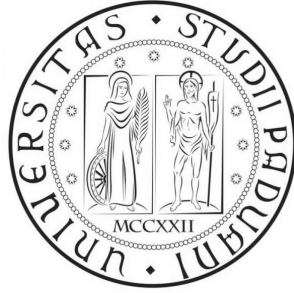


UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA



DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA INDUSTRIALE

CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN INGEGNERIA MECCANICA

**Tesi di Laurea Magistrale in ingegneria Meccanica**

**ANALISI DI GIUNTI A TRIPODE PER APPLICAZIONI AUTOMOTIVE**

**TRIPOD JOINTS ANALYSIS FOR AUTOMOTIVE APPLICATION**

*Relatore: Prof. Ing. Alberto Doria*

*Correlatore: Ing. Fabio Marchetti*

Laureando: *OMAR DUSI*

matr. 1082086

*ANNO ACCADEMICO 2015-2016*

*Ultima revisione: 02/29/16*

*Eccomi arrivato al sudato traguardo della laurea. Un risultato importante ottenuto non solo per merito mio ma anche grazie a tutti coloro che hanno fatto parte della mia vita in questi 7 anni. Il mio ringraziamento va anzitutto ai miei genitori che con i loro enormi sacrifici mi hanno permesso di coltivare una passione per la scienza che non sapevo essere così profonda. Ringrazio Gloria per essermi rimasta accanto in questi 2 anni, per avermi incoraggiato supportato e sopportato nei periodi più tesi (esami). Ringrazio i miei compagni di studi per aver accolto sempre i miei dubbi e condiviso la vostra conoscenza. Ringrazio i coinquilini per i bei momenti trascorsi e le prelibate cene (soprattutto quelle in terrazzo) in via Bergamo. Ringrazio i parenti e gli amici per l'interesse dimostrato verso la mia persona e la mia carriera. Ringrazio il Professor. Ing. Alberto Doria e l'Ing. Fabio Marchetti per avermi seguito con passione ed entusiasmo in questi ultimi sei mesi dedicati alla tesi. Ringrazio infine SKF Industrie S.p.A. per avermi dato la possibilità di fare questa esperienza e tutto il personale della sede di Poggio Rusco (compagni di merende in particolare) per accoglienza e la cordialità.*

# Sommario

In questa tesi si riporta l'analisi dei giunti a tripode che trovano applicazione in campo automotive. Il lavoro è stato condotto durante un tirocinio presso la sede di Poggio Rusco di SKF Industrie S.p.A. all'interno della quale si progettano e si realizzano giunti omocineticici. La proposta di indagine nasce dal desiderio aziendale di approfondire le leggi che caratterizzano i fenomeni vibratorii di questa tipologia di giunti scorrevoli. Per questo motivo lo studio prevede una prima fase (capitolo §2) in cui si ricava l'intera cinematica del meccanismo allo scopo di ottenere le relazioni di moto per ciascun suo componente oltre che la verifica sull'omocineticità. Successivamente considerando il giunto come facente parte di un semiasse si è potuto ricavare, attraverso la risoluzione numerica delle equazioni derivanti dall'analisi cinematica, l'influenza che hanno i parametri caratteristici della trasmissione ( $R$  indicativo della taglia del giunto,  $\gamma_0$  angolo di lavoro del semiasse,  $l$  distanza tra i due pivot-point del semiasse) sulla regolarità di funzionamento e sul moto di ciascun componente. A completamento della parte di cinematica è stato proposto un metodo approssimato che permetta di ricavare velocità e accelerazioni degli elementi che costituiscono il giunto. Nel terzo capitolo si riportano i risultati derivanti dall'analisi bibliografica relativa ai fenomeni dinamici a cui il giunto a tripode è soggetto. Dalla consultazione degli articoli reperiti è emerso che nelle condizioni di funzionamento a regime i fenomeni dovuti alle forze inerziali sono trascurabili mentre risultano preponderanti gli effetti degli attriti interni. Tali attriti causano la generazione da parte del giunto di vibrazioni assiali ad alta frequenza (*Generated Axial Force*), inoltre fanno sì che le vibrazioni provenienti dal sistema motore-cambio vengano trasmesse allo chassis per mezzo del semiasse. Per di più nel terzo capitolo si riporta un modello utile in sede di progettazione per la stima del GAF. I capitoli §1 e §4 derivano dalle attività preliminari di stage che prevedevano l'approfondimento delle conoscenze delle varie tipologie di giunti che l'azienda produce (in particolare i giunti a tripode) e lo studio delle modalità con cui l'ufficio R&D progetta e verifica tali componenti.



# Indice

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introduzione</b>   | <b>7</b>  |
| 1.1      | Nascita e sviluppi dei giunti Pode . . . . .                                | 7         |
| 1.1.1    | Giunti dipode . . . . .   | 8         |
| 1.1.2    | Giunti tripode . . . . .  | 10        |
| 1.1.3    | Giunti quadripode . . . . .   | 17        |
| 1.2      | Processo di produzione . . . . .  | 19        |
| 1.3      | Campi di impiego . . . . .  | 20        |
| 1.4      | Esperienze da primo impianto . . . . .                                      | 21        |
| 1.5      | Contesto industriale di riferimento . . . . .                               | 22        |
| <b>2</b> | <b>Analisi cinematica</b>   | <b>25</b> |
| 2.1      | Assunzioni di partenza . . . . .  | 25        |
| 2.2      | Sistemi di riferimento . . . . .  | 26        |
| 2.3      | Matrice dei coseni direttori . . . . .                                      | 28        |
| 2.3.1    | Coseni direttori . . . . .  | 28        |
| 2.3.2    | Sistemi di trasformazione delle coordinate . . . . .                        | 31        |
| 2.4      | Relazione input-output . . . . .  | 34        |
| 2.4.1    | Posizione dei roller in funzione dell'angolo $\theta$ . . . . .             | 34        |
| 2.4.2    | Relazione ingresso-uscita . . . . .   | 35        |
| 2.4.2.1  | Caso $i = 1$ . . . . .  | 35        |
| 2.4.2.2  | Caso $i = 2$ . . . . .  | 36        |
| 2.4.2.3  | Caso $i = 3$ . . . . .  | 40        |
| 2.5      | Moto del centro dello Spider . . . . .                                      | 46        |
| 2.5.1    | Moto del centro dello spider in riferimento alla terna intermedia . . . . . | 46        |
| 2.5.2    | Moto del centro dello spider in riferimento alla terna fissa . . . . .      | 51        |
| 2.6      | Moto del centro dei roller . . . . .  | 54        |
| 2.6.1    | Posizione media dei tre roller . . . . .                                    | 54        |
| 2.6.2    | Posizione assiale di ciascun roller . . . . .                               | 55        |
| 2.6.3    | Traiettoria ellittica dei centri dei roller . . . . .                       | 57        |
| 2.6.4    | Distanza radiale di ciascun roller . . . . .                                | 59        |

---

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 2.7      | Ridefinizione dei coseni direttori . . . . .                   | 60         |
| 2.7.1    | Coseni direttori . . . . .                                     | 60         |
| 2.8      | Moto estremità libera . . . . .                                | 63         |
| 2.8.1    | Determinazione coordinate h e g . . . . .                      | 63         |
| 2.9      | Analisi cinematica di un semiasse . . . . .                    | 69         |
| 2.10     | Risoluzione numerica . . . . .                                 | 88         |
| 2.11     | Velocità e accelerazioni . . . . .                             | 102        |
| 2.11.1   | Moto del centro dello spider . . . . .                         | 104        |
| 2.11.2   | Moto del centro di ciascun roller . . . . .                    | 109        |
| 2.11.3   | Calcolo dell'irregolarità di trasmissione . . . . .            | 113        |
| <b>3</b> | <b>Dinamica</b>  | <b>115</b> |
| 3.1      | Forze di disturbo . . . . .                                    | 115        |
| 3.2      | Modello empirico ad attrito . . . . .                          | 123        |
| 3.2.1    | Coefficiente d'attrito . . . . .                               | 123        |
| 3.2.2    | Rapporto slip-to-roll . . . . .                                | 124        |
| 3.2.3    | Attrito di puro strisciamento . . . . .                        | 124        |
| 3.2.4    | Attrito di puro rotolamento . . . . .                          | 125        |
| 3.2.5    | Modello di attrito . . . . .                                   | 125        |
| <b>4</b> | <b>Dimensionamento e validazione</b>                           | <b>135</b> |
| 4.1      | Procedura aziendale per la validazione . . . . .               | 135        |
| 4.2      | Verifica cinematisimo interno per i giunti a tripode . . . . . | 137        |
| 4.3      | Aggiornamento modello di calcolo ed esempio . . . . .          | 139        |
| <b>5</b> | <b>Conclusioni</b>   | <b>153</b> |

# Capitolo 1

## Introduzione

In questo capitolo si presenta la famiglia dei giunti *pode* a cui appartengono i tripodi. Inizialmente si riporta la storia e gli sviluppi di questi giunti con maggiore approfondimento sui tripodi che sono la variante più utilizzata attualmente perché meglio si presta alla trasmissione di coppia. Successivamente si descrive il processo di produzione dei componenti del giunto, se ne descrivono i campi di impiego e infine si inquadra questa tipologia di giunto nel contesto dell'azienda dove è stata svolta questa tesi. L'ultima sezione riporta una breve descrizione dell'azienda SKF Industrie S.p.A. e della sua sede di Poggio Rusco (MN).

### 1.1 Nascita e sviluppi dei giunti Pode

L'idea di questa famiglia di giunti la si deve al signor Robert Schwenke che nel 1902 propose il primo brevetto di giunto a dipode per applicazione su autoveicoli (DRP 155834). Questi giunti dovevano consentire la trasmissione di alti valori di coppia, grazie all'utilizzo di corpi volventi aventi raggi molto maggiori rispetto ai giunti a sfere e quindi superfici di contatto più ampie nel caso delle versioni scorrevoli, ampie corse con ridotto attrito e ampi angoli di articolazione. Negli anni che seguirono vennero registrati numerosi brevetti e nacquero altre due varianti, i tripodi e i quadripodi. In generale questi giunti sono costituiti da una campana esterna detta *pot* nella quale sono ricavate le piste, un nucleo centrale detto *spider* avente 2,3 o 4 *trunnion* e una serie di *roller* che collegano *spider* e *pot* consentendo la trasmissione di coppia (figura 1.1.1), nei moderni giunti si inseriscono inoltre tra *trunnion* e *roller* dei rullini (*needles*). Allo scopo di ridistribuire il carico su un numero maggiore di *needles* la sezione di ciascun *trunnion* è resa leggermente ellittica sul piano contenente gli assi dello *spider* e del *trunnion* stesso.

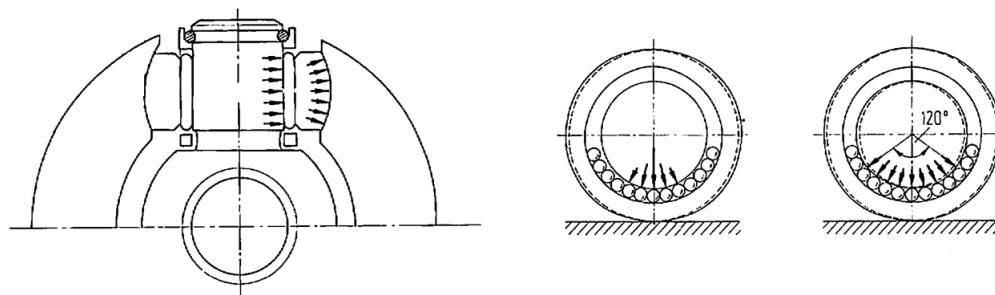


Figura 1.1.1: Dettaglio del *trunnion* e del *roller* per un generico giunto poda

### 1.1.1 Giunti dipode

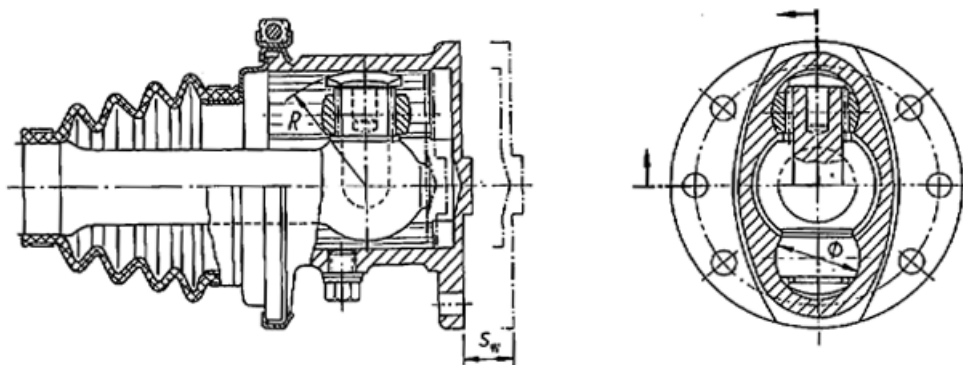


Figura 1.1.2: Esempio di giunto scorrevole (corsa  $s_w$ ) a dipode destinato per una vettura a trazione posteriore (BMW 501 del 1952-1958). Si può notare che prevedeva *roller* sferici con presenza di *needles*.

Questa variante in verità ha origini che risalgono alla metà del diciannovesimo secolo, ma è dagli inizi del 1900 che si applicarono agli autoveicoli. Nel 1921 John B. Flick propose la prima variante scorrevole, dotata peraltro di *roller* sferici (USA 1512840), che divenne lo standard di produzione.



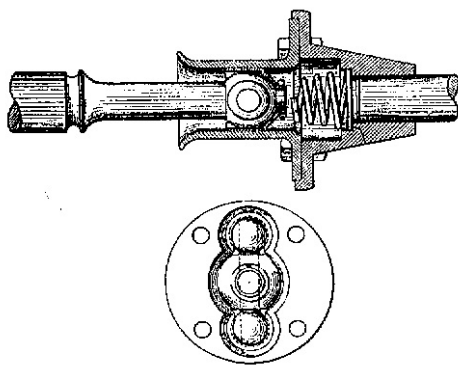


Figura 1.1.3: Giunto a dipode brevettato da John B. Flick nel 1921 per vetture Ford Model T a trazione integrale.

Nel 1928 Richard Bussien brevettò un semiasse costituito di un doppio giunto (quasi omocinetico) dipode a lato ruota e un giunto dipode scorrevole lato differenziale. Fu il primo caso di applicazione di un giunto dipode su un asse sterzante.

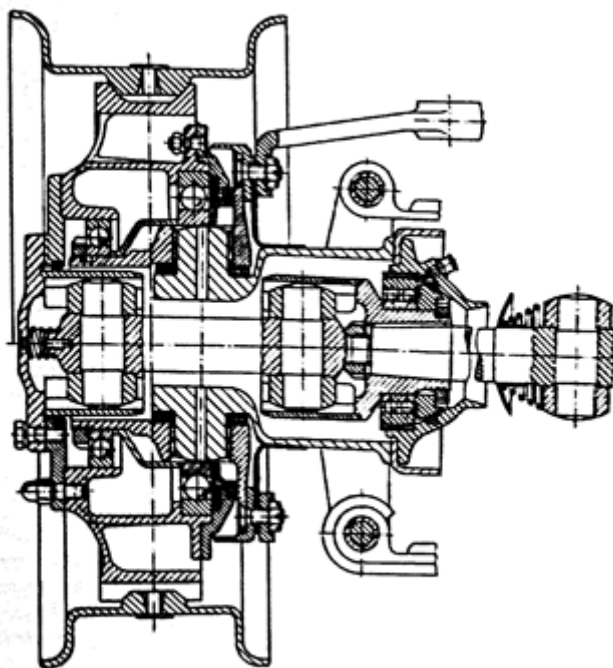


Figura 1.1.4: Giunto a dipode scorrevole progettato da Richard Bussien nel 1928 per autobus a trazione anteriore.

seguirono negli anni successivi altri brevetti, elencati nella tabella sottostante (1.1). Tra questi brevetti quello di Fritz Hirschfeld's nel 1931, in particolare gettò le basi per la nascita dei giunti a tripode.

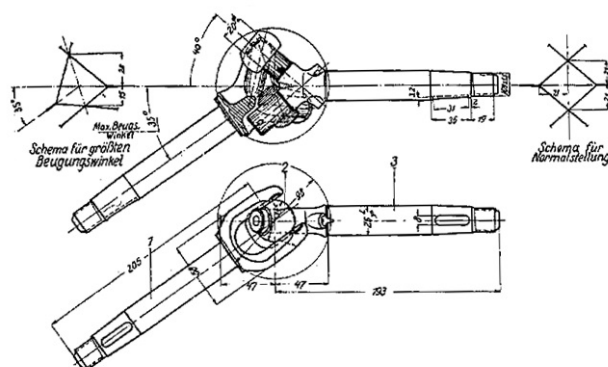


Figura 1.1.5: Giunto dipode scorrevole per vetture a trazione anteriore (1931).

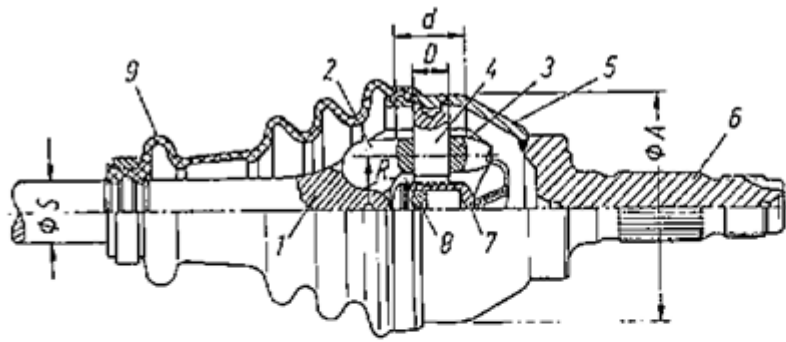
Nella tabella sottostante si riportano i brevetti registrati per questa categoria.

Tabella 1.1: Brevetti registrati di giunti dipode dal 1902 al 1952

| anno | Titolare del brevetto        | Sigla brevetto |
|------|------------------------------|----------------|
| 1902 | Robert Schwenke              | DRP 155834     |
| 1907 | Sté. des Automobiles Brasier | /              |
| 1910 | Mercedes (DMG)+NAG           | /              |
| 1921 | John B. Flick                | USA 1512840    |
| 1928 | Richard Bussien              | DRP456925      |
| 1930 | Archibald A. Warner          | USA1854873     |
| 1931 | Fritz Hirschfeld             | DRP 568825     |
| 1932 | Kugelfisher (FAG)            | DRP 565825     |
| 1952 | Bayer. Motoren-Werke (BMW)   | Bild 1.42      |

### 1.1.2 Giunti tripode

Nel 1935 John W. Kittredge inventò un giunto tripode dotato di *roller* sferici, tale giunto era di tipo fisso. Nel 1937 Karl Kutzbach fece un progetto base di un semiassale costituito da due giunti a tripode, in particolare le piste erano a fianchi paralleli, con elementi volventi sferici. Seguirono altri brevetti negli anni seguenti, fino ad arrivare agli anni '60 quando Gunnar A. Wahlmark e la compagnia BRD si interessarono alla versione sviluppata da Michel Orain nel 1953. Wahlmark pensò di avere trovato l'inventore di un giunto tripode perfettamente omocinetico, adatto a lavorare a velocità angolari fino a 3000 giri al minuto e le cui parti interne ed esterne scorrono una rispetto all'altra in fase di articolazione, con la parte interna che si muove di moto relativo circolare rispetto alla parte esterna. La produzione in serie del giunto tripode-GE di Orain iniziò già nel 1958 presso la Glaenzer-Spicer, attuale GKN.



| Size of joint  | GE                 | 58   | 66    | 76   | 82A  | 86    | 90A  | 92   | 99                     | 113   |
|--|--------------------|------|-------|------|------|-------|------|------|------------------------|-------|
| Outer diameter   | A                  | 58   | 67.7  | 76   | 86   | 86    | 93   | 92   | 99                     | 113   |
| Shaft diameter   | S                  | 17.7 | 21    | 21.2 | 25.7 | 27    | 28   | 30   | 31                     |       |
| Pitch circle radius  | R                  | 14.1 | 16.15 | 18.3 | 20.2 | 20.85 | 21.6 | 22.5 | 24.2                   | 27.4  |
| Roller diameter  | d                  | 16.9 | 19.7  | 21.9 | 23.7 | 24.9  | 25.9 | 26.8 | 28.4                   | 31.69 |
| Max. working angle   | $\beta$            | 43   | 43    | 43   | 45   | 43    | 45   | 43   | 43                     | 43    |
| Max. engine capacity for passenger cars  | in cm <sup>2</sup> | 750  | 1100  | 1400 | 1800 | 2000  | 2200 | 2600 | depends on application |       |
| Static failure torque, (rotating joint) for $\beta = 0^\circ$                          | $M_b$ in Nm        | 1350 | 1950  | 2400 | 3000 | 3500  | 4000 | 4270 | 5250                   | 7850  |
| Quasi-static failure torque (rotating joint) for $\beta = 40^\circ$                    | $M_b$ in Nm        | 750  | 1050  | 1550 | 2000 | 2250  | 2500 | 2800 | 3600                   | 5000  |
| Max. drive torque 0.6 $M_b$ for $\beta = 0 + 10^\circ$                                 | $M_o$ in Nm        | 1200 | 1750  | 2100 | 2850 | 3200  | 3600 | 3900 | 4900                   | 7200  |
| Permanent torque for $\cong 500$ h/<br>$730 \text{ min}^{-1}$ , $\beta = 6 - 27^\circ$ | $M_d$ in Nm        | 100  | 150   | 220  | 290  | 330   | 370  | 410  | 500                    | 750   |
| Trunnion diameter  | D in mm            | 9.5  | 10.7  | 12.5 | 13.7 | 14    | 15   | 15   | 16                     | 18.2  |
| Effective roller length  | $l_v$ in mm        | 9.3  | 10.5  | 11.8 | 13   | 13.7  | 14   | 14.7 | 15.6                   | 17.8  |

Figura 1.1.6: Giunto scorrevole tripode GE (Glaenzer Exterior) con possibilità di articolazione fino a 45°. 1-pot; 2-piste; 3-roller con cuscinetto a strisciamento; 4-trunnion; 5-campana esterna; 6-gambo; 7-rinforzo; 8-clip di tenuta a fungo; 9-cuffia.

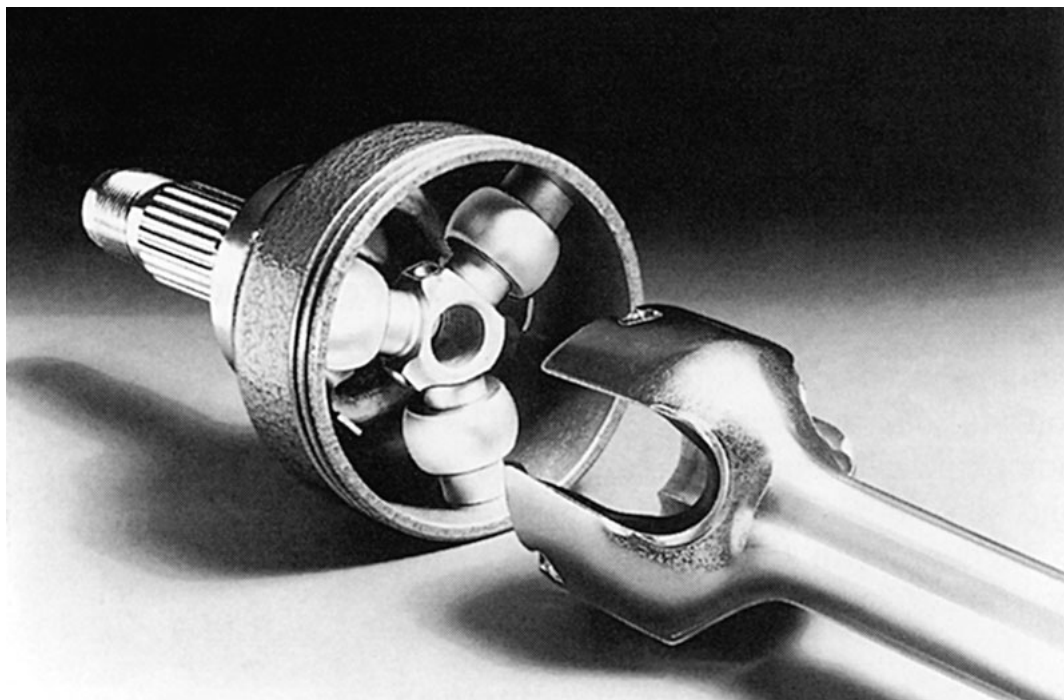


Figura 1.1.7: Foto di giunto scorrevole tripode GE (Glaenzer Exterior)

Nel 1963 Kurt Enke brevettò una variante di giunto tripode avente sei sfere, avente lo schema classico con un *pot* a tre lobi e uno *spider* a tre bracci (*trunnion*). Questi a loro volta si trasmettono la coppia attraverso sei sfere posizionate all'interno delle sei piste ricavate in ciascun componente. Queste sfere durante il funzionamento vengono mantenute sul piano di simmetria. La coppia viene trasmessa solamente da tre delle sei sfere a seconda del senso di rotazione, mentre le restanti permettono di mantenere assemblati e centrati i componenti. Le sfere risultano essere precaricate in quanto questo giunto non prevede l'adozione di una gabbia di contenimento e funziona con assenza di gioco.

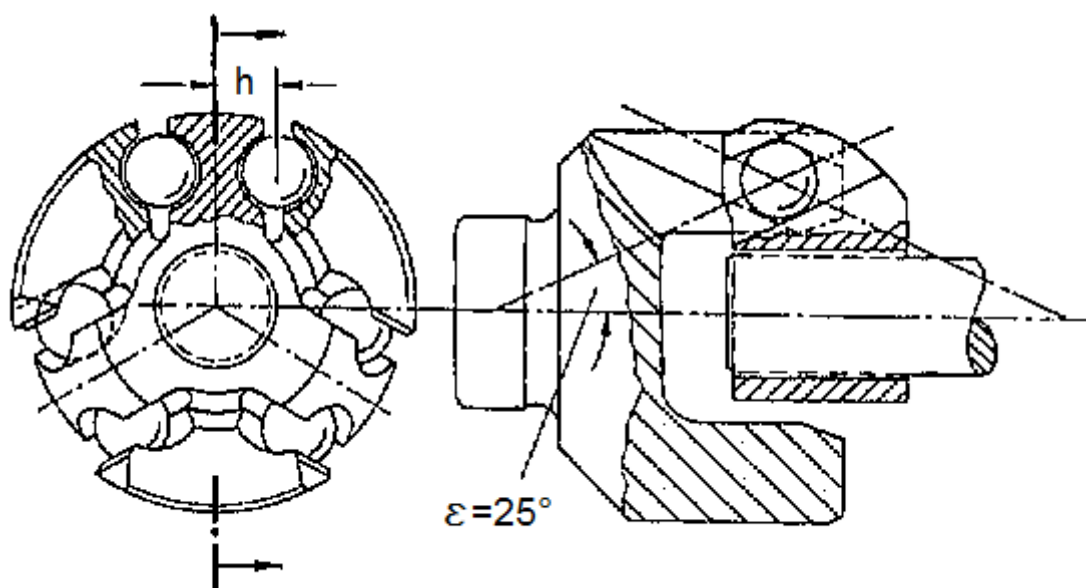
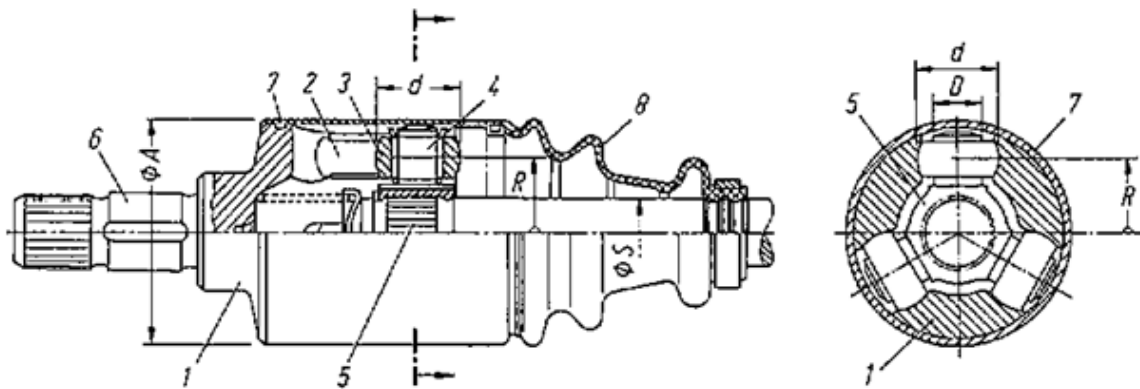


Figura 1.1.8: Giunto tripode a sfere brevettato da Kurt Enke nel 1963.

Nel 1970 arrivò il giunto tripode GI (figura 1.1.10), che prevedeva l'aggiunta di *needles* (rullini) posizionati tra il *trunnion* e il *roller*. Con questo accorgimento, a parità di dimensioni, un giunto GI è in grado di trasmettere coppie maggiori rispetto alla versione GE.



Figura 1.1.9: Foto di giunto scorrevole tripode GI (Glaenzer Interior)



Principal dimensions in mm and Max. torque capacity in Nm

| Size of joint   | GI              | 580   | 62    | 69    | 720   | 82                     | 87 C  | 100 C   |
|---|-----------------|-------|-------|-------|-------|------------------------|-------|---------|
| Outer diameter  | A               | 58    | 63    | 69    | 72    | 82                     | 87    | 116-126 |
| Shaft diameter  | S               | 19.1  | 20.2  | 22.3  | 25.5  | 27.4                   | 30.4  | 35.5    |
| Pitch circle radius   | R               | 18.64 | 20.84 | 23.2  | 28.15 | 30.5                   | 36.8  |         |
| Roller diameter   | d               | 29.2  | 31.95 | 29.95 | 37.1  | 33.95                  | 33.95 | 33.95   |
| Max. engine capacity for passenger cars   | cm <sup>3</sup> | 1100  | 1500  | 1800  | 2800  | depends on application |       |         |
| Intermediate shaft. Optimum number of splines SAE 24/48-45°   |                 | 19    | 21    | 22    | 25    | 27                     | 30    | 27-30   |
| Static failure torque for $\beta = 0^\circ$   | $M_b$           | 1900  | 2600  | 3000  | 4500  | 5500                   | 7700  | 9300    |
| Max. drive torque $0.6 M_b$ for $\beta = 0-10^\circ$  | $M_N$           | 1040  | 1240  | 1660  | 2530  | 3150                   | 4300  | 6900    |
| Nominal torque for calculated service life $\leq 500$ Std. at 730 min <sup>-1</sup> , $\beta = 6-12^\circ$ ; Plunge $\pm 10$ mm | $M_d$           | 220   | 290   | 330   | 450   | 560                    | 750   | 900     |
| Trunnion diameter   | D               | 12.5  | 14.9  | 16    |       | 18.6                   |       | 26-29   |
| Needle diameter   | $d_1$           |       | 1.5   | 2     |       | 2                      |       | 2       |
| Effective needle length   | $l_w$           | 7.8   | 10.3  | 11.8  |       | 13.8                   |       | 13.8    |
| No. of needles  | z               | 29    | 34    | 28    |       | 32                     |       | 32      |

Figura 1.1.10: Giunto scorrevole tripode GI (Glaenger Interior) con possibilità di articolazione fino a 45°. 1-pot; 2-piste; 3-roller con cuscinetto a rullini; 4-trunnion; 5-mozzo; 6-gambo; 7-rivestimento metallico esterno; 8-cuffia.

Nel 1991 R. A. Lloyd (GKN Technology Ltd., Wolverhampton) iniziò a studiare il modo per ridurre gli attriti e le vibrazioni nei giunti a tripode. Propose quindi la soluzione tripode GI-C che prevedeva una leggera obliquità dei *roller* (figura 1.1.11). In particolare Lloyd riuscì a ottenere una riduzione della forza assiale del 39% con un angolo di obliquità di 4,6°, inoltre per piccoli angoli di articolazione  $\gamma$  e basse velocità di rotazione gli attriti risultarono ridotti e le vibrazioni dimezzate.

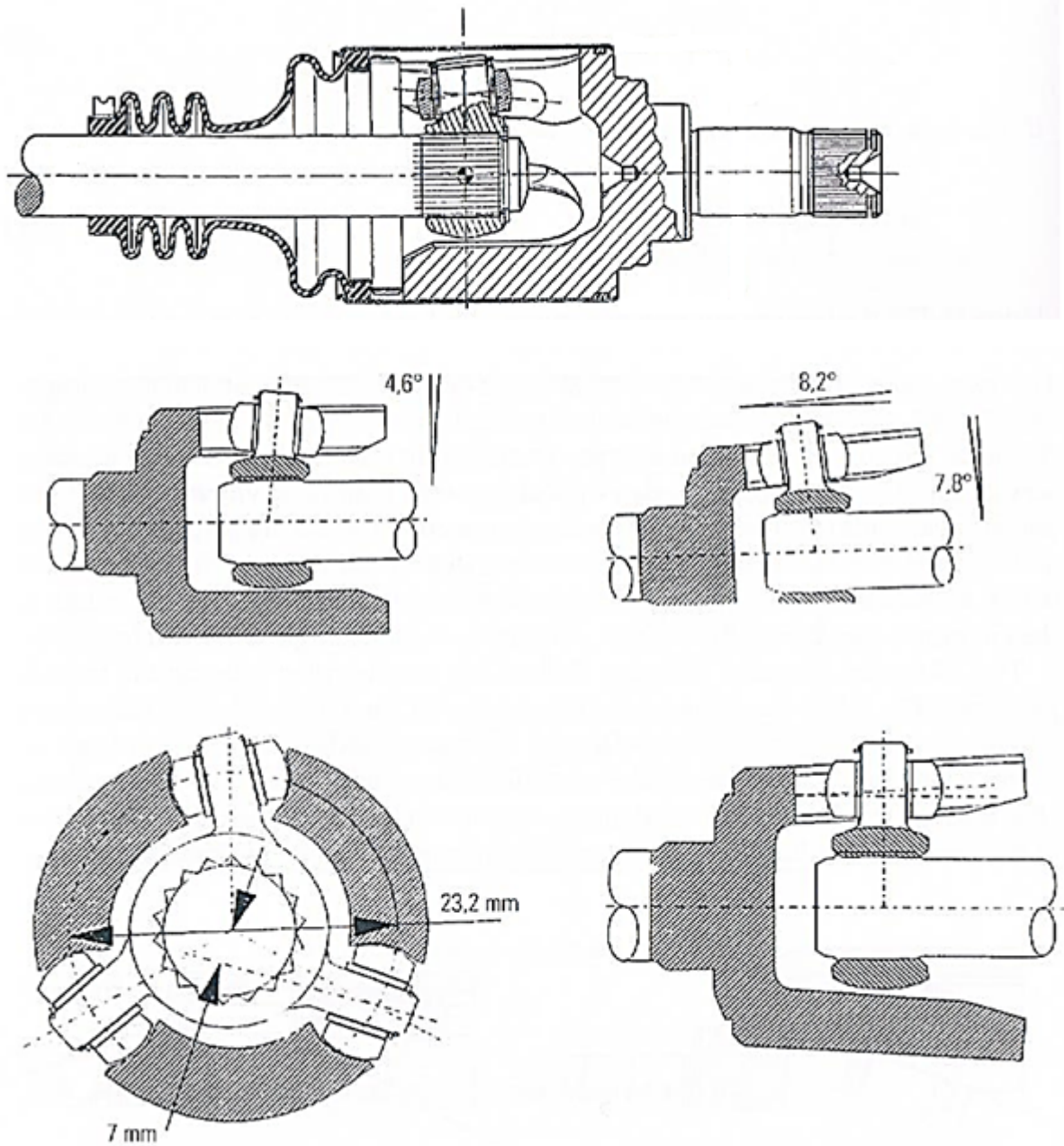


Figura 1.1.11: Giunto scorrevole tripode GI-C brevettato nel 1991 da J. C. van Dest.

Nel 1989 dalla versione tripode GI-C gli ingegneri di GKN derivarono il tripode AAR (Angular Adjusted Roller). Come si vede in figura 1.1.12b i *roller* restano orientati in direzione parallela all'asse delle piste e l'articolazione è consentita dal profilo sferico del *trunnion*. Quindi i *roller* non sono più solidali con lo *spider* (figura 1.1.12a) ma ne è consentita la traslazione lungo l'asse del *trunnion* e le tre rotazioni. Questa tipologia di giunti consente di avere le migliori *performance* in termini di resistenza allo scorrimento e riduzione delle vibrazioni.

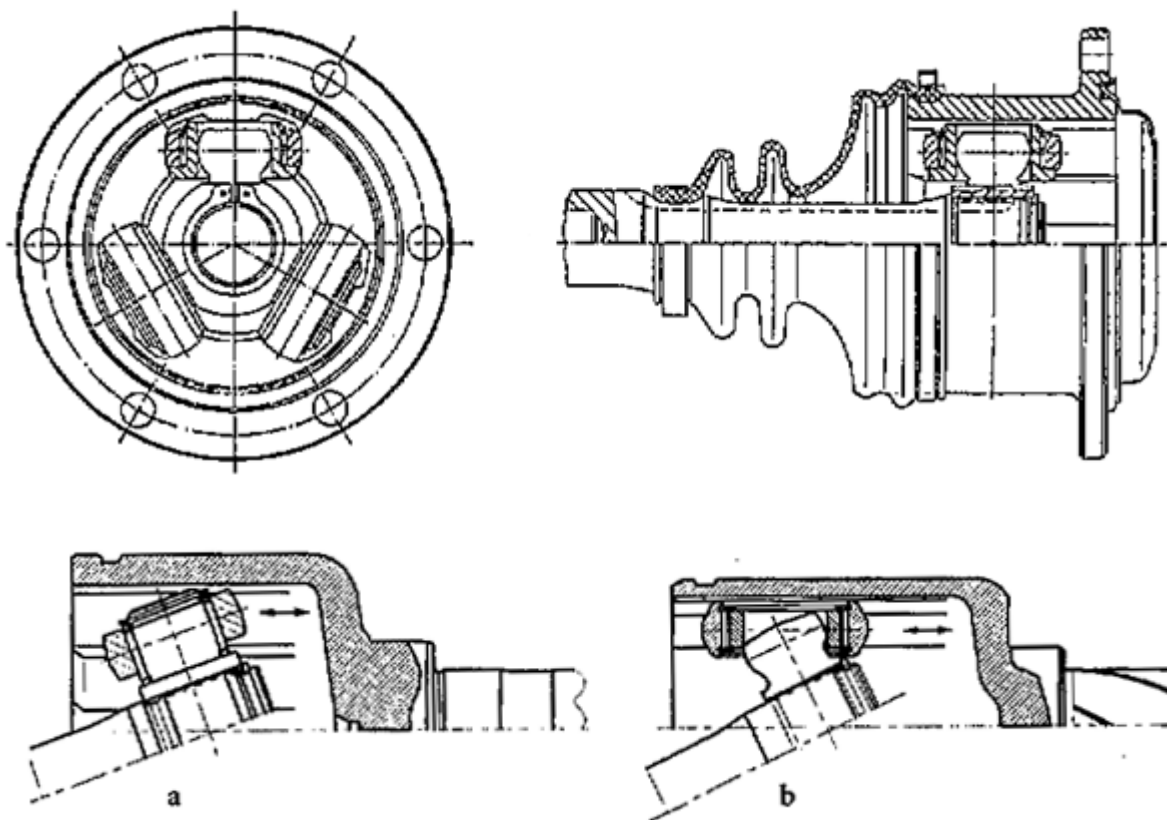


Figura 1.1.12: In alto giunto scorrevole a tripode AAR (Angular Adjusted Roller); a) dettaglio articolazione giunto tripode GI; b) dettaglio articolazione giunto tripode AAR

Tabella 1.2: Riepilogo tipologie di giunti a tripode e brevetti.

| anno | Titolare del brevetto      | sigla o brevetto | peculiarità |
|------|----------------------------|------------------|-------------|
| 1935 | John W. Kittredge          | USA 2125615      | /           |
| 1937 | Edmund B. Anderson         | USA 2235002      | /           |
| 1952 | Paul-Robert Clément        | FR-PS 1078962    | /           |
| 1953 | Michel Orain               | GE               | Fig. 1.1.7  |
| 1957 | Gunnar A. Wahlmark         | USA 2910845      | /           |
| 1959 | Blade Research Development | GB-PS 27513      | /           |
| 1960 | Michel Orain               | FR-PS 1272530    | /           |
| 1963 | Kurt Enke                  | /                | Fig. 1.1.8  |
| 1970 | /                          | GI               | Fig. 1.1.9  |
| 1991 | R. A. Lloyd                | GI-C             | Fig. 1.1.11 |
| 1989 | GKN                        | AAR              | Fig. 1.1.12 |

Al giorno d'oggi giunti tripode sono la variante più utilizzata nei semiassi per la trazione stradale.



### 1.1.3 Giunti quadripode

I giunti quadripode esistono già da prima che nascessero i giunti a tripode. Il primo brevetto risale infatti al 1913, depositato dall'americano Victor Lee Emerson. Il progetto prevedeva *roller* sferici che scorrevano lungo piste parallele all'asse del *pot*.

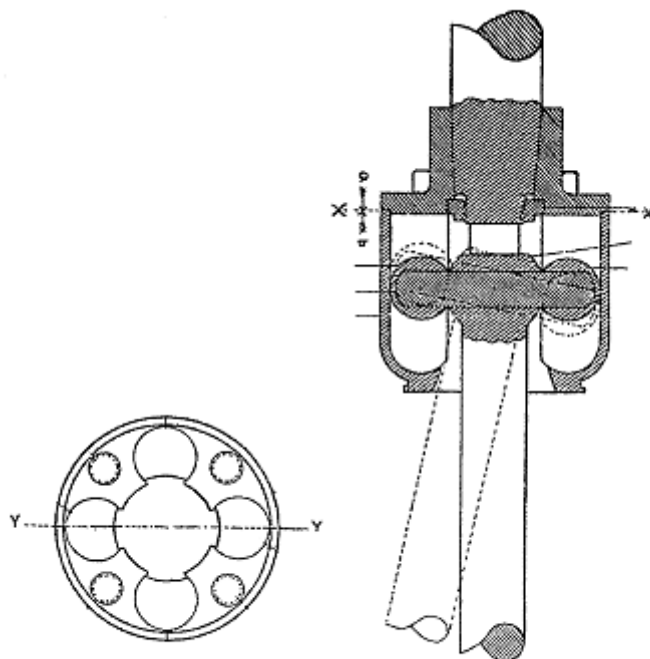


Figura 1.1.13: Giunto quadripode brevettato da Victor Lee Emerson's nel 1913.

Nel 1929 Henri Wouter Jonkhoff progettò un giunto per applicazione su veicoli pesanti, il progetto prevedeva che i *rollers* cilindrici fossero a contatto con quattro coni lisci dotati della possibilità di ruotare attorno al proprio asse. In questo modo si ha una coppia di *roller* che agisce contro l'altra e viceversa generando sempre nuovi contatti. Così facendo sperava di eliminare il disturbo a tutti gli angoli di articolazione.

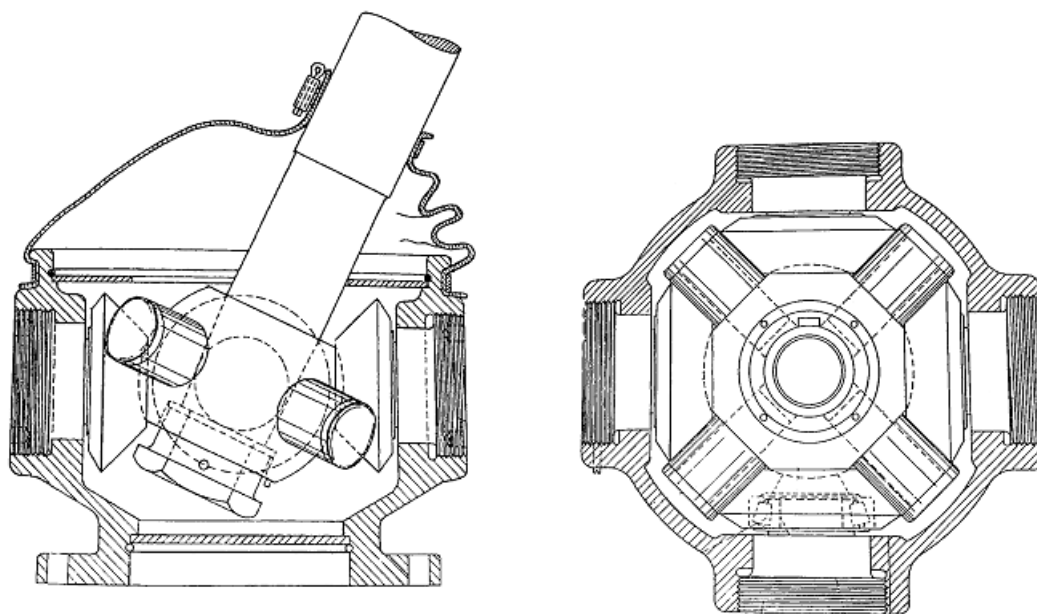


Figura 1.1.14: Giunto quadripode brevettato nel 1932 da Henri W. Jonkhoff per applicazione su veicoli commerciali.

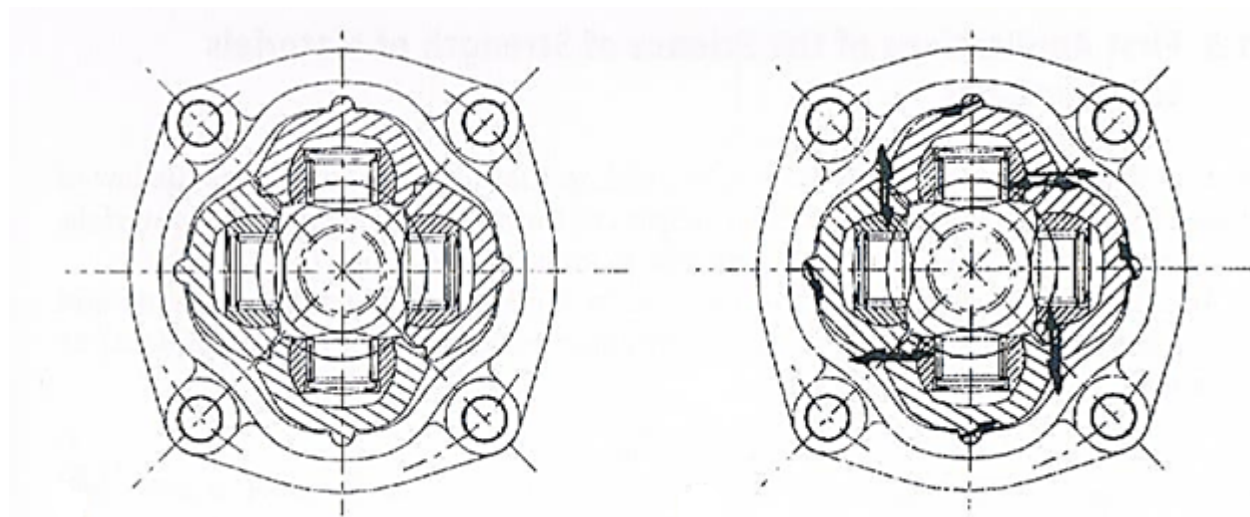


Figura 1.1.15: Giunto quadripode brevettato da Michel Orain nel 1987 per applicazione su vetture sportive e veicoli commerciali.

Seguì negli anni successivi una serie di brevetti fino ad arrivare nel 1987 con il progetto di Michel Orain della Glaenzer Spicer, che prevedeva piste oscillanti nelle quali scorrevano i *roller* consentendo di trasmettere alti valori di coppia fino a velocità di 6000 giri al minuto ma con angoli non superiori ai 10°.

Tabella 1.3: Brevetti registrati di giunti quadripode

| anno    | Titolare del brevetto        | Sigla brevetto            |
|---------|------------------------------|---------------------------|
| 1913    | Victor Lee Emerson           | British Patent 14129      |
| 1929    | Henri Wouter Jonkhoff        | German Patent 562108      |
| 1932    | Henri Wouter Jonkhoff        | German Patent 586776      |
| 1944-46 | Sven Gustaf Wingqvist        | US Patent 2532433/434     |
| 1951    | Ludw. v. Roll'sce Eisenwerke | German Patent 904256      |
| 1984    | Michel Alexandre Orain       | French Patent 8410473     |
| 1991    | Michel Alexandre Orain       | European Patent 0520846A1 |
| 1994    | Werner Krude                 | German Patent 4430514C2   |

Tuttavia questo tipo di giunto non trova ancora applicazione in quanto non presenta migliori caratteristiche rispetto al giunto di Hooke.

## 1.2 Processo di produzione

Gli acciai utilizzati per la realizzazione dei giunti sono generalmente quelli da tempra ad esempio il C50 e derivati o per cementazione come il 21 Ni Cr Mo.

I *pot* vengono ottenuti da barre tonde d'acciaio tramite forgiatura a caldo ( $800^{\circ}\text{C} \div 960^{\circ}\text{C}$ ) eseguita in più fasi. Segue un raffreddamento controllato che ha funzione di trattamento intermedio e una stiratura controllata a freddo (*warm forging*), infine si esegue la coniatura (*net shaping* o *net forging*) per profilare in modo preciso le piste. Sul gambo del *pot* vengono poi ricavati mediante rullatura il profilo scanalato e la filettatura. Infine si esegue la tempra o la cementazione che però non possono essere seguiti da rettifica per impossibilità tecnologica. Si esegue quindi un accoppiamento per classi con i diametri dei *roller*.

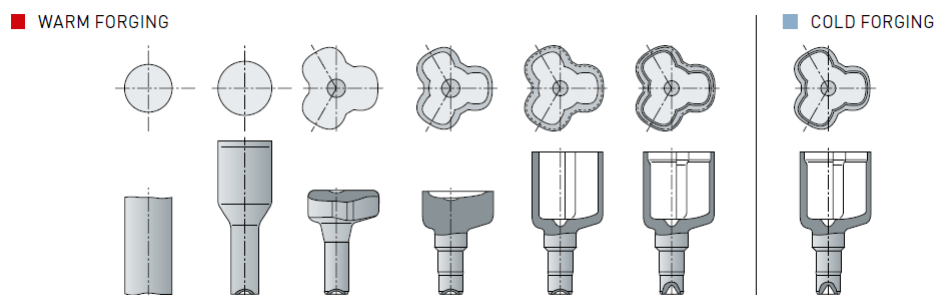


Figura 1.2.1: Sequenza delle fasi di stampaggio a caldo e coniatura finale del *pot*.

Anche la produzione dello *spider* segue una serie di cicli di stampaggio a caldo partendo da un tondo di acciaio, seguiti da un raffreddamento controllato e una stiratura a freddo. I profili dei *trioni* devono poi essere rettificati per soddisfare le tolleranze richieste.

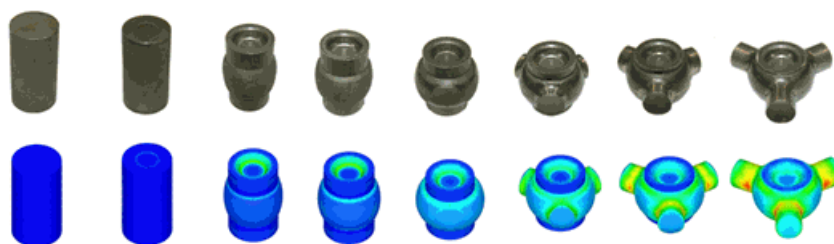


Figura 1.2.2: Sequenza delle fasi di stampaggio a caldo e dello *spider*.

Infine *roller* sono ricavati per tornitura da barre, temprati o cementati e successivamente rettificati.

### 1.3 Campi di impiego

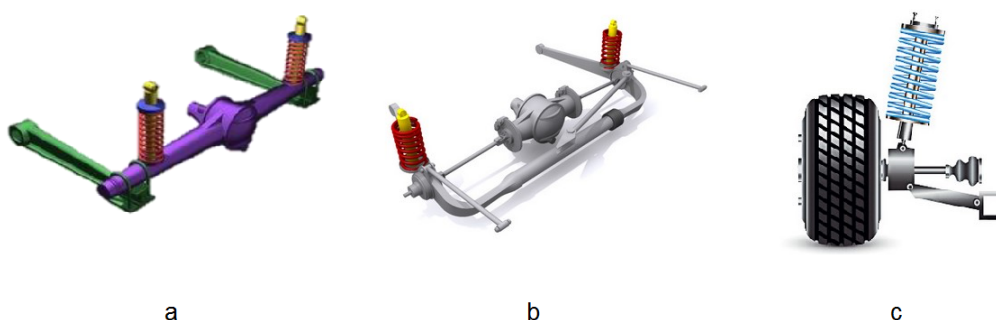


Figura 1.3.1: Esempi di sospensioni per veicolo: a) ponte rigido; b) ponte *de Dion*; c) sospensione indipendente.

Sugli autoveicoli la necessità di utilizzare un semiassie costituito da giunti omocinetiche nasce nel momento in cui il veicolo prevede sospensioni indipendenti. Nelle configurazioni a ponte rigido infatti le ruote dello stesso asse sono collegate rigidamente tra loro attraverso un elemento strutturale detto portale o ponte a seconda che contenga anche il differenziale. A sua volta il ponte è collegato al telaio del veicolo per mezzo delle sospensioni. Non è dunque necessario installare un semiassie in quanto non vi è una traslazione relativa tra le ruote e il differenziale. Nel caso del ponte *de Dion* o sospensioni indipendenti il differenziale deve poter trasferire il moto in modo regolare alle ruote anche con ampi angoli di disallineamento senza pregiudicare la maneggevolezza e la sicurezza del veicolo. Ecco quindi che i giunti omocinetiche trovano la loro applicazione in ambito automotive e vanno a far parte del semiassie. In questi anni si assiste a una diffusione sempre maggiore delle sospensioni indipendenti, per consentire maggiore *comfort* di percorrenza e *handling*. Di fatto tale soluzione è adottata per quasi tutte le tipologie di veicoli stradali, dai quadricicli leggeri ai veicoli commerciali fino ad arrivare in certi casi ai *bus*, ai *truck* e recentemente anche in ambito *agricolture*. Di conseguenza anche i semiassi trovano sempre più ampio



identiche l'azienda propose il medesimo semiasse costituito da un giunto a sfere fisso lato ruota e un giunto a tripode lato differenziale. La soluzione risultò adeguata per il caso A mentre per il caso B la rumorosità (o battimento) generata dal sistema era incompatibile con le versioni ad uso promiscuo (trasporto passeggeri), dove il comfort, incluso quello acustico, deve rientrare all'interno di limiti più ristretti rispetto alla versione furgonata. Si optò pertanto all'adozione di un giunto scorrevole a sfere (tipologia DO).

## 1.5 Contesto industriale di riferimento



Figura 1.5.1: Vista esterna SKF Industrie S.p.A sede di Poggio Rusco (MN)

Questo lavoro di tesi è stato svolto presso l'azienda SKF Industrie S.p.A. sede di Poggio Rusco (MN), GLO S.r.l. fino al 31 dicembre 2012. La GLO S.r.l. nasce nel 1978 con l'obiettivo di produrre, all'inizio giunti omocineticici a sfere fissi per poi ampliare l'offerta negli decenni successivi con i giunti scorrevoli e semiassi completi. Tali prodotti, all'inizio erano destinati principalmente al mercato del ricambio per auto, successivamente è entrata anche nell'ambito del primo impianto. Attualmente l'azienda esporta in tutto in mondo servendosi dei canali di distribuzione ufficiali SKF, ma tradizionalmente il contributo maggiore al fatturato deriva dalle vendite in Europa ed Est-Europa. L'attuale offerta prevede tre linee di prodotto:

- Kit cuffia - cuffia in gomma o termoplastico corredata da tutti gli accessori necessari alla sostituzione.
- Kit giunti - giunto fisso o scorrevole corredata di kit cuffia.
- Semiassi.

SKF è una multinazionale svedese fondata nel 1907 a Göteborg dopo il brevetto del cuscinetto a doppia corona di sfere da parte di Sven Wingquist. Il gruppo SKF possiede più di 140 siti produttivi in 28 paesi, 45000 dipendenti e una rete commerciale con oltre 15000 punti vendita distribuiti in 130 paesi del mondo. L'offerta dei prodotti SKF è diversificata in 5 "piattaforme" con una vasta gamma di soluzioni standardizzate e la possibilità di fornire prodotti personalizzati:

- Cuscinetti, Unità e Supporti.
- Tenute
- Soluzioni di lubrificazione (lubrificanti, sistemi di lubrificazione, ecc).
- Soluzioni per il moto lineare (viti a sfere e a rulli, guide lineari profilate, ecc).
- Sistemi di attuazione (colonne telescopiche, unità di controllo e pulsantiera).
- Sistemi magnetici (cuscinetti magnetici e motori elettrici).
- *Drive-by-wire* (*electronic parking brake, electronic steering input unit*).
- Prodotti per la manutenzione (strumenti meccanici e idraulici per montaggio e smontaggio, strumenti di allineamento).
- *Condition Monitoring* (dispositivi per la raccolta e l'analisi dei dati).
- Prodotti per la trasmissione di potenza (cinghie, pulegge, catene, ecc).
- Sistemi di accoppiamento (giunti flessibili per alberi, sistemi per l'iniezione di olio, boccole, ecc).
- Attrezzature per misurazioni e test (dispositivi per misurazioni dimensionali, di vibrazioni, analisi ottiche, ecc).
- *Vehicle Aftermarket* (componenti di ricambio motore e trasmissione tra cui semiassi e giunti omocinetici).

