materia circostante in forma di forze mareali che possono deformare la loro forma fino a farli scomparire

Per costruire un modello gerarchico basato sui due processi appena descritti è stata introdotta[11] una versione modificata<sup>2</sup> dell'approccio statistico chiamato **excursion set** che riduce il problema dell'abbondanza di vuoti nell'universo ad un problema *a due soglie*: una associata al collasso di aloni di materia, l'altra alla formazione dei vuoti. Il quadro complessivo risultante è in grado di descrivere ambienti realistici di fluttuazione di densità in cui i vuoti interagiscono con i dintorni.

Figura 4.6 fornisce una rappresentazione visuale del formalismo. Ogni riga rappresenta uno scenario dell'*excursion set*. La colonna di sinistra raffigura i profili di fluttuazioni relative di densità calcolati tramite:

$$\delta(r, t|R) = \frac{D(t)}{D(t_i)} \delta(r, t_i|R)$$

in funzione della scala spaziale<sup>3</sup>. Il pedice  $i$  fa riferimento ai momenti iniziali, mentre  $D(t)$  è il fattore di crescita lineare di densità. Nei modelli gerarchici,  $S$  diminuisce con l'aumentare della scala, per cui le scale spaziali più grandi sono sulla sinistra, e  $\delta(S) \rightarrow 0$  quando  $S \rightarrow 0$ ; la colonna al centro e quella di destra simulano l'evoluzione con un modello a  $N$  corpi. Descriviamo la figura riga per riga:

- **Cloud-in-cloud**: Il profilo di fluttuazioni di densità (pannello a sinistra) attraversa il limite di formazione di aloni due volte, ovvero regioni sovra-dense separate (pannello al centro) collassano per formare una singola regione più massiva e densa (pannello a destra)
- **Cloud-in-void**: il profilo di fluttuazioni interseca la soglia di formazione dell'alone a scale piccole e quella di formazione del vuoto a scale più grandi, indicando che una regione sovra-densa virializza (raggiunge l'equilibrio) all'interno di una più ampia sotto-densa. Come mostrano i pannelli di centro e di destra, la formazione di un vuoto non distrugge un alone di materia formato precedentemente all'interno di esso.
- **Void-in-void**: il profilo di fluttuazioni  $\delta$  interseca la soglia di formazione di vuoti due volte, indicando che vuoti più piccoli si combinano tra loro formandone di più grandi.
- **Void-in-cloud**: il profilo di fluttuazioni di densità interseca la soglia di formazione del vuoto su piccole scale e quella di formazione dell'alone su grandi scale, indicando che il vuoto si è formato in un'estesa regione sovra-densa destinata a diventare un alone. Come mostrato nei pannelli adiacenti, la formazione dell'alone schiaccia il vuoto facendolo infine scomparire.

Utilizzando quest'approccio giungiamo ad alcune importanti conclusioni. Prima di tutto, è evidente dalla figura che contrariamente al numero degli aloni di materia, che rimane invariato nell'evoluzione, il numero di vuoti può diminuire drasticamente per effetto di merging o collasso.

<sup>2</sup>La versione originale dell'*excursion set* è stata sviluppata da Press & Schechter, (1974) per fornire una descrizione statistica dell'abbondanza di aloni di materia oscura sovra-densi derivati da clustering gerarchici gravitazionali

<sup>3</sup>La scala spaziale è parametrizzata in funzione della sua varianza  $S$

Poiché un alone di materia virializzato è per definizione un oggetto collassato, non può ospitare all'interno di esso un vuoto. Ne segue che se il profilo di densità attraversa la soglia di collasso,  $\delta_c = 1.686$ , prima di quella di formazione del vuoto,  $\delta_v = -2.81^4$ , un alone esteso avrà al suo interno un vuoto più piccolo. Con il progressivo collasso della regione, il vuoto viene ristretto e infine scompare: vuoti di questo tipo non devono essere conteggiati come tali. Il formalismo dell'*excursion set*, nella sua forma più semplice appena presentata, ha permesso di costruire funzioni statistiche di distribuzione di vuoti in funzione di raggio e massa, oltre a confermare che la distribuzione su larga scala della materia è profondamente influenzata dall'effetto del *merging* cumulativo dei vuoti.

