

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Dinamica Quantistica Nonlineare dei Superfluidi

Relatore

Prof. Luca Salasnich

Laureando

Paolo Barigelli

Anno Accademico 2017/2018

Sommario

L'intento principale di questo elaborato è quello di analizzare le condizioni per le quali è possibile realizzare la propagazione di un'onda sonora in un condensato di Bose-Einstein puro. Inizialmente si studiano le proprietà generali di un sistema di particelle identiche, ricavando le equazioni che regolano l'evoluzione temporale della funzione d'onda di particella singola con un potenziale di interazione qualsiasi. Queste equazioni vengono poi riscritte utilizzando le variabili di Madelung, parametrizzazione della funzione d'onda tramite la quale si scrive la dinamica del sistema in funzione della sua densità. Utilizzando un'approssimazione lineare si determina il moto di una piccola perturbazione del sistema, calcolando esattamente la legge di dispersione. Infine si studia analiticamente e graficamente lo sviluppo della legge di dispersione, calcolando le relazioni tra i vari parametri che permettono di ottenere il moto stazionario.

Indice

1	Introduzione	1
2	Equazione di Gross-Pitaevskii generalizzata	3
2.1	Sistema di N particelle identiche	3
2.2	Metodo Variazionale	6
2.3	Equazione di Hartree per i bosoni	7
2.3.1	Equazione di Hartree dipendente dal tempo	11
2.4	Riscrittura del termine di campo medio	12
2.4.1	Esempio: equazione di Gross-Pitaevskii	14
3	Equazioni dell'idrodinamica	17
3.1	Variabili di Madelung	17
3.1.1	Confronto con le equazioni classiche	20
3.2	Potenziale di interazione	21
4	Onde sonore	23
4.1	Equazione delle Onde	23
4.2	Relazione di dispersione	25
4.2.1	Potenziale qualsiasi e P_Q nullo	26
4.2.2	Termine P_Q non nullo	27
4.3	Condizioni di stabilità	28
5	Conclusioni	33

Capitolo 1

Introduzione

la condensazione di Bose-einstein (sigla BEC) è un fenomeno fisico particolarmente interessante sotto ogni punto di vista. L'idea viene per la prima volta presentata in un articolo del fisico indiano Satyendra Nath Bose [2] scritto nel 1924 e inviato direttamente ad Einstein[1]. Impressionato dai nuovi concetti utilizzati, Einstein sviluppa l'idea e in nuovo articolo del 1925[3] presenta il Gas di Bose, stato fisico descritto dalla statistica di Bose-Einstein, teoria che descrive la distribuzione statistica di particelle identiche avente spin intero. Einstein propose inoltre che a basse temperature le particelle vadano ad occupare lo stato a più bassa energia disponibile; siccome le particelle a spin intero, chiamate in seguito Bosoni, non devono rispettare il principio di esclusione di Pauli, esse possono occupare contemporaneamente il medesimo stato. Nel limite di temperatura nulla, ci si aspetta che tutti i Bosoni vadano ad occupare lo stato fondamentale del sistema, producendo così degli effetti quantistici misurabili anche al livello macroscopico. Nonostante lo sviluppo ulteriore della meccanica quantistica abbia portato ad una completa descrizione di questo nuovo stato fisico, le prime misurazioni sperimentali dirette sono arrivate unicamente alla fine degli anni novanta. Nel 1995 Eric Cornell e Carl Wieman hanno prodotto una frazione di condensato considerevole raffreddando fino a 170 nK un gas di atomi di Rubidio, lavoro per il quale hanno ottenuto nel 2001 il premio Nobel per la fisica[7]. Si è utilizzato il Rubidio sia per il fatto che si comporta come un bosone, la somma totale del momento di nucleoni ed elettroni è pari, sia perchè è possibile raffreddarlo a bassissime temperature mediante tecniche ottiche. Negli anni successivi si è riuscito a riprodurre la transizione con altri metalli alcalini, come il Sodio [6] e Litio [10]. Attualmente più di 80 gruppi di ricerca sono in grado di realizzare il condensato con metalli alcalini.

In questo elaborato si svilupperà la teoria generale per descrivere un sistema quantistico di particelle identiche interagenti per applicarlo poi ad un condensato di Bose-einstein puro. Ci concentreremo poi alla riscrittura del problema in termini di nuove variabili, rendendo il formalismo adatto allo studio del sistema se sottoposto a piccole oscillazioni. Analizzeremo quindi questo regime nel dettaglio determinando le zone di stabilità in cui si ha propagazione delle onde.

Equazione di Gross-Pitaevskii generalizzata

L'obiettivo di questo capitolo è quello di ricavare un'equazione per determinare la funzione d'onda di particella singola ϕ in un sistema di N bosoni identici interagenti [5]. Nella prima sezione analizzeremo le proprietà generali della funzione d'onda totale $|\Psi\rangle$ e dell'Hamiltoniana \hat{H} del sistema [8]; nella seconda invece illustreremo brevemente il metodo variazionale, teoria che utilizzeremo poi nella sezione successiva per determinare esplicitamente l'equazione cercata [9]. Nell'ultima sezione invece studieremo nel dettaglio il termine di interazione tra particelle che appare nell'equazione fondamentale, andando a riscriverlo in funzione della sola ϕ [14].

2.1 Sistema di N particelle identiche

Consideriamo un sistema composto da N particelle identiche interagenti tra di loro tramite un certo potenziale V ; per studiare questo sistema utilizzeremo la coordinata generalizzata $x = (\vec{r}, \sigma)$ per una particella, dove \vec{r} rappresenta la coordinata spaziale e σ rappresenta il valore dello spin intrinseco (per esempio per una particella di spin $1/2$ si ha $\sigma = 1/2, -1/2$). Utilizzando la notazione di Dirac lo stato di una particella singola si indica come

$$|x\rangle = |\vec{r}\sigma\rangle \quad (2.1)$$

La funzione d'onda a molti corpi del sistema sarà funzione di tutte le coordinate x_i delle particelle, con $i = 1, \dots, N$:

$$\Psi(x_1, x_2, \dots, x_N) = \Psi(\vec{r}_1, \sigma_2, \vec{r}_2, \sigma_1, \dots, \vec{r}_N, \sigma_N) \quad (2.2)$$

Poichè in meccanica quantistica due particelle identiche sono indistinguibili tra di loro, la probabilità di trovare il sistema in una certa configurazione deve essere la stessa della configurazione in cui si sono scambiate tra di loro due qualsiasi di esse; per questo motivo la funzione d'onda deve soddisfare la condizione

$$|\Psi(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_N)|^2 = |\Psi(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_N)|^2 \quad (2.3)$$

per ogni $i \neq j$. Sperimentalmente si osserva che questa condizione è verificata unicamente da due differenti tipi di funzioni d'onda, a cui corrispondono due diversi tipi di particelle: bosoni e fermioni. Per i primi la funzione d'onda è simmetrica per lo scambio di due particelle, ovvero non cambia di segno:

$$\Psi(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_N) = \Psi(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_N) \quad (2.4)$$

Mentre per i fermioni si ha che la funzione d'onda è antisimmetrica, ovvero cambia di segno per ogni scambio di due particelle:

$$\Psi(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_N) = -\Psi(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_N) \quad (2.5)$$

Notiamo subito che da questa semplice proprietà di un sistema di N fermioni si deduce facilmente il principio di Pauli: se avessi che $x_i = x_j$ per qualche i, j , allora la funzione d'onda totale sarebbe nulla. Da questo si deduce che la probabilità di trovare due fermioni nello stesso stato è sempre nulla. Per completezza enunciamo anche il teorema di spi-statistica, deducibile dai principi della teoria di campo relativistica: particelle identiche con spin intero sono bosoni, mentre particelle con spin semi-intero sono fermioni. Questa proprietà di parità della funzione d'onda a molti corpi può essere resa esplicita scrivendola come una funzione delle singole particelle a cui si impone la condizione di simmetria. Per farlo dobbiamo prima però studiare le proprietà dell'Hamiltoniana del sistema. Iniziamo dal caso di particelle non interagenti: l'Hamiltoniana si può scrivere come

$$\hat{H}_0 = \sum_{i=1}^N \hat{h}(x_i) \quad (2.6)$$

dove $\hat{h}(x_i)$ rappresenta l'hamiltoniana della i -esima particella. Tale termine si può scrivere in generale come

$$\hat{h}(x_i) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\vec{r}) \quad (2.7)$$

dove il primo termine rappresenta l'energia cinetica della particella, mentre $U(\vec{r})$ un potenziale esterno di confinamento. In generale l'Hamiltoniana soddisfa l'equazione agli autovalori

$$\hat{h}(x)\phi_n(x) = \varepsilon_n \phi_n(x) \quad (2.8)$$

con ε_n energia dell'autofunzione $\phi_n(x)$ della particella singola. Se supponiamo che per ogni particella le autofunzioni $\phi_n(x)$ formano un insieme completo di funzioni d'onda, ovvero

$$\langle \phi_n(x_i) | \phi_m(x_i) \rangle = \int \phi_n^*(x_i) \phi_m(x_i) d^3r_i = \delta_{n,m} \quad \forall i \quad (2.9)$$

dove $\delta_{n,m}$ è il simbolo di Kronecker, definito da

$$\delta_{n,m} = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

e l'apice * indica il complesso coniugato del numero complesso. La funzione d'onda totale del sistema $\Psi(x_1, x_2, \dots, x_N)$ può essere scritta quindi simmettizzando o antisimmettizzando il prodotto

$$\phi_{n_1}(x_1)\phi_{n_2}(x_2)\dots\phi_{n_N}(x_N) \quad (2.10)$$

ottenendo così

$$\begin{aligned} \Psi(x_1, x_2, \dots, x_N) &= \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_P \delta_P [\phi_{n_1}(Px_1)\phi_{n_2}(Px_2)\dots\phi_{n_N}(Px_N)] \\ &= \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_P \delta_P [\phi_{Pn_1}(x_1)\phi_{Pn_2}(x_2)\dots\phi_{Pn_N}(x_N)] \end{aligned} \quad (2.11)$$

Dove P è la permutazione di N oggetti che manda l'insieme ordinato x_1, x_2, \dots, x_N nell'insieme ordinato Px_1, Px_2, \dots, Px_N e $\delta_P = \pm 1$ in base alla seguente regola:

$$\delta_P = \begin{cases} 1 & P \text{ pari} \\ -1 & P \text{ dispari} \end{cases}$$

La permutazione P è pari o dispari a seconda che essa sia equivalente ad un numero pari o dispari di scambi successivi. Ad esempio per un sistema di bosoni lo stato fondamentale sarà dato da tutte le particelle nello stato fondamentale di particella singola $\phi_1(x)$:

$$\Psi(x_1, x_2, \dots, x_N) = \phi_1(x_1)\phi_1(x_2)\dots\phi_1(x_N) \quad (2.12)$$

Mentre per i fermioni la formula generale può essere scritta come il determinante della matrice di Slater, formata dalle N funzioni d'onda di energia minore calcolate nelle N coordinate generalizzate x_i :

$$\Psi(x_1, x_2, \dots, x_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \phi_1(x_1) & \phi_1(x_2) & \dots & \phi_1(x_N) \\ \phi_2(x_1) & \phi_2(x_2) & \dots & \phi_2(x_N) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_N(x_1) & \phi_N(x_2) & \dots & \phi_N(x_N) \end{vmatrix} \quad (2.13)$$

Nel caso di un potenziale di interazione tra le varie particelle, l'Hamiltoniana si può scrivere nella seguente maniera:

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^N \hat{h}(x_i) + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N V(x_i, x_j) = \hat{H}_0 + \hat{H}_1 \quad (2.14)$$

In questo caso l'Hamiltoniana non è più separabile in termini delle singole particelle e la funzione d'onda non può essere scritta come combinazione delle sue funzioni.