Nel periodo di stage sono stati studiati le varie tipologie di giunti e le modalità con cui l'azienda ne esegue il dimensionamento e la verifica strutturale e cinematica. Lo scopo di questo primo lavoro era l'aggiornamento di un file Excel di cui l'ufficio R&D dell'azienda si serve per validare i progetti per ciascun cliente. Del file in questione ne viene riportata la descrizione un esempio nel capitolo §4, nel quale si spiega anche quali sono le parti implementate.





# Capitolo 2

## Analisi cinematica

In questo capitolo si sviluppa l'analisi cinematica di un generico giunto a tripode GI. Dopo aver riportato uno schema semplificato del giunto, verranno introdotte le assunzioni iniziali e stabiliti i sistemi di riferimento. Si costruirà successivamente la matrice dei coseni direttori, per mezzo della quale sarà possibile esplicitare la relazione ingresso uscita del meccanismo. Da tutto ciò si ricaveranno i moti caratteristici dei vari componenti (*spider* e *roller*) e dell'estremità libera dell'albero opposta al giunto a tripode, considerata in prima trattazione libera, quindi vincolata al *pivot-point* del giunto fisso (normalmente al lato ruota). Infine verranno riportati i risultati derivanti da una risoluzione numerica con *software* Matlab. Questi sono stati parametrati e riportati in opportuni diagrammi che agevolino l'interpretazione di certe caratteristiche in sede di progetto.

### 2.1 Assunzioni di partenza

Un giunto tripode GI è essenzialmente costituito di tre componenti:

- Il *pot* è un cilindro nel quale sono ricavate tre piste parallele al suo asse.
- Lo *spider* è costituito da un nucleo centrale dal quale si dipartono tre bracci detti *trunnion*.
- I *rollers* sono i tre elementi toroidali che collegano le suddette parti, essi infatti scorrono lungo le piste del *pot* in ciascuno di essi si inserisce un braccio dello *spider* (*trunnion*).

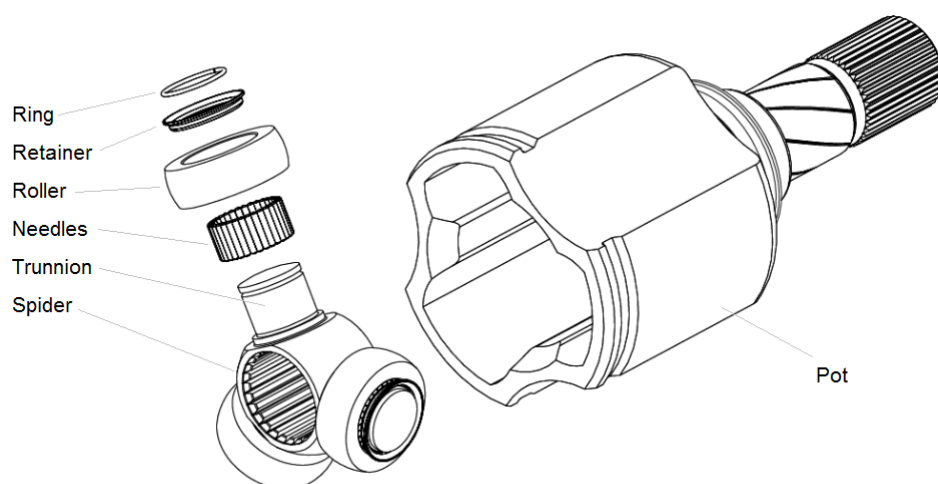


Figura 2.1.1: Esploso di giunto a tripode GI.

Nello sviluppo della seguente trattazione si assume:

1. Raggio  $R = \text{cost}$  delle piste del *pot*.
2. Due g.d.l. per ciascun *roller* (considerato sferico): rotazione attorno all'asse del *trunnion* e traslazione lungo lo stesso.
3. Lunghezza  $l = \text{cost}$  dell'albero calettato sullo *spider*.
4. Non si tengono in considerazione giochi tra gli accoppiamenti né la cedevolezza dei componenti.

## 2.2 Sistemi di riferimento

Per lo sviluppo analitico si definiscono tre sistemi di riferimento:

1.  $(X; Y; Z)$  terna cartesiana fissa, solidale al *pot*, in cui  $Z$  è proprio l'asse di rotazione (figura 2.2.1).
2.  $(X'; Y'; Z')$  terna cartesiana mobile, solidale allo *spider*, in cui  $Z'$  è proprio il suo asse e quindi dell'albero in quanto calettati con accoppiamento stabile (figura 2.2.1).
3.  $(\tilde{X}; \tilde{Y}; \tilde{Z})$  terna cartesiana mobile intermedia, con i tre assi paralleli a quelli della terna dello *spider* ma la cui origine giace sull'asse  $Z$  (figura 2.2.2).

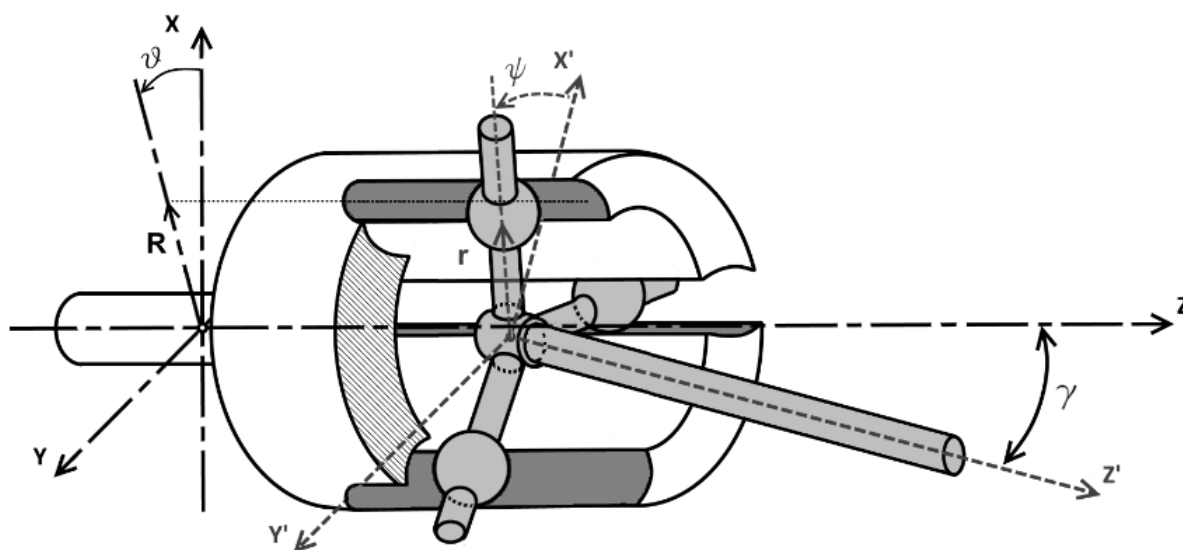


Figura 2.2.1: Sistemi di riferimento del *pot* e dello *spider*, con  $\theta$  che identifica l' $i$ -esima pista rispetto all'asse  $X$  e  $\psi$  che identifica l' $i$ -esimo *roller* rispetto all'asse  $X'$ .

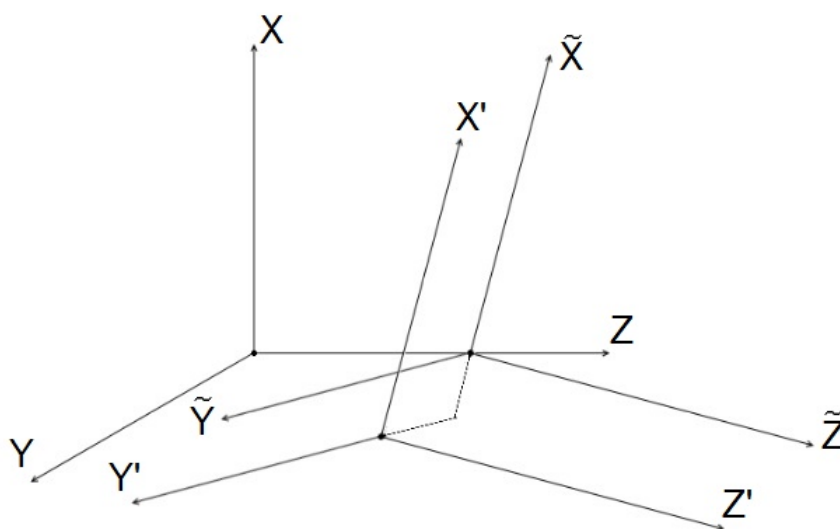


Figura 2.2.2: Sistemi di riferimento del *pot* dello *spider* e intermedio  $\tilde{X}\tilde{Y}\tilde{Z}$  la cui orientazione coincide quella del sistema  $X'Y'Z'$  ma con centro fisso sull'asse  $Z$ .

In particolare, la posizione azimutale delle piste e dei *roller* sarà riferita rispettivamente alla terna  $XYZ$  per mezzo dell'angolo  $\theta$  e alla terna  $X'Y'Z'$  tramite l'angolo  $\psi$ . Utilizzando la seguente notazione sarà possibile ricavare la relazione ingresso-uscita.

## 2.3 Matrici dei coseni direttori

Si definiscono i coseni direttori che identificano l'orientamento relativo tra i sistemi  $XYZ$  e  $X'Y'Z'$  e se ne costruisce la matrice espressa in funzione di due angoli  $\gamma$  e  $\tau$  descritti in seguito. Tale matrice permette successivamente di determinare i sistemi di trasformazione delle coordinate che permetteranno di arrivare alla relazione ingresso-uscita.

### 2.3.1 Coseni direttori

Per stabilire l'orientamento relativo tra *pot* e *spider* si identificano i 9 coseni direttori relativi all'angolo che ogni asse della terna solidale allo *spider* ( $X'; Y'; Z'$ ) ha con ciascun asse del sistema del *pot* ( $X; Y; Z$ ):

$$\begin{aligned} l_1; m_1; n_1 &\Rightarrow \cos \widehat{XX'}; \cos \widehat{YX'}; \cos \widehat{ZX'} \\ l_2; m_2; n_2 &\Rightarrow \cos \widehat{XY'}; \cos \widehat{YY'}; \cos \widehat{ZY'} \\ l_3; m_3; n_3 &\Rightarrow \cos \widehat{XZ'}; \cos \widehat{YZ'}; \cos \widehat{ZZ'} \end{aligned}$$

dove si stabilisce che:

$$\left\{ \begin{array}{l} l_3 = \cos \alpha \\ m_3 = \cos \beta \\ n_3 = \cos \gamma \end{array} \right. . \quad (2.3.1)$$

Con riferimento alla figura 2.3.1, costruita considerando solamente l'orientazione relativa tra il sistema  $XYZ$  e  $X'Y'Z'$ , è possibile esprimere gli angoli  $\alpha$  e  $\beta$  in funzione di  $\gamma$  e  $\tau$ . Dove quest'ultimo è inteso come angolo che si forma tra l'asse  $X$  e la proiezione dell'asse  $Z'$  sul piano  $XY$ .

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \sin \gamma \sin \left( \frac{\pi}{2} - \tau \right) = \sin \gamma \cos \tau \\ \cos \beta &= \cos \gamma \cos \left( \frac{\pi}{2} - \tau \right) = \sin \gamma \sin \tau \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

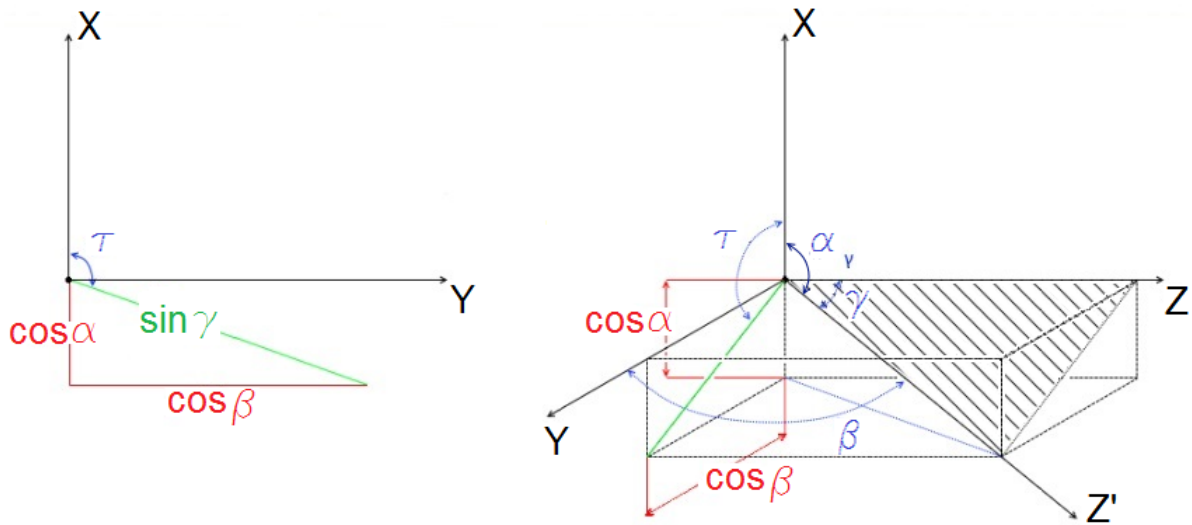


Figura 2.3.1: Rappresentazione degli angoli che permettono di definire i coseni direttori per l'asse  $Z'$ , l'origine del sistema di riferimento  $X'Y'Z'$  coincide con il sistema  $XYZ$  poiché in questa fase interessa solo l'orientazione relativa.

Risulta quindi:

$$\begin{cases} l_3 = \cos \tau \sin \gamma \\ m_3 = \sin \tau \sin \gamma \\ n_3 = \cos \gamma \end{cases} \quad (2.3.3)$$

I restanti coseni direttori verranno esplicitati per mezzo di passaggi algebrici. In particolare l'autore dell'articolo [1] pone, allo scopo di semplificare la trattazione, che l'asse  $Y'$  sia sempre parallelo alla perpendicolare che gli assi  $Z$  e  $Z'$  hanno in comune. Quanto appena scritto si traduce in:

$$n_2 = 0$$

Stabilito questo, considerando le condizioni di ortogonalità si può scrivere:

$$l_i l_j + m_i m_j + n_i n_j = 0$$

da cui deriva:

$$\begin{cases} l_1 l_2 + m_1 m_2 = 0 & (i) \\ l_1 l_3 + m_1 m_3 + n_1 n_3 = 0 & (ii) \\ l_2 l_3 + m_2 m_3 = 0 & (iii) \end{cases} \quad (2.3.4)$$

sostituendo i termini di 2.3.3 nella (iii) di 2.3.4 si ricava:

$$(iii) \quad l_2 \cos \tau \sin \gamma + m_2 \sin \tau \sin \gamma = 0 \Rightarrow l_2 = -m_2 \frac{\sin \tau}{\cos \tau}$$

considerando che:

$$l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 = 1$$

è possibile ricavare:

$$l_2^2 + m_2^2 = 1 \Rightarrow m_2^2 \frac{\sin^2 \tau}{\cos^2 \tau} + m_2^2 = 1 \Rightarrow m_2 = \pm \cos \tau$$

per la scelta dell'orientazione dei due sistemi di riferimento (vedi la figura 2.3.2) si intuisce che nell'ultima relazione scritta il segno da considerare sia quello negativo in quanto il coseno di  $\tau$  è sicuramente negativo mentre  $m_2 = \cos \widehat{YY'}$  risulterebbe positivo, per la coerenza dei segni risulta:

$$\begin{cases} l_2 = \sin \tau \\ m_2 = -\cos \tau \\ n_2 = 0 \end{cases}$$

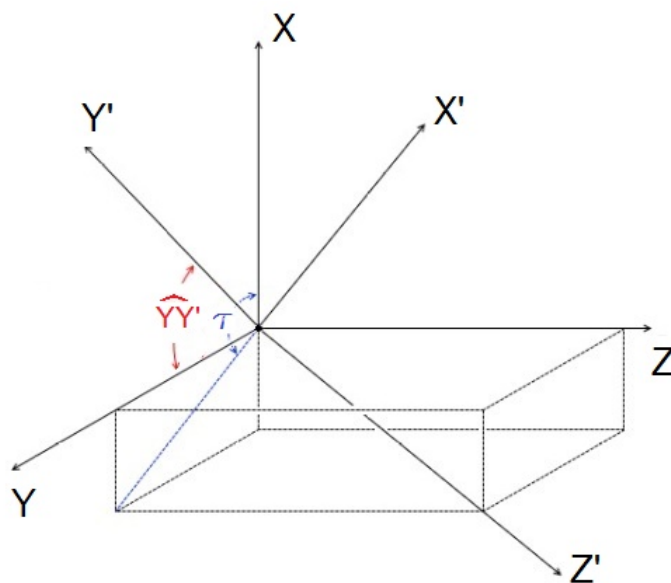


Figura 2.3.2: Correlazione del coseno direttore  $m_2$  con l'angolo  $\tau$ .

sviluppando l'equazione (i) di 2.3.4 risulta:

$$l_1 \sin \tau - m_1 \cos \tau = 0 \Rightarrow l_1 = m_1 \frac{\cos \tau}{\sin \tau}$$

e sostituendola nella (ii):

$$m_1 \frac{\cos \tau}{\sin \tau} \cos \tau \sin \gamma + m_1 \sin \tau \sin B\gamma + n_1 \cos \gamma = 0$$

$$m_1 \sin \gamma \left( \frac{1}{\sin \tau} \right) + n_1 \cos \gamma = 0$$

$$n_1 = -m_1 \frac{\sin \gamma}{\sin \tau \cos \gamma}$$

analogamente a prima si calcola:

$$l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1$$

$$m_1^2 \left( \frac{\cos^2 \tau}{\sin^2 \tau} + 1 + \frac{\sin^2 \gamma}{\sin^2 \tau \cos^2 \gamma} \right) = 1$$

$$m_1^2 \left( \frac{\cos^2 \tau \cos^2 \gamma + \sin^2 \tau \cos^2 \gamma + \sin^2 \gamma}{\sin^2 \tau \cos^2 \gamma} \right) = 1$$

$$m_1^2 \left( \frac{1}{\sin^2 \tau \cos^2 \gamma} \right) = 1$$

$$m_1 = \pm \sin \tau \cos \gamma$$

Per la scelta dell'orientazione dei due sistemi di riferimento (vedi la figura 2.3.1) si intuisce che nell'ultima relazione il segno da considerare sia quello negativo in quanto  $m_1 = \cos \widehat{YX'}$  risulterebbe negativo essendo il coseno di un angolo ottuso.

Riassumendo si ha:

$$\begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \gamma \cos \tau & \sin \tau & \sin \gamma \cos \tau \\ -\cos \gamma \sin \tau & -\cos \tau & \sin \gamma \sin \tau \\ \sin \gamma & 0 & \cos \gamma \end{bmatrix} \quad (2.3.5)$$

che rappresenta la matrice dei coseni direttori riscritta in funzione di  $\gamma$  e  $\tau$ . Per mezzo di questa sarà possibile costruire i sistemi di trasformazione delle coordinate e ricavare la relazione ingresso-uscita e i moti dei vari componenti del giunto a tripode.

### 2.3.2 Sistemi di trasformazione delle coordinate

Dalla matrice dei coseni direttori, considerando la definizione dei coseni direttori e la figura 2.3.3, è possibile esplicitare 2 sistemi di trasformazione delle coordinate rispetto alla terna fissa  $XYZ$ .

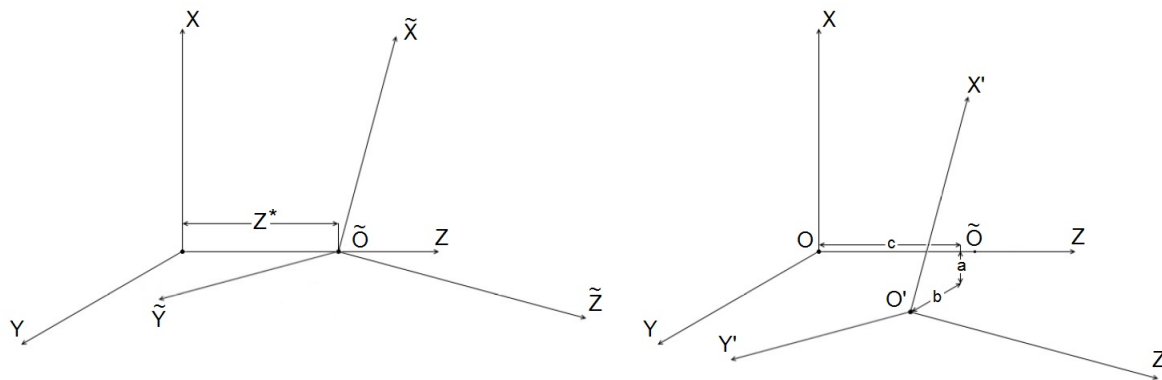


Figura 2.3.3: Definizione delle posizioni relative tra i sistemi di riferimento: tra XYZ e  $\tilde{X}\tilde{Y}\tilde{Z}$  tramite la quota  $Z^*$ ; tra XYZ e  $X'Y'Z'$  tramite le quote  $a, b$  e  $c$ .

$$\begin{cases} X' = l_1(X - a) + m_1(Y - b) + n_1(Z - c) & (i) \\ Y' = l_2(X - a) + m_2(Y - b) + n_2(Z - c) & (ii) \\ Z' = l_3(X - a) + m_3(Y - b) + n_3(Z - c) & (iii) \end{cases} \quad (2.3.6)$$

e

$$\begin{cases} \tilde{X} = l_1X + m_1Y + n_1(Z - Z^*) & (iv) \\ \tilde{Y} = l_2X + m_2Y + n_2(Z - Z^*) & (v) \\ \tilde{Z} = l_3X + m_3Y + n_3(Z - Z^*) & (vi) \end{cases} \quad (2.3.7)$$

È possibile costruire un terzo sistema di trasformazione delle coordinate che consente di esprimere la terna solidale allo *spider* tramite il sistema intermedio e l'eccentricità scomposta nelle due componenti  $e_x$  e  $e_y$ , si prenda quindi a riferimento la figura 2.3.4 sotto riportata.

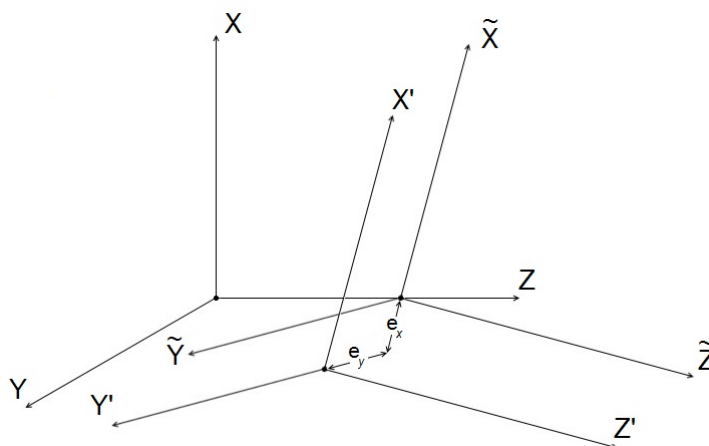


Figura 2.3.4: Definizione delle posizioni relative tra i sistemi di riferimento  $\tilde{X}\tilde{Y}\tilde{Z}$  e  $X'Y'Z'$  tramite le componenti  $e_x, e_y$  dell'eccentricità.



$$\begin{cases} X' = \tilde{X} - e_x \\ Y' = \tilde{Y} - e_y \\ Z' = \tilde{Z} \end{cases} \quad (2.3.8)$$

Allo scopo di semplificare i calcoli che seguiranno è bene riscrivere il sistema riportato in equazione 2.3.6. Per fare ciò si pone  $Z' = 0$  nell'equazione (iii) del sistema:

$$(iii) \quad 0 = \sin \gamma \cos \tau (X - a) + \sin \gamma \sin \tau (Y - b) + \cos \gamma (Z - c)$$

$$0 = \sin \gamma [(X - a) \cos \tau + (Y - b) \sin \tau] + \cos \gamma (Z - c)$$

$$(Z - c) = -\frac{\sin \gamma}{\cos \gamma} [(X - a) \cos \tau + (Y - b) \sin \tau]$$

sostituendola in (i) si ricava:

$$X' = -(X - a) \cos \gamma \cos \tau - (Y - b) \cos \gamma \sin \tau - \frac{\sin^2 \gamma}{\cos \gamma} [(X - a) \cos \tau + (Y - b) \sin \tau]$$

$$X' = -[(X - a) \cos \tau + (Y - b) \sin \tau] \left( \frac{\cos^2 \gamma + \sin^2 \gamma}{\cos \gamma} \right)$$

$$X' = -\frac{[(X - a) \cos \tau + (Y - b) \sin \tau]}{\cos \gamma}$$

quindi il sistema risulta:

$$\begin{cases} X' = -\frac{[(X - a) \cos \tau + (Y - b) \sin \tau]}{\cos \gamma} & (I) \\ Y' = (X - a) \sin \tau - (Y - b) \cos \tau & (II) \\ Z' = 0 & (III) \end{cases} \quad (2.3.9)$$

Analogamente per riscrivere il sistema di equazione 2.3.7 si pone  $\tilde{Z} = 0$  nella equazione (vi) del sistema:

$$(vi) \quad 0 = -X \sin \gamma \cos \tau - Y \sin \gamma \sin \tau + (Z - Z^*) \cos \gamma$$

$$0 = \sin \gamma (X \cos \tau + Y \sin \tau) + \cos \gamma (Z - Z^*)$$

$$(Z - Z^*) = -\frac{\sin \gamma}{\cos \gamma} (X \cos \tau + Y \sin \tau)$$

sostituendola in (iv) si ricava:

$$\tilde{X} = -X \cos \gamma \cos \tau - Y \cos \gamma \sin \tau - \frac{\sin^2 \gamma}{\cos \gamma} (X \cos \tau + Y \sin \tau)$$

$$\tilde{X} = -(X \cos \tau + Y \sin \tau) \left( \frac{\cos^2 \gamma + \sin^2 \gamma}{\cos \gamma} \right)$$

$$\tilde{X} = -\frac{(X \cos \tau + Y \sin \tau)}{\cos \gamma}$$

quindi il sistema 2.3.7 risulta:

$$\begin{cases} \tilde{X} = -\frac{(X \cos \tau + Y \sin \tau)}{\cos \gamma} & (IV) \\ \tilde{Y} = X \sin \tau - Y \cos \tau & (V) \\ \tilde{Z} = 0 & (VI) \end{cases} \quad (2.3.10)$$

Il sistema di trasformazione delle coordinate 2.3.10 appena scritto è esattamente il sistema 2.3.7 riscritto in modo da semplificare i calcoli che seguiranno.

## 2.4 Relazione input-output

Dal secondo sistema di trasformazione delle coordinate 2.3.10 considerando le coordinate dell'*i*-esima pista e dell'*i*-esimo *roller*, dopo qualche passaggio algebrico si ottiene un'equazione che permette di identificare la posizione del *roller* *i*-esimo in funzione della sola rotazione in ingresso e dell'angolo di articolazione del giunto. Considerando la disposizione a 120° tra le piste e i *roller* si può passare alla relazione ingresso-uscita tra i due assi del giunto.

### 2.4.1 Posizione dei roller in funzione dell'angolo $\theta$

Per ricavare la relazione *input-output* è necessario correlare la posizione del centro del *roller* *i*-esimo alle rotazioni  $\theta$  e  $\psi$  del giunto, che rappresentano rispettivamente l'ingresso e l'uscita; quindi si pone:

$$\begin{cases} X_i = R \sin \theta_i \\ Y_i = R \sin \theta_i \\ Z_i = 0 \end{cases} ; \begin{cases} X'_i = r_i \cos \psi_i \\ Y'_i = r_i \sin \psi_i \\ Z'_i = 0 \end{cases} \quad (2.4.1)$$

da cui, considerando (IV) e (V) di 2.3.10 e l'equazione 2.3.8, si ricava:

$$\begin{cases} X'_i = -\frac{(X_i \cos \tau + Y_i \sin \tau)}{\cos \gamma} - e_x ; \\ Y'_i = X_i \sin \tau - Y_i \cos \tau - e_y \end{cases} \quad (2.4.2)$$

$$\begin{cases} r_i \cos \psi_i = -\frac{R(\cos \theta_i \cos \tau + \sin \theta_i \sin \tau)}{\cos \gamma} - e_x \\ r_i \sin \psi_i = -R(\sin \theta_i \cos \tau - \sin \tau \cos \theta_i) - e_y \end{cases} \quad (2.4.3)$$

che si può riscrivere:

$$\tan \psi_i = \frac{r_i \sin \psi_i}{r_i \cos \psi_i} = \frac{[R(\sin \theta_i \cos \tau - \cos \theta_i \sin \tau) + e_y]}{\left[ \frac{R(\cos \theta_i \cos \tau - \sin \theta_i \sin \tau)}{\cos \gamma} - e_x \right]} \quad (2.4.4)$$

$$\tan \psi_i = \frac{[R(\sin \theta_i \cos \tau - \cos \theta_i \sin \tau) \cos \gamma + e_y \cos \gamma]}{[R(\cos \theta_i \cos \tau - \sin \theta_i \sin \tau) - e_x \cos \gamma]} \quad (2.4.5)$$

che permette di identificare la posizione angolare dell'*i*-esimo *roller* in funzione della posizione angolare della pista corrispondente e dell'angolo di articolazione del giunto.

## 2.4.2 Relazione ingresso-uscita

Il giunto preso in esame è un tripode, di conseguenza si avrà sia sul *pot* che sullo *spider* una disposizione a 120° degli elementi attivi. Vale pertanto quanto segue:

$$\theta_i \begin{cases} \theta_1 = \theta \\ \theta_2 = \theta + 120 \\ \theta_3 = \theta + 240 \end{cases} \quad (2.4.6)$$

$$\psi_i \begin{cases} \psi_1 = \psi \\ \psi_2 = \psi + 120 \\ \psi_3 = \psi + 240 \end{cases} \quad (2.4.7)$$

in questo modo è possibile scrivere le relazioni ingresso uscita per ciascuna coppia pista-*roller* mantenendo le stesse variabili  $\theta$  e  $\psi$ .

### 2.4.2.1 Caso $i = 1$

Riscrivendo l'equazione 2.4.5 per la prima coppia pista-*roller* si ottiene:

$$\frac{\sin \psi}{\cos \psi} = \frac{[R(\sin \theta \cos \tau - \cos \theta \sin \tau) \cos \gamma + e_y \cos \gamma]}{[R(\cos \theta \cos \tau - \sin \theta \sin \tau) - e_x \cos \gamma]}$$

$$\begin{aligned} & [\sin \psi] [R(\cos \theta \cos \tau - \sin \theta \sin \tau) - e_x \cos \gamma] = \\ & = [\cos \psi] [R(\sin \theta \cos \tau - \cos \theta \sin \tau) \cos \gamma + e_y \cos \gamma] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& R \cos \theta \cos \tau \sin \psi - R \sin \theta \sin \tau \sin \psi + e_x \cos \gamma \sin \psi = \\
& = R \sin \theta \cos \tau \cos \psi - R \cos \theta \sin \tau \cos \psi + e_y \cos \gamma \cos \psi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R \{ \cos \theta \cos \tau \sin \psi - \sin \theta \sin \tau \sin \psi - \sin \theta \cos \tau \cos \psi + \cos \theta \sin \tau \cos \psi \} = \\
= -\cos \gamma (e_x \sin \psi - e_y \cos \psi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R \{ \cos \tau (\cos \theta \sin \psi - \cos \gamma \sin \theta \cos \psi) + \sin \tau (\sin \theta \sin \psi + \cos \gamma \cos \theta \cos \psi) \} \\
= -\cos \gamma (e_x \sin \psi - e_y \cos \psi) \quad (2.4.8)
\end{aligned}$$

#### 2.4.2.2 Caso i = 2

$$\frac{\sin(\psi + 120)}{\cos(\psi + 120)} = \frac{[R(\sin(\theta + 120)\cos\tau - \cos(\theta + 120)\sin\tau)\cos\gamma + e_y\cos\gamma]}{[R(\cos(\theta + 120)\cos\tau + \sin(\theta + 120)\sin\tau) - e_x\cos\gamma]}$$

$$\begin{aligned}
\{ \sin(\psi + 120) \} \{ R[\cos(\theta + 120)\cos\tau + \sin(\theta + 120)\sin\tau] + e_x\cos\gamma \} = \\
= \{ \cos(\psi + 120) \} \{ R[\sin(\theta + 120)\cos\tau - \cos(\theta + 120)\sin\tau]\cos\gamma + e_y\cos\gamma \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& R \{ \sin(\psi + 120) [\cos\tau \cos(\theta + 120) + \sin\tau \sin(\theta + 120)] + \\
& - \cos(\psi + 120) [\cos\tau \sin(\theta + 120) - \sin\tau \cos(\theta + 120)] \cos\gamma \} = \\
& = e_y \cos\gamma \cos(\psi + 120) - e_x \cos\gamma \sin(\psi + 120)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R \left\{ \underbrace{\cos\tau [\sin(\psi + 120)\cos(\theta + 120) - \cos(\psi + 120)\sin(\theta + 120)\cos\gamma]}_A + \right. \\
\left. + \underbrace{\sin\tau [\sin(\psi + 120)\sin(\theta + 120) - \cos(\psi + 120)\cos(\theta + 120)\cos\gamma]}_B \right\} = \quad (2.4.9) \\
= \underbrace{e_y \cos\gamma \cos(\psi + 120) - e_x \cos\gamma \sin(\psi + 120)}_C
\end{aligned}$$

Al fine di semplificare la trattazione, si considerino i tre singoli addendi dell'equazione 2.4.9, appena scritta.

**A:**

$$A = \cos\tau [\sin(\psi + 120)\cos(\theta + 120) - \cos(\psi + 120)\sin(\theta + 120)\cos\gamma]$$

sviluppando seni e coseni:

$$\begin{aligned}
&= \cos \tau [(\sin \psi \cos 120 + \cos \psi \sin 120) (\cos \theta \cos 120 - \sin \theta \sin 120) + \\
&\quad - (\cos \psi \cos 120 - \sin \psi \sin 120) (\sin \theta \cos 120 + \cos \theta \sin 120) \cos \gamma] \\
&= \cos \tau \left[ \left( -\frac{1}{2} \sin \psi + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \psi \right) \left( -\frac{1}{2} \cos \theta - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta \right) + \right. \\
&\quad \left. - \left( -\frac{1}{2} \cos \psi - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \psi \right) \left( -\frac{1}{2} \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta \right) \cos \gamma \right]
\end{aligned}$$

svolgendo i prodotti:

$$\begin{aligned}
&= \cos \tau \left[ \frac{1}{4} \sin \psi \cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{4} \sin \psi \sin \theta - \frac{\sqrt{3}}{4} \cos \psi \cos \theta - \frac{3}{4} \cos \psi \sin \theta + \right. \\
&\quad \left. - \cos \gamma \left( \frac{1}{4} \cos \psi \sin \theta - \frac{\sqrt{3}}{4} \cos \psi \cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{4} \sin \psi \sin \theta - \frac{3}{4} \sin \psi \cos \theta \right) \right]
\end{aligned}$$

che si può riscrivere come:

$$\begin{aligned}
&= \cos \tau \left[ \frac{3}{4} \sin \psi \cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{4} \sin \psi \sin \theta - \frac{\sqrt{3}}{4} \cos \psi \cos \theta - \frac{3}{4} \cos \psi \sin \theta - \frac{2}{4} \sin \psi \cos \theta + \right. \\
&\quad \left. - \cos \gamma \left( \frac{3}{4} \cos \psi \sin \theta - \frac{\sqrt{3}}{4} \cos \psi \cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{4} \sin \psi \sin \theta - \frac{3}{4} \sin \psi \cos \theta - \frac{2}{4} \cos \psi \sin \theta \right) \right]
\end{aligned}$$

moltiplicando per  $\frac{2}{\sqrt{3}}$  si ottiene:

$$\begin{aligned}
&= \cos \tau \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \psi \cos \theta + \frac{1}{2} \sin \psi \sin \theta - \frac{1}{2} \cos \psi \cos \theta - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \psi \sin \theta - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \psi \cos \theta + \right. \\
&\quad \left. - \cos \gamma \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \psi \sin \theta - \frac{1}{2} \cos \psi \cos \theta + \frac{1}{2} \sin \psi \sin \theta - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \psi \cos \theta - \frac{\sqrt{3}}{3} \cos \psi \sin \theta \right) \right]
\end{aligned}$$

raccogliendo a fattori comuni:

$$\begin{aligned}
&= \cos \tau \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} (\sin \psi \cos \theta - \cos \psi \sin \theta) - \frac{1}{2} (\cos \psi \cos \theta - \sin \psi \sin \theta) - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \psi \cos \theta + \right. \\
&\quad \left. - \cos \gamma \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} (\sin \psi \cos \theta - \cos \psi \sin \theta) - \frac{1}{2} (\cos \psi \cos \theta - \sin \psi \sin \theta) - \frac{\sqrt{3}}{3} \cos \psi \sin \theta \right) \right]
\end{aligned}$$

quindi:

$$\begin{aligned}
&= \cos \tau \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} \sin (\psi - \theta) - \frac{1}{2} \cos (\psi + \theta) - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \psi \cos \theta + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin (\psi - \theta) \cos \gamma + \frac{1}{2} \cos (\psi + \theta) \cos \gamma + \frac{\sqrt{3}}{3} \cos \psi \sin \theta \cos \gamma \right]
\end{aligned}$$

raccogliendo a fattor comune:

$$\begin{aligned}
A = \frac{1}{2} \cos \tau \left[ \sqrt{3} (1 + \cos \gamma) \sin (\psi - \theta) - (1 - \cos \gamma) \cos (\psi + \theta) \right] + \\
- \frac{\sqrt{3}}{3} \cos \tau \sin \psi \cos \theta + \cos \tau \frac{\sqrt{3}}{3} \cos \psi \sin \theta \cos \gamma
\end{aligned} \tag{2.4.10}$$

**B:**

$$\begin{aligned}
B &= \sin \tau [\sin (\psi + 120) \sin (\theta + 120) + \cos (\psi + 120) \cos (\theta + 120) \cos \gamma] \\
&= \sin \tau [(\sin \psi \cos 120 + \cos \psi \sin 120) (\sin \theta \cos 120 + \cos \theta \sin 120) + \\
&\quad + (\cos \psi \cos 120 - \sin \psi \sin 120) (\cos \theta \cos 120 - \sin \theta \sin 120) \cos \gamma] \\
&= \sin \tau \left[ \left( -\frac{1}{2} \sin \psi + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \psi \right) \left( -\frac{1}{2} \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta \right) + \right. \\
&\quad \left. + \left( -\frac{1}{2} \cos \psi - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \psi \right) \left( -\frac{1}{2} \cos \theta - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta \right) \cos \gamma \right] \\
&= \sin \tau \left[ \frac{1}{4} \sin \psi \sin \theta - \frac{\sqrt{3}}{4} \sin \psi \cos \theta - \frac{\sqrt{3}}{4} \cos \psi \sin \theta + \frac{3}{4} \cos \psi \cos \theta + \right. \\
&\quad \left. + \cos \gamma \left( \frac{1}{4} \cos \psi \cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{4} \cos \psi \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{4} \sin \psi \cos \theta + \frac{3}{4} \sin \psi \sin \theta \right) \right] \\
&= \sin \tau \left[ \frac{3}{4} \sin \psi \sin \theta - \frac{\sqrt{3}}{4} \sin \psi \cos \theta - \frac{\sqrt{3}}{4} \cos \psi \sin \theta + \frac{3}{4} \cos \psi \cos \theta - \frac{2}{4} \sin \psi \sin \theta + \right. \\
&\quad \left. + \cos \gamma \left( \frac{3}{4} \cos \psi \cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{4} \cos \psi \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{4} \sin \psi \cos \theta + \frac{3}{4} \sin \psi \sin \theta - \frac{2}{4} \cos \psi \cos \theta \right) \right]
\end{aligned}$$

moltiplicando per  $\frac{2}{\sqrt{3}}$  si ottiene:

$$\begin{aligned}
&= \sin \tau \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \psi \sin \theta - \frac{1}{2} \sin \psi \cos \theta - \frac{1}{2} \cos \psi \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \psi \cos \theta - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \psi \sin \theta + \right. \\
&\quad \left. + \cos \gamma \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \psi \cos \theta + \frac{1}{2} \cos \psi \sin \theta + \frac{1}{2} \sin \psi \cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \psi \sin \theta - \frac{\sqrt{3}}{3} \cos \psi \cos \theta \right) \right] \\
&= \sin \tau \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} (\cos \psi \cos \theta + \sin \psi \sin \theta) - \frac{1}{2} (\sin \psi \cos \theta + \cos \psi \sin \theta) - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \psi \sin \theta + \right. \\
&\quad \left. + \cos \gamma \left( \frac{\sqrt{3}}{2} (\cos \psi \cos \theta + \sin \psi \sin \theta) + \frac{1}{2} (\sin \psi \cos \theta - \cos \psi \sin \theta) - \frac{\sqrt{3}}{3} \cos \psi \cos \theta \right) \right] \\
&= \sin \tau \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} \cos (\psi - \theta) - \frac{1}{2} \sin (\psi + \theta) - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \psi \sin \theta + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos (\psi - \theta) \cos \gamma + \frac{1}{2} \sin (\psi + \theta) \cos \gamma - \frac{\sqrt{3}}{3} \cos \psi \cos \theta \cos \gamma \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B &= \frac{1}{2} \sin \tau \left[ \sqrt{3} (1 + \cos \gamma) \cos (\psi - \theta) - (1 - \cos \gamma) \sin (\psi + \theta) \right] + \\
&\quad - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \tau \sin \psi \sin \theta - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \tau \cos \psi \cos \theta \cos \gamma
\end{aligned} \tag{2.4.11}$$

**C:**

$$C = e_y \cos \gamma \cos (\psi + 120) - e_x \cos \gamma \sin (\psi + 120)$$

$$= e_y \cos \gamma (\cos \psi \cos 120 - \sin \psi \sin 120) - e_x \cos \gamma (\sin \psi \cos 120 + \cos \psi \sin 120)$$

$$\begin{aligned}
 &= e_y \cos \gamma \left( -\frac{1}{2} \cos \psi - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \psi \right) - e_x \cos \gamma \left( -\frac{1}{2} \sin \psi + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \psi \right) \\
 &= -\frac{1}{2} e_y \cos \gamma \cos \psi - \frac{\sqrt{3}}{2} e_y \cos \gamma \sin \psi + \frac{1}{2} e_x \cos \gamma \sin \psi - \frac{\sqrt{3}}{2} e_x \cos \gamma \cos \psi
 \end{aligned}$$

moltiplicando per  $\frac{2}{\sqrt{3}}$  si ottiene:

$$= -\frac{\sqrt{3}}{3} e_y \cos \gamma \cos \psi - e_y \cos \gamma \sin \psi + \frac{\sqrt{3}}{3} e_x \cos \gamma \sin \psi - e_x \cos \gamma \cos \psi$$

quindi:

$$= -\cos \gamma (e_x \cos \psi + e_y \sin \psi) + \frac{\sqrt{3}}{3} \cos \gamma (e_x \sin \psi - e_y \cos \psi) \quad (2.4.12)$$

Sostituendo 2.4.10, 2.4.11, 2.4.12 in 2.4.9 si ricava:

$$\begin{aligned}
 &\frac{R}{2} \left\{ \cos \tau \left[ \sqrt{3} (1 + \cos \gamma) \sin (\psi - \theta) - (1 - \cos \gamma) \cos (\psi + \theta) \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \sin \tau \left[ \sqrt{3} (1 + \cos \gamma) \cos (\psi - \theta) - (1 - \cos \gamma) \sin (\psi + \theta) \right] \right\} \\
 &\quad + R \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{3} \cos \tau \sin \psi \cos \theta + \cos \tau \frac{\sqrt{3}}{3} \cos \psi \sin \theta \cos \gamma + \right. \\
 &\quad \left. \frac{-\frac{\sqrt{3}}{3} \sin \tau \sin \psi \sin \theta - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \tau \cos \psi \cos \theta \cos \gamma}{3} \right\} = \quad (2.4.13) \\
 &= -\cos \gamma (e_x \cos \psi + e_y \sin \psi) + \frac{\sqrt{3}}{3} \cos \gamma (e_x \sin \psi - e_y \cos \psi)
 \end{aligned}$$

allo scopo di semplificare quanto appena ottenuto, si consideri l'addendo sottolineato in equazione 2.4.13, indicato in seguito con la lettera  $D$ :

**D:**

$$\begin{aligned}
 D = R \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{3} \cos \tau \sin \psi \cos \theta + \cos \tau \frac{\sqrt{3}}{3} \cos \psi \sin \theta \cos \gamma + \right. \\
 \left. -\frac{\sqrt{3}}{3} \sin \tau \sin \psi \sin \theta - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \tau \cos \psi \cos \theta \cos \gamma \right\}
 \end{aligned}$$

ma da eq. 2.4.1 si ricava che  $\cos \theta = \frac{X}{R}$ ;  $\sin \theta = \frac{Y}{R}$ , quindi sostituendo:

$$= R \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{3} \cos \tau \sin \psi \frac{X}{R} + \cos \tau \frac{\sqrt{3}}{3} \cos \psi \frac{Y}{R} \cos \gamma - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \tau \sin \psi \frac{Y}{R} - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \tau \cos \psi \frac{X}{R} \cos \gamma \right\}$$

Raccogliendo a fattor comune si ha:

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} \left\{ -\sin \psi (X \cos \tau + Y \sin \tau) - \cos \psi (X \cos \gamma \sin \tau - Y \cos \gamma \cos \tau) \right\}$$

che può essere riscritta nel seguente modo:

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} \left\{ -\sin \psi \frac{(X \cos \tau + Y \sin \tau)}{\cos \gamma} \cos \gamma - \cos \psi (X \sin \tau - Y \cos \tau) \cos \gamma \right\}$$

considerando l'equazione 2.3.10, riconosciamo i termini  $\tilde{X}$  e  $\tilde{Y}$ , dunque diventa:

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} \cos \gamma \left\{ \tilde{X} \sin \psi - \tilde{Y} \cos \psi \right\}$$

dal terzo sistema di trasformazione delle coordinate, eq. 2.3.8 si ricava  $\tilde{X} = e_x + X'$  e  $\tilde{Y} = e_y + Y'$  che sostituendo danno:

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} \cos \gamma \{ e_x \sin \psi + X' \sin \psi - e_y \cos \psi - Y' \cos \psi \}$$

che, considerando ancora l'eq. 2.4.1, sostituendo  $X' = r \cos \psi$  e  $Y' = r \sin \psi$  diventa:

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} \cos \gamma \{ e_x \sin \psi + \cancel{r \cos \psi \sin \psi} - e_y \cos \psi - \cancel{r \sin \psi \cos \psi} \}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} \cos \gamma \{ e_x \sin \psi - e_y \cos \psi \}$$

In definitiva quindi si ottiene:

$$\begin{aligned} & \frac{R}{2} \left\{ \cos \tau \left[ \sqrt{3} (1 + \cos \gamma) \sin (\psi - \theta) - (1 - \cos \gamma) \cos (\psi + \theta) \right] + \right. \\ & \left. + \sin \tau \left[ \sqrt{3} (1 + \cos \gamma) \cos (\psi - \theta) - (1 - \cos \gamma) \sin (\psi + \theta) \right] + \right. \\ & \left. + \frac{\sqrt{3}}{3} \cos \gamma (e_x \sin \psi - e_y \cos \psi) \right\} = -\cos \gamma (e_x \cos \psi + e_y \sin \psi) + \frac{\sqrt{3}}{3} \cos \gamma (e_x \sin \psi - e_y \cos \psi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{R}{2} \left\{ \cos \tau \left[ \sqrt{3} (1 + \cos \gamma) \sin (\psi - \theta) - (1 - \cos \gamma) \cos (\psi + \theta) \right] + \right. \\ & \left. + \sin \tau \left[ \sqrt{3} (1 + \cos \gamma) \cos (\psi - \theta) - (1 - \cos \gamma) \sin (\psi + \theta) \right] \right\} = \\ & = -\cos \gamma (e_x \cos \psi + e_y \sin \psi) \end{aligned} \quad (2.4.14)$$

### 2.4.2.3 Caso i = 3

$$\frac{\sin (\psi + 240)}{\cos (\psi + 240)} = \frac{[R (\sin (\theta + 240) \cos \tau - \cos (\theta + 240) \sin \tau) \cos \gamma + e_y \cos \gamma]}{[R (\cos (\theta + 240) \cos \tau + \sin (\theta + 240) \sin \tau) - e_x \cos \gamma]}$$

$$\begin{aligned} & \{ \sin (\psi + 240) \} \{ R [\cos (\theta + 240) \cos \tau + \sin (\theta + 240) \sin \tau] + e_x \cos \gamma \} = \\ & = \{ \cos (\psi + 240) \} \{ R [\sin (\theta + 240) \cos \tau - \cos (\theta + 240) \sin \tau] \cos \gamma + e_y \cos \gamma \} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& R\left\{\sin(\psi + 240) [\cos \tau \cos(\theta + 240) + \sin \tau \sin(\theta + 240)] + \right. \\
& \left. - \cos(\psi + 240) [\cos \tau \sin(\theta + 240) - \sin \tau \cos(\theta + 240)] \cos \gamma\right\} = \\
& \quad = e_y \cos \gamma \cos(\theta + 240) - e_x \cos \gamma \sin(\theta + 240) \\
& R\left\{\underbrace{\cos \tau [\sin(\psi + 240) \cos(\theta + 240) - \cos(\psi + 240) \sin(\theta + 240) \cos \gamma]}_E + \right. \\
& \left. + \underbrace{\sin \tau [\sin(\psi + 240) \sin(\theta + 240) + \cos(\psi + 240) \cos(\theta + 240) \cos \gamma]}_F\right\} = \quad (2.4.15) \\
& \quad = \underbrace{e_y \cos \gamma \cos(\psi + 240) - e_x \cos \gamma \sin(\psi + 240)}_G
\end{aligned}$$

Si considerino tre singoli addendi dell'equazione 2.4.15, appena scritta.