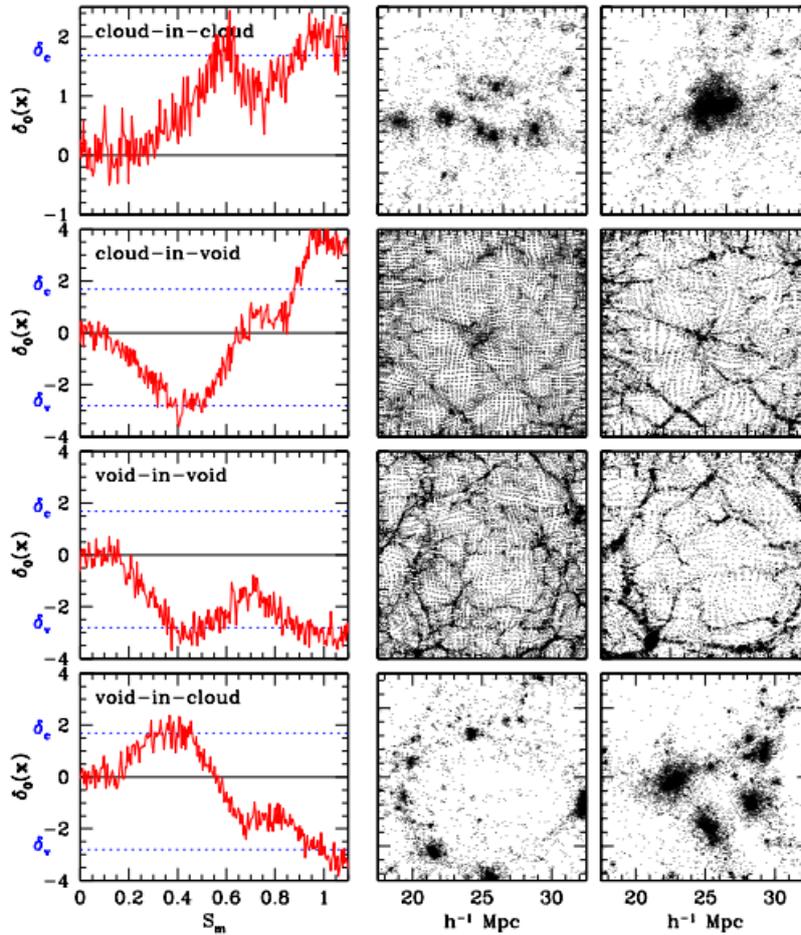


Figura 4.6: Quattro scenari del formalismo *excursion set*. Ogni scenario è illustrato utilizzando tre pannelli. Quello di sinistra mostra i profili di fluttuazione di densità, ovvero la perturbazione di densità locale  $\delta_0(x)$  in funzione del parametro di scala  $S_m$ . Le linee tratteggiate indicano i limiti di formazione di aloni ( $\delta_c$ ) e di formazione dei vuoti ( $\delta_v$ ); i due pannelli a destra mostrano simulazioni a N corpi in due momenti diversi.

<sup>4</sup>I valori di  $\delta_c$  e  $\delta_v$  dipendono dal modello di evoluzione sferico (Gunn and Gott, 1972)