2.2 Metodo Variazionale

Descriviamo ora brevemente le principali caratteristiche del metodo variazionale, processo di calcolo utilizzato nel nostro caso per determinare lo stato fondamentale di particella singola per un sistema di N bosoni interagenti. Iniziamo dimostrando il teorema su cui tale teoria si basa:

Teorema. *Dato un qualsiasi stato normalizzato $|\Psi\rangle$, ovvero tale per cui $\langle\Psi|\Psi\rangle = 1$, appartenente allo spazio di Hilbert su cui agisce l'hamiltoniana \hat{H} , si ha*

$$\langle\Psi|\hat{H}|\Psi\rangle \geq E_{g.s.} \quad (2.15)$$

Dove $E_{g.s.}$ è l'energia dello stato fondamentale data da $\hat{H}|\Psi_{g.s.}\rangle = E_{g.s.}|\Psi_{g.s.}\rangle$.

consideriamo l'equazione agli autovalori per l'operatore Hamiltoniano \hat{H} con spettro discreto e non degenere:

$$\hat{H}|\Psi_\alpha\rangle = E_\alpha|\Psi_\alpha\rangle \quad (2.16)$$

Dove E_α rappresentano gli autovalori relativi all'autofunzione $|\Psi_\alpha\rangle$ con $\alpha = 1, \dots, N$ in modo che l'energia indicizzata con $\alpha = 0$ corrisponda all'energia dello stato fondamentale, $E_0 = E_{g.s.}$. Dato che l'operatore energia è autoaggiunto, le sue autofunzioni formano un sistema ortonormale completo, ovvero $\langle\Psi_\alpha|\Psi_\beta\rangle = \delta_{\alpha,\beta}$, e possiamo allora scrivere un generico stato Ψ come combinazione lineare degli autostati di \hat{H} :

$$|\Psi\rangle = \sum_{\alpha} c_{\alpha} |\Psi_{\alpha}\rangle \quad (2.17)$$

dove i coefficienti complessi c_{α} soddisfano la condizione

$$\sum_{\alpha} |c_{\alpha}|^2 = 1 \quad (2.18)$$

Calcoliamo ora il valor medio di \hat{H} nello stato $|\Psi\rangle$, utilizzando prima la decomposizione della funzione d'onda e poi la condizione di ortonormalità:

$$\begin{aligned} \langle\Psi|\hat{H}|\Psi\rangle &= \left\langle \sum_{\alpha} c_{\alpha} \Psi_{\alpha} \left| \hat{H} \right| \sum_{\beta} c_{\beta} \Psi_{\beta} \right\rangle = \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha}^* c_{\beta} E_{\beta} \langle\Psi_{\alpha}|\Psi_{\beta}\rangle = \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha}^* c_{\beta} E_{\beta} \delta_{\alpha,\beta} \\ &= \sum_{\alpha} c_{\alpha}^* c_{\alpha} E_{\alpha} = \sum_{\alpha} |c_{\alpha}|^2 E_{\alpha} \geq \sum_{\alpha} |c_{\alpha}|^2 E_0 = E_0 = E_{g.s.} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Si ha ovviamente l'uguaglianza per lo stato fondamentale.

Il teorema afferma che il valor medio dell'hamiltoniana \hat{H} calcolato su una qualsiasi funzione d'onda del sistema sarà sicuramente maggiore o al più uguale al valore dell'energia dello stato fondamentale. Questo ci suggerisce di pensare e tentare di costruire un metodo che ci permetta di "minimizzare" questo valore rispetto alla funzione d'onda stessa o ad altri parametri utili alla descrizione del sistema stesso.

Questa teoria è chiamata *teoria delle variazioni* ed è già stata ampiamente studiata e formalizzata. Qui ci limiteremo a definire solamente gli oggetti necessari alla trattazione del nostro problema.

Definiamo inanzitutto il valor medio di \hat{H} come il funzionale dell'energia del nostro sistema:

$$E[\phi, \phi^*] = \langle \Psi | \hat{H} | \Psi \rangle \quad (2.20)$$

Dove la dipendenza di E da ϕ e ϕ^* è determinata dalla particolare forma della funzione d'onda a molti corpi. Definiamo poi la variazione del funzionale nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \delta E[\phi, \phi^*] &= \frac{d}{d\alpha} E[\phi + \alpha\delta\phi, \phi^* + \alpha^*\delta\phi^*]_{\alpha=0} \\ &= \left(E[\phi + \delta\phi, \phi^* + \delta\phi^*] - E[\phi, \phi^*] \right)_{lin} \end{aligned} \quad (2.21)$$

dove con il termine *lin* si intende che si considerano unicamente i termini lineari in $\delta\phi$. Le funzioni $\delta\phi$, che possono essere considerate delle piccole variazioni delle funzioni d'onda da cui dipende il funzionale, appartengono allo stesso spazio di Hilbert delle ϕ e hanno le stesse proprietà di regolarità di quest'ultime. Si può dimostrare che le due definizioni sono equivalenti, e la scelta di una rispetto all'altra sarà dovuta unicamente alla comodità di calcolo che essa comporta. Infine diremo che una certa funzione ϕ rende stazionario $E[\phi, \phi^*]$ se e solo se la sua variazione $\delta E[\phi, \phi^*]$ è nulla. Possiamo quindi illustrare il metodo di ragionamento che utilizzeremo per determinare l'equazione dello stato fondamentale: Scriviamo il funzionale del sistema esplicitamente utilizzando le proprietà di simmetria di Ψ , calcoliamo la sua variazione in termini di ϕ e la poniamo uguale a zero per una variazione $\delta\phi$ arbitraria. Otterremo così l'equazione cercata.

2.3 Equazione di Hartree per i bosoni

Applichiamo ora il metodo variazionale al nostro sistema. Tale sistema è di particolare interesse in quanto il livello fondamentale può essere considerato un condensato di Bose-einstein puro, ovvero tutte le particelle si trovano nello stesso stato fondamentale:

$$\Psi(x_1, x_2, \dots, x_N) = \prod_{i=1}^N \phi(x_i) = \phi(x_1)\phi(x_2)\dots\phi(x_N) \quad (2.22)$$

dove $\phi(x_i)$ rappresenta lo stato fondamentale di particella singola. In realtà tale ipotesi è abbastanza forte, in quanto questa condizione fisica non è sempre verificata, ma è comunque in grado di approssimare bene alcuni sistemi di bosoni tipo gas diluiti e ultrafreddi di metalli alcalinici. In questo caso notiamo subito che dalla formula generale per il valor medio dell'energia

$$\langle \Psi | \hat{H} | \Psi \rangle = \int \Psi^*(x_1, x_2, \dots, x_N) \hat{H} \Psi(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_1 dx_2 \dots dx_N \quad (2.23)$$

si ottiene una formula relativamente semplice solamente utilizzando l'ipotesi di condensato puro di bose-einstein:

$$\begin{aligned}
\langle \Psi | \hat{H} | \Psi \rangle &= \int \prod_{i=1}^N \phi^*(x_i) \left(\sum_{t=1}^N \hat{h}(x_t) + \frac{1}{2} \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^N V(x_k, x_l) \right) \prod_{j=1}^N \phi(x_j) dx_1 dx_2 \dots dx_N \\
&= \sum_{t=1}^N \int \phi^*(x_1) \dots \phi^*(x_N) \hat{h}(x_t) \phi(x_1) \dots \phi(x_N) dx_1 \dots dx_N \quad + \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^N \int \phi^*(x_1) \dots \phi^*(x_N) V(x_k, x_l) \phi(x_1) \dots \phi(x_N) dx_1 \dots dx_N
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Notando che l'operatore $\hat{h}(x_i)$ agisce unicamente sulla particella a cui fa riferimento e ricordando la condizione di normalizzazione delle singole funzioni d'onda si ottiene

$$\begin{aligned}
&\sum_{t=1}^N \int \phi^*(x_1) \dots \phi^*(x_N) \hat{h}(x_t) \phi(x_1) \dots \phi(x_N) dx_1 \dots dx_N = \\
&= \sum_{t=1}^N \int \phi^*(x_t) \hat{h}(x_t) \phi(x_t) dx_t = N \int \phi^*(x) \hat{h}(x) \phi(x) dx
\end{aligned} \tag{2.25}$$

mentre per il secondo termine abbiamo

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^N \int \phi^*(x_1) \dots \phi^*(x_N) V(x_k, x_l) \phi(x_1) \dots \phi(x_N) dx_1 \dots dx_N = \\
&= \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^N \int \phi^*(x_k) \phi^*(x_l) V(x_k, x_l) \phi(x_k) \phi(x_l) dx_k \dots dx_l \\
&= N(N-1) \int \phi^*(x) \phi^*(x') V(x, x') \phi(x) \phi(x') dx \dots dx'
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Dove si è sfruttato il fatto che le funzioni d'onda di singola particella sono identiche. In conclusione otteniamo l'espressione del funzionale dell'energia:

$$E[\phi, \phi^*] = N \int \phi^*(x) \hat{h}(x) \phi(x) dx + \frac{1}{2} N(N-1) \int |\phi(x')|^2 V(x, x') |\phi(x)|^2 dx dx' \tag{2.27}$$

Calcoliamo ora la sua variazione tenendo conto la condizione di normalizzazione della funzione d'onda Ψ . Per farlo utilizziamo il teorema dei moltiplicatori di Lagrange: si aggiunge alla grandezza da determinare il vincolo da tenere in considerazione moltiplicato per una certa costante da determinare, detta appunto moltiplicatore

di Lagrange. La condizione da calcolare per determinare l'equazione cercata risulta essere

$$\delta E[\phi, \phi^*] - \epsilon(N \int |\phi(x)|^2 dx - 1) = 0 \quad (2.28)$$