**E:**

$$E = \cos \tau [\sin(\psi + 240) \cos(\theta + 240) - \cos(\psi + 240) \sin(\theta + 240) \cos \gamma]$$

sviluppando seni e coseni:

$$\begin{aligned}
& = \cos \tau [(\sin \psi \cos 240 + \cos \psi \sin 240) (\cos \theta \cos 240 - \sin \theta \sin 240) + \\
& \quad - (\cos \psi \cos 240 - \sin \psi \sin 240) (\sin \theta \cos 240 + \cos \theta \sin 240) \cos \gamma] \\
& = \cos \tau \left[ \left( -\frac{1}{2} \sin \psi - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \psi \right) \left( -\frac{1}{2} \cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta \right) + \right. \\
& \quad \left. - \left( -\frac{1}{2} \cos \psi + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \psi \right) \left( -\frac{1}{2} \sin \theta - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta \right) \cos \gamma \right]
\end{aligned}$$

svolgendo i prodotti:

$$\begin{aligned}
& = \cos \tau \left[ \frac{1}{4} \sin \psi \cos \theta - \frac{\sqrt{3}}{4} \sin \psi \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{4} \cos \psi \cos \theta - \frac{3}{4} \cos \psi \sin \theta + \right. \\
& \quad \left. - \cos \gamma \left( \frac{1}{4} \cos \psi \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{4} \cos \psi \cos \theta - \frac{\sqrt{3}}{4} \sin \psi \sin \theta - \frac{3}{4} \sin \psi \cos \theta \right) \right]
\end{aligned}$$

che si può riscrivere come:

$$\begin{aligned}
& = \cos \tau \left[ \frac{3}{4} \sin \psi \cos \theta - \frac{\sqrt{3}}{4} \sin \psi \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{4} \cos \psi \cos \theta - \frac{3}{4} \cos \psi \sin \theta - \frac{2}{4} \sin \psi \cos \theta + \right. \\
& \quad \left. - \cos \gamma \left( \frac{3}{4} \cos \psi \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{4} \cos \psi \cos \theta - \frac{\sqrt{3}}{4} \sin \psi \sin \theta - \frac{3}{4} \sin \psi \cos \theta - \frac{2}{4} \cos \psi \sin \theta \right) \right]
\end{aligned}$$

moltiplicando per  $\frac{2}{\sqrt{3}}$  si ottiene:

$$= \cos \tau \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \psi \cos \theta - \frac{1}{2} \sin \psi \sin \theta + \frac{1}{2} \cos \psi \cos \theta - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \psi \sin \theta - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \psi \cos \theta + \right. \\ \left. - \cos \gamma \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \psi \sin \theta + \frac{1}{2} \cos \psi \cos \theta - \frac{1}{2} \sin \psi \sin \theta - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \psi \cos \theta - \frac{\sqrt{3}}{3} \cos \psi \sin \theta \right) \right]$$

raccogliendo a fattori comuni:

$$= \cos \tau \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} (\sin \psi \cos \theta - \cos \psi \sin \theta) + \frac{1}{2} (\cos \psi \cos \theta - \sin \psi \sin \theta) - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \psi \cos \theta + \right. \\ \left. - \cos \gamma \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} (\sin \psi \cos \theta - \cos \psi \sin \theta) + \frac{1}{2} (\cos \psi \cos \theta - \sin \psi \sin \theta) - \frac{\sqrt{3}}{3} \cos \psi \sin \theta \right) \right]$$

quindi:

$$= \cos \tau \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} \sin (\psi - \theta) + \frac{1}{2} \cos (\psi + \theta) - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \psi \cos \theta + \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin (\psi - \theta) \cos \gamma - \frac{1}{2} \cos (\psi + \theta) \cos \gamma + \frac{\sqrt{3}}{3} \cos \psi \sin \theta \cos \gamma \right]$$

raccogliendo a fattor comune:

$$= \frac{1}{2} \cos \tau \left[ \sqrt{3} (1 + \cos \gamma) \sin (\psi - \theta) + (1 - \cos \gamma) \cos (\psi + \theta) \right] + \quad (2.4.16) \\ - \frac{\sqrt{3}}{3} \cos \tau \sin \psi \cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{3} \cos \tau \cos \psi \sin \theta \cos \gamma$$

**F:**

$$F = \sin \tau [\sin (\psi + 240) \sin (\theta + 240) + \cos (\psi + 240) \cos (\theta + 240) \cos \gamma]$$

$$= \sin \tau [(\sin \psi \cos 240 + \cos \psi \sin 240) (\sin \theta \cos 240 + \cos \theta \sin 240) + \\ + (\cos \psi \cos 240 - \sin \psi \sin 240) (\cos \theta \cos 240 - \sin \theta \sin 240) \cos \gamma]$$

$$= \sin \tau \left[ \left( -\frac{1}{2} \sin \psi - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \psi \right) \left( -\frac{1}{2} \sin \theta - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta \right) + \right. \\ \left. + \left( -\frac{1}{2} \cos \psi + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \psi \right) \left( -\frac{1}{2} \cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta \right) \cos \gamma \right]$$

$$= \sin \tau \left[ \frac{1}{4} \sin \psi \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{4} \sin \psi \cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{4} \cos \psi \sin \theta + \frac{3}{4} \cos \psi \cos \theta + \right. \\ \left. + \cos \gamma \left( \frac{1}{4} \cos \psi \cos \theta - \frac{\sqrt{3}}{4} \cos \psi \sin \theta - \frac{\sqrt{3}}{4} \sin \psi \cos \theta + \frac{3}{4} \sin \psi \sin \theta \right) \right]$$

$$= \sin \tau \left[ \frac{3}{4} \sin \psi \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{4} \sin \psi \cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{4} \cos \psi \sin \theta + \frac{3}{4} \cos \psi \cos \theta - \frac{2}{4} \sin \psi \sin \theta + \right. \\ \left. + \cos \gamma \left( \frac{3}{4} \cos \psi \cos \theta - \frac{\sqrt{3}}{4} \cos \psi \sin \theta - \frac{\sqrt{3}}{4} \sin \psi \cos \theta + \frac{3}{4} \sin \psi \sin \theta - \frac{2}{4} \cos \psi \cos \theta \right) \right]$$

moltiplicando per  $\frac{2}{\sqrt{3}}$  si ottiene:

$$\begin{aligned}
&= \sin \tau \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \psi \sin \theta + \frac{1}{2} \sin \psi \cos \theta + \frac{1}{2} \cos \psi \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \psi \cos \theta - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \psi \sin \theta + \right. \\
&+ \left. \cos \gamma \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \psi \cos \theta - \frac{1}{2} \cos \psi \sin \theta - \frac{1}{2} \sin \psi \cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \psi \sin \theta - \frac{\sqrt{3}}{3} \cos \psi \cos \theta \right) \right] \\
&= \sin \tau \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} (\cos \psi \cos \theta + \sin \psi \sin \theta) + \frac{1}{2} (\sin \psi \cos \theta + \cos \psi \sin \theta) - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \psi \sin \theta + \right. \\
&+ \left. \cos \gamma \left( \frac{\sqrt{3}}{2} (\cos \psi \cos \theta + \sin \psi \sin \theta) - \frac{1}{2} (\sin \psi \cos \theta - \cos \psi \sin \theta) - \frac{\sqrt{3}}{3} \cos \psi \cos \theta \right) \right] \\
&= \sin \tau \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} \cos (\psi - \theta) + \frac{1}{2} \sin (\psi + \theta) - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \psi \sin \theta + \right. \\
&+ \left. \frac{\sqrt{3}}{2} \cos (\psi - \theta) \cos \gamma - \frac{1}{2} \sin (\psi + \theta) \cos \gamma - \frac{\sqrt{3}}{3} \cos \psi \cos \theta \cos \gamma \right] \\
&= \frac{1}{2} \sin \tau \left[ \sqrt{3} (1 + \cos \gamma) \cos (\psi - \theta) - (1 - \cos \gamma) \sin (\psi + \theta) \right] + \\
&\quad - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \tau \sin \psi \sin \theta - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \tau \cos \psi \cos \theta \cos \gamma \tag{2.4.17}
\end{aligned}$$

**G:**

$$\begin{aligned}
G &= e_y \cos \gamma \cos (\psi + 240) - e_x \cos \gamma \sin (\psi + 240) \\
&= e_y \cos \gamma (\cos \psi \cos 240 - \sin \psi \sin 240) - e_x \cos \gamma (\sin \psi \cos 240 + \cos \psi \sin 240) \\
&= e_y \cos \gamma \left( -\frac{1}{2} \cos \psi + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \psi \right) - e_x \cos \gamma \left( -\frac{1}{2} \sin \psi - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \psi \right) \\
&= -\frac{1}{2} e_y \cos \gamma \cos \psi + \frac{\sqrt{3}}{2} e_y \cos \gamma \sin \psi + \frac{1}{2} e_x \cos \gamma \sin \psi + \frac{\sqrt{3}}{2} e_x \cos \gamma \cos \psi
\end{aligned}$$

moltiplicando per  $\frac{2}{\sqrt{3}}$  si ottiene:

$$= -\frac{\sqrt{3}}{3} e_y \cos \gamma \cos \psi + e_y \cos \gamma \sin \psi + \frac{\sqrt{3}}{3} e_x \cos \gamma \sin \psi + e_x \cos \gamma \cos \psi$$

quindi:

$$= \cos \gamma (e_x \cos \psi + e_y \sin \psi) + \frac{\sqrt{3}}{3} \cos \gamma (e_x \sin \psi - e_y \cos \psi) \tag{2.4.18}$$

Sostituendo 2.4.16, 2.4.17, 2.4.18 in 2.4.15 si ricava:

$$\begin{aligned}
& \frac{R}{2} \left\{ \cos \tau \left[ \sqrt{3} (1 + \cos \gamma) \sin (\psi - \theta) - (1 - \cos \gamma) \cos (\psi + \theta) \right] + \right. \\
& \quad \left. + \sin \tau \left[ \sqrt{3} (1 + \cos \gamma) \cos (\psi - \theta) - (1 - \cos \gamma) \sin (\psi + \theta) \right] \right\} \\
& \quad + R \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{3} \cos \tau \sin \psi \cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{3} \cos \tau \cos \psi \sin \theta \cos \gamma + \right. \\
& \quad \left. \frac{-\frac{\sqrt{3}}{3} \sin \tau \sin \psi \sin \theta - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \tau \cos \psi \cos \theta \cos \gamma}{=} \right\} = \\
& = -\cos \gamma (e_x \cos \psi + e_y \sin \psi) + \frac{\sqrt{3}}{3} \cos \gamma (e_x \sin \psi - e_y \cos \psi)
\end{aligned} \tag{2.4.19}$$

allo scopo di semplificare quanto appena ottenuto, si considera l'addendo sottolineato in equazione 2.4.19, indicato in seguito con la lettera  $H$ :

**H:**

$$\begin{aligned}
H = R \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{3} \cos \tau \sin \psi \cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{3} \cos \tau \cos \psi \sin \theta \cos \gamma + \right. \\
\left. -\frac{\sqrt{3}}{3} \sin \tau \sin \psi \sin \theta - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \tau \cos \psi \cos \theta \cos \gamma \right\}
\end{aligned}$$

ma da eq. 2.4.1 si ricava che  $\cos \theta = \frac{X}{R}$ ;  $\sin \theta = \frac{Y}{R}$ , quindi sostituendo:

$$= R \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{3} \cos \tau \sin \psi \frac{X}{R} + \frac{\sqrt{3}}{3} \cos \tau \cos \psi \frac{Y}{R} \cos \gamma - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \tau \sin \psi \frac{Y}{R} - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \tau \cos \psi \frac{X}{R} \cos \gamma \right\}$$

Raccogliendo a fattor comune si ha:

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} \left\{ -\sin \psi (X \cos \tau + Y \sin \tau) - \cos \psi (X \cos \gamma \sin \tau - Y \cos \gamma \cos \tau) \right\}$$

che può essere riscritta nel seguente modo:

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} \left\{ -\sin \psi \frac{(X \cos \tau + Y \sin \tau)}{\cos \gamma} \cos \gamma - \cos \psi (X \sin \tau - Y \cos \tau) \cos \gamma \right\}$$

considerando l'equazione 2.3.10, riconosciamo i termini  $\tilde{X}$  e  $\tilde{Y}$ , dunque diventa:

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} \cos \gamma \left\{ \tilde{X} \sin \psi - \tilde{Y} \cos \psi \right\}$$

dal terzo sistema di trasformazione delle coordinate, eq. 2.3.8 si ricava  $\tilde{X} = e_x + X'$  e  $\tilde{Y} = e_y + Y'$  che sostituendo danno:

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} \cos \gamma \left\{ e_x \sin \psi + X' \sin \psi - e_y \cos \psi - Y' \cos \psi \right\}$$

che, considerando ancora l'eq. 2.4.1, sostituendo  $X' = r \cos \psi$  e  $Y' = r \sin \psi$  diventa:

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{3}}{3} \cos \gamma \{e_x \sin \psi + \cancel{r \cos \psi \sin \psi} - e_y \cos \psi - \cancel{r \sin \psi \cos \psi}\} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{3} \cos \gamma \{e_x \sin \psi - e_y \cos \psi\}
\end{aligned}$$

In definitiva quindi si ottiene:

$$\begin{aligned}
&\frac{R}{2} \left\{ \cos \tau \left[ \sqrt{3} (1 + \cos \gamma) \sin (\psi - \theta) + (1 - \cos \gamma) \cos (\psi + \theta) \right] + \right. \\
&\quad \left. + \sin \tau \left[ \sqrt{3} (1 + \cos \gamma) \cos (\psi - \theta) + (1 - \cos \gamma) \sin (\psi + \theta) \right] \right\} \\
&+ \frac{\sqrt{3}}{3} \cos \gamma (e_x \sin \psi - e_y \cos \psi) = \cos \gamma (e_x \cos \psi + e_y \sin \psi) + \frac{\sqrt{3}}{3} \cos \gamma (e_x \sin \psi - e_y \cos \psi) \\
&\frac{R}{2} \left\{ \cos \tau \left[ \sqrt{3} (1 + \cos \gamma) \sin (\psi - \theta) + (1 - \cos \gamma) \cos (\psi + \theta) \right] + \right. \\
&\quad \left. + \sin \tau \left[ \sqrt{3} (1 + \cos \gamma) \cos (\psi - \theta) + (1 - \cos \gamma) \sin (\psi + \theta) \right] \right\} \quad (2.4.20) \\
&= \cos \gamma (e_x \cos \psi + e_y \sin \psi)
\end{aligned}$$

Per ottenere la relazione ingresso uscita sommiamo l'eq.2.4.14 con l'eq.2.4.20, ottenendo:

$$\frac{R}{2} \left\{ 2\sqrt{3} \cos \tau (1 + \cos \gamma) \sin (\psi - \theta) + 2\sqrt{3} \sin \tau (1 + \cos \gamma) \cos (\psi - \theta) \right\} = 0$$

$$\sqrt{3}R(1 + \cos \gamma) \{ \cos \tau \sin (\psi - \theta) + \sin \tau \cos (\psi - \theta) \} = 0$$

sicuramente  $R \neq 0$  e  $(1 + \cos \gamma) \neq 0$ , quindi:

$$\cos \tau \sin (\psi - \theta) + \sin \tau \cos (\psi - \theta) = 0$$

da cui si ricava:

$$\tan (\theta - \psi) = \tan \tau \quad (2.4.21)$$

L'equazione 2.4.21 rappresenta la relazione *input-output* e quindi fornisce indicazione sull'omocineticità del giunto. Da tale relazione si può concludere che se l'angolo  $\tau$  fosse nullo o pari a un multiplo intero di  $\pi$  il giunto sarebbe omocinetico. Prendendo in considerazione la figura 2.4.1 sottostante si vede che la condizione che permette di annullare la differenza tra ingresso e uscita è quella che prevede l'asse  $Z'$  contenuto nel piano  $XZ$ .

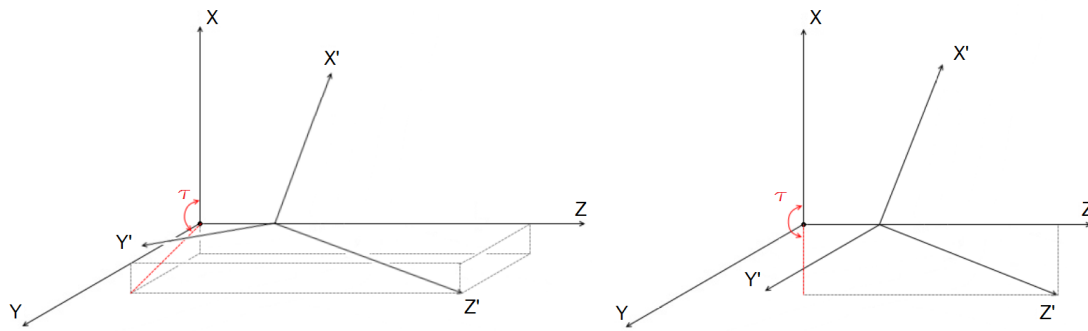


Figura 2.4.1: Condizioni sull'omocineticità: a sinistra l'orientazione è tale che  $\tan \tau \neq 0$ ; a destra l'asse  $Z'$  giace sul piano  $XZ$  quindi  $\tan \tau = 0$ .

Tale condizione può essere soddisfatta senza particolari sforzi in sede di progetto del *layout* della trasmissione, a patto che il centro dello *spider* resti all'interno del suddetto piano durante il moto. Nella sezione §2.5 che segue verrà analizzato se e in quali condizioni ciò si verifica.

## 2.5 Moto del centro dello Spider

Avendo ricavato la relazione ingresso-uscita è ora importante caratterizzare il moto dello *spider*. Considerando quindi la relazione 2.4.21 è possibile esplicitare il modulo dell'eccentricità  $e$  e definire il moto del centro dello *spider*, in riferimento al sistema fisso, scomposto in una componente lungo l'asse  $Z$  e in un moto su un piano ortogonale a tale asse.

### 2.5.1 Moto del centro dello spider in riferimento alla terna intermedia

Se si considera l'equazione 2.4.21, da questa si può ricavare:

$$\frac{\sin(\theta - \psi)}{\cos(\theta - \psi)} = \frac{\sin \tau}{\cos \tau}$$

$$\cos \tau = \sin \tau \frac{\cos(\theta - \psi)}{\sin(\theta - \psi)} = \sin \tau \frac{\cos \theta \cos \psi + \sin \theta \sin \psi}{\sin \theta \cos \psi - \cos \theta \sin \psi} \quad (2.5.1)$$

Allo scopo di ottenere la relazione sull'eccentricità, si prenda a riferimento l'equazione 2.4.8, nella quale si sostituisce la relazione appena ricavata 2.5.1:

$$R \left\{ \sin \tau \frac{\cos \theta \cos \psi + \sin \theta \sin \psi}{\sin \theta \cos \psi - \cos \theta \sin \psi} (\cos \theta \sin \psi - \cos \gamma \sin \theta \cos \psi) + \right. \\ \left. + \sin \tau (\sin \theta \sin \psi + \cos \gamma \cos \theta \cos \psi) \right\} = \\ = -\cos \gamma (e_x \sin \psi - e_y \cos \psi)$$

$$\frac{R \sin \tau}{\sin \theta \cos \psi - \cos \theta \sin \psi} \left\{ (\cos \theta \cos \psi + \sin \theta \sin \psi) (\cos \theta \sin \psi - \cos \gamma \sin \theta \cos \psi) + \right. \\ \left. + (\sin \theta \cos \psi - \cos \theta \sin \psi) (\sin \theta \sin \psi + \cos \gamma \cos \theta \cos \psi) \right\} = \\ = -\cos \gamma (e_x \sin \psi - e_y \cos \psi)$$

$$\frac{R \sin \tau}{\sin \theta \cos \psi - \cos \theta \sin \psi} \left\{ \cos^2 \theta \cos \psi \sin \psi - \cancel{\cos \gamma \cos^2 \psi \cos \theta \sin \theta} + \cancel{\sin^2 \psi \cos \theta \sin \theta} + \right. \\ \left. - \cos \gamma \sin^2 \theta \cos \psi \sin \psi + \sin^2 \theta \cos \psi \sin \psi + \right. \\ \left. + \cancel{\cos \gamma \cos^2 \psi \cos \theta \sin \theta} - \cancel{\sin^2 \psi \cos \theta \sin \theta} + \right. \\ \left. - \cos \gamma \cos^2 \theta \cos \psi \sin \psi \right\} = -\cos \gamma (e_x \sin \psi - e_y \cos \psi)$$

che si semplifica a:

$$\frac{R \sin \tau}{\sin (\theta - \psi)} \{ \cos \psi \sin \psi - \cos \gamma \cos \psi \sin \psi \} = -\cos \gamma (e_x \sin \psi - e_y \cos \psi)$$

dalla 2.4.21 si vede che  $\theta - \psi = \tau$ , quindi semplificando ulteriormente si arriva a:

$$R \cos \psi \sin \psi (1 - \cos \gamma) = -\cos \gamma (e_x \sin \psi - e_y \cos \psi)$$

$$-\frac{R (1 - \cos \gamma)}{2 \cos \gamma} \sin 2\psi = e_x \sin \psi - e_y \cos \psi \quad (2.5.2)$$

Analoghe operazioni sono da svolgere sull'equazione 2.4.14 e 2.4.20, che portano al medesimo risultato, in particolare, sostituendo l'equazione 2.5.1, nella 2.4.14 si ottiene:

$$\frac{R \sin \tau}{2 \sin \theta \cos \psi - \cos \theta \sin \psi} \left\{ (\cos \theta \cos \psi + \sin \theta \sin \psi) [\sqrt{3} (1 + \cos \gamma) \sin (\psi - \theta) + \right. \\ \left. - (1 - \cos \gamma) \cos (\psi + \theta)] + (\sin \theta \cos \psi - \cos \theta \sin \psi) [\sqrt{3} (1 + \cos \gamma) \cos (\psi - \theta) + \right. \\ \left. - (1 - \cos \gamma) \sin (\psi + \theta)] \right\} = -\cos \gamma (e_x \cos \psi + e_y \sin \psi)$$

$$\frac{R \sin \tau}{2 \sin(\theta - \psi)} \left\{ (\cos \theta \cos \psi + \sin \theta \sin \psi) [\sqrt{3}(1 + \cos \gamma) (\sin \psi \cos \theta - \cos \psi \sin \theta) - (1 - \cos \gamma) (\cos \psi \cos \theta - \sin \psi \sin \theta)] + (\sin \theta \cos \psi - \cos \theta \sin \psi) [\sqrt{3}(1 + \cos \gamma) (\cos \psi \cos \theta + \sin \psi \sin \theta) - (1 - \cos \gamma) (\sin \psi \cos \theta + \cos \psi \sin \theta)] \right\} = -\cos \gamma (e_x \cos \psi + e_y \sin \psi)$$

$$\frac{R \sin \tau}{2 \sin(\theta - \psi)} \left\{ \sqrt{3}(1 + \cos \gamma) \left( \overbrace{\cos^2 \theta \cos \psi \sin \psi} - \overbrace{\cos^2 \psi \cos \theta \sin \theta} + \overbrace{\sin^2 \psi \cos \theta \sin \theta} + \overbrace{-\sin^2 \theta \cos \psi \sin \psi} \right) - (1 - \cos \gamma) \left( \overbrace{\cos^2 \theta \cos^2 \psi} - \overbrace{\cos \theta \sin \theta \cos \psi \sin \psi} + \overbrace{\cos \theta \sin \theta \cos \psi \sin \psi} - \overbrace{\sin^2 \theta \sin^2 \psi} \right) + \sqrt{3}(1 + \cos \gamma) \left( \overbrace{\cos^2 \psi \cos \theta \sin \theta} + \overbrace{\sin^2 \theta \cos \psi \sin \psi} - \overbrace{\cos^2 \theta \cos \psi \sin \psi} - \overbrace{\sin^2 \psi \cos \theta \sin \theta} \right) - (1 - \cos \gamma) \left( \overbrace{\cos \theta \sin \theta \cos \psi \sin \psi} + \overbrace{\cos^2 \psi \sin^2 \theta} - \overbrace{\cos^2 \theta \sin^2 \psi} + \overbrace{-\cos \theta \sin \theta \cos \psi \sin \psi} \right) \right\} = -\cos \gamma (e_x \cos \psi + e_y \sin \psi)$$

semplificando i termini evidenziati si ottiene:

$$-\frac{R \sin \tau}{2 \sin(\theta - \psi)} (1 - \cos \gamma) (\cos^2 \theta \cos^2 \psi - \sin^2 \theta \sin^2 \psi + \cos^2 \psi \sin^2 \theta - \cos^2 \theta \sin^2 \psi) = -\cos \gamma (e_x \cos \psi + e_y \sin \psi)$$

$$-\frac{R \sin \tau}{2 \sin(\theta - \psi)} (1 - \cos \gamma) (\cos^2 \psi - \sin^2 \psi) = -\cos \gamma (e_x \cos \psi + e_y \sin \psi)$$

$$-\frac{R \sin \tau}{2 \sin(\theta - \psi)} (1 - \cos \gamma) \cos 2\psi = -\cos \gamma (e_x \cos \psi + e_y \sin \psi)$$

$$\frac{R (1 - \cos \gamma)}{2 \cos \gamma} \cos 2\psi = e_x \cos \psi + e_y \sin \psi \quad (2.5.3)$$

Mettendo a sistema le equazioni 2.5.2 e 2.5.3, è possibile risalire alle componenti dell'eccentricità e quindi al suo modulo:

$$\begin{cases} -\frac{R \sin \tau}{2 \sin(\theta - \psi)} \sin 2\psi = e_x \sin \psi - e_y \cos \psi & (I) \\ \frac{R (1 - \cos \gamma)}{2 \cos \gamma} \cos 2\psi = e_x \cos \psi + e_y \sin \psi & (II) \end{cases} \quad (2.5.4)$$

Dalla 2.5.4 (I) si esplicita  $e_x$ :



$$e_x = \frac{1}{\sin \psi} \left[ -\frac{R(1 - \cos \gamma)}{2 \cos \gamma} \sin 2\psi + e_y \cos \psi \right] \quad (2.5.5)$$

sostituendo in (II) si ha :

$$\frac{R(1 - \cos \gamma)}{2 \cos \gamma} \cos 2\psi = \frac{\cos \psi}{\sin \psi} \left[ -\frac{R(1 - \cos \gamma)}{2 \cos \gamma} \sin 2\psi + e_y \cos \psi \right] + e_y \sin \psi$$

$$\frac{R(1 - \cos \gamma)}{2 \cos \gamma} \left[ \cos 2\psi + \frac{\cos \psi}{\sin \psi} \sin 2\psi \right] = e_y \left[ \frac{\cos^2 \psi + \sin^2 \psi}{\sin \psi} \right]$$

$$e_y = \frac{R(1 - \cos \gamma)}{2 \cos \gamma} [\sin \psi \cos 2\psi + \cos \psi \sin 2\psi]$$

$$e_y = \frac{R(1 - \cos \gamma)}{2 \cos \gamma} \sin 3\psi \quad (2.5.6)$$

a sua volta sostituita in 2.5.5 si ricava:

$$e_x = \frac{1}{\sin \psi} \left[ -\frac{R(1 - \cos \gamma)}{2 \cos \gamma} \sin 2\psi + e_y \cos \psi \frac{R(1 - \cos \gamma)}{2 \cos \gamma} (\sin \psi \cos 2\psi + \cos \psi \sin 2\psi) \right]$$

$$e_x = \frac{1}{\sin \psi} \frac{R(1 - \cos \gamma)}{2 \cos \gamma} [-\sin 2\psi + \cos \psi \sin \psi \cos 2\psi + \cos \psi \cos \psi \sin 2\psi]$$

$$e_x = \frac{1}{\sin \psi} \frac{R(1 - \cos \gamma)}{2 \cos \gamma} [-2\cancel{\sin \psi} \cos \psi + 2 \cos^2 \psi \cancel{\sin \psi} \cos \psi - \cancel{\sin \psi} \cos \psi + 2 \cos^2 \psi \cos \psi \cancel{\sin \psi}]$$

semplificando:

$$\begin{aligned}
e_x &= \frac{R(1 - \cos \gamma)}{2 \cos \gamma} [-3 \cos \psi + \cos^3 \psi + 3 \cos^3 \psi] \\
&= \frac{R(1 - \cos \gamma)}{2 \cos \gamma} [-3 \cos \psi (1 - \cos^2 \psi) + \cos^3 \psi] \\
&= \frac{R(1 - \cos \gamma)}{2 \cos \gamma} [-3 \cos \psi \sin^2 \psi + \cos \psi \cos^2 \psi] \\
&= \frac{R(1 - \cos \gamma)}{2 \cos \gamma} [\cos \psi (\cos^2 \psi - \sin^2 \psi) - 2 \cos \psi \sin \psi \sin \psi] \\
e &= \frac{R(1 - \cos \gamma)}{2 \cos \gamma} [\cos \psi \cos 2\psi - \sin 2\psi \sin \psi]
\end{aligned}$$

quindi si ottiene:

$$e_x = \frac{R(1 - \cos \gamma)}{2 \cos \gamma} \cos 3\psi. \quad (2.5.7)$$

Ricapitolando dal sistema 2.5.4 si ricava:

$$\begin{cases} e_x = \frac{R(1 - \cos \gamma)}{2 \cos \gamma} \cos 3\psi \\ e_y = \frac{R(1 - \cos \gamma)}{2 \cos \gamma} \sin 3\psi \end{cases}, \quad (2.5.8)$$

ponendo:

$$e = \frac{R(1 - \cos \gamma)}{2 \cos \gamma} \quad (2.5.9)$$

si può scrivere:

$$\begin{cases} e_x = e \cos(3\psi + 2k\pi) \\ e_y = e \sin(3\psi + 2k\pi) \end{cases} \quad (2.5.10)$$

L'equazione 2.5.9 esprime il modulo dell'eccentricità in riferimento alla terna intermedia, mentre le equazioni 2.5.10 ne esprimono le componenti nel piano che, come si vede, hanno una certa periodicità. Stabilito il moto del centro dello *spider* in riferimento alla terna intermedia (equazione 2.5.10), si valuta in seguito il moto rispetto a quella fissa.

## 2.5.2 Moto del centro dello spider in riferimento alla terna fissa

Prima di sfruttare il sistema 2.5.10, è necessario esplicitare le componenti dell'eccentricità in funzione delle coordinate  $X, Y$  e degli offset  $a, b$ . Per fare ciò si considerano le equazioni 2.3.8, 2.3.9 e 2.3.10, dalle quali si ricava:

$$\begin{cases} -\frac{1}{\cos \gamma} [\cos \tau (X - a) + \sin \tau (Y - b)] = -\frac{1}{\cos \gamma} [X \cos \tau + Y \sin \tau] - e_x \\ (X - a) \sin \tau - (Y - b) \cos \tau = X \sin \tau - Y \cos \tau - e_y \end{cases}$$

da cui si ottiene:

$$\begin{cases} e_x = -\frac{1}{\cos \gamma} [a \cos \tau + b \sin \tau] \\ e_y = a \sin \tau - b \cos \tau \end{cases} .$$

Da quest'ultimo sistema è possibile esplicitare i due parametri di offset  $a$  e  $b$ , in particolare dalla seconda equazione si ha:

$$a = \frac{e_y + b \cos \tau}{\sin \tau}$$

che sostituita nella prima porta a:

$$e_x = -\frac{1}{\cos \gamma} \left[ \frac{e_y \cos \tau + b \cos^2 \tau + b \sin^2 \tau}{\sin \tau} \right]$$

da cui si può esplicitare la variabile  $b$ :

$$b = -(e_x \cos \gamma \sin \tau + e_y \cos \tau) \quad (2.5.11)$$

quindi la variabile  $a$  equivale a:

$$a = e_y \frac{1}{\sin \tau} - e_x \cos \tau \cos \gamma - e_y \frac{\cos^2 \tau}{\sin \tau}$$

$$a = e_y \frac{(1 - \cos^2 \tau)}{\sin \tau} - e_x \cos \tau \cos \gamma$$

$$a = e_y \sin \tau - e_x \cos \tau \cos \gamma \quad (2.5.12)$$

sostituendo l'equazione 2.5.10, si ottiene:

$$\begin{cases} a = e [\sin 3\psi \sin (\theta - \psi) - \cos \gamma \cos 3\psi \cos (\theta - \psi)] \\ b = e [-\sin 3\psi \cos (\theta - \psi) - \cos \gamma \cos 3\psi \sin (\theta - \psi)] \end{cases} \quad (2.5.13)$$

Per mezzo del Teorema di Pitagora, è possibile esprimere, dalla 2.5.13 appena ricavata, la distanza minima  $\rho$  tra il centro dello spider e l'asse  $Z$ :

$$\rho^2 = a^2 + b^2$$

$$\begin{aligned} \rho^2 = e^2 & \left[ \sin^2 3\psi \sin^2 (\theta - \psi) + \cos^2 \gamma \cos^2 3\psi \cos^2 (\theta - \psi) + \right. \\ & - 2 \sin 3\psi \cos 3\psi \sin (\theta - \psi) \cos (\theta - \psi) \cos \gamma + \sin^2 3\psi \cos^2 (\theta - \psi) \\ & \left. + \cos^2 \gamma \cos^2 3\psi \sin^2 (\theta - \psi) + 2 \sin 3\psi \cos 3\psi \sin (\theta - \psi) \cos (\theta - \psi) \cos \gamma \right] \end{aligned}$$

$$\rho^2 = e^2 [\sin^2 3\psi + \cos^2 \gamma \cos^2 3\psi] \quad (2.5.14)$$

Si può fare qualche ulteriore considerazione osservando la figura sottostante 2.5.1.

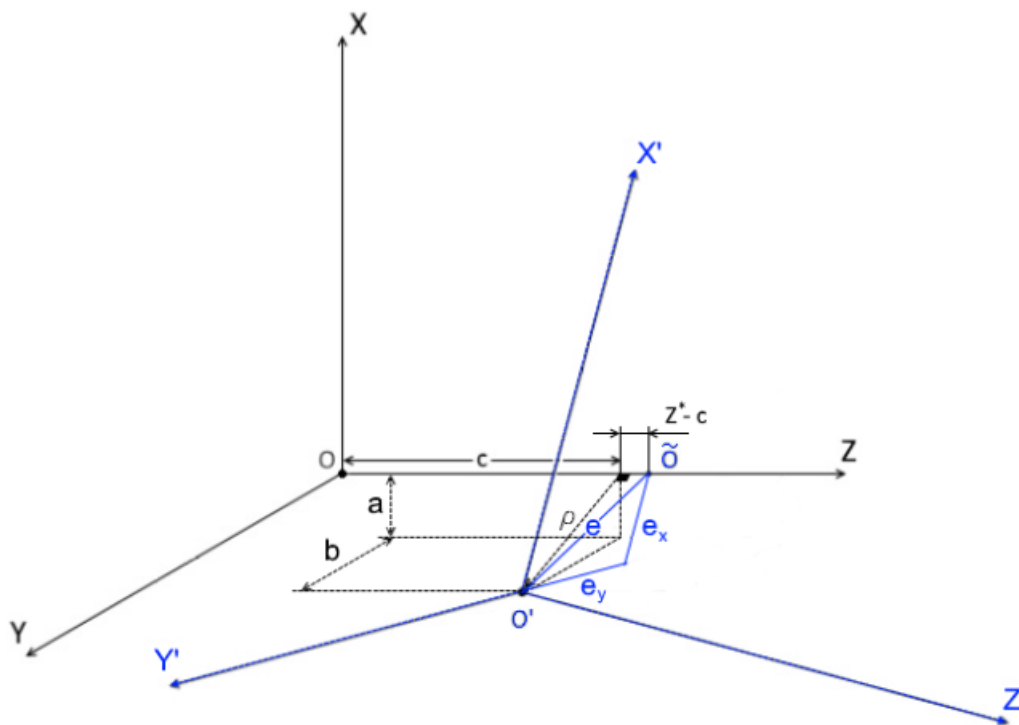


Figura 2.5.1: Eccentricità espressa tramite le coordinate  $a, b$  (oppure il modulo  $\rho$ ) in riferimento alla terna  $XYZ$  e tramite le componenti  $e_x, e_y$  (oppure il modulo  $e$ ) riferite alla terna intermedia  $\tilde{X}\tilde{Y}\tilde{Z}$ .

Dalla quale emerge che:

$$(Z^* - c)^2 + \rho^2 = e^2$$

quindi sostituendo l'equazione 2.5.14 si ricava:

$$\begin{aligned} (Z^* - c)^2 &= e^2 - e^2 [\sin^2 3\psi + \cos^2 \gamma \cos^2 3\psi] \\ &= e^2 \left[ \underbrace{1 - \sin^2 3\psi}_{\cos^2 3\psi} - \cos^2 \gamma \cos^2 3\psi \right] \\ &= e^2 [\cos^2 3\psi - \cos^2 \gamma \cos^2 3\psi] \\ &= e^2 (1 - \cos^2 \gamma) \cos^2 3\psi \end{aligned}$$

quindi si ricava:

$$|Z^* - c| = e \sin \gamma \cos 3\psi \quad (2.5.15)$$

Ricapitolando, con riferimento alla figura 2.5.1, il moto del centro dello *spider* nello spazio in riferimento alla terna fissa  $XYZ$  può essere rappresentato dalle seguenti equazioni che identificano le tre coordinate:

$$\begin{cases} X = a = e [\sin 3\psi \sin (\theta - \psi) - \cos \gamma \cos 3\psi \cos (\theta - \psi)] \\ Y = b = e [-\sin 3\psi \cos (\theta - \psi) - \cos \gamma \cos 3\psi \sin (\theta - \psi)] \\ |Z^* - c| = e \sin \gamma \cos 3\psi \end{cases} \quad (2.5.16)$$

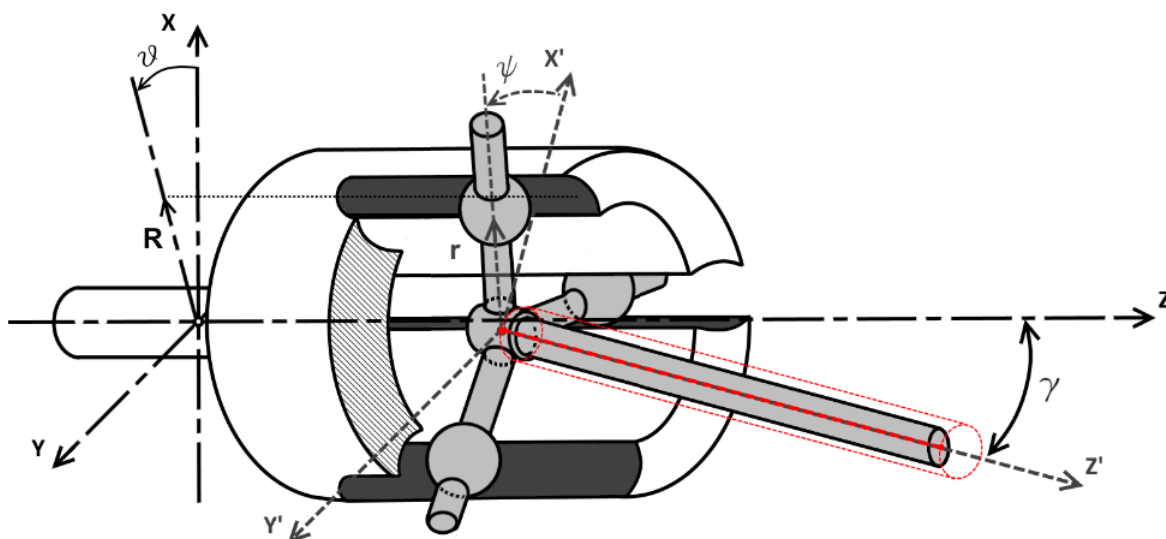


Figura 2.5.2: Traiettoria ellittica del centro dello spider.

Da queste equazioni si ricava che il moto del centro dello spider avviene lungo un percorso ellittico su un piano perpendicolare all'asse dell'albero di uscita, come schematizzato nella figura 2.5.2. Pertanto si ha che l'asse  $Z'$  non è sempre contenuto nel piano  $XZ$ , come richiedeva l'equazione sull'omocinetività 2.4.21.

## 2.6 Moto del centro dei roller

Il passo successivo consiste nella determinazione del moto del centro di ciascun *roller*, che come nella precedente sezione verrà identificato tramite le tre coordinate del sistema fisso  $XYZ$ , dove  $X$  e  $Y$  sono dette direzioni radiali in quanto ortogonali l'asse del *pot* identificato da  $Z$ . Per fare ciò si considera nuovamente il secondo sistema di trasformazione delle coordinate, tramite il quale è possibile ricavare la sommatoria delle posizioni assiali  $Z$  di ciascun *roller* e il punto medio attorno a cui oscillano corrisponde all'*offset* dello *spider* rispetto al *pot*. Successivamente dal primo sistema di trasformazione delle coordinate, si determina la posizione assiale (lungo  $Z$ ) di ciascun *roller*. Verrà ricavata poi la relazione che identifica il profilo ellittico lungo cui corrono i *roller* e le distanze radiali di ciascuno di questi dal centro dello *spider*.

### 2.6.1 Posizione media dei tre roller

Come già accennato si considera il secondo sistema di trasformazione delle coordinate, 2.3.7. In particolare la trattazione parte dalla terza equazione, ponendo:

$$\tilde{Z} = 0; \quad X = R \cos \theta_i; \quad Y = R \sin \theta_i; \quad Z = Z_i$$

sostituendo si ha:

$$0 = \cos \tau \sin \gamma R \cos \theta_i + \sin \tau \sin \gamma R \sin \theta_i + \cos \gamma (Z_i - Z^*)$$

da cui deriva:

$$(Z_i - Z^*) = -R \tan \gamma (\cos \tau \cos \theta_i - \sin \tau \sin \theta_i) = -R \tan \gamma \cos (\theta_i - \tau)$$

che, considerando l'equazione 2.4.21, può essere riscritta:

$$(Z_i - Z^*) = -R \tan \gamma \cos \psi_i \tag{2.6.1}$$

Ricordando come varia l'angolo  $\psi$  (equazione 2.4.7) si ha:

$$Z_i = \begin{cases} Z_1 \Rightarrow Z_1 - Z^* = -R \tan \gamma \cos \psi \\ Z_2 \Rightarrow Z_2 - Z^* = -R \tan \gamma \cos (\psi + 120) \\ Z_3 \Rightarrow Z_1 - Z^* = -R \tan \gamma \cos (\psi + 240) \end{cases}$$

$$Z_i = \begin{cases} Z_1 - Z^* = -R \tan \gamma \cos \psi \\ Z - Z^* = -R \tan \gamma \left( -\frac{1}{2} \cos \psi - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \psi \right) \\ Z_3 \Rightarrow Z_1 - Z^* = -R \tan \gamma \cos \left( -\frac{1}{2} \cos \psi + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \psi \right) \end{cases}$$

sommando le tre equazioni appena scritte si ottiene:

$$Z_1 + Z_2 + Z_3 - 3Z^* = -R \tan \gamma \left( \cos \psi - \frac{1}{2} \cos \psi - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \psi - \frac{1}{2} \cos \psi + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \psi \right)$$

da cui risulta:

$$Z^* = \frac{Z_1 + Z_2 + Z_3}{3}$$

questo equivale a dire che la media delle posizioni, assiali, dei tre *roller* coincide con la posizione di *offset* dello *spider* rispetto al *pot*.

## 2.6.2 Posizione assiale di ciascun roller

Questa trattazione si sviluppa partendo dal primo sistema di trasformazione delle coordinate, equazione 2.3.6, di cui se ne considera la terza riga:

$$Z' = \cos \tau \sin \gamma (X - a) + \sin \tau \sin \gamma (Y - b) + \cos \gamma (Z - c)$$

ponendo  $Z' = 0$ , si ottiene:

$$-\cos \gamma (Z_i - c) = \sin \gamma (X_i \cos \tau + Y_i \sin \tau - a \cos \tau - b \sin \tau)$$

Sostituendo  $X_i = R \cos \theta_i$   $Y_i = R \sin \theta_i$ , che derivano dall'equazione 2.4.1:

$$-\cos \gamma (Z_i - c) = \sin \gamma (R \cos \theta_i \cos \tau + R \sin \theta_i \sin \tau - a \cos \tau - b \sin \tau)$$

$$-\cos \gamma (Z_i - c) = \sin \gamma [R \cos (\theta_i - \tau) - a \cos \tau - b \sin \tau]$$

considerando le equazioni 2.4.21, 2.5.12 e 2.5.11:

$$-\cos \gamma (Z_i - c) = \sin \gamma [R \cos \psi_i + e_x \cos \gamma \cos^2 \tau - \cancel{e_y \sin \tau \cos \tau} + e_x \cos \gamma \sin^2 \tau + \cancel{e_y \cos \tau \sin \tau}]$$

che diventa:

$$-\cos \gamma (Z_i - c) = \sin \gamma [R \cos \psi_i + e_x \cos \gamma]$$

sostituendo l'equazione 2.5.7:

$$-\cos \gamma (Z_i - c) = \sin \gamma \left[ R \cos \psi_i + \frac{R (1 - \cos \gamma)}{2 \cos \gamma} \cos 3\psi \right]$$

da cui si ricava che le posizioni assiale rispetto al sistema di riferimento  $XYZ$  equivale a:

$$Z_i = c - \frac{R}{2} \tan \gamma [2 \cos \psi_i + (1 - \cos \gamma) \cos 3\psi]. \quad (2.6.2)$$

L'offset  $c$ , rappresenta la posizione relativa dell'origine  $O'$  rispetto al sistema di riferimento fisso ( $XYZ$ ). Tale offset può essere espresso dalla somma di una distanza  $C_0$  tra le origini del sistema  $XYZ$  e del sistema  $\tilde{X}\tilde{Y}\tilde{Z}$  e il contributo dato dall'angolo di articolazione istantaneo  $\gamma$  e di *layout*  $\gamma_0$  tramite la relazione:

$$c = l(\cos \gamma_0 - \cos \gamma) + c_0$$

Dall'equazione 2.6.2 si possono ricavare le posizioni assiali dei *roller* rispetto all'origine  $O'$ , si riportano sotto i passaggi algebrici:

$$(Z_i - c) = -R \tan \gamma \cos \psi_i - \frac{R}{2} \tan \gamma (1 - \cos \gamma) \cos 3\psi$$

considerando la 2.6.1

$$\cancel{Z}_i - c = \cancel{Z}_i - Z^* - \frac{R}{2} \tan \gamma (1 - \cos \gamma) \cos 3\psi$$

da cui risulta:

$$Z^* - c = -\frac{R (1 - \cos \gamma)}{2 \cos \gamma} \sin \gamma \cos 3\psi$$

infine dall'equazione 2.5.9:

$$Z^* - c = -e \sin \gamma \cos 3\psi$$



che permette di stabilire il segno dell'equazione 2.5.15. Si ottiene quindi la relazione che identifica la posizione assiale dei centri dei *roller* rispetto al centro dello *spider*.

### 2.6.3 Traiettoria ellittica dei centri dei roller

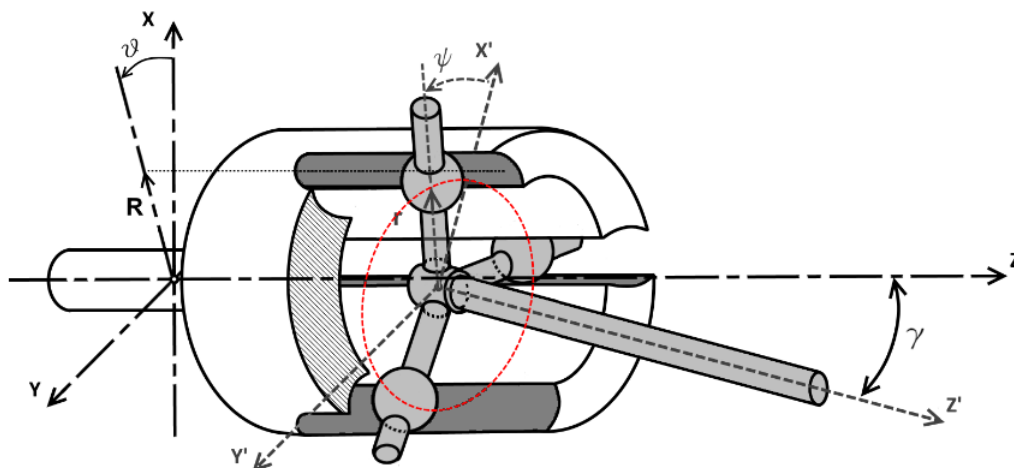


Figura 2.6.1: Traiettoria ellittica dei centri dei roller.

Sempre partendo dal secondo sistema di trasformazione delle coordinate, che lega la terna fissa  $XYZ$  con la terna intermedia  $\tilde{X}\tilde{Y}\tilde{Z}$  (figura 2.3.3) - questa volta scritto nella forma di equazione 2.3.10- dopo aver sostituito  $X = R \cos \theta_i$  e  $Y = R \sin \theta_i$ , si ottiene:

$$\tilde{X}_i = -\frac{1}{\cos \gamma} (R \cos \theta_i \cos \tau + R \sin \theta_i \sin \tau)$$

che, riconoscendo il coseno della differenza tra 2 i angoli, si può riscrivere come:

$$\tilde{X}_i = -\frac{R}{\cos \gamma} \cos (\theta_i - \tau)$$

ricordando che  $\theta_i - \tau = \psi_i$  dalla 2.4.21, si ricava:

$$\tilde{X}_i = -\frac{R}{\cos \gamma} \cos \psi_i.$$

Analogamente per la seconda equazione del sistema 2.3.10:

$$\tilde{Y}_i = R \cos \theta_i \sin \tau - R \sin \theta_i \cos \tau$$

che riconoscendo il seno della differenza tra 2 i angoli, si può riscrivere come:

$$\tilde{Y}_i = R \sin(\tau - \theta_i)$$

che, considerando 2.4.21 diventa:

$$\tilde{Y}_i = -R \sin \psi_i.$$

In definitiva si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{cases} \tilde{X}_i = -\frac{R}{\cos \gamma} \cos \psi_i \\ \tilde{Y}_i = -R \sin \psi_i \end{cases} \quad (2.6.3)$$

come si può notare rappresenta l'equazione di un'ellisse espressa in forma parametrica. Tale equazione la si può trasformare nella seguente forma canonica:

$$\frac{(\tilde{X}_i)^2}{\left(-\frac{R}{\cos \gamma}\right)^2} + \frac{(\tilde{Y}_i)^2}{-R^2} = 1$$

va precisato che tale ellisse rappresenta la proiezione del moto dei centri di ciascun roller su un piano ortogonale all'asse  $Z'$ , questo perché l'angolo di articolazione  $\gamma$  varia durante il moto.

### 2.6.4 Distanza radiale di ciascun roller

Si tratta della distanza alla quale si trova il centro del *roller* dal centro dello *spider*, figura 2.6.2.

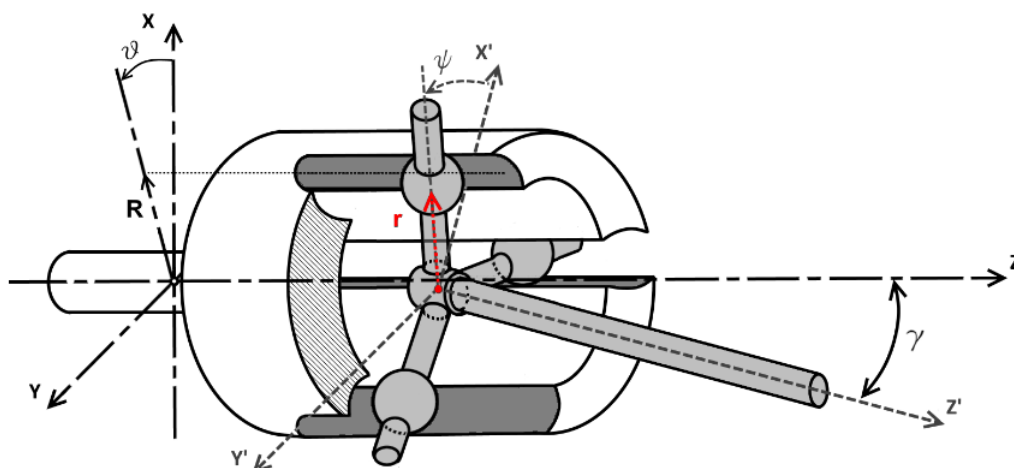


Figura 2.6.2: Distanza radiale del centro del *roller* rispetto al centro dello *spider*.

Anche in questo caso si considera il secondo sistema di trasformazione delle coordinate, ma l'equazione di partenza è la 2.4.2, in particolare la seconda equazione:

$$r_i \sin \psi_i = -R (\sin \theta_i \cos \tau - \sin \tau \cos \theta_i) - e_y$$

$$r_i \sin \psi_i = -R \sin (\theta_i - \tau) - e_y$$

ricordando la 2.4.21, la 2.5.6 e 2.5.9:

$$r_i \sin \psi_i = -R \sin \psi_i - e \sin 3\psi$$

semplificando si ha:

$$r_i = -R - e \frac{\sin 3\psi}{\sin \psi_i} \quad (2.6.4)$$

che permette di stabilire la distanza radiale del centro del *roller* in funzione dell'angolo di uscita che a sua volta dipende dall'angolo di ingresso. Nella sezione §2.10 sono riportati gli andamenti di questo parametro in funzione della geometria del giunto e delle condizioni operative.

## 2.7 Ridefinizione dei coseni direttori

Il passo successivo consiste nel considerare, collegato al giunto, un albero avente estremità libera. Lo scopo di questa sezione è rappresentare le caratteristiche di moto del giunto in funzione di parametri che fisicamente descrivono il *layout* di un'ipotetica trasmissione, quali lunghezza  $l$  dell'albero calettato sullo spider e delle coordinate dell'estremità  $H$  che corrisponderebbe al *pivot-point* del giunto fisso collegato alla ruota. Per prima cosa si ridefiniscono i coseni direttori relativi all'orientazione dell'asse  $Z'$  poiché l'angolo di articolazione del giunto dipende dal posizionamento dell'intero semiasse all'interno del veicolo.

### 2.7.1 Coseni direttori

In questa sezione si ridefiniscono in particolare quei coseni che rappresentano l'orientazione dell'asse  $Z'$  rispetto ai tre assi del sistema cartesiano fisso  $(XYZ)$  (eq. 2.3.3) in funzione delle coordinate  $h, g, k$  e della lunghezza  $l$  dell'albero. Come all'inizio, anche in questo caso non si prendono in considerazione le distanze tra i sistemi di riferimento, ma solo le orientazioni relative, quindi graficamente le origini vengono fatte coincidere e si riporta solo l'asse  $Z'$ .

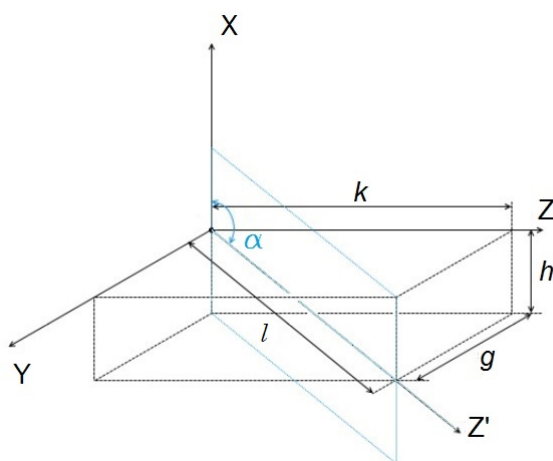


Figura 2.7.1: Angolo  $\alpha$  che si forma tra l'asse  $Z'$  dell'albero di uscita e l'asse  $X$  del *pot*.

da cui si vede che:

$$\cos \alpha = \frac{(h - a)}{l} \quad (2.7.1)$$

dove  $a$  rappresenta la componente lungo  $X$  dell'eccentricità (figura2.5.1);

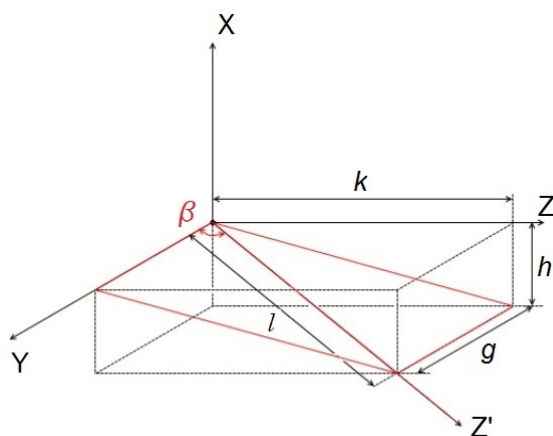


Figura 2.7.2: Angolo  $\beta$  che si forma tra l'asse  $Z'$  dell'albero di uscita e l'asse  $Y$  del *pot.*

da cui si vede che:

$$\cos \beta = \frac{(g - b)}{l} \tag{2.7.2}$$

dove  $b$  rappresenta la componente lungo  $Y$  dell'eccentricità (figura2.5.1);

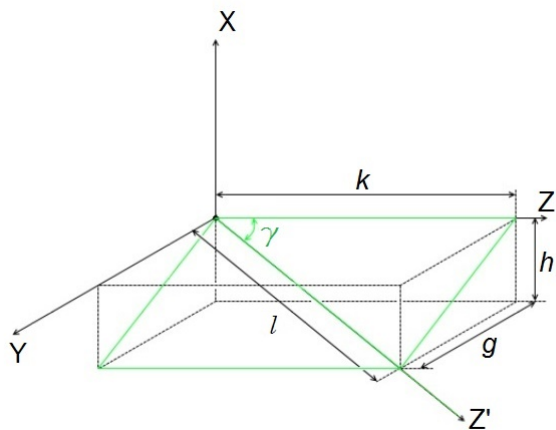


Figura 2.7.3: Angolo  $\gamma$  che si forma tra l'asse  $Z'$  dell'albero di uscita e l'asse  $Z$  del *pot.*

da cui si vede che:

$$\cos \gamma = \frac{(k - c)}{l} \tag{2.7.3}$$

dove  $c$  rappresenta l'*offset* lungo  $Z$  del centro dello spider (figura2.5.1).

Considerando l'equazione 2.5.13, è possibile riscrivere la 2.7.1 in:

$$\cos \alpha = \frac{h}{l} - \frac{e}{l} [\sin 3\psi \sin (\theta - \psi) - \cos \gamma \cos 3\psi \cos (\theta - \psi)] = \cos \tau \sin \gamma \quad (2.7.4)$$

che può essere riscritta come:

$$l \cos \tau \sin \gamma = h - e \sin 3\psi \sin (\theta - \psi) + e \cos \gamma \cos 3\psi \cos (\theta - \psi) \quad (2.7.5)$$

e analogamente per la 2.7.2:

$$\cos \beta = \frac{g}{l} - \frac{e}{l} [-\sin 3\psi \cos (\theta - \psi) - \cos \gamma \cos 3\psi \sin (\theta - \psi)] = \sin \tau \sin \gamma. \quad (2.7.6)$$

che può essere riscritta come:

$$l \sin \tau \sin \gamma = g + e \sin 3\psi \cos (\theta - \psi) + e \cos \gamma \cos 3\psi \sin (\theta - \psi) \quad (2.7.7)$$

Le relazioni 2.7.5 e 2.7.7 rappresentano i coseni direttori  $l_3$  e  $m_3$  di equazione 2.3.1 riscritti in funzione degli angoli  $\gamma$  e  $\tau$  e dei parametri geometrici che identificano il *layout* della trasmissione.

## 2.8 Moto estremità libera

In questa sezione si considera il giunto con l'aggiunta di un albero collegato allo *spider* e avente la seconda estremità libera con l'obiettivo di determinarne il moto e l'influenza sull'omocineticità nel caso in cui risulti fissata.

### 2.8.1 Determinazione coordinate h e g

Nella trattazione seguente si è preso a riferimento lo schema riportato in figura 2.8.1 sottostante.

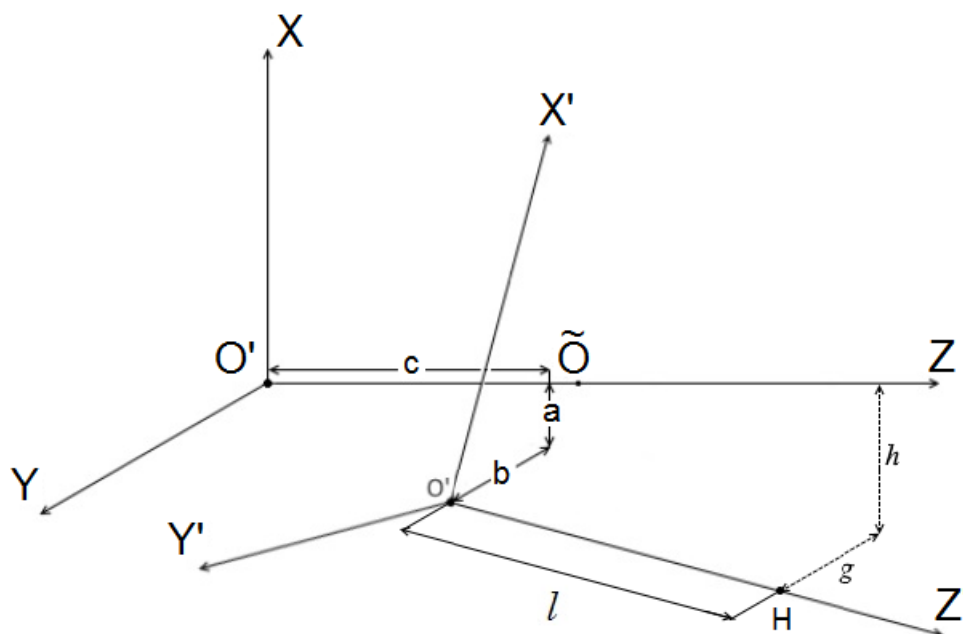


Figura 2.8.1: Coordinate del punto H che identifica l'estremità libera dell'albero.