## 4.4 Dinamica dei vuoti

### 4.4.1 Super Hubble Bubbles

Figura 4.7 mostra l'evoluzione di profili di velocità radiale, tangenziale e dispersione di velocità in funzione del tempo, quantificato con il parametro di scala  $a(t)$ . Nella situazione di un vuoto evoluto, il campo di velocità interno a esso assomiglia a quello del flusso di Hubble, infatti la velocità di espansione aumenta linearmente con la distanza dal centro del vuoto: i vuoti sono anche detti **Super-Hubble Bubbles** (Icke 1984). La divergenza di velocità quasi costante all'interno del vuoto è conforme al flusso super-Hubble che ci si aspetta da una distribuzione interna di densità quasi uniforme, condizione che i vuoti raggiungono in fase evolutiva avanzata. La pendenza dei profili lineari mostra un debole aumento con il tempo, tendendo a rimanere costante in tempi più recenti; fatto, quest'ultimo, non spiegabile attraverso la teoria di evoluzione lineare che prevederebbe un aumento nella pendenza proporzionale a  $\sqrt{a(t)}$  ( $\Omega = 1$ ). La spiegazione invece prevede che l'evoluzione non lineare, a cui i vuoti eventualmente giungono, porti ad un decremento di densità minore col passare del tempo (visibile chiaramente nel pannello in alto a sinistra in figura 4.7) ed ad un corrispondente tasso di espansione più piccolo di quanto atteso in regime di evoluzione lineare.

Un notevole aumento del valore di velocità di espansione si nota per raggi maggiori di  $r \sim 10 h^{-1} \text{Mpc}$ . In particolare vediamo che la velocità massima aumenta da  $\approx 210 \text{ km s}^{-1}$  ad  $a = 0.1$  a  $\approx 490 \text{ km s}^{-1}$  al momento attuale. Allo stesso tempo il raggio comoving corrispondente al picco di velocità si sposta da  $11 h^{-1} \text{Mpc}$  ad  $a = 0.1$  a  $18 h^{-1} \text{Mpc}$  ad  $a = 1$ . Il drastico spostamento del raggio di velocità massima è forse la prova più evidente dell'ingrandimento dei vuoti nei confronti delle zone limitrofe.

L'evoluzione dei profili di velocità tangenziale e della varianza  $\sigma_v$  mostrano approssimativamente lo stesso comportamento: fino a  $a \approx 0.4$  osserviamo un aumento quasi lineare ad ogni raggio. In tempi più recenti, le velocità diminuiscono, specialmente entro  $r \approx 15 h^{-1} \text{Mpc}$ . Poiché entrambe le quantità riflettono la presenza di sotto-strutture interne ai vuoti, questo significa che i vuoti riescono ad espellere gran parte delle strutture di materia dalle regioni interne a quelle esterne.

Van de Weygaert e van Kampen [17] hanno quantificato l'espansione super Hubble con il parametro  $H_{0,void}$ :

$$H_{0,void} = \frac{1}{3} \nabla \cdot \vec{v}_s \quad (4.1)$$

dove il campo di velocità della regione interna  $\vec{v}_s$  è stato processato con un raggio di smoothing ampio 20 Mpc. Il legame tra eccesso d'espansione  $H_{0,void}/H_0$  e sotto-densità finale  $\delta_f$  ( $a=1$ ) è descritto dalla seguente formula derivata in trattazione lineare e visibile in figura 4.8:

$$\frac{H_{0,void}}{H_0} = -\frac{1}{3} \mathfrak{S}(\Omega_0) \delta_f \quad (4.2)$$

con  $\mathfrak{S}(\Omega_0) \approx \Omega_0^{0.6}$ . La linea tratteggiata visibile fa riferimento al modello quasi lineare stimato da Bernardeau (1992):