Per il primo termine calcoliamo separatamente i vari contributi, ricordando di considerare unicamente i termini lineari in $\delta\phi(x)$:

$$\begin{aligned} & \int (\phi^*(x) + \delta\phi^*(x)) \hat{h}(x) (\phi(x) + \delta\phi(x)) dx = \\ & \int \phi^*(x) \hat{h}(x) \phi(x) dx + \int \phi^*(x) \hat{h}(x) \delta\phi(x) dx + \\ & \int \delta\phi^*(x) \hat{h}(x) \phi(x) dx + \int \delta\phi^*(x) \hat{h}(x) \delta\phi(x) dx \end{aligned} \quad (2.29)$$

Notiamo che il primo contributo compare identico nel termine $E[\phi, \phi^*]$ e quindi si elimina; l'ultimo è invece di secondo ordine nelle variazioni e va quindi trascurato. nel terzo termine utilizziamo l'espressione esplicita della parte cinetica dell'operatore $\hat{h}(x)$ per riscriverlo in funzione della variazione stessa, in quanto il termine in cui appare il potenziale di interazione è già lineare:

$$\begin{aligned} \int \phi^*(x) \hat{h}(x) \delta\phi(x) dx &= -\frac{\hbar^2}{2m} \int \phi^*(x) \nabla^2 \delta\phi(x) dx \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\int \nabla \left(\phi^*(x) \nabla \delta\phi(x) \right) dx - \int \nabla \phi^*(x) \nabla \delta\phi(x) dx \right) \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \left(- \int \nabla \left(\nabla \phi^*(x) \delta\phi(x) \right) dx + \int \nabla^2 \phi^*(x) \delta\phi(x) dx \right) \\ &= \int \delta\phi(x) \hat{h}(x) \phi^*(x) dx \end{aligned} \quad (2.30)$$

Nel primo passaggio si è integrato per parti e si è eliminato il primo termine in quanto le funzioni d'onda si annullano all'infinito. si è quindi applicato di nuovo l'integrazione per parti al secondo termine ottenendo così il risultato voluto applicando la stessa proprietà delle funzioni d'onda.

Dal primo termine otteniamo così due contributi, uno il complesso coniugato dell'altro, lineari nella variazione.

Dobbiamo ora sviluppare il secondo termine del funzionale, calcolando unicamente i termini fino al primo ordine in $\delta\phi$ per non appesantire la scrittura

$$\begin{aligned}
& \int (\phi(x') + \delta\phi(x'))(\phi^*(x') + \delta\phi^*(x'))V(x, x')(\phi(x) + \delta\phi(x))(\phi^*(x) + \delta\phi^*(x))dx dx' = \\
& = \int \phi^*(x)\phi^*(x')V(x, x')\phi(x)\phi(x')dx dx' + \int \phi^*(x)\phi^*(x')V(x, x')\delta\phi(x)\phi(x')dx dx' + \\
& + \int \phi^*(x)\phi^*(x')V(x, x')\phi(x)\delta\phi(x')dx dx' + \int \delta\phi^*(x)\phi^*(x')V(x, x')\phi(x)\phi(x')dx dx' + \\
& + \int \phi^*(x)\delta\phi^*(x')V(x, x')\phi(x)\phi(x')dx dx'
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Anche in questo caso il primo termine appare nel funzionale senza variazione e quindi si elide. Poichè la funzione d'onda $\phi(x)$ è sempre la stessa indipendentemente dalla particella che si considera, i termini integrali che sono simmetrici per lo scambio delle variabili x ed x' sono identici.

L'ultimo termine da analizzare è quello relativo al vincolo di normalizzazione. Esso è il più semplice da calcolare e si ha

$$\begin{aligned}
& \int (\phi^*(x) + \delta\phi^*(x))(\phi(x) + \delta\phi(x))dx = \\
& = \int \phi^*(x)\phi(x)dx + \int \delta\phi^*(x)\phi(x)dx + \\
& + \int \phi^*(x)\delta\phi(x)dx + \int \delta\phi^*(x)\delta\phi(x)dx
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Anche qui il primo termine, uguale ad 1 per la normalizzazione, si elimina con il termine costante all'interno della variazione e l'ultimo è quadratico in funzione di queste e va trascurato.

Abbiamo così calcolato tutti i termini necessari per la scrittura dell'equazione che cerchiamo

$$\begin{aligned}
& \int dx \left(N\hat{h}(x)\phi^*(x) + N(N-1) \int |\phi(x')|^2(x')V(x, x')\phi^*(x)dx' + N\epsilon\phi^* \right) \delta\phi(x) + \\
& + \int dx \left(N\hat{h}(x)\phi(x) + N(N-1) \int |\phi(x')|^2(x')V(x, x')\phi(x)dx' + N\epsilon\phi \right) \delta\phi^*(x)
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Si osserva immediatamente che i due termini sono uno il complesso coniugato dell'altro; dato che l'operatore $\hat{h}(x)$ è autoaggiunto e il termine potenziale è reale, i due termini sono equivalenti e dunque corrispondono alla stessa equazione per lo stato fondamentale. L'equazione così ottenuta è chiamata equazione di Hartree per i bosoni e può essere riscritta come

$$\left[\hat{h}(x) + U_{mf} \right] \phi(x) = \epsilon\phi(x) \tag{2.34}$$

Dove il termine U_{mf} è il potenziale di campo medio e rappresenta il "valor medio" dell'interazione che una singola particella risente in presenza di tutte le altre ed è dato da

$$U_{mf} = N(N-1) \int |\phi(x')|^2 V(x, x') dx' \quad (2.35)$$

mentre il moltiplicatore si lagrange dato dalla condizione di normalizzazione corrisponde al valore dell'energia della singola particella.

Nel caso in cui i bosoni siano privi di spin, possiamo ulteriormente semplificare l'equazione considerando che la coordinata generale x corrisponde unicamente alla coordinata spaziale \vec{r} : se definiamo la densità locale di bosoni come

$$\rho(\vec{r}) = N|\phi(\vec{r})|^2 \quad (2.36)$$

e assumiamo che N sia grande a sufficienza in modo che l'approssimazione $N \sim N-1$ sia valida, si ottiene l'equazione

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\vec{r}) + \int \rho(\vec{r}') V(\vec{r} - \vec{r}') d^3\vec{r}' \right] \phi(\vec{r}) = \epsilon \phi(\vec{r}) \quad (2.37)$$

Dove abbiamo anche supposto che il potenziale dipende solamente dalla differenza tra le posizioni delle due particelle interagenti.

2.3.1 Equazione di Hartree dipendente dal tempo

Quella appena trovata è un'equazione che ci permette di determinare il valore dell'energia di singola particella e la relativa equazione d'onda stazionaria, ovvero indipendente dal tempo. Nel caso in cui fossimo interessati a determinare l'evoluzione temporale del sistema è possibile utilizzare lo stesso procedimento per ottenere un'equazione in funzione della funzione d'onda $\phi(\vec{r}; t)$. Partendo dall'equazione di Schrodinger dipendente dal tempo per il sistema totale

$$\hat{H}\Psi(x_1, x_2, \dots, x_N, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x_1, x_2, \dots, x_N, t) \quad (2.38)$$

definiamo un nuovo funzionale per il sistema, detto *azione di dirac*:

$$S[\phi, \phi^*] = \int dt \langle \Psi | \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \hat{H} \right) | \Psi \rangle = \int dt \Psi^*(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \hat{H} \right) \Psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) d^3\vec{r}_1 \dots d^3\vec{r}_N \quad (2.39)$$

e calcoliamo la funzione ϕ per cui la variazione del funzionale si annulla. Il termine in cui compare il valor medio di \hat{H} è analogo al caso precedente di cui abbiamo svolto già tutti i calcoli, mentre per il termine in cui compare la derivata temporale si ha

$$\begin{aligned}
& \int (\phi^*(\vec{r}) + \delta\phi^*(\vec{r})) \frac{\partial}{\partial t} (\phi(x) + \delta\phi(x)) dx = \\
& \int \phi^*(x) \frac{\partial}{\partial t} \phi(x) dx + \int \phi^*(x) \frac{\partial}{\partial t} \delta\phi(x) dx + \\
& + \int \delta\phi^*(x) \frac{\partial}{\partial t} \phi(x) dx + \int \delta\phi^*(x) \frac{\partial}{\partial t} \delta\phi(x) dx
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Anche in questo caso il primo termine si elimina con il corrispondente nella formula del funzionale e l'ultimo si trascura in quanto non è lineare in $\delta\phi$. Per avere che il secondo termine sia lineare nella variazione, dobbiamo integrare per parti e considerare che la variazione si annulla se calcolata negli estremi di integrazione:

$$\begin{aligned}
\int \int \phi^*(x) \frac{\partial}{\partial t} \delta\phi(x) dx dt &= \int dx \left(\int dt \frac{\partial}{\partial t} (\phi^*(x) \delta\phi(x)) - \int dt \delta\phi(x) \frac{\partial}{\partial t} \phi^*(x) \right) = \\
&= - \int \int \delta\phi(x) \frac{\partial}{\partial t} \phi^*(x) dt dx
\end{aligned} \tag{2.41}$$

Notiamo che in questo caso il termine riscritto è di segno negativo rispetto a quello di partenza; questa discrepanza è dovuta al fatto che questo termine nella formula generale è moltiplicato per l'unità immaginaria e il suo complesso coniugato ha segno opposto in accordo con quanto trovato. Nel caso indipendente dal tempo questo cambio di segno non si verificava nel termine di normalizzazione in quanto si è posto il moltiplicatore di lagrange reale per soddisfare la condizione che esso rappresenti l'energia della particella singola.

In conclusione si ottiene l'equazione analoga al caso stazionario con la sostituzione del termine con la derivata parziale del tempo al posto dell'autovalore dell'energia:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\vec{r}) + \int \rho(\vec{r}') V(\vec{r} - \vec{r}') d^3\vec{r}' \right] \phi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \phi(\vec{r}, t) \tag{2.42}$$

Nel seguito utilizzeremo la forma dipendente dal tempo in quanto più generale e formalmente simile a quella indipendente dal tempo. Per questo motivo qualsiasi considerazione su qualsiasi termine escluso quello in cui compare la derivata parziale rispetto al tempo sarà da considerarsi valido anche per il caso stazionario.

2.4 Riscrittura del termine di campo medio

In questo paragrafo vogliamo mostrare come il termine di campo medio possa essere riscritto in funzione della sola ϕ , o meglio delle sue derivate rispetto le coordinate spaziali. Infatti il campo medio presenta una particolare forma che può essere identificata con la convoluzione di due funzioni.

Definizione: date due funzioni ϕ e ψ si definisce convoluzione $\phi * \psi$ la grandezza

$$(\phi * \psi)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x-y) \psi(y) dy \tag{2.43}$$

Siamo particolarmente interessati a come questa grandezza si comporta sotto trasformazione di Fourier; si può infatti dimostrare che

$$\mathbb{F}[\phi * \psi] = \mathbb{F}[\phi]\mathbb{F}[\psi] \quad (2.44)$$

ovvero la trasformata di fourier della convoluzione è il prodotto delle trasformate delle singole funzioni.