Allo scopo di semplificare la trattazione si pone  $\theta - \psi = \tau = \Delta$ , quindi la 2.7.4 e la 2.7.6 diventano:

$$\begin{cases} l \cos \Delta \sin \gamma = h - e \sin 3\psi \sin \Delta + e \cos \gamma \cos 3\psi \cos \Delta & (j) \\ l \sin \Delta \sin \gamma = g + e \sin 3\psi \cos \Delta + e \cos \gamma \cos 3\psi \sin \Delta & (jj) \end{cases}$$

dalla (j) si esplicita la lunghezza dell'albero:

$$l = \frac{1}{\cos \Delta \sin \gamma} [h - e \sin 3\psi \sin \Delta + e \cos \gamma \cos 3\psi \cos \Delta]$$

che sostituito nella (jj):

$$\frac{\sin \Delta \cancel{\sin \gamma}}{\cos \Delta \cancel{\sin \gamma}} [h - e \sin 3\psi \sin \Delta + e \cos \gamma \cos 3\psi \cos \Delta] = g + e \sin 3\psi \cos \Delta + e \cos \gamma \cos 3\psi \sin \Delta$$

portando tutto a sinistra dell'uguale:

$$\frac{1}{\cos \Delta} \left[ h \sin \Delta - e \sin 3\psi \sin^2 \Delta + \cancel{e \cos \gamma \cos 3\psi \sin \Delta \cos \Delta} - g \cos \Delta - e \sin 3\psi \cos^2 \Delta - \cancel{e \cos \gamma \cos 3\psi \sin \Delta \cos \Delta} \right] = 0$$

$$h \sin \Delta - g \cos \Delta = e \sin 3\psi \quad (2.8.1)$$

ritornando alla (j) si ricava:

$$l \cos \Delta \sin \gamma = h - (h \sin \Delta - g \cos \Delta) \sin \Delta + e \cos \gamma \cos 3\psi \cos \Delta$$

$$l \cos \Delta \sin \gamma = h - h \sin^2 \Delta + g \cos \Delta \sin \Delta + e \cos \gamma \cos 3\psi \cos \Delta$$

$$l \cos \Delta \sin \gamma = h (1 - \sin^2 \Delta) + g \cos \Delta \sin \Delta + e \cos \gamma \cos 3\psi \cos \Delta$$

$$\cancel{l \cos \Delta} \sin \gamma = h \cos^2 \Delta + g \cancel{\cos \Delta} \sin \Delta + e \cos \gamma \cos 3\psi \cancel{\cos \Delta}$$

$$h \cos \Delta + g \sin \Delta = l \sin \gamma - e \cos \gamma \cos 3\psi. \quad (2.8.2)$$

Ponendo a sistema la 2.8.1 con la 2.8.2, si risolve per ricavare  $h$  e  $g$ :

$$\begin{cases} h \sin \Delta - g \cos \Delta = e \sin 3\psi \\ h \cos \Delta + g \sin \Delta = l \sin \gamma - e \cos \gamma \cos 3\psi \end{cases}$$

$$h = \frac{1}{\sin \Delta} (g \cos \Delta + e \sin 3\psi)$$

Sostituendo nella seconda

$$\frac{\cos \Delta}{\sin \Delta} (g \cos \Delta + e \sin 3\psi) + g \sin \Delta = l \sin \gamma - e \cos \gamma \cos 3\psi$$

$$\frac{1}{\sin \Delta} [g \cos^2 \Delta + e \sin 3\psi \cos \Delta + g \sin^2 \Delta - l \sin \gamma \sin \Delta + e \cos \gamma \cos 3\psi \sin \Delta] = 0$$



$$g = -e (\sin 3\psi \cos \Delta + \cos \gamma \cos 3\psi \sin \Delta) + l \sin \gamma \sin \Delta, \quad (2.8.3)$$

che a sua volta sostituita nella prima porta a:

$$h = \frac{1}{\sin \Delta} [-\cos \Delta e (\sin 3\psi \cos \Delta + \cos \gamma \cos 3\psi \sin \Delta) + l \sin \gamma \sin \Delta \cos \Delta + e \sin 3\psi]$$

$$h = \frac{1}{\sin \Delta} [-e \sin 3\psi \cos^2 \Delta - e \cos \gamma \cos 3\psi \sin \Delta \cos \Delta + l \sin \gamma \sin \Delta \cos \Delta + e \sin 3\psi]$$

$$h = \frac{1}{\sin \Delta} [e \sin 3\psi \sin^2 \Delta - e \cos \gamma \cos 3\psi \sin \Delta \cos \Delta + l \sin \gamma \sin \Delta \cos \Delta]$$

$$h = e (\sin 3\psi \sin \Delta - \cos \gamma \cos 3\psi \cos \Delta) + l \sin \gamma \cos \Delta. \quad (2.8.4)$$

Ricapitolando si ottiene:

$$\begin{cases} h = e (\sin 3\psi \sin \Delta - \cos \gamma \cos 3\psi \cos \Delta) + l \sin \gamma \cos \Delta \\ g = -e (\sin 3\psi \cos \Delta + \cos \gamma \cos 3\psi \sin \Delta) + l \sin \gamma \sin \Delta \end{cases}$$

che può essere scritta nella forma:

$$\frac{g}{h} = \frac{\sin \gamma \sin \Delta - \frac{e}{l} (\sin 3\psi \cos \Delta + \cos \gamma \cos 3\psi \sin \Delta)}{\sin \gamma \cos \Delta + \frac{e}{l} (\sin 3\psi \sin \Delta - \cos \gamma \cos 3\psi \cos \Delta)}. \quad (2.8.5)$$

$$h^2 + g^2 = \{ [e (\sin 3\psi \sin \Delta - \cos \gamma \cos 3\psi \cos \Delta) + l \sin \gamma \cos \Delta]^2 + [-e (\sin 3\psi \cos \Delta + \cos \gamma \cos 3\psi \sin \Delta) + l \sin \gamma \sin \Delta]^2 \}$$

$$\begin{aligned} h^2 + g^2 = & \{ e^2 (\sin 3\psi \sin \Delta - \cos \gamma \cos 3\psi \cos \Delta)^2 + l^2 \sin^2 \gamma \cos^2 \Delta + \\ & + 2el \sin \gamma \cos \Delta (\sin 3\psi \sin \Delta - \cos \gamma \cos 3\psi \cos \Delta) + \\ & + e^2 (\sin 3\psi \cos \Delta + \cos \gamma \cos 3\psi \sin \Delta)^2 + l^2 \sin^2 \gamma \sin^2 \Delta + \\ & - 2el \sin \gamma \sin \Delta (\sin 3\psi \cos \Delta + \cos \gamma \cos 3\psi \sin \Delta) \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h^2 + g^2 = & \left\{ e^2 \sin^2 3\psi \sin^2 \Delta - 2e^2 \sin 3\psi \sin \Delta \cos \gamma \cos 3\psi \cos \Delta + e^2 \cos^2 \gamma \cos^2 3\psi \cos^2 \Delta + \right. \\
& + l^2 \sin^2 \gamma \cos^2 \Delta + 2el \sin \gamma \cos \Delta \sin 3\psi \sin \Delta - 2el \sin \gamma \cos^2 \Delta \cos \gamma \cos 3\psi + \\
& + e^2 \sin^2 3\psi \cos^2 \Delta + 2e^2 \sin 3\psi \cos \Delta \cos \gamma \cos 3\psi \sin \Delta + e^2 \cos^2 \gamma \cos^2 3\psi \sin^2 \Delta + \\
& \left. + l^2 \sin^2 \gamma \sin^2 \Delta - 2el \sin \gamma \sin \Delta \sin 3\psi \cos \Delta - 2el \sin \gamma \sin^2 \Delta \cos \gamma \cos 3\psi \right\}
\end{aligned}$$

semplificando risulta:

$$h^2 + g^2 = e^2 \sin^2 3\psi + e^2 \cos^2 \gamma \cos^2 3\psi + l^2 \sin^2 \gamma - 2el \sin \gamma \cos \gamma \cos 3\psi$$

$$h^2 + g^2 = (e \sin 3\psi)^2 + (l \sin \gamma - e \cos \gamma \cos 3\psi)^2 \quad (2.8.6)$$

Prendendo a riferimento le ultime equazioni scritte (2.8.5 e 2.8.6), emerge che se l'estremità  $H$  non è vincolata, essa avrà un moto nello spazio. Si dimostra che, nel caso ideale in cui l'estremità  $H$  sia guidata a compiere un determinato moto, risulta possibile ottenere una trasmissione omocinetica. Allo scopo di dimostrare quanto appena affermato si considerino le equazioni 2.3.1 e 2.3.3, dalle quali si ricava:

$$\begin{aligned}
\cos \tau &= \frac{\cos \alpha}{\sin \gamma} \\
\sin \tau &= \frac{\cos \beta}{\sin \gamma}
\end{aligned}$$

Sostituendo nella 2.4.21:

$$\tan \Delta = \frac{\cos \beta \sin \gamma}{\sin \gamma \cos \alpha}$$

considerando le equazioni 2.7.1, 2.7.2:

$$\tan \Delta = \frac{(g-b) \lambda}{\lambda (h-a)} = \frac{g-b}{h-a} \quad (2.8.7)$$

Dal momento che le coordinate  $h$  e  $g$  sono variabili nel tempo risulta utile definire che siano composte da una componente media (indicata con lettera soprascritta) a cui se ne somma una variabile:

$$\begin{cases} g = \bar{g} + \delta g \\ h = \bar{h} + \delta h \end{cases} \quad (2.8.8)$$

a questo punto è possibile riscrivere l'equazione 2.8.7:

$$\tan \Delta = \frac{\bar{g} + \delta g - b}{\bar{h} + \delta h - a}$$

$$\bar{h} \tan \Delta - \bar{g} = \tan \Delta (a - \delta h) - (b - \delta g). \quad (2.8.9)$$

Analizzando quest'ultima equazione (2.8.9) si possono fare due considerazioni:

1. Nel caso in cui  $a = \delta h$  e  $b = \delta g$ , la 2.8.9 si riduce a:

$$\tan \Delta = \frac{\bar{g}}{\bar{h}}$$

che fisicamente equivale ad avere un ritardo costante nella trasmissione del moto.

2. Nel caso in cui  $c_1 = a - \delta h$  e  $c_2 = b - \delta g$  la 2.8.9 si riduce a:

$$\tan \Delta = \frac{\bar{g} - c_2}{\bar{h} - c_1}$$

questa condizione può verificarsi accoppiando opportunamente due giunti a tripode di uguale taglia, quindi di uguale  $R$  (raggio delle piste) e operanti con lo stesso angolo  $\gamma$ . Questo introdurrebbe però il problema del bilanciamento dinamico, dovuto al moto eccentrico dell'albero.

Ritornando all'equazione 2.8.5, si vede che se l'estremità libera  $H$  è fissata, l'angolo di articolazione  $\gamma$  risulta in funzione dell'angolo di uscita  $\psi$  e, per la 2.4.21, da  $\theta$ . Questo ragionamento ha valenza pratica in ambito automobilistico, in quanto tipicamente l'estremità dell'albero di uscita è vincolata a un giunto fisso. Tale variabilità dell'angolo  $\gamma$  comporta una disomocineticità nella trasmissione e l'impossibilità di vincolare l'albero in modo che resti parallelo a se stesso durante il moto poiché il meccanismo non potrebbe funzionare. Bisogna quindi ricercare attraverso le relazioni ricavate le condizioni che permettono di ridurre al massimo il grado di disomocineticità. In particolare, considerando l'equazione 2.8.7 si vede che nel caso ideale in cui  $g = b$  (figura 2.8.1) la trasmissione risulterebbe omocinetica. Ma il parametro  $b$  dipende dall'eccentricità che si genera nel meccanismo e che non può essere annullata per angoli  $\gamma$  diversi da zero. A livello progettuale quindi si interviene cercando di ridurre il più possibile l'oscillazione dell'albero durante il moto, che nel caso di estremità  $H$  fissa genera un cono (figura 2.8.2 sottostante).

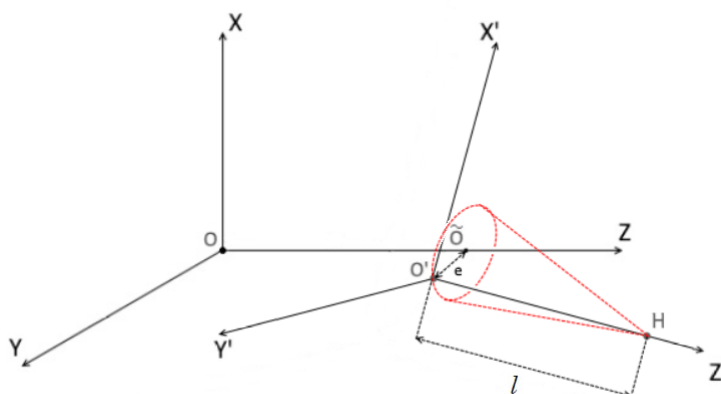


Figura 2.8.2: Cono generato dall'albero nel caso in cui l'estremità  $H$  sia fissata.

Per ottenere ciò si cerca di avere un rapporto  $e/l$  piccolo, dove si ricorda che  $e$  è la distanza tra il centro dello spider e l'asse  $Z$ , mentre  $l$  è la lunghezza dell'albero. Questa scelta trova fondamento nell'equazione 2.8.5 dove si può notare la presenza del contributo  $e/l$ . Facendo infatti un passaggio al limite nell'equazione si ottiene:

$$\frac{g}{h} = \frac{\sin \gamma \sin \Delta - \frac{e}{l} (\sin 3\psi \cos \Delta + \cos \gamma \cos 3\psi \sin \Delta)}{\sin \gamma \cos \Delta + \frac{e}{l} (\sin 3\psi \sin \Delta - \cos \gamma \cos 3\psi \cos \Delta)} \approx \tan \Delta$$

A livello progettuale questo si traduce nella scelta di un rapporto  $R/l$  minore possibile poiché  $e \propto R$ . Analogo risultato si potrebbe ottenere partendo dalla 2.8.7 e considerando  $a, b$  abbastanza piccoli da essere trascurati.

È inoltre possibile esplicitare un'ulteriore forma dell'espressione sull'omocinetività, per un'ultima considerazione. A tal proposito si consideri nuovamente l'equazione 2.8.3, ponendo  $g = 0$ , si ha:

$$0 = -e \sin 3\psi \cos \Delta - e \cos \gamma \cos 3\psi \sin \Delta + l \sin \gamma \sin \Delta$$

dividendo per  $\sin \Delta$ :

$$0 = -e \sin 3\psi \frac{\cos \Delta}{\sin \Delta} - e \cos \gamma \cos 3\psi + l \sin \gamma$$

$$\tan \Delta = \frac{-e \sin 3\psi}{e \cos \gamma \cos 3\psi - l \sin \gamma} \quad (2.8.10)$$

da questa si vede che la funzione che esprime la differenza tra ingresso  $\theta$  e uscita  $\psi$  ha andamento sinusoidale con valore nullo in corrispondenza di  $\psi = k\frac{\pi}{3}$ , come si vedrà nella sezione di analisi numerica §2.10 . Tali angoli sono definiti dall'autore [1, 2] "punti di precisione" (*accuracy points*). Analogamente ponendo  $h = 0$  nella 2.8.4 si otterrebbe una funzione input-output analoga, ma con punti di accuratezza diversi, corrispondenti a  $\psi = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}$ .

## 2.9 Analisi cinematica di un semiasse

Fino ad ora è stato considerato un generico giunto a tripode isolato, in questa sezione lo si analizza come componente di un semiasse. Quindi il sistema è costituito da un giunto a tripode e un giunto fisso a sfere collegati da un albero. A livello cinematico ciò comporta che l'estremità  $H$  non è più libera come nel caso precedente ma è fissa e coincidente con il *pivot-point* del giunto fisso. Per semplificare la trattazione si considera che l'articolazione avvenga sul piano  $XZ$ , quindi la quota  $g$  di figura 2.8.1 risulta nulla. L'obiettivo di questa sezione è di ricavare le relazioni che esprimono l'uscita e l'angolo di articolazione istantaneo in funzione dell'angolo di ingresso.

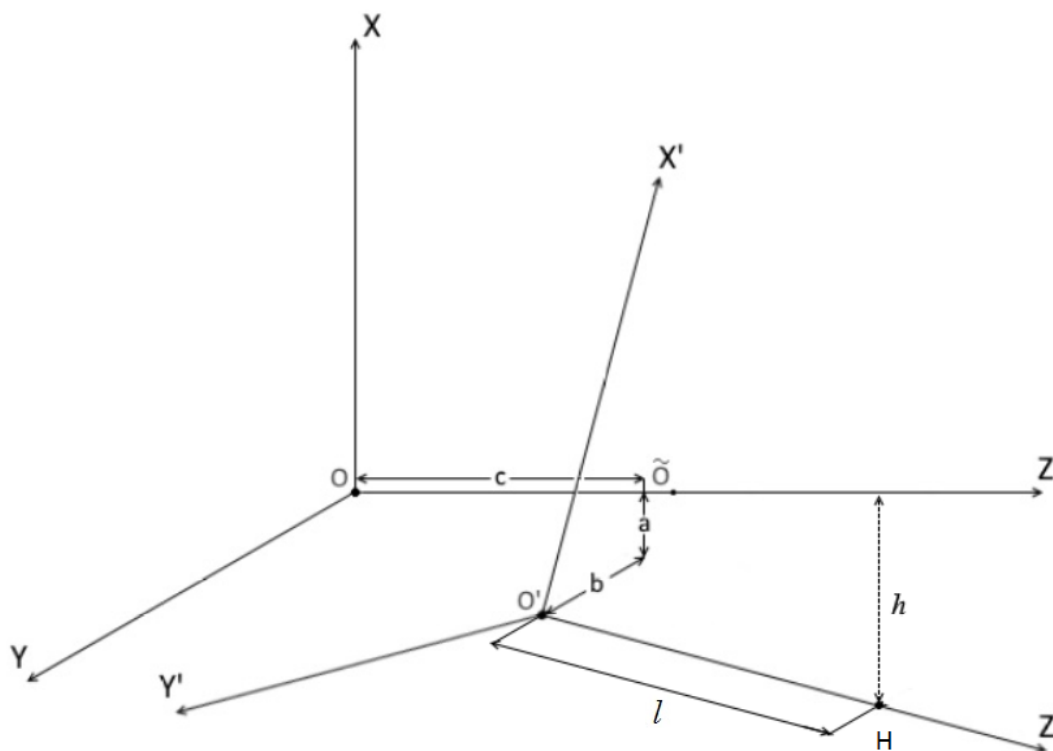


Figura 2.9.1: Il punto H che identifica l'estremità dell'albero appartiene al piano  $XZ$  quindi la coordinata  $g$  in direzione  $Y$  risulta nulla.

Partendo dalle equazioni 2.8.1, ponendo  $g = 0$  si ricava:

$$h \sin \Delta = e \sin 3\psi \quad (2.9.1)$$

da cui si vede che:

$$\psi = k \frac{\pi}{3} \Rightarrow \psi - \theta = 0;$$

nel caso di  $k = 0$  si può scrivere  $\gamma = \gamma_0$

analogamente dalla 2.8.2, ponendo  $g = 0$  si ricava:

$$h \cos \Delta = -l \sin \gamma - e \cos \gamma \cos 3\psi \quad (2.9.2)$$

e sostituendo  $\gamma = \gamma_0$  si esplicita il valore  $h$ :

$$h = -l \sin \gamma_0 - e \cos \gamma_0$$

ricordando la definizione dell'eccentricità:

$$h = -l \sin \gamma_0 - \frac{R(1 - \cos \gamma_0)}{2 \cos \gamma_0}$$

quindi

$$h = -l \sin \gamma_0 - \frac{R}{2}(1 - \cos \gamma_0). \quad (2.9.3)$$

I passaggi che seguono portano alla determinazione di un polinomio di quarto grado in  $\psi$  in funzione dell'angolo di ingresso  $\theta$ .

Considerando le equazioni 2.9.1 e 2.9.2 si calcolano i quadrati, ottenendo:

$$\begin{cases} h^2 \sin^2 \Delta = (e \sin 3\psi)^2 \\ h^2 \cos^2 \Delta = (-l \sin \gamma - e \cos \gamma \cos 3\psi)^2 \end{cases}$$

che sommati danno:

$$h^2 = (e \sin 3\psi)^2 + (-l \sin \gamma - e \cos \gamma \cos 3\psi)^2$$

Dalla 2.9.1 si ricava:

$$h \sin \Delta = e \sin 3\psi = \frac{R(1 - \cos \gamma)}{2 \cos \gamma} \sin 3\psi$$

$$2h \sin \Delta \cos \gamma = R \sin 3\psi - R \cos \gamma \sin 3\psi$$

$$\cos \gamma (2h \sin \Delta + R \sin 3\psi) = R \sin 3\psi$$

$$\cos \gamma = \frac{\sin 3\psi}{\frac{2h}{R} \sin \Delta + \sin 3\psi} \quad (2.9.4)$$

mentre dalla 2.9.2 si ricava:

$$-\frac{h \cos \Delta + l \sin \gamma}{e \cos 3\psi} = \cos \gamma$$

sostituendo la 2.9.4 si ha:

$$-\frac{h \cos \Delta + l \sin \gamma}{e \cos 3\psi} = \frac{\sin 3\psi}{\frac{2h}{R} \sin \Delta + \sin 3\psi}$$

$$l \sin \gamma = -\frac{\sin 3\psi e \cos 3\psi}{\frac{2h}{R} \sin \Delta + \sin 3\psi} - h \cos \Delta$$

comune denominatore:

$$l \sin \gamma = -\frac{\sin 3\psi e \cos 3\psi + \frac{2h^2}{R} \sin \Delta \cos \Delta + h \cos \Delta \sin 3\psi}{\frac{2h}{R} \sin \Delta + \sin 3\psi}$$

ma dalla 2.9.1  $e \sin 3\psi = h \sin \Delta$

$$\sin \gamma = -\frac{h}{l} \left( \frac{\sin \Delta \cos 3\psi + \frac{2h}{R} \sin \Delta \cos \Delta + \cos \Delta \sin 3\psi}{\frac{2h}{R} \sin \Delta + \sin 3\psi} \right)$$

ricordando le proprietà delle funzioni trigonometriche si semplifica scrivendo:

$$\sin \gamma = -\frac{h}{l} \left( \frac{\sin (\Delta + 3\psi) + \frac{h}{R} \sin 2\Delta}{\frac{2h}{R} \sin \Delta + \sin 3\psi} \right) \quad (2.9.5)$$

Si esegue ora la somma dei quadrati delle equazioni 2.9.4 e 2.9.5:

$$\cos^2 \gamma + \sin^2 \gamma = \left( \frac{\sin 3\psi}{\frac{2h}{R} \sin \Delta + \sin 3\psi} \right)^2 + \left( \frac{h}{l} \right)^2 \left( \frac{\sin(\Delta + 3\psi) + \frac{h}{R} \sin 2\Delta}{\frac{2h}{R} \sin \Delta + \sin 3\psi} \right)^2$$

$$\begin{aligned} l^2 \left( \frac{2h}{R} \sin \Delta + \sin 3\psi \right)^2 &= l^2 \sin^2 3\psi + h^2 \sin^2(\Delta + 3\psi) + \frac{h^4}{R^2} \sin 2\Delta + \frac{2h^3}{R} \sin(\Delta + 3\psi) \sin 2\Delta \\ &\quad - \cancel{l^2 \sin^2 3\psi} - 4 \frac{l^2 h^2}{R^2} \sin^2 \Delta - 4 \frac{l^2 h}{R} \sin \Delta \sin 3\psi + \cancel{l^2 \sin^2 3\psi} + \\ &\quad + h^2 \sin^2(\Delta + 3\psi) + \frac{h^4}{R^2} \sin 2\Delta + 2 \frac{h^3}{R} \sin(\Delta + 3\psi) \sin 2\Delta = 0 \end{aligned}$$

dividendo per  $h^2$  si ottiene:

$$\underbrace{\sin^2(\Delta + 3\psi)}_A + \underbrace{\frac{h^2}{R^2} \sin^2 2\Delta}_B + \underbrace{2 \frac{h}{R} \sin(\Delta + 3\psi) \sin 2\Delta}_C - \underbrace{4 \frac{l^2}{R^2} \sin^2 \Delta}_D - \underbrace{4 \frac{l^2}{hR} \sin \Delta \sin 3\psi}_E = 0 \quad (2.9.6)$$

consideriamo i termini separatamente:

**A**

$$\begin{aligned} A &= \sin^2(\Delta + 3\psi) = \sin^2(\theta - \psi + 3\psi) \\ &= \sin^2(\theta + 2\psi) \\ &= (\sin \theta \cos 2\psi + \sin 2\psi \cos \theta)^2 \\ &= \sin^2 \theta \cos^2 2\psi + \sin^2 2\psi \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos 2\psi \sin 2\psi \cos \theta \\ &= \sin^2 \theta \cos^2 2\psi + \sin^2 2\psi \cos^2 \theta + \sin 2\theta \cos 2\psi \sin 2\psi \end{aligned}$$



**B**

$$\begin{aligned}
B &= \frac{h^2}{R^2} \sin^2 2\Delta = \frac{h^2}{R^2} \sin^2 (2\theta - 2\psi) \\
&= \frac{h^2}{R^2} (\sin 2\theta \cos 2\psi - \sin 2\psi \cos 2\theta)^2 \\
&= \frac{h^2}{R^2} (\sin^2 2\theta \cos^2 2\psi + \sin^2 2\psi \cos^2 2\theta - 2 \sin 2\psi \cos 2\theta \sin 2\theta \cos 2\psi) \\
&= \frac{h^2}{R^2} (\sin 2\theta \sin 2\theta \cos^2 2\psi + \sin^2 2\psi \cos 2\theta \cos 2\theta - \sin 4\theta \sin 2\psi \cos 2\psi) \\
&= \frac{h^2}{R^2} \left( \frac{1}{2} \cos^2 2\psi (1 - \cos 4\theta) + \frac{1}{2} \sin^2 2\psi (\cos 4\theta + 1) - \sin 4\theta \sin 2\psi \cos 2\psi \right) \\
&= \frac{h^2}{R^2} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos^2 2\psi \cos 4\theta + \frac{1}{2} \sin^2 2\psi \cos 4\theta - \sin 4\theta \sin 2\psi \cos 2\psi \right)
\end{aligned}$$

**C**

$$\begin{aligned}
C &= 2 \frac{h}{R} \sin (\Delta + 3\psi) \sin 2\Delta = 2 \frac{h}{R} \sin (2\theta - 2\psi) \sin (\theta + 2\psi) \\
&= 2 \frac{h}{R} (\sin 2\theta \cos 2\psi - \sin 2\psi \cos 2\theta) (\sin \theta \cos 2\psi + \sin 2\psi \cos \theta) \\
&= 2 \frac{h}{R} [\sin 2\theta \cos^2 2\psi \sin \theta + \cos 2\psi \sin 2\psi (\sin 2\theta \cos \theta - \cos 2\theta \sin \theta) - \sin^2 2\psi \cos 2\theta \cos \theta] \\
&= 2 \frac{h}{R} [\sin 2\theta \cos^2 2\psi \sin \theta + \cos 2\psi \sin 2\psi \sin \theta - \sin^2 2\psi \cos 2\theta \cos \theta] \\
&= \frac{h}{R} [2 \sin 2\theta \cos^2 2\psi \sin \theta + 2 \cos 2\psi \sin 2\psi \sin \theta - 2 \sin^2 2\psi \cos 2\theta \cos \theta]
\end{aligned}$$

**D**

$$\begin{aligned} D &= -4 \frac{l^2}{R^2} \sin^2 \Delta \\ &= \frac{l^2}{R^2} [2 - 2 - 4 \sin^2 \Delta] \\ &= \frac{l^2}{R^2} [2 (1 - 2 \sin^2 \Delta) - 2] \\ &= \frac{l^2}{R^2} [2 (\cos 2\Delta) - 2] \\ &= \frac{l^2}{R^2} [2 \cos (2\theta - 2\psi) - 2] \\ &= \frac{l^2}{R^2} [2 \cos 2\theta \cos 2\psi + 2 \sin 2\theta \sin 2\psi - 2] \end{aligned}$$

**E**

$$\begin{aligned}
E &= -4 \frac{l^2}{hR} \sin \Delta \sin 3\psi \\
&= \frac{l^2}{hR} [-4 \sin 3\psi (\sin \theta \cos \psi - \sin \psi \cos \theta)] \\
&= \frac{l^2}{hR} [-2 \sin \theta (2 \sin 3\psi \cos \psi) - 2 \cos \theta (-2 \sin 3\psi \sin \psi)] \\
&= \frac{l^2}{hR} [-2 \sin \theta (\underbrace{\sin 3\psi \cos \psi + \sin 3\psi \cos \psi}_{\sin 6\psi} - \underbrace{\cos 3\psi \sin \psi + \cos 3\psi \sin \psi}_{\sin 6\psi}) + \\
&\quad -2 \cos \theta (-\underbrace{\sin 3\psi \sin \psi - \sin 3\psi \sin \psi}_{\sin 6\psi} + \underbrace{\cos 3\psi \cos \psi - \cos 3\psi \cos \psi}_{\sin 6\psi})] \\
&= \frac{l^2}{hR} [-2 \cos \theta (\underbrace{\cos 3\psi \cos \psi - \sin 3\psi \sin \psi}_{\cos 6\psi}) - 2 \sin \theta (\underbrace{\sin 3\psi \cos \psi + \cos 3\psi \sin \psi}_{\sin 6\psi}) + \\
&\quad + 2 \cos \theta (\underbrace{\sin 3\psi \sin \psi + \cos 3\psi \cos \psi}_{\sin 6\psi}) - 2 \sin \theta (\underbrace{\sin 3\psi \cos \psi - \cos 3\psi \sin \psi}_{\sin 6\psi})] \\
&= \frac{l^2}{hR} [-2 \cos \theta \cos 4\psi - 2 \sin \theta \sin 4\psi + 2 \cos \theta \cos 2\psi - 2 \sin \theta \sin 2\psi] \\
&= \frac{l^2}{hR} [-2 \cos \theta (\cos^2 2\psi - \sin^2 2\psi) - 4 \sin \theta \sin 2\psi \cos 2\psi + 2 \cos \theta \cos 2\psi - 2 \sin \theta \sin 2\psi]
\end{aligned}$$

Ricapitolando l'equazione 2.9.6 diventa:

$$\begin{aligned}
& \overline{\sin^2 2\psi \cos^2 \theta} + \overline{\sin^2 \theta \cos^2 2\psi} + \overline{\sin 2\theta \cos 2\psi \sin 2\psi} + \\
& + \frac{h^2}{R^2} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos^2 2\psi \cos 4\theta + \frac{1}{2} \sin^2 2\psi \cos 4\theta - \sin 4\theta \sin 2\psi \cos 2\psi \right) + \\
& + \frac{h}{R} \left[ \overline{2 \sin 2\theta \cos^2 2\psi \sin \theta} + \overline{2 \cos 2\psi \sin 2\psi \sin \theta} - \overline{2 \sin^2 2\psi \cos 2\theta \cos \theta} \right] + \\
& + \frac{l^2}{R^2} \left[ \overline{2 \cos 2\theta \cos 2\psi} + \overline{2 \sin 2\theta \sin 2\psi} - 2 \right] + \\
& + \frac{l^2}{hR} \left[ \overline{-2 \cos \theta \cos^2 2\psi} + \overline{2 \cos \theta \sin^2 2\psi} + \right. \\
& \left. - \overline{4 \sin \theta \sin 2\psi \cos 2\psi} + \overline{2 \cos \theta \cos 2\psi} - \overline{2 \sin \theta \sin 2\psi} \right] = 0
\end{aligned}$$

indicando con:

$$\underline{k}_1 = \sin^2 \theta - \frac{1}{2} \frac{h^2}{R^2} \cos 4\theta + 2 \frac{h}{R} \sin \theta \sin 2\theta - 2 \frac{l^2}{hR} \cos \theta$$

$$\underline{k}_2 = \cos^2 \theta + \frac{1}{2} \frac{h^2}{R^2} \cos 4\theta - 2 \frac{h}{R} \cos \theta \cos 2\theta + 2 \frac{l^2}{hR} \cos \theta$$

$$\underline{k}_3 = \sin 2\theta - \frac{h^2}{R^2} \sin 4\theta + 2 \frac{h}{R} \sin \theta - 4 \frac{l^2}{hR} \sin \theta$$

$$\widehat{k}_4 = 2 \frac{l^2}{R^2} \cos 2\theta + 2 \frac{l^2}{hR} \cos \theta$$

$$\widetilde{k}_5 = 2 \frac{l^2}{R^2} \sin 2\theta - 2 \frac{l^2}{hR} \sin \theta$$

$$k_6 = \frac{1}{2} \frac{h^2}{R^2} - 2 \frac{l^2}{R^2}$$

si può scrivere:

$$k_1 \cos^2 2\psi + k_2 \sin^2 2\psi + k_3 \sin 2\psi \cos 2\psi + k_4 \cos 2\psi + k_5 \sin 2\psi + k_6 = 0 \quad (2.9.7)$$

si calcolano ora separatamente i seguenti termini:

$$\cos 2\psi = \cos^2 \psi - \sin^2 \psi$$

$$\sin 2\psi = 2 \sin \psi \cos \psi$$

$$\cos^2 2\psi = \cos^4 \psi + \sin^4 \psi - 2 \sin^2 \psi \cos^2 \psi$$

$$\sin^2 2\psi = 4 \sin^2 \psi \cos^2 \psi$$

$$\sin 2\psi \cos 2\psi = 2 \sin \psi \cos^3 \psi - 2 \sin^3 \psi \cos \psi$$

sostituendo questi termini nella 2.9.7 si ottiene:

$$k_1 (\cos^4 \psi + \sin^4 \psi - 2 \sin^2 \psi \cos^2 \psi) + k_2 4 \sin^2 \psi \cos^2 \psi + k_3 2 \sin \psi \cos \psi (\cos^2 \psi - \sin^2 \psi) + k_4 (\cos^2 \psi - \sin^2 \psi) + k_5 2 \sin \psi \cos \psi + k_6 = 0$$

$$k_1 \cos^4 \psi + k_1 \sin^4 \psi - 2k_1 \sin^2 \psi \cos^2 \psi + 4k_2 \sin^2 \psi \cos^2 \psi + 2k_3 \sin \psi \cos^3 \psi + 2k_3 \cos \psi \sin^3 \psi + k_4 \cos^2 \psi - k_4 \sin^2 \psi + 2k_5 \sin \psi \cos \psi + k_6 = 0$$

dividendo per  $\cos^4 \psi$ , si ottiene:

$$k_1 + k_1 \tan^4 \psi - 2k_1 \tan^2 \psi + 4k_2 \tan^2 \psi + 2k_3 \tan \psi + 2k_3 \tan^3 \psi + k_4 \frac{1}{\cos^2 \psi} - k_4 \frac{\tan^2 \psi}{\cos^2 \psi} + 2k_5 \frac{\tan \psi}{\cos^2 \psi} + \frac{k_6}{(\cos^2 \psi)^2} = 0$$

ma  $(\cos^2 \psi)^{-1} = 1 + \tan^2 \psi$ , quindi:

$$k_1 + k_1 \tan^4 \psi - 2k_1 \tan^2 \psi + 4k_2 \tan^2 \psi + 2k_3 \tan \psi - 2k_3 \tan^3 \psi + k_4 + k_4 \tan^2 \psi + k_4 \tan^2 \psi - k_4 \tan^4 \psi + 2k_5 \tan \psi + 2k_5 \tan^3 \psi + k_6 + k_6 \tan^4 \psi + 2k_6 \tan^2 \psi = 0$$

l'obbiettivo è di ottenere un polinomio di quarto grado nella  $\tan \psi$ , quindi raccogliendo a fattor comune si ha:

$$k_1 + k_1 \tan^4 \psi - \overline{2k_1 \tan^2 \psi} + \overline{4k_2 \tan^2 \psi} + \overline{2k_3 \tan \psi} - \overline{2k_3 \tan^3 \psi} + k_4 + \overline{-k_4 \tan^4 \psi} + \overline{2k_5 \tan \psi} + \overline{2k_5 \tan^3 \psi} + k_6 + \overline{k_6 \tan^4 \psi} + \overline{2k_6 \tan^2 \psi} = 0$$

indicando con:

$$\underline{a}_1 = k_1 - k_4 + k_6$$

$$\tilde{a}_2 = -2k_3 + 2k_5$$

$$\overline{a}_3 = -2k_1 + 4k_2 + 2k_6$$

$$\underline{a}_4 = 2k_3 + 2k_5$$

$$a_5 = k_1 + k_4 + k_6$$

si ricavano infine i termini  $a_i$  appena evidenziati:

$a_1$ 

$$a_1 = k_1 - k_4 + k_6$$

$$= \sin^2 \theta - \frac{1 h^2}{2 R^2} \cos 4\theta + 2 \frac{h}{R} \sin \theta \sin 2\theta - 2 \frac{l^2}{h R} \cos \theta - 2 \frac{l^2}{R^2} \cos 2\theta - 2 \frac{l^2}{h R} \cos \theta + \frac{1 h^2}{2 R^2} - 2 \frac{l^2}{R^2}$$

$$= \sin^2 \theta - \frac{1 h^2}{2 R^2} \cos^4 \theta - \frac{1 h^2}{2 R^2} \sin^4 \theta + 3 \frac{h^2}{R^2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta + 4 \frac{h}{R} \sin^2 \theta \cos \theta - 2 \frac{l^2}{h R} \cos \theta +$$

$$- 2 \frac{l^2}{R^2} \cos^2 \theta + 2 \frac{l^2}{R^2} \sin^2 \theta - 2 \frac{l^2}{h R} \cos \theta + \frac{1 h^2}{2 R^2} - 2 \frac{l^2}{R^2}$$

$$= \sin^2 \theta - \frac{1 h^2}{2 R^2} \cos^2 \theta (1 - \sin^2 \theta) - \frac{1 h^2}{2 R^2} \sin^2 \theta (1 - \cos^2 \theta) + 3 \frac{h^2}{R^2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta +$$

$$+ 4 \frac{h}{R} \sin^2 \theta \cos \theta - 4 \frac{l^2}{h R} \cos \theta - 2 \frac{l^2}{R^2} \cos^2 \theta + 2 \frac{l^2}{R^2} \sin^2 \theta + \frac{1 h^2}{2 R^2} - 2 \frac{l^2}{R^2}$$

$$= \sin^2 \theta - \cancel{\frac{1 h^2}{2 R^2} \cos^2 \theta} + \frac{1 h^2}{2 R^2} \cos^2 \theta \sin^2 \theta - \cancel{\frac{1 h^2}{2 R^2} \sin^2 \theta} + \frac{1 h^2}{2 R^2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta +$$

$$+ 3 \frac{h^2}{R^2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta + 4 \frac{h}{R} \sin^2 \theta \cos \theta - 4 \frac{l^2}{h R} \cos \theta - 2 \frac{l^2}{R^2} \cos^2 \theta + 2 \frac{l^2}{R^2} \sin^2 \theta + \cancel{\frac{1 h^2}{2 R^2}} - 2 \frac{l^2}{R^2}$$

$$= \sin^2 \theta + \underline{4 \frac{h^2}{R^2} \cos^2 \theta \sin^2 \theta} + 4 \frac{h}{R} \sin^2 \theta \cos \theta - 4 \frac{l^2}{h R} \cos \theta - 2 \frac{l^2}{R^2} \cos^2 \theta + 2 \frac{l^2}{R^2} (1 - \cos^2 \theta) - 2 \frac{l^2}{R^2}$$

$$= \sin^2 \theta + 4 \frac{h^2}{R^2} \cos^2 \theta \sin^2 \theta + 4 \frac{h}{R} \sin^2 \theta \cos \theta - 4 \frac{l^2}{h R} \cos \theta - 2 \frac{l^2}{R^2} \cos^2 \theta + \cancel{2 \frac{l^2}{R^2}} - \underline{2 \frac{l^2}{R^2} \cos^2 \theta} - \cancel{2 \frac{l^2}{R^2}}$$

$$= \underline{\sin^2 \theta} + \underline{4 \frac{h^2}{R^2} \cos^2 \theta \sin^2 \theta} + \underline{4 \frac{h}{R} \sin^2 \theta \cos \theta} - \underline{4 \frac{l^2}{h R} \cos \theta} - \underline{4 \frac{l^2}{R^2} \cos^2 \theta}$$

$$= \sin^2 \theta \left( 1 + 2 \frac{h}{R} \cos \theta \right)^2 - 4 \frac{l}{R} \cos \theta \left( \frac{l}{h} + \frac{l}{R} \cos \theta \right)$$

$a_2$ 

$$a_2 = -2k_3 + 2k_5$$

$$\begin{aligned}
&= -2 \left( \sin 2\theta - \frac{h^2}{R^2} \sin 4\theta + 2\frac{h}{R} \sin \theta - 4\frac{l^2}{hR} \sin \theta \right) + 2 \left( 2\frac{l^2}{R^2} \sin 2\theta - 2\frac{l^2}{hR} \sin \theta \right) \\
&= -4 \sin \theta \cos \theta + 8\frac{h^2}{R^2} \sin \theta \cos \theta \cos 2\theta - 4\frac{h}{R} \sin \theta + 8\frac{l^2}{hR} \sin \theta + 8\frac{l^2}{R^2} \sin \theta \cos \theta - 4\frac{l^2}{hR} \sin \theta \\
&= \underline{-4 \sin \theta \cos \theta} + 8\frac{h^2}{R^2} \sin \theta \cos \theta \cos 2\theta - 4\frac{h}{R} \sin \theta + 4\frac{l^2}{hR} \sin \theta + 8\frac{l^2}{R^2} \sin \theta \cos \theta \\
&= 4 \sin \theta \left[ \cos \theta \left( 2\frac{l^2}{R^2} + 2\frac{h^2}{R^2} \cos 2\theta - 1 \right) - \frac{h}{R} + \frac{l^2}{hR} \right]
\end{aligned}$$



$a_3$ 

$$\begin{aligned}
a_3 &= -2k_1 + 4k_2 + 2k_6 \\
&= -2 \left( \sin^2 \theta - \frac{1}{2} \frac{h^2}{R^2} \cos 4\theta + 2 \frac{h}{R} \sin \theta \sin 2\theta - 2 \frac{l^2}{hR} \cos \theta \right) + 4 \left( \cos^2 \theta + \frac{1}{2} \frac{h^2}{R^2} \cos 4\theta + \right. \\
&\quad \left. - 2 \frac{h}{R} \cos \theta \cos 2\theta + 2 \frac{l^2}{hR} \cos \theta \right) + 2 \left( \frac{1}{2} \frac{h^2}{R^2} - 2 \frac{l^2}{R^2} \right) \\
&= -2 \sin^2 \theta + \frac{h^2}{R^2} \cos 4\theta - 4 \frac{h}{R} \sin \theta \sin 2\theta + 4 \frac{l^2}{hR} \cos \theta + 4 \cos^2 \theta + 2 \frac{h^2}{R^2} \cos 4\theta + \\
&\quad - 8 \frac{h}{R} \cos \theta \cos 2\theta + 8 \frac{l^2}{hR} \cos \theta + \frac{h^2}{R^2} - 4 \frac{l^2}{R^2} \\
&= -2 \sin^2 \theta + 3 \frac{h^2}{R^2} \cos 4\theta - 8 \frac{h}{R} \sin^2 \theta \cos \theta + 12 \frac{l^2}{hR} \cos \theta + 4 \cos^2 \theta + \\
&\quad - 8 \frac{h}{R} \cos^3 \theta + 8 \frac{h}{R} \cos \theta \sin^2 \theta + \frac{h^2}{R^2} - 4 \frac{l^2}{R^2} \\
&= -2 \sin \theta \sin \theta + 3 \frac{h^2}{R^2} \cos 4\theta + 12 \frac{l^2}{hR} \cos \theta + 4 \cos \theta \cos \theta - 8 \frac{h}{R} \cos^3 \theta + \frac{h^2}{R^2} - 4 \frac{l^2}{R^2} \\
&= -\frac{2}{2} (1 - \cos 2\theta) + 3 \frac{h^2}{R^2} \cos 4\theta + 12 \frac{l^2}{hR} \cos \theta + \frac{4}{2} (\cos 2\theta + 1) - 8 \frac{h}{R} \cos^3 \theta + \frac{h^2}{R^2} - 4 \frac{l^2}{R^2} \\
&= 1 + 3 \cos 2\theta + 3 \frac{h^2}{R^2} \cos 4\theta + 12 \frac{l^2}{hR} \cos \theta - 8 \frac{h}{R} \cos^3 \theta + \frac{h^2}{R^2} - 4 \frac{l^2}{R^2} \\
&= 4 \cos \theta \left( 3 \frac{l^2}{hR} - 2 \frac{h}{R} \cos^2 \theta \right) + \frac{h^2}{R^2} (1 + 3 \cos 4\theta) - 4 \frac{l^2}{R^2} + 3 \cos 2\theta
\end{aligned}$$

$a_4$ 

$$\begin{aligned}
a_4 &= 2k_3 + 2k_5 \\
&= 2 \left( \sin 2\theta - \frac{h^2}{R^2} \sin 4\theta + 2\frac{h}{R} \sin \theta - 4\frac{l^2}{hR} \sin \theta \right) + 2 \left( 2\frac{l^2}{R^2} \sin 2\theta - 2\frac{l^2}{hR} \sin \theta \right) \\
&= 2 \sin 2\theta - 2\frac{h^2}{R^2} \sin 4\theta + 4\frac{h}{R} \sin \theta - \underline{8\frac{l^2}{hR} \sin \theta} + 4\frac{l^2}{R^2} \sin 2\theta - \underline{4\frac{l^2}{hR} \sin \theta} \\
&= 4 \sin \theta \cos \theta - 4\frac{h^2}{R^2} \sin 2\theta \cos 2\theta + 4\frac{h}{R} \sin \theta - \underline{12\frac{l^2}{hR} \sin \theta} + 8\frac{l^2}{R^2} \sin \theta \cos \theta \\
&= 4 \sin \theta \cos \theta - 8\frac{h^2}{R^2} \sin \theta \cos \theta \cos 2\theta + 4\frac{h}{R} \sin \theta - 12\frac{l^2}{hR} \sin \theta + 8\frac{l^2}{R^2} \sin \theta \cos \theta \\
&= 4 \sin \theta \left[ \cos \theta - 2\frac{h^2}{R^2} \cos \theta \cos 2\theta + \frac{h}{R} - 3\frac{l^2}{hR} + 2\frac{l^2}{R^2} \cos \theta \right] \\
&= 4 \sin \theta \left[ \cos \theta \left( 1 - 2\frac{h^2}{R^2} \cos 2\theta + 2\frac{l^2}{R^2} \right) + \frac{h}{R} - 3\frac{l^2}{hR} \right]
\end{aligned}$$

$a_5$ 

$$a_5 = k_1 + k_4 + k_6$$

$$\begin{aligned}
&= \sin^2 \theta - \frac{1}{2} \frac{h^2}{R^2} \cos 4\theta + 2 \frac{h}{R} \sin \theta \sin 2\theta - 2 \frac{l^2}{hR} \cos \theta + 2 \frac{l^2}{R^2} \cos 2\theta + \\
&+ 2 \frac{l^2}{hR} \cos \theta + \frac{1}{2} \frac{h^2}{R^2} - 2 \frac{l^2}{R^2} \\
&= \sin^2 \theta - \frac{1}{2} \frac{h^2}{R^2} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta - 6 \sin^2 \theta \cos^2 \theta) + 4 \frac{h}{R} \sin^2 \theta \cos \theta + \\
&+ 2 \frac{l^2}{R^2} \cos^2 \theta - 2 \frac{l^2}{R^2} \sin^2 \theta + \frac{1}{2} \frac{h^2}{R^2} - 2 \frac{l^2}{R^2} \\
&= \sin^2 \theta - \frac{1}{2} \frac{h^2}{R^2} \cos^4 \theta - \frac{1}{2} \frac{h^2}{R^2} \sin^4 \theta + 3 \frac{h^2}{R^2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta + 4 \frac{h}{R} \sin^2 \theta \cos \theta \\
&+ 2 \frac{l^2}{R^2} \cos^2 \theta - 2 \frac{l^2}{R^2} \sin^2 \theta + \frac{1}{2} \frac{h^2}{R^2} - 2 \frac{l^2}{R^2} \\
&= \sin^2 \theta - \frac{1}{2} \frac{h^2}{R^2} \cos^2 \theta (1 - \sin^2 \theta) - \frac{1}{2} \frac{h^2}{R^2} \sin^2 \theta (1 - \cos^2 \theta) + 3 \frac{h^2}{R^2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \\
&+ 4 \frac{h}{R} \sin^2 \theta \cos \theta + 2 \frac{l^2}{R^2} \cos^2 \theta - 2 \frac{l^2}{R^2} \sin^2 \theta + 2 \frac{l^2}{R^2} \sin^2 \theta - 2 \frac{l^2}{R^2} \sin^2 \theta + \frac{1}{2} \frac{h^2}{R^2} - 2 \frac{l^2}{R^2} \\
&= \sin^2 \theta - \frac{1}{2} \frac{h^2}{R^2} \cos^2 \theta + \frac{1}{2} \frac{h^2}{R^2} \cos^2 \theta \sin^2 \theta - \frac{1}{2} \frac{h^2}{R^2} \sin^2 \theta + \frac{1}{2} \frac{h^2}{R^2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \\
&+ 3 \frac{h^2}{R^2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta + 4 \frac{h}{R} \sin^2 \theta \cos \theta - 4 \frac{l^2}{R^2} \sin^2 \theta + \frac{1}{2} \frac{h^2}{R^2} \\
&= \sin^2 \theta + \frac{1}{2} \frac{h^2}{R^2} \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \frac{1}{2} \frac{h^2}{R^2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \\
&+ 3 \frac{h^2}{R^2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta + 4 \frac{h}{R} \sin^2 \theta \cos \theta - 4 \frac{l^2}{R^2} \sin^2 \theta \\
&= \sin^2 \theta + 4 \frac{h^2}{R^2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta + 4 \frac{h}{R} \sin^2 \theta \cos \theta - 4 \frac{l^2}{R^2} \sin^2 \theta \\
&= \sin^2 \theta \left[ \left( 1 + 2 \frac{h}{R} \cos \theta \right)^2 - 4 \frac{l^2}{R^2} \right]
\end{aligned}$$

riepilogando si ha:

$$\begin{aligned}
a_1 &= \sin^2 \theta \left( 1 + 2 \frac{h}{R} \cos \theta \right)^2 - 4 \frac{l}{R} \cos \theta \left( \frac{l}{h} + \frac{l}{R} \cos \theta \right) \\
a_2 &= 4 \sin \theta \left[ \cos \theta \left( 2 \frac{l^2}{R^2} + 2 \frac{h^2}{R^2} \cos 2\theta - 1 \right) - \frac{h}{R} + \frac{l^2}{hR} \right] \\
a_3 &= 4 \cos \theta \left( 3 \frac{l^2}{hR} - 2 \frac{h}{R} \cos^2 \theta \right) + \frac{h^2}{R^2} (1 + 3 \cos 4\theta) - 4 \frac{l^2}{R^2} + 3 \cos 2\theta \\
a_4 &= 4 \sin \theta \left[ \cos \theta \left( 1 - 2 \frac{h^2}{R^2} \cos 2\theta + 2 \frac{l^2}{R^2} \right) + \frac{h}{R} - 3 \frac{l^2}{hR} \right] \\
a_5 &= \sin^2 \theta \left[ \left( 1 + 2 \frac{h}{R} \cos \theta \right)^2 - 4 \frac{l^2}{R^2} \right]
\end{aligned}$$

è quindi possibile esprimere la relazione ingresso-uscita come un polinomio di quarto grado nella  $\tan \psi = U$ :

$$a_1 U^4 + a_2 U^3 + a_3 U^2 + a_4 U + a_5 = 0 \quad (2.9.8)$$

come si può notare in questo polinomio la rotazione in uscita  $\psi$  dipende da:

- La rotazione in ingresso  $\theta$
- Il raggio  $R$  delle piste sul *pot*, parametro indicativo della taglia del giunto
- La lunghezza dell'albero di uscita  $l$
- L'angolo di articolazione del giunto, iniziale  $\gamma_0$  e istantaneo  $\gamma$  da cui dipende la quota  $h$  (equazione 2.9.3, figura 2.9.2):

$$h = -l \sin \gamma_0 - \frac{R}{2} (1 - \cos \gamma)$$

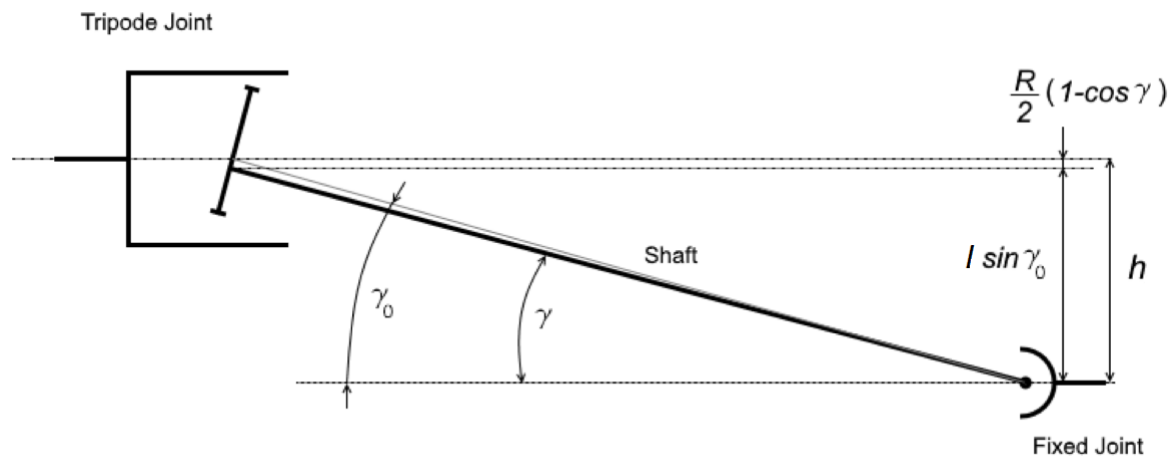


Figura 2.9.2: Quota  $h$  vista come un contributo statico dato dall'angolo di *layout* della trasmissione  $\gamma_0$  a cui si somma il contributo dell'eccentricità che dipende dall'angolo istantaneo di articolazione  $\gamma$ .

La determinazione dell'angolo  $\gamma$  istantaneo diventa quindi necessaria al fine di ottenere la differenza ingresso-uscita di un giunto di determinate dimensioni e che lavori in un certo *layout* di trasmissione.

I passaggi che seguono portano alla determinazione di un polinomio di secondo grado in  $\gamma$  in funzione dell'angolo di ingresso  $\theta$  e di uscita  $\psi$  oltre che dei parametri geometrici  $R$ ,  $l$  e  $h$ . Questo comporta che la soluzione di questi polinomi dovrà seguire un procedimento iterativo che, a convergenza darà una stima delle variabili dipendenti  $\psi$  e  $\gamma$  con un errore accettabile. Ne seguirà la determinazione, sempre stimata, delle posizioni dei vari componenti del giunto in funzione del solo angolo di ingresso  $\theta$ .

Per ricavare il polinomio nella variabile  $\gamma$  si consideri l'equazione 2.9.2:

$$h \cos \Delta = -l \sin \gamma - e \cos \gamma \cos 3\psi$$

$$h \cos \Delta + l \sin \gamma + e \cos \gamma \cos 3\psi = 0$$

sostituendo l'eccentricità dall'equazione 2.5.9

$$h \cos \Delta + l \sin \gamma + \frac{R}{2} \frac{(1 - \cos \gamma)}{\cos \gamma} \cos \gamma \cos 3\psi = 0$$

$$h \cos \Delta + l \sin \gamma + \frac{R}{2} (1 - \cos \gamma) \cos 3\psi = 0$$

per le proprietà delle funzioni trigonometriche si ha che:

$$\sin \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos \gamma)$$

$$\sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}(\sin \gamma)$$

quindi si ha:

$$h \cos \Delta + 2l \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2} + R \sin \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \cos 3\psi = 0$$

dividendo per  $R$

$$\frac{h}{R} \cos \Delta \left( \cos^2 \frac{\gamma}{2} + \sin^2 \frac{\gamma}{2} \right) + \frac{2l}{R} \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2} + \sin^2 \frac{\gamma}{2} \cos 3\psi = 0$$

$$\frac{h}{R} \cos \Delta \cos^2 \frac{\gamma}{2} + \frac{h}{R} \cos \Delta \sin^2 \frac{\gamma}{2} + \frac{2l}{R} \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2} + \sin^2 \frac{\gamma}{2} \cos 3\psi = 0$$

dividendo per  $\cos^2 \frac{\gamma}{2}$  si ottiene:

$$\frac{h}{R} \cos \Delta + \frac{h}{R} \cos \Delta \tan^2 \frac{\gamma}{2} + \frac{2l}{R} \tan \frac{\gamma}{2} + \tan^2 \frac{\gamma}{2} \cos 3\psi = 0$$

ponendo  $\Gamma = \tan \frac{\gamma}{2}$  si ha:

$$\frac{h}{R} \cos \Delta + \frac{h}{R} \cos \Delta \Gamma^2 + \frac{2l}{R} \Gamma + \Gamma^2 \cos 3\psi = 0$$

$$\Gamma^2 \left( \frac{h}{R} \cos \Delta + \cos 3\psi \right) + \frac{h}{R} \cos \Delta + \frac{2l}{R} \Gamma = 0. \quad (2.9.9)$$

La risoluzione dei polinomi 2.9.8 e 2.9.9 è fondamentale per ricavare in funzione della rotazione in ingresso  $\theta$ , dell'angolo di articolazione del giunto  $\gamma_0$ , del raggio delle piste  $R$  e della lunghezza dell'albero  $l$ , tutti quei parametri precedentemente esplicitati che caratterizzano il funzionamento del giunto. Tali parametri sono:

- Relazione ingresso uscita

- Variazione dell'angolo di articolazione istantaneo

- Moto del centro dello spider  $\left\{ \begin{array}{l} a = e [\sin 3\psi \sin (\theta - \psi) - \cos \gamma \cos 3\psi \cos (\theta - \psi)] \\ b = e [-\sin 3\psi \cos (\theta - \psi) - \cos \gamma \cos 3\psi \sin (\theta - \psi)] \\ Z^* - c = -e \sin \gamma \cos 3\psi \end{array} \right.$

- Moto del centro dei roller  $\left\{ \begin{array}{l} \tilde{X}_i = -\frac{R}{\cos \gamma} \cos \psi_i \\ \tilde{Y}_i = -R \sin \psi_i \\ Z_i = c - \frac{R}{2} \tan \gamma [2 \cos \psi_i + (1 - \cos \gamma) \cos 3\psi] \\ r_i = -R - e \frac{\sin 3\psi}{\sin \psi_i} \end{array} \right.$

## 2.10 Risoluzione numerica

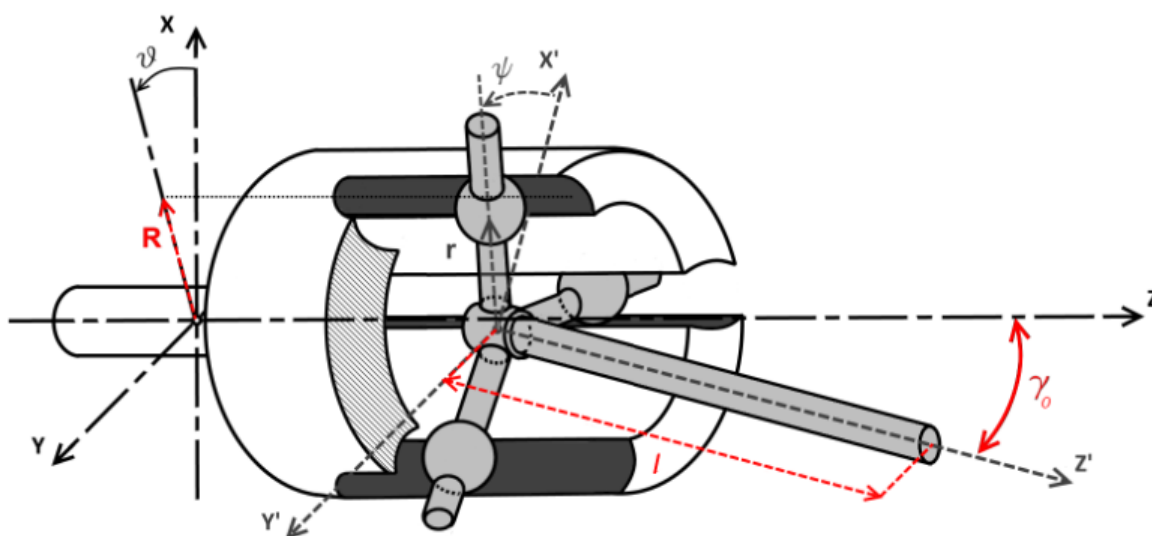


Figura 2.10.1: Parametri di cui si è analizzata l'influenza sul comportamento del giunto a tripode.