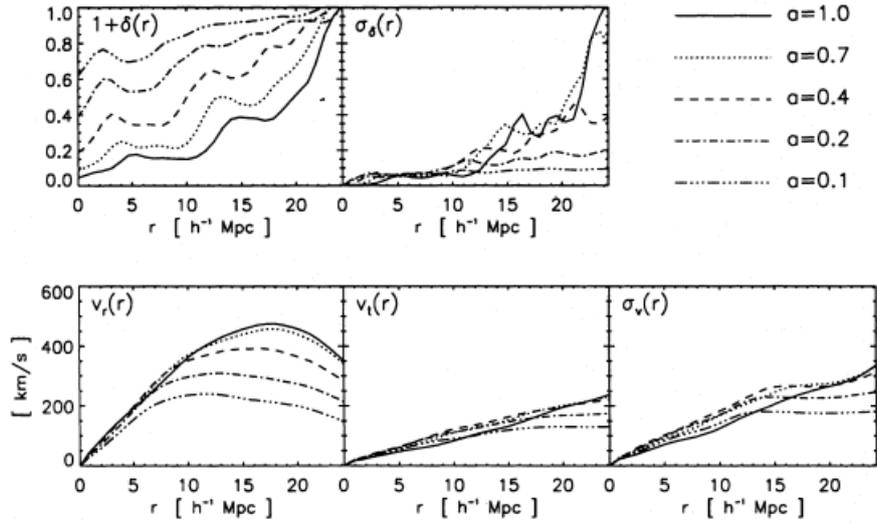


Figura 4.7: Evoluzione di profili di densità e velocità mediati angularmente in simulazioni di vuoti. La riga in alto indica l'evoluzione di  $1 + \delta(r)$  e  $\sigma_\delta(r)$  in un guscio di raggio  $r$ . Nella riga in basso sono mostrati gli andamenti dei profili di velocità radiale  $v_r(r)$ , velocità tangenziale  $v_t(r)$  e dispersione di velocità  $\sigma_v(r)$ .

$$\frac{1}{3} \frac{\nabla \cdot \vec{v}}{H_0} = \frac{\mathfrak{S}(\Omega_0)}{2} [1 - (1 + \delta_f)^{2/3}]$$

#### 4.4.2 Vuoti ed energia oscura

Recentemente sempre più progetti sono dedicati a comprendere la natura dell'energia oscura.<sup>5</sup>Molti di questi esperimenti sono stati ottimizzati utilizzando la statistica di correlazione a due punti per indagare la possibile esistenza di un'equazione di stato dell'energia oscura evolvente col tempo del tipo

$$\omega(z) = \omega_0 + \omega_a \left[ \frac{z}{z+1} \right] \quad (4.3)$$

dove i parametri  $\omega_0$  (componente di energia oscura) e  $\omega_a$  (componente di materia) fanno riferimento al *parametro di stato*  $\omega$  presente nell'equazione di stato per il fluido cosmico  $p = \omega \rho c^2$ .  $\omega$  è variabile nel tempo in funzione delle componenti fisiche che dominano la dinamica del fluido cosmico, rimanendo singolo se la componente è unica o moltiplicandosi se le componenti sono più di una; questo è il caso dell'universo attuale dominato in gran parte dall'energia oscura e in minima parte dalla materia, in cui i parametri costanti sono  $\omega_a = 0$  e  $\omega_0 = -1$ .

I vuoti cosmici sono oggetti dominati dall'energia oscura: la loro evoluzione è sviluppata dall'azione congiunta dell'attrazione gravitazionale, che respinge la materia da zone centrali ai bordi, e dell'espansione dell'Universo, che a sua volta allarga la dimensione dei vuoti dilatando lo spazio tra le galassie. Si pensa

<sup>5</sup>Alcuni tra essi: DESI, SPHEREx, Euclid, LSST, WFIRST

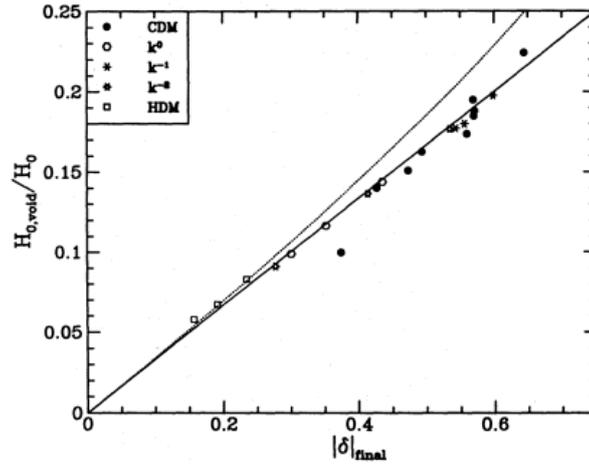


Figura 4.8: Relazione tra eccesso di espansione e densità al tempo  $a = 1$  per 21 simulazioni di vuoti in diversi scenari di clustering. La linea continua è la relazione derivata in accordo con la teoria lineare, la linea tratteggiata è la funzione derivata da Bernardeau (1992) per il regime quasi-lineare.