Applichiamo ora questa proprietà al nostro termine di campo medio:

$$U_{mf} = N(N-1) \int V(\vec{r} - \vec{r}') |\phi(\vec{r}')|^2 d^3\vec{r}' = N(N-1)(V * |\phi|^2)(\vec{r}) \quad (2.45)$$

Calcoliamo ora la trasformata di Fourier

$$\mathbb{F}[(V * |\phi|^2)(\vec{r})] = \mathbb{F}[V]\mathbb{F}[|\phi|^2] = \tilde{V}(\vec{k})\mathbb{F}[|\phi|^2] \quad (2.46)$$

dove \vec{k} rappresenta la coordinata nello spazio della trasformata. Dobbiamo ora ipotizzare che possiamo scriverla trasformata del nostro potenziale in serie di taylor nell'intorno del punto zero e che sia inoltre una funzione pari, in modo da avere nello sviluppo unicamente i termini pari. Sotto queste ipotesi possiamo scrivere

$$\tilde{V}(\vec{k}) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \frac{\partial^j}{\partial k^j} \tilde{V}(\vec{k})|_{j=0} k^j \quad (2.47)$$

che rappresenta un polinomio in k i cui coefficienti sono determinati dalle derivate della trasformata del potenziale calcolata nel punto $k = 0$. Dato che l'antitrasformata di fourier è un operatore lineare, possiamo ricalcolare il termine di campo medio come antitrasformata della sua trasformata di Fourier, considerando però l'espressione polinomiale del potenziale:

$$\begin{aligned} U_{mf} &= N(N-1)\mathbb{F}^{-1} \left[\mathbb{F}[U_{mf}] \right] = N(N-1)\mathbb{F}^{-1} \left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \frac{\partial^j}{\partial k^j} \tilde{V}(\vec{k})|_{k=0} k^j \mathbb{F}[|\phi(\vec{r})|^2] \right] \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \frac{\partial^j}{\partial k^j} \tilde{V}(\vec{k})|_{j=0} \mathbb{F}^{-1}[k^j] |\phi(\vec{r})|^2 \end{aligned} \quad (2.48)$$

L'unico termine che ci rimane da determinare è l'antitrasformata della coordinata k e delle sue potenze. In realtà già sappiamo che l'antitrasformata della coordinata k corrisponde all'operatore momento nello spazio delle delle posizioni, e quindi possiamo scrivere

$$\mathbb{F}^{-1}[k^j] = (-i\hbar\nabla)^j \quad (2.49)$$

infine si ha che il termine di campo medio si può scrivere come

$$U_{mf} = (N-1) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \frac{\partial^j}{\partial k^j} \tilde{V}(\vec{k})|_{k=0} (-i\hbar\nabla)^j |\phi(\vec{r}, t)|^2 \quad (2.50)$$

Sfruttiamo ora la parità del potenziale per semplificare ulteriormente la formula; dato che i termini dispari dello sviluppo sono nulli, possiamo effettuare la sostituzione $j = 2t$ e vedere come si modificano i termini. per il fattoriale e le derivate non si hanno modificazioni, mentre per l'operatore impulso il segno meno si elimina in quanto elevato ad una potenza pari, mentre per l'unità immaginaria e l'operatore nabla possiamo scrivere:

$$i^j = i^{2t} = (i^2)^t = (-1)^t \quad (2.51)$$

$$\nabla^j = \nabla^{2t} = (\nabla^2)^t \quad (2.52)$$

Si ottiene così l'espressione finale per il termine U_{mf}

$$\begin{aligned} U_{mf} &= (N-1) \sum_{t=0}^{\infty} (-1)^t \frac{\hbar^{2t}}{(2t)!} \frac{\partial^{2t}}{\partial k^{2t}} \tilde{V}(\vec{k})|_{k=0} (\nabla^2)^t |\phi(\vec{r}, t)|^2 \\ &= (N-1) \sum_{t=0}^{\infty} (-1)^t g_{2t} (\nabla^2)^t |\phi(\vec{r}, t)|^2 \end{aligned} \quad (2.53)$$

dove si è posto

$$g_{2t} \equiv \frac{\hbar^{2t}}{(2t)!} \frac{\partial^{2t}}{\partial k^{2t}} \tilde{V}(\vec{k})|_{k=0} \quad (2.54)$$

Proviamo a scrivere qualche termine dello sviluppo:

$$t=0 \quad g_0 = \tilde{V}(\vec{k})|_{k=0} = \int V(\vec{r}) d^3r \quad (2.55)$$

$$t=1 \quad g_2 = \frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial k^2} \tilde{V}(\vec{k})|_{k=0} \quad (2.56)$$

$$t=2 \quad g_4 = \frac{\hbar^4}{4!} \frac{\partial^4}{\partial k^4} \tilde{V}(\vec{k})|_{k=0} \quad (2.57)$$

L'uguaglianza per il termine di ordine zero deriva dalla definizione di trasformata di Fourier in cui si è posto $\vec{k} = 0$. In conclusione, possiamo scrivere l'equazione dello stato fondamentale in termini della funzione d'onda e delle sue derivate:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\vec{r}) + (N-1) \sum_{t=0}^{\infty} (-1)^t g_{2t} (\nabla^2)^t |\phi(\vec{r}, t)|^2 \right] \phi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \phi(\vec{r}, t) \quad (2.58)$$

2.4.1 Esempio: equazione di Gross-Pitaevskii

Se nell'equazione fondamentale tronciamo lo sviluppo all'ordine 0, ovvero teniamo solamente il termine costante g_0 , otteniamo l'equazione di Gross-Pitaevskii [11] [12]:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\vec{r}) + g_0 (N-1) \nabla^2 |\phi(\vec{r})|^2 \right] \phi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \phi(\vec{r}, t) \quad (2.59)$$

Questa equazione si ottiene dal termine di campo medio in forma integrale utilizzando come potenziale di interazione

$$V(\vec{r} - \vec{r}') = g_0 \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (2.60)$$

dove la δ è rappresentata la delta di Dirac. Questa forma analitica schematizza un potenziale di contatto, ovvero un'interazione tra i bosoni che avviene unicamente quando due particelle sono praticamente sovrapposte.

Capitolo 3

Equazioni dell'idrodinamica

L'obiettivo di questo capitolo è quello di riscrivere l'equazione di Gross-Pitaevskii utilizzando le variabili di Madelung, particolare parametrizzazione della funzione d'onda a molti corpi; utilizzando questa idea si ottengono due equazioni distinte per il sistema che sono formalmente analoghe a quelle di un fluido ideale privo di viscosità. Nella prima sezione introdurremo quindi queste nuove variabili e le utilizzeremo per riscrivere l'equazione di Schrodinger. Nella seconda sezione amplieremo il risultato all'equazione di Gross-Pitaevskii con un potenziale qualsiasi e studieremo le proprietà delle nuove equazioni.

3.1 Variabili di Madelung

Una generica funzione d'onda ϕ rappresentante un qualsiasi sistema fisico è generalmente una funzione della posizione delle singole particelle e del tempo a valori in \mathbb{C} : $\phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Semplicemente per il fatto di essere a valori complessi, la funzione d'onda può essere riscritta come una certa funzione reale $A(\vec{r}, t)$ moltiplicata per un esponenziale complesso di fase $\theta(\vec{r}, t)$:

$$\phi(\vec{r}, t) = A(\vec{r}, t)e^{i\theta(\vec{r}, t)} \quad (3.1)$$

con

$$\begin{aligned} A : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ \theta : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Per determinare le equazioni che descrivono l'evoluzione temporale delle nuove variabili, è sufficiente effettuare la sostituzione all'interno dell'equazione di Schrodinger dipendente dal tempo:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\vec{r}) \right] \phi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \phi(\vec{r}, t) \quad (3.3)$$

calcoliamo le derivate spaziali e temporali della funzione d'onda a parte e inseriamole poi nell'equazione. per i termini A e θ ometteremo ogni volta i parametri da cui

dipendono ed indicheremo la derivata temporale con il puntino per alleggerire la scrittura:

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(\vec{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(A(\vec{r}, t)e^{i\theta(\vec{r}, t)}\right) = \dot{A}e^{i\theta} + iA\dot{\theta}e^{i\theta} \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\phi(\vec{r}, t) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A(\vec{r}, t)e^{i\theta(\vec{r}, t)}\right) = \frac{\partial A}{\partial x_i}e^{i\theta} + iA\frac{\partial\theta}{\partial x_i}e^{i\theta} \quad (3.5)$$

dove si è indicato con x_i una qualsiasi delle tre componenti spaziali $x_i = x, y, z$ con $i = 1, 2, 3$. Calcoliamo ora anche la derivata seconda di ϕ rispetto alle derivate spaziali, necessarie per determinare il laplaciano:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\phi(\vec{r}, t) = \frac{\partial^2 A}{\partial x_i^2}e^{i\theta} + i\frac{\partial A}{\partial x_i}\frac{\partial\theta}{\partial x_i}e^{i\theta} + i\frac{\partial A}{\partial x_i}\frac{\partial\theta}{\partial x_i}e^{i\theta} + iA\frac{\partial^2\theta}{\partial x_i^2}e^{i\theta} - A\left(\frac{\partial\theta}{\partial x_i}\right)^2 e^{i\theta} \quad (3.6)$$

da cui otteniamo

$$\nabla^2\phi = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2\phi}{\partial x_i^2} = \left[\sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 A}{\partial x_i^2} + 2i \sum_{i=1}^3 \frac{\partial A}{\partial x_i} \frac{\partial\theta}{\partial x_i} + Ai \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2\theta}{\partial x_i^2} - A \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial\theta}{\partial x_i}\right)^2 \right] e^{i\theta} \quad (3.7)$$

che possiamo riscrivere utilizzando la notazione vettoriale:

$$\nabla^2\phi = \left(\nabla^2 A + 2i\nabla A \cdot \nabla\theta + iA\nabla^2\theta - A|\nabla\theta|^2 \right) e^{i\theta} \quad (3.8)$$

Sostituiamo i termini appena calcolati all'interno dell'equazione di Schrodinger, eliminando il fattore esponenziale presente in tutti i termini:

$$i\hbar\dot{A} - A\dot{\theta} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 A - i\frac{\hbar^2}{m}\nabla A \cdot \nabla\theta - i\frac{\hbar^2}{2m}A\nabla^2\theta + \frac{\hbar^2}{2m}A|\nabla\theta|^2 + U(\vec{r})A \quad (3.9)$$

Affinché l'equazione sia verificata qualsiasi siano le funzioni A e θ , la parte reale e quella immaginaria da ambo i membri dell'uguaglianza devono essere uguali:

$$\hbar\dot{A} = -\frac{\hbar^2}{m}\nabla A \cdot \nabla\theta - \frac{\hbar^2}{2m}A\nabla^2\theta \quad (3.10)$$

$$- \hbar A\dot{\theta} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 A + \frac{\hbar^2}{2m}A|\nabla\theta|^2 + U(\vec{r})A \quad (3.11)$$