La risoluzione dei polinomi 2.9.8 e 2.9.9 è stata eseguita tramite il software Matlab e, allo scopo di identificare l'influenza dei vari parametri sono state prese a riferimento 11 casistiche sulla base di valori di  $\gamma_0, l, R$  (figura 2.10.1) che rientrano tra quelli riscontrabili in ambito progettuale. Tali prove sono state strutturate impostando una condizione nominale N che prevede  $l = 500\text{mm}$ ,  $R = 25\text{mm}$  e  $\gamma_0 = 20^\circ$ . Da questa sono nate tre condizioni che prevedono la variazione del solo parametro  $l$  mantenendo gli altri ai valori nominali, analogamente altre tre condizioni prevedono la variazione del parametro  $R$  ed infine quattro casi con variazione dell'angolo di articolazione  $\gamma_0$ . Per i dettagli dei dati inseriti si veda la tabella 2.1



Tabella 2.1: Casi analizzati numericamente.

| Cod.          | $l$  | $R$  | $\gamma_0$ |        |
|---------------|------|------|------------|--------|
|               | [mm] | [mm] | [deg]      | [rad]  |
| N             | 500  | 25   | 20         | 0,3491 |
| $L_3$         | 300  | 25   | 20         | 0,3491 |
| $L_4$         | 400  | 25   | 20         | 0,3491 |
| $L_7$         | 700  | 25   | 20         | 0,3491 |
| $R_2$         | 500  | 20   | 20         | 0,3491 |
| $R_3$         | 500  | 30   | 20         | 0,3491 |
| $R_4$         | 500  | 40   | 20         | 0,3491 |
| $\gamma_5$    | 500  | 25   | 5          | 0,0873 |
| $\gamma_{10}$ | 500  | 25   | 10         | 0,1745 |
| $\gamma_{15}$ | 500  | 25   | 15         | 0,2618 |
| $\gamma_{25}$ | 500  | 25   | 25         | 0,4363 |

Per ciascun caso è stato fatto girare un programma che al variare dell'angolo di ingresso  $\theta$  da 0 a  $180^\circ$  calcolasse la soluzione dei due polinomi 2.9.8 e 2.9.9 per verificare quelli che sono i moti dei vari componenti e determinare attraverso l'elaborazione dei risultati qual'è l'influenza di ciascuno dei parametri  $\gamma_0, R, l$ . Si riporta in seguito i risultati dell'analisi:

- La differenza ingresso uscita  $\Delta = \theta - \psi$  risulta avere un andamento sinusoidale con periodo di  $\frac{2}{3}\pi$  e in accordo con la 2.8.10 il  $\Delta$  si annulla in corrispondenza di  $\theta = k\frac{\pi}{3}$ . Dalle figure sottostanti è possibile notare che  $\Delta$  aumenta all'aumentare del raggio  $R$  delle piste (figura 2.10.2), dell'angolo di articolazione  $\gamma_0$  (figura 2.10.3) e si riduce all'aumentare della lunghezza  $l$  (figura 2.10.4). Come si vede, i tre parametri danno pari contributo all'omocinetività. Indicativamente la variazione massima tra ingresso e uscita è ipotizzabile con la somma dei massimi di ciascun contributo:  $\sum_{max} (\Delta_{max} - \Delta_{min}) = 0,9 + 0,87 + 0,7 = 2,47^\circ$ , pari al 4,1% sui  $60^\circ$  della semi ampiezza del periodo; mentre la variazione minima tra ingresso e uscita è ipotizzabile con la somma dei minimi di ciascun contributo:  $\sum_{min} (\Delta_{max} - \Delta_{min}) = 0,4 + 0,42 + 0 = 0,82^\circ$ , pari al 1,4% sui  $60^\circ$  della semi ampiezza del periodo.

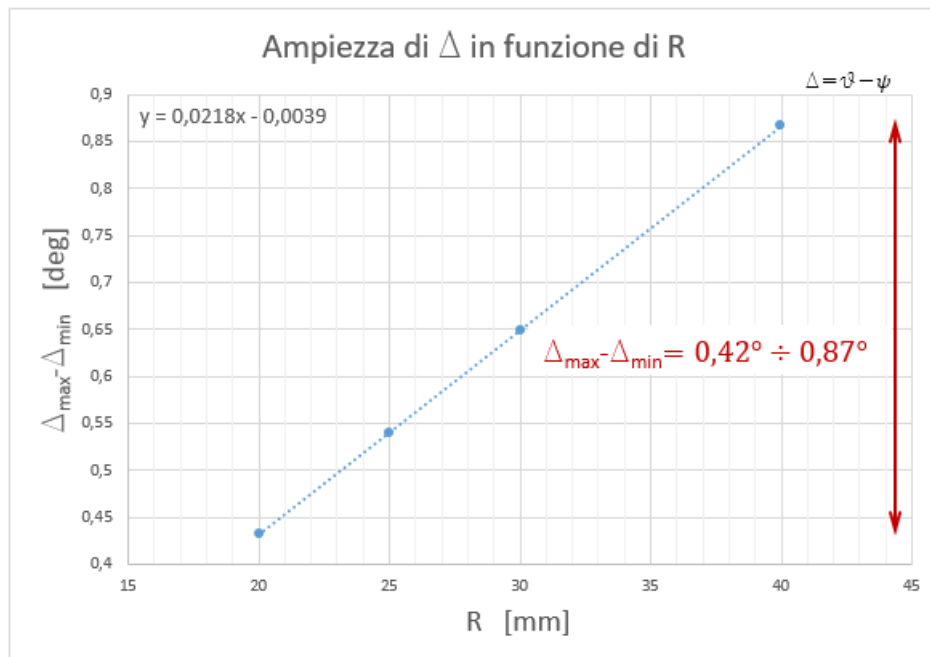
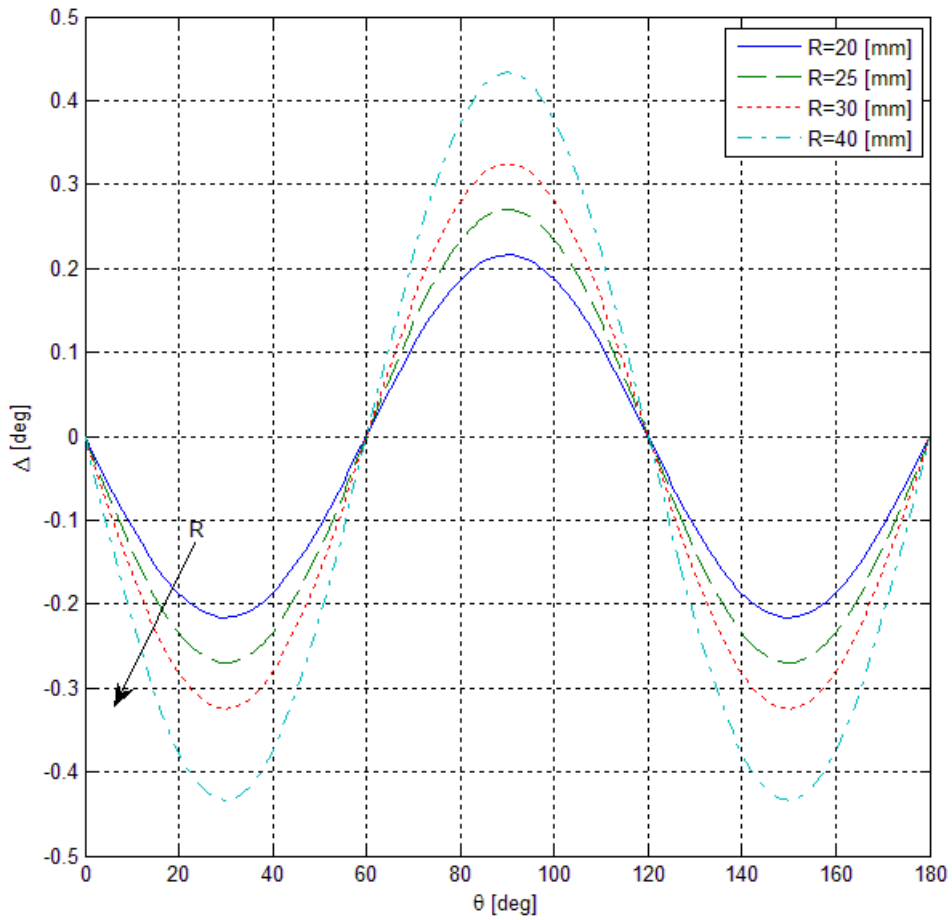


Figura 2.10.2: Variazione differenza ingresso-uscita in funzione del parametro  $R$ .

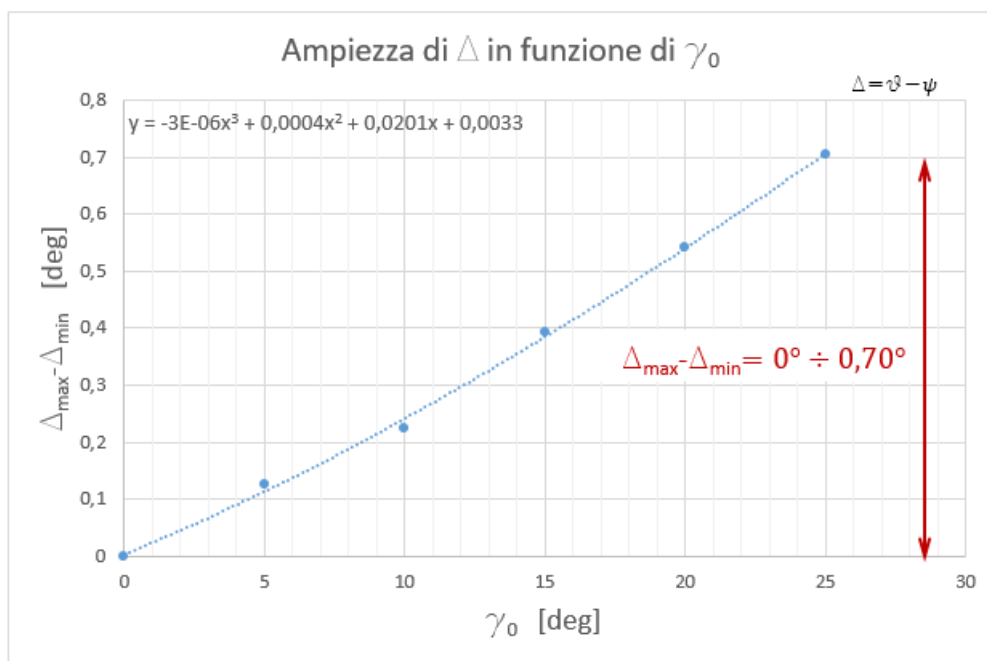
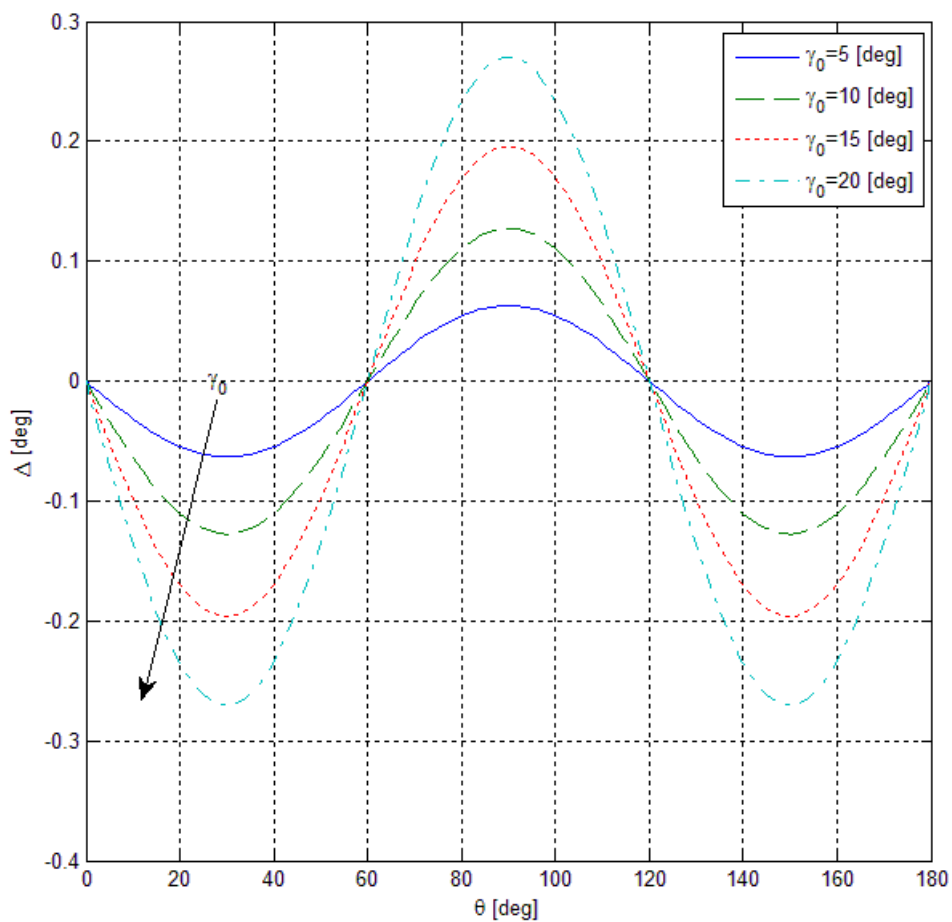


Figura 2.10.3: Variazione differenza ingresso-uscita in funzione del parametro  $\gamma_0$ .

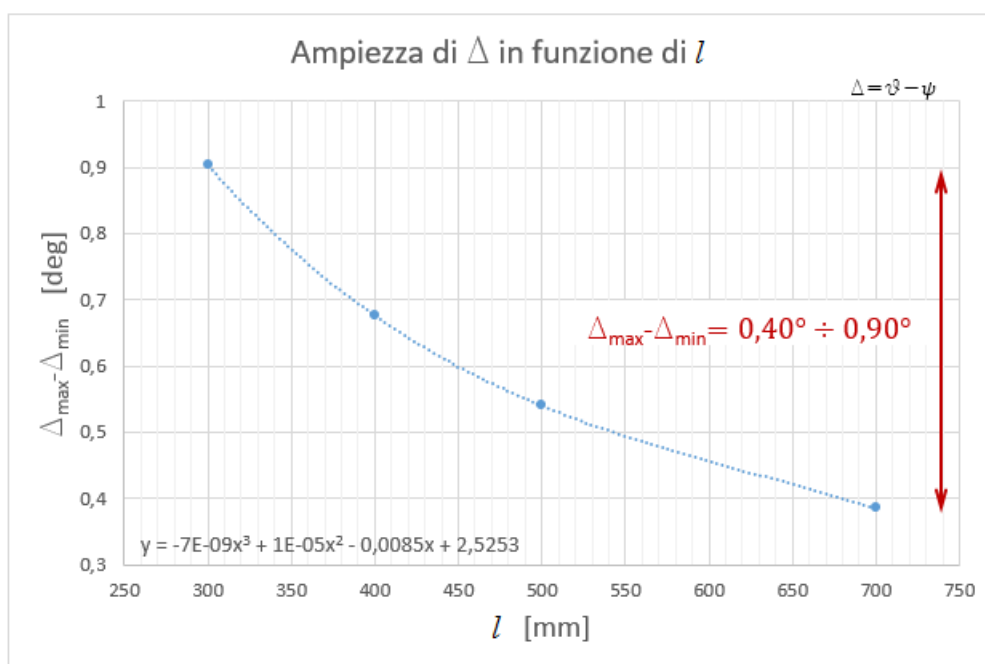
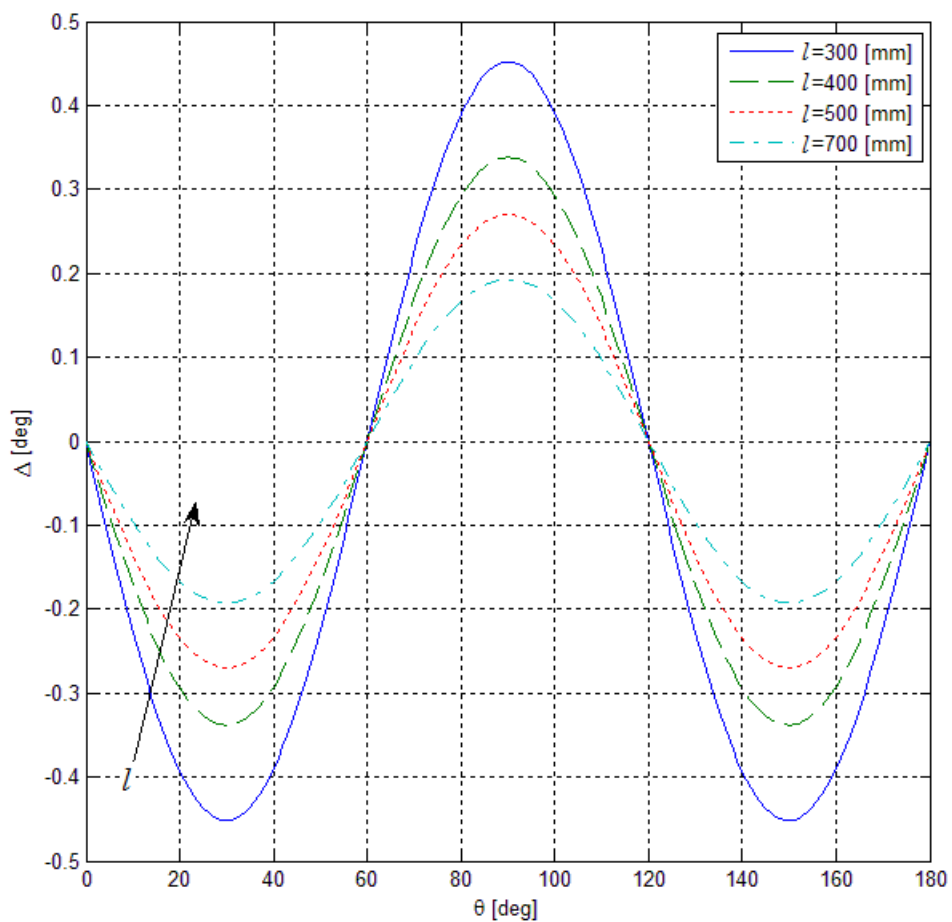


Figura 2.10.4: Variazione differenza ingresso-uscita in funzione del parametro  $l$ .

- La variazione dell'angolo di articolazione istantaneo indicata con  $\delta\gamma$  ha anch'essa andamento sinusoidale con periodo di  $\frac{2}{3}\pi$ , dai grafici sottostanti si può vedere come il valore massimo di  $\delta\gamma$  sia influenzato solo dal parametro  $\gamma_0$ , mentre l'ampiezza dipende anche dal raggio  $R$  delle piste e dalla lunghezza  $l$  dell'albero (figura 2.10.5). Ciò che interessa però in ambito progettuale è che il massimo valore di  $\delta\gamma$  non sia tale da portare in battuta l'albero contro il *pot*, risulta quindi più utile il diagramma riportato in figura 2.10.6.

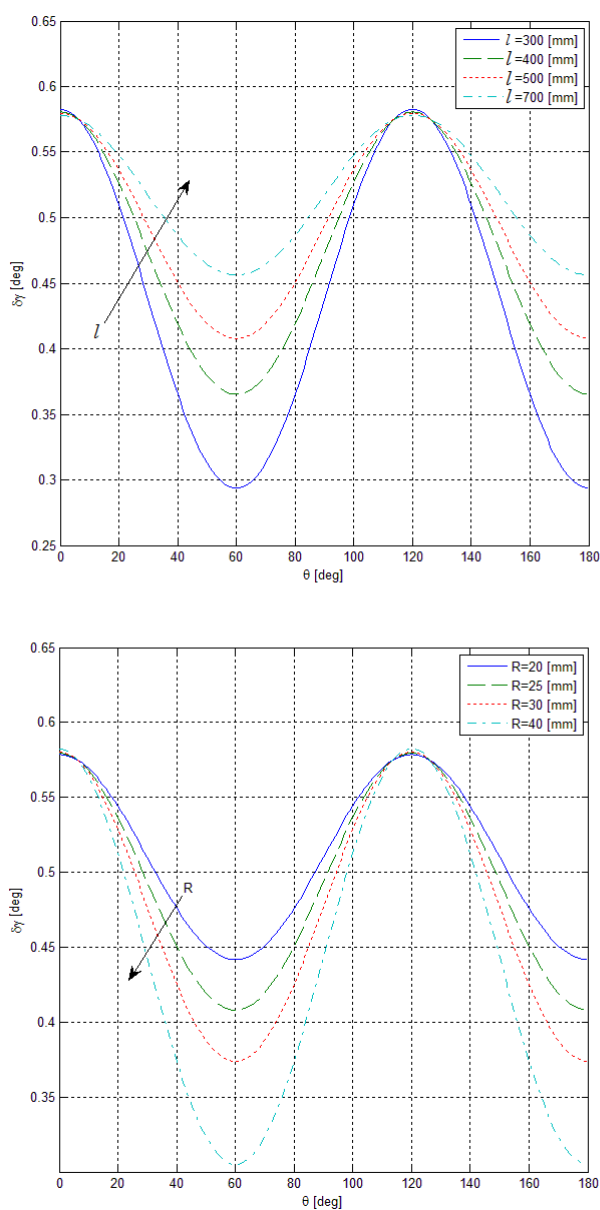


Figura 2.10.5: Variazione dell'angolo di articolazione in funzione dei parametri  $l$  e  $R$ .

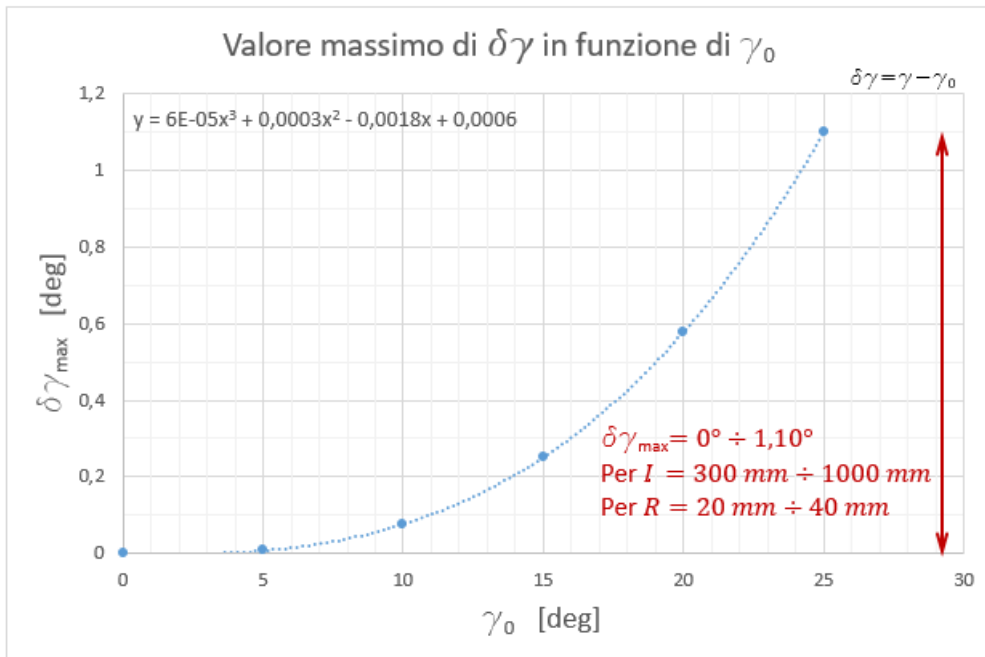
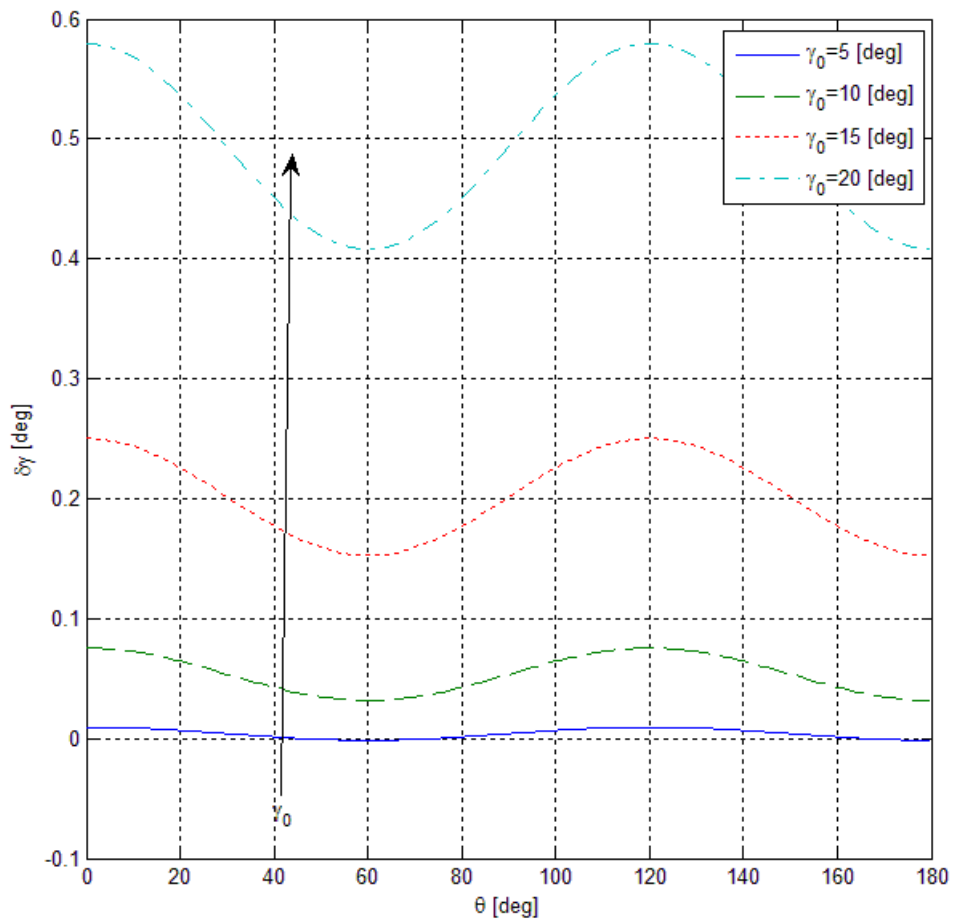


Figura 2.10.6: Variazione dell'angolo di articolazione in funzione del parametro  $\gamma_0$

- La variazione della distanza radiale del centro dei *roller*  $r_i$ , ha un andamento sinusoidale di periodo  $\pi$  la cui ampiezza aumenta all'aumentare del raggio  $R$  delle piste e dell'angolo di articolazione  $\gamma_0$  (figura 2.10.8), mentre non è influenzata da  $l$  (figura 2.10.7). Inoltre il valore massimo di  $r_i$ , essendo proporzionale a  $R$  risulta essere influenzato solo dall'angolo di articolazione. A livello di progetto interessa quindi avere la variazione di  $r_i$  in funzione di  $\gamma_0$  e di  $R$ , in particolare sono stati esplicitati il rapporto  $\frac{r_i}{R}$ , espresso in percentuale che è funzione solo dell'angolo di articolazione del giunto, mentre  $\delta r_i$  che è funzione sia di  $\gamma_0$  che di  $R$  in figura 2.10.9.

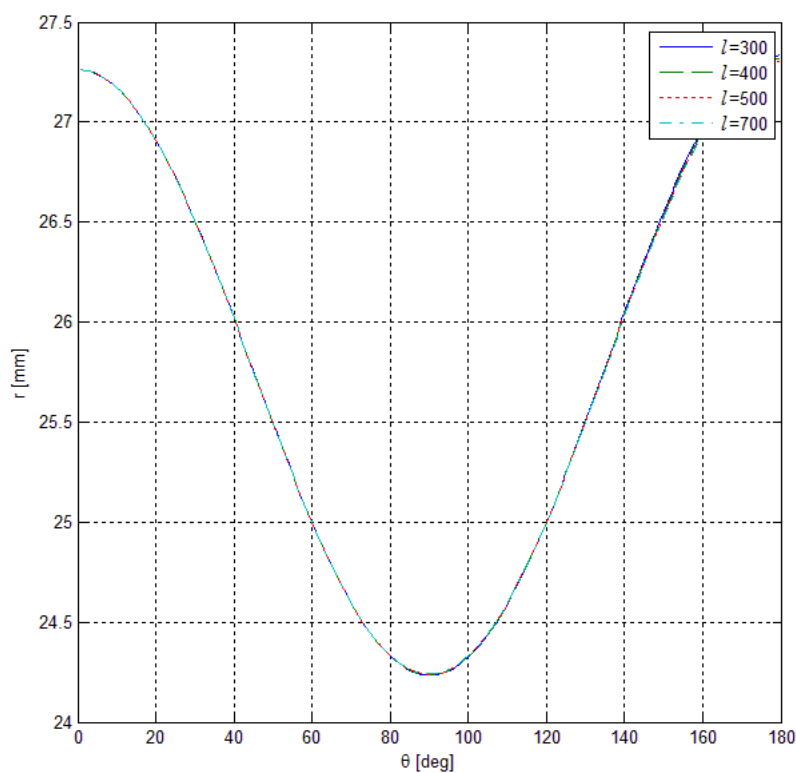


Figura 2.10.7: Andamento distanza radiale dei centri dei *roller* al variare del parametro  $l$

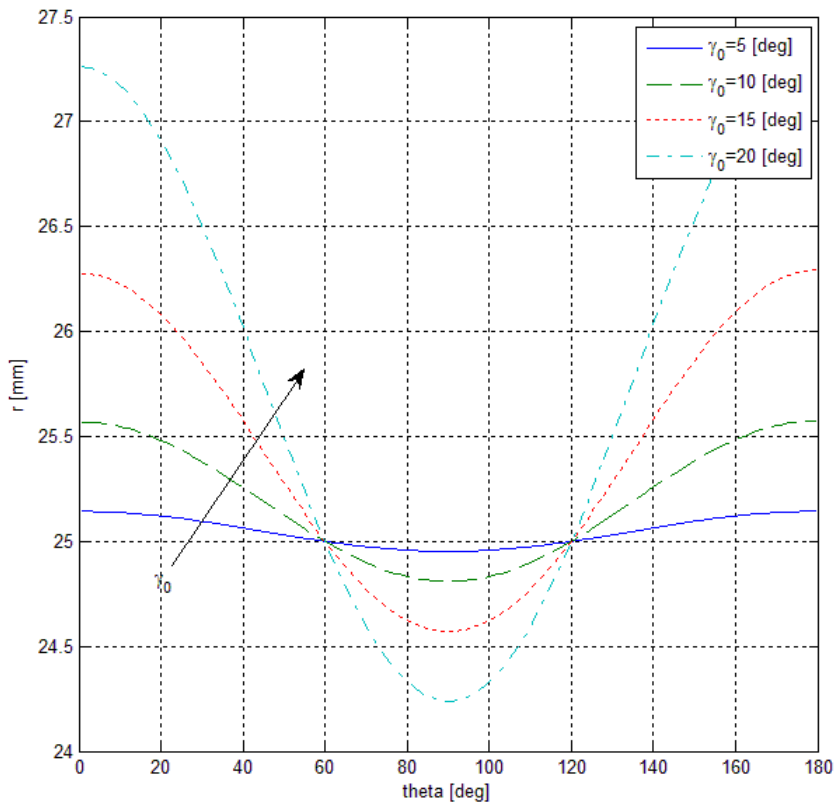
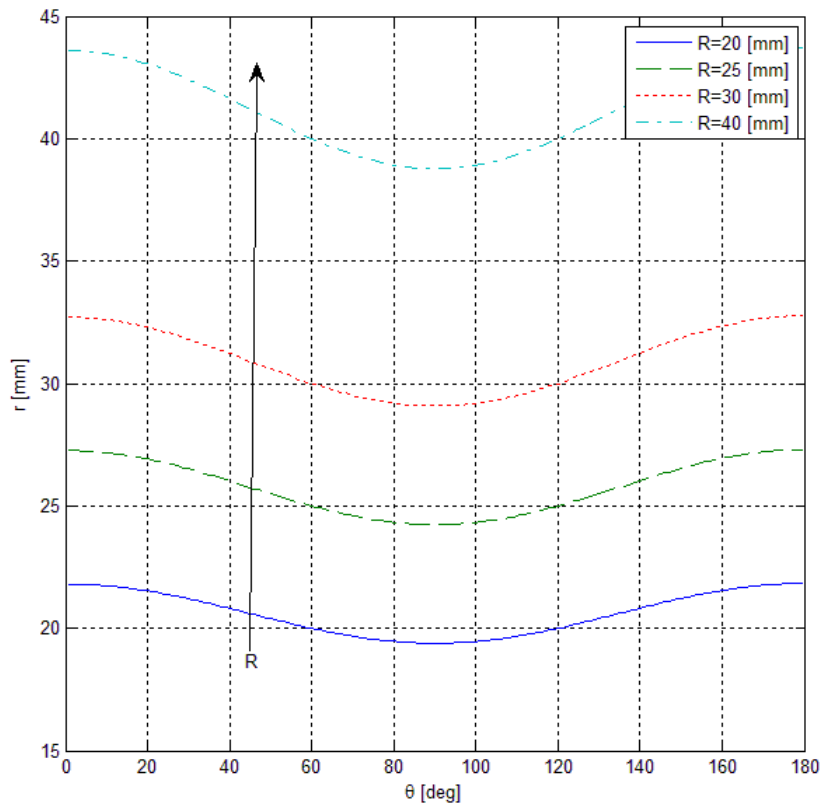


Figura 2.10.8: Andamento distanza radiale dei centri dei *roller* al variare dei parametri  $R$  e  $\gamma_0$



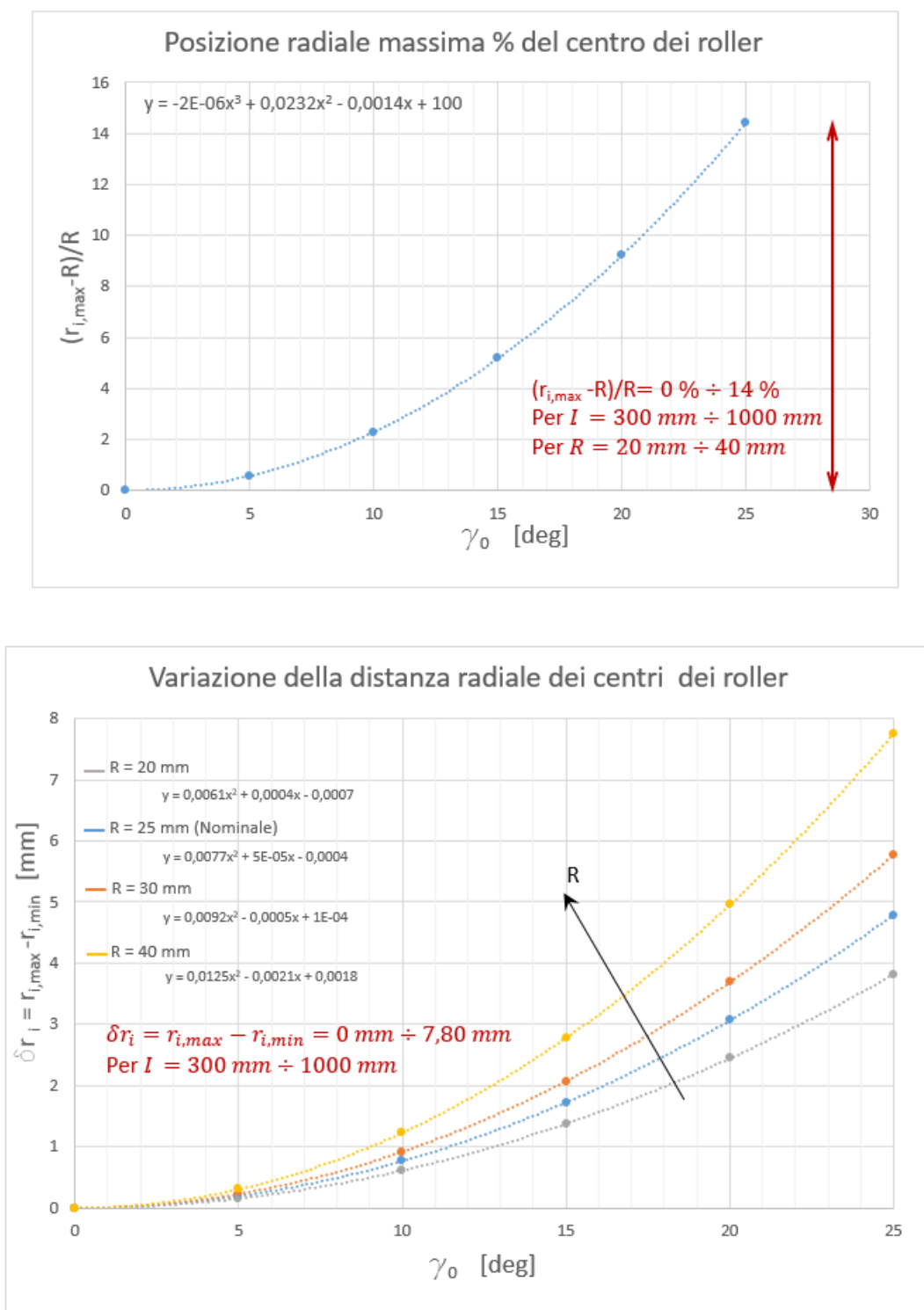


Figura 2.10.9: A sinistra si riporta la la distanza radiale massima percentuale in funzione dell'angolo  $\gamma_0$ ; a destra la corsa radiale del roller in funzione dei parametri  $\gamma_0$  e  $R$

- La variazione della traiettoria lungo cui corrono i roller durante la rotazione. Tale profilo risulta non essere influenzato dalla lunghezza dell'albero  $l$ , come si vede

in figura 2.10.10. L'angolo di articolazione tende invece a modificare il percorso da circolare, nel caso di  $\gamma_0 = 0$ , a ellittico con una distanza tra i fuochi sempre maggiore (figura 2.10.12). Il parametro  $R$  da solo un contributo sulla dimensione del percorso come si può notare in figura 2.10.11.

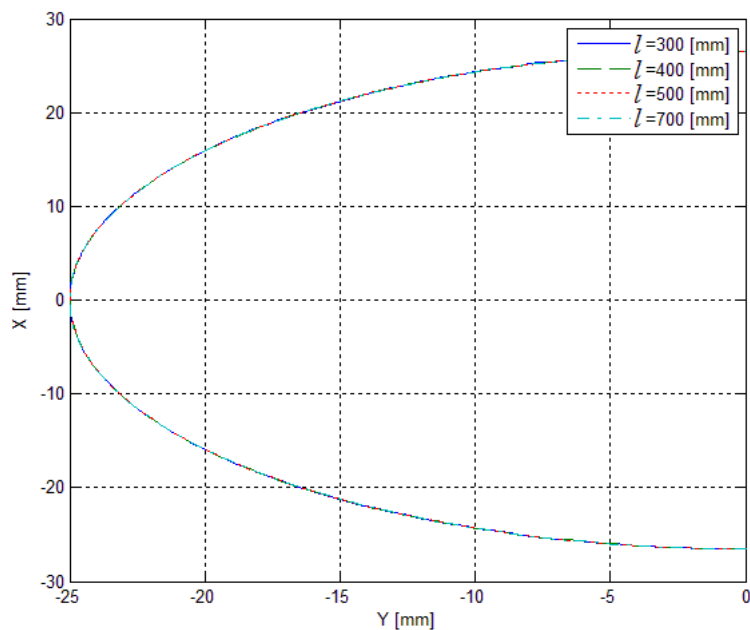


Figura 2.10.10: Traiettoria percorsa dai centri dei *roller* al variare del parametro  $l$ .

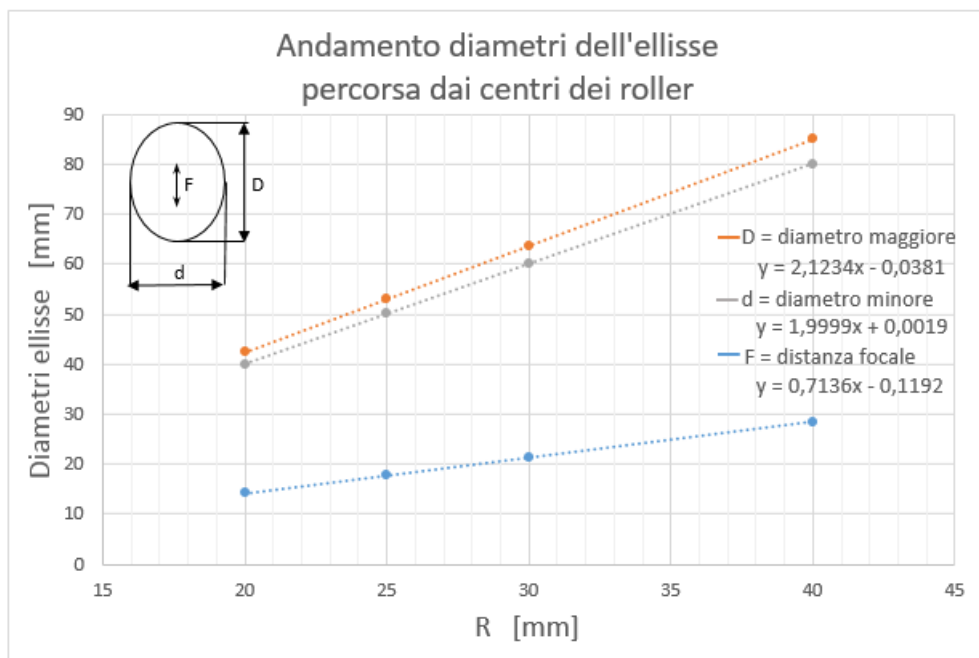
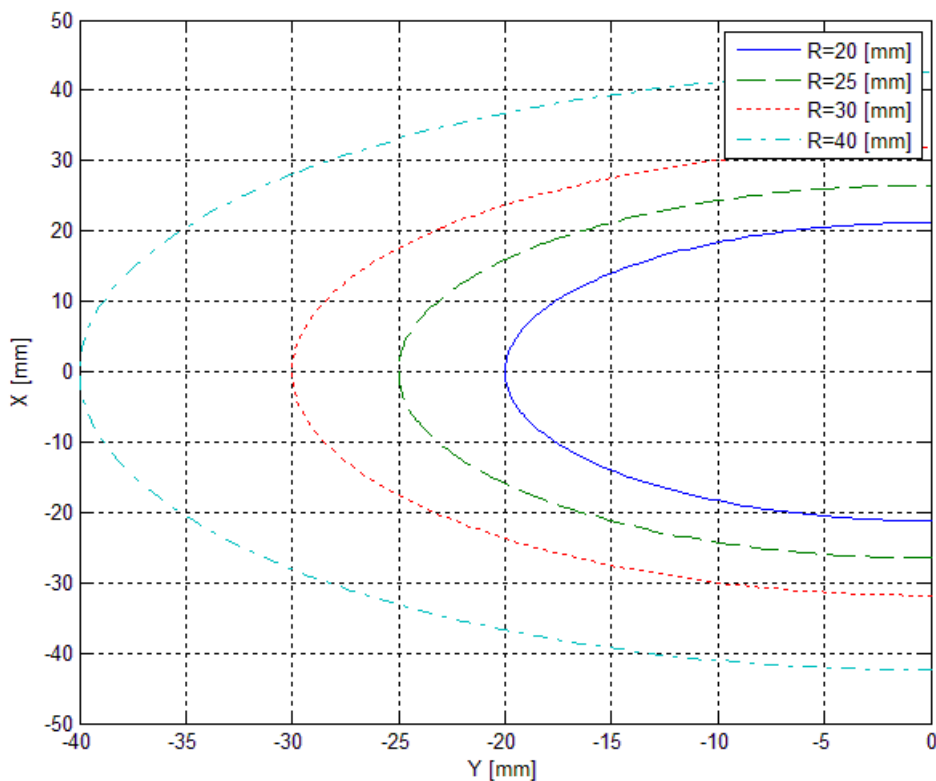


Figura 2.10.11: A sinistra traiettoria percorsa dai centri dei roller al variare del parametro R; a destra andamento dei diametri (maggiore e minore) del percorso ellittico al variare di R.

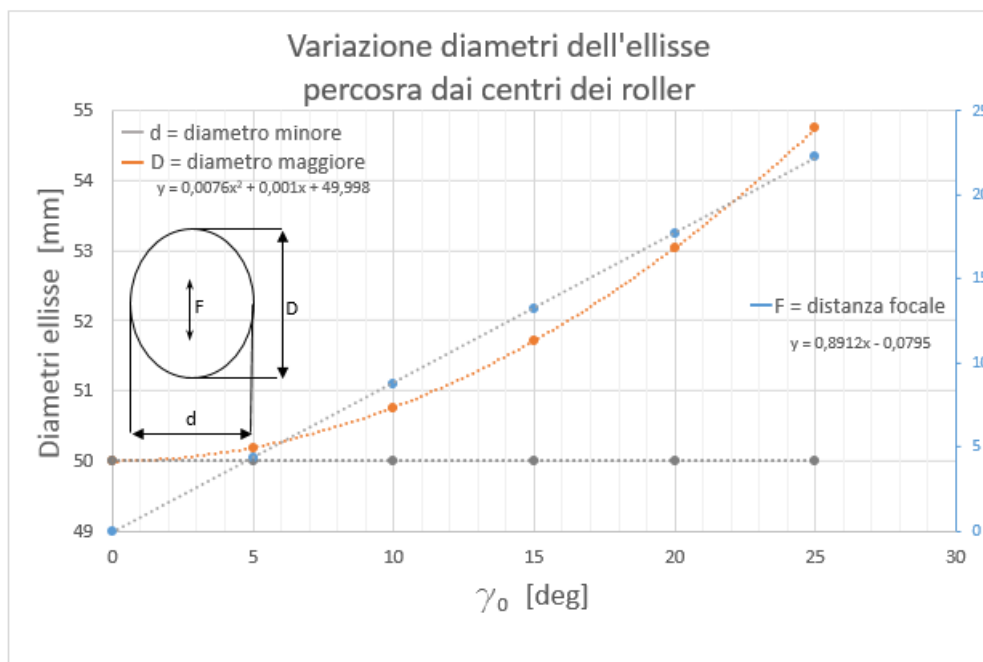
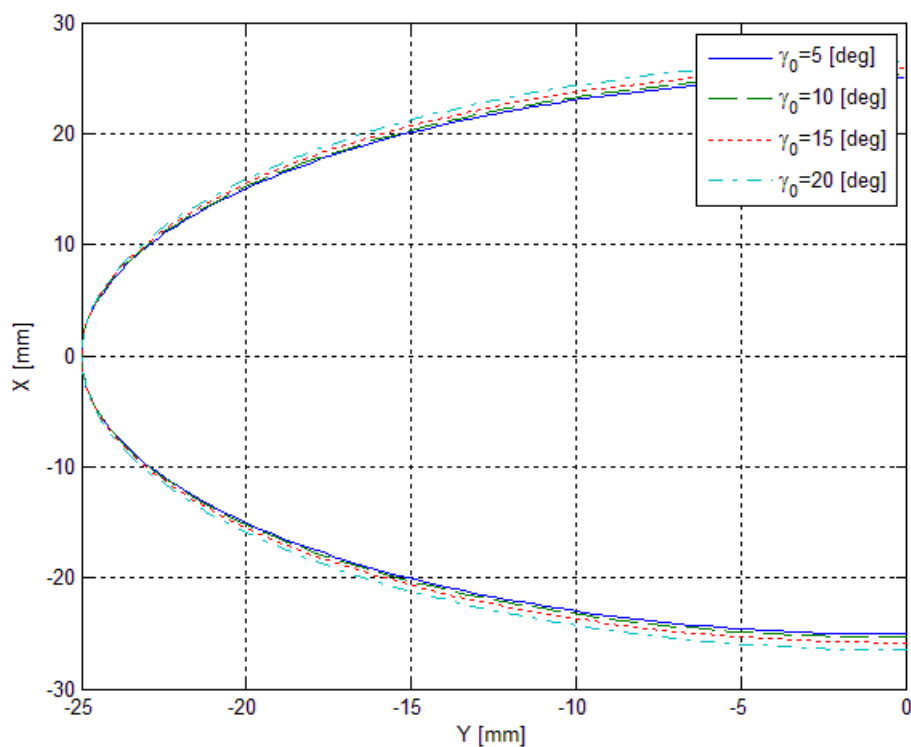


Figura 2.10.12: A sinistra traiettoria percorsa dai centri dei roller al variare del parametro  $\gamma_0$ ; a destra andamento dei diametri (maggiore e minore) del percorso ellittico al variare di  $\gamma_0$ .

- L'eccentricità (figura 2.10.13) risulta essere dipendente dal raggio delle piste  $R$  e dall'angolo di articolazione del giunto  $\gamma_0$ , in particolare all'aumentare di questi l'ec-

centricità risulta sempre maggiore. La lunghezza dell'albero  $l$  invece non da alcun effetto.

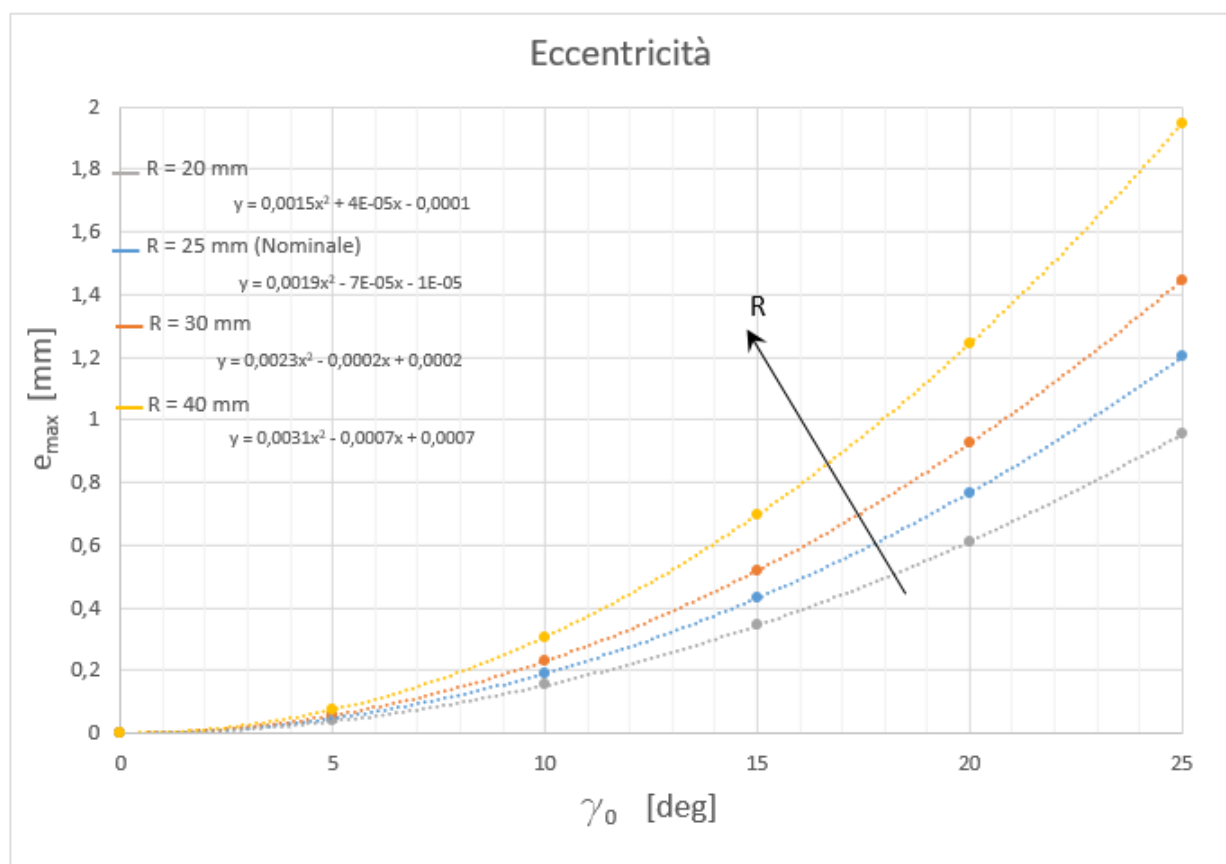
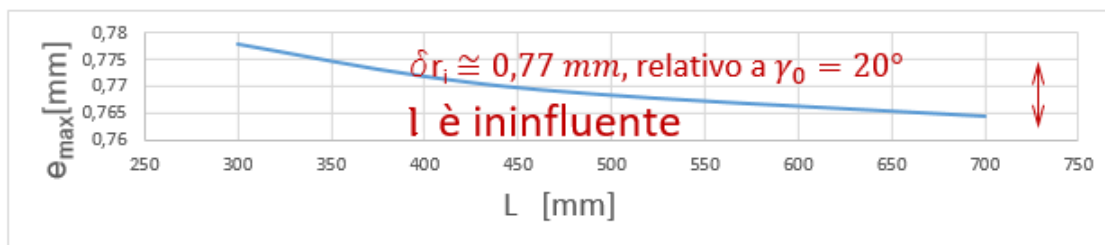


Figura 2.10.13: Andamento dell'eccentricità in funzione dei parametri  $\gamma_0$ ,  $R$  e  $l$ .

Questi diagrammi sono fondamentali in sede di progetto poiché permettono di proporre in consapevolmente tutti i componenti del giunto a tripode avendo così modo di verificare la loro prestazione in termini cinematici.