che durante la storia cosmica l'espansione dei vuoti sia variato in relazione al contributo dell'energia oscura, se questo sia rimasto costante o sia evoluto col tempo. Di conseguenza la dimensione dei vuoti dipende dal parametro  $\Lambda$ , ovvero la funzione di distribuzione dei vuoti (il numero di vuoti in funzione del raggio) è altamente sensibile all'equazione di stato 4.3.

In uno studio recente (2015), Pisani et al.[13] hanno utilizzato le due survey EUCLID e WFIRST<sup>6</sup> per costruire una funzione del numero dei vuoti sensibile all'equazione di stato dell'energia oscura, 4.3. Il risultato grafico è visibile in figura 4.9b<sup>7</sup>.

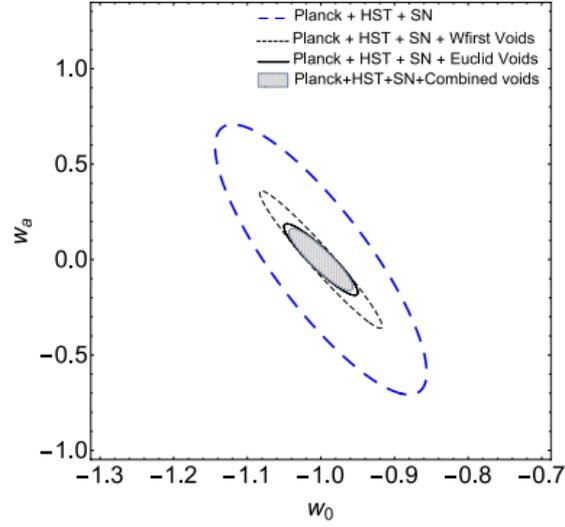
La quantità osservabile misurata nelle survey è il numero di vuoti più grandi di un raggio minimo  $R_{min}$  localizzati in uno specifico intervallo di redshift:

$$N_e = \int_z^{z+\Delta z} dz \int_{R_{min}}^{\infty} dR \int_{\Omega_{survey}} n(R, z) \frac{dV}{dz d\Omega} d\Omega \quad (4.4)$$

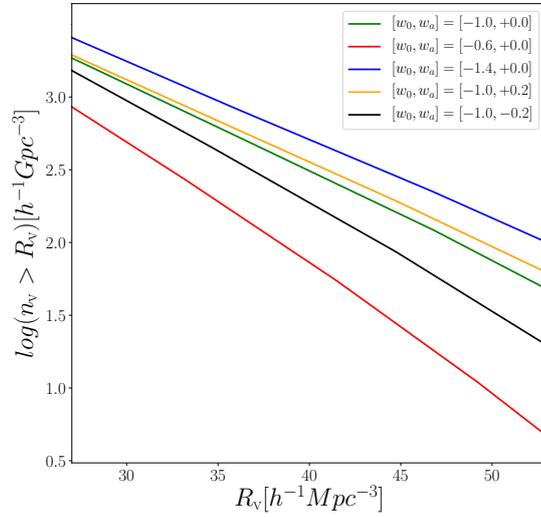
con  $dV$  elemento di volume comoving e  $d\Omega$  dipende dalla porzione di angolo solido di una certa survey.  $n(R, z)$  è la distribuzione di vuoti in funzione del loro raggio e del redshift e vede la sua origine nel formalismo *excursion set* trattato nel paragrafo 4.3.1. Il metodo matriciale di Fischer (per i dettagli si veda [13]) permette di fissare vincoli sui parametri  $\omega$ , in modo da costruire l'ellisse di aspettazione  $\omega_0 - \omega_a$ , visibile in figura 4.9a.