La sostituzione fatta fino a questo punto è unicamente di carattere matematico, in quanto abbiamo sfruttato solamente una proprietà dei numeri complessi per scorporare una singola equazione complessa in due reali. Cerchiamo ora di legare queste due nuove funzioni con proprietà fisiche e misurabili: si ottengono così le equazioni del moto per due particolari osservabili del nostro sistema. Per $A(\vec{r}, t)$ tale procedimento discende naturalmente dalla sua definizione; infatti interpretando il modulo quadro della funzione d'onda come densità del sistema si ha:

$$\begin{aligned}
\rho(\vec{r}, t) &= N|\phi(\vec{r}, t)|^2 = N \langle \phi(\vec{r}, t) | \phi(\vec{r}, t) \rangle \\
&= N A(\vec{r}, t) e^{i\theta(\vec{r}, t)} A(\vec{r}, t) e^{-i\theta(\vec{r}, t)} \\
&= N A^2(\vec{r}, t)
\end{aligned} \tag{3.12}$$

ottenendo così l'equazione

$$A(\vec{r}, t) = \sqrt{\frac{\rho(\vec{r}, t)}{N}}. \tag{3.13}$$

Per la funzione θ non è possibile ricavare così facilmente una relazione con una grandezza nota. quello che si fa è allora definire una nuova grandezza in modo che il suo utilizzo permetta di ottenere le equazioni volute. La nuova grandezza risulta così essere

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = \frac{\hbar}{m} \nabla \theta(\vec{r}, t) \tag{3.14}$$

Iniziamo ora effettuando il cambio di variabile nella prima equazione:

$$\dot{\sqrt{\rho}} = -\vec{v} \cdot \nabla \sqrt{\rho} - \frac{\sqrt{\rho}}{2} \nabla \cdot \vec{v} \tag{3.15}$$

Notiamo che il termine $\frac{1}{\sqrt{N}}$ è presente in ogni termine e si semplifica. calcolando direttamente le derivate di $\sqrt{\rho}$ si ottiene:

$$\frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial t} = \frac{\dot{\rho}}{2\sqrt{\rho}} \tag{3.16}$$

$$\frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial x_i} = \frac{1}{2\sqrt{\rho}} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \tag{3.17}$$

L'equazione diviene quindi

$$\frac{\dot{\rho}}{2\sqrt{\rho}} = -\frac{1}{2\sqrt{\rho}} \vec{v} \cdot \nabla \rho - \frac{\sqrt{\rho}}{2} \nabla \cdot \vec{v} \tag{3.18}$$

Semplifichiamo il due e moltiplichiamo entrambi i membri per $\sqrt{\rho}$; dopo questi passaggi notiamo che nel membro di sinistra i due termini corrispondono alla divergenza del prodotto $\rho \vec{v}$ e possiamo scrivere

$$\dot{\rho} = -\left(\vec{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \vec{v}\right) = -\nabla \cdot (\rho \vec{v}) \implies \dot{\rho} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \tag{3.19}$$

questa equazione rappresenta l'equazione di continuità per la densità ρ del sistema. facciamo la sostituzione ora nella seconda equazione:

$$-\hbar \dot{\theta} \sqrt{\rho} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \sqrt{\rho} + \frac{m}{2} \sqrt{\rho} |\vec{v}|^2 + U(\vec{r}) \sqrt{\rho} \tag{3.20}$$

dividiamo ambo i membri per $\sqrt{\rho}$, riscriviamo il primo membro in funzione di \vec{v} e otteniamo:

$$\frac{\hbar}{m}m\dot{\theta} + \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2 + U(\vec{r}) - \frac{\hbar^2}{2m\sqrt{\rho}}\nabla^2\sqrt{\rho} = 0 \quad (3.21)$$

Per ottenere l'equazione cercata, dobbiamo applicare l'operatore gradiente a quest'ultima espressione; è necessario però prima considerare se per il termine $\dot{\theta}$ sia possibile scambiare la derivata spaziale con quella temporale. Questo è possibile solamente se la funzione θ presenta una certa regolarità stabilita dal teorema di Schawrtz: ipotizzeremo quindi che questa funzione abbia la regolarità necessaria per effettuare l'operazione:

$$m\frac{\partial}{\partial t}\vec{v} + \nabla \left[\frac{m}{2}|\vec{v}|^2 + U(\vec{r}) - \frac{\hbar^2}{2m\sqrt{\rho}}\nabla^2\sqrt{\rho} \right] = 0. \quad (3.22)$$

3.1.1 Confronto con le equazioni classiche

confrontiamo ora le equazioni appena ottenute con le equazioni classiche di Naviers-stokes:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla \cdot (\rho\vec{u}) = 0 \quad (3.23)$$

$$m\frac{\partial}{\partial t}\vec{u} - \eta\nabla^2\vec{u} + \nabla \left[\frac{1}{2}mu^2 + U_{ext} + \mu(\rho) \right] = m\vec{u} \times (\nabla \times \vec{u}) \quad (3.24)$$

Dove ρ rappresenta la densità del fluido, \vec{u} la velocità del volume di fluido considerato, η la sua viscosità, U_{ext} è il termine di un potenziale esterno applicato al fluido e $\mu(\rho)$ rappresenta l'equazione di stato per il fluido.

Si nota immediatamente che il nostro sistema si comporta come un fluido privo di viscosità, in quanto il termine proporzionale a μ non è presente. Inoltre, dalla definizione di \vec{v} si ottiene

$$(\nabla \times \vec{v})_i = \epsilon_{ijk} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} = \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_k} (\nabla\theta)_j = \epsilon_{ijk} \frac{\partial^2\theta}{\partial x_k \partial x_j} \equiv 0. \quad (3.25)$$

Dato che ϵ rappresenta il simbolo di levi-civita e le derivate seconde miste di θ sono uguali per il teorema di Schwartz, l'espressione è identicamente nulla per qualsiasi θ . Come preannunciato la definizione arbitraria per \vec{v} ha solo lo scopo di semplificare il più possibile la sua equazione del moto, rendendola interpretabile anche fisicamente. Infine notiamo che il termine derivato dall'equazione di stato è presente anche nella relativa equazione quantistica, anche se non rappresenta un'equazione di stato per il sistema.

Dal punto di vista dell'interpretazione fisica, la prima equazione scritta regola la conservazione della densità di probabilità del sistema: una sua variazione nel tempo corrisponde ad una variazione negativa della divergenza del vettore $\vec{J} = \rho\vec{v}$, rappresentabile come corrente di densità. La seconda invece non ha una così semplice analogia con la controparte classica: essa lega la derivata temporale della \vec{v} con il gradiente di una quantità assimilabile all'energia "classica" del sistema. Tale similitudine sarà più chiara nella prossima sezione dove mostreremo che un qualsiasi

potenziale aggiunto all'equazione di Schrodinger si va aggiungere proprio a questo termine.

3.2 Potenziale di interazione

In questa sezione vogliamo applicare il cambio di variabili di Madelung all'equazione di Gross-Pitaevski generalizzata ottenuta nel capitolo precedente:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\vec{r}) + \int \rho(\vec{r}') V(\vec{r} - \vec{r}') d^3 \vec{r}' \right] \phi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \phi(\vec{r}, t). \quad (3.26)$$

Notiamo che il termine di campo medio è già espresso in funzione della sola $\rho(\vec{r}, t)$ e può essere direttamente inserito nella rispettiva equazione dell'idrodinamica:

$$m \frac{\partial}{\partial t} \vec{v} + \nabla \left[\frac{m}{2} |\vec{v}|^2 + U(\vec{r}) - \frac{\hbar^2}{2m\sqrt{\rho}} \nabla^2 \sqrt{\rho} + \int \rho(\vec{r}') V(\vec{r} - \vec{r}') d^3 \vec{r}' \right] = 0 \quad (3.27)$$

$$m \frac{\partial}{\partial t} \vec{v} + \nabla \left[\frac{m}{2} |\vec{v}|^2 + U(\vec{r}) - \frac{\hbar^2}{2m\sqrt{\rho}} \nabla^2 \sqrt{\rho} + \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j g_{2j} (\nabla^2)^j \rho(\vec{r}, t) \right] = 0 \quad (3.28)$$

dove abbiamo riportato sia il termine in forma integrale sia quello in serie di potenze del laplaciano della densità di probabilità. Identifichiamo gli ultimi due termini come un potenziale medio che agisce sulla particella e scriviamo i primi ordini di questo sviluppo:

$$U_{mf} = -\frac{\hbar^2}{2m\sqrt{\rho}} \nabla^2 \sqrt{\rho} + g_0 \rho - g_2 \nabla^2 \rho + g_4 \nabla^4 \rho + \dots \quad (3.29)$$

vogliamo ora riscrivere questo termine come la derivata variazionale dell'azione S_{mf} di U_{mf} :

$$\begin{aligned} S_{mf} &= \langle \Psi | U_{mf} | \Psi \rangle = \int \rho U_{mf} d^3 r \\ &= \int \left[-\frac{\hbar^2}{2m\sqrt{\rho}} \nabla^2 \sqrt{\rho} + g_0 \rho - g_2 \nabla^2 \rho + g_4 \nabla^4 \rho \right] \rho d^3 r \end{aligned} \quad (3.30)$$

Iniziamo dal primo termine; se svolgiamo il laplaciano di $\sqrt{\rho}$ utilizzando la formula della derivata seconda

$$\frac{\partial^2 \sqrt{\rho}}{\partial x_i^2} = \frac{1}{2\sqrt{\rho}} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i^2} - \frac{1}{4\rho^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x_i} \right)^2 \quad (3.31)$$

e il termine nell'azione di campo medio diviene

$$\int \left(-\frac{\hbar^2 \sqrt{\rho}}{2m} \nabla^2 \sqrt{\rho} \right) d^3r = -\frac{\hbar^2}{2m} \int \left[\frac{\nabla^2 \rho}{2} - \frac{|\nabla \rho|^2}{4\rho} \right] d^3r = \int \left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2 \rho}{4m} + \frac{\hbar^2}{8m} \frac{|\nabla \rho|^2}{\rho} \right] d^3r \quad (3.32)$$

il termine proporzionale a $\nabla^2 \rho$ può essere inglobato nel termine $g_2 \nabla^2 \rho$ ridefinendo la costante $\tilde{g}_2 = g_2 - \frac{\hbar^2}{4m}$, anche se d'ora in poi chiameremo comunque la costante g_2 . Anche questo termine può essere riscritto tenendo conto dell'annullarsi all'infinito della densità di probabilità:

$$\int \rho \nabla^2 \rho d^3r = \int \nabla(\rho \nabla \rho) d^3r - \int \nabla \rho \nabla \rho d^3r = - \int |\nabla \rho|^2 d^3r \quad (3.33)$$