## 2.11 Velocità e accelerazioni

Dai risultati riportati nella sezione §2.10 è possibile in prima approssimazione considerare  $\theta - \psi \simeq 0$  da cui  $\psi \simeq \theta$  e  $\gamma \simeq \text{cost.}$  Tenendo conto di ciò se si considerano le equazioni 2.5.16, 2.6.2; e 2.6.3 si ha:

- Moto del centro dello *spider*

$$\begin{cases} X = a = e \left[ \sin 3\psi \sin(\theta - \psi) - \cos \gamma \cos 3\psi \cos(\theta - \psi) \right] \\ Y = b = e \left[ -\sin 3\psi \cos(\theta - \psi) - \cos \gamma \cos 3\psi \sin(\theta - \psi) \right] \\ |Z^* - c| = e \sin \gamma \cos 3\psi \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = a \simeq -e \cos \gamma \cos 3\theta \\ Y = b \simeq -e \sin 3\theta \\ Z^* - c \simeq -e \sin \gamma \cos 3\theta \end{cases}$$

derivando rispetto al tempo si ha:

$$\begin{cases} \dot{a} \simeq 3\dot{\theta}e \cos \gamma \sin 3\theta \\ \dot{b} \simeq -3\dot{\theta}e \cos 3\theta \\ \dot{Z}^* \simeq 3\dot{\theta}e \sin \gamma \sin 3\theta \end{cases}$$

derivando una seconda volta si ottengono le accelerazioni:

$$\begin{cases} \ddot{a} \simeq 3\ddot{\theta}e \cos \gamma \sin 3\theta + 9\dot{\theta}^2e \cos \gamma \cos 3\theta \\ \ddot{b} \simeq -3\ddot{\theta}e \cos 3\theta + 9\dot{\theta}^2e \sin 3\theta \\ \ddot{Z}^* \simeq 3\ddot{\theta}e \sin \gamma \sin 3\theta + 9\dot{\theta}^2e \sin \gamma \cos 3\theta \end{cases} \quad (2.11.1)$$

Per fare una stima approssimativa dei valori massimi di accelerazione si considera che  $e_{max} = 2 \cdot 10^{-3}$  [m] (valutata impostando all'interno del programma di risoluzione  $\gamma_0 = 25^\circ$ ,  $R = 40\text{mm}$ ,  $l = 300\text{mm}$ );  $(\cos \gamma)_{min} = 0,9$ ;  $(\sin \gamma)_{max} = 0,42$ ;  $(\sin 3\theta)_{max} = (\cos 3\theta)_{max} = 1$ , considerando una velocità angolare massima di 100 rad/s a cui il giunto può trovarsi nelle condizioni più gravose si ha:

$$\begin{cases} \ddot{a} \simeq 9\dot{\theta}^2e \cos \gamma \cos 3\theta = 163[m/s^2] \\ \ddot{b} \simeq 9\dot{\theta}^2e \sin 3\theta = 180[m/s^2] \\ \ddot{Z}^* \simeq 9\dot{\theta}^2e \sin \gamma \cos 3\theta = 76[m/s^2] \end{cases}$$

- Moto dei centri dei *roller*

$$\begin{cases} \tilde{X}_i = -\frac{R}{\cos \gamma} \cos \psi_i \\ \tilde{Y}_i = -R \sin \psi_i \\ Z_i = c - \frac{R}{2} \tan \gamma [2 \cos \psi_i + (1 - \cos \gamma) \cos 3\psi] \end{cases}$$

considerando le ipotesi fatte:

$$\begin{cases} \tilde{X}_i \simeq -\frac{R}{\cos \gamma} \cos \theta_i \\ \tilde{Y}_i \simeq -R \sin \theta_i \\ Z_i \simeq c - \frac{R}{2} \tan \gamma [2 \cos \theta_i + (1 - \cos \gamma) \cos 3\theta] \end{cases}$$

derivando rispetto al tempo:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{X}}_i \simeq \dot{\theta} \frac{R}{\cos \gamma} \sin \theta_i \\ \dot{\tilde{Y}}_i \simeq -\dot{\theta} R \cos \theta_i \\ \dot{Z}_i \simeq -\frac{R}{2} \tan \gamma [-2\dot{\theta} \sin \theta_i - (1 - \cos \gamma) 3\dot{\theta} \sin 3\theta] \end{cases}$$

da cui le accelerazioni risultano:

$$\begin{cases} \ddot{\tilde{X}}_i \simeq \ddot{\theta} \frac{R}{\cos \gamma} \sin \theta_i + \dot{\theta}^2 \frac{R}{\cos \gamma} \cos \theta_i \\ \ddot{\tilde{Y}}_i \simeq -\ddot{\theta} R \cos \theta_i + \dot{\theta}^2 R \sin \theta_i \\ \ddot{Z}_i \simeq -\frac{R}{2} \tan \gamma [-2\ddot{\theta} \sin \theta_i - 2\dot{\theta}^2 \cos \theta_i - (1 - \cos \gamma) (3\ddot{\theta} \sin 3\theta + 9\dot{\theta}^2 \cos 3\theta)] \end{cases} \quad (2.11.2)$$

e sostituendo i valori definiti precedentemente si ottiene:

$$\begin{cases} \ddot{\tilde{X}}_i \simeq \dot{\theta}^2 \frac{R}{\cos \gamma} \cos \theta_i = 441 [m/s^2] \\ \ddot{\tilde{Y}}_i \simeq \dot{\theta}^2 R \sin \theta_i = 400 [m/s^2] \\ \ddot{Z}_i \simeq -\frac{R}{2} \tan \gamma [-2\dot{\theta}^2 \cos \theta_i - (1 - \cos \gamma) 9\dot{\theta}^2 \cos 3\theta] = 265,2 [m/s^2] \end{cases}$$

Questi corrispondono ai valori massimi delle accelerazioni riscontrabili sui componenti. Prendendo a riferimento i valori nominali dei parametri  $\gamma_0 = 20^\circ$ ,  $R = 25mm$ ,  $l = 500mm$ , da cui deriva un'eccentricità  $e_{max} = 0,77mm$  le accelerazioni risultano:

$$\begin{aligned}
\ddot{a} &\simeq 9\dot{\theta}^2 e \cos \gamma \cos 3\theta = 65,1 & [m/s^2] \\
\ddot{b} &\simeq 9\dot{\theta}^2 e \sin 3\theta = 69,3 & [m/s^2] \\
\ddot{Z}^* &\simeq 9\dot{\theta}^2 e \sin \gamma \cos 3\theta = 23,7 & [m/s^2] \\
\ddot{X}_i &\simeq \dot{\theta}^2 \frac{R}{\cos \gamma} \cos \theta_i = 266 & [m/s^2] \\
\ddot{Y}_i &\simeq \dot{\theta}^2 R \sin \theta_i = 250 & [m/s^2] \\
\ddot{Z}_i &\simeq -\frac{R}{2} \tan \gamma \left[ -2\dot{\theta}^2 \cos \theta_i - (1 - \cos \gamma) 9\dot{\theta}^2 \cos 3\theta \right] = 115,7 & [m/s^2]
\end{aligned}$$

In seguito si riporta un metodo alternativo per la valutazione delle relazioni sulle accelerazioni. Lo scopo è dimostrare tramite il confronto dei risultati finali che le equazioni 2.11.1 e 2.11.2 sono applicabili in generale. Nel secondo procedimento proposto si utilizzano i grafici (ricavati considerando i parametri nominali di  $\gamma_0$ ,  $R$  e  $l$ ) che descrivono gli andamenti delle posizioni del centro dello *spider* e dei centri dei *roller* in funzione dell'angolo di rotazione in ingresso  $\theta$ . Per ognuno di questi diagrammi si costruisce la funzione sinusoidale di ampiezza  $A_{\square}$  e periodo  $B_{\square}$  che replica l'andamento. Successivamente si calcolano la velocità e le accelerazioni.

### 2.11.1 Moto del centro dello spider

Di seguito si riportano l'analisi e i diagrammi relativi al moto del centro dello *spider*. In particolare con  $a$ ,  $b$  e  $Z^* - c$  si intendono rispettivamente le posizioni lungo  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ .

In riferimento alla figura 2.11.1, la distanza  $a$  può essere rappresentata dalla relazione:

$$a(\theta) = A_a \cdot \sin(B_a \theta) = -0,7 \cdot 10^{-3} \sin\left(3\theta + \frac{\pi}{2}\right) \quad [m]$$

da cui:

$$\begin{aligned}
\dot{a}(\theta) &= -3\dot{\theta} \cdot 0,7 \cdot 10^{-3} \cos\left(3\theta + \frac{\pi}{2}\right) & [m/s] \\
\ddot{a}(\theta) &= -3\ddot{\theta} \cdot 0,7 \cdot 10^{-3} \cos\left(3\theta + \frac{\pi}{2}\right) + 9\dot{\theta}^2 \cdot 0,7 \cdot 10^{-3} \sin\left(3\theta + \frac{\pi}{2}\right) & [m/s^2]
\end{aligned}$$

Considerando  $\dot{\theta} = 100$  rad/s si ricava:

$$\ddot{a}_{max} = 63[m/s^2]$$

a fronte di 65,1  $[m/s^2]$  calcolati con il precedente metodo ( 3,2%).

La quota  $b$  è esprimibile (considerando la figura 2.11.2) per mezzo di:



$$b(\theta) = A_b \cdot \sin(B_b \theta) = -0,76 \cdot 10^{-3} \sin(3\theta) \quad [m]$$

da cui:

$$\dot{b}(\theta) = -3\dot{\theta} \cdot 0,76 \cdot 10^{-3} \cos(3\theta) \quad [m/s]$$

$$\ddot{b}(\theta) = -3\ddot{\theta} \cdot 0,76 \cdot 10^{-3} \cos(3\theta) + 9\dot{\theta}^2 \cdot 0,76 \cdot 10^{-3} \sin(3\theta) \quad [m/s^2]$$

quindi:

$$\ddot{b}_{max} = 68,4 [m/s^2]$$

mentre con il precedente metodo risultavano  $69,3 [m/s^2]$  (1,3%).

Dalla figura 2.11.3 la distanza  $Z^* - c$  è riconducibile alla relazione:

$$Z^* - c(\theta) = A_{Z^*} \cdot \sin(B_{Z^*} \theta) = -0,25 \cdot 10^{-3} \sin(3\theta + \frac{\pi}{2}) \quad [m]$$

dove  $c$  rappresenta l'*offset* dato dallo scorrimento assiale dello *spider* all'interno del *pot*

dalla precedente relazione si ricava:

$$\dot{Z}^*(\theta) = -3\dot{\theta} \cdot 0,25 \cdot 10^{-3} \cos(3\theta + \frac{\pi}{2}) \quad [m/s]$$

$$\ddot{Z}^*(\theta) = -3\ddot{\theta} \cdot 0,25 \cdot 10^{-3} \cos(3\theta + \frac{\pi}{2}) + 9\dot{\theta}^2 \cdot 0,25 \cdot 10^{-3} \sin(3\theta + \frac{\pi}{2}) \quad [m/s^2]$$

da cui si calcola:

$$\ddot{Z}^*_{max} = 22,5 [m/s^2]$$

che va confrontato con il risultato derivante dal procedimento più generale, pari a  $23,7 [m/s^2]$  (5%).

Come si vede questi 3 grafici presentano un periodo pari  $\frac{2}{3}\pi$ , mentre per i diagrammi che seguiranno il periodo sarà pari a  $2\pi$ .

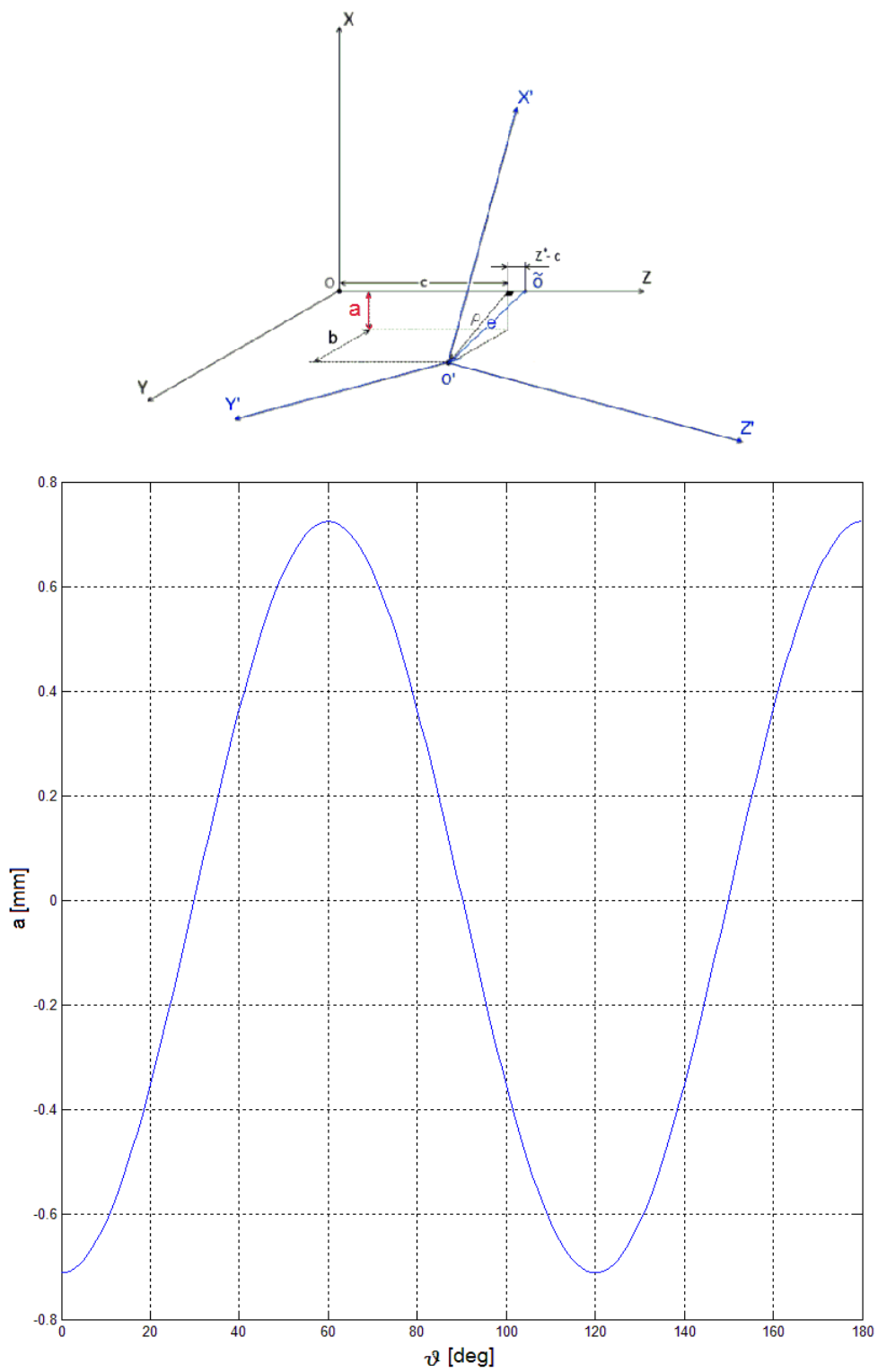


Figure 2.11.1: Andamento della distanza lungo  $X$  del centro dello *spider*.

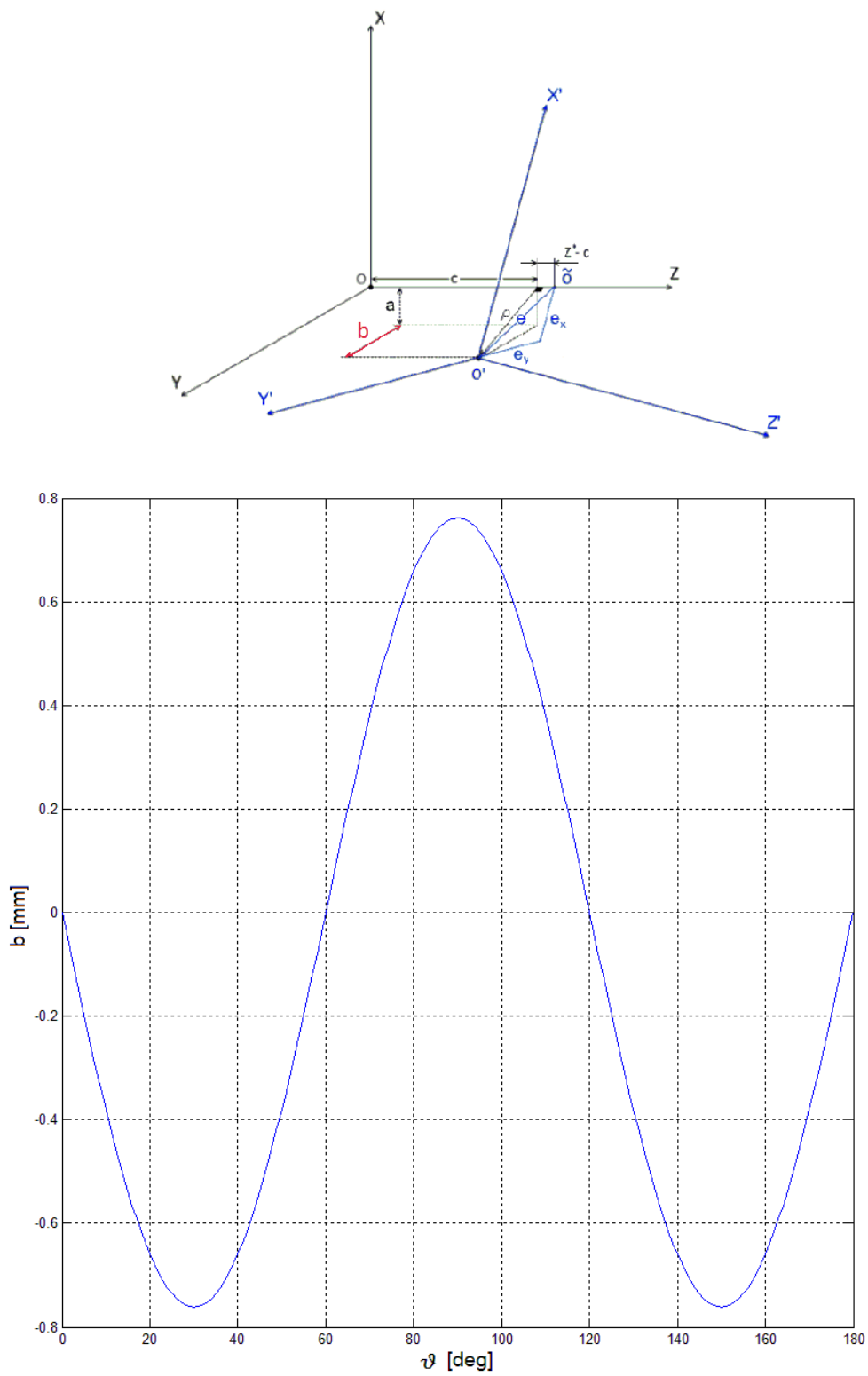


Figure 2.11.2: Andamento della distanza lungo  $Y$  del centro dello *spider*.

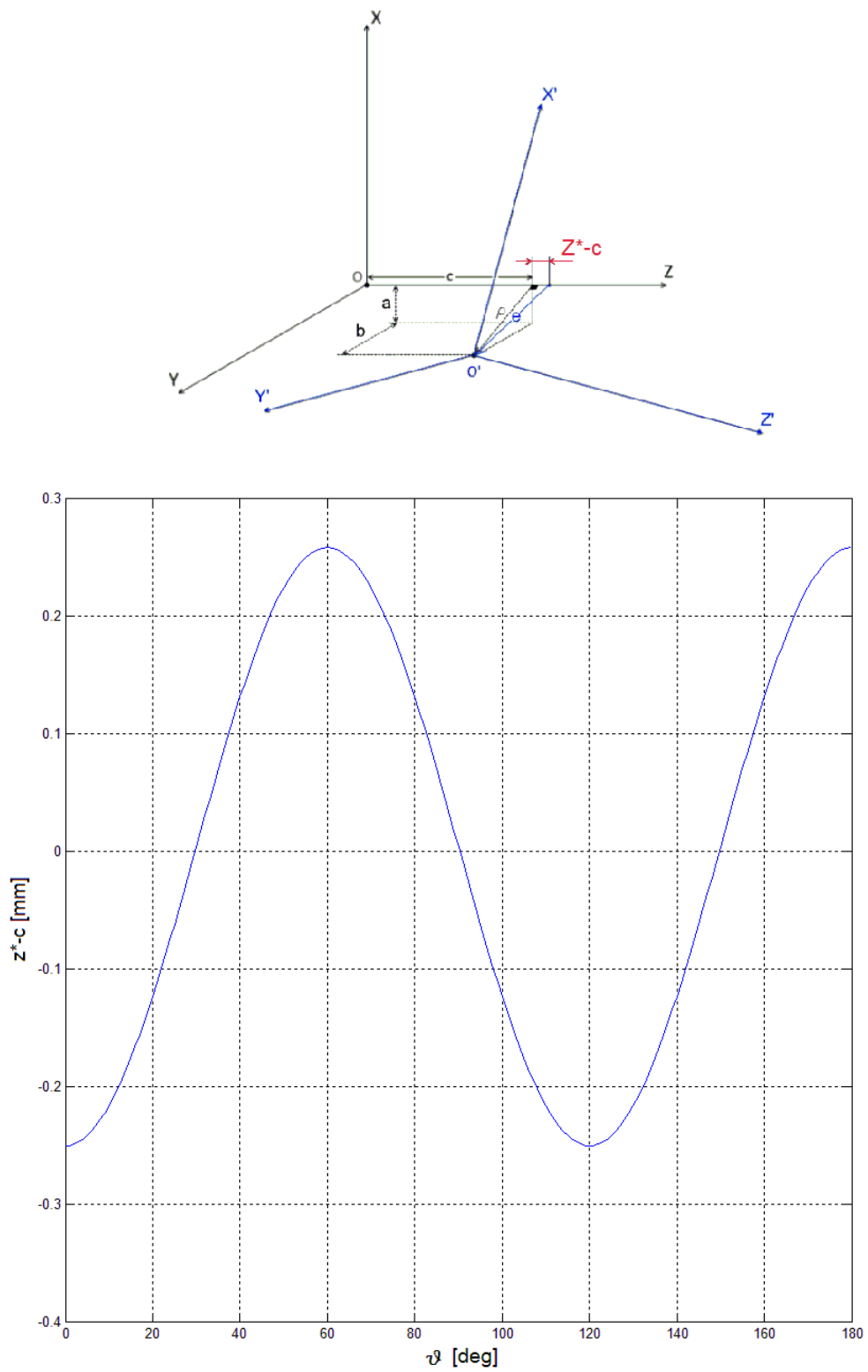


Figure 2.11.3: Andamento della distanza lungo Z del centro dello *spider*.

### 2.11.2 Moto del centro di ciascun roller

Di seguito si riportano l'analisi e i diagrammi relativi al moto del centro dei *roller*. In particolare con  $X_i$ ,  $Y_i$  e  $Z_i - c$  si intendono le tre posizioni lungo gli assi  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  della terna fissa.

Prendendo a riferimento la figura 2.11.4 a quota  $X_i$  è esprimibile per mezzo di:

$$X_i(\theta) = A_X \cdot \sin(B_X \theta) = -26,5 \cdot 10^{-3} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \quad [m]$$

da cui:

$$\dot{X}_i(\theta) = -\dot{\theta} \cdot 26,5 \cdot 10^{-3} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \quad [m/s]$$

$$\ddot{X}_i(\theta) = -\ddot{\theta} \cdot 26,5 \cdot 10^{-3} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + \dot{\theta}^2 \cdot 26,5 \cdot 10^{-3} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \quad [m/s^2]$$

considerando  $\dot{\theta} = 100 \text{ rad/s}$  si calcola:

$$\ddot{X}_{i\max} = 265 [m/s^2]$$

mentre con il primo approccio risultava  $266 [m/s^2]$  (0,4%).

Analogamente considerando la figura 2.11.5 la coordinata  $Y_i$  si può rappresentare con la funzione:

$$Y_i(\theta) = A_Y \cdot \sin(B_Y \theta) = -25 \cdot 10^{-3} \sin(\theta) \quad [m]$$

da cui:

$$\dot{Y}_i(\theta) = -\dot{\theta} \cdot 25 \cdot 10^{-3} \cos(\theta) \quad [m/s]$$

$$\ddot{Y}_i(\theta) = -\ddot{\theta} \cdot 25 \cdot 10^{-3} \cos(\theta) + \dot{\theta} \cdot 25 \cdot 10^{-3} \sin(\theta) \quad [m/s^2]$$

da cui si calcola:

$$\ddot{Y}_{i\max} = 250 [m/s^2]$$

che coincide con risultato ottenuto inizialmente (0%).

Dalla figura 2.11.6 la distanza  $Z_i - c$  è riconducibile alla relazione:

$$Z_i - c(\theta) = A_Z \cdot \sin(B_Z \theta) = 9,11 \cdot 10^{-3} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \quad [m]$$

dove  $c$  rappresenta l'*offset* dato dallo scorrimento assiale dello *spider* all'interno del *pot*. Dalla precedente equazione si ricava:

$$\dot{Z}^*(\theta) = \dot{\theta} \cdot 9,11 \cdot 10^{-3} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \quad [m/s]$$

$$\ddot{Z}^*(\theta) = \ddot{\theta} \cdot 9,11 \cdot 10^{-3} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) - \dot{\theta}^2 \cdot 9,11 \cdot 10^{-3} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) [m/s^2]$$

Quindi l'accelerazione massima risulta:

$$\ddot{Z}^*_{max} = 91,1 [m/s^2]$$

a fronte di un valore di 115,7  $[m/s^2]$  derivante dal primo approccio (21,3%).

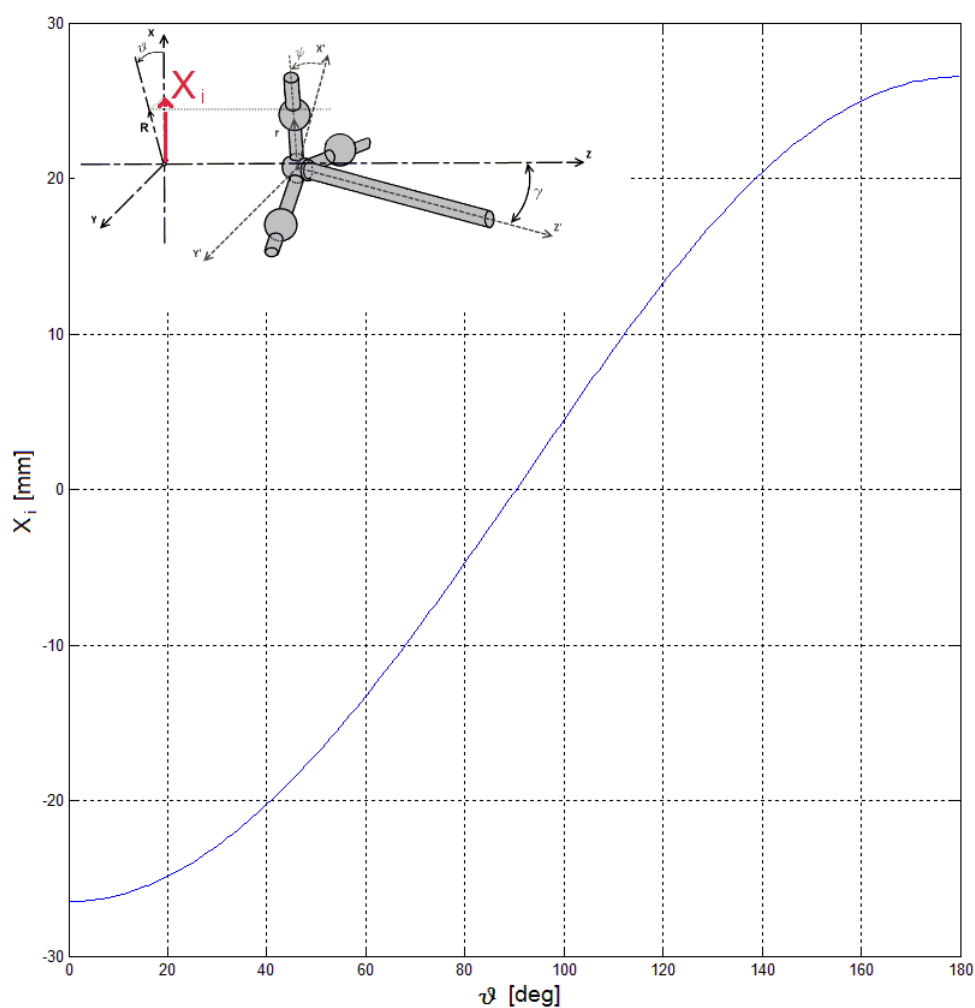


Figure 2.11.4: Andamento della distanza lungo  $X$  del centro dei roller.

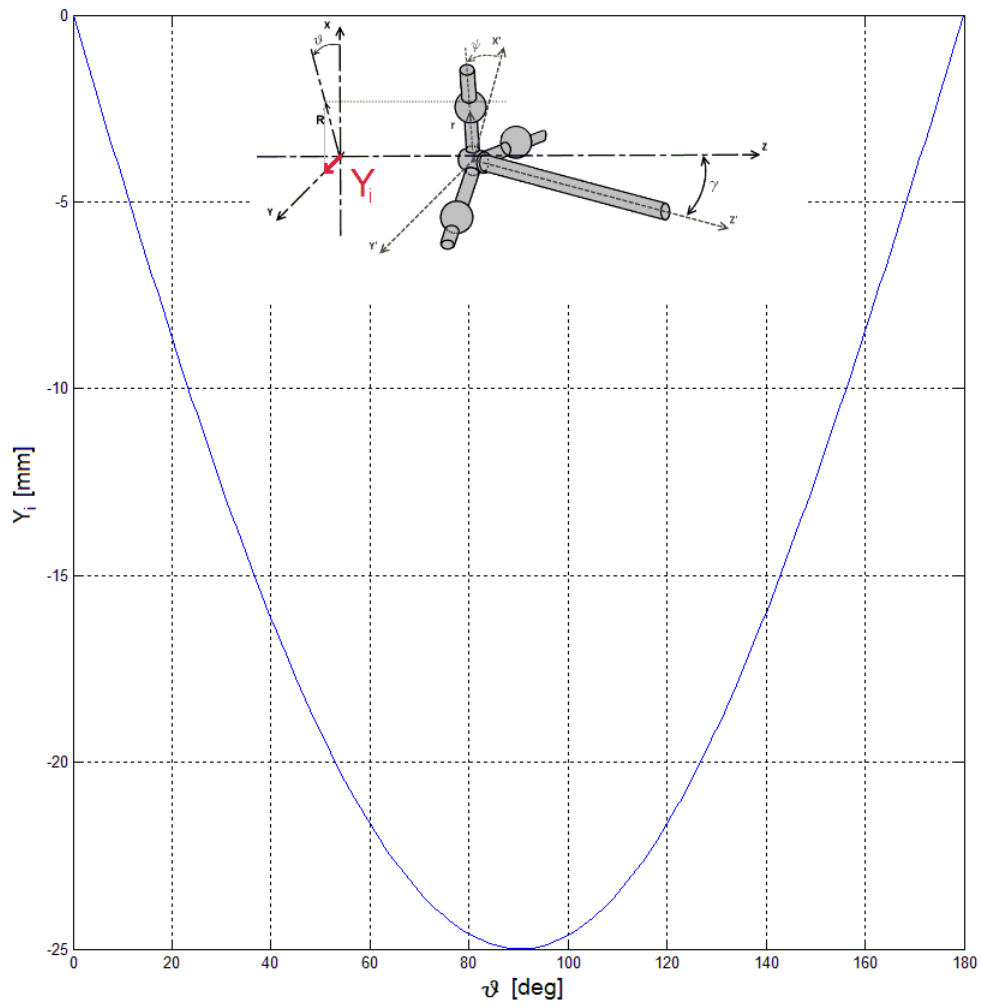


Figura 2.11.5: Andamento della distanza lungo  $Y$  del centro dei roller.

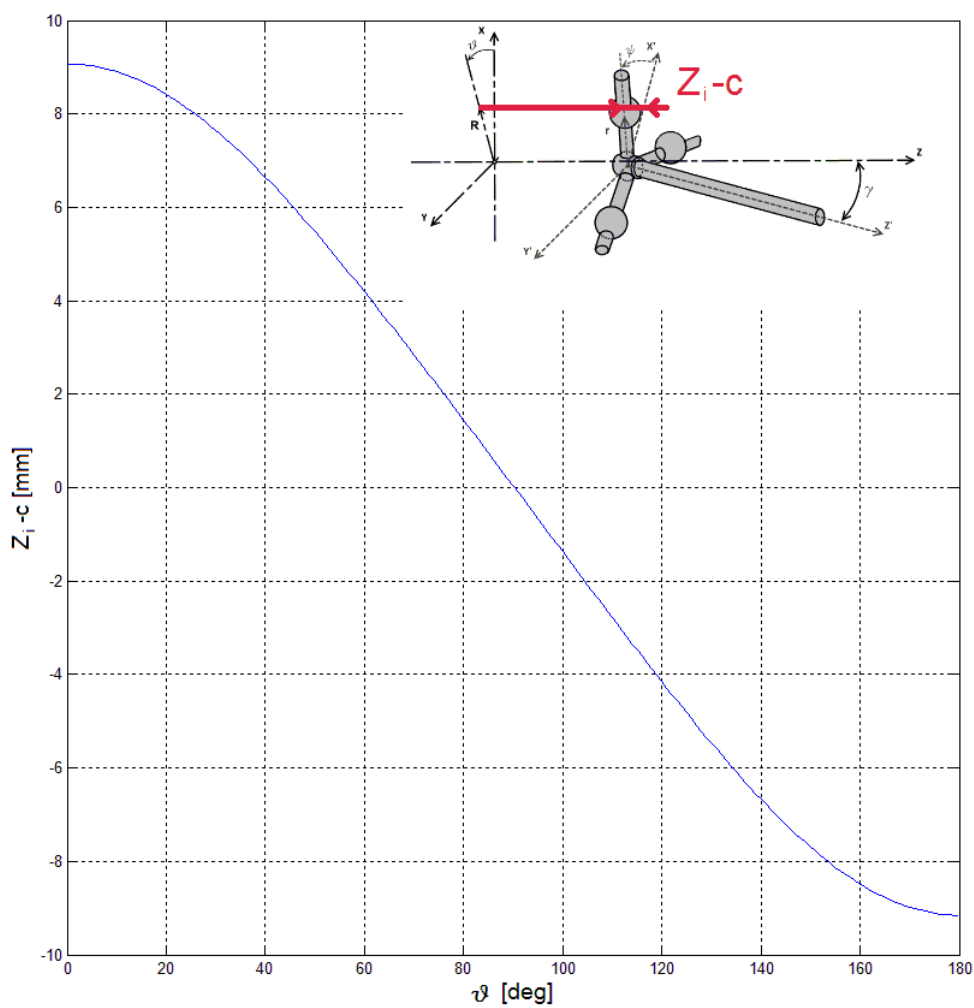


Figure 2.11.6: Andamento della distanza lungo  $Z$  del centro dei roller.



### 2.11.3 Calcolo dell'irregolarità di trasmissione

Considerando la differenza ingresso-uscita  $\Delta = \theta - \psi$  è possibile determinare il grado di irregolarità del giunto a tripode. L'andamento di  $\Delta$  in funzione di  $\theta$  riportato sotto risulta avere un andamento sinusoidale di periodo  $\frac{2}{3}\pi$ . Tale grafico è stato ottenuto impostando i valori nominali di raggio piste ( $R = 25mm$ ), lunghezza albero ( $l = 500mm$ ) e angolo di articolazione ( $\gamma = 20^\circ$ ).

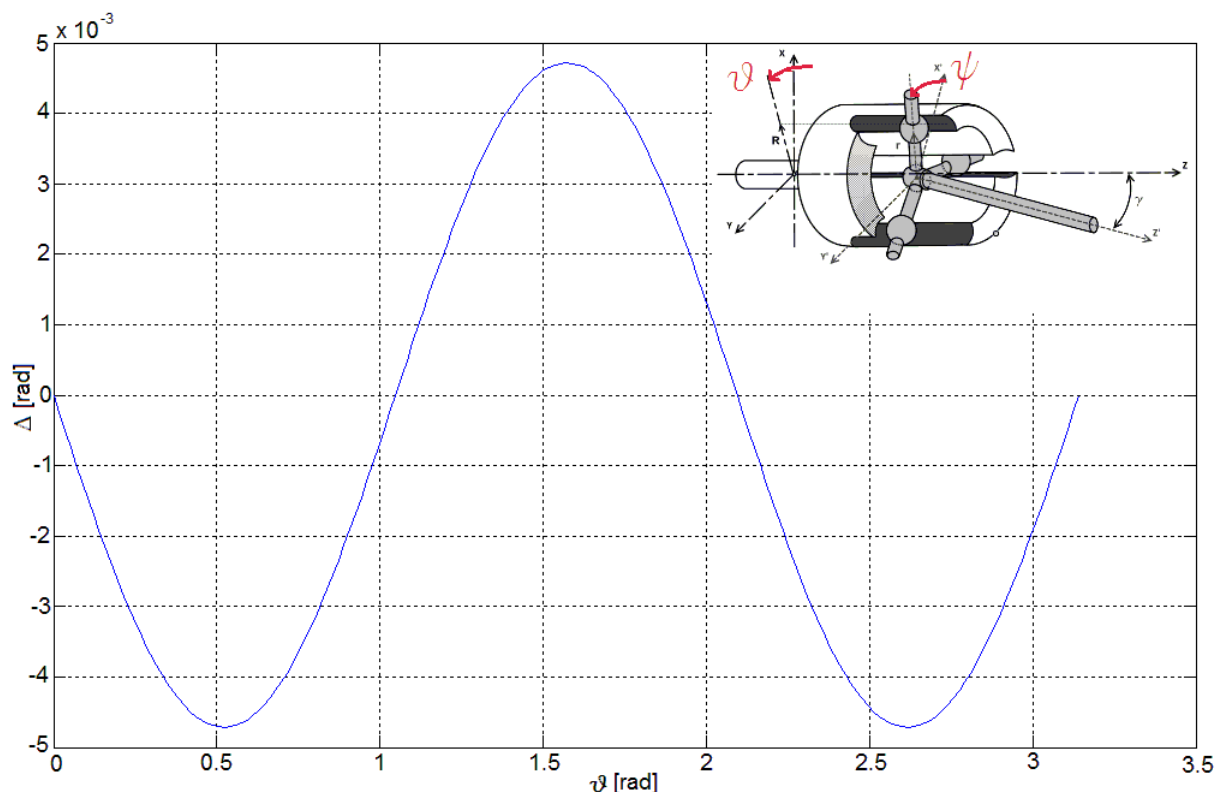


Figure 2.11.7: Andamento della differenza ingresso-uscita in funzione dell' ingresso.

Tale periodicità è esprimibile con la relazione:

$$\Delta(\theta) = A_{\Delta} \sin(B_{\Delta}\theta)$$

con  $A_{\Delta} = -4,7 \cdot 10^{-3}$  e  $B_{\Delta} = 3$ , quindi:

$$\Delta(\theta) = -4,7 \cdot 10^{-3} \sin(3\theta) \quad [rad]$$

da cui derivando rispetto al tempo si ha:

$$\dot{\Delta}(\theta) = -3\dot{\theta} \cdot 4,7 \cdot 10^{-3} \cos(3\theta) \quad [rad/s]$$

e

$$\ddot{\Delta}(\theta) = -3\ddot{\theta} \cdot 4,7 \cdot 10^{-3} \cos(3\theta) + 9\dot{\theta}^2 \cdot 4,7 \cdot 10^{-3} \sin(3\theta) \quad [rad/s^2] .$$

Dalle velocità è possibile esprimere il grado di irregolarità del giunto:

$$Irr = \frac{\Omega_{2max} - \Omega_{2min}}{\Omega_1} = \frac{(\dot{\theta} + \dot{\Delta}) - (\dot{\theta} - \dot{\Delta})}{\dot{\theta}} = \frac{2\dot{\Delta}}{\dot{\theta}}$$

sostituendo:

$$Irr_{max} = \frac{2 \cdot 3\dot{\theta} \cdot 4,7 \cdot 10^{-3}}{\dot{\theta}} = 28,2 \cdot 10^{-3} = 2,82\%.$$

# Capitolo 3

## Dinamica

In questo capitolo si riporta l'analisi bibliografica condotta per studiare i fenomeni dinamici a cui i giunti a tripode GI sono soggetti. Nella prima parte si descrivono in modo generale il *GAF* che è una forza alterna ad alta frequenza che si genera in direzione assiale, *LTS* che identifica la resistenza allo scorrimento esplicitata dal giunto quando si trova a lavorare con un certo angolo di articolazione e che comporta la trasmissione delle vibrazioni provenienti dal motore al telaio. Infine si fa un breve cenno alla coppia complementare dovuta all'articolazione del giunto. Nella seconda sezione si riporta un modello ad attrito che permette la stima del *GAF* e quindi utile per verifiche in ambito *NVH*.

### 3.1 Forze di disturbo

Anche se la progettazione dei giunti è standardizzata e basata sulla coppia che essi devono trasmettere, vi sono degli aspetti legati agli attriti interni, accoppiamenti e dinamiche che sono solo recentemente stati oggetto di analisi. Gli effetti dinamici possono essere generati dalle accelerazioni sui componenti e dagli attriti interni. Tuttavia dall'analisi bibliografica condotta è emerso che nel caso di velocità di ingresso costante  $\dot{\theta} = \text{cost}$  i contributi inerziali sono di fatto trascurabili rispetto alle forze generate dagli attriti interni. Il problema principalmente riscontrato nei veicoli è la generazione di vibrazioni ad alta frequenza durante i bruschi transitori. Tali vibrazioni sono dovute agli attriti che si instaurano all'interno del giunto tripode a causa dell'inclinazione dei *rollers* nelle piste (figura 3.1.1), ne deriva una forza assiale alternata ad alta frequenza chiamata *GAF* (*Generated Axial Force*).

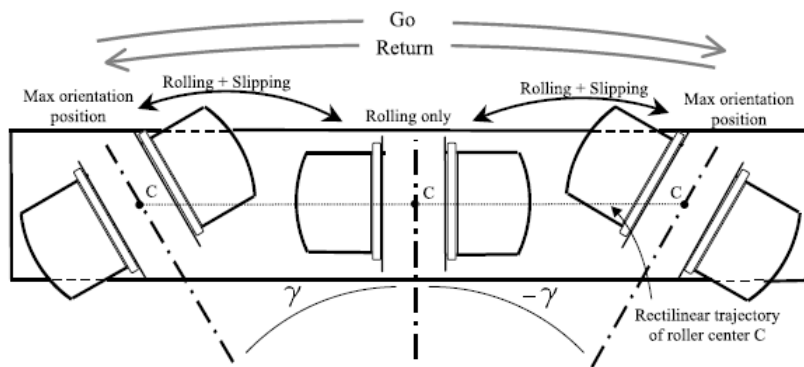


Figura 3.1.1: Comportamento dei roller durante la rotazione del pot.

Un esempio di misurazione del *GAF* è riportato nella pubblicazione di Chul-Hee Lee [4] dove i dati vengono acquisiti in due cicli completi della durata di 60 secondi, con una coppia applicata di 160 Nm per due angoli di articolazione,  $\gamma = 0^\circ$  e  $\gamma = 15^\circ$ . La prova inizia con lo spider del giunto nella posizione centrale che viene poi fatto scorrere di  $\pm 15\text{mm}$  a una velocità di 2 mm/s. La coppia durante la prova viene mantenuta costante e viene registrata la spinta assiale che è la principale causa del *GAF*. Nella figura 3.1.2 è riportato il banco prova utilizzato e il dettaglio dell’acquisizione del sensore di sforzo triassiale.

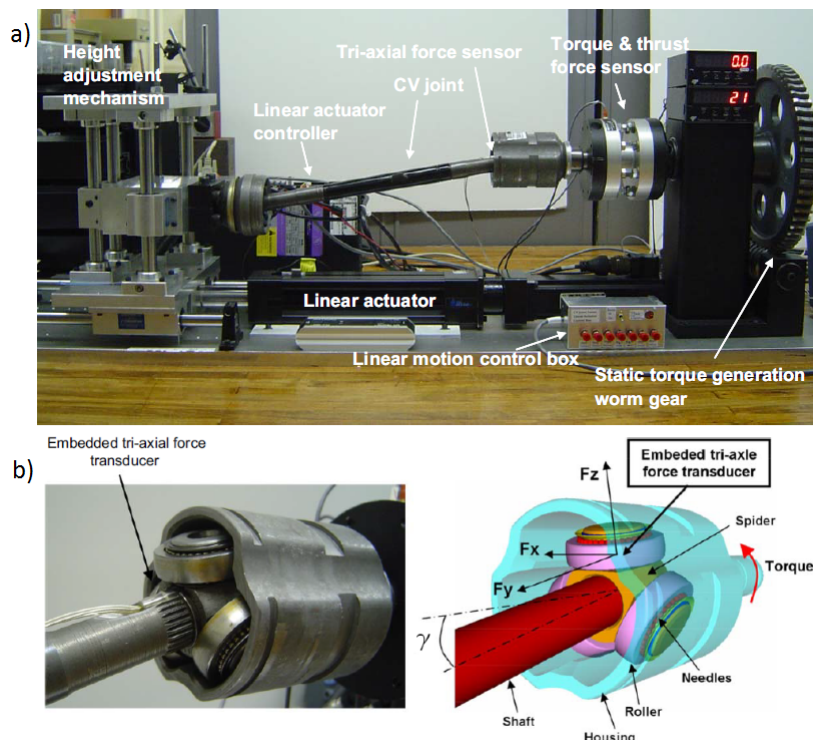


Figura 3.1.2: Dettagli misura del *GAF* condotta da Chul-Hee Lee[4]: a) Allestimento banco prova; b) Dettaglio posizionamento sensore di sforzo triassiale e direzioni delle sue componenti.

Nel caso di angolo di articolazione pari a zero il  $GAF$  risulta nullo, mentre nel caso di angolo  $\gamma = 15^\circ$  la spinta assiale ha una fluttuazione significativa. In figura 3.1.3 sono riportati gli andamenti delle tre componenti della forza agente sul *trunnion*, misurate con un trasduttore triassiale. Analizzando il grafico si intuisce che la fonte principale di attrito  $F_y$  è costante nel caso di  $\gamma = 0^\circ$ , mentre a  $\gamma = 15^\circ$  ha una variazione di 200 N. Per quanto riguarda la componente  $F_z$  diretta perpendicolarmente rispetto all'asse del l'albero, si vede essere negativa durante la corsa di rientro, ciò significa che tale forza in questa circostanza è di compressione mentre è di trazione in durante la corsa di allungamento. Si noti che, nonostante la presenza di una forza di compressione ( $F_z$  negativo) la forza di attrito totale e il coefficiente di attrito sono sempre positivi.

Sostituendo le componenti acquisite della forza assiale nella equazione:

$$\mu = \frac{Q}{P} = \frac{[-\cos \theta \sin \gamma] F_x + F_y \cos \gamma + [\sin \theta \sin \gamma] F_z}{[\sin^2 \theta + \cos \gamma \cos^2 \theta] F_x + [\cos \theta \sin \gamma] F_y + [-\sin \theta \cos \theta (\cos \gamma - 1)] F_z}$$

è possibile ottenere e plottare (figura 3.1.3) il valore del coefficiente di attrito che come si vede presenta la maggiore fluttuazione per  $\gamma = 15^\circ$ , mentre nel caso di angolo di articolazione nullo il coefficiente resta circa costante. Questa differenza è dovuta principalmente al fatto che i *rollers* si trovano a dover scorrere lungo una direzione che non coincide con quella di rotolamento (figura 3.1.1).

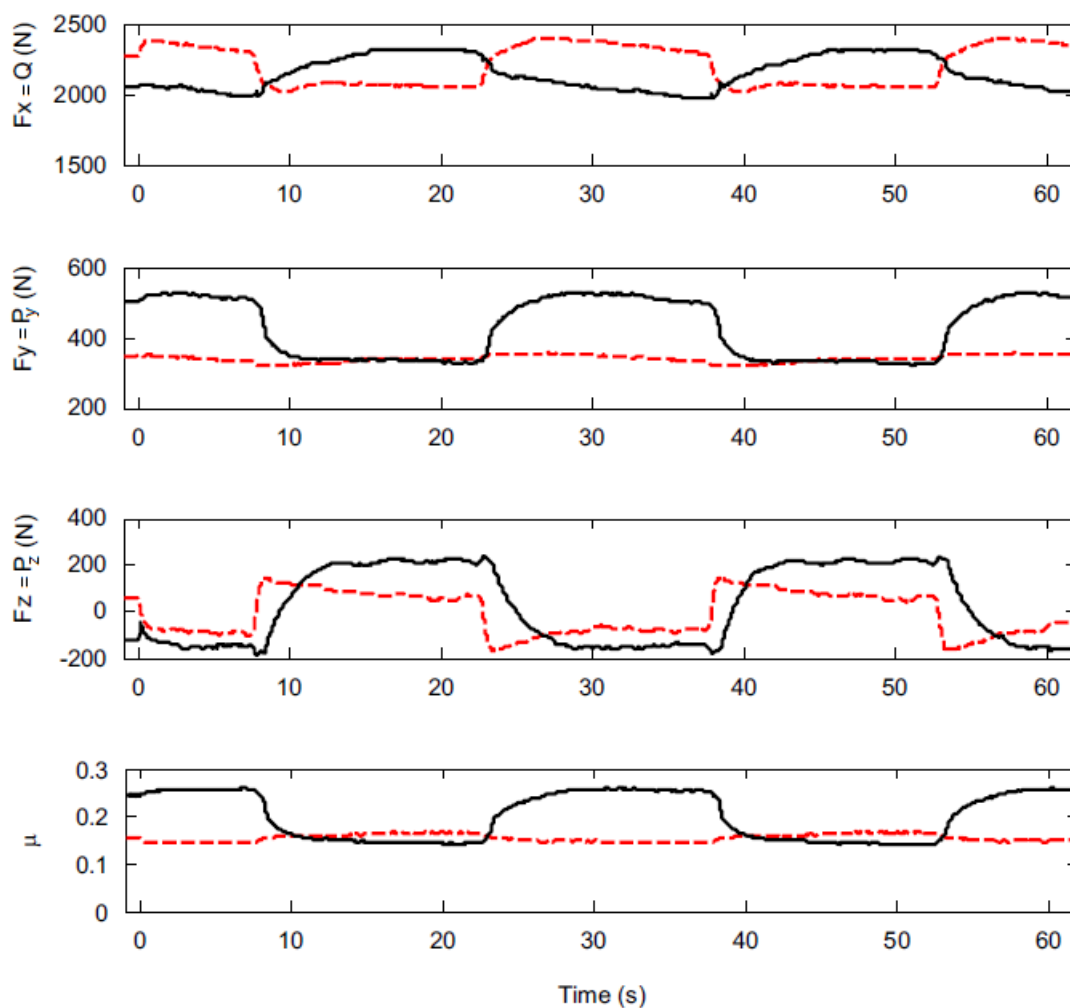


Figura 3.1.3: Componenti della forza triassiale agente sul *trunnion* e corrispondente valore del coefficiente d'attrito.

È possibile inoltre plottare il coefficiente d'attrito ricavato in funzione della corsa per i due casi di articolazione (figura 3.1.4). Da cui si evince che la dimensione del ciclo di isteresi aumenta all'aumentare dell'angolo di articolazione. Inoltre cresce il valore medio del coefficiente d'attrito risultante. Peraltro si nota una dissimmetria tra l'attrito generato durante la corsa di rientro (che risulta più influenzato dall'angolo di articolazione) rispetto al complementare relativo alla corsa di estensione. Tuttavia il coefficiente d'attrito nel ciclo di isteresi non passa mai a valori negativi durante il moto inverso. Questo perché l'attrito statico iniziale deriva dal notevole carico di coppia, prima ancora del moto assiale.

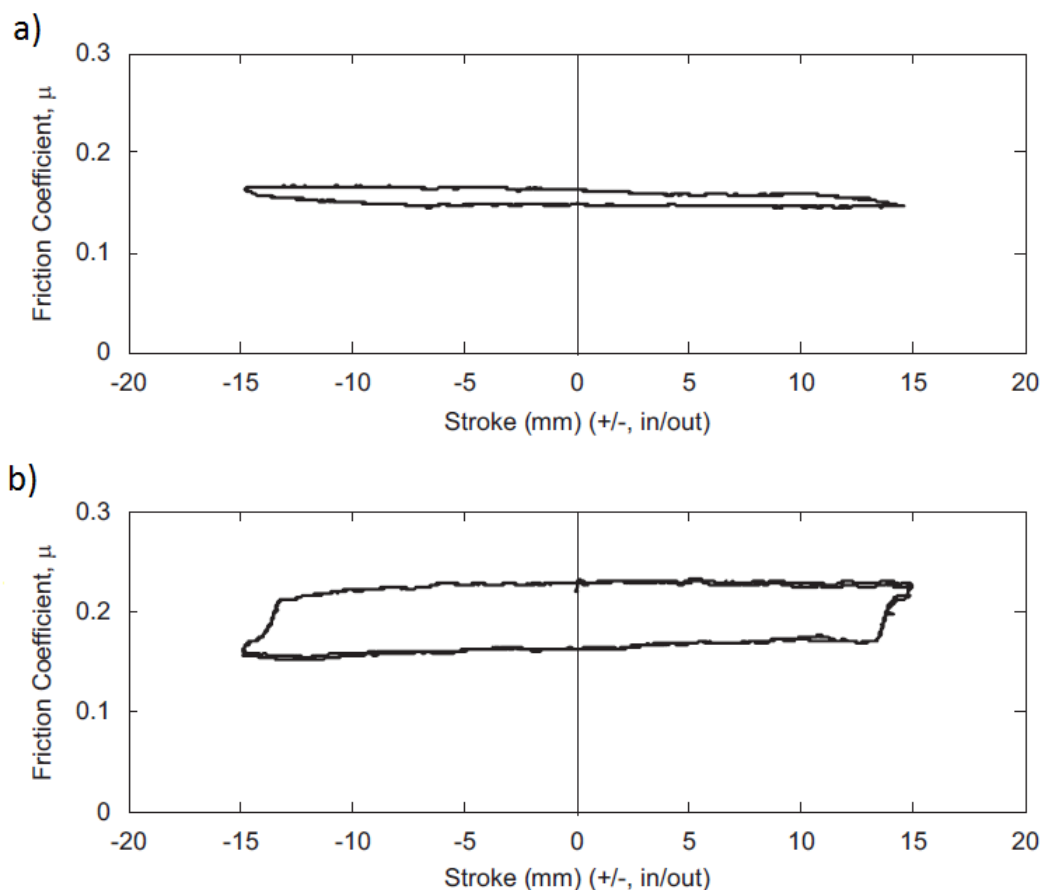


Figura 3.1.4: Cicli di isteresi del coefficiente d'attrito in funzione della corsa: a)  $\gamma = 0^\circ$ ; b)  $\gamma = 15^\circ$ .

Un'altra problematica riscontrata è la generazione di vibrazioni a bassa frequenza che si trasmettono dal motore al semiassale. Tale trasmissione è associata al *LTS* (*Load To Stroke*) ovvero la resistenza che genera il giunto allo scorrimento durante la trasmissione di coppia, questo fa sì che le vibrazioni generate dal motore si trasmettano alle sospensioni e quindi al telaio attraverso il semiassale. Come da letteratura, queste vibrazioni si propagano in direzione laterale e sono generate dagli attriti che si instaurano tra i *rollers* e le piste. In figura 3.1.5 sono riportati i valori di *LTS* misurati per tre diverse tipologie di giunti (GI, SFJ cioè una variante dell'AAR che prevede particolari accorgimenti per la riduzione delle vibrazioni ad alte frequenze e UTJ caratterizzato da piste riportate sul *pot*) al variare dell'angolo di articolazione e per due diverse lunghezze del semiassale. Lo studio è stato condotto da J. S. Sa [5] utilizzando un banco prova simile a quello utilizzato da C. H. Lee [4], tuttavia sono state condotte prove diverse per la caratterizzazione del *GAF* e del *LTS*. In particolare la prova del *GAF* prevedeva che il giunto ruotasse a velocità sostenuta (non specificata) mentre durante la misura del *LTS* il giunto ruotava a bassa velocità angolare (non specificata). Come si vede all'aumentare dell'angolo di articolazione si ha un aumento del valore di *LTS*, questo è dovuto al fatto che con maggiori angoli  $\gamma$  la componente di strisciamento dei *roller* è maggiore. È possibile notare anche che la lunghezza dell'albero,

per certe tipologie di giunto potrebbe aumentare il rischio di vibrazioni assiali per bassi angoli di articolazione.

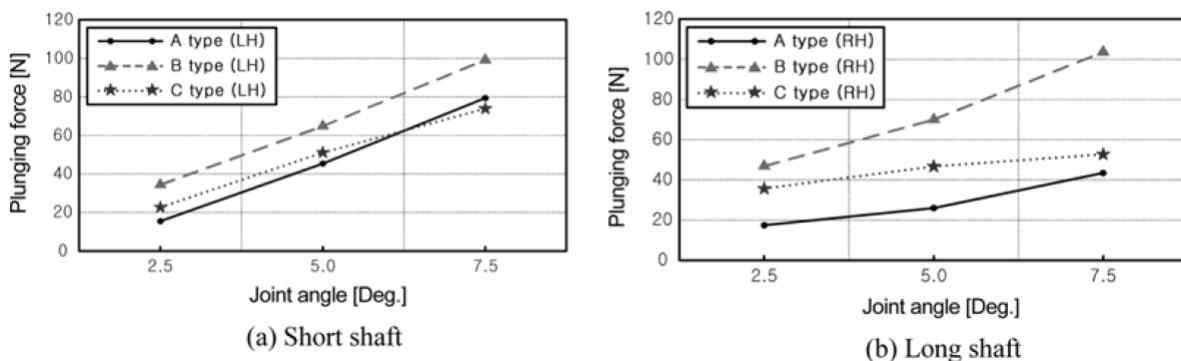


Figura 3.1.5: Risultati *LTS* ricavati da J. S. Sa [5] in funzione dell'angolo di articolazione del giunto  $\gamma$ , della lunghezza dell'albero e del tipo di giunto: A=TJ, B=SFJ, C=UTJ.

Analogamente, in figura 3.1.6 sono riportati i valori di *GAF* misurati per gli stessi semiassi, sempre al variare dell'angolo  $\gamma$ . I risultati evidenziano che il comportamento è ancora crescente in funzione dell'angolo di articolazione, tuttavia è interessante notare che per certe tipologie di giunti può presentarsi un'eccezione e inoltre si evidenzia che un progetto che ben si comporta in termini di *LTS* potrebbe rappresentare una soluzione che mal si presta al controllo del *GAF*. Infatti dai grafici si evince che la tipologia B genera i più alti valori di *LTS* ma per quanto riguarda il *GAF* non manifesta nemmeno un comportamento lineare con l'aumentare di  $\gamma$ . Quindi i risultati derivanti dalla misurazione di *LTS* e *GAF* non hanno lo stesso andamento, per questo motivo non è possibile prevedere il comportamento di entrambi i fenomeni senza aver eseguito misurazioni dedicate.

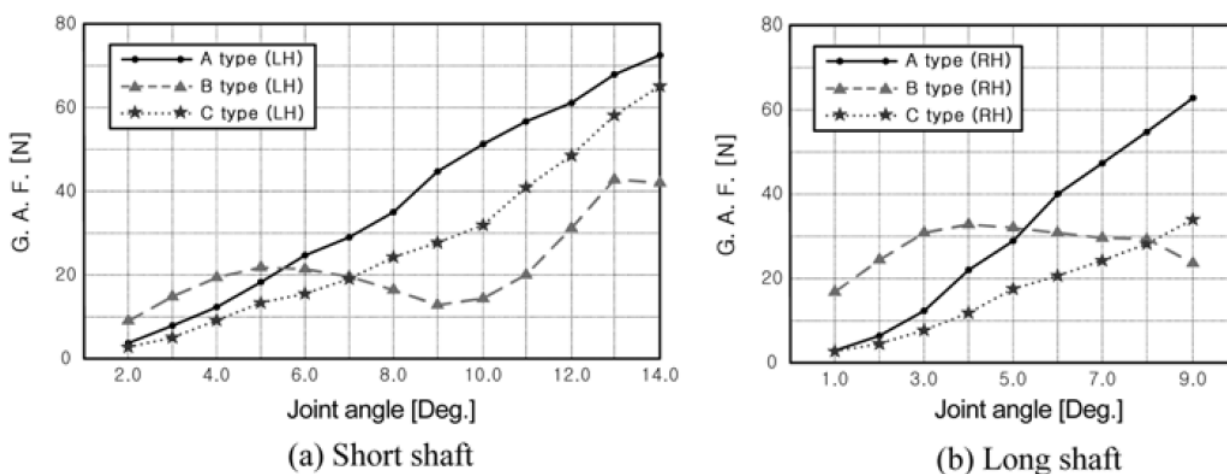


Figura 3.1.6: Risultati *GAF* ricavati da J. S. Sa[5] in funzione dell'angolo di articolazione del giunto  $\gamma$ , della lunghezza dell'albero e del tipo di giunto: A=TJ, B=SFJ, C=UTJ



Per studiare la relazione tra le vibrazioni a bassa frequenza (*idle vibration*) e la forza assiale generata gli autori dell'articolo [5] hanno eseguito misurazioni a bordo veicolo. In particolare le acquisizioni sono avvenute posizionando il sensore appena dopo il differenziale e in corrispondenza del montante della sospensione. In figura 3.1.7 vengono confrontati gli spettri di frequenza e ampiezza, in direzione  $Y$  rilevati a valle del differenziale e in corrispondenza del montante della sospensione (*knuckle*) per le tre tipologie di giunto. Il sistema di riferimento è stato disposto con l'asse  $X$  diretto nella direzione di avanzamento del veicolo, l'asse  $Y$  in direzione trasversale e l'asse  $Z$  in direzione verticale. Come si vede, la tipologia B ha un comportamento peggiore in termini di *idle vibration* poiché la differenza tra gli spettri è minima per frequenze comprese tra 20 e 120 Hz.

