



Università degli Studi di Padova

Dipartimento di Fisica e Astronomia "Galileo Galilei"
Corso di Laurea in Fisica

**IL TEOREMA DI NEUMARK
PER LE MISURE QUANTISTICHE**

Candidato:
Lorenzo Casarin

Relatore:
Prof. Pieralberto Marchetti

Anno Accademico 2014/2015

Indice

Introduzione	3
1 La Meccanica Quantistica per i sistemi aperti	5
1.1 Assiomi della Meccanica Quantistica per sistemi isolati	5
1.2 I sistemi aperti	7
1.3 POVM	11
1.3.1 Esempi	15
2 Dai POVM ai PVM	19
2.1 Sulla realizzabilità delle misure proiettive	19
2.2 Il Teorema di Neumark	22
2.2.1 Sulle probabilità date dal Teorema	24
2.2.2 Indipendenza del sistema di appoggio	25
2.2.3 Esempi di applicazioni	26
3 Il teorema per spazi di Hilbert di dimensione infinita	29
3.1 Cenni alla formalizzazione matematica	29
3.1.1 Operatori su spazi di Hilbert	30
3.1.2 Misure spettrali di operatori autoaggiunti	30
3.2 Stati, osservabili e misure in un sistema isolato	31
3.2.1 Gli operatori posizione e momento	32
3.3 Stati, osservabili e misure generalizzati	33
3.4 Il Teorema di Neumark	36
3.4.1 Problematiche della costruzione	37
Conclusioni	41
Bibliografia	43

Introduzione

La Meccanica Quantistica è il modello fondamentale del mondo fisico in cui si inseriscono le teorie che descrivono i fenomeni relativi al mondo microscopico e non solo. Tali teorie possono raggiungere elevatissimi livelli di raffinata complicatezza; definire chiaramente con linguaggio matematico la Meccanica Quantistica diventa quindi un problema centrale per garantire una solida base agli sviluppi successivi.

Un primo passo in questa direzione è stata la formulazione di cinque assiomi che caratterizzano il comportamento dei sistemi isolati, definendo chiaramente come si rappresentano concetti chiave quali stato, grandezze osservabili, procedura di misura, evoluzione dinamica e fornendo la base per la descrizione di sistemi composti.

Di questi assiomi, riproposti nella Sezione 1.1 per spazi degli stati finito-dimensionali, quello maggiormente interessante per gli scopi del presente lavoro è il terzo, che descrive le caratteristiche dei processi di misura. Ad una grandezza osservabile corrisponde un operatore autoaggiunto e i valori ottenibili da una misura di tale grandezza sono gli autovalori dell'operatore associato; inoltre, a seguito del processo di misura lo stato del sistema viene proiettato nell'autospazio relativo a tale autovalore. In questo senso ad un processo di misura è associata una famiglia di proiezioni ortogonali – una per ogni autovalore – che, come noto dall'algebra lineare, sommano all'identità; per questa ragione si parla di misure a valori nelle proiezioni (PVM, in inglese acronimo di 'Projection-Valued Measure').

Quanto detto vale però solamente per i sistemi isolati, ma questi non sono che un'astrazione dei sistemi che realmente si incontrano. Gli assiomi non risultano soddisfacenti nella descrizione dei sistemi aperti, ossia sistemi che possono scambiare energia o materia con l'ambiente; la chiave per allargare il formalismo è però compresa negli assiomi stessi: considerando il sistema in esame assieme con il proprio ambiente si ottiene un sistema isolato, per il quale vale la Meccanica Quantistica nella formulazione standard. Da qui, eliminando – in un senso da precisare – l'ambiente si ottengono le regole che devono essere soddisfatte anche considerando questi sistemi più generali di quelli inizialmente in esame.

Per quanto riguarda gli scopi di questa tesi, si osserva che i proiettori menzionati sopra vengono sostituiti da operatori con proprietà più generali, non più ortogonali, ma ancora positivi (da qui la denominazione inglese POVM, 'Positive Operator-Valued Measure'). Una volta allargato il sistema aperto fino a contenere anche l'ambiente, i processi di misura sono rappresentati da proiezioni; a questo punto è abbastanza immediato osservare che la restrizione di tali operatori al sistema originario fornisce un POVM. Si può mostrare anche il viceversa, risultato noto come Teorema di Neumark, il quale assicura che assegnato un sistema ed un POVM è possibile, accoppiando il sistema

in esame con un sistema noto, ottenere un PVM che, ristretto al sistema in esame, fornisce il POVM dato. Importante caratteristica del Teorema di Neumark è che il sistema di appoggio e lo stato di questo sistema sono completamente arbitrari, e non vi è alcuna correlazione con lo stato originario.

Quanto esposto risulta però valido per sistemi caratterizzati da uno spazio degli stati finito-dimensionale, e la generalizzazione a sistemi con infiniti gradi di libertà risulta complessa e non immediata. In un contesto differente, all'interno di una formulazione probabilistica della Meccanica Quantistica, [3] propone una dimostrazione del teorema valida anche a infiniti gradi di libertà, tuttavia è possibile osservare come il suo approccio non garantisca, nella costruzione del sistema composto, le stesse libertà di cui invece gode la formulazione precedente, in quanto il sistema da lui aggiunto risulta correlato con quello originario.

Nel Capitolo 1 viene presentata la Meccanica Quantistica, generalizzando la rappresentazione di stati e misure in maniera adeguata alla descrizione dei sistemi aperti attraverso l'introduzione degli operatori di densità e dei POVM. Il Capitolo 2 è dedicato alla dimostrazione ed all'analisi del Teorema di Neumark per spazi di Hilbert di dimensione finita. Nel Capitolo 3 si discute la generalizzazione a spazi di Hilbert di dimensione infinita.

Notazioni. Vengono adottate nel presente lavoro le usuali convenzioni per la notazione, in particolare \mathcal{H} identifica uno spazio di Hilbert, il cui prodotto scalare viene indicato con $\langle \cdot | \cdot \rangle$, da cui l'usuale notazione bra-ket di Dirac con cui $|\psi\rangle$ indica un generico elemento di \mathcal{H} a cui si associa canonicamente l'elemento $\langle\psi|$ nel duale di \mathcal{H} . L'identità in \mathcal{H} viene indicata con $\mathbb{1}_{\mathcal{H}}$.

Se \mathcal{H} ha dimensione finita e $O : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ è una applicazione lineare, l'autovettore di autovalore o_j è indicato con $|o_j, k\rangle$, o semplicemente $|jk\rangle$ se non vi è pericolo di confusione, essendo k l'eventuale indice di degenerazione. In questo contesto, inoltre, l'operatore di proiezione sul sottospazio relativo all'autovalore o_j si indica con $P_{o_j} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$.

A seconda della comodità, il complesso coniugato di un numero complesso z potrà essere indicato sia con z^* sia con \bar{z} .

Capitolo 1

La Meccanica Quantistica per i sistemi aperti

In questo capitolo viene presentata la Meccanica Quantistica in una formulazione valida per descrivere il comportamento di sistemi aperti, ossia di sistemi non perfettamente isolati, ma che possono scambiare massa, energia, informazione con un altro sistema, ed in definitiva con l'ambiente tutto. Per comprendere come la formulazione standard della Meccanica Quantistica – valida per sistemi chiusi ed isolati – possa essere generalizzata a contesti piú ampi, vengono prima riproposti gli assiomi con cui viene formalizzata attualmente per sistemi con spazio degli stati di dimensione finita.

1.1 Assiomi della Meccanica Quantistica per sistemi isolati

La Meccanica Quantistica per sistemi isolati con spazio di Hilbert di dimensione finita è efficacemente definita in linguaggio matematico da cinque assiomi di seguito riproposti. Questi specificano come rappresentare stati, grandezze osservabili, il modo in cui evolva il sistema effettuando una misura oppure lasciato imperturbato, e come ottenere un sistema composto a partire dai suoi costituenti.

Assioma 1 (Stato di un sistema). Ad un sistema fisico è associato uno spazio di Hilbert \mathcal{H} di dimensione finita. Lo *stato* è la descrizione massimale di un sistema fisico; esso è rappresentato da un raggio vettore $|\psi\rangle$ di \mathcal{H} .

Assioma 2 (Osservabile). Una *osservabile* O è una proprietà misurabile di un sistema fisico; se \mathcal{H} è lo spazio di Hilbert del sistema, essa è rappresentata da un operatore autoaggiunto

$$O : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}.$$

Assioma 3 (Processo di misura). Data una osservabile O di un sistema con spazio di Hilbert \mathcal{H} nello stato $|\psi\rangle$, i valori ottenibili attraverso una misura di O sono tutti e soli gli autovalori $\{o_n\}_n$ dell'operatore O , ciascuno ottenibile con probabilità

$$\text{Prob}(o_n) = \langle \psi | P_n | \psi \rangle.$$

A seguito di un processo di misura di O che fornisca come risultato o_j , lo stato iniziale viene proiettato nel sottospazio relativo a tale autovalore, diventando immediatamente

dopo la misura

$$|\psi\rangle \mapsto \frac{P_j |\psi\rangle}{\|P_j |\psi\rangle\|}.$$

In virtù del precedente assioma, le misure in Meccanica Quantistica standard vengono designate con l'aggettivo 'proiettive'.

Assioma 4 (Dinamica). L'evoluzione temporale di un sistema chiuso¹ di spazio di Hilbert \mathcal{H} è descritta da un operatore unitario

$$U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}.$$

Assioma 5 (Sistema composto). Dati due sistemi A e B con spazi di Hilbert rispettivamente \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_B , al sistema composto AB è associato lo spazio di Hilbert

$$\mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B;$$

se i due sistemi si trovano singolarmente negli stati $|\psi\rangle_A \in \mathcal{H}_A$ e $|\varphi\rangle_B \in \mathcal{H}_B$, il sistema composto si trova nello stato $|\psi\rangle_A \otimes |\varphi\rangle_B \in \mathcal{H}_{AB}$.

Questi assiomi permettono di costruire teorie matematicamente consistenti per la descrizione dei sistemi isolati; tuttavia i sistemi isolati costituiscono solamente una approssimazione di quelli che si incontrano nel mondo fisico. Nella pratica, infatti, le osservazioni che vengono compiute sono limitate ad una piccola parte di un sistema quantistico più grande; questa osservazione, apparentemente banale, è in realtà alla base della descrizione dei sistemi aperti.

Prima di procedere, osserviamo alcune caratteristiche delle grandezze presentate attraverso gli assiomi sopra esposti. Supponiamo di avere un sistema a cui è associato lo spazio di Hilbert \mathcal{H} che si trovi nello stato $|\psi\rangle$, assunto normalizzato.

Allo stato $|\psi\rangle$ è possibile associare l'operatore autoaggiunto

$$\rho_\psi = |\psi\rangle \langle \psi|,$$

ossia una proiezione su un sottospazio unidimensionale di \mathcal{H} . Dalla definizione di ρ_ψ è immediato ricavare che è non-negativo, ha traccia unitaria ed è idempotente, infatti

$$\langle \varphi | \rho_\psi | \varphi \rangle = \langle \varphi | \psi \rangle \langle \psi | \varphi \rangle = |\langle \varphi | \psi \rangle|^2 \geq 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{H},$$

$$\text{tr } \rho_\psi = \text{tr } (|\psi\rangle \langle \psi|) = \langle \psi | \psi \rangle = 1,$$

in quanto lo stato è normalizzato, e similmente

$$\rho_\psi^2 = (|\psi\rangle \langle \psi|) (|\psi\rangle \langle \psi|) = |\psi\rangle \langle \psi | \psi \rangle \langle \psi| = |\psi\rangle \langle \psi| = \rho_\psi;$$

notiamo in particolare come queste proprietà siano valide qualunque sia lo stato del sistema. Viceversa data una proiezione $\tilde{\rho} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ su un sottospazio di dimensione uno, è univocamente identificato lo stato $|\tilde{\psi}\rangle$ che genera il sottospazio, in quanto, detta $\{|i\rangle\}_i$ una base di \mathcal{H} , i vettori $\{\tilde{\rho} |i\rangle\}_i$ generano per ipotesi un sottospazio di dimensione uno.

¹Da intendersi, in questo contesto: sistema in cui non vengano effettuate misure dall'esterno.

Consideriamo ora un'osservabile O del sistema, con operatore associato $O : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$. Poiché O è autoaggiunto, possiede solamente autovalori reali e i suoi autovettori costituiscono una base ortonormale di \mathcal{H} . Dato un autovalore o_j e detti $\{|o_j, k\rangle\}_k$ i suoi autovettori (k è l'indice di degenerazione), la proiezione sul relativo autospazio è definita da

$$P_j \equiv P_{o_j} = \sum_k |o_j, k\rangle \langle o_j, k|;$$

in virtù di quanto esposto, O ammette la rappresentazione spettrale

$$O = \sum_{j,k} o_j |o_j, k\rangle \langle o_j, k| = \sum_j o_j P_j$$

e gli operatori di proiezione sono ortogonali, nel senso che risulta

$$P_i P_j = \delta_{ij} P_j$$

e

$$P_j^\dagger = P_j.$$

1.2 I sistemi aperti

Quando si considerano sistemi aperti, ossia interagenti con elementi al di fuori di essi, in generale accade che gli assiomi precedentemente enunciati risultino violati. Considerando un sottosistema contenuto in un sistema più grande, risulta infatti che

- gli stati non sono rappresentati da raggi vettori,
- i processi di misura non corrispondono a proiezioni ortogonali, e
- l'evoluzione non agisce come un operatore unitario.

Di seguito vengono analizzati i primi due punti, con particolare enfasi sul secondo, strettamente legato al presente lavoro. Sostanzialmente tralasciamo invece l'ultimo punto, che risulta meno semplice degli altri due ed esula dai nostri scopi.

Come anticipato nella sezione precedente, anche i sistemi fisici considerati isolati che si incontrano possono essere solamente in prima approssimazione ritenuti tali, in quanto sono sempre parte di un sistema più grande, al limite l'intero Universo isolato per definizione. Seguendo questo principio, un sistema aperto può essere "completato" ad un sistema isolato considerandolo assieme al suo ambiente; a seguito di questa operazione si ottiene un sistema isolato, per il quale vale la Meccanica Quantistica nella sua formulazione standard.