In modo analogo si può operare per il termine g_4 :

$$\begin{aligned} \int \rho \nabla^2 (\nabla^2 \rho) d^3r &= \int \nabla(\rho \nabla(\nabla^2 \rho)) d^3r - \int \nabla \rho (\nabla(\nabla^2 \rho)) d^3r \\ &= - \int \nabla \rho (\nabla(\nabla^2 \rho)) d^3r \\ &= - \int \nabla(\nabla \rho (\nabla^2 \rho)) d^3r + \int \nabla^2 \rho \nabla^2 \rho d^3r \\ &= - \int \nabla(\nabla \rho (\nabla^2 \rho)) d^3r + \int (\nabla^2 \rho)^2 d^3r \end{aligned} \quad (3.34)$$

in questo caso il primo termine non si annulla, ma essendo comunque una costante non contribuisce alla variazione dell'azione. In conclusione si è ottenuto che

$$S_{mf} = \int \left[\frac{\hbar^2}{8m} \frac{|\nabla \rho|^2}{\rho} + g_0 \rho^2 + g_2 |\nabla \rho|^2 + g_4 (\nabla^2 \rho)^2 \right] d^3r \quad (3.35)$$

e le equazioni dell'idrodinamica nella loro forma più generale assumono la forma [9]

$$\dot{\rho} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (3.36)$$

$$m \frac{\partial}{\partial t} \vec{v} + \nabla \left[\frac{m}{2} |\vec{v}|^2 + U(\vec{r}) + \frac{\delta S_{mf}}{\delta \rho} \right] = 0 \quad (3.37)$$

Capitolo 4

Onde sonore

Nei due precedenti capitoli abbiamo sostanzialmente ricavato le equazioni che descrivono l'evoluzione temporale del nostro sistema, in termini della sua densità e della sua "velocità". In questo capitolo invece ci concentreremo nello studio di un particolare regime a cui il nostro sistema può essere sottoposto: quello della propagazione di onde sonore. Nella prima sezione descriveremo le condizioni che caratterizzano tale fenomeno e ricaveremo l'equazione delle onde per la densità. Nella seconda sezione ci dedicheremo allo studio della relazione di dispersione in relazione al tipo alle varie approssimazioni che possono essere effettuate [13]. Infine nell'ultima sezione ci interesseremo allo studio dettagliato di alcune particolari relazioni di dispersione, mostrando come i parametri presenti nelle formule possano modificare il comportamento del sistema.

4.1 Equazione delle Onde

Nel capitolo precedente si sono ottenute le equazioni del moto per il nostro sistema, considerando un potenziale qualsiasi $U(\vec{r})$ applicato ai singoli bosoni del sistema. Per poter considerare la propagazione delle onde sonore nel sistema, tale potenziale non può essere qualsiasi ma deve permettere al sistema di trovarsi in una situazione di quasi-equilibrio. Per la precisione esso deve permettere che il sistema si possa descrivere come una costante più una piccola perturbazione, che rappresenterà come vedremo l'onda propagata. Una scelta per tale potenziale è quello di "contenimento": un potenziale nullo in tutti i punti del corpo ma che permetta comunque di mantenerlo limitato all'interno di un certo volume. Formalmente, tale ipotesi si traducono nella riscrittura delle grandezze $\rho(\vec{r}, t)$ e $\vec{v}(\vec{r}, t)$:

$$\begin{cases} \rho(\vec{r}, t) = \rho_0 + \tilde{\rho}(\vec{r}, t) \\ \vec{v}(\vec{r}, t) = \vec{v}_0 + \tilde{v}(\vec{r}, t) \end{cases}$$

dove i valori ρ_0 e \vec{v}_0 rappresentano i valori all'equilibrio, mentre $\tilde{\rho}(\vec{r}, t)$ e $\tilde{v}(\vec{r}, t)$ rappresentano le piccole oscillazioni a tali valori menzionate precedentemente, ovvero esse devono soddisfare le condizioni che $\tilde{v}(\vec{r}, t) \ll \rho_0$ e $\tilde{v}(\vec{r}, t) \ll \vec{v}_0$. Per semplicità supporremo che la velocità di equilibrio \vec{v} sia nulla per il nostro sistema.

Possiamo ora ricavare l'equazioni del moto; per farlo basterà sostituire la nuova parametrizzazione di ρ e \vec{v} all'interno delle equazioni dell'idrodinamica tenendo in considerazione che i termini quadratici (ovvero della forma $\tilde{\rho}^2$, \tilde{v}^2 e $\tilde{\rho}\tilde{v}$) sono trascurabili in quanto stiamo considerando piccoli valori delle oscillazioni.

Per l'equazione di continuità si ottiene:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 + \tilde{\rho}) + \nabla \cdot [(\rho_0 + \tilde{\rho})\tilde{v}] = 0 \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\rho} + \rho_0 \nabla \cdot \tilde{v} = 0 \quad (4.2)$$

dato che il termine ρ_0 è costante e il termine $\tilde{\rho}\tilde{v}$ si può trascurare.

Per la seconda equazione dobbiamo prestare più attenzione alla sostituzione. Innanzitutto diamo un nome al termine di pressione quantistica in cui abbiamo effettuato la sostituzione per la densità:

$$P_Q \equiv -\frac{\hbar^2}{2m\sqrt{\rho_0 + \tilde{\rho}}}\nabla^2\sqrt{\rho_0 + \tilde{\rho}} \quad (4.3)$$

Per ora lasceremo questo termine in questa forma senza svilupparlo dato che lo tratteremo nel dettaglio in una sezione specifica. Per la derivata temporale non si hanno problemi mentre per il termine cinetico si può scrivere

$$\frac{1}{2}m|\vec{v}_0 + \tilde{v}|^2 = \frac{1}{2}m(|\tilde{v}|^2 + |v_0|^2 + 2v_0\tilde{v}) = 0 \quad (4.4)$$

dato che i termini quadratici sono trascurabili e la velocità all'equilibrio è nulla. Infine per il potenziale si ottiene semplicemente che:

$$\int V(r - r')(\rho_0 + \tilde{\rho}(\vec{r}', t))d^3r' = g_0\rho_0 + \int V(r - r')\tilde{\rho}(\vec{r}', t)d^3r' \quad (4.5)$$

dove anche in questo caso il termine costante si elimina per l'azione del gradiente. Otteniamo infine l'equazione

$$m\frac{\partial}{\partial t}\tilde{v} + \nabla \left[P_Q + \int V(r - r')\tilde{\rho}(\vec{r}', t)d^3r' \right] = 0 \quad (4.6)$$

L'equazione delle onde si ottiene modificando opportunamente le due equazioni appena trovate; se alla prima applichiamo la derivata temporale, ricordando che si possono scambiare i segni di derivata, e alla seconda l'operatore divergenza moltiplicato per la costante $\frac{\rho_0}{m}$ otteniamo:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\tilde{\rho} + \nabla \cdot \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} \right) = 0 \quad (4.7)$$

$$m\nabla \cdot \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} \right) + \frac{\rho_0}{m}\nabla^2 \cdot \left[P_Q + \int V(r - r')\tilde{\rho}(\vec{r}', t)d^3r' \right] = 0. \quad (4.8)$$

Sottraendo la seconda alla prima otteniamo l'equazione per il termine $\tilde{\rho}$

$$\frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial t^2} - \frac{\rho_0}{m} \nabla^2 \left[P_Q + \int V(r - r') \tilde{\rho}(\vec{r}', t) d^3 r' \right] = 0 \quad (4.9)$$

In realtà tale equazione non rappresenta esattamente l'equazione di un'onda data da

$$\frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial t^2} - \frac{1}{u^2} \nabla^2 \cdot \tilde{\rho} = 0 \quad (4.10)$$

con u velocità dell'onda, ma ha unicamente una somiglianza formale. Per riuscire ad ottenere ciò che cerchiamo dobbiamo utilizzare una particolare forma per la densità $\tilde{\rho}$ illustrata nel prossimo paragrafo.

4.2 Relazione di dispersione

Trovata l'equazione fondamentale che descrive $\tilde{\rho}$, ovvero l'onda sonora che si propaga nel sistema, siamo interessati a determinare la legge di dispersione $\omega = \omega(\vec{k})$, ovvero l'equazione che ci permette di ricavare la frequenza dell'onda conoscendo il numero d'onda \vec{k} del sistema. Un metodo che si adatta egregiamente alle equazioni fin qui studiate, è quello di immaginare la perturbazione della densità descritta dalla funzione

$$\tilde{\rho}(\vec{r}, t) = A e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (4.11)$$

Tale forma è particolarmente utile in quanto permette di determinare le derivate temporali e spaziali di ogni ordine in funzione della stessa $\tilde{\rho}$:

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} = -i\omega A e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = -i\omega \tilde{\rho} \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial t^2} = -\omega^2 A e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = -\omega^2 \tilde{\rho} \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x_j} = ik_j A e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = ik_j \tilde{\rho} \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial x_j^2} = -k_j^2 A e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = -k_j^2 \tilde{\rho} \quad (4.15)$$

Da queste espressioni si ottengono anche le espressioni per l'operatore laplaciano

$$\nabla^2 \tilde{\rho} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial x_j^2} = - \sum_{j=1}^3 k_j^2 \tilde{\rho} = -|\vec{k}|^2 \tilde{\rho} \quad (4.16)$$

Conoscendo queste espressioni è facile ottenere le leggi di dispersioni nei vari regimi semplicemente sostituendo queste ultime nell'equazione delle onde e risolvere rispetto a \vec{k} . In particolare sarà interessante osservare come tale espressione si modifica considerando o meno il termine di pressione quantistica e il numero di sviluppi per il potenziale V .