<sup>6</sup>Wide Field Infrared Space Telescope

<sup>7</sup>Rielaborazione grafica di dati contenuti in *Counting voids to probe dark energy* [13]. Immagine gentilmente concessa da Alice Pisani.



(a) Vincoli nei parametri  $w_0$  e  $w_a$  basati su diverse survey. In particolare si nota il confronto tra EUCLID e WFIRST ed una situazione in cui i vuoti dei due campioni sono stati mediati



(b) Abbondanza di vuoti per modelli di energia oscura con diversi parametri. L'universo attuale è descritto dal primo caso, linea verde centrale

Figura 4.9

# Bibliografia

- [1] COLES P. & LUCCHIN F. Cosmology, The Origin and Evolution of Cosmic Structure. *Chichester: Wiley*, 1995
- [2] LIDDLE, ANDREW An Introduction to Modern Cosmology, 2003
- [3] MO, H., VAN DEN BOSCH, F., & WHITE, S. Galaxy Formation and Evolution, *Cambridge University Press* , 2010
- [4] PEACOCK, JOHN. Cosmological Physics, *Physics Today* ,2000
- [5] DEKEL, AVISHAI Dynamics of Cosmic Flows, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* , 32, 1994
- [6] DEKEL, A. & ELДАР, AMIRAM & KOLATT, TSAFRIR & YAHIL, AMOS & WILLYCK, JA & FABER, SABIEN & COURTEAU, STEPHANE & BURSTEIN, D. POTENT reconstruction from Mark III velocities *The Astrophysical Journal* , 522, 1998
- [7] BERTSCHINGER, EDMUND & FABER, SABIEN & DRESSLER, ALAN & BURSTEIN, DAVID. , Potential, velocity, and density fields from redshift-distance samples: Application - Cosmography within 6000 kilometers per second *Astrophysical Journal* , 364, 1991
- [8] SHAROV, P. & PARNOVSKY, S. Density distribution of matter on 75-Mpc scales derived by the POTENT method from the bulk motions of RFGC galaxies *Astronomy Letters* , 32, 287-296, 2006
- [9] BERTSCHINGER, EDMUND & FABER, SABIEN. Potential, velocity, and density fields from sparse and noisy redshift-distance samples - Method *Astrophysical Journal* , 364, 1991
- [10] SIGAD, YAIR & ELДАР, AMIRAM & STRAUSS, MICHAEL & YAHIL, AMOS Iras Versus Potent Density Fields On Large Scales: Biasing And Omega, *Astrophysical Journal* , 495, 1997
- [11] SHETH, RAVI & WEYGAERT, RIEN A hierarchy of voids: Much ado about nothing, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* , 350, 2003
- [12] SUTTER, P.M. & ELAHI, PASCAL & FALCK, BRIDGET & ONIONS, JULIAN & HAMAUS, NICO & KNEBE, ALEXANDER & SRISAWAT, CHAICHALIT & SCHNEIDER, AUREL The life and death of cosmic voids, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* , 445, 2014

- [13] PISANI, ALICE & SUTTER, P.M. & HAMAUS, NICO & ALIZADEH, ESFANDIAR & BISWAS, RAHUL & WANDELT, BENJAMIN & HIRATA, CHRISTOPHER Counting voids to probe dark energy, *Physical Review D: Particles and fields*, 92, 2015
- [14] WEYGAERT, RIEN Voids and the Cosmic Web: cosmic depression & spatial complexity, *Proceedings of the International Astronomical Union*, 11, 493-523, 2014
- [15] PEEBLES, P. The Void Phenomenon, *The Astrophysical Journal*, 557, 2001
- [16] FRANCESCHINI ALBERTO Lectures on Observational Cosmology for Master Degree in Astrophysics and Cosmology, *University of Padova*
- [17] VAN DE WEYGAERT, R. AND VAN KAMPEN, E., Voids in Gravitational Instability Scenarios - Part One - Global Density and Velocity Fields in an Einstein - De-Sitter Universe, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 263, p.481, 1993