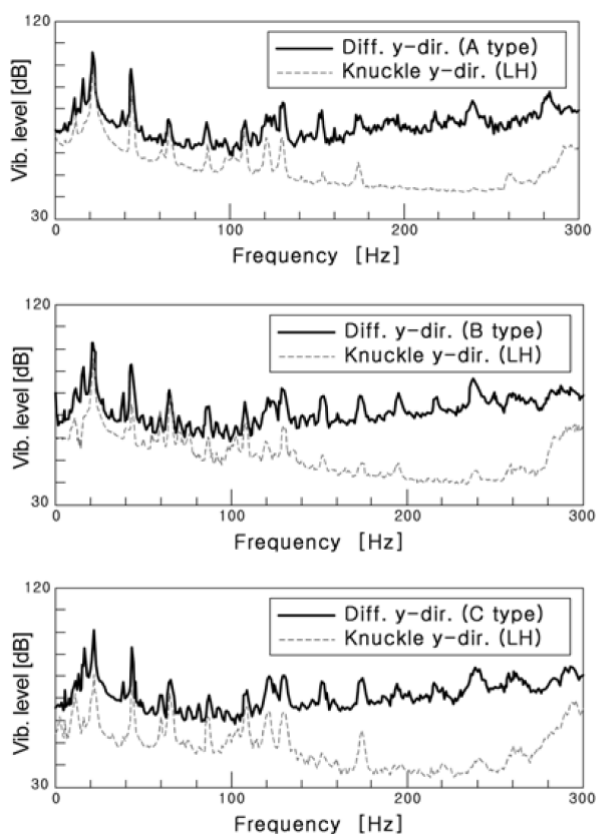


Figura 3.1.7: Spettri frequenza-ampiezza delle vibrazioni nella direzione  $Y$  coincidente a quella dei semiassi

Esiste poi un fenomeno di disturbo che prescinde dall'esistenza di attriti interni, ovvero anche nel caso ideale di assenza di attriti si manifesta uno squilibrio di forze che genera un momento torcente. Tale fenomeno è indicato da J.-P. Mariot [6] con il nome di coppia complementare (*Complementary Torque*) e interessa anche gli altri tipi di giunti. In questa sede si riporta solamente una spiegazione sintetica e qualitativa che inviti a un possibile approfondimento in un lavoro successivo. La coppia complementare è dovuta

all'articolazione del giunto, questo perché durante la trasmissione della potenza, la coppia in ingresso è trasmessa attraverso i contatti *roller*-piste. Tali contatti però non giacciono su un piano ortogonale all'asse del *pot*, questo comporta che le forze di reazione generate dalla coppia in ingresso, producano oltre alla coppia trasmessa un momento angolare che tende a disallineare il *pot*. Allo scopo di dare un'idea generale di quanto appena descritto in figura 3.1.8 viene rappresentata in modo approssimativo la coppia complementare, in particolare si considera che al gambo del *pot* venga applicata una coppia  $C_{app}$  che viene trasferita a meno di perdite all'albero. Essendo lo *spider* inclinato di un angolo  $\gamma$  (angolo di articolazione) la coppia che si genera dai contatti *roller*-piste  $C_{roll}$  risulta inclinata dello stesso angolo di articolazione di conseguenza per l'equilibrio nasce un momento  $C_{comp}$ , detto coppia complementare.

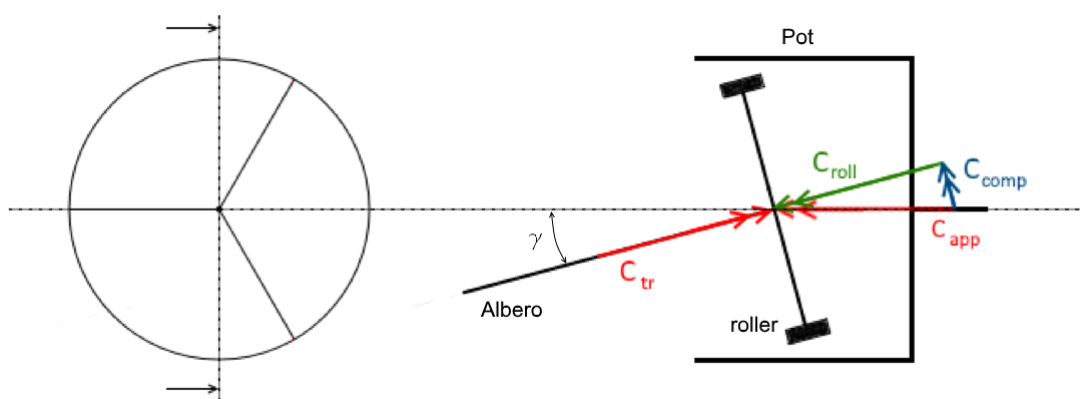


Figura 3.1.8: Rappresentazione approssimativa della coppia complementare

Dalle analisi condotte da J.-P. Mariot [6] per mezzo di un modello *Multi-body* l'intensità di tale coppia risulta essere proporzionale all'angolo di articolazione e alla coppia in ingresso, ha un andamento lineare crescente in funzione dell'attrito che si genera tra *roller* e piste. La frequenza di questa coppia di disturbo è di tre volte la velocità di rotazione per la componente lungo  $X$  mentre risulta essere sei volte lungo  $Y$  (figura 3.1.9).

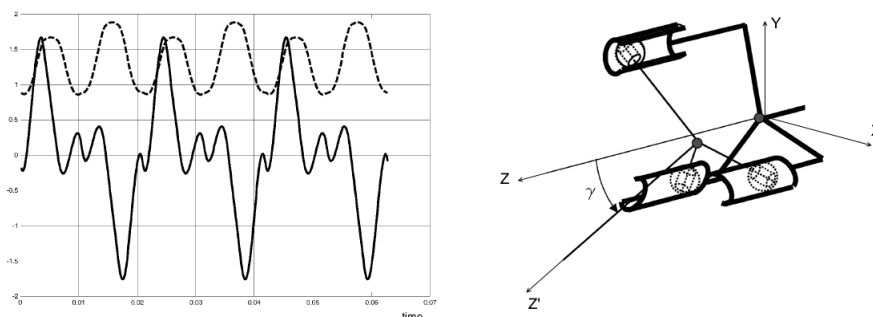


Figura 3.1.9: Componenti lungo  $X$  (linea continua) e lungo  $Y$  (linea tratteggiata) della coppia complementare al variare dell'angolo di rotazione. I valori sono riferiti a una velocità angolare di 100 rad/s.

## 3.2 Modello empirico ad attrito

La comprensione del comportamento non lineare dell'attrito dinamico che si genera all'interno del giunto a tripode permette di sviluppare strumenti di ausilio alla progettazione e allo sviluppo. In questa sezione si propone il modello sviluppato da C. H. Lee [4] poiché si ritiene che, tra quelli analizzati in letteratura scientifica [4, 8, 9, 10], sia quello più completo oltre che il più recente. Inoltre i valori dei coefficienti d'attrito sono ricavati dai risultati di prove sperimentali, mentre in [8] le prove sperimentali vengo condotte per valutare la bontà del modello *Multi-body* ad attrito costruito e in [9, 10] si propone un modello *Multi-body* ad attrito senza alcun riferimento alla sperimentazione.

### 3.2.1 Coefficiente d'attrito

Durante la prova del *GAF* eseguita da C. H. Lee [4] all'interno del giunto a tripode si genera una forza triassiale le cui componenti sono rappresentate in figura 3.1.3. La forza  $F_x$  rappresenta la forza normale  $Q$  ed è direttamente correlata alla coppia applicata, mentre  $F_y$  e  $F_z$  rappresentano le due componenti della forza totale d'attrito  $P$ . Allo scopo di calcolare il coefficiente d'attrito interno del giunto durante le varie condizioni operative è stata impostata un'equazione che permetta di rappresentare qualsiasi angolo di articolazione e di rotazione del giunto. Tale equazione deriva dalla matrice di trasformazione delle coordinate, basata sugli angoli di articolazione  $\gamma$  e di rotazione  $\theta$ .

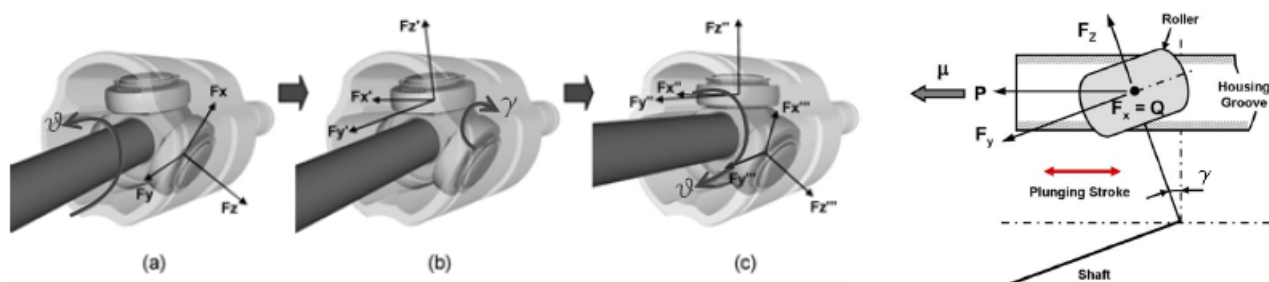


Figura 3.2.1: Direzione componenti sforzo triassiale misurato in [4].

In figura 3.2.1 sono riportate le tre componenti della forza a cui ciascun *roller* è soggetto. Moltiplicando in sequenza le tre matrici di rotazione si ottiene la matrice di trasformazione che correla le forze interne misurate durante la prova con le due forze globali  $P$  e  $Q$ . Dal rapporto di queste ultime è possibile ricavare il coefficiente d'attrito complessivo per ciascuna condizione di sperimentazione:

a)

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F'_x \\ F'_y \\ F'_z \end{pmatrix} \quad (3.2.1)$$

b)

$$\begin{pmatrix} F'_x \\ F'_y \\ F'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & \sin \gamma \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F''_x \\ F''_y \\ F''_z \end{pmatrix} \quad (3.2.2)$$

c)

$$\begin{pmatrix} F''_x \\ F''_y \\ F''_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F'''_x \\ F'''_y \\ F'''_z \end{pmatrix} \quad (3.2.3)$$

$$\mu = \frac{Q}{P} = \frac{[-\cos \theta \sin \gamma] F_x + F_y \cos \gamma + [\sin \theta \sin \gamma] F_z}{[\sin^2 \theta + \cos \gamma \cos^2 \theta] F_x + [\cos \theta \sin \gamma] F_y + [-\sin \theta \cos \theta (\cos \gamma - 1)] F_z} \quad (3.2.4)$$

### 3.2.2 Rapporto slip-to-roll

Nel caso di un giunto che lavori ad angolo di articolazione  $\gamma = 0^\circ$  non si ha spinta assiale dovuta all'attrito radente tra piste e *roller*, mentre all'aumentare dell'angolo  $\gamma$  la spinta assiale si fa sempre più presente a causa del disallineamento dei *roller* con le piste. Il rapporto slip/roll è un parametro utile per descrivere questo andamento, e il modello proposto dagli autori di [4] è rappresentato dalla funzione:

$$S/R = 0,585\gamma \quad (3.2.5)$$

### 3.2.3 Attrito di puro strisciamento

Per la costruzione del modello ad attrito dinamico del giunto a tripode gli autori di [4] hanno eseguito delle prove *Pin-on-Disk* allo scopo di caratterizzare 2 tipi di grasso e il caso "a secco". La prova è stata eseguita con pressioni di contatto corrispondenti a quelle generate all'interno del giunto con l'applicazione della coppia di 160 Nm come nel caso della prova del *GAF* e, ha prodotto coefficienti d'attrito di 0,06 per il grasso di tipo A, 0,09 per il lubrificante B e 0,3 nel caso "a secco".

### 3.2.4 Attrito di puro rotolamento

Nell'attrito volvente la dissipazione di energia è dovuta al ciclo di isteresi elastica e ai microscorrimenti che si instaurano tra le superfici di contatto. Sebbene, all'interno del giunto a tripode, il coefficiente d'attrito volvente sia di entità minore rispetto a quello radente, anche l'attrito di rotolamento deve essere incluso nel modello poiché è presente durante il funzionamento. Tale parametro può essere determinato analiticamente utilizzando il concetto che il lavoro svolto dalla pressione Hertziana sul contatto è uguale all'energia dissipata per isteresi elastica, allora la resistenza al rotolamento  $\lambda$  vale:

$$\lambda = \alpha \frac{2a}{3\pi R} \quad (3.2.6)$$

nel caso di contatto lineare e

$$\lambda = \alpha \frac{3a}{16R} \quad (3.2.7)$$

nel caso di contatto ellittico. Dove  $a$  rappresenta la larghezza del semicontatto,  $R$  il raggio di rotolamento e  $\alpha$  il fattore di perdita per isteresi. A ciò si aggiunge il microslittamento che può essere modellato utilizzando la teoria di Heathcote:

$$\lambda = 0,08\mu \frac{b^2}{R^2} \quad (3.2.8)$$

dove  $2b$  è la larghezza maggiore dell'ellisse di contatto e  $\mu$  il coefficiente di attrito radente.

### 3.2.5 Modello di attrito

Il modello proposto include sia la componente di attrito statico, che dipende dalla coppia applicata, e la componente di attrito dinamico influenzata, a parità di coppia, dalla corsa dei *roller* e quindi dall'angolo di articolazione. In figura 3.2.2a sono riportati gli andamenti tipici del coefficiente d'attrito misurato in funzione del tempo e della corsa. Dal primo grafico è possibile ricavare in corrispondenza di  $t = 0$  il valore dell'attrito statico. Il modello prevede che l'attrito totale sia dato dalla somma di un coefficiente medio e una componente dinamica, il primo lo si evince dal valore medio che si riscontra durante la prova, mentre la componente dinamica la si ricava dalle creste superiori e inferiori che si riferiscono alla fase di rientro ed estensione rispettivamente. Analogamente si ricava dal ciclo di isteresi dell'attrito in funzione della corsa (figura 3.2.2b). Con questa notazione è possibile identificare il valore del coefficiente d'attrito con il valore medio e un errore per ogni test eseguito.

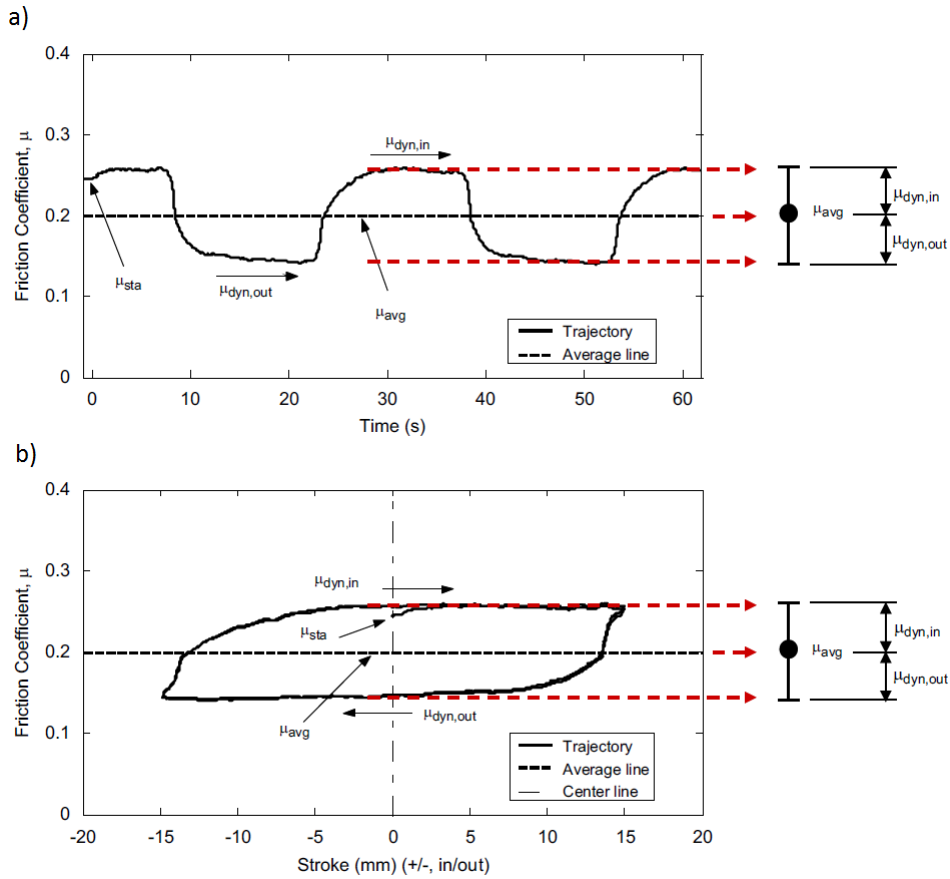


Figura 3.2.2: Il coefficiente d'attrito viene considerato come composizione di un valore medio  $\mu_{avg}$  a cui si somma una componente variabile  $\mu_{dyn}$ .

**Attrito statico** L'attrito statico  $\mu_{sta}$  dipende dalla cinematica del giunto, influenzata sostanzialmente dall'angolo di articolazione e dalle condizioni di lubrificazione. Allo scopo di ottenere un modello empirico gli autori [4] hanno svolto varie prove variando angolo di articolazione e tipologia di lubrificante ottenendo:

$$\mu_{sta} = C_{s1} + (C_{s2} + C_{s3} \cdot \gamma) (1 - e^{-C_{s4} \cdot T_d}) \quad (3.2.9)$$

con costanti empiriche:

$$\begin{aligned} C_{s1} &= 3,86 \cdot 10^{-2} \\ C_{s2} &= 1,34 \cdot 10^{-1} \\ C_{s3} &= 4,50 \cdot 10^{-3} \\ C_{s4} &= 2,35 \cdot 10^{-2} \end{aligned}$$

L'equazione 3.2.9 è valida per ampi valori di  $\gamma$  e coppia  $T_d$  applicata, in figura 3.2.3 sono riportati i risultati sperimentali e il modello sviluppato che, come si può notare è in buon accordo con le rilevazioni.

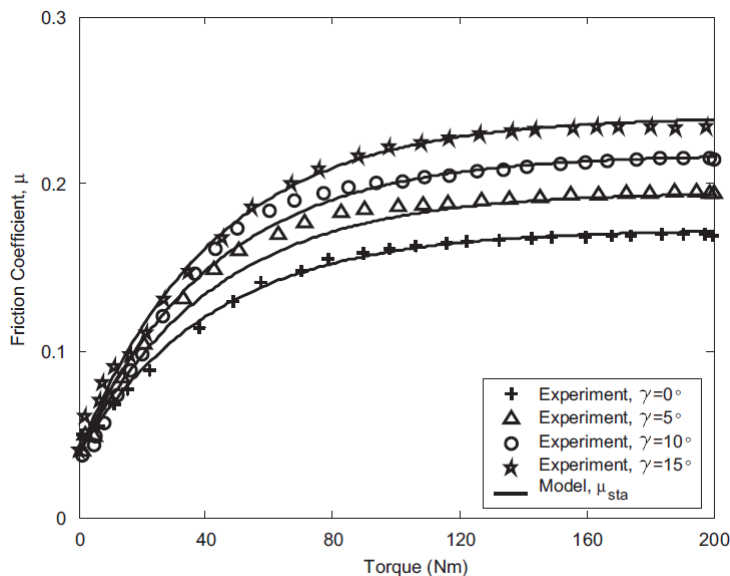


Figura 3.2.3: Coefficiente d'attrito statico in funzione della coppia applicata e dell'angolo di articolazione  $\gamma$ . In linea continua è riportato il modello proposto in [4] mentre i simboli rappresentano i risultati sperimentali.

**Attrito medio** Il coefficiente di attrito medio risulta essere proporzionale a quello statico (figura 3.2.4) quindi quest'ultimo può essere incluso nel modello di attrito medio. Dai dati si evince inoltre che in funzione dell'angolo di ingresso  $\theta$  il coefficiente medio di attrito ha un andamento sinusoidale quindi nel modello viene inclusa la funzione seno dell'angolo di rotazione. Il modello dovrà contenere altresì il coefficiente d'attrito dinamico, i cui valori sono stati ricavati da prove tribologiche *Pin-on-Disk*.

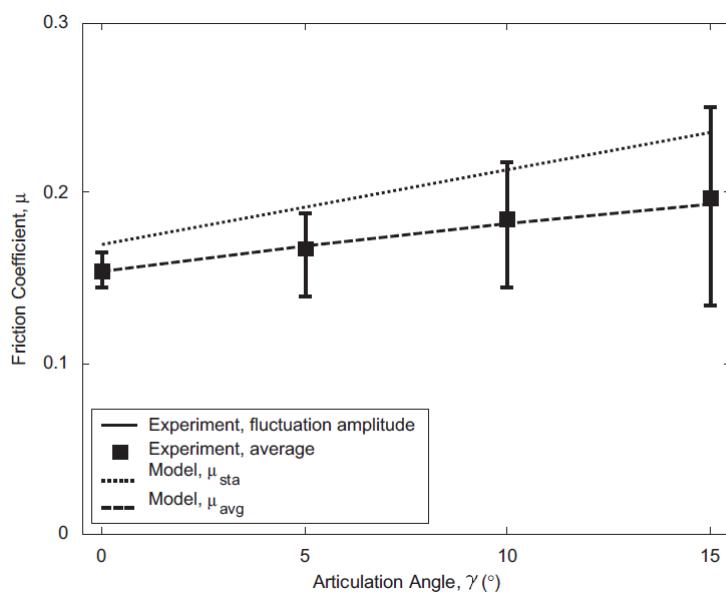


Figura 3.2.4: Rappresentazione del coefficiente d'attrito medio risultante da misure e dal modello proposto in [4].

Tenuto conto di ciò il modello empirico è dato da questa espressione:

$$\mu_{avg} = \mu_{sta} (1 + (C_{s5}\mu_{slp} - C_{s6}) \gamma) + C_{s7}\mu_{slp} - C_{s8} + \frac{\gamma}{15}C_{s9} (\sin \theta - 1) \quad (3.2.10)$$

con costanti empiriche:

$$C_{s5} = 3,33 \cdot 10^{-2}$$

$$C_{s6} = 1,04 \cdot 10^{-2}$$

$$C_{s7} = 1,00 \cdot 10^{-1}$$

$$C_{s8} = 2,47 \cdot 10^{-2}$$

$$C_{s9} = 4,25 \cdot 10^{-2}$$

In figura 3.2.5a vengono riportati i risultati delle prove condotte a valori discreti di angoli  $\theta$  e il modello appena descritto che come si può notare ben rappresenta i valori sperimentali. Questo modello è relativo a un *roller*, combinando tre modelli con uno sfasamento a  $120^\circ$  si ottiene quanto riportato in figura 3.2.5b, dove si vede che il coefficiente d'attrito dinamico medio è costante e pari a 0,15, sebbene il coefficiente d'attrito per ciascun *roller* abbia un andamento sinusoidale. Di conseguenza la forza misurata dal sensore di spinta esterno è quella che risulta dalla combinazione dei tre contributi, questo significa che la variazione dei coefficienti d'attrito medio e statico non influenzano la vibrazione assiale generata dal giunto, che dipende solamente dal valore costante di attrito. In conclusione gli andamenti dei coefficienti d'attrito statico e medio derivano solamente dalla cinematica interna del giunto a tripode e non si legano al  $GAF$ , anche se si tratta di parametri utili per la stima delle tensioni generate sui componenti e della vita a fatica.



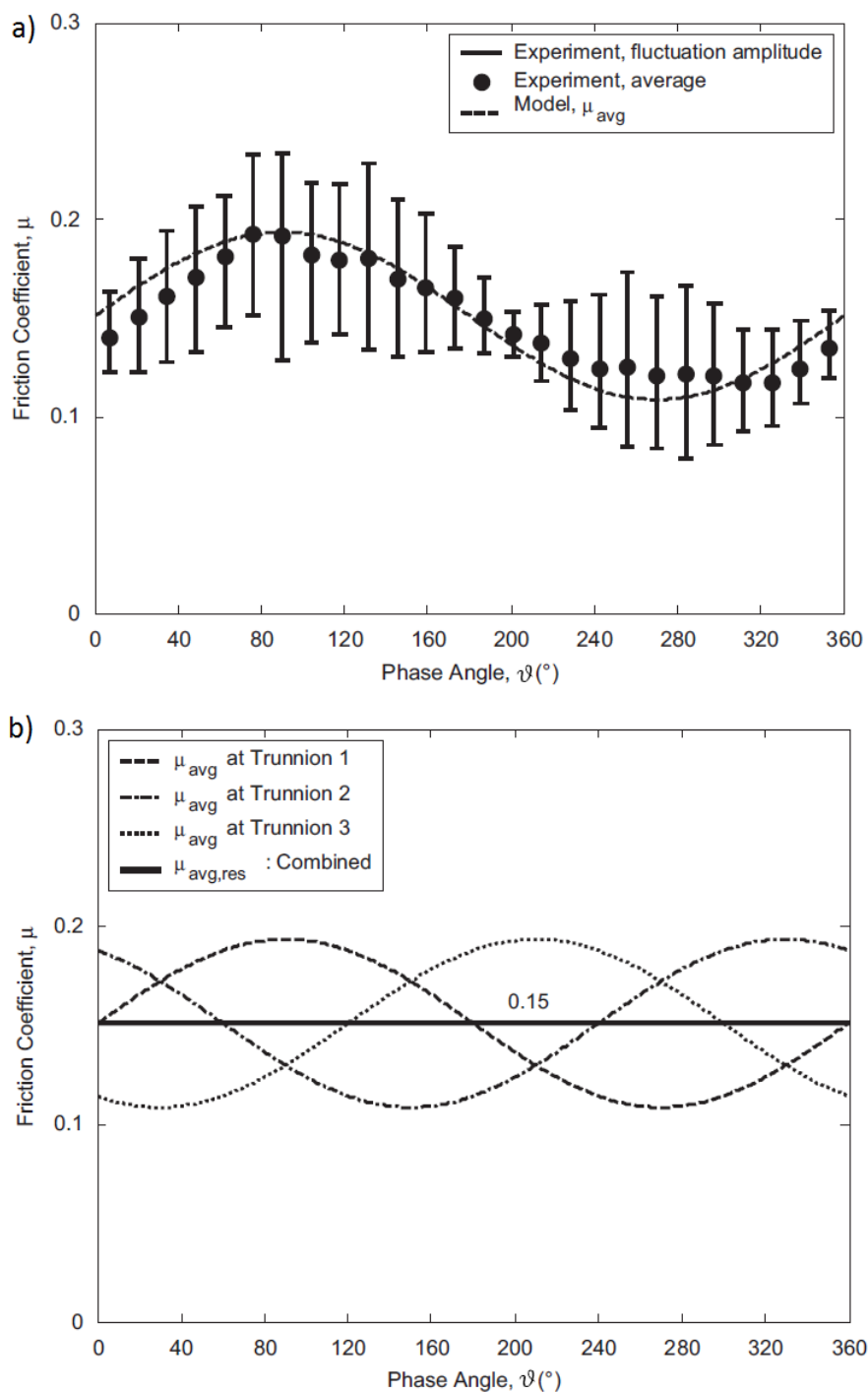


Figura 3.2.5: a):Valori del coefficiente d'attrito, visto come composizione di un valore medio (punti neri) e una parte variabile (barre d'errore) al variare dell'angolo di rotazione del giunto. In linea tratteggiata è riportato il modello analitico. b): Modello analitico del coefficiente d'attrito medio per ciascun roller.

**Attrito dinamico** Il modello di coefficiente di attrito dinamico proposto dagli autori è:

$$\mu_{dyn} = \pm \frac{\gamma}{15} [(C_{d1}\mu_{slp} - C_{d2}) |\sin \theta|] \pm \mu_{S/R} \quad (3.2.11)$$

con

$$\mu_{S/R} = R_s\gamma\mu_{slp} + (1 - R_s\gamma)\lambda \quad (3.2.12)$$

e costanti empiriche

$$C_{d1} = 4,00 \cdot 10^{-1}$$

$$C_{d2} = 8,40 \cdot 10^{-3}$$

dove il segno “+” è riferito alla corsa di rientro, quindi il coefficiente d’attrito dinamico avrà la designazione  $\mu_{dyn,in}$  mentre il segno “-” alla corsa di estensione quindi si avrà  $\mu_{dyn,out}$ . Come si vede dal modello il coefficiente d’attrito dinamico è funzione dell’angolo  $\gamma$  di articolazione del giunto, dell’angolo di rotazione  $\theta$ , del raggio d’attrito  $R_s$ , del coefficiente di strisciamento  $\mu_{slp}$  e del coefficiente di rotolamento  $\lambda$ . In figura 3.2.6 vengono riportati i dati sperimentali e il modello appena descritto, in particolare i dati acquisiti sono gli stessi che sono stati riportati in figura 3.2.5a ma questa volta il valore medio è stato annullato per poter confrontare i valori con il modello, che ben li rappresenta. Dalla figura 3.2.6 emerge che il coefficiente d’attrito dinamico combinato ha una fluttuazione attorno al valore medio di circa 0,043, di conseguenza si può dire che il contributo dinamico dell’attrito è la causa della fluttuazione di forza rilevata dall’esterno e probabilmente è la causa dei problemi di vibrazione.

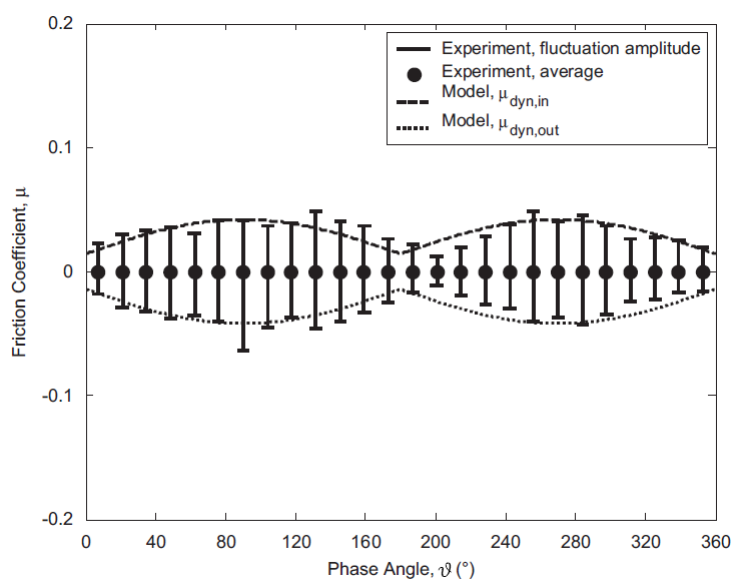


Figura 3.2.6: Rappresentazione del coefficiente d’attrito dinamico tramite barre d’errore al variare dell’angolo di rotazione del giunto e sua interpolazione mediante modello analitico (linee tratteggiate)

**Attrito complessivo** Il coefficiente d'attrito complessivo è dato da:

$$\mu_{tot} = \mu_{avg} + \mu_{dyn} = \mu_{avg}(\mu_{sta}, \gamma, \mu_{slp}, T_d) + \mu_{dyn}(\gamma, \theta, \mu_{slp}, \lambda, R_s) \quad (3.2.13)$$

dove si può notare che il coefficiente d'attrito dinamico è indipendente dalla coppia applicata  $T_d$ , mentre il coefficiente d'attrito totale è indipendente dalla velocità di scorrimento.

**Correlazione con il GAF** Il modello ad attrito è stato ricavato dall'analisi di dati ottenuti da prove di scorrimento di un giunto a tripode per discreti angoli di rotazione, quindi senza aver imposto una velocità di rotazione. Tuttavia questa non è la situazione alla quale il giunto lavora a bordo di un autoveicolo. I dati acquisiti e il modello sviluppato possono quindi essere utilizzati per ottenere il *GAF* considerando una corsa completa durante un giro. Si consideri pertanto la figura 3.2.7 che rappresenta l'andamento del coefficiente d'attrito dinamico riportato in linea tratteggiata. Da questo grafico è possibile ricavare l'andamento del coefficiente d'attrito che genera la spinta assiale. Per fare questo si considerino le posizioni angolari  $\theta = 90^\circ$  e  $\theta = 270^\circ$  e una rotazione in senso orario, per  $\theta$  che va da  $90^\circ$  a  $270^\circ$  il *roller* si sposta verso l'interno del *pot* (*inward stroke*), mentre da  $270^\circ$  a  $90^\circ$  lo spostamento dello stesso è verso l'esterno (*outward stroke*). Quindi da  $90^\circ$  a  $270^\circ$  il  $\mu_{GAF}$  segue il profilo del  $\mu_{dyn,in}$  viceversa seguirà il profilo  $\mu_{dyn,out}$  da  $270^\circ$  a  $90^\circ$ .

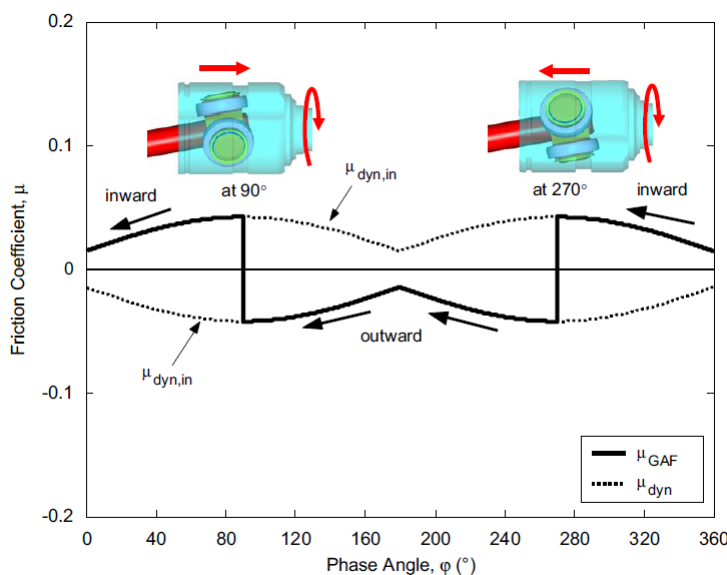


Figura 3.2.7: Andamento del coefficiente d'attrito in funzione dell'angolo di rotazione

In linea continua (figura 3.2.7) è rappresentata la traiettoria del  $\mu_{GAF}$  appena descritta. In formule tutto ciò si esprime con:

$$\mu_{GAF_i} = \text{sgn}[\sin(\theta_i + 90^\circ)] |\mu_{dyn}| \quad (3.2.14)$$

questa relazione fa riferimento all' $i$ -esimo *roller*, combinando gli effetti dei tre *roller* si ottiene la figura 3.2.8. Come si può vedere il coefficiente d'attrito  $\mu_{GAF}$  ha un profilo a onda quadra modificata con una frequenza tripla rispetto alla frequenza di rotazione. Analiticamente si può scrivere:

$$GAF = \frac{2T_d}{3R} \left[ \sum_{i=1}^3 \mu_{GAF,i} \right] \quad (3.2.15)$$

dove  $R$  è il raggio delle piste,  $T_d$  è la coppia applicata al giunto e  $\mu_{GAF,i}$  sono i coefficienti di attrito dei singoli *roller*.

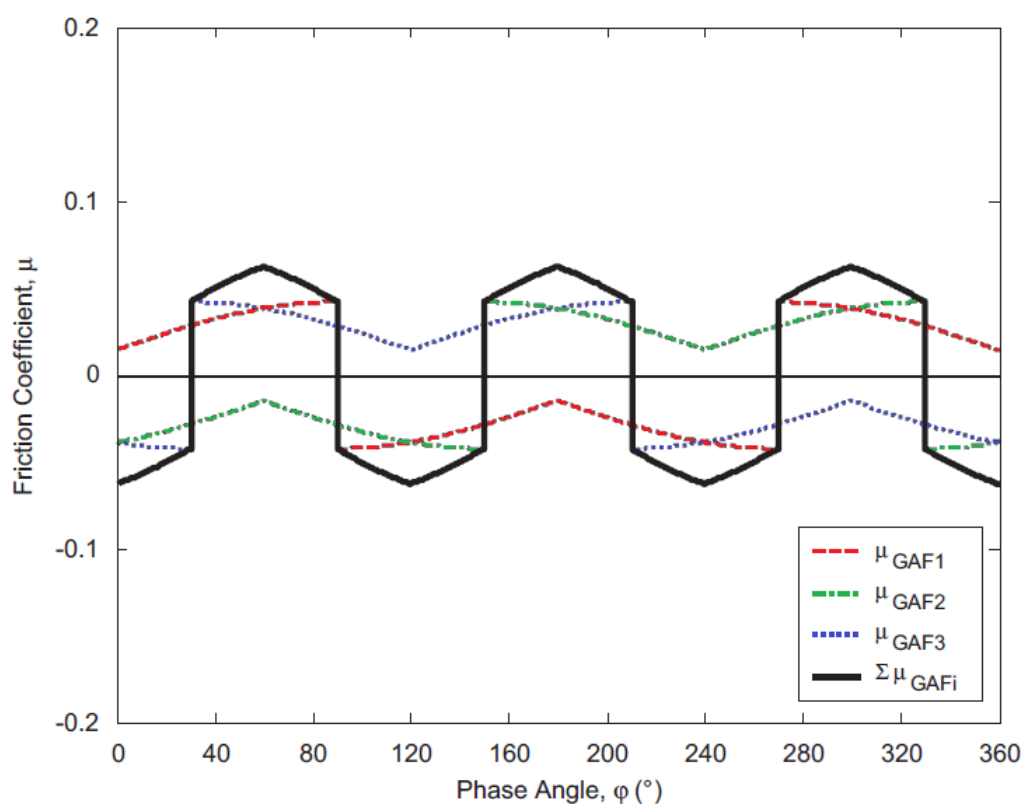


Figura 3.2.8: Andamento del coefficiente d'attrito totale in funzione dell'angolo di rotazione del giunto.

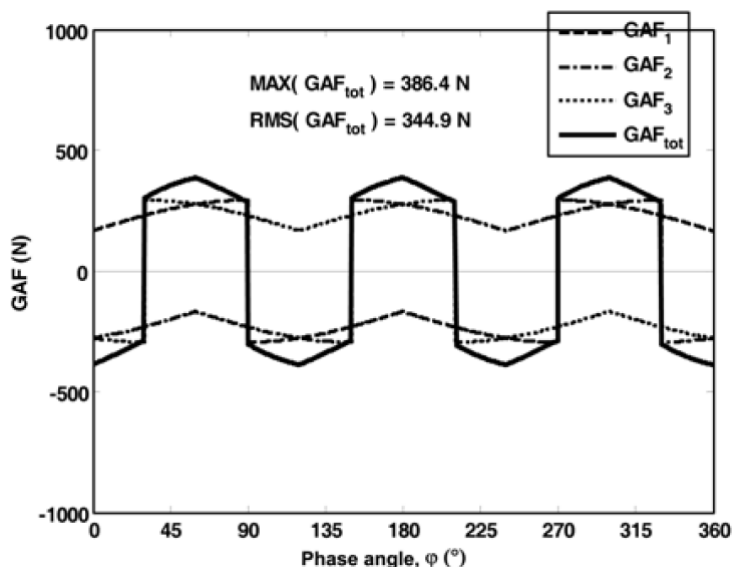


Figura 3.2.9: Andamento del GAF in funzione dell'angolo di rotazione del giunto calcolato considerando  $T_d = 1000$  Nm,  $\mu_{slp} = 0,04$  e  $\lambda = 0,007$ .

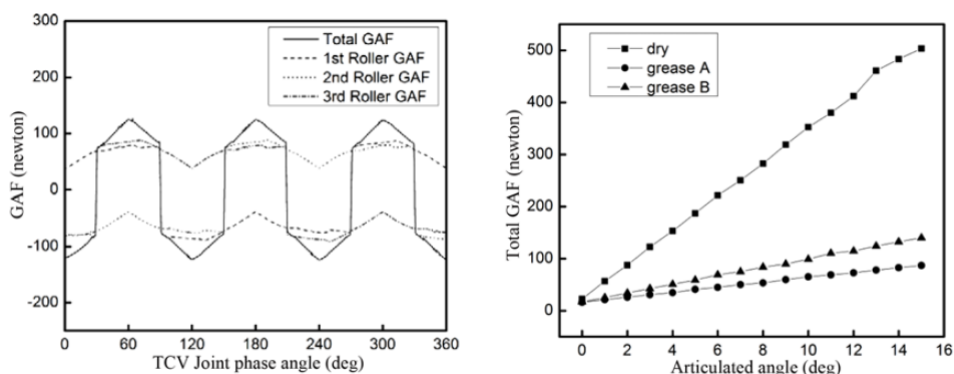


Figura 3.2.10: Risultati derivanti dalla simulazione eseguita con il modello proposto in [4] considerando una coppia  $T_d = 160$  Nm  $\gamma = 15^\circ$ . I valori sono consistenti con quelli derivanti dalla sperimentazione riportata nello stesso articolo

Il  $GAF$  ricavabile dall'equazione 3.2.15 rappresenta la forza assiale generata dal giunto e avrà anch'essa, come il coefficiente d'attrito, un profilo ad onda quadra di frequenza tripla rispetto alla velocità di rotazione. Un esempio di calcolo con questo modello è riportato in [7] considerando una coppia  $T_d = 1000$  Nm,  $\mu_{slp} = 0,04$  e  $\lambda = 0,007$ . In figura 3.2.9 è riportato il diagramma del GAF corrispondente, dove si può notare che i picchi corrispondono a 386,4 N e il valore quadratico medio risulta 344,9 N, valori che secondo C. H. Lee sono in accordo con i risultati sperimentali. Un esempio di simulazione condotto sempre dagli stessi autori è riportato in figura 3.2.10.



# Capitolo 4

## Dimensionamento e validazione

Il primo mese di tirocinio è stato dedicato allo studio delle teorie e metodologie su cui si basa l'azienda per progettare e validare i giunti omocinetici e i semiassi in base alle prestazioni richieste dal cliente. Per lo studio si è fatto riferimento ai libri [12, 13].

### 4.1 Procedura aziendale per la validazione

I semiassi vengono sollecitati principalmente a momento torcente, che risulta uguale per ciascun componente essendo questi collegati in serie. In realtà sui giunti (indipendentemente dalla tipologia) agirebbe anche la coppia complementare (descritta nella sezione §3.1) che si genera a seguito dell'articolazione e che induce una flessione dei giunti. Tale effetto viene però trascurato a livello di verifica ma non si escludono possibili studi futuri.

Tra le aziende che realizzano giunti è pratica comune in fase di progettazione, basarsi sull'esperienza e su considerazioni di carattere economico per ricercare il prodotto che meglio si adatta alle richieste del cliente tra quelli già disponibili nella gamma offerta dall'azienda. L'obiettivo è quello di limitare i costi di produzione ove possibile e sviluppare un progetto ad hoc solo quando necessario. Operativamente questo si traduce nella scelta di una taglia di giunto o semiasse in funzione delle prestazioni e degli ingombri massimi indicati dal cliente. Successivamente si verifica che l'articolo individuato sia in grado di soddisfare i requisiti di durata e trasmissibilità della coppia per le condizioni a cui si troverà ad operare (angolo di articolazione, ambiente, ecc). Tale accertamento allo stato attuale è svolto con l'ausilio di una cartella di lavoro Excel sviluppata internamente. In particolare vengono eseguite tre tipologie di validazione sul semiasse. La prima è di tipo statico e si valuta se il semiasse è grado di trasmettere la massima coppia indicata dal cliente aumentata di un fattore di *shock*  $k_s$  stabilito in base al tipo di motore che eroga la coppia e al tipo di veicolo a cui è destinato il semiasse (tabella 4.1).

Tabella 4.1: Fattori di shock in funzione del tipo di veicolo e del tipo di motore.

| Tipologia veicolo    | Tipologia Motore               | Fattore di shock $k_s$ |
|----------------------|--------------------------------|------------------------|
| Trasporto passeggeri | ad accensione comandata        | 1,0÷1,2                |
| Trasporto passeggeri | ad accensione per compressione | 1,1÷1,3                |
| Trasporto merci      | ad accensione per compressione | 1,3÷4,0                |

Tale valutazione viene eseguita sulle sezioni minime dell'albero e dei due giunti. La seconda e la terza analisi prevedono la costruzione di un possibile ciclo affaticante in cui si ricavano i valori di coppia a cui la trasmissione è soggetta tenendo conto della tipologia del veicolo, della sua destinazione di utilizzo, dei dati motore, del tipo di trazione e delle condizioni di lavoro del semiasse.

La costruzione di un ipotetico ciclo di vita per un semiasse dovrebbe poter tenere in conto svariati fattori che sono riassumibili nella tabella sottostante 4.2. Tali parametri possono essere classificati in tre categorie:

- Motore + Cambio, che contribuiscono alla coppia vista dal semiasse.
- Veicolo, che contribuisce all'angolo di lavoro e alla coppia visti dal semiasse.
- Ambiente, che contribuisce all'angolo di lavoro e alla coppia visti dal semiasse.

Tabella 4.2: Variabili che determinano il ciclo di carico reale.

| Motore+Cambio | Veicolo                           | Ambiente       |
|---------------|-----------------------------------|----------------|
| Carico motore | Cinematica sospensioni            | Manto stradale |
| Rapporto      | Cinematica semiasse               | Buche/Tombini  |
|               | Coppia di frenata                 | Dissuasori     |
|               | Cruise control (vecchie versioni) | Pendenze       |
|               | Layout trasmissione               | Ondulazioni    |

A livello operativo quello che i costruttori di autoveicoli fanno per generare un ciclo di vita utilizzabile per verificare un qualsiasi componente è l'allestimento di un test su tracciato (che comprenda determinati chilometraggi in pista, fuoristrada, percorso cittadino, ecc) durante il quale si rilevano carichi e accelerazioni per mezzo di ruote dinamiche. Quello che si ottiene in seguito al processamento dei dati è dunque un ciclo di carico che può essere utilizzato in fase di successive verifiche. Tutto questo non può ancora essere fatto nel contesto aziendale della sede di Poggio Rusco di SKF Industrie S.p.A. poiché richiederebbe l'utilizzo di una quantità risorse non giustificabile per lo scopo finale di verifica di un generico semiasse. Di conseguenza l'ufficio R&D basa il suo processo di verifica e validazione su un ipotetico ciclo di carico che prenda in considerazione i parametri relativi al motore, cambio, cinematica delle sospensioni, *layout* della trasmissione e lo stile di guida.



In particolare nel secondo accertamento si ipotizza per ciascuna marcia e condizione di carico una frequenza con cui si passa da una vecchia condizione di equilibrio a una nuova. Quindi di fatto si considera una variabilità della coppia erogata al semiasse come il passaggio dalla condizione di coppia media (oppure coppia massima oppure potenza massima) alla fase di freno motore. La frequenza con cui ciò avviene e, quindi il numero di cicli è stabilito su una percentuale della frequenza di rotazione con andamento esponenziale decrescente. Quindi a basse velocità la frequenza con cui il conducente varia il carico motore sarà maggiore rispetto alle alte velocità.

Nella terza fase di validazione si prende a riferimento il metodo di Macielinski riportato in [12, 13] basato sulla regola di Palmgren-Miner per valutare la durata cinematismo interno dei giunti. Con cinematismo interno si intendono i componenti che permettono la trasmissione di coppia quindi sfere, rulli e piste che sono soggetti a contatto Hertziano.

## 4.2 Verifica cinematismo interno per i giunti a tripode

Si riporta in seguito il criterio adottato da SKF Industrie S.p.A. sede di Poggio Rusco per la scelta della taglia di un giunto a tripode GI in funzione delle prestazioni richieste e per la verifica del cinematismo interno. Tale approccio è stato implementato nella cartella di lavoro Excel per la validazione dei semiassi. La teoria a cui si fa riferimento è riportata in [12]. Per cinematismo interno nel caso di giunti a tripode si intendono i *roller* e le piste soggetti a contatto Hertziano e che per tanto vanno verificati a fatica.

La procedura prevede i seguenti dati di partenza:

- La massima coppia a cui il giunto potrebbe essere sottoposto, che viene ricavata considerando le condizioni limite di aderenza tra pneumatico e fondo stradale.
- Il numero di corpi volventi, in questo caso pari a 3 (*roller*).
- La pressione statica massima ammissibile che dovrebbe essere determinata sperimentalmente considerando le curvature, la finitura superficiale e le condizioni di contatto; in questo contesto ci si rifà ai dati reperiti in letteratura [12, 13], opportunamente ridotti per mezzo di un coefficiente che permetta di eseguire un dimensionamento a favore di sicurezza data l'incertezza sulla determinazione di tale pressione limite. Analogamente si ricavano le pressioni dinamiche limite di breve e lunga durata (*short & long lasting*).
- Il coefficiente di sicurezza relativo alla pressione massima ammissibile.
- il coefficiente di conformità  $\Psi = \frac{2R_{groove}}{d_{roll}}$ , ipotizzato in prima battuta e poi determinato una volta scelta la taglia del giunto.

- il rapporto tra il raggio  $R$  delle piste e il diametro dei *roller*  $d$ . Si tratta di un parametro indicativo per il proporzionamento del giunto derivante dall'esperienza.

Dal coefficiente di conformità si ricava la conformità trasversale:

$$\chi_q = -\frac{1}{\psi}$$

mentre la conformità longitudinale, essendo le piste rettilinee risulta nulla, quindi  $\chi_l = 0$

dai coefficienti di conformità appena ricavati si risale al fattore di Hertz:

$$d\Sigma\rho = 2(2 + \chi_q + \chi_l)$$

e al coefficiente ellittico di Hertz:

$$\cos \tau = \frac{\chi_q - \chi_l}{2 + \chi_q + \chi_l}$$

dalla tabella 3.2 a pagina 74 di [12] entrando con il coefficiente ellittico di Hertz si risale al prodotto  $\mu\nu$  dei coefficienti ellittici.

Ora è possibile calcolare il coefficiente di conformità:

$$c_p = \frac{858}{\mu\nu} \sqrt[3]{(d\Sigma\rho)^2}$$

e quindi ricavare il diametro minimo dei *roller* tramite l'equazione:

$$d_{min,roll} = \left( \frac{C_p}{\frac{P_s}{C_s}} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{M_{max}}{n_R \sin \varepsilon \cos \zeta}$$

dove  $\varepsilon$  è l'angolo di pressione mentre  $\zeta$  è l'angolo di elica delle piste che nel caso del giunto a tripode valgono  $90^\circ$  e  $0^\circ$  rispettivamente.

Avendo il rapporto  $R/d_{roll}$ , il raggio minimo delle piste sarà dato dal prodotto di questo fattore per il diametro minimo appena ricavato. A questo punto in letteratura sono riportati dei fattori di proporzionalità tra le varie dimensioni dello *spider*, è possibile quindi definire il diametro del *trunnion*, la lunghezza dei *needle* e il numero di questi per ciascun braccio dello *spider* (*trunnion*). Viene quindi definita l'intera geometria del giunto e dei suoi componenti. A seguito dell'analisi cinematica riportata nel capitolo §2 sarà ora possibile comprendere meglio la natura di questi fattori di proporzionalità geometrica e verificarne quindi l'applicabilità in base alla taglia del giunto stesso.

Segue la verifica a fatica basata sulla regola di Palmgreen-Miner:

$$\frac{1}{L_h} = \frac{a_1}{L_{h1}} + \frac{a_2}{L_{h2}} + \frac{a_3}{L_{h3}} + \dots + \frac{a_n}{L_{hn}} \quad (4.2.1)$$

con  $a_i$  che rappresenta la percentuale di funzionamento per la condizione di carico  $i$ -esima e  $L_{hi}$  dato dalla:

$$L_{hi} = \frac{365000}{n} \left( \frac{M_d}{M_i} \right)^3 \quad (4.2.2)$$

dove  $n$  rappresenta la velocità angolare a cui la coppia  $M_i$  relativa all' $i$ -esimo ciclo viene applicata. Mentre  $M_d$  corrisponde alla massima coppia ammissibile ricavata tramite:

$$M_d = \frac{1}{2} (1 + \cos \gamma) n_R \left( \frac{P_d}{C_p} \right)^3 d_{roll}^2 R \sin \varepsilon \cos \zeta.$$

Quindi si calcola per ciascun valore di coppia la vita corrispondente in ore per mezzo della 4.2.2. La sommatoria dei reciproci delle durate fornisce il danno cumulato complessivo del giunto. Considerando la velocità media di rotazione di percorrenza  $V_m$  così definita:

$$V_m = a_1 V_1 + a_2 V_2 + a_3 V_3 + \dots + a_n V_n \quad (4.2.3)$$

e il reciproco del danno cumulato è possibile calcolare:

$$L_s = L_h \cdot V_m$$

che corrisponde alla vita attesa espressa in chilometri.

### 4.3 Aggiornamento modello di calcolo ed esempio

Il lavoro prevedeva l'aggiornamento e riorganizzazione di un file Excel che era costituito da 9 fogli di calcolo più due fogli ausiliari così organizzati (maggiori dettagli verranno forniti in seguito nella descrizione del file aggiornato):

1. Foglio di *input* dati veicolo intesi come tipologia, destinazione di utilizzo, massa e misure pneumatici.
2. Foglio di *output* delle accelerazioni massime del veicolo per la determinazione delle coppie massime scaricabili al terreno.

3. Foglio di *input* dei dati motore e trasmissione per valutare la coppia massima erogabile alle ruote.
4. Foglio di *output* del ciclo di coppia per la verifica cinematica del giunto e statica e a fatica del semiasse
5. Foglio di *input* parametri geometrici e tecnologici del semiasse
6. Foglio di verifica strutturale del semiasse
7. Foglio di verifica a fatica del semiasse
8. Foglio di verifica cinematica del giunto lato ruota
9. Foglio di verifica cinematica del giunto lato differenziale
10. Foglio ausiliario per la costruzione dei cicli affaticanti
11. Foglio ausiliario contenente formule e grafici per il calcolo a fatica

Questo file è stato migliorato aggiungendo la possibilità di lavorare con veicoli a trazione integrale, è stato quindi separato il processo di calcolo per l'asse anteriore e posteriore del veicolo. Si è ampliato inoltre il numero di marce di cui tenere conto, portandolo da 8 a 11 (più retromarcia). Inoltre essendo il lavoro di tesi incentrato sullo studio dei giunti a tripode, nella sezione di verifica cinematica sono stati inseriti i calcoli per la validazione dei giunti a tripode GI e AAR. Infine è stato riordinato l'intero documento per renderlo più immediato nell'utilizzo interno e in grado di generare un *output* per il cliente facilmente interpretabile.

Il file aggiornato prevede ora 12 fogli più due ausiliari così organizzati

1. *Customer inputs*: in cui si inseriscono i dati tecnici del veicolo, destinazione e tipo di utilizzo, dati tecnici motore e trasmissione, chilometraggio richiesto. Questo foglio solitamente viene fatto compilare al cliente nel modo più completo possibile. Il tipo di utilizzo viene definito attraverso una tabella suddivisa in tre categorie: *sport*, *intercity* e *city*. Per ciascuna di queste modalità si definisce la percentuale di percorrenza e la percentuale di utilizzo della coppia massima e media e della potenza massima sul chilometraggio richiesto dal cliente.

| 1. VEHICLE ANALYSIS - RIGID BODY |  | INPUT TECHNICAL DATA                                |  |              |                  |                  |
|----------------------------------|--|---|--|--------------|------------------|------------------|
|                                  |  | Vehicle   | GVV :Gross Vehicle Weigth                                      | 937          | kg               |                  |
|                                  | FWD :Front weight distribution                         | 32.8%   | %  |              |                  |                  |
|                                  | FAW :Front axle weight                                 | 307.34  | kg   |              |                  |                  |
|                                  | RAW :Rear axle weight                                  | 629.66  | kg   |              |                  |                  |
|                                  | Wb :Wheel base   | 2.475   | m  |              |                  |                  |
|                                  | Tck :Track   | 1.6   | m  |              |                  |                  |
|                                  | Hg :Center of gravity Height                           | 0.42  | m  |              |                  |                  |
|                                  | C <sub>p</sub> :Drag coefficient                       |   |  |              |                  |                  |
|                                  | C <sub>l</sub> :Lift coefficient                       |   |  |              |                  |                  |
|                                  | HC :Altezza centro di spinta                           | 0.42  | m  |              |                  |                  |
|                                  | XC :Distanza centro di spinta                          | 1.5345  | m  |              |                  |                  |
|                                  | Seff :Drag surface                                     |   | m <sup>2</sup>   |              |                  |                  |
|                                  | Satt :Lift surface                                     |   | m <sup>2</sup>   |              |                  |                  |
|                                  | Gv :G vertical   | 3.5   |  |              |                  |                  |
|                                  | GL_fw :G longitudinal - forward                        | 1.1   |  |              |                  |                  |
|                                  | GL_bw :G longitudinal - backward                       | 1.1   |  |              |                  |                  |
|                                  | μ <sub>lim_F</sub> :Max Long Friction coeff - front    | 0.9   |  |              |                  |                  |
|                                  | μ <sub>lim_R</sub> :Max Long Friction coeff - rear     | 0.9   |  |              |                  |                  |
|                                  | μ <sub>y lim</sub> :Max Transv friction coeff - limit  | 0.7   |  |              |                  |                  |
|                                  | μ <sub>missr</sub> :Friction coeff - Mission long      | 0.4   |  |              |                  |                  |
|                                  | μ <sub>missr</sub> :Friction coeff - Mission transv    | 0.63  |  |              |                  |                  |
|                                  | Road surface friction coeff - Fron                     | 0.9   |  |              |                  |                  |
|                                  | Road surface friction coeff - Rear                     | 0.9   |  |              |                  |                  |
|                                  | Da :Drift angle  | 57.5  | 100: rad   |              |                  |                  |
| Rim & Tyre                       | Tyre model   | 255 35  | 18:  |              |                  |                  |
|                                  | RSC - static load rad - calculated                     | 0.318   | m  |              |                  |                  |
|                                  | RSC - static load rad - measured                       | 0.308   | m  |              |                  |                  |
|                                  | Rim (canale cerchio)                                   | 215.3   | mm   |              |                  |                  |
| 2. TORQUE DISTRIBUTION           |  | Vehicle Performances & Transmission Characteristics |  |              |                  |                  |
|                                  |  | Engine  | T <sub>max</sub> :Max Torque                                   | 555          | Nm               |                  |
|                                  | rpm <sub>max</sub> :Max Torque @                       | 3000  | rpm  |              |                  |                  |
|                                  | P <sub>max</sub> :Max Power                            | 298.0   | kW   |              |                  |                  |
|                                  | rpm <sub>max</sub> :Max Power @                        | 5500  | rpm  |              |                  |                  |
|                                  | T <sub>throttle</sub> :Torque at Throttle angle = 0    | 50  | Nm depending on braking effect                                 |              |                  |                  |
|                                  | Sch :Shock Factor                                      | 1.1   |  |              |                  |                  |
|                                  | rpm <sub>max</sub> :Rpm max                            | 6000  | rpm  |              |                  |                  |
|                                  | n :gear number   | 6   |  |              |                  |                  |
|                                  | γ <sup>1st</sup> :gear ratio                           | 13.128  | additional 2.000 reduction                                     |              |                  |                  |
|                                  | γ <sup>2nd</sup> :gear ratio                           | 7.331   | additional 1.700 reduction                                     |              |                  |                  |
|                                  | γ <sup>3rd</sup> :gear ratio                           | 5.367   | additional 1.500 reduction                                     |              |                  |                  |
|                                  | γ <sup>4th</sup> :gear ratio                           | 4.181   | additional 1.100 reduction                                     |              |                  |                  |
|                                  | γ <sup>5th</sup> :gear ratio                           | 3.336   |  |              |                  |                  |
|                                  | γ <sup>6th</sup> :gear ratio                           | 2.787   |  |              |                  |                  |
|                                  | RM :backw ard ratio                                    | 13.584  |  |              |                  |                  |
| Front axle                       | Ts <sub>wD</sub> :Differential Ratio                   | 1.000   |  |              |                  |                  |
|                                  | Ts <sub>wFw</sub> :Wheel ratio                         | 1.000   |  |              |                  |                  |
|                                  | FDL :Differential Locking Percentage                   | 100%  | 100% = the entire torque of the axle is transferred to 1 shaft |              |                  |                  |
|                                  | TL <sub>dist</sub> :Torque % from central differential | 100%  | 100% = FwD (x% for AwD, where x+y=100%)                        |              |                  |                  |
|                                  | RF <sub>v,max</sub> :Max Vertical Load                 | tbv   | N  |              |                  |                  |
| Rear axle                        | Ts <sub>wD</sub> :Differential Ratio                   | 1.000   |  |              |                  |                  |
|                                  | Ts <sub>wRw</sub> :Wheel ratio                         | 1.000   |  |              |                  |                  |
|                                  | RDL :Differential Locking Percentage                   | 100%  | 100% = the entire torque of the axle is transferred to 1 shaft |              |                  |                  |
|                                  | TL <sub>dist</sub> :Torque % from central differential | 0%  | 100% = RwD (y% for AwD, where x+y=100%)                        |              |                  |                  |
|                                  | RF <sub>v,max</sub> :Max Vertical Load                 | tbv   | N  |              |                  |                  |
| Transfer                         | Ts <sub>wL</sub> :Transfer ratio LDV                   | 1.000   | only for AwD, otherwise write 1 in cells                       |              |                  |                  |
|                                  | Ts <sub>wH</sub> :Transfer ratio HIGH                  | 1.000   |  |              |                  |                  |
|                                  | Ts <sub>wDiff</sub> :Differential Ratio (if 4x4)       | 1.000   |  |              |                  |                  |
| Environmental Data               |  | LOAD CYCLES   |  |              |                  |                  |
|                                  |  | Cycle name  | Cycle weight   | coefficients | T <sub>ave</sub> | T <sub>max</sub> |
|                                  | Sport High Dynamic                                     | 50%   | output coeff   | 100%         | 100%             | 100%             |
|                                  |  |   | % usage  | 0%           | 100%             | 100%             |
|                                  | InterCity Medium Dynamic                               | 10%   | output coeff   | 100%         | 100%             | 100%             |
|                                  |  |   | % usage  | 0%           | 100%             | 100%             |
|                                  | City Low Dynamic                                       | 40%   | output coeff   | 100%         | 100%             | 100%             |
|                                  |  |   | % usage  | 0%           | 100%             | 100%             |
|                                  | Expected Mileage                                       | 100.000   |  |              |                  | km               |
|                                  | Corresponding overall Cycles                           | 51.719.021  |  |              |                  | cycles           |

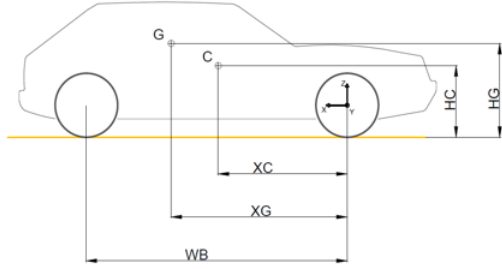


Figura 4.3.1: Foglio di input dati

2. *Customer sketches*: nel quale il cliente può inserire le note, i disegni e gli schemi che ritiene più opportuno fornire.

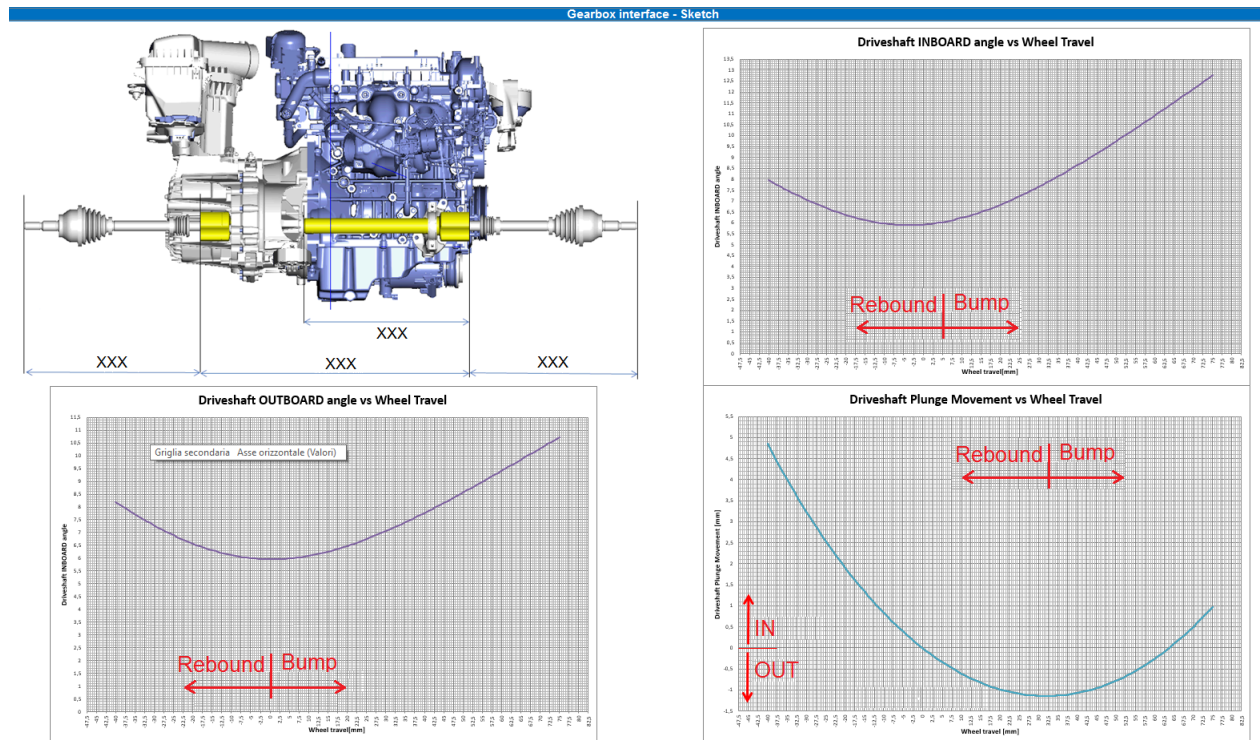


Figura 4.3.2: Foglio con schemi, in questo caso il cliente ha fornito il disegno del motore e trasmissione con gli interessi da rispettare e i diagrammi di scorrimento e angolo necessari per la verifica cinematica dei giunti

3. *Vehicle performances*: questo foglio permette di calcolare le coppie massime al limite di aderenza scaricabili al terreno attraverso i dati del veicolo. Questo considerando il caso di accelerazione in marcia avanti, retromarcia. Tali valori verranno successivamente confrontati con i valori di coppia forniti dal sistema motore-trasmissione alle varie velocità, in modo da avere per ciascuna marcia e ciascuna condizione di carico il massimo valore di coppia a cui il semiassale può essere soggetto.

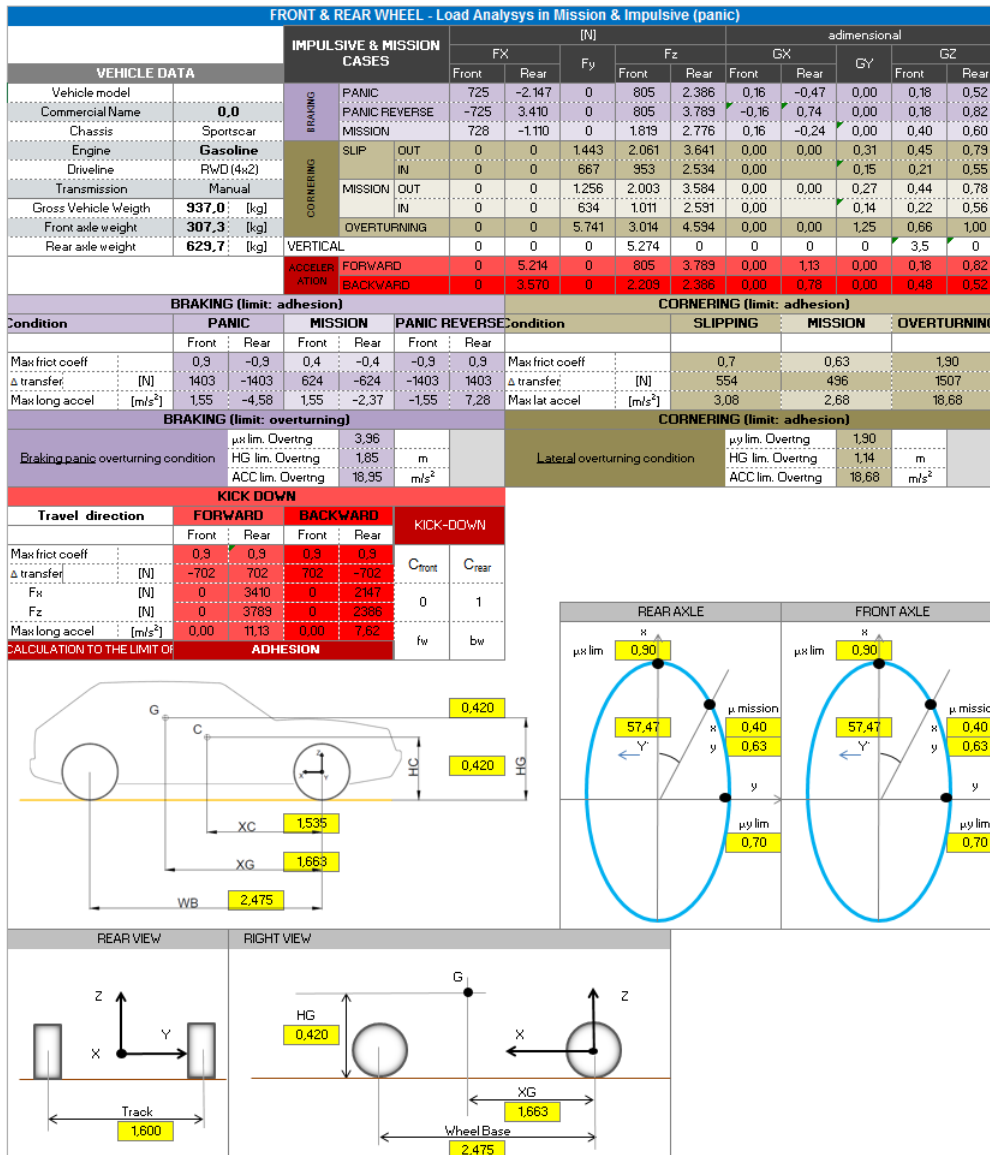


Figura 4.3.3: Foglio relativo alle prestazioni del veicolo dove si calcolano le massime coppie scaricabili al terreno al limite di aderenza.

4. *Loadcycles Definition*: questo foglio permette di valutare la coppia massima erogabile alle ruote, per ciascuna condizione di utilizzo (*sport*, *intercity* e *city*), per ciascuna marcia e per quattro situazioni di carico motore (coppia media, coppia massima, potenza massima e freno motore).

| DRIVE SHAFT - LOADCYCLE DEFINITION (Cycles Vs Torques) |           |   |                            |        |         |                                  |       |  |                              |      |   |             |            |        |      |   |   |
|--|-----------|---|----------------------------|--------|---------|----------------------------------|-------|--|------------------------------|------|---|-------------|------------|--------|------|---|---|
| Vehicle Description                                    |           |   | Vehicle Data               |        |         | Transmission Data                |       |  | Wheel vertical Load per side |      |   | Aerodynamic |            |        |      |   |   |
| Vehicle name   | 0         |   | Gross Vehicle Weight - GVW | 937    | kg      | Shock Factor                     | 1.00  |  | adm                          |      |   |             |            |        |      |   |   |
| Chassis  | Sportscar |   | Front Weight Distribution  | 33%    | %       | Transfer ratio LCV               | 1.000 |  | adm                          |      |   |             |            |        |      |   |   |
| Engine   | Gasoline  |   | Front axle weight - FAW    | 307.24 | kg      | Transfer Differential Ratio      | 1.000 |  | adm                          |      |   |             |            |        |      |   |   |
| DriveLine  | RWD (4x2) |   | Rear axle weight - RAW     | 629.86 | kg      | tau_tot                          |       |  |                              |      |   |             |            |        |      |   |   |
| Trasm_T_front  | Tfront    | 0 | WheelBase                  | 2.475  | m       | Front                            |       |  | gear #1                      | 1507 | 0 | 1507        | 3087       | 762    | 3789 | 0 | 0 |
| Trasm_T_rear   | Trear     | 1 | Track                      | 1.6    | m       | Front Differential Ratio         |       |  | gear #2                      | 1507 | 0 | 1507        | 3087       | 534    | 3622 | 0 | 0 |
| gear number  | 6         |   | Center of Gravity          | 0.42   | m       | wheel ratio                      |       |  | gear #3                      | 1507 | 0 | 1507        | 3087       | 362    | 3448 | 0 | 0 |
|  |           |   | Static Load on Radius      | 0.208  | m       | iferential Locking Percentage    |       |  | gear #4                      | 1507 | 0 | 1507        | 3087       | 282    | 3368 | 0 | 0 |
|  |           |   | Diag coefficient           | 0      |         | Torque from central differential |       |  | gear #5                      | 1507 | 0 | 1507        | 3087       | 225    | 3302 | 0 | 0 |
|  |           |   | Lit coefficient            | 0      |         | Friction coefficient             |       |  | gear #6                      | 1507 | 0 | 1507        | 3087       | 188    | 3275 | 0 | 0 |
|  |           |   | Abexa centro di gravita    | 0.42   | m       | G_jim_max long Accel - Fv        |       |  | gear #7                      | 1507 | 0 | 1507        | 3087       | 0      | 3087 | 0 | 0 |
|  |           |   | X centro di gravita        | 15.945 | Nm      | G_jim_max long Accel - Rv        |       |  | gear #8                      | 1507 | 0 | 1507        | 3087       | 0      | 3087 | 0 | 0 |
|  |           |   | Diag surface               | 0      | m²      | Rear                             |       |  | gear #9                      | 1507 | 0 | 1507        | 3087       | 0      | 3087 | 0 | 0 |
|  |           |   | Lit surface                | 0      | m²      | Rear Differential Ratio          |       |  | gear #10                     | 1507 | 0 | 1507        | 3087       | 0      | 3087 | 0 | 0 |
|  |           |   | Engine Data                |        |         | wheel ratio                      |       |  | gear #11                     | 1507 | 0 | 1507        | 3087       | 0      | 3087 | 0 | 0 |
|  |           |   | T_max @ engine             | 555    | Nm      | iferential Locking Percentage    |       |  | gear #RM                     | 1507 | 0 | 1507        | 3087       | 427    | 2461 | 0 | 0 |
|  |           |   | T_max shock @ engine       | 610.5  | Nm      | Torque from central differential |       |  | Expected Mileage             |      |   |             | 100.000    | km     |      |   |   |
|  |           |   | w_T_max @ engine           | 34.2   | [rad/s] | Friction coefficient             |       |  | Corresponding overall Cycles |      |   |             | 51.719.021 | cycles |      |   |   |
|  |           |   | w_T_max @ engine           | 5174   | Nm      | G_jim_max long Accel - Fv        |       |  |                              |      |   |             |            |        |      |   |   |
|  |           |   | T_Pmax shock @ engine      | 568.0  | Nm      | G_jim_max long Accel - Rv        |       |  |                              |      |   |             |            |        |      |   |   |
|  |           |   | w_T_Pmax @ engine          | 577.0  | [rad/s] |                                  |       |  |                              |      |   |             |            |        |      |   |   |
|  |           |   | T_0 throttle @ engine      | 50     | Nm      |                                  |       |  |                              |      |   |             |            |        |      |   |   |
|  |           |   | % Torque distribution      | 80.0%  | adm     |                                  |       |  |                              |      |   |             |            |        |      |   |   |

| General Data |             | Cycle name              |                           | coefficients        |                       | T_use              |                         | T_max                  |                 | P_max             |                  | Cycle name          |                    | coefficients     |                     | T_use                 |                    | T_max                   |                        | P_max           |                   |                  |                     |                    |                  |        |        |        |
|--------------|-------------|-------------------------|---------------------------|---------------------|-----------------------|--------------------|-------------------------|------------------------|-----------------|-------------------|------------------|---------------------|--------------------|------------------|---------------------|-----------------------|--------------------|-------------------------|------------------------|-----------------|-------------------|------------------|---------------------|--------------------|------------------|--------|--------|--------|
| gbr#         | gear ratios | drive shaft speed [rpm] | vehicle shaft speed [rpm] | relative gear use % | ave wheel speed [mph] | Engine Output [Nm] | Front Slip limit T [Nm] | Rear Slip limit T [Nm] | % on front axle | Front Vmax T [Nm] | Rear Vmax T [Nm] | relative gear use % | absolte gear use % | overall cycles # | relative gear use % | ave wheel speed [mph] | Engine Output [Nm] | Front Slip limit T [Nm] | Rear Slip limit T [Nm] | % on front axle | Front Vmax T [Nm] | Rear Vmax T [Nm] | relative gear use % | absolte gear use % | overall cycles # |        |        |        |
| 1            | 13.028      | 229                     | 24                        | 27                  | 1.76%                 | 28.3               | 0                       | 0                      | 0               | 0                 | 0                | 0                   | 1.154              | 1.62%            | 0.8%                | 418                   | 1.76%              | 28.3                    | 0                      | 0               | 0                 | 0                | 0                   | 0                  | 1.154            | 1.62%  | 0.8%   | 334    |
| 2            | 7.831       | 378                     | 40                        | 44                  | 5.78%                 | 51.6               | 0                       | 0                      | 0               | 0                 | 0                | 0                   | 1.154              | 4.95%            | 2.28%               | 1.177                 | 5.78%              | 51.6                    | 0                      | 0               | 0                 | 0                | 0                   | 0                  | 1.154            | 4.95%  | 2.28%  | 941    |
| 3            | 5.367       | 559                     | 59                        | 65                  | 15.50%                | 80.5               | 0                       | 0                      | 0               | 0                 | 0                | 0                   | 1.091              | 15.50%           | 5.00%               | 2.445                 | 15.50%             | 80.5                    | 0                      | 0               | 0                 | 0                | 0                   | 0                  | 1.091            | 15.50% | 5.00%  | 2.276  |
| 4            | 4.881       | 718                     | 75                        | 83                  | 19.21%                | 109.6              | 0                       | 0                      | 0               | 0                 | 0                | 0                   | 1.026              | 19.21%           | 5.96%               | 3.084                 | 19.21%             | 109.6                   | 0                      | 0               | 0                 | 0                | 0                   | 0                  | 1.026            | 19.21% | 5.96%  | 2.467  |
| 5            | 3.338       | 939                     | 94                        | 104                 | 16.80%                | 141.6              | 0                       | 0                      | 0               | 0                 | 0                | 0                   | 1.009              | 16.80%           | 4.80%               | 2.483                 | 16.80%             | 141.6                   | 0                      | 0               | 0                 | 0                | 0                   | 0                  | 1.009            | 16.80% | 4.80%  | 1.586  |
| 6            | 2.787       | 1076                    | 113                       | 125                 | 13.57%                | 175.0              | 0                       | 0                      | 0               | 0                 | 0                | 0                   | 0.998              | 13.57%           | 3.80%               | 1.862                 | 13.57%             | 175.0                   | 0                      | 0               | 0                 | 0                | 0                   | 0                  | 0.998            | 13.57% | 3.80%  | 1.450  |
| 7            | 0.000       | 0                       | 0                         | 0                   | 0.00%                 | 0.0                | 0                       | 0                      | 0               | 0                 | 0                | 0                   | 0                  | 0.00%            | 0.00%               | 0                     | 0                  | 0                       | 0                      | 0               | 0                 | 0                | 0                   | 0                  | 0                | 0.00%  | 0.00%  | 0      |
| 8            | 0.000       | 0                       | 0                         | 0                   | 0.00%                 | 0.0                | 0                       | 0                      | 0               | 0                 | 0                | 0                   | 0                  | 0.00%            | 0.00%               | 0                     | 0                  | 0                       | 0                      | 0               | 0                 | 0                | 0                   | 0                  | 0                | 0.00%  | 0.00%  | 0      |
| 9            | 0.000       | 0                       | 0                         | 0                   | 0.00%                 | 0.0                | 0                       | 0                      | 0               | 0                 | 0                | 0                   | 0                  | 0.00%            | 0.00%               | 0                     | 0                  | 0                       | 0                      | 0               | 0                 | 0                | 0                   | 0                  | 0                | 0.00%  | 0.00%  | 0      |
| 10           | 0.000       | 0                       | 0                         | 0                   | 0.00%                 | 0.0                | 0                       | 0                      | 0               | 0                 | 0                | 0                   | 0                  | 0.00%            | 0.00%               | 0                     | 0                  | 0                       | 0                      | 0               | 0                 | 0                | 0                   | 0                  | 0                | 0.00%  | 0.00%  | 0      |
| 11           | 0.000       | 0                       | 0                         | 0                   | 0.00%                 | 0.0                | 0                       | 0                      | 0               | 0                 | 0                | 0                   | 0                  | 0.00%            | 0.00%               | 0                     | 0                  | 0                       | 0                      | 0               | 0                 | 0                | 0                   | 0                  | 0                | 0.00%  | 0.00%  | 0      |
| RM           | 13.584      | 221                     | 23                        | 26                  | 0.85%                 | 26.9               | 0                       | 0                      | 0               | 0                 | 0                | 0                   | 0.750              | 0.85%            | 0.20%               | 103                   | 0.85%              | 26.9                    | 0                      | 0               | 0                 | 0                | 0                   | 0                  | 0.750            | 0.85%  | 0.20%  | 83     |
|              |             | 445                     | 42                        | 47                  | 73.46%                |                    |                         |                        |                 |                   |                  |                     | 0.750              | 73.46%           | 36.73%              | 18.997                | 73.06%             |                         |                        |                 |                   |                  |                     |                    | 0.750            | 73.06% | 29.23% | 15.115 |

Figura 4.3.4: Foglio di definizione del ciclo di carico per il calcolo a fatica.

5. *Driveshafts definition*: in questo foglio l'ufficio inserisce i dati geometrici e tecnologici dei semiassi. Quindi le dimensioni, i dati relativi al tipo di materiale e informazioni sui trattamenti effettuati. Infine si inseriscono gli estremi della retta (scala semi logaritmica) che identifica la frequenza del ciclo affaticante in funzione della frequenza di rotazione.



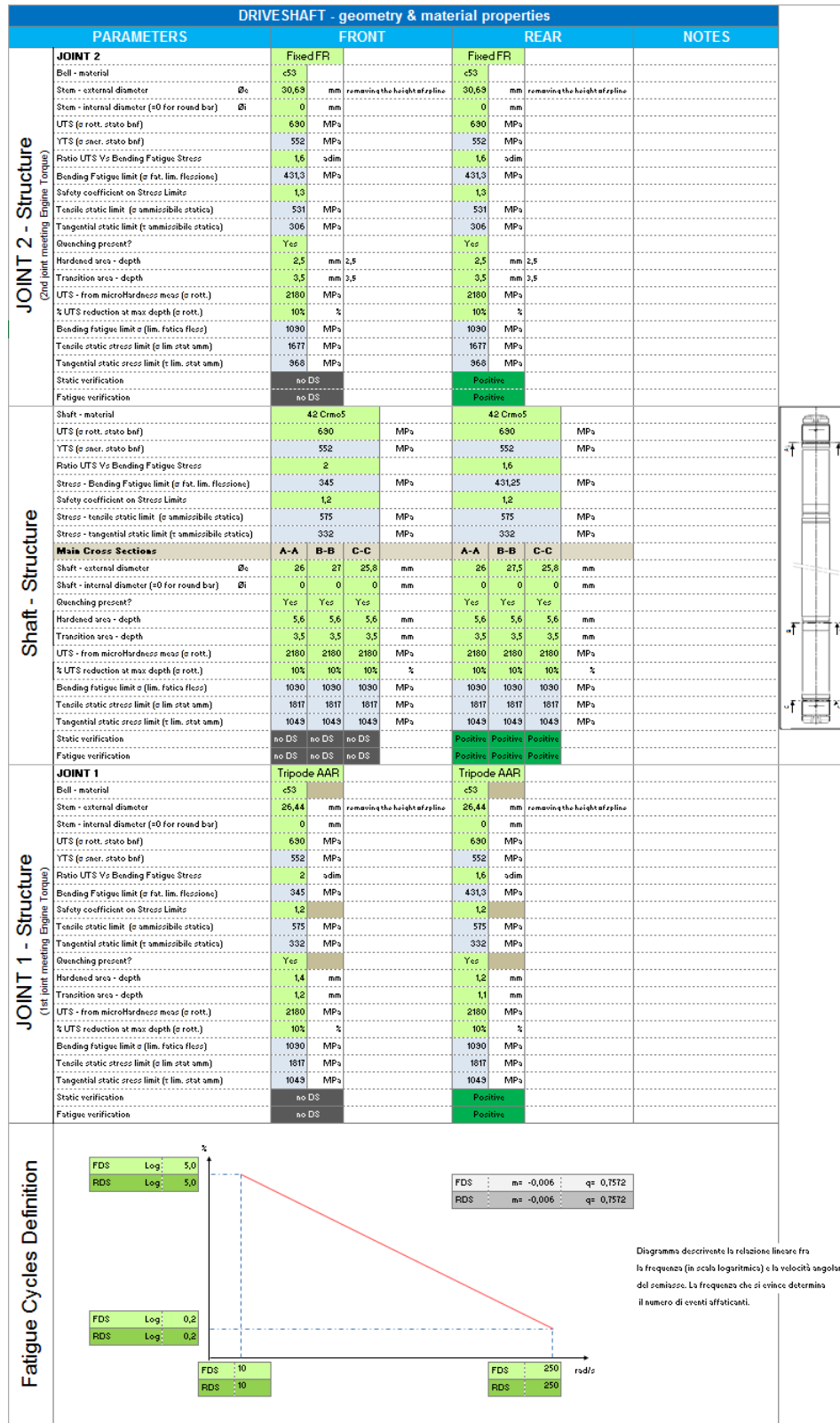


Figura 4.3.5: Foglio di input dei dati geometrici e tecnologici relativi al semiasse completo.

6. *Structural DS validation (Front & Rear)*: Si tratta di due fogli separati che riproducono gli stessi calcoli per i semiasse sull'anteriore e quello posteriore. In questi

fogli si esegue la verifica strutturale e a fatica della trasmissione nelle zone critiche. In particolare si valuta la resistenza a rottura nelle condizioni di coppia massima aumentata del fattore di *shock*  $k_s$  ipotizzato in base all'esperienza come già descritto precedentemente. Dal momento che le superfici dei gambi dei giunti e dell'albero subiscono un trattamento termico allo scopo di incrementarne la durezza nella zona di massima sollecitazione. Il profilo della tensione tangenziale ammissibile non è costante al variare del raggio ma presenta un andamento decrescente fino a un certo valore di profondità, dopo il quale l'andamento è costante. Nella zona di variazione di pendenza ci si deve accertare che le tensioni dovute al carico siano inferiori a quella ammissibile.

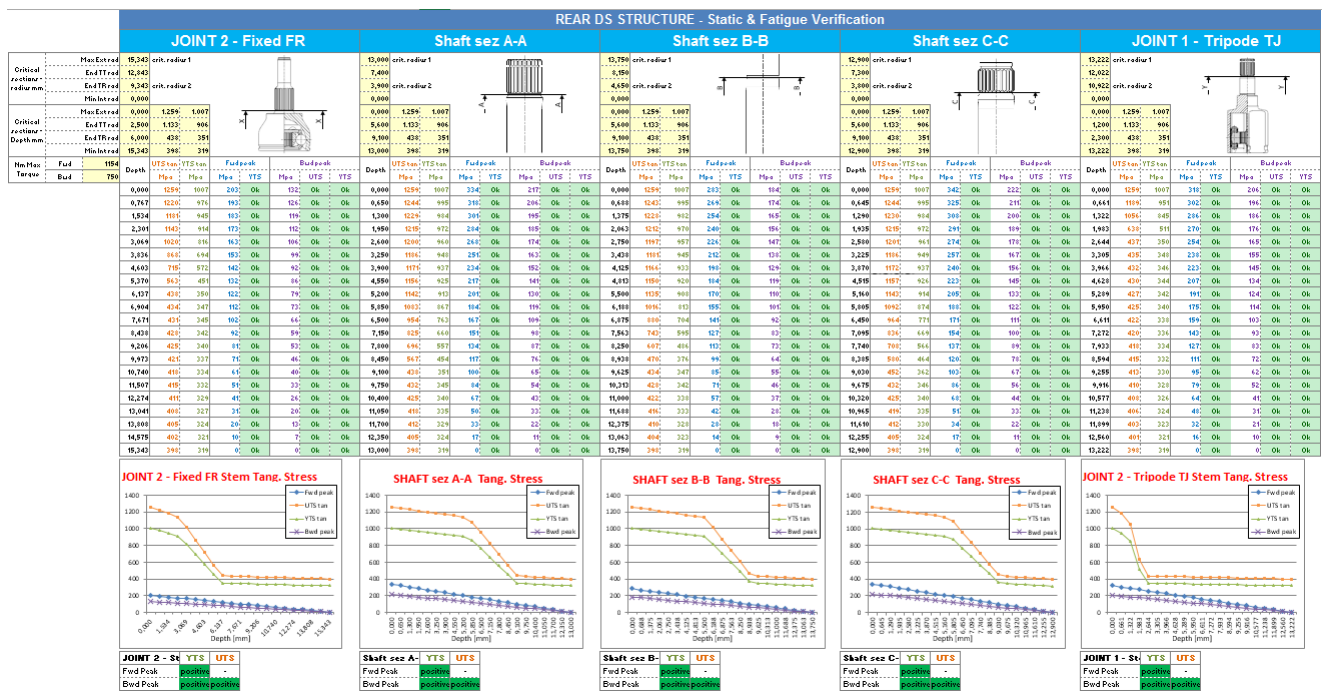


Figura 4.3.6: Porzione di foglio per il calcolo a fatica e strutturale del semiasse. In questa parte si esegue la verifica statica per le sezioni critiche del semiasse.

Segue poi la parte di calcolo della vita a fatica considerando la variabilità della sollecitazione dovuta al passaggio dalla condizione di coppia media (oppure coppia massima oppure potenza massima) alla fase di freno motore, con un numero di cicli ricavato considerando una percentuale della frequenza di rotazione per ciascuna condizione di utilizzo.

| Transmission Data |               |               |          |        | OCVJ                         |                 |                 |                 |           |               |                                      |             |            |                |           |            |           |        |           |       |     |     |       |  |
|-------------------|---------------|---------------|----------|--------|------------------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------|---------------|--------------------------------------|-------------|------------|----------------|-----------|------------|-----------|--------|-----------|-------|-----|-----|-------|--|
| Gears             | Load Profiles | Cycle percent | # Cycles | Torque | Polar Moment of Inertia      |                 |                 | mm              | UTS MPa   | Fatig Lim MPa | Fatigue analysis of OCVJ stem        |             |            |                |           |            |           |        |           |       |     |     |       |  |
|                   |               |               |          |        | mm <sup>4</sup>              | mm <sup>4</sup> | mm <sup>4</sup> |                 |           |               | Min Int rad                          | Max Ext rad | End TR rad | 0,000          | 690       | 431        | 15,343    | 2180   | 1363      | 9,343 | 759 | 474 |       |  |
|                   |               |               |          |        | Outer Diameter (Max Ext rad) |                 |                 |                 |           |               | End-of-Transformed area (End TR rad) |             |            |                |           |            |           |        |           |       |     |     |       |  |
|                   |               |               |          |        | MaxExt rad ± ni/Ni           |                 |                 | 0,0835 positive |           |               | End TR rad ± ni/Ni                   |             |            | 0,122 positive |           |            |           |        |           |       |     |     |       |  |
|                   |               |               |          |        | stresses                     |                 |                 |                 | Amp Ratio |               | σ LF                                 |             | stresses   |                |           |            | Amp Ratio |        | σ LF      |       | Ni  |     | ni/Ni |  |
|                   |               |               |          |        | τ @ max R                    | σ @ max R       | σ average       | σ alternat      | σ LF      | σ LF          | Ni x 10-6                            | ni/Ni       | τ @ max R  | σ @ max R      | σ average | σ alternat | σ LF      | σ LF   | Ni x 10-6 | ni/Ni |     |     |       |  |
| 1                 | Sport         | 4,15          | 0,000    | 1,154  | 203                          | 352             | 76              | 276             | 4         | 1162,67       | 411                                  | 0           | 124        | 215            | 46        | 168        | 4         | 404,80 | 101       | 0     |     |     |       |  |
|                   | InterCity     | 4,15          | 0,000    | 1,154  | 203                          | 352             | 76              | 276             | 4         | 1162,67       | 411                                  | 0           | 124        | 215            | 46        | 168        | 4         | 404,80 | 101       | 0     |     |     |       |  |
|                   | City          | 4,15          | 0,000    | 1,154  | 203                          | 352             | 76              | 276             | 4         | 1162,67       | 411                                  | 0           | 124        | 215            | 46        | 168        | 4         | 404,80 | 101       | 0     |     |     |       |  |
|                   | Sport         | 4,15          | 17,323   | 1,154  | 203                          | 352             | 76              | 276             | 4         | 1162,67       | 411                                  | 0           | 124        | 215            | 46        | 168        | 4         | 404,80 | 101       | 0     |     |     |       |  |
|                   | InterCity     | 4,15          | 3,485    | 1,154  | 203                          | 352             | 76              | 276             | 4         | 1162,67       | 411                                  | 0           | 124        | 215            | 46        | 168        | 4         | 404,80 | 101       | 0     |     |     |       |  |
|                   | City          | 4,15          | 13,858   | 1,154  | 203                          | 352             | 76              | 276             | 4         | 1162,67       | 411                                  | 0           | 124        | 215            | 46        | 168        | 4         | 404,80 | 101       | 0     |     |     |       |  |
|                   | Sport         | 3,17          | 1,170    | 1,154  | 203                          | 352             | 76              | 276             | 4         | 1162,67       | 411                                  | 0           | 124        | 215            | 46        | 168        | 4         | 404,80 | 101       | 0     |     |     |       |  |
|                   | InterCity     | 3,17          | 0,234    | 1,154  | 203                          | 352             | 76              | 276             | 4         | 1162,67       | 411                                  | 0           | 124        | 215            | 46        | 168        | 4         | 404,80 | 101       | 0     |     |     |       |  |
|                   | City          | 3,17          | 0,936    | 1,154  | 203                          | 352             | 76              | 276             | 4         | 1162,67       | 411                                  | 0           | 124        | 215            | 46        | 168        | 4         | 404,80 | 101       | 0     |     |     |       |  |
|                   | Sport         | 4,15          | 164,176  | -656   | -116                         | -200            | 76              | 276             | 4         | 1162,67       | 411                                  | 0           | -70        | -122           | 46        | 168        | 4         | 404,80 | 101       | 0     |     |     |       |  |
|                   | InterCity     | 4,15          | 33,513   | -656   | -116                         | -200            | 76              | 276             | 4         | 1162,67       | 411                                  | 0           | -70        | -122           | 46        | 168        | 4         | 404,80 | 101       | 0     |     |     |       |  |
|                   | City          | 4,15          | 134,050  | -656   | -116                         | -200            | 76              | 276             | 4         | 1162,67       | 411                                  | 0           | -70        | -122           | 46        | 168        | 4         | 404,80 | 101       | 0     |     |     |       |  |
| 2                 | Sport         | 3,36          | 0,000    | 1,154  | 203                          | 352             | 237             | 116             | 0         | 597,82        | 8                                    | 0           | 124        | 215            | 144       | 70         | 0         | 208,14 | 6         | 0     |     |     |       |  |
|                   | InterCity     | 3,36          | 0,000    | 1,103  | 195                          | 337             | 229             | 108             | 0         | 585,71        | 8                                    | 0           | 118        | 205            | 139       | 66         | 0         | 203,92 | 6         | 0     |     |     |       |  |
|                   | City          | 3,36          | 0,000    | 1,103  | 195                          | 337             | 229             | 108             | 0         | 585,71        | 8                                    | 0           | 118        | 205            | 139       | 66         | 0         | 203,92 | 6         | 0     |     |     |       |  |
|                   | Sport         | 3,36          | 33,548   | 1,154  | 203                          | 352             | 237             | 116             | 0         | 597,82        | 8                                    | 0           | 124        | 215            | 144       | 70         | 0         | 208,14 | 6         | 0     |     |     |       |  |
|                   | InterCity     | 3,36          | 7,910    | 1,103  | 195                          | 337             | 229             | 108             | 0         | 585,71        | 8                                    | 0           | 118        | 205            | 139       | 66         | 0         | 203,92 | 6         | 0     |     |     |       |  |
|                   | City          | 3,36          | 31,638   | 1,103  | 195                          | 337             | 229             | 108             | 0         | 585,71        | 8                                    | 0           | 118        | 205            | 139       | 66         | 0         | 203,92 | 6         | 0     |     |     |       |  |
|                   | Sport         | 2,16          | 6,839    | 1,154  | 203                          | 352             | 237             | 116             | 0         | 597,82        | 8                                    | 0           | 124        | 215            | 144       | 70         | 0         | 208,14 | 6         | 0     |     |     |       |  |
|                   | InterCity     | 2,16          | 1,368    | 1,103  | 195                          | 337             | 229             | 108             | 0         | 585,71        | 8                                    | 0           | 118        | 205            | 139       | 66         | 0         | 203,92 | 6         | 0     |     |     |       |  |
|                   | City          | 2,16          | 5,471    | 1,103  | 195                          | 337             | 229             | 108             | 0         | 585,71        | 8                                    | 0           | 118        | 205            | 139       | 66         | 0         | 203,92 | 6         | 0     |     |     |       |  |
|                   | Sport         | 3,36          | 18,132   | 397    | 70                           | 121             | 237             | 116             | 0         | 597,82        | 8                                    | 0           | 43         | 74             | 144       | 70         | 0         | 208,14 | 6         | 0     |     |     |       |  |
|                   | InterCity     | 3,36          | 3,701    | 397    | 70                           | 121             | 229             | 108             | 0         | 585,71        | 8                                    | 0           | 43         | 74             | 139       | 66         | 0         | 203,92 | 6         | 0     |     |     |       |  |
|                   | City          | 3,36          | 14,805   | 397    | 70                           | 121             | 229             | 108             | 0         | 585,71        | 8                                    | 0           | 43         | 74             | 139       | 66         | 0         | 203,92 | 6         | 0     |     |     |       |  |
| 3                 | Sport         | 2,61          | 0,000    | 1,051  | 185                          | 321             | 201             | 119             | 1         | 663,43        | 12                                   | 0           | 113        | 195            | 123       | 73         | 1         | 230,98 | 8         | 0     |     |     |       |  |
|                   | InterCity     | 2,61          | 0,000    | 1,051  | 185                          | 321             | 201             | 119             | 1         | 663,43        | 12                                   | 0           | 113        | 195            | 123       | 73         | 1         | 230,98 | 8         | 0     |     |     |       |  |
|                   | City          | 2,61          | 0,000    | 1,051  | 185                          | 321             | 201             | 119             | 1         | 663,43        | 12                                   | 0           | 113        | 195            | 123       | 73         | 1         | 230,98 | 8         | 0     |     |     |       |  |
|                   | Sport         | 2,61          | 74,178   | 1,051  | 185                          | 321             | 201             | 119             | 1         | 663,43        | 12                                   | 0           | 113        | 195            | 123       | 73         | 1         | 230,98 | 8         | 0     |     |     |       |  |
|                   | InterCity     | 2,61          | 14,836   | 1,051  | 185                          | 321             | 201             | 119             | 1         | 663,43        | 12                                   | 0           | 113        | 195            | 123       | 73         | 1         | 230,98 | 8         | 0     |     |     |       |  |
|                   | City          | 2,61          | 59,343   | 1,051  | 185                          | 321             | 201             | 119             | 1         | 663,43        | 12                                   | 0           | 113        | 195            | 123       | 73         | 1         | 230,98 | 8         | 0     |     |     |       |  |
|                   | Sport         | 1,36          | 15,775   | 1,051  | 185                          | 321             | 201             | 119             | 1         | 663,43        | 12                                   | 0           | 113        | 195            | 123       | 73         | 1         | 230,98 | 8         | 0     |     |     |       |  |
|                   | InterCity     | 1,36          | 3,155    | 1,051  | 185                          | 321             | 201             | 119             | 1         | 663,43        | 12                                   | 0           | 113        | 195            | 123       | 73         | 1         | 230,98 | 8         | 0     |     |     |       |  |
|                   | City          | 1,36          | 12,620   | 1,051  | 185                          | 321             | 201             | 119             | 1         | 663,43        | 12                                   | 0           | 113        | 195            | 123       | 73         | 1         | 230,98 | 8         | 0     |     |     |       |  |
|                   | Sport         | 2,61          | 37,758   | 268    | 47                           | 82              | 201             | 119             | 1         | 663,43        | 12                                   | 0           | 29         | 50             | 123       | 73         | 1         | 230,98 | 8         | 0     |     |     |       |  |
|                   | InterCity     | 2,61          | 7,707    | 268    | 47                           | 82              | 201             | 119             | 1         | 663,43        | 12                                   | 0           | 29         | 50             | 123       | 73         | 1         | 230,98 | 8         | 0     |     |     |       |  |
|                   | City          | 2,61          | 30,820   | 268    | 47                           | 82              | 201             | 119             | 1         | 663,43        | 12                                   | 0           | 29         | 50             | 123       | 73         | 1         | 230,98 | 8         | 0     |     |     |       |  |
| 4                 | Sport         | 2,09          | 0,000    | 1,026  | 181                          | 313             | 189             | 125             | 1         | 700,62        | 15                                   | 0           | 110        | 191            | 115       | 76         | 1         | 243,93 | 10        | 0     |     |     |       |  |
|                   | InterCity     | 2,09          | 0,000    | 1,026  | 181                          | 313             | 189             | 125             | 1         | 700,62        | 15                                   | 0           | 110        | 191            | 115       | 76         | 1         | 243,93 | 10        | 0     |     |     |       |  |
|                   | City          | 2,09          | 0,000    | 1,026  | 181                          | 313             | 189             | 125             | 1         | 700,62        | 15                                   | 0           | 110        | 191            | 115       | 76         | 1         | 243,93 | 10        | 0     |     |     |       |  |
|                   | Sport         | 2,09          | 64,361   | 1,026  | 181                          | 313             | 189             | 125             | 1         | 700,62        | 15                                   | 0           | 110        | 191            | 115       | 76         | 1         | 243,93 | 10        | 0     |     |     |       |  |
|                   | InterCity     | 2,09          | 12,872   | 1,026  | 181                          | 313             | 189             | 125             | 1         | 700,62        | 15                                   | 0           | 110        | 191            | 115       | 76         | 1         | 243,93 | 10        | 0     |     |     |       |  |
|                   | City          | 2,09          | 51,489   | 1,026  | 181                          | 313             | 189             | 125             | 1         | 700,62        | 15                                   | 0           | 110        | 191            | 115       | 76         | 1         | 243,93 | 10        | 0     |     |     |       |  |
|                   | Sport         | 0,90          | 16,983   | 1,026  | 181                          | 313             | 189             | 125             | 1         | 700,62        | 15                                   | 0           | 110        | 191            | 115       | 76         | 1         | 243,93 | 10        | 0     |     |     |       |  |
|                   | InterCity     | 0,90          | 3,397    | 1,026  | 181                          | 313             | 189             | 125             | 1         | 700,62        | 15                                   | 0           | 110        | 191            | 115       | 76         | 1         | 243,93 | 10        | 0     |     |     |       |  |
|                   | City          | 0,90          | 13,587   | 1,026  | 181                          | 313             | 189             | 125             | 1         | 700,62        | 15                                   | 0           | 110        | 191            | 115       | 76         | 1         | 243,93 | 10        | 0     |     |     |       |  |
|                   | Sport         | 2,09          | 37,458   | 209    | 37                           | 64              | 189             | 125             | 1         | 700,62        | 15                                   | 0           | 22         | 39             | 115       | 76         | 1         | 243,93 | 10        | 0     |     |     |       |  |
|                   | InterCity     | 2,09          | 7,646    | 209    | 37                           | 64              | 189             | 125             | 1         | 700,62        | 15                                   | 0           | 22         | 39             | 115       | 76         | 1         | 243,93 | 10        | 0     |     |     |       |  |
|                   | City          | 2,09          | 30,595   | 209    | 37                           | 64              | 189             | 125             | 1         | 700,62        | 15                                   | 0           | 22         | 39             | 115       | 76         | 1         | 243,93 | 10        | 0     |     |     |       |  |
| 5                 | Sport         | 1,62          | 0,000    | 1,009  | 178                          | 308             | 180             | 129             | 1         | 727,62        | 17                                   | 0           | 108        | 188            | 109       | 78         | 1         | 253,33 | 11        | 0     |     |     |       |  |
|                   | InterCity     | 1,62          | 0,000    | 1,009  | 178                          | 308             | 180             | 129             | 1         | 727,62        | 17                                   | 0           | 108        | 188            | 109       | 78         | 1         | 253,33 | 11        | 0     |     |     |       |  |
|                   | City          | 1,62          | 0,000    | 1,009  | 178                          | 308             | 180             | 129             | 1         | 727,62        | 17                                   | 0           | 108        | 188            | 109       | 78         | 1         | 253,33 | 11        | 0     |     |     |       |  |
|                   | Sport         | 1,62          | 40,140   | 1,009  | 178                          | 308             | 180             | 129             | 1         | 727,62        | 17                                   | 0           | 108        | 188            | 109       | 78         | 1         | 253,33 | 11        | 0     |     |     |       |  |
|                   | InterCity     | 1,62          | 8,028    | 1,009  | 178                          | 308             | 180             | 129             | 1         | 727,62        | 17                                   | 0           | 108        | 188            | 109       | 78         | 1         | 253,33 | 11        | 0     |     |     |       |  |
|                   | City          | 1,62          | 32,112   | 1,009  | 178                          | 308             | 180             | 129             | 1         | 727,62        | 17                                   | 0           | 108        | 188            | 109       | 78         | 1         | 253,33 | 11        | 0     |     |     |       |  |
|                   | Sport         | 0,56          | 10,508   | 1,009  | 178                          | 308             | 180             | 129             | 1         | 727,62        | 17                                   | 0           | 108        | 188            | 109       | 78         | 1         | 253,33 | 11        | 0     |     |     |       |  |
|                   | InterCity     | 0,56          | 2,102    | 1,009  | 178                          | 308             | 180             | 129             | 1         | 727,62        | 17                                   | 0           | 108        | 188            | 109       | 78         | 1         | 253,33 | 11        | 0     |     |     |       |  |
|                   | City          | 0,56          | 8,407    | 1,009  | 178                          | 308             | 180             | 129             | 1         | 727,62        | 17                                   | 0           | 108        | 188            | 109       | 78         | 1         | 253,33 | 11        | 0     |     |     |       |  |
|                   | Sport         | 1,62          | 25,375   | 167    | 29                           | 51              | 180             | 129             | 1         | 727,62        | 17                                   | 0           | 18         | 31             | 109       | 78         | 1         | 253,33 | 11        | 0     |     |     |       |  |
|                   | InterCity     | 1,62          | 25,375   | 167    | 29                           | 51              | 180             | 129             | 1         | 727,62        | 17                                   | 0           | 18         | 31             | 109       | 78         | 1         | 253,33 | 11        | 0     |     |     |       |  |
|                   | City          | 1,62          | 20,719   | 167    | 29                           | 51              | 180             | 129             | 1         | 727,62        | 17                                   | 0           | 18         | 31             | 109       | 78         | 1         | 253,33 | 11        | 0     |     |     |       |  |
| 6                 | Sport         | 1,26          | 0,000    | 998    | 176                          | 305             | 174             | 131             | 1         | 745,39        | 19                                   | 0           | 107        | 186            | 106       | 80         | 1         | 259,52 | 12        | 0     |     |     |       |  |
|                   | InterCity     | 1,26          | 0,000    | 998    | 176                          | 305             | 174             | 131             | 1         | 745,39        | 19                                   | 0           | 107        | 186            | 106       | 80         | 1         | 259,52 | 12        | 0     |     |     |       |  |
|                   | City          | 1,26          | 0,000    | 99     |                              |                 |                 |                 |           |               |                                      |             |            |                |           |            |           |        |           |       |     |     |       |  |

7. *Structural DS results (Front & Rear)*: Si tratta di due fogli di output che riportano la sintesi della verifica statica e a fatica svolta nei precedenti fogli. Tali fogli costituiscono una parte del documento ufficiale di validazione che sarà rilasciato al cliente.



Figura 4.3.8: Foglio di riepilogo dei risultati della verifica strutturale del semiassie.

8. *Kinematic input-output (Front & Rear)*: in questi fogli avviene la verifica a fatica delle piste e dei corpi volventi. L'ufficio sceglie la tipologia di giunto interno (lato differenziale) e del giunto esterno (lato ruota), inserisce il numero di sfere o *roller* e in base all'esperienza i coefficienti di sicurezza e di conformità. Da questi il foglio suggerisce i valori minimi di *PCR* e diametri dei corpi volventi e l'operatore digita i valori effettivi di questi in base a quelle che sono le taglie di giunti disponibili. Ne segue la verifica in automatico e il foglio calcola la durata del giunto in chilometri relativa a un angolo di articolazione nullo. L'ultimo passaggio consiste nella selezione degli angoli di lavoro a cui il componente si troverà ad operare. In particolare il calcolo prevede 5 situazioni relative all'assetto statico, sterzata destra, sterzata sinistra, sobbalzo e tamponamento. Per ciascuna condizione si inserisce il valore dell'angolo e la percentuale di percorrenza corrispondente a tale evento. Inseriti i valori si lancia una macro che riporta la somma pesata delle singole durate relative a ciascuna condizione.

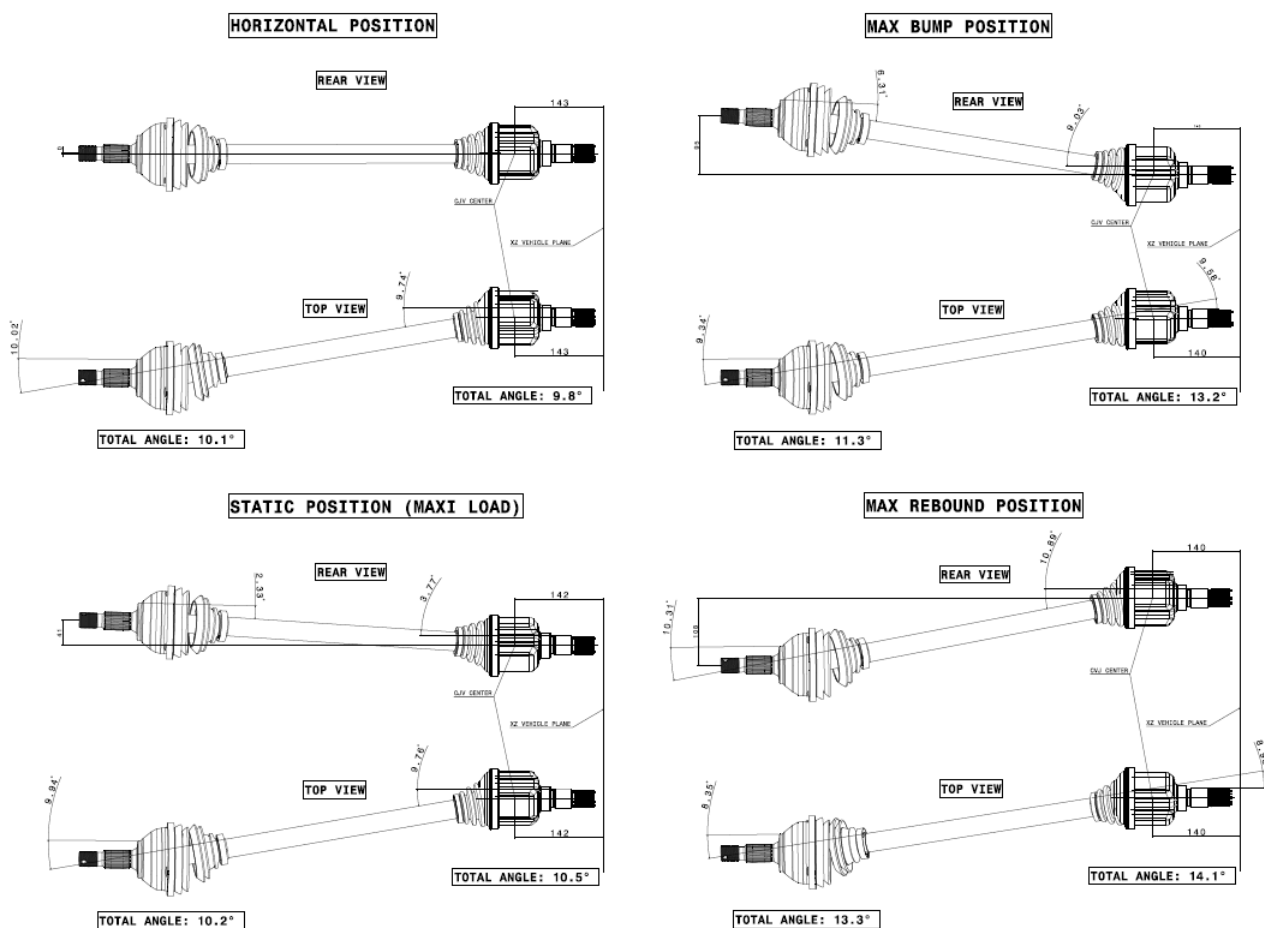


Figura 4.3.9: Esempio di angoli di lavoro per quattro condizioni di funzionamento: a sinistra posizioni statiche a vuoto (in alto) e a pieno carico (in basso), a destra condizione di tamponamento (in lato) e rimbalzo (in basso).

| VEHICLE DATA                                       |                         |                       |                 | LOAD CYCLES                  |              |              |                    |                  |                  |
|--|-------------------------|-----------------------|-----------------|------------------------------|--------------|--------------|--------------------|------------------|------------------|
| OE Customer  |                         |                       |                 | Cycle name                   | Cycle