4.2.1 Potenziale qualsiasi e P_Q nullo

Deriviamo la legge di dispersione nel caso in cui il termine di pressione quantistica non sia presente nella formula:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} A e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} - \frac{\rho_0}{m} \nabla^2 \left[\int V(r - r') A e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r}' - \omega t)} d^3 r' \right] = 0 \quad (4.17)$$

Se per la derivata temporale non ci sono problemi, il secondo termine risulta più complesso da calcolare. Per questo motivo, se passiamo alla trasformata di Fourier dell'equazione, ricordando la definizione di convoluzione si ha

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \hat{\rho} - \frac{\rho_0}{m} \nabla^2 \left[\hat{V}(\vec{k}) \hat{\rho} \right] = 0 \quad (4.18)$$

Dalle sezioni precedenti sappiamo quale è la trasformata di Fourier del potenziale e possiamo anche calcolare la sua azione su $\hat{\rho}$ in serie di potenze di k :

$$\hat{V}(\vec{r}) \hat{\rho} = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j g_{2j} (\nabla^2)^j \hat{\rho} = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j g_{2j} (-1)^j |\vec{k}|^{2j} \hat{\rho} = \sum_{j=1}^{\infty} g_{2j} |\vec{k}|^{2j} \hat{\rho} \quad (4.19)$$

Ricordando le proprietà delle derivate rispetto la trasformata di Fourier possiamo ottenere la legge di dispersione per questo regime sia in funzione del termine $\hat{V}(\vec{r})$:

$$\left[-\omega^2 + \frac{\rho_0}{m} |\vec{k}|^2 \hat{V}(\vec{r}) \right] \hat{\rho} = 0 \quad (4.20)$$

$$\omega(\vec{k}) = \pm |\vec{k}| \sqrt{\frac{\rho_0}{m} \hat{V}(\vec{k})} \quad (4.21)$$

che in termini dello sviluppo diviene

$$\omega(\vec{k}) = \sqrt{\frac{\rho_0}{m} |\vec{k}|^2 \sum_{j=1}^{\infty} g_{2j} |\vec{k}|^{2j}} = \sqrt{\frac{\rho_0}{m} |\vec{k}|^2 \left[g_0 + g_2 |\vec{k}|^2 + g_4 |\vec{k}|^4 + \dots \right]} \quad (4.22)$$

Come esempio, consideriamo solamente il primo ordine del potenziale; esso corrisponde fisicamente ad utilizzare un potenziale di contatto, rappresentato analiticamente da una delta di Dirac: $V(r - r') = \delta(r - r')$. Si ottiene così che la frequenza è direttamente proporzionale al modulo del vettore d'onda:

$$\omega(\vec{k}) = \sqrt{\frac{\rho_0 g_0}{m}} |\vec{k}| = c_s |\vec{k}| \quad (4.23)$$

dove con c_s si indica la velocità di propagazione della perturbazione $\hat{\rho}$ nel sistema.

4.2.2 Termine P_Q non nullo

Aggiungiamo ora all'equazione dell'onda anche il termine di pressione quantistica, trascurato nella parte precedente. Per tener conto unicamente dei termini al primo ordine in $\tilde{\rho}$, scriviamo gli sviluppi dei termini in cui compaiono le densità:

$$\frac{1}{\sqrt{\rho_0 + \tilde{\rho}}} = \frac{1}{\sqrt{\rho_0}\sqrt{1 + \frac{\tilde{\rho}}{\rho_0}}} \sim \frac{1}{\sqrt{\rho_0}} \left(1 - \frac{\tilde{\rho}}{2\rho_0} + \dots \right) \quad (4.24)$$

$$\sqrt{\rho_0 + \tilde{\rho}} = \sqrt{\rho_0}\sqrt{1 + \frac{\tilde{\rho}}{\rho_0}} \sim \sqrt{\rho_0} \left(1 + \frac{\tilde{\rho}}{2\rho_0} + \dots \right) \quad (4.25)$$

Utilizziamo gli sviluppi per riscrivere P_Q :

$$\begin{aligned} P_Q &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\sqrt{\rho_0}} \left(1 - \frac{\tilde{\rho}}{2\rho_0} \right) \nabla^2 \sqrt{\rho_0} \left(1 + \frac{\tilde{\rho}}{2\rho_0} \right) \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\nabla^2 \frac{\tilde{\rho}}{2\rho_0} - \frac{\tilde{\rho}}{2\rho_0} \nabla^2 \frac{\tilde{\rho}}{2\rho_0} \right) \\ &= -\frac{\hbar^2}{4m\rho_0} \nabla^2 \tilde{\rho} \end{aligned} \quad (4.26)$$

dove il termine costante si è eliminato in quanto si applicherà poi il laplaciano a questo termine e i termini di secondo grado di sono trascurati. A questo punto l'equazione delle onde si può scrivere in forma completa:

$$\frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial t^2} - \frac{\rho_0}{m} \nabla^2 \left[-\frac{\hbar^2}{4m\rho_0} \nabla^2 \tilde{\rho} + \int V(r - r') \tilde{\rho}(\vec{r}', t) d^3 r' \right] = 0 \quad (4.27)$$

Utilizzando la riscrittura per la perturbazione e il risultato del potenziale l'equazione delle onde diviene:

$$\left[-\omega^2 + \frac{\rho_0}{m} |\vec{k}|^2 \hat{V}(\vec{r}) + \frac{\hbar^2}{4m^2} |\vec{k}|^4 \right] \hat{\rho} = 0 \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} \omega(\vec{k}) &= \pm \sqrt{\frac{\rho_0}{m} |\vec{k}|^2 \hat{V}(\vec{k}) + \frac{\hbar^2}{4m^2} |\vec{k}|^4} \\ &= \pm \sqrt{\frac{|\vec{k}|^2}{2m} \left(\frac{\hbar^2}{2m} |\vec{k}|^2 + 2\rho_0 \hat{V}(\vec{k}) \right)} \end{aligned} \quad (4.29)$$

Questa volta la legge di dispersione risulta più complessa di quella precedente, aggiungendo un termine allo sviluppo di \hat{V} di quarto ordine in \vec{k} . Anche qui come esempio scriviamo $\omega(\vec{k})$ per il potenziale di contatto:

$$\omega(\vec{k}) = \sqrt{\frac{|\vec{k}|^2}{2m} \left(\frac{\hbar^2}{2m} |\vec{k}|^2 + 2\rho_0 g_0 \right)} = \sqrt{\frac{|\vec{k}|^2}{2m} \left(\frac{\hbar^2}{2m} |\vec{k}|^2 + 2mc_s^2 \right)} \quad (4.30)$$

Mostriamo ora come la relazione di dispersione appena trovata aggiunga un termine non lineare alla legge di dispersione nel caso di potenziale di contatto. Se raccogliamo il termine fuori dalla parentesi e il termine costante otteniamo:

$$\omega(\vec{k}) = \frac{|\vec{k}|}{\sqrt{2m}} \sqrt{2\rho_0 g_0 + \frac{\hbar^2}{2m} |\vec{k}|^2} = \frac{|\vec{k}|}{\sqrt{2m}} \sqrt{2\rho_0 g_0} \sqrt{1 + \frac{\hbar^2}{4m\rho_0 g_0} |\vec{k}|^2} \quad (4.31)$$

sviluppando la radice fino al termine di primo grado si ottiene

$$\omega(\vec{k}) \sim \sqrt{\frac{\rho_0 g_0}{m}} |\vec{k}| \left(1 + \frac{\hbar^2}{8m\rho_0 g_0} |\vec{k}|^2 \right) = c_s |\vec{k}| + \frac{\hbar^2}{8m^{3/2} \sqrt{\rho_0 g_0}} |\vec{k}|^3 \quad (4.32)$$

4.3 Condizioni di stabilità

utilizziamo la formula precedentemente ottenuta per studiare la stabilità del nostro sistema. la legge di dispersione appena trovata infatti permette di studiare l'evoluzione temporale della perturbazione $\tilde{\rho}$, che per il nostro sistema rappresenta la propagazione dell'onda di densità. In generale, essendo la soluzione un esponenziale complesso, per avere stabilità basta imporre la condizione che $\omega(k)$ sia reale, in modo da avere o il caso stazionario oppure quello proporzionale al seno e coseno. Nel caso infatti di una $\omega(k)$ immaginaria, ovvero possiamo scriverla come $\omega(k) = -i\hat{\omega}$ la densità ha un andamento del tipo

$$\tilde{\rho}(\vec{r}, t) = A e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} = A e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} + i\hat{\omega} t)} = A e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} e^{-\hat{\omega} t} \quad (4.33)$$

ovvero uno smorzamento esponenziale. In questo caso l'onda non si propaga e dopo un certo tempo il sistema ritorna nella condizione di equilibrio.

Nel nostro caso notiamo che la legge di dispersione è sostanzialmente la radice quadrata di un polinomio di $k \equiv |\vec{k}|$, in cui compaiono solamente le potenze pari di k . Lo studio della stabilità si riduce quindi allo studio del segno del polinomio, in quanto la radice di un numero per esistere, e quindi essere reale, deve essere positiva o al più uguale a zero. Nel caso generale questa considerazione si traduce nella semplice disequaglianza

$$\frac{\hbar^2}{2m} k^2 + 2\rho_0 \hat{V}(\vec{k}) \geq 0 \quad (4.34)$$

di validità generale qualsiasi sia il potenziale di interazione. Per mostrare nel dettaglio come questa condizione permetta di stabilire in modo efficace e semplice delle relazioni tra i coefficienti g_{2t} dello sviluppo di \hat{V} , facciamo il conto esplicito per lo sviluppo troncato al secondo ordine:

$$\begin{aligned}
& \frac{\hbar^2}{2m}k^2 + 2\rho_0(g_0 + g_2k^2 + g_4k^4) = \\
& = 2\rho_0g_4k^4 + \left(\frac{\hbar^2}{2m} + 2\rho_0g_2\right)k^2 + 2\rho_0g_0 \\
& = g_4k^4 + \left(\frac{\hbar^2}{4m\rho_0} + g_2\right)k^2 + g_0 \geq 0
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Dove nell'ultimo passaggio abbiamo diviso tutto per $2\rho_0$. per risolvere questa disuguaglianza basta fare la sostituzione $t = k^2$ ed ricavare le radici del polinomio di secondo grado corrispondente, considerando che t deve essere positivo per definizione:

$$t_{\pm} = -\frac{1}{2g_0} \left(\frac{\hbar^2}{4m\rho_0} + g_2 \right) \pm \frac{1}{2g_0} \sqrt{\left(\frac{\hbar^2}{4m\rho_0} + g_2 \right)^2 - 4g_0g_4} \tag{4.36}$$

Da questi due valori si ottengono facilmente anche le radici per $\omega(k) = 0$: oltre alla soluzione data da $k = 0$ si hanno anche i due possibili valori $k_{\pm} = \sqrt{t_{\pm}}$. Siccome siamo interessati ai valori di k per cui ω risulta essere sempre reale e di segno costante, dobbiamo porre che le nostre soluzioni non siano mai possibili qualsiasi siano i valori dei parametri presenti nella formula; per farlo basta porre che il termine sotto radice non possa mai essere reale:

$$\left(\frac{\hbar^2}{4m\rho_0} + g_2 \right)^2 - 4g_0g_4 < 0 \longrightarrow 4g_0g_4 > \left(\frac{\hbar^2}{4m\rho_0} + g_2 \right)^2 \tag{4.37}$$

Quest'ultima rappresenta una condizione necessaria ma non sufficiente per la stabilità del nostro sistema, dato che se essa risulta soddisfatta, qualsiasi sia k la nostra ω non sarà mai nulla. Un'altra condizione si può ottenere da semplici considerazioni geometriche. L'equazione in t infatti rappresenta semplicemente una parabola che non si interseca mai con l'asse delle ascisse ed esiste solo per valori di t positivi. Affinché essa sia sempre positiva basta che uno solamente dei due parametri g_0 o g_4 sia positivo. g_0 rappresenta il valore dell'intercetta e quindi se positiva la parabola risulterà tutta nel primo quadrante; analogamente g_4 rappresenta la concavità della parabola e, se positiva, indica una concavità rivolta verso l'altro. Notiamo poi che dalla condizione precedente si ha che il prodotto dei due parametri deve essere comunque positivo, qualsiasi sia il valore di g_2 : una volta posta una positiva automaticamente anche l'altra lo sarà. Siamo così arrivati alla conclusione che le condizioni necessarie e sufficienti affinché ci sia stabilità per qualsiasi valore del numero d'onda sono

$$4g_0g_4 > \left(\frac{\hbar^2}{4m\rho_0} + g_2 \right)^2 \wedge g_{0,4} > 0 \tag{4.38}$$