Cerchiamo ora di formalizzare la precedente intuizione in maniera euristica. Consideriamo un sistema diviso in due componenti, A e B con spazio di Hilbert rispettivamente \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_B ; seguendo quanto espresso nel quinto assioma, possiamo scrivere lo spazio di Hilbert del sistema composto AB come $\mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. Date le basi $\{|i\rangle_A\}_i$ di \mathcal{H}_A e $\{|\mu\rangle_B\}_\mu$ di \mathcal{H}_B è possibile costruire una base di $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ data da $\{|i\rangle_A \otimes |\mu\rangle_B\}_{i,\mu}$; pertanto, un arbitrario stato puro del sistema \mathcal{H}_{AB} può essere espresso come

$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_{i,\mu} a_{i\mu} |i\rangle_A \otimes |\mu\rangle_B,$$

dove i coefficienti $\{a_{i\mu}\}_{i,\mu}$ sono sottoposti al vincolo di normalizzazione

$$\sum_{i,\mu} |a_{i\mu}|^2 = \langle \psi | \psi \rangle_{AB} = 1.$$

Prendiamo ora un'osservabile M_A del sottosistema A rappresentato nel sistema completo AB da un operatore

$$M_A \otimes \mathbb{1}_B : \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \rightarrow \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B;$$

il suo valore medio è quindi dato da

$$\begin{aligned} \langle M_A \otimes \mathbb{1}_B \rangle &= \langle \psi | M_A \otimes \mathbb{1}_B | \psi \rangle_{AB} \\ &= \sum_{i,j,\mu,\nu} [a_{j\nu}^* \langle j |_A \otimes \langle \nu |_B] (M_A \otimes \mathbb{1}_B) [a_{i\mu} |i\rangle_A \otimes |\mu\rangle_B] \\ &= \sum_{i,j,\mu,\nu} a_{j\nu}^* a_{i\mu} \langle j | M_A | i \rangle_A \langle \nu | \mathbb{1}_B | \mu \rangle_B \\ &= \sum_{i,j,\mu} a_{j\mu}^* a_{i\mu} \langle j | M_A | i \rangle_A, \end{aligned}$$

dove nell'ultima uguaglianza si è sfruttato il fatto che $\langle \nu | \mathbb{1}_B | \mu \rangle_B = \delta_{\nu\mu}$; definendo ora

$$\rho_A = \text{tr}_B (|\psi\rangle \langle \psi|) = \sum_{i,j,\mu} a_{j\mu}^* a_{i\mu} |i\rangle_A \langle j|_A$$

l'espressione precedente può essere convenientemente riscritta nella forma

$$\langle M_A \otimes \mathbb{1}_B \rangle = \text{tr} (M_A \rho_A).$$

L'operatore ρ_A è detto *operatore di densità* del sottosistema A; secondo la definizione, esso è ottenuto calcolando la traccia parziale sul sistema B dell'operatore associato allo stato puro nel sistema composto AB. Sempre dalla definizione è possibile notare alcune proprietà dell'operatore di densità ρ_A :

- è autoaggiunto, infatti

$$\rho_A^\dagger = \left(\sum_{i,j,\mu} a_{j\mu}^* a_{i\mu} |i\rangle_A \langle j|_A \right)^\dagger = \sum_{i,j,\mu} a_{j\mu} a_{i\mu}^* |j\rangle_A \langle i|_A = \rho_A;$$

- è non-negativo, in quanto qualunque sia $|\varphi\rangle \in \mathcal{H}_A$ risulta

$$\begin{aligned} \langle \varphi | \rho_A | \varphi \rangle &= \sum_{i,j,\mu} a_{j\mu}^* a_{i\mu} \langle \varphi | i \rangle_A \langle j | \varphi \rangle_A \\ &= \sum_{\mu} \left[\left(\sum_i a_{i\mu} \langle \varphi | i \rangle_A \right) \left(\sum_j a_{j\mu}^* \langle j | \varphi \rangle_A \right) \right] \\ &= \sum_{\mu} \left| \sum_i a_{i\mu} \langle \varphi | i \rangle_A \right|^2 \geq 0; \end{aligned}$$

- ha traccia unitaria, poiché la normalizzazione di $|\psi\rangle$ implica

$$\mathrm{tr}_A \rho_A = \mathrm{tr}_A \left[\sum_{i,j,\mu} a_{j\mu}^* a_{i\mu} |i\rangle_A \langle j|_A \right] = \sum_{i\mu} |a_{i\mu}|^2 = 1.$$

Dalle proprietà enunciate possiamo dedurre che l'operatore di densità ρ_A è diagonalizzabile in una base ortonormale, ha autovalori positivi o nulli e gli autovalori sommano all'unità. Queste proprietà sono condivise con l'operatore ρ_ψ definito in precedenza, che corrisponde quindi, con la nuova terminologia introdotta, all'operatore di densità di uno stato rappresentato da un raggio vettore. Non vale però il viceversa, ossia non è possibile in generale interpretare un operatore di densità come la proiezione su un sottospazio unidimensionale. Questo si può vedere dopo aver diagonalizzato ρ_A ; da quanto appena detto si può scrivere

$$\rho_A = \sum_a p_a |a\rangle_A \langle a|_A,$$

dove $\{|a\rangle_A\}_a \subseteq \mathcal{H}_A$ è la base ortonormale di autovettori di ρ_A e gli autovalori $\{p_a\}_a$ rispettano le condizioni $0 \leq p_a \leq 1$ e $\sum_a p_a = 1$. Con un semplice calcolo si ottiene

$$\mathrm{tr}_A \rho_A^2 = \mathrm{tr}_A \left[\sum_a p_a^2 |a\rangle_A \langle a|_A \right] = \sum_a p_a^2 \leq \sum_a p_a = 1,$$

valendo l'uguaglianza se e solo se $0 \neq p_a = 1$ per un unico addendo; in generale, pertanto, uno stato $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_A$ tale che $\rho_A = \rho_\psi$ non è ben definito.

Siamo quindi giustificati a dare la seguente.

Definizione 1.2.1. Sia \mathcal{H} uno spazio di Hilbert. Diremo che $\rho : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ è un operatore di densità se è una applicazione lineare autoaggiunta, non-negativa e di traccia unitaria.

Proponiamo quindi una generalizzazione dell'Assioma 1 per i sistemi aperti.

Assioma 1.2.2. Ad un sistema fisico è associato uno spazio di Hilbert \mathcal{H} di dimensione finita. Lo stato è la descrizione di un sistema fisico; esso è rappresentato da un operatore di densità $\rho : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$.

Manteniamo valido l'Assioma 5, intendendo gli stati come operatori di densità.

Possiamo sfruttare l'operatore di densità per distinguere con una definizione precisa due grandi classi di stati, puri e misti, come già implicitamente fatto in precedenza.

Definizione 1.2.3. Sia \mathcal{H} lo spazio di Hilbert di un sistema fisico. Chiameremo *puro* uno stato rappresentato da un operatore di densità ρ tale che $\rho^2 = \rho$; diversamente, lo stato verrà detto *misto*.

Grazie a quanto discusso in precedenza, uno stato puro può quindi essere identificato con un raggio vettore, come accadeva nella formulazione presentata in apertura, e corrisponde pertanto ad una conoscenza massimale sul sistema. Possiamo invece interpretare uno stato misto come un ensemble di stati puri $\{|a\rangle\}_a$, in cui ogni stato puro $|a\rangle$ appare con probabilità p_a .

Per caratterizzare i sistemi con un operatore di densità, è necessario almeno descriverne l'evoluzione a seguito di un processo di misura proiettiva. Prendiamo un sistema con spazio di Hilbert \mathcal{H} nello stato puro $|\psi\rangle$ e l'osservabile O ; sappiamo che dopo una misura di O fornisce il risultato o con probabilità $\text{Prob}(o) = \langle \psi | P_o | \psi \rangle$, nel qual caso determina la trasformazione dello stato in $P_o |\psi\rangle / \|P_o |\psi\rangle\|$, che in termini degli operatori di densità corrisponde alla

$$\rho_\psi = |\psi\rangle \langle \psi| \mapsto \frac{P_o |\psi\rangle \langle \psi| P_o}{\langle \psi | P_o | \psi \rangle} = \frac{P_o \rho_\psi P_o}{\text{tr } P_o \rho_\psi},$$

essendo P_o autoaggiunto ed idempotente. Possiamo poi riconoscere che

$$\text{Prob}(o) = \text{tr } P_o \rho_\psi P_o = \text{tr } P_o \rho_\psi.$$

Assumiamo quanto visto valere anche per gli stati misti con la seguente estensione provvisoria dell'Assioma 3.

Assioma 1.2.4. Data una osservabile O di un sistema con spazio di Hilbert \mathcal{H} nello stato ρ , i valori ottenibili attraverso una misura di O sono tutti e soli gli autovalori $\{o_n\}_n$ dell'operatore O , ciascuno ottenibile con probabilità

$$\text{Prob}(o_n) = \text{tr } P_n \rho; \tag{1.1}$$

a seguito di un processo di misura di O che fornisca come risultato o_j , lo stato iniziale diviene

$$\rho \mapsto \frac{P_j \rho P_j}{\text{tr } P_j \rho}.$$

Notiamo infine un risultato sorprendente: a differenza che nel caso classico, ogni stato può essere purificato, ossia dato un qualunque stato di un sistema, allargando opportunamente quest'ultimo possiamo interpretare lo stato in esame come la restrizione di uno stato puro addirittura essenzialmente unico; in questo senso, la procedura costruttiva con cui si sono motivate le definizioni precedenti acquista ulteriore validità. Di seguito vengono enunciati in maniera rigorosa questi concetti.

Definizione 1.2.5. Sia ρ uno stato di un sistema A con spazio di Hilbert \mathcal{H}_A . Chiameremo *purificazione* di ρ uno stato puro $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ tale che $\rho = \text{tr}_B |\psi\rangle \langle \psi|$; B è detto sistema purificante.

Teorema 1.2.6. *Ogni stato di un sistema ammette una purificazione. Inoltre, due diverse purificazioni differiscono per una trasformazione localmente unitaria del sistema purificante.*

Omettiamo la dimostrazione in quanto fuori dagli scopi del presente lavoro. Il lettore interessato può trovarla in [8].

In virtù del precedente teorema nel presente lavoro verranno spesso considerati stati puri.

1.3 POVM

In questa Sezione viene presentata l'estensione delle misure standard, anche chiamate PVM in quanto corrispondono a famiglie di proiezioni ortogonali, come discusso in precedenza.

Sulla falsariga di quanto fatto per la generalizzazione degli stati come raggi vettori, allarghiamo idealmente il sistema aperto fino a comprendere l'ambiente, ottenendo così un sistema dove i processi di misura sono efficacemente descritti da PVM; restringeremo poi tali operatori al sistema iniziale per capire come generalizzare il concetto di misura.

Consideriamo allora un sistema AB, isolato, contenente due componenti, A e B, a cui sono associati gli spazi di Hilbert rispettivamente \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_B ; lo spazio di Hilbert associato al sistema totale è pertanto $\mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. Introduciamo ora una base ortonormale per lo spazio di Hilbert \mathcal{H}_A e una per lo spazio di Hilbert \mathcal{H}_B , dette rispettivamente $\{|i\rangle_A\}_i$ e $\{|\mu\rangle_B\}_\mu$; da queste si può costruire, ancora una volta, una base per lo spazio di Hilbert $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ data da $\{|i\rangle_A \otimes |\mu\rangle_B\}_{i,\mu}$. Supponiamo di conoscere gli stati dei due sistemi A e B, rispettivamente ρ_A e ρ_B ; possiamo quindi determinare lo stato del sistema composto AB come

$$\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B. \quad (1.2)$$

Il modo di procedere che viene di seguito adottato parte dal presupposto che, nonostante stiamo descrivendo il sistema composto nella sua interezza, siamo interessati alle caratteristiche possedute da una misura solamente su una porzione dello stesso (A, in particolare), e soprattutto alle probabilità dei possibili esiti.

Sia E un'osservabile del sistema rappresentata dall'operatore autoaggiunto

$$E : \mathcal{H}_{AB} \rightarrow \mathcal{H}_{AB};$$

sia $\{a\}_a$ l'insieme dei suoi autovalori; seguendo gli assiomi della formulazione standard possiamo caratterizzare i processi di misura con la famiglia di proiettori nei rispettivi autospazi $\{P_a\}_a$, soddisfacendo tali proiettori le consuete relazioni caratteristiche dei PVM, ossia

$$P_a P_{a'} = \delta_{aa'} P_a$$

e

$$\sum_a P_a = \mathbb{1}_{AB}.$$

Tramite essi possono essere valutate le probabilità a priori dei possibili esiti $\{a\}_a$ attraverso la relazione

$$p_a = \text{tr}_{AB} [P_a (\rho_{AB})]. \quad (1.3)$$

L'espressione precedente può essere riscritta sfruttando la (1.2) ed esprimendo gli elementi di matrice mediante le basi introdotte in precedenza, scrivendo

$$\begin{aligned} \text{tr}_{AB} [P_a (\rho_A \otimes \rho_B)] &= \sum_{i,\mu} \langle i|_A \otimes \langle \mu|_B P_a (\rho_A \otimes \rho_B) |i\rangle_A \otimes |\mu\rangle_B \\ &= \sum_{i,j,\mu,\nu} \langle i|_A \otimes \langle \mu|_B P_a |j\rangle_A \otimes |\nu\rangle_B \langle j|_A \otimes \langle \nu|_B (\rho_A \otimes \rho_B) |i\rangle_A \otimes |\mu\rangle_B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i,j,\mu,\nu} (\langle i|_A \otimes \langle \mu|_B P_a |j\rangle_A \otimes |\nu\rangle_B) \langle j|\rho_A|i\rangle_A \langle \nu|\rho_B|\mu\rangle_B \\
 &= \sum_{i,j,\mu,\nu} (P_a)_{i\mu,j\nu} (\rho_A)_{ji} (\rho_B)_{\nu\mu}
 \end{aligned}$$

dove nel secondo passaggio si è sfruttata la risoluzione dell'identità di Dirac in \mathcal{H}_{AB} , $\mathbb{1}_{AB} = \sum_{j,\nu} (|j\rangle_A \otimes |\nu\rangle) (\langle j|_A \otimes \langle \nu|) = \sum_{j,\nu} |j\rangle_A \langle j|_A \otimes |\nu\rangle \langle \nu|$. Definiamo ora

$$(F_a)_{ij} := \sum_{\mu,\nu} (P_a)_{i\mu,j\nu} (\rho_B)_{\nu\mu}, \quad (1.4)$$

in modo che l'espressione ricavata per p_a diventi

$$p_a = \text{tr}_{AB} [P_a (\rho_A \otimes \rho_B)] = \sum_{i,j} (F_a)_{ij} (\rho_A)_{ji}. \quad (1.5)$$

Prima di procedere, osserviamo che la (1.4) altro non è che l'espressione degli elementi di matrice dell'endomorfismo di \mathcal{H}_A dato da

$$\begin{aligned}
 F_a &= \sum_{i,j} |i\rangle_A (F_a)_{ij} \langle j|_A \\
 &= \sum_{i,j,\mu,\nu} |i\rangle_A (P_a)_{i\mu,j\nu} (\rho_B)_{\nu\mu} \langle j|_A \\
 &= \sum_{i,j,\mu,\nu} |i\rangle_A (\langle i|_A \otimes \langle \mu|_B P_a |j\rangle_A \otimes |\nu\rangle_B) \langle \nu|\rho_B|\mu\rangle_B \langle j|_A \\
 &= \sum_{\mu,\nu} \langle \mu| P_a |\nu\rangle_B \langle \nu|\rho_B|\mu\rangle_B \\
 &= \sum_{\mu} \langle \mu| P_a \rho_B |\mu\rangle_B,
 \end{aligned}$$

dove si sono sfruttate nuovamente le risoluzioni dell'identità di Dirac, questa volta dei soli \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_B , ovvero $\mathbb{1}_A = \sum_i |i\rangle_A \langle i|_A$ e $\mathbb{1}_B = \sum_{\nu} |\nu\rangle \langle \nu|$.

In definitiva possiamo riconoscere che l'operatore F_a altro non è che

$$F_a = \text{tr}_B P_a \rho_B, \quad (1.6)$$

con cui possiamo esprimere p_a dalla (1.5) secondo

$$p_a = \text{tr}_{AB} [P_a (\rho_A \otimes \rho_B)] = \text{tr}_A F_a \rho_A = \text{tr}_A [\text{tr}_B P_a \rho_B] \rho_A. \quad (1.7)$$

Chiaramente la costruzione precedente vale per qualunque autovalore a dell'osservabile; vediamo ora alcune proprietà di cui godono gli operatori $\{F_a\}_a$.

- Sono hermitiani, poiché lo sono gli operatori P_a e ρ_B e per le proprietà della traccia, infatti

$$F_a^\dagger = \text{tr}_B (P_a \rho_B)^\dagger = \text{tr}_B \rho_B^\dagger P_a^\dagger = \text{tr}_B \rho_B P_a = \text{tr}_B P_a \rho_B = F_a.$$

- Sono semidefiniti positivi, come si mostra espandendo l'operatore di densità ρ_B in una base $\{|\lambda\rangle\}_\lambda$ di suoi autovettori; in questa base vale

$$\rho_B = \sum_\lambda p_\lambda |\lambda\rangle_B \langle\lambda|_B,$$

da cui

$$F_a = \sum_\lambda \langle\lambda| P_a \rho_B |\lambda\rangle_B = \sum_\lambda p_\lambda \langle\lambda| P_a |\lambda\rangle_B.$$

Essendo le probabilità e i proiettori non-negativi, $p_\lambda \geq 0$ e $P_a \geq 0$, risulta che comunque preso $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_A$ vale

$$\langle\psi| F_a |\psi\rangle_A = \sum_\lambda p_\lambda (\langle\psi|_A \otimes \langle\lambda|_B P_a |\psi\rangle_A \otimes |\lambda\rangle_B) \geq 0. \quad (1.8)$$

- Risolvono l'identità, nel senso che sommano a $\mathbb{1}_A$; infatti,

$$\sum_a F_a = \sum_a \text{tr}_B P_a \rho_B = \text{tr}_B \sum_a P_a \rho_B, \quad (1.9)$$

da cui, ricordando la (1.3), ossia il fatto che i proiettori risolvono l'identità sull'intero sistema AB, e che gli operatori di densità hanno traccia unitaria,

$$\sum_a F_a = \text{tr}_B \left[\left(\sum_a P_a \right) \right] \rho_B = \text{tr}_B \mathbb{1}_{AB} \rho_B = \mathbb{1}_A. \quad (1.10)$$

Le proprietà appena mostrate caratterizzano il modo in cui un osservatore che abbia accesso solamente ad una porzione di un sistema piú grande descrive processi di misura standard eseguiti sull'intero sistema chiuso; infatti, un osservatore che abbia accesso solamente al sistema A descrive le misure come una collezione di operatori $\{F_a\}_a$ unitari, positivi e risolvono l'identità. Per tali motivi una famiglia di operatori con le proprietà precedenti viene detta misura a operatori positivi (POVM).

Rendiamo quindi rigoroso quanto detto, iniziando dalla definizione di POVM indipendentemente dalla costruzione eseguita.

Definizione 1.3.1. Un POVM su un sistema A con spazio di Hilbert \mathcal{H}_A è un insieme di operatori $\{F_a\}_a$ su \mathcal{H}_A tali che

- per ogni a , F_a è hermitiano;
- per ogni a , F_a è un operatore semidefinito positivo;
- risolvono l'identità, nel senso che

$$\sum_a F_a = \mathbb{1}_A.$$

L'Assioma 3 della Meccanica Quantistica, come espresso in precedenza, lega i processi di misura ai PVM; a seguito della discussione svolta risulta lecito considerare i POVM una generalizzazione dei PVM. Secondo questo principio proponiamo la seguente estensione.

Assioma 1.3.2. La misura di una osservabile di un sistema con spazio di Hilbert \mathcal{H} dalla cui misura si possono ottenere solamente i valori $\{a\}_a$ è rappresentata da un POVM $\{F_a\}_a$ su \mathcal{H} ; la probabilità di ottenere l'esito a , detto ρ l'operatore di densità che rappresenta lo stato del sistema, è

$$\text{Prob}(a) = \text{tr } F_a \rho. \quad (1.11)$$

Nell'assioma non viene indicato come esprimere il nuovo stato del sistema in funzione delle grandezze assegnate; questa omissione è motivata dal fatto che in generale il calcolo dell'effetto di una misura non triviale sullo stato non è banale ed esula dagli scopi del presente lavoro.

Mostriamo ora che la rappresentazione delle probabilità data dalla (1.11) è caratteristica, nel senso che ogni distribuzione di probabilità può essere espressa attraverso un unico POVM, sotto l'ipotesi che la relazione fra distribuzione e stato sia lineare. Premettiamo un lemma tecnico.

Lemma 1.3.3. *Se A è tale che $\text{tr } A \rho = 0$ qualunque sia lo stato ρ , allora $A = 0$.*

Dimostrazione. Sia $\{|i\rangle\}_i$ una base dello spazio di Hilbert; considerando lo stato puro rappresentato da $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$, $\text{tr } A \rho = 0$ si traduce nella condizione $\langle\psi|A|\psi\rangle = 0$.

La conclusione segue proprio dall'arbitrarietà dello stato. Se $|\psi\rangle = |i\rangle$, otteniamo l'annullarsi dei termini diagonali $A_{ii} = 0$ qualunque sia i .

Se invece consideriamo $|\psi\rangle = (|j\rangle + |k\rangle)/\sqrt{2}$, l'ipotesi diventa $\langle j|A|k\rangle + \langle j|A|j\rangle + \langle k|A|j\rangle + \langle k|A|k\rangle = 0$, che eliminati i termini diagonali grazie al punto precedente porge $A_{jk} + A_{kj} = 0$.

Prendiamo infine $|\psi\rangle = (|j\rangle + i|k\rangle)/\sqrt{2}$, essendo i l'unità immaginaria; un calcolo simile al precedente restituisce $i\langle j|A|k\rangle + \langle j|A|j\rangle - i\langle k|A|j\rangle + \langle k|A|k\rangle = 0$, da cui analogamente $A_{jk} - A_{kj} = 0$.

Combinando i due risultati si conclude $A_{jk} = 0$ per ogni scelta degli indici, che è la tesi. \square

Proposizione 1.3.4. *Dato un sistema con spazio di Hilbert \mathcal{H} , un insieme di esiti $\{a\}_a$ ed una distribuzione di probabilità $\{p_\rho(a)\}_a$ su di esso lineare rispetto allo stato ρ , esiste un unico POVM $\{F_a\}_a$ tale che $p_\rho(a) = \text{tr } F_a \rho$ qualunque sia lo stato ρ .*

Dimostrazione. Data una base $\{|i\rangle\}_i$ dello spazio di Hilbert, $\{|i\rangle\langle j|\}_{ij}$ è una base delle applicazioni lineari su \mathcal{H} , e dunque ogni stato ρ può essere espresso nella forma $\rho = \sum_{ij} \rho_{ij} |i\rangle\langle j|$ per opportuni coefficienti ρ_{ij} . Una qualunque forma $\varphi(\rho)$ lineare in ρ è allora identificata dai valori φ_{ij} che assume sugli elementi della base; si potrà allora scrivere $\varphi(\rho) = \sum_{ij} \rho_{ij} \varphi_{ij}$, che è l'espressione della traccia di $\Phi \rho$ per una opportuna matrice Φ , che quindi assicura la forma data per la distribuzione di probabilità.

Mostriamo che se $p_\rho(a) = \text{tr } F_a \rho$, allora F_a deve essere una matrice hermitiana. Dalla realtà di p_ρ segue che $\text{tr } F_a \rho = (\text{tr } F_a \rho)^* = \text{tr } (F_a \rho)^\dagger = \text{tr } \rho^\dagger F_a^\dagger$; sfruttando quindi l'hermiticità di ρ e le proprietà della traccia si giunge infine all'equazione $\text{tr } F_a \rho = \text{tr } F_a^\dagger \rho$, e quindi $\text{tr } (F_a - F_a^\dagger) \rho = 0$. A questo punto, grazie al Lemma 1.3.3, si ha $F_a = F_a^\dagger$, ossia l'hermiticità di F_a per ogni a .

Similmente, la positività di p_ρ indipendentemente dallo stato implica la positività della matrice F_a . Infatti $p_\rho = \text{tr } F_a \rho \geq 0$ vale in particolare per gli stati puri, rappresentati dall'operatore $\rho_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$, da cui $0 \leq \text{tr } F_a \rho_\psi = \langle\psi|F_a|\psi\rangle$; dall'arbitrarietà dello stato discende la positività dell'operatore F_a .

Per concludere ci basta mostrare che $\sum_a F_a = \mathbb{1}$. Poiché le probabilità sommano ad 1, si ha $1 = \sum_a \text{tr} F_a \rho = \text{tr} (\sum_a F_a) \rho$; utilizzando il fatto che gli stati hanno traccia unitaria si giunge quindi alla relazione $\text{tr} (\sum_a F_a - \mathbb{1}) \rho = 0$, che sfruttando ancora il Lemma 1.3.3 permette di concludere che $\{F_a\}_a$ risolve l'identità.

Pertanto, la famiglia di operatori F_a costituisce un POVM; l'unicità si ha applicando allo stesso modo il lemma all'equazione $\text{tr} F_a \rho = \text{tr} F'_a \rho$. \square

Terminiamo il capitolo dando alcuni esempi per visualizzare i concetti.

1.3.1 Esempi

Verranno prima analizzati esempi provenienti dalla classe delle proiezioni, per poi esporne uno genuino. Usiamo un sistema di unità in cui $\hbar = 1$.

Proiezioni ortogonali. Supponiamo di avere una particella di spin- $\frac{1}{2}$ di cui consideriamo solamente il grado di libertà dato allo spin. Lo spazio di Hilbert è \mathbb{C}^2 e l'operatore della componente z dello spin si scrive, nella base dei suoi autostati,

$$S_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Lo spettro dell'operatore è ovviamente $\{1/2, -1/2\}$, e il PVM associato è banalmente costituito dagli operatori

$$P_{1/2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{-1/2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

da queste espressioni è evidente che $P_{1/2}$ e $P_{-1/2}$ sono hermitiani, positivi e rispettano l'identità $P_{1/2} + P_{-1/2} = \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2}$, e dunque definiscono un POVM.

Appena più complicato è il caso dell'operatore associato alla componente x dello spin, che, sempre nella base indicata poco sopra, ha la forma

$$S_x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La soluzione dell'equazione secolare $\lambda^2 - 1/4 = 0$ porge ancora lo spettro $\{1/2, -1/2\}$ e gli autovettori risultano

$$|1/2_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad |-1/2_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Da queste espressioni è facile calcolare il PVM associato all'operatore S_x , costituito dalle due matrici

$$P_{1/2}^x = |1/2_x\rangle \langle 1/2_x| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P_{-1/2}^x = |-1/2_x\rangle \langle -1/2_x| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si vede facilmente che si tratta di operatori hermitiani positivi, e che soddisfano la relazione $P_{1/2}^x + P_{-1/2}^x = \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2}$, pertanto $\{P_{1/2}^x, P_{-1/2}^x\}$ risulta un POVM.

In generale, è chiaro che la classe dei POVM contiene i PVM: una famiglia di proiettori $\{P_a\}_a$ che risolvono l'identità rispetta i tre requisiti della Definizione 1.3.1, con la richiesta aggiuntiva che

$$P_a P_{a'} = \delta_{aa'} P_a;$$

è comunque possibile costruire esempi che mostrano come il viceversa non sia vero, come vediamo di seguito.

Un esempio notevole. Prendiamo nuovamente una particella di spin- $\frac{1}{2}$ di cui si considera solamente lo spin, quindi con $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$, e sia \hat{n} un versore generico dello spazio fisico che in coordinate polari (θ, φ) con θ l'angolo polare e φ quello azimutale assume la forma

$$\hat{n} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix};$$

la componente lungo la direzione \hat{n} dello spin è allora definita secondo

$$S_{\hat{n}} = S \cdot \hat{n} = S_x \hat{n}_x + S_y \hat{n}_y + S_z \hat{n}_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos \theta & e^{-i\varphi} \sin \theta \\ e^{i\varphi} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}, \quad (1.12)$$

espressa ancora nella base di autostati di S_z , in cui, oltre alle precedenti espressioni per S_x ed S_z si è ricordato che

$$S_y = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Come si verifica facilmente tramite un conto diretto, l'operatore $S_{\hat{n}}$ è diagonalizzabile con autovalori $\pm 1/2$, a cui corrispondono gli autostati

$$|\hat{n}; 1/2\rangle = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi/2} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

e

$$|\hat{n}; -1/2\rangle = \begin{pmatrix} -e^{-i\varphi/2} \sin \frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi/2} \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}.$$

Per chiarezza, nei ket si è evidenziata la dipendenza dalla direzione. Il proiettore sul sottospazio relativo all'autovalore $+1/2$ è quindi dato da

$$E(\hat{n}) := P_{1/2}^{\hat{n}} = \begin{pmatrix} \cos^2 \frac{\theta}{2} & e^{-i\varphi} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} & \sin^2 \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad (1.13)$$

il cambio di notazione sarà utile a breve. Il proiettore $E(\hat{n})$ soddisfa una identità algebrica molto importante; sfruttando le relazioni trigonometriche $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$ e $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$, la (1.13) si riscrive

$$E(\hat{n}) = \begin{pmatrix} \cos^2 \frac{\theta}{2} & e^{-i\varphi} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} & \sin^2 \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos \theta + 1 & e^{-i\varphi} \sin \theta \\ e^{i\varphi} \sin \theta & 1 - \cos \theta \end{pmatrix},$$

che ricordando la (1.12) diventa infine

$$E(\hat{n}) = \frac{1}{2} (\mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} + 2S \cdot \hat{n}). \quad (1.14)$$

Ora che abbiamo esposto queste nozioni preliminari, siamo pronti ad esibire un esempio di POVM che non costituisce PVM. Consideriamo un insieme $\{\hat{n}_a\}_{a=1}^N$, con $N > 2$, di versori nello spazio tridimensionale ed una sequenza $\{\lambda_a\}_{a=1}^N$ di numeri positivi tali che

$$\sum_a \lambda_a \hat{n}_a = 0 \quad \text{con} \quad \sum_a \lambda_a = 1. \quad (1.15)$$

Siano $\{E(\hat{n}_a)\}_a$ i proiettori secondo la (1.13); da ogni $E(\hat{n}_a)$, definiamo l'operatore

$$F_a = 2\lambda_a E(\hat{n}_a). \quad (1.16)$$

Ogni F_a così definito è chiaramente hermitiano non-negativo in quanto proporzionale ad un proiettore e $\lambda_a > 0$; inoltre la collezione $\{F_a\}_a$ risolve l'identità, infatti sfruttando la (1.14)

$$\sum_a F_a = \sum_a 2\lambda_a E(\hat{n}_a) = \sum_a \lambda_a (\mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} + 2S \cdot \hat{n}_a).$$

e quindi, ricordando le ipotesi (1.15),

$$\sum_a F_a = \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} \left(\sum_a \lambda_a \right) + 2S \cdot \left(\sum_a \lambda_a \hat{n}_a \right) = \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2}.$$

Per quanto visto, l'insieme di operatori $\{F_a\}_a$ costituisce un POVM; non costituisce invece un PVM in quanto ogni F_a non è neppure in generale un proiettore. Infatti, ad esempio, non è idempotente: $F_a^2 = 4\lambda_a^2 E(\hat{n}_a)$ ma nulla impone il vincolo $\lambda_a = \frac{1}{2}$.

Forniamo infine un esempio numerico esplicito della precedente costruzione. Consideriamo i tre versori

$$\hat{n}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{n}_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \quad \hat{n}_3 = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

giacenti nel piano $y = 0$, definiscono l'asse z e le due direzioni formanti con esso e fra loro 120° , e corrispondono quindi agli angoli $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 2\pi/3$ e $\theta_3 = 4\pi/3$, tutti con $\varphi = 0$. Prendiamo poi il caso simmetrico $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1/3$, che garantisce il verificarsi delle condizioni (1.15); il POVM è allora costituito dagli operatori

$$F_1 = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_2 = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}, \quad F_3 = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}. \quad (1.17)$$

Dalla costruzione presentata e dalla formula esplicita degli operatori precedenti è chiaro che sono verificate le richieste della Definizione 1.3.1 e pertanto costituiscono un POVM non formato da proiettori.

Capitolo 2

Dai POVM ai PVM

Nel capitolo precedente abbiamo definito il concetto di POVM come estensione dei PVM a partire da una restrizione delle misure proiettive su una componente del prodotto tensore. Tale procedimento può forse apparire artificioso e poco generale; ora invece vedremo come, almeno per spazi degli stati di dimensione finita, ogni POVM possa essere ottenuto come restrizione di un PVM definito considerando il prodotto fra lo spazio di Hilbert del sistema che stiamo analizzando ed un altro quasi totalmente indipendente da esso.

Prima di procedere alla trattazione del teorema, premettiamo una breve discussione sulla realizzabilità delle misure proiettive, in cui mostreremo come, almeno in principio, ogni PVM possa essere effettivamente realizzato in pratica con un processo di misura al fine di legittimare anche dal punto di vista operativo questo modo di procedere.

2.1 Sulla realizzabilità delle misure proiettive

In questa sezione riproponiamo, seguendo l'esempio di [7], il classico argomento di von Neumann nella trattazione del problema della realizzazione nella pratica di una misura dato il sistema di proiettori associati. L'idea di base è quella di accoppiare al sistema quantistico un 'indicatore' classico macroscopico, tramite le cui osservazioni viene preparato il sistema iniziale; si assume che l'indicatore sia misurabile in quanto soggetto alla fisica classica. Per chiarire le idee, trattiamo il problema nel caso unidimensionale.

Consideriamo un sistema quantistico, a cui è associato lo spazio di Hilbert \mathcal{H} , che si trovi nello stato $|\varphi\rangle$. Prendiamo poi un insieme \mathcal{M} , con $|\mathcal{M}| \leq \dim \mathcal{H}$, e sia $\{P_m\}_{m \in \mathcal{M}}$ il PVM su \mathcal{H} assegnato; l'espressione

$$\sum_{m \in \mathcal{M}} m P_m =: M \tag{2.1}$$

definisce un operatore su \mathcal{H} con spettro \mathcal{M} e decomposizione spettrale corrispondente al PVM dato. Ogni P_m può essere decomposto nella forma

$$P_m = \sum_k |mk\rangle \langle mk|,$$

da cui si può ottenere una base ortonormale di \mathcal{H} , data da $\{|mk\rangle\}_{m,k}$, in cui M è diagonale, valendo

$$M = \sum_m m P_m = \sum_{m,k} m |mk\rangle \langle mk|.$$

Poiché $\{|mk\rangle\}_{m,k}$ è una base ortonormale di \mathcal{H} , possiamo esprimere lo stato iniziale del sistema quantistico nella forma

$$|\varphi\rangle = \sum_{m,k} \alpha_{mk} |mk\rangle, \quad (2.2)$$

dove gli $\alpha_{mk} = \langle mk | \varphi \rangle$ sono coefficienti complessi non tutti nulli.

Possiamo pensare all'indicatore come ad una particella libera di massa μ a cui aggiungiamo un termine controllabile di correlazione con il sistema quantistico; siamo interessati a determinare la posizione dell'indicatore, quindi conviene prepararlo inizialmente in un pacchetto d'onda $\psi(x) = \langle x | \psi \rangle$ nello spazio delle posizioni. Il pacchetto dovrà essere sufficientemente stretto da poter definire con ragionevole precisione macroscopica la posizione della particella, ma non eccessivamente, altrimenti si espanderebbe troppo rapidamente. Saremo più quantitativi di seguito.

Se il pacchetto ha una larghezza iniziale pari a Δx , l'incertezza sulla velocità sarà dell'ordine di $\Delta v = \Delta p / \mu \sim \hbar / (\mu \Delta x)$, cosicché, dopo un tempo t il pacchetto d'onda avrà acquistato una larghezza pari a

$$\Delta x(t) \sim \Delta x + \frac{\hbar t}{\mu \Delta x};$$

pertanto, se l'esperimento ha una durata t , la dispersione $\Delta x(t)$ ha un minimo quando $[\Delta x]^2 \sim \hbar t / \mu$ e la risoluzione sarà inferiormente limitata da

$$(\Delta x)_{\text{SQL}} = \sqrt{\frac{\hbar t}{\mu}},$$

chiamato limite quantistico standard (SQL sta per 'Standard Quantum Limit'). Supponiamo di poter scegliere l'indicatore con una massa sufficientemente elevata da mantenere l'allargamento del pacchetto sufficientemente contenuto per gli scopi della misura.

L'accoppiamento della particella indicatore al sistema fa sí che l'hamiltoniana diventi

$$H = H_0 \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1}_{\mathcal{H}} \otimes \left(\frac{1}{2\mu} P^2 \right) + \lambda M \otimes P,$$

dove H_0 è l'hamiltoniana imperturbata del sistema quantistico considerato, $P^2/2\mu$ è l'hamiltoniana della particella libera che funge da indicatore e $\lambda M \otimes P$ è l'hamiltoniana di interazione, in cui λ è la costante di accoppiamento e M è l'operatore associato al PVM. Per semplificare l'analisi, supponiamo che M commuti con H_0 , così da poter ignorare l'evoluzione dell'osservabile associato ad M durante la misura, oppure che la misura duri sufficientemente poco da rendere trascurabile l'evoluzione causale. È pertanto lecito ai fini del calcolo restringere l'hamiltoniana con il solo termine $H \sim \lambda M \otimes P$, e quindi dall'equazione di Schrödinger l'operatore di evoluzione temporale acquista la forma

$$U(t) = \exp \left[-\frac{i\lambda t}{\hbar} M \otimes P \right]. \quad (2.3)$$

All'istante iniziale è possibile esprimere lo stato del sistema accoppiato $|\Psi\rangle$ come prodotto $|\Psi\rangle = |\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle$, che ricordando la (2.2) diventa

$$|\Psi\rangle = \sum_{mk} \alpha_{m,k} |mk\rangle \otimes |\psi\rangle; \quad (2.4)$$

esso è uno stato fattorizzato, e quindi non entangled, del sistema completo. L'evoluzione temporale, agendo secondo l'operatore $U(t)$ definito in (2.3), introduce una correlazione fra i due sistemi, come ora vedremo.

Riscrivendo le espressioni appena richiamate e sostituendo la definizione di esponenziale di un operatore, otteniamo in pochi passaggi

$$\begin{aligned} U(t)|\Psi\rangle &= \exp\left[-\frac{i\lambda t}{\hbar}M \otimes P\right] \left(\sum_{m,k} \alpha_{m,k} |mk\rangle \otimes |\psi\rangle\right) \\ &= \sum_j \frac{\left(-\frac{i\lambda t}{\hbar}\right)^j}{j!} (M^j \otimes P^j) \left(\sum_{m,k} \alpha_{m,k} |mk\rangle \otimes |\psi\rangle\right) \\ &= \sum_{j,m,k} \alpha_{m,k} \frac{(-i\lambda t)^j}{\hbar^j j!} (M^j |mk\rangle) \otimes (P^j |\psi\rangle). \end{aligned}$$

Osserviamo ora che $|mk\rangle$, in quanto autostato di M relativo all'autovalore m , è autostato di M^j con autovalore m^j ; per la bilinearità del prodotto tensore la precedente si riscrive

$$\begin{aligned} U(t)|\Psi\rangle &= \sum_{j,m,k} \alpha_{m,k} \frac{(-i\lambda tm)^j}{\hbar^j j!} |mk\rangle \otimes P^j |\psi\rangle \\ &= \sum_{m,k} \alpha_{m,k} |mk\rangle \otimes \left(\sum_j \frac{(-i\lambda tm P)^j}{\hbar^j j!} |\psi\rangle\right) \\ &= \sum_{m,k} \alpha_{m,k} |mk\rangle \otimes \exp\left[-\frac{i\lambda t}{\hbar}mP\right] |\psi\rangle. \end{aligned}$$

Possiamo ora concludere: l'operatore P , momento della particella, è il generatore delle traslazioni, pertanto il termine di destra del precedente prodotto tensore si può intendere, in termini di funzione d'onda, come

$$\left\langle x \left| \exp\left[-\frac{i\lambda t}{\hbar}mP\right] \right| \psi \right\rangle = \psi(x - \lambda tm/\hbar). \quad (2.5)$$

La (2.5) indica come la posizione del pacchetto d'onda, e quindi dell'indicatore, sia ora correlata con gli autovalori dell'operatore M ; se il sistema di misura ha una risoluzione sufficiente ($\Delta x \lesssim \lambda t|m - m'|/\hbar$ per ogni m e m'), la rilevazione della posizione della particella proietta lo stato nell'autospazio corrispondente. Quantitativamente, con probabilità $\sum_k |\alpha_{m,k}|^2 = \langle \varphi | P_m | \varphi \rangle$ verrà rilevato uno scostamento nella posizione della particella di una quantità $\lambda tm/\hbar$, e corrispondentemente il sistema quantistico viene proiettato sull'autospazio relativo all'autovalore m , e quindi, se il POVM di partenza era unidimensionale, determina univocamente lo stato.

2.2 Il Teorema di Neumark

Il risultato che ora andiamo ad enunciare, noto come Teorema di Neumark,¹ mostra come sia possibile realizzare un qualunque POVM $\{F_a\}_a$ come restrizione di una misura proiettiva su uno spazio piú grande. Il teorema, la cui dimostrazione generale verrà presentata nel Capitolo 3, verrà qui dato seguendo [5].

Teorema 2.2.1 (Neumark). *Sia \mathcal{H} lo spazio di Hilbert di un sistema. Per ogni POVM $\{F_a\}_a$ su \mathcal{H} esiste uno spazio di Hilbert \mathcal{H}_0 , uno stato puro $|0\rangle_0 \langle 0|_0$ di \mathcal{H}_0 ed un insieme di proiettori ortogonali $\{E_a\}_a$ su $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_0$ tali che*

$$F_a = K E_a K, \quad (2.6)$$

essendo $K : \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H} \simeq \mathcal{H} \otimes |0\rangle_0 \langle 0|_0$ la proiezione su \mathcal{H} realizzato come sottospazio di $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_0$.

Dimostrazione. Sia $n := \dim \mathcal{H}$ la dimensione dello spazio di Hilbert \mathcal{H} e sia $\{|i\rangle\}_{i=1}^n$ una sua base ortonormale.

Supponiamo che a assuma i valori $1, \dots, m$. In quanto operatore hermitiano non-negativo, ogni F_a ammette una decomposizione spettrale della forma

$$F_a = \sum_{k=1}^{N_a} \lambda_k |ak\rangle \langle ak| = \sum_{k=1}^{N_a} |u_{ak}\rangle \langle u_{ak}|, \quad (2.7)$$

in cui $\lambda_k > 0$ per ogni k , $N_a \leq n$, $|ak\rangle \in \mathcal{H}$ e si sono definiti, come è lecito, i vettori ancora ortogonali ma non piú necessariamente normalizzati

$$|u_{ak}\rangle = \sqrt{\lambda_k} |ak\rangle.$$

Sfruttando l'ultima uguaglianza della (2.7), la risoluzione dell'identità del POVM si scrive

$$\mathbb{1}_{\mathcal{H}} = \sum_{a=1}^m F_a = \sum_{a,k} |u_{ak}\rangle \langle u_{ak}|,$$

che per componenti equivale al sistema di equazioni

$$\sum_{a,k} u_{ak,i} u_{ak,j}^* = \delta_{ij}, \quad (2.8)$$

dove δ_{ij} è la delta di Kronecker e $u_{ak,i} = \langle i | u_{ak}\rangle$ è la i -esima componente di $|u_{ak}\rangle$ nella base $\{|i\rangle\}_i$.

Completiamo ora $|0\rangle_0$, lo stato iniziale normalizzato di uno spazio di Hilbert \mathcal{H}_0 , alla base ortonormale $\{|\mu\rangle_0\}_{\mu=0}^{n_0}$, essendo $n_0 + 1 = \dim \mathcal{H}_0$ l'unica caratteristica fissata di \mathcal{H}_0 , che specificheremo in seguito.

Definiamo quindi i vettori in $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_0$

$$|\zeta_{ak}\rangle = |u_{ak}\rangle \otimes |0\rangle_0 + \sum_{\mu=1}^{n_0} c_{ak,\mu} |1\rangle \otimes |\mu\rangle_0, \quad (2.9)$$

¹Dal nome di Mark Aronowitsch Neumark (1909–1978), matematico sovietico.

con cui costruiamo gli operatori di proiezione

$$\begin{aligned}
 E_a &= \sum_{k=1}^{N_a} |\zeta_{ak}\rangle \langle \zeta_{ak}| \\
 &= \sum_k |u_{ak}\rangle \langle u_{ak}| \otimes |0\rangle_0 \langle 0|_0 + \sum_{k,\mu \neq 0 \neq \nu} c_{ak,\nu}^* c_{ak,\mu} |1\rangle \langle 1| \otimes |\mu\rangle_0 \langle \nu|_0 \\
 &\quad + \sum_{k,\mu \neq 0} c_{ak,\mu} |1\rangle \langle u_{ak}| \otimes |\mu\rangle_0 \langle 0|_0 + \sum_{k,\nu \neq 0} c_{ak,\nu}^* |u_{ak}\rangle \langle 1| \otimes |0\rangle_0 \langle \nu|_0;
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

come suggerisce la notazione utilizzata, con questi operatori risulta verificata la relazione (2.6): ricordando che $\langle 0 | \mu \rangle_0 = \delta_{0\mu}$ per l'ortonormalità della base, si ottiene

$$\begin{aligned}
 \langle 0 | E_a | 0 \rangle_0 &= F_a + \sum_{k,\mu \neq 0 \neq \nu} c_{ak,\mu} c_{ak,\mu}^* |1\rangle \delta_{0\mu} \delta_{0\nu} \langle 1| \\
 &\quad + \sum_{k,\mu \neq 0} c_{ak,\mu} |1\rangle \delta_{0\mu} \langle u_{ak}| + \sum_{k,\nu \neq 0} c_{ak,\nu}^* |u_{ak}\rangle \delta_{0\nu} \langle 1| \\
 &= F_a,
 \end{aligned}$$

dove si è sfruttata la (2.7) e il fatto che nelle sommatorie gli indici non assumono il valore 0; immediatamente segue che $KE_aK = F_a \otimes |0\rangle_0 \langle 0|_0$ con $K = \mathbb{1}_{\mathcal{H}} \otimes |0\rangle_0 \langle 0|_0$.

Per concludere, è sufficiente mostrare che è possibile scegliere i coefficienti $c_{ak,\mu}$ nella (2.9) in modo che i vettori $\{|\zeta_{ak}\rangle\}_{ak}$ siano ortonormali, cosicché gli operatori $\{E_a\}_a$ definiti dalla (2.10) costituiscano una famiglia di proiettori ortogonali. La condizione di ortonormalità fra gli $\{|\zeta_{ak}\rangle\}_{ak}$ fornisce il sistema di equazioni

$$\begin{aligned}
 \delta_{aa'} \delta_{kk'} &= \langle \zeta_{a'k'} | \zeta_{ak} \rangle \\
 &= \langle u_{a'k'} | u_{ak} \rangle \langle 0 | 0 \rangle_0 + \sum_{\mu \neq 0 \neq \nu} c_{a'k',\nu}^* c_{ak,\mu} \langle 1 | 1 \rangle \langle \nu | \mu \rangle_0 \\
 &= \langle u_{a'k'} | u_{ak} \rangle + \sum_{\mu \neq 0} c_{a'k',\mu}^* c_{ak,\mu},
 \end{aligned}$$

in cui si è nuovamente sfruttata l'ortonormalità delle basi, corrispondente alle relazioni $\langle \nu | \mu \rangle_0 = \delta_{\nu\mu}$ e $\langle 0 | 0 \rangle_0 = 1 = \langle 1 | 1 \rangle$. Esplicitando in componenti anche l'ultimo prodotto scalare rimasto, la precedente diventa infine

$$\delta_{aa'} \delta_{kk'} = \sum_{i=1}^n u_{a'k',i}^* u_{ak,i} + \sum_{\mu=1}^{n_0} c_{a'k',\mu}^* c_{ak,\mu}. \tag{2.11}$$

Per mostrare quanto voluto, cambiamo appena il punto di vista rispetto a quello fin qui adottato. Chiamato $M = \sum_{a=1}^m N_a$, nello spazio di Hilbert \mathbb{C}^M consideriamo la base ortonormale $\{|\ell\rangle\}_\ell$; indicizziamo quindi le coppie (a, k) secondo l'enumerazione

$$\begin{aligned}
 ((a_\ell, k_\ell))_\ell &= ((a, k)_{k=1, \dots, N_a})_{a=1, \dots, m} \\
 &= ((1, 1), \dots, (1, N_1), (2, 1), \dots, (2, N_2), \dots, (m, 1), \dots, (m, N_m)),
 \end{aligned}$$

da cui risulta ben definito porre

$$|u_i\rangle = \sum_{\ell} u_{a(\ell)k(\ell),i} |\ell\rangle \quad (2.12)$$

per i che assume valori da 1 ad n ; la condizione (2.8) equivale dunque all'ortonormalità di tali vettori ed è pertanto possibile completare l'insieme $\{|u_i\rangle\}_i$ ad una base ortonormale di \mathbb{C}^M aggiungendo $M - n$ vettori $\{|c_j\rangle\}_{j=1}^{M-n}$. Per aderenza alla precedente notazione, in componenti scriveremo

$$|c_j\rangle = \sum_{\ell=1}^M c_{\ell,j} |\ell\rangle. \quad (2.13)$$

Poiché la base $\{|u_i\rangle, |c_j\rangle\}_{i,j}$ è ortonormale, è possibile risolvere l'identità attraverso proiettori ortogonali secondo

$$\mathbb{1}_{\mathbb{C}^M} = \sum_{i=1}^n |u_i\rangle \langle u_i| + \sum_{j=1}^{M-n} |c_j\rangle \langle c_j|;$$

considerando la componente $\ell\ell'$ si ottiene l'equazione

$$\langle \ell | \mathbb{1}_{\mathbb{C}^M} | \ell' \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \ell | u_i \rangle \langle u_i | \ell' \rangle + \sum_{j=1}^{M-n} \langle \ell | c_j \rangle \langle c_j | \ell' \rangle.$$

ossia, stando alle definizioni dei coefficienti nelle (2.12) e (2.13),

$$\delta_{\ell\ell'} = \sum_{i=1}^n u_{a(\ell)k(\ell),i} u_{a(\ell')k(\ell'),i}^* + \sum_{j=1}^{M-n} c_{\ell,j} c_{\ell',j}^*. \quad (2.14)$$

Ricordando che era stata definita una corrispondenza biunivoca fra le coppie (a, k) ed ℓ , sotto la condizione $n_0 = M - n$ possiamo porre

$$c_{ak,\mu} = c_{\ell(a,k),\mu}$$

e si conclude in quanto la (2.14) si riduce alla (2.11). \square

2.2.1 Sulle probabilità date dal Teorema

Affinché la costruzione proposta nella dimostrazione abbia significato, dobbiamo verificare che le probabilità date dalla misura descritta mediate il PVM $\{E_a\}_a$ coincidano con quelle calcolate usando dal POVM $\{F_a\}_a$.

Sia ρ lo stato del sistema \mathcal{H} e sia $|0\rangle_0$ lo stato (puro) del sistema \mathcal{H}_0 , cosicché il sistema composto si trovi nello stato $\rho \otimes |0\rangle_0 \langle 0|_0$; secondo l'Assioma 1.3.2 dobbiamo verificare che

$$\text{tr}_{\mathcal{H}} F_a \rho = \text{tr}_{\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_0} E_a (\rho \otimes |0\rangle_0 \langle 0|_0). \quad (2.15)$$

Il modo piú semplice per farlo è partire dalle decomposizioni degli operatori come prodotti ket-bra

$$F_a = \sum_{k=1}^{N_a} |u_{ak}\rangle \langle u_{ak}|,$$

e

$$E_a = \sum_{k=1}^{N_a} |\zeta_{ak}\rangle \langle \zeta_{ak}|$$

che permettono di semplificare alcuni passaggi sfruttando le proprietà della traccia. Infatti, ricordando che tale operazione commuta con la somma di operatori ed è invariante per permutazioni cicliche, il termine di sinistra della (2.15) diventa

$$\mathrm{tr}_{\mathcal{H}} F_a \rho = \sum_k \mathrm{tr}_{\mathcal{H}} |u_{ak}\rangle \langle u_{ak}| \rho = \sum_k \langle u_{ak} | \rho | u_{ak} \rangle; \quad (2.16)$$

il membro di destra assume invece la forma

$$\mathrm{tr}_{\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_0} E_a (\rho \otimes |0\rangle_0 \langle 0|_0) = \sum_k \langle \zeta_{ak} | [\rho \otimes |0\rangle_0 \langle 0|_0] | \zeta_{ak} \rangle. \quad (2.17)$$

Dalla espressione precedente è facile calcolare i singoli addendi a partire dalla definizione (2.9)

$$|\zeta_{ak}\rangle = |u_{ak}\rangle \otimes |0\rangle_0 + \sum_{\mu=1}^{n_0} c_{ak,\mu} |1\rangle \otimes |\mu\rangle_0;$$

l'azione di $\langle \zeta_{ak}|$ sullo stato fornisce

$$\begin{aligned} \langle \zeta_{ak} | [\rho \otimes |0\rangle_0 \langle 0|_0] &= \langle u_{ak} | \rho \otimes \langle 0|_0 + \sum_{\mu=1}^{n_0} c_{ak,\mu}^* \delta_{\mu 0} \langle 1 | \rho \otimes \langle 0|_0 \\ &= \langle u_{ak} | \rho \otimes \langle 0|_0, \end{aligned}$$

essendo ancora una volta $\langle 0 | \mu \rangle_0 = \delta_{\mu 0}$ che provoca l'annullamento del secondo termine, ed allo stesso modo

$$\begin{aligned} [\langle u_{ak} | \rho \otimes \langle 0|_0] | \zeta_{ak} \rangle &= \langle u_{ak} | \rho | u_{ak} \rangle + \sum_{\mu=1}^{n_0} c_{ak,\mu} \langle u_{ak} | \rho | 1 \rangle \delta_{0\mu} \\ &= \langle u_{ak} | \rho | u_{ak} \rangle. \end{aligned}$$

Per la (2.17) otteniamo quindi l'espressione

$$\mathrm{tr}_{\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_0} E_a (\rho \otimes |0\rangle_0 \langle 0|_0) = \sum_k \langle u_{ak} | \rho | u_{ak} \rangle$$

coincidente con la (2.16); la (2.15) risulta pertanto correttamente verificata.

2.2.2 Indipendenza del sistema di appoggio

Geometricamente possiamo interpretare la costruzione eseguita come l'aggiunta di gradi di libertà allo spazio di Hilbert \mathcal{H} al fine di rendere linearmente indipendenti vettori che inizialmente non lo erano, mappando gli $|u_{ak}\rangle$ negli $|\zeta_{ak}\rangle$.

L'insieme di vettori $\{|\zeta_{ak}\rangle\}_{ak}$ definiti dalla (2.9) genera un sottospazio M -dimensionale di $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_0$, e può essere completato ad una base ortonormale di tutto lo spazio aggiungendo, ad esempio, i vettori

$$\{ |i\rangle \otimes |\mu\rangle_0 : 2 \leq i \leq n, 1 \leq \mu \leq M - n \}.$$

Infatti l'insieme così ottenuto è chiaramente formato da vettori ortonormali, in particolare linearmente indipendenti; in totale sono $M + (n - 1)(M - n) = n(M - n + 1) = \dim \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_0$, pertanto costituiscono una base dello spazio prodotto. Dalla base possiamo quindi ottenere il PVM

$$\left\{ \sum_k |\zeta_{ak}\rangle \langle \zeta_{ak}|, |i\rangle \langle i| \otimes |\mu\rangle_0 \langle \mu|_0 \right\}_{i \neq 1, \mu \neq 0}$$

che ristretto ad \mathcal{H} secondo la (2.6) restituisce ancora il POVM $\{F_a\}_a$ poiché i proiettori aggiunti vengono mappati nell'applicazione nulla.

La costruzione riportata nella precedente dimostrazione impone come *unici* vincoli sul sistema aggiuntivo la dimensione dello spazio di Hilbert \mathcal{H}_0 e la purezza dello stato; non c'è alcuna correlazione nascosta fra lo stato iniziale del sistema in esame e quello di appoggio, che può quindi essere preparato in maniera totalmente arbitraria: come ora vedremo, le osservabili del sistema di appoggio non risentono dell'altro sistema.

Siano $|\psi\rangle$ lo stato iniziale del sistema \mathcal{H} e $|1\rangle_0$ quello del sistema \mathcal{H}_0 , cosicché lo stato del sistema composto sia $|\psi\rangle \otimes |1\rangle_0$; consideriamo una osservabile Ω del sistema \mathcal{H}_0 , che agisce sul sistema complessivo come $\mathbb{1}_{\mathcal{H}} \otimes \Omega$. L'equazione agli autovalori

$$\mathbb{1}_{\mathcal{H}} \otimes \Omega = \omega \mathbb{1}_{\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_0} = \omega \mathbb{1}_{\mathcal{H}} \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{H}_0}$$

si restringe a quella della sola Ω , in quanto, includendo lo scalare ω nel secondo fattore, diventa

$$\mathbb{1}_{\mathcal{H}} \otimes (\Omega - \omega \mathbb{1}_{\mathcal{H}_0}) = 0$$

e gli autovalori restano pertanto gli stessi. I proiettori sugli autospazi si fattorizzano nella maniera banale, $P_\omega^\otimes = \mathbb{1}_{\mathcal{H}} \otimes P_\omega$, e anche le probabilità, e quindi i valori medi, restano pertanto gli stessi, come si ottiene con l'analogo calcolo

$$\begin{aligned} \text{Prob}_\otimes(\omega) &= \langle \psi | \otimes \langle 1 |_0 P_\omega^\otimes | \psi \rangle \otimes | 1 \rangle_0 \\ &= \langle \psi | \mathbb{1}_{\mathcal{H}} | \psi \rangle \langle 1 | P_\omega | 1 \rangle_0 \\ &= \text{Prob}_0(\omega). \end{aligned}$$

2.2.3 Esempi di applicazioni

Vediamo ora alcuni esempi numerici di applicazione del teorema e della costruzione proposta nella dimostrazione. Utilizzeremo di seguito un formalismo analogo a quello della dimostrazione, in particolare lo spazio di Hilbert del sistema di appoggio è denotato con \mathcal{H}_0 e il suo stato con $|0\rangle_0$.

PVM. Consideriamo per iniziare un POVM $\{F_a\}_a$ particolare: una famiglia di proiettori ortogonali risolvienti l'identità, ossia un PVM. Poiché si tratta di proiettori, la decomposizione spettrale (2.7) si semplifica come

$$F_a = \sum_{k=1}^{N_a} |ak\rangle \langle ak| = \sum_{k=1}^{N_a} |u_{ak}\rangle \langle u_{ak}|, \quad (2.18)$$

con $|u_{ak}\rangle \equiv |ak\rangle$ in quanto gli autovalori assumono solamente i valori 1 e 0. In questo caso, dunque, i vettori $\{|u_{ak}\rangle\}_{ak}$ costituiscono già una base ortonormale di \mathcal{H} , e pertanto i vettori $\{|\zeta_{ak}\rangle\}_{ak}$ degenerano nella forma $|\zeta_{ak}\rangle = |u_{ak}\rangle \otimes |0\rangle_0$; infatti, i vettori $\{|u_i\rangle\}_i$ costituiti dalle componenti ad (a, k) fissata generano già una base senza dover aggiungere altri vettori $\{|c_\ell\rangle\}_\ell$.

Lo spazio \mathcal{H}_0 ha pertanto dimensione 1, ed è formato quindi dal solo $|0\rangle_0$; questo fatto si può interpretare osservando che gli $\{F_a\}_a$ considerati già costituiscono una famiglia di proiettori, pertanto non è necessario aggiungere alcun grado di libertà per renderli tali.

L'esempio notevole. Riprendiamo ora il POVM per il qubit descritto nella (1.17) dato dagli operatori

$$F_1 = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_2 = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}, \quad F_3 = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}.$$

In questo caso lo spazio di Hilbert \mathcal{H} ha dimensione $n = 2$; implicitamente stiamo ancora utilizzando la base di autostati di S_z data da $\{|1/2\rangle, |-1/2\rangle\}$. È facile calcolare, direttamente o seguendo le relazioni con cui gli stessi operatori sono stati ricavati, che ogni F_a ha un solo autovalore non nullo e ammette quindi una decomposizione (2.7) data da un solo vettore (un POVM di questo tipo è detto di rango 1); lasciando quindi cadere l'indice di degenerazione, risulta

$$|u_1\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |u_2\rangle = \sqrt{\frac{1}{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad |u_3\rangle = \sqrt{\frac{1}{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Seguendo la costruzione della dimostrazione, scriviamo gli $n = 2$ vettori ($M = 3$)-dimensionali formati dalle componenti 1 e 2 dei precedenti

$$|\tilde{u}_1\rangle = \begin{pmatrix} \sqrt{2/3} \\ \sqrt{1/6} \\ -\sqrt{1/6} \end{pmatrix}, \quad |\tilde{u}_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{1/2} \\ \sqrt{1/2} \end{pmatrix};$$

i vettori sono ortonormali e possono essere quindi completati da una base ortonormale di \mathbb{C}^3 aggiungendo il vettore

$$|c\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Si vede quindi che lo spazio di appoggio \mathcal{H}_0 ha dimensione $1 + M - n = 2$; detta $\{|0\rangle_0, |1\rangle_0\}$ una sua base, la sommatoria nella definizione dei vettori $|\zeta_a\rangle$ si riduce ad un unico addendo ossia

$$\begin{aligned} |\zeta_1\rangle &= |u_1\rangle \otimes |0\rangle_0 + \sqrt{\frac{1}{3}} |1/2\rangle \otimes |1\rangle_0, \\ |\zeta_2\rangle &= |u_2\rangle \otimes |0\rangle_0 - \sqrt{\frac{1}{3}} |1/2\rangle \otimes |1\rangle_0, \\ |\zeta_3\rangle &= |u_3\rangle \otimes |0\rangle_0 + \sqrt{\frac{1}{3}} |1/2\rangle \otimes |1\rangle_0 \end{aligned}$$

(la scelta di utilizzare $|1/2\rangle$ o $|-1/2\rangle$ è totalmente arbitraria); si può verificare l'ortogonalità di questi vettori, ma saltiamo tale controllo in quanto si tratta solamente di elementi conti algebrici. Corrispondentemente, i proiettori generati risultano

$$\begin{aligned}
 E_1 &= F_1 \otimes |0\rangle_0 \langle 0|_0 + \frac{1}{3} P_{1/2} \otimes |1\rangle_0 \langle 1|_0 \\
 &\quad + \sqrt{\frac{1}{3}} |u_1\rangle \langle 1/2| \otimes |0\rangle_0 \langle 1|_0 + \sqrt{\frac{1}{3}} |1/2\rangle \langle u_1| \otimes |1\rangle_0 \langle 0|_0, \\
 E_2 &= F_2 \otimes |0\rangle_0 \langle 0|_0 + \frac{1}{3} P_{1/2} \otimes |1\rangle_0 \langle 1|_0 \\
 &\quad - \sqrt{\frac{1}{3}} |u_1\rangle \langle 1/2| \otimes |0\rangle_0 \langle 1|_0 - \sqrt{\frac{1}{3}} |1/2\rangle \langle u_1| \otimes |1\rangle_0 \langle 0|_0, \\
 E_3 &= F_3 \otimes |0\rangle_0 \langle 0|_0 + \frac{1}{3} P_{1/2} \otimes |1\rangle_0 \langle 1|_0 \\
 &\quad + \sqrt{\frac{1}{3}} |u_1\rangle \langle 1/2| \otimes |0\rangle_0 \langle 1|_0 + \sqrt{\frac{1}{3}} |1/2\rangle \langle u_1| \otimes |1\rangle_0 \langle 0|_0.
 \end{aligned}$$

Si noti che in questo caso il vettore $|c\rangle$ è determinato a meno di una fase; la ragione di ciò sta nel fatto che il sottospazio di \mathcal{H}_0 ortogonale a $|0\rangle_0$ è monodimensionale; in generale tale fatto non si verifica e vi è molta più libertà.

Capitolo 3

Il teorema per spazi di Hilbert di dimensione infinita

Quanto riportato nei capitoli precedenti vale nel caso in cui il sistema fisico sia modellato con uno spazio di Hilbert di dimensione finita, ossia un ordinario spazio vettoriale complesso in cui gli operatori sono rappresentati attraverso matrici quadrate a coefficienti complessi. Com'è noto, esistono importanti esempi di sistemi che, al contrario, devono essere rappresentati utilizzando spazi di Hilbert con dimensione infinita: è il caso, ad esempio, di una particella di cui si considerano i gradi di libertà spaziali, un caso tutt'altro che irrealistico.

La formalizzazione matematica della Meccanica Quantistica appare in questo caso molto più complicata per la complessità degli oggetti matematici in questione che presentano a volte proprietà meno intuitive.

In questo capitolo verranno prima di tutto velocemente presentati i risultati matematici con cui si formalizza la Meccanica Quantistica dal punto di vista degli aspetti statistico-probabilistici, quindi verrà presentata una versione del Teorema di Neumark molto generale, valida in questo contesto ma che presenta alcune problematiche rispetto al caso precedente.

Vista la complessità degli argomenti, verranno richiamati solamente i fatti principali, tralasciando le dimostrazioni di quanto esula dagli scopi del presente lavoro; l'esposizione sarà per questa ragione meno rigorosa e sistematica di quanto fatto nei capitoli precedenti.

3.1 Cenni alla formalizzazione matematica

Nel contesto del presente approccio siamo principalmente interessati a descrivere le probabilità delle misure del sistema quantistico.

Schematicamente consideriamo lo stato ρ di un sistema come una condizione iniziale imposta all'oggetto dell'esperimento di cui si misura una qualche grandezza; a breve perfezioneremo questa definizione. Supponiamo che l'insieme dei risultati di una misura sia (un sottoinsieme di) \mathbb{R} ; vogliamo valutare la probabilità che una misura restituisca un valore in un determinato sottoinsieme. Per motivi tecnici supponiamo che la famiglia degli insiemi su cui ci porremo questa domanda sia una σ -algebra – questa restrizione non è però problematica ai fini fisici, ad esempio perché la σ -algebra standard, ossia

i borealiani, comprende tutti gli intervalli. Matematicamente consideriamo quindi lo spazio di misura (U, \mathcal{A}) , dove $U \subseteq \mathbb{R}$ è l'insieme dei valori acquisibili da una misura dotato della σ -algebra \mathcal{A} .

Il problema si traduce quindi nel determinare quale sia la distribuzione di probabilità μ_ρ su \mathcal{A} per i diversi esiti, che dipenderà dalla preparazione del sistema e dalla grandezza da misurare. Si noti che il procedimento descritto è applicabile anche in dimensione finita, tuttavia l'apparato matematico necessario ad una formalizzazione della teoria era allora decisamente più semplice ed intuitivo.

Fissato il sistema e la grandezza da misurare, non è detto che a diverse preparazioni del sistema corrispondano diverse distribuzioni di probabilità, che è tuttavia l'unico oggetto esperibile attraverso la misura, almeno in principio. Possiamo quindi raggruppare in una classe di equivalenza le preparazioni che generano la stessa distribuzione; chiameremo stato di un sistema una tale classe di equivalenza.

3.1.1 Operatori su spazi di Hilbert

Gli operatori su spazi di Hilbert di dimensione infinita presentano novità rispetto a quelli agenti su usuali spazi vettoriali. Di seguito citiamo alcune definizioni ed alcuni fatti utili nello sviluppo della teoria.

Dato uno spazio di Hilbert \mathcal{H} , un operatore X su \mathcal{H} è una applicazione lineare da un sottospazio $\mathcal{D}(X) \subseteq \mathcal{H}$ in \mathcal{H} . Diremo X *simmetrico* se $\langle \psi | X | \varphi \rangle = \langle \varphi | X | \psi \rangle$ qualunque siano φ e ψ in $\mathcal{D}(X)$. Se il dominio è denso in \mathcal{H} , è possibile definire l'operatore aggiunto ad X , X^\dagger definito su $\mathcal{D}(X^\dagger) = \{ \varphi \in \mathcal{H} : \psi \mapsto \langle \varphi | X | \psi \rangle \text{ è continuo in } \mathcal{D}(X) \}$ con la relazione $\langle \psi | X^\dagger | \varphi \rangle = \overline{\langle \varphi | X | \psi \rangle}$ con $|\psi\rangle \in \mathcal{D}(X)$ e $|\varphi\rangle \in \mathcal{D}(X^\dagger)$. In particolare, X è simmetrico se $\mathcal{D}(X) \subseteq \mathcal{D}(X^\dagger)$ e $X | \psi \rangle = X^\dagger | \psi \rangle$ su $\mathcal{D}(X)$.

Un operatore X definito su sottoinsieme denso di \mathcal{H} è detto *autoaggiunto* se $X = X^\dagger$, ossia se è simmetrico e $\mathcal{D}(X^\dagger) = \mathcal{D}(X)$. Operatori simmetrici che possono essere estesi ad operatori autoaggiunti in maniera univoca sono detti *essenzialmente autoaggiunti*; operatori simmetrici che non hanno una estensione autoaggiunta sono detti *massimali*.

Ad un operatore X su \mathcal{H} si associa la norma $\|X\| = \sup_{|\psi\rangle \neq 0} \|X |\psi\rangle\| / \| |\psi\rangle \|$; se tale valore esiste finito diremo X *limitato*. Gli operatori limitati sono continui e viceversa; l'aggiunto di un operatore limitato è anch'esso limitato. Diremo *hermitiano* un operatore limitato autoaggiunto; un operatore hermitiano è detto *semidefinito positivo* (o *non-negativo*) se $\langle \psi | X | \psi \rangle \geq 0$ per ogni $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$; per un operatore positivo risulta ben definita la *traccia* secondo $\text{tr } X = \sum_j \langle j | X | j \rangle$ essendo $\{|j\rangle\}_j$ una base ortonormale di \mathcal{H} .

In generale non è possibile definire un operatore su tutto lo spazio di Hilbert, pur essendo esso definiti su un suo sottoinsieme denso; per questa ragione nelle definizioni sopra si è sempre specificato il dominio. Gli operatori limitati possono invece essere estesi in maniera univoca su tutto \mathcal{H} .

3.1.2 Misure spettrali di operatori autoaggiunti

Per operatori hermitiani agenti su spazi di Hilbert di dimensione finita, come è stato richiamato nei capitoli precedenti, risulta valida la decomposizione spettrale $O = \sum_j o_j P_j$

dove l'insieme $\{P_j\}_j$ costituisce un PVM; vale una simile scomposizione per operatori autoaggiunti anche in spazi di Hilbert di dimensione infinita.

Diamo prima la generalizzazione dei PVM nel caso infinito-dimensionale. Dato uno spazio di misura (U, \mathcal{A}) , con PVM intendiamo qui un operatore $E : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ dalla σ -algebra agli operatori lineari dello spazio di Hilbert tale che

1. $E(\emptyset) = 0$ e $E(U) = \mathbb{1}_{\mathcal{H}}$;
2. $E(B)$ è hermitiano non-negativo per ogni $B \in \mathcal{A}$;
3. $E(\bigcup_j X_j) = \sum_j E(X_j)$ per ogni successione disgiunta $\{X_j\}_j \subseteq \mathcal{A}$;
4. $E(X)E(Y) = 0$ se $X \cap Y = \emptyset$, con $X, Y \in \mathcal{A}$.

Citiamo quindi il seguente risultato, noto come teorema spettrale di von Neumann: dati uno spazio di Hilbert \mathcal{H} ed un operatore lineare autoaggiunto X su \mathcal{H} , in $\mathcal{D}(X)$ vale la rappresentazione spettrale

$$X = \int_{\mathbb{R}} \lambda dE_X(\lambda), \quad (3.1)$$

essendo E_X un PVM, detto misura spettrale di X ed $E_X(\lambda) = E_X(]-\infty, \lambda])$; in particolare si ha che $\langle \psi | X | \psi \rangle = \int \lambda d\mu_{|\psi\rangle}^E$ e $\|X | \psi \rangle\|^2 = \int \lambda^2 d\mu_{|\psi\rangle}^E$, dove $\mu_{|\psi\rangle}^E = \langle \psi | E | \psi \rangle$ è una misura su \mathcal{A} . Viceversa, la (3.1), dato un PVM, definisce un operatore autoaggiunto.

3.2 Stati, osservabili e misure in un sistema isolato

In questa Sezione procediamo a descrivere come gli assiomi presentati nella Sezione 1.1 vengano interpretati nel caso di uno spazio di Hilbert di dimensione infinita.

Stati. Dato un sistema rappresentato dallo spazio di Hilbert separabile \mathcal{H} , gli stati (puri) sono rappresentati da raggi vettori $|\psi\rangle$ di \mathcal{H} .

Osservabili. Le grandezze osservabili sono rappresentate da operatori autoaggiunti su \mathcal{H} .

Dal teorema spettrale di von Neumann tali operatori sono messi in relazione con PVM continui, in parallelo a quanto succedeva nel caso infinito dimensionale.

Misure. Se gli esiti di una misura sono rappresentati dallo spazio misurabile (U, \mathcal{A}) , la probabilità che una misura dell'osservabile X dia come risultato un elemento di un insieme $B \in \mathcal{A}$ è data da

$$\text{Prob}(B) = \|E_X(B)\psi\|^2 = \langle \psi | E_X(B) | \psi \rangle. \quad (3.2)$$

Inoltre, immediatamente dopo la misura, lo stato del sistema diventa

$$|\psi\rangle \longmapsto \frac{E_X(B) |\psi\rangle}{\|E_X(B) |\psi\rangle\|}.$$

Rileggendo la precedente affermazione in termini di distribuzioni di probabilità, abbiamo assegnato su (U, \mathcal{A}) la distribuzione di probabilità $\mu_{|\psi\rangle} : B \mapsto \langle \psi | E_X(B) | \psi \rangle$.

3.2.1 Gli operatori posizione e momento

Posizione. Consideriamo una particella libera sulla retta reale. Lo spazio di Hilbert associato è $L^2(\mathbb{R})$; siamo interessati a studiare l'operatore posizione Q che agisce moltiplicando per l'argomento. Il dominio è

$$\mathcal{D}(Q) = \left\{ |\psi\rangle : \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |\psi(x)|^2 dx < +\infty \right\};$$

mostriamo ora che si tratta di un operatore autoaggiunto. La simmetria è immediata, e quindi $\mathcal{D}(Q) \subseteq \mathcal{D}(Q^\dagger)$. Viceversa consideriamo $|\varphi\rangle \in \mathcal{D}(Q^\dagger)$; allora $|\psi\rangle \mapsto \langle \varphi | Q | \psi \rangle$ è un funzionale continuo di $|\psi\rangle$ e quindi per il lemma di Riesz esiste un vettore $|h\rangle \in L^2(\mathbb{R})$ tale che $\langle \varphi | Q | \psi \rangle = \langle h | \psi \rangle$. Dal confronto degli integrali segue $h(x) = x\varphi(x)$, e quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x\varphi(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |h(x)|^2 dx < +\infty.$$

Abbiamo cioè mostrato che $|\varphi\rangle \in \mathcal{D}(Q)$, e quindi $\mathcal{D}(Q^\dagger) \subseteq \mathcal{D}(Q)$. Pertanto, $\mathcal{D}(Q) = \mathcal{D}(Q^\dagger)$ e Q è autoaggiunto.

Poiché Q corrisponde alla posizione della particella nella retta, l'insieme delle posizioni è costituito dai numeri reali; come spazio di misura consideriamo quindi $U = \mathbb{R}$ munito dei boreliani $\mathcal{A} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Verifichiamo ora che la rappresentazione spettrale dell'operatore Q è data dal PVM $E_Q(B) = \mathbb{1}_B$, con $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ e $\mathbb{1}_B$ la funzione indicatrice di B . Si ha

$$\langle \psi | E_Q(B) | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_B(x) |\psi(x)|^2 dx = \int_B |\psi(x)|^2 dx,$$

e pertanto risulta che $d\mu_{|\psi\rangle} = d\langle \psi | E_Q | \psi \rangle = |\psi(x)|^2 dx$; nondimeno vale l'identità

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x |\psi(x)|^2 dx = \langle \psi | Q | \psi \rangle.$$

Se formalmente interpretiamo $\psi(x)$ come $\langle x | \psi \rangle$, quindi con $|x\rangle$ una delta di Dirac centrata in x , possiamo allora scrivere l'uguaglianza $dE_Q = |x\rangle \langle x| dx$, da cui la rappresentazione

$$Q = \int_{-\infty}^{+\infty} x |x\rangle \langle x| dx.$$

Momento. Prendiamo nuovamente la particella libera sulla retta, a cui si associa allo stesso modo lo spazio di Hilbert $L^2(\mathbb{R})$. L'operatore momento è $P = -i d/dx$ essendo i l'unità immaginaria ed avendo indicato con x l'argomento degli elementi in $L^2(\mathbb{R})$. Il dominio di P è quindi

$$\mathcal{D}(P) = \left\{ |\psi\rangle \in L^2(\mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R}} |\psi'(x)|^2 dx < +\infty \right\}.$$

La trasformata di Fourier mappa isometricamente $L^2(\mathbb{R})$ in sé stesso facendo corrispondere all'operatore P l'operatore di moltiplicazione per l'argomento. Pertanto, il dominio di P , $\mathcal{D}(P)$ è mandato nel sottospazio

$$\mathcal{D}(\tilde{P}) = \left\{ |\tilde{\psi}\rangle \in L^2(\mathbb{R}) : \int |p\tilde{\psi}(p)|^2 dp < +\infty \right\},$$

e quindi, dalla discussione dell'operatore posizione fatta in precedenza per l'operatore posizione possiamo concludere che anche P è autoaggiunto.

Consideriamo anche per l'operatore momento come spazio di misura l'insieme dei numeri reali munito dei boreliani. Poiché l'operatore P è mappato dalla trasformata di Fourier nell'operatore di moltiplicazione per l'argomento, la misura spettrale dE_P dell'operatore P sarà ottenuta applicando l'inversa della trasformata alla misura spettrale dE_Q , ossia, presi $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ e $|\psi\rangle \in \mathcal{D}(P)$,

$$\langle \psi | E_P(B) | \psi \rangle = \frac{1}{2\pi} \iint \int_B \overline{\psi(x)} \psi(x') e^{ip(x-x')} dp dx dx'$$

o, formalmente,

$$d\langle \psi | E_P | \psi \rangle = \left(\frac{1}{2\pi} \iint \overline{\psi(x)} \psi(x') e^{ip(x-x')} dx dx' \right) dp;$$

interpretando la scrittura $\langle p | \psi \rangle$ come $\tilde{\psi}(p)$, la precedente può essere letta $d\langle \psi | E_P | \psi \rangle = \langle \psi | p \rangle \langle p | \psi \rangle dp$, grazie alla quale abbiamo l'espressione formale di P

$$P = \int p |p\rangle \langle p| dp,$$

risultato atteso visto il parallelo con l'operatore posizione, questa volta con l'autofunzione formale $|p\rangle = e^{ipx}/\sqrt{2\pi}$ con $p, x \in \mathbb{R}$.

3.3 Stati, osservabili e misure generalizzati

Molte delle considerazioni con cui si sono generalizzati i concetti presentati negli assiomi per i sistemi con spazio di Hilbert finito-dimensionale possono essere qui analogamente ripetuti, portando a conclusioni simili che ripercorriamo di seguito.

I raggi vettori che caratterizzano lo stato (puro) di un sistema sono in corrispondenza biunivoca con proiettori monodimensionali; come già richiamato non sono sufficienti a descrivere tutte le situazioni che si incontrano nel mondo fisico, ad esempio nel caso in cui non vi sia una completa conoscenza della preparazione di un sistema. In generale, allora, gli stati misti sono rappresentati da combinazioni convesse di tali proiettori, producendo così un operatore di densità $\rho : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ hermitiano non-negativo e di traccia unitaria. Gli operatori di densità ammettono ancora una decomposizione della forma

$$\rho = \sum_j p_j |\psi_j\rangle \langle \psi_j|$$

con $p_j > 0$ e $\sum_j p_j = 1$; l'indice j può assumere una quantità numerabile di valori, ma la precedente espressione di ρ è comunque ben definita convergendo in norma operatoriale.

Anche la classe delle misure ammissibili si ingrandisce sensibilmente; analizziamo il problema dal punto di vista delle rappresentazioni spettrali. Le quattro condizioni presentate nella Sottosezione 3.1.2 sono, dato $E : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$,

1. $E(\emptyset) = 0$ e $E(U) = \mathbb{1}_{\mathcal{H}}$;
2. $E(B)$ è hermitiano non-negativo per ogni $B \in \mathcal{A}$;
3. $E(\bigcup_j X_j) = \sum_j E(X_j)$ per ogni successione disgiunta $\{X_j\}_j \subseteq \mathcal{A}$;
4. $E(X)E(Y) = 0$ se $X \cap Y = \emptyset$, con $X, Y \in \mathcal{A}$;

di queste, l'ultima giustifica la definizione di E come misura a valori nelle proiezioni; come fatto nel Capitolo 1, se lasciamo cadere tale ipotesi accontentandoci delle prime tre, otteniamo oggetti matematici ben definiti e su cui si sviluppa la teoria. Invero, le prime tre condizioni precedenti, definiscono un POVM per spazi di Hilbert di dimensione infinita: assumiamo che, in generale, le misure su un sistema quantistico siano rappresentate attraverso un POVM.

Per comprendere l'importanza dei POVM in dimensione infinita analizziamo un esempio esplicito.

Consideriamo una particella vincolata a muoversi su una semiretta; lo spazio di Hilbert è $L^2(0, +\infty)$ e studiamo nuovamente l'operatore momento $P_+ = -i d/dx$. Con le opportune condizioni al contorno, il dominio di P_+ è

$$\mathcal{D}(P_+) = \left\{ |\psi\rangle \in L^2(0, +\infty) : \psi(0) = 0, \int_0^{+\infty} |\psi'(x)|^2 dx < +\infty \right\};$$

l'aggiunto di P_+ , P_+^\dagger , è dato dall'espressione

$$\begin{aligned} \langle \psi | P_+^\dagger | \varphi \rangle &= \overline{\langle \varphi | P_+ | \psi \rangle} \\ &= i \int_0^{+\infty} \varphi(x) \overline{\psi'(x)} dx \\ &= i \varphi(0) \overline{\psi(0)} - i \int_0^{+\infty} \varphi'(x) \overline{\psi(x)} dx \end{aligned}$$

annullandosi il primo termine per le condizioni al contorno, con $|\psi\rangle \in \mathcal{D}(P_+)$ e $|\varphi\rangle \in \mathcal{D}(P_+^\dagger)$, abbiamo insomma ottenuto $P_+^\dagger = -i d/dx$ con

$$\mathcal{D}(P_+^\dagger) = \left\{ |\varphi\rangle \in L^2(0, +\infty) : \int_0^{+\infty} |\varphi'(x)|^2 dx < +\infty \right\}.$$

Possiamo quindi vedere come P_+ sia simmetrico mentre P_+^\dagger non lo sia: il calcolo di $(P_+^\dagger)^\dagger$ è analogo al precedente ma il termine di bordo questa volta non si annulla, quindi P_+ non è autoaggiunto; si può anzi provare che P_+ è massimale.

Non essendo autoaggiunto, all'operatore P_+ non si applica il teorema spettrale; mostriamo ora esplicitamente che la sua misura spettrale costituisce un POVM non ortogonale.

Ogni funzione definita sulla semiretta $(0, +\infty)$ può essere definita sull'intero asse reale facendola valere zero sulla semiretta negativa; in questo modo viene realizzato un embedding di $L^2(0, +\infty)$ in $L^2(\mathbb{R})$; detta $\tilde{\cdot}$ tale estensione, è chiaro che se $|\psi\rangle \in \mathcal{D}(P_+)$ allora $|\tilde{\psi}\rangle \in \mathcal{D}(P)$ con $P_+|\psi\rangle = P|\tilde{\psi}\rangle$. Premesso ciò, la misura spettrale dF_{P_+} associata a P_+ è allora data dalla restrizione su $L^2(0, +\infty)$ della misura spettrale E_P di P , ossia

$$d\langle\psi|F_{P_+}|\psi\rangle = d\langle\tilde{\psi}|E_P|\tilde{\psi}\rangle = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \overline{\tilde{\psi}(x)}\tilde{\psi}(x')e^{ip(x-x')} dx dx' \right) dp.$$

Tale relazione può essere formalmente riscritta $dF_{P_+} = |p_+\rangle\langle p_+| dp_+$, corrispondente alla rappresentazione

$$P_+ = \int_{-\infty}^{+\infty} p_+ |p_+\rangle\langle p_+| dp_+,$$

dove $|p_+\rangle$ è l'autofunzione formale $e^{ip_+x}/\sqrt{2\pi}$, in cui $p_+ \in \mathbb{R}$, mentre $x \in \mathbb{R}_+$; per questa differenza rispetto agli autoket $|p\rangle$ di P , la misura dF_{P_+} non costituisce un PVM, ma solamente un POVM, infatti pur risultando

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |p_+\rangle\langle p_+| dp_+ = \mathbb{1}_{L^2(0,+\infty)},$$

gli autoket non sono ortogonali: procedendo formalmente, si ottiene

$$\langle p'_+|p_+\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{i(p_+-p'_+)x} dx = \frac{1}{2}\delta(p_+-p'_+) + \frac{1}{2\pi i(p'_+-p_+)}.$$

È possibile dimostrare che gli operatori massimali ammettono una ed un'unica misura spettrale non ortogonale; essendo questo il caso di P_+ , essa coincide con quella appena ricavata.

Per sottolineare ulteriormente l'importanza dei POVM e ricollegare i vari elementi fin qui introdotti, ritornando così anche alle questioni fondamentali che hanno motivato il ragionamento, ricordiamo un ulteriore enunciato, ancora una volta accettato senza dimostrazione, che stabilisce una corrispondenza biunivoca fra i POVM e le distribuzioni di probabilità sullo spazio di misura associato al sistema. Più precisamente, dato un sistema a cui è associato lo spazio di misura (U, \mathcal{A}) con densità di probabilità μ_ρ dipendente dallo stato, esiste su \mathcal{A} un POVM $F : \mathcal{A} \ni B \mapsto F(B)$ tale che, qualunque sia lo stato ρ del sistema risulti

$$\mu_\rho(B) = \text{tr } F(B)\rho \quad (3.3)$$

per ogni $B \in \mathcal{A}$ (si noti che $F(B)\rho$ non è in generale positivo, ma appartiene ad una famiglia di operatori, detti di classe traccia, per i quali l'espressione è comunque ben definita). Viceversa ogni POVM definisce una distribuzione di probabilità su (U, \mathcal{A}) attraverso la (3.3). In forma differenziale tale equazione è esprimibile come $d\mu_\rho^F = d \text{tr } F\rho$; in uno stato puro l'operatore di densità si scrive $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ e quindi $d\mu_\rho^F = d\langle\psi|F|\psi\rangle$, corrispondente a quanto calcolato negli esempi.

In questo modo siamo riusciti a caratterizzare le probabilità dei possibili esiti di una misura; non ci occupiamo della trasformazione dello stato a seguito di essa.

3.4 Il Teorema di Neumark

Il procedimento secondo cui si è esibito il POVM relativo all'operatore P_+ ricorda l'argomento esposto nel caso finito-dimensionale: il punto di partenza è stata una misura proiettiva in uno spazio più grande, sottoposta in seguito ad una opportuna restrizione ad un sottospazio di interesse.

Vediamo quindi come la procedura seguita sia caratteristica, nel senso che, anche nel caso infinito-dimensionale, è possibile provare un enunciato del Teorema di Neumark, il quale, dato un POVM, assicura l'esistenza di uno spazio più grande su cui agisce un PVM la cui restrizione coincide con il POVM dato. In seguito, però, metteremo in luce alcune problematiche della presente costruzione.

Daremo la dimostrazione nel caso in cui la σ -algebra \mathcal{A} comprenda un numero finito di elementi, poiché il procedimento è più semplice e lineare. Poiché \mathcal{A} contiene un numero finito di elementi è possibile estrarne una sottofamiglia finita \mathcal{A}' di insiemi disgiunti la cui unione dà l'intero spazio U ; un POVM F ristretto ad \mathcal{A}' corrisponde ad una famiglia finita $\{F_a\}_a$ di operatori positivi sullo spazio di Hilbert che risolvono l'identità. Il caso risulta comunque interessante in quanto, soprattutto nelle applicazioni, non si ha interesse nel considerare una risoluzione infinita nella misura e i risultati sono raccolti in un numero finito, ancorché grande, di classi discrete.

Teorema 3.4.1 (Neumark). *Sia \mathcal{H} uno spazio di Hilbert. Per ogni POVM F su \mathcal{A} esiste uno spazio di Hilbert \mathcal{H}_0 , uno stato puro $|1\rangle_0$ di \mathcal{H}_0 ed un PVM E a valori nei funzionali di $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_0$ tale che*

$$F(B) = \tilde{E}E(B)\tilde{E} \quad \text{con } B \in \mathcal{A} \quad (3.4)$$

essendo \tilde{E} la proiezione da $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_0$ su \mathcal{H} , ed inoltre

$$\mu_{\rho \otimes \rho_0}^E(B) = \mu_{\rho}^F(B) \quad \text{con } B \in \mathcal{A}, \quad (3.5)$$

qualunque sia lo stato ρ in \mathcal{H} .

Dimostrazione. Come discusso prima di enunciare il teorema, ci restringiamo al caso in cui il POVM F è equivalente ad una collezione finita di operatori positivi $\{F_a\}_{a=1}^m$ risolvanti l'identità in \mathcal{H} . Consideriamo lo spazio vettoriale \mathcal{K} costituito dalla somma diretta di m copie di \mathcal{H} , i cui vettori sono quindi dati da m -ple di elementi di \mathcal{H} . Dotiamo \mathcal{K} della forma bilineare

$$(\Psi|\Psi') = \sum_{a=1}^m \langle \psi_a | F_a | \psi'_a \rangle, \quad (3.6)$$

che non costituisce un prodotto scalare in quanto non è definito positivo, ma in generale solamente semidefinito, e dunque induce su \mathcal{K} una seminorma. Detto $\mathcal{N} = \{|\Psi\rangle \in \mathcal{K} : (\Psi|\Psi) = 0\}$ il nucleo della seminorma indotta, si ha che la (3.6) definisce un prodotto scalare sullo spazio vettoriale quoziente $\mathcal{K}/\mathcal{N} =: \tilde{\mathcal{H}}$ che è quindi uno spazio di Hilbert.

Mostriamo ora che possiamo realizzare $\tilde{\mathcal{H}}$ come sottospazio di $\tilde{\mathcal{H}}$. Consideriamo la mappa $|\Psi_{\#}\rangle : \mathcal{K} \rightarrow \tilde{\mathcal{H}}$, $|\varphi\rangle \mapsto |\Psi_{\varphi}\rangle = (|\varphi\rangle)_a$, ossia che manda un vettore di \mathcal{K} in quello con tutte le componenti uguali ad esso. Tale mappa è una isometria, come

si verifica ricordando che $\{F_a\}_a$ risolve l'identità: $(\Psi_\varphi|\Psi_{\varphi'}) = \sum_a \langle \varphi|F_a|\varphi' \rangle = \langle \varphi|\varphi' \rangle$. Pertanto, attraverso la mappa $|\Phi_\#$) possiamo considerare $\mathcal{H} \subseteq \tilde{\mathcal{H}}$.

Definiamo a questo punto la famiglia di operatori $\{E_v\}_v$ in \mathcal{H} come la proiezione sulla v -esima copia di \mathcal{H} , in formule

$$E_v : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, \quad |\psi\rangle = (|\psi_a\rangle)_a \mapsto (\delta_{av} |\psi_a\rangle)_a;$$

questi operatori formano chiaramente un PVM su $\tilde{\mathcal{H}}$, ed inoltre da un conto diretto risulta

$$(\Psi_\varphi|E_v|\Psi_\varphi) = \sum_a \langle \varphi|F_a\delta_{av}|\varphi \rangle = \langle \varphi|F_v|\varphi \rangle.$$

Per concludere la dimostrazione della prima parte dell'enunciato resta da mostrare che $\tilde{\mathcal{H}}$ è esprimibile come prodotto tensore degli spazi \mathcal{H} e \mathcal{H}_0 .

Limitiamoci per il momento al caso $\dim \mathcal{H}_0 = m$; siano $\{|j\rangle\}_{j=1}^\infty$ una base ortonormale di \mathcal{H} e $|1\rangle_0$ lo stato iniziale in \mathcal{H}_0 completato alla base ortonormale $\{|i\rangle_0\}_{i=1}^m$. Identifichiamo la i -esima copia di \mathcal{H} nella definizione di \mathcal{H} con $\mathcal{H} \otimes |i\rangle_0$; con questa posizione l'uguaglianza

$$\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_0 \ni |\varphi\rangle = \sum_{ji} \varphi_{ji} |j\rangle \otimes |i\rangle_0 = \sum_i \left(\sum_j \varphi_{ji} |j\rangle \right) \otimes |i\rangle_0 =: \sum_i |\varphi_i\rangle \otimes |i\rangle_0$$

definisce una corrispondenza biunivoca fra i vettori di $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_0$ e le successioni di m vettori di \mathcal{H} , cioè fra $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_0$ e \mathcal{H} . Dimensioni maggiori dello spazio \mathcal{H}_0 possono essere considerate espandendo \mathcal{H} mediante l'aggiunta di altre copie di \mathcal{H} , al limite infinite.

Facilmente si riconosce l'uguaglianza $\text{tr } E_a(\rho \otimes \rho_0) = \text{tr } \tilde{E}E_a\tilde{E}\rho$ essendo lo stato ρ_0 puro; combinando questa relazione con la (3.3) si ottiene la (3.5) e si conclude. \square

3.4.1 Problematiche della costruzione

La costruzione esposta nella dimostrazione del teorema è però piú debole di quella utilizzata nella formulazione del Teorema per spazi di Hilbert di dimensione finita. Allora era stata analizzata in dettaglio l'indipendenza del sistema di appoggio da quello considerato; l'approccio seguito qui, invece ha una valenza molto generale ma limita questa caratteristica.

Per verificare questa affermazione, consideriamo un'osservabile Ω agente sul sistema \mathcal{H}_0 , che quindi si rappresenta nel sistema completo con l'operatore $\mathbb{1}_{\mathcal{H}} \otimes \Omega$. Seguiamo costruzione e notazioni della dimostrazione, effettuando però un cambio di base per cui lo stato iniziale del sistema \mathcal{H}_0 è dato da $\sum_{i=1}^m |i\rangle_0$; per poter calcolare i prodotti scalari dobbiamo re-identificare le grandezze in gioco nello spazio \mathcal{H} , in cui abbiamo una espressione esplicita di tale forma. Se $|\psi\rangle$ rappresenta lo stato puro e normalizzato di \mathcal{H} , lo stato nel sistema $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_0$ è dato dal raggio vettore $\sum_{i=1}^m |\psi\rangle \otimes |i\rangle_0$, che osserviamo essere normalizzato: ripercorrendo la costruzione dello spazio $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_0$, tale vettore corrisponde a $|\Psi_\psi\rangle = (|\psi\rangle, |\psi\rangle, \dots) = (|\psi\rangle)_{i=1}^m \in \mathcal{H}$, la cui norma risulta $(\Psi_\psi|\Psi_\psi) = \sum_a \langle \psi|F_a|\psi \rangle = \langle \psi|\psi \rangle = 1$. Vogliamo valutare quindi il valore medio dell'osservabile, e calcoliamo dunque

$$(\mathbb{1}_{\mathcal{H}} \otimes \Omega) \left(\sum_i |\psi\rangle \otimes |i\rangle_0 \right) = \sum_i |\psi\rangle \otimes \Omega |i\rangle_0 = \sum_{ik} |\psi\rangle \otimes \Omega_{ik} |k\rangle_0 = \sum_k |\psi_k\rangle \otimes |k\rangle_0,$$

avendo posto $|\psi_k\rangle = \sum_i \Omega_{ik} |\psi\rangle$; l'azione dell'osservabile sullo stato è quindi identificabile con $|\Psi'_\psi\rangle = (|\psi_k\rangle)_k \in \mathcal{H}$. Note queste espressioni è quindi possibile ricavare il valore medio dell'osservabile, in quanto

$$\langle \mathbb{1}_{\mathcal{H}} \otimes \Omega \rangle_{\tilde{\mathcal{H}}} = \langle \psi | \otimes \langle 0 |_0 (\mathbb{1}_{\mathcal{H}} \otimes \Omega) | \psi \rangle \otimes | 0 \rangle_0 = (\Psi_\psi | \Psi'_\psi)$$

e a questo punto riprendiamo la definizione del prodotto scalare nella (3.6),

$$\sum_a \langle \psi | F_a | \psi_a \rangle = \sum_{ai} \Omega_{ia} \langle \psi | F_a | \psi \rangle = \sum_{ai} \Omega_{ia} \langle F_a \rangle_{\mathcal{H}}.$$

Come si legge dalla precedente, nell'espressione del valore medio dell'osservabile proprio del sistema \mathcal{H}_0 compaiono termini aggiuntivi legati al sistema \mathcal{H} .

La ragione di questo insolito comportamento va ricercata nel fatto che l'introduzione di un prodotto scalare non canonico nello spazio $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_0$ nasconde, dietro al formalismo utilizzato per i sistemi composti standard, una sorta di correlazione fra i due: le proprietà delle osservabili del secondo sistema dipendono da quelle del sistema originario, come si è evidenziato con l'esempio poco sopra.

Un possibile approccio alla soluzione del problema

Sarebbe auspicabile generalizzare anche in questo caso la dimostrazione del teorema svolta nel caso di dimensione finita; un punto di partenza per estendere la costruzione potrebbe essere la simmetria del formalismo.

Impostiamo ora un procedimento analogo a quello svolto nel Capitolo 2: consideriamo su uno spazio di Hilbert a dimensione infinita \mathcal{H} il POVM $\{F_a\}_{a=1}^m$; sia $\{|i\rangle\}_i$ una sua base e sia $\{|\mu\rangle_0\}_{\mu=0}^{n_0}$ una base dello spazio di appoggio \mathcal{H}_0 , con $|0\rangle_0$ il suo stato ed eventualmente $n_0 = \infty$.

Scriviamo gli operatori F_a in una sorta di decomposizione spettrale analoga alla (2.7), ossia, utilizzando formalmente la notazione di Dirac nel caso di spettro continuo,

$$F_a = \int |u_a(\lambda)\rangle \langle u_a(\lambda)| d\lambda,$$

in cui, idealmente, abbiamo promosso l'indice discreto (anzi, finito) k alla variabile continua λ . La risoluzione dell'identità porge allora la relazione

$$\mathbb{1}_{\mathcal{H}} = \sum_a F_a = \sum_a \int |u_a(\lambda)\rangle \langle u_a(\lambda)| d\lambda.$$

In componenti, la precedente diviene

$$\delta_{ij} = \sum_a \int u_{a,i}(\lambda) u_{a,j}^*(\lambda) d\lambda,$$

qualunque siano gli interi i e j ; tale relazione indica l'ortonormalità dei vettori

$$|u_i\rangle := (u_{1,i}(\lambda), \dots, u_{m,i}(\lambda)) \in \bigoplus_{a=1}^m L^2(\mathbb{R}, d\lambda).$$

Costruiamo ora i vettori

$$|\zeta_a(\lambda)\rangle = |u_a(\lambda)\rangle \otimes |0\rangle_0 + \sum_{\mu \geq 1} c_{a,\mu}(\lambda) |1\rangle \otimes |\mu\rangle_0,$$

per opportune funzioni $c_{a,\mu}(\lambda)$; ancora una volta, se tali vettori potessero essere costruiti ortonormali, in senso generalizzato, la definizione

$$E_a = \int |\zeta_a(\lambda)\rangle \langle \zeta_a(\lambda)| d\lambda$$

fornirebbe il PVM ricercato. La condizione di ortonormalità fra gli $|\zeta_a(\lambda)\rangle$ diviene ora

$$\langle \zeta_{a'}(\lambda') | \zeta_a(\lambda) \rangle = \delta_{aa'} \delta(\lambda - \lambda'),$$

ed esplicitando i prodotti scalari si ottiene, sfruttando rispettivamente l'ortonormalità e la completezza delle basi $\{|\mu\rangle_0\}_\mu$ e $\{|i\rangle\}_i$,

$$\begin{aligned} \delta_{aa'} \delta(\lambda - \lambda') &= \langle u_{a'}(\lambda') | u_a(\lambda) \rangle + \sum_{\mu \geq 1} c_{a',\mu}^*(\lambda') c_{a,\mu}(\lambda) \\ &= \sum_i u_{a',i}(\lambda') u_{a,i}(\lambda) + \sum_{\mu \geq 1} c_{a',\mu}^*(\lambda') c_{a,\mu}(\lambda). \end{aligned}$$

Il problema a questo punto è studiare il sottospazio generato dai vettori $\{|u_i\rangle\}_i$; nel caso in cui fosse possibile aggiungere ulteriori gradi di libertà mantenendo l'indipendenza dei vettori in maniera tale da soddisfare l'equazione precedente si sarebbe proposta una costruzione analoga a quella svolta nel caso di dimensione finita presentata nel Capitolo 2. Non siamo riusciti a concludere in questa direzione, che rimane pertanto un problema aperto anche a causa della maggiore complessità degli strumenti matematici utilizzati in questo contesto.

Certamente nulla assicura che sia proprio la costruzione presentata ad ammettere una estensione. In ogni caso, una generalizzazione dell'enunciato sembra comunque prevedibile: l'impossibilità di introdurre uno spazio di appoggio indipendente dal sistema in esame appare infatti una ben strana differenza se collegata alla dimensione dello spazio, essendo i casi finito- ed infinito-dimensionale accomunati da importanti paralleli nella fisica e nel formalismo utilizzato.

Conclusioni

In questo lavoro abbiamo trattato alcuni aspetti del problema delle misure in Meccanica Quantistica. Siamo partiti dal considerare la ben consolidata teoria per i sistemi chiusi con spazio di Hilbert di dimensione finita, generalizzando quindi alcuni degli assiomi al fine di descrivere il comportamento di porzioni non necessariamente isolate di sistemi composti.

Abbiamo generalizzato la rappresentazione di uno stato come raggio vettore definendo gli operatori di densità, che già nei sistemi chiusi possono essere interpretati come strumenti per descrivere una conoscenza non completa nella preparazione di un sistema, ottenendoli qui a seguito di una restrizione dello stato di un sistema composto in una delle componenti. Tale procedimento è stato seguito per considerare il modo in cui appaiono le osservabili quando in una misura si ha accesso a solo una parte del sistema. Le famiglie di proiettori ortogonali risolvienti l'identità con cui si rappresentano normalmente gli operatori autoaggiunti lasciano in questo contesto il posto ad operatori ancora hermitiani positivi e sommanti all'identità, ma non più ortonormali, i POVM.

La parte centrale di questo lavoro è stata quindi la discussione di come, viceversa, sia sempre possibile, dato un POVM, ottenere uno spazio di Hilbert, e quindi un sistema, contenente quello in esame in cui esiste una misura proiettiva standard che ristretta al sistema di partenza restituisca la misura generalizzata assegnata. Di questo risultato, noto sotto il nome di Teorema di Neumark, sono state fornite dimostrazioni differenti nei casi in cui lo spazio di Hilbert in esame fosse di dimensione finita o infinita. Nel primo caso, è stata esibita una costruzione del sistema composto come risultato della somma di quello di partenza con uno di appoggio senza che vi sia alcuna correlazione fra i due, che sono quindi totalmente indipendenti. Operativamente, questo si traduce nella possibilità di eseguire una misura usuale, proiettiva, sulla somma del sistema con uno preparato in uno stato arbitrario. Una simile interpretazione non è però accettabile con la costruzione presentata nel caso dello spazio di Hilbert di dimensione infinita; lo spazio complessivo può ancora essere espresso come prodotto fra lo spazio di partenza con un altro, tuttavia le proprietà statistiche delle osservabili proprie del secondo risentono delle caratteristiche del primo.

Sperabilmente risulterà possibile estendere la costruzione svolta nel caso di uno spazio di Hilbert dimensione finita, come appare naturale alla luce dei numerosi parallelismi caratterizzanti il formalismo e la fisica che accomunano le due classi di sistemi.

Bibliografia

- [1] Stéphane Attal. *Lectures in Quantum Noise Theory. Lecture 5: Quantum Mechanics*. URL: http://math.univ-lyon1.fr/~attal/Quantum_Mechanics.pdf.
- [2] Stéphane Attal. *Lectures in Quantum Noise Theory. Lecture 7: Quantum Probability*. URL: http://math.univ-lyon1.fr/~attal/Quantum_Probability.pdf.
- [3] Alexander Holevo. *Probabilistic and Statistical Aspects of Quantum Theory*. Pisa: Edizioni della Normale, 2011.
- [4] Asher Peres. “Neumark’s theorem and quantum inseparability”. In: *Foundations of Physics* 20.12 (1990), pp. 1441–1453.
- [5] Asher Peres. *Quantum theory: concepts and methods*. Dordrecht Boston: Kluwer Academic Publishers, 1995. Cap. 9.
- [6] John Preskill. *Lecture notes on quantum computation – Chapter 2*. URL: http://www.theory.caltech.edu/~preskill/ph219/chap2_15.pdf.
- [7] John Preskill. *Lecture notes on quantum computation – Chapter 3*. URL: <http://www.theory.caltech.edu/people/preskill/ph229/notes/chap3.pdf>.
- [8] Carlo Maria Scandolo. *Entanglement and thermodynamics in general probabilistic theories – Chapter 1*. Tesi di Laurea Magistrale. Università degli Studi di Padova. URL: http://tesi.cab.unipd.it/46015/1/Scandolo_carlo_maria.pdf.