Scendiamo ora più nel dettaglio e studiamo sia analiticamente sia graficamente i risultati precedentemente ottenuti prendendo come variabili due dei tre parametri e vedendo come la zona di stabilità si modifica al variare del terzo. Partiamo dal caso in cui sia g_2 a variare. le due variabili g_2 e g_4 saranno positive e il confine della zona di stabilità sarà rappresentato dall'equazione:

$$4g_0g_4 = \left(\frac{\hbar^2}{4m\rho_0} + g_2 \right)^2 \quad (4.39)$$

che rappresenta una famiglia di iperboli al variare del parametro g_2 come possiamo vedere dalla Figura 4.1. Notiamo che nel caso limite in cui

$$g_2 = -\frac{\hbar^2}{4m\rho_0} \quad (4.40)$$

si ha che la condizione è automaticamente soddisfatta per ogni valore e la zona di stabilità coincide con tutto il primo quadrante. Per $g_2 = 0$ si ha invece l'iperbole

$$g_0g_4 = \frac{\hbar^4}{64m^2\rho_0^2} \quad (4.41)$$

e la zona di stabilità si trova al di sopra di essa. Da queste caratteristiche notiamo che per g_2 proveniente da meno infinito la zona di stabilità aumenta fino a coincidere con tutto lo spazio disponibile per il valore limite di g_2 ; superato questo valore le iperboli tornano ad allontanarsi dagli assi e quindi la zona di nostro interesse continuerà a diminuire.

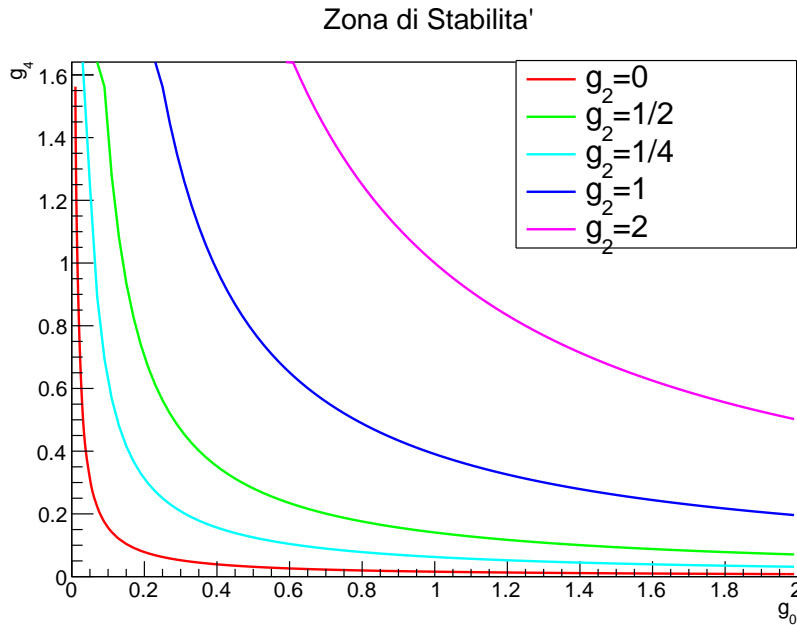


Figura 4.1: Confine della regione di stabilità per diversi valori del parametro g_2 . I grafici sono stati realizzati utilizzando la condizione $\hbar = \rho_0 = m = 1$ in modo da ottenere delle relazioni tra i parametri indipendenti dalle costanti fisiche. l'equazione del grafico è data quindi da $4g_0g_4 > \left(\frac{1}{4} + g_2 \right)^2$

Studiamo ora il caso in cui sia g_2 la nostra variabile in funzione di una delle altre due. Dato che esse appaiono nella condizioni moltiplicate tra loro, le considerazioni fatte su una mantenendo costante l'altra saranno analoghe a quelle precedenti.

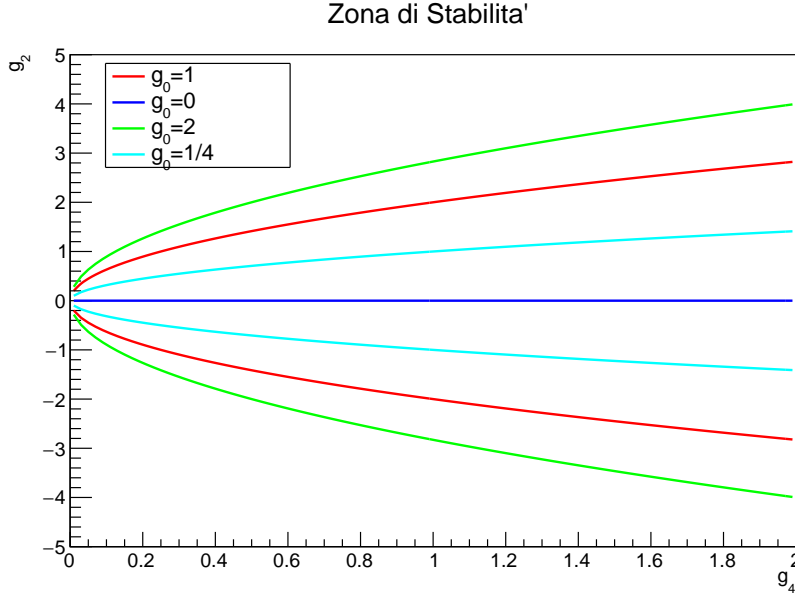


Figura 4.2: Regione di stabilità al variare del parametro g_0 . Anche in questo caso si sono poste uguali ad uno tutte le costanti per rendere le condizioni indipendenti da esse.

Per determinare la regione di stabilità dobbiamo prima trovare la sua limitazione risolvendo l'equazione

$$g_2^2 + \frac{\hbar^2}{2m\rho_0}g_2 + \frac{\hbar^4}{16m^2\rho_0^2} - 4g_0g_4 = 0 \quad (4.42)$$

con la condizione che g_0 sia maggiore di zero.

$$g_2 = -\frac{\hbar^2}{4m\rho_0} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\hbar^4}{4m^2\rho_0^2} + 16g_0g_4 - \frac{\hbar^4}{4m^2\rho_0^2}} \quad (4.43)$$

$$g_2 = -\frac{\hbar^2}{4m\rho_0} \pm 2\sqrt{g_0g_4} \quad (4.44)$$

Le due radici esistono unicamente se g_4 è maggiore di zero, condizione identica a quella del caso precedente come ci aspettiamo. Per g_4 minore di zero non si avranno soluzioni, mentre per quando si annulla g_2 sarà uguale ad una costante: in entrambi i casi la condizione di stabilità non è verificata e non ci sono zone interessanti. La zona di stabilità sarà descritta dalle disequazioni:

$$-\frac{\hbar^2}{4m\rho_0} - 2\sqrt{g_0g_4} < g_2 < -\frac{\hbar^2}{4m\rho_0} + 2\sqrt{g_0g_4} \quad (4.45)$$

In questo caso all'aumentare di g_0 la regione di stabilità aumenta, mantenendo comunque costante l'intercetta con l'asse delle ordinate, come si nota facilmente nella Figura 4.2. Il valore limite si ottiene per $g_0 = 0$ in cui il valore di g_2 tende alla retta costante e la regione di stabilità si annulla.

Capitolo 5

Conclusioni

Lo studio del Condensato e del relativo formalismo per descriverlo ha portato a diversi risultati notevoli che possono essere ulteriormente sviluppati. In primo luogo siamo riusciti a determinare un'equazione differenziale per la funzione d'onda di particella singola per un sistema di Bosoni interagenti. La particolarità della nostra analisi è quella di aver scritto un'equazione totalmente generale, in quanto le ipotesi fatte sul potenziale di interazione sono solitamente sempre soddisfatte dai sistemi a cui si applica la teoria. Anche la riscrittura del problema con le variabili di Madelung è del tutto generale e permette di effettuare altri studi indipendenti dal caso considerato in questo elaborato. La determinazione della legge di dispersione per il sistema ha una doppia utilità; da una parte ha permesso lo studio della propagazione delle onde sonore nel mezzo e la relativa zona di stabilità in funzione dei parametri determinati dal potenziale. Dall'altra la conoscenza della $\omega(k)$ permette di determinare l'evoluzione temporale del sistema in qualunque altro regime.

Bibliografia

- [1] Clark, Ronald W., *Einstein: The Life and Times*, Avon Books, 1971
- [2] S. N. Bose, *Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese*, in *Zeitschrift fur Physik*, vol. 26, 1924, pp. 178-181
- [3] A. Einstein, *Quantentheorie des einatomigen idealen Gases*, in *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften*, vol. 1, 1925, p. 3
- [4] Anderson, M. H. Ensher, J. R. Matthews, M. R. Wieman, C. E. and Cornell, *Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor*, in *Science*, vol. 1, 1995, pp. 198-201
- [5] K. B. Davis, M.O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. M. Kurn, W. Ketterle, *Bose-Einstein Condensation in a Gas of Sodium Atoms*, in *Physical Review Letters*, 75, 3969-3973, 1995
- [6] C. C. Bradley, C. A. Sackett, and R. G. Hulet *Bose-Einstein Condensation of Lithium: Observation of Limited Condensate Number* in *Physical Review Letters*, 78, 985, 1997
- [7] L. Salasnich, *Quantum Physics of Light and Matter*, Springer International Publishing, 2014
- [8] C. Cohen-Tannoudji, B. Dui, F. Laloe, *Quantum Mechanics*, Wiley VCH, 1977
- [9] K. Huang, *Statistical Mechanics* John Wiley & Sons, 1974
- [10] E. P. Gross, *Structure of a quantized vortex in boson systems*, in *Il Nuovo Cimento*, Vol. 20, N. 3, 1961
- [11] L. P. Pitaevskii, *Vortex lines in an imperfect Bose gas*, in *Soviet Physics JETP*, Vol. 13, N. 2, 1961
- [12] N. N. Bogolyubov, *On the Theory of Superfluidity*, in *Journal of Physics*, Vol. 11, N. 1, 1947
- [13] V. Heinonen, K. J. Burns, J. Dunkel, *Higher-order quantum hydrodynamics for supersolids*, arXiv:1807.04149v1

- [14] L. Salasnich, F. Toigo, *Zero-point energy of ultracold atoms* in *Phys. Rep.* 2016, 640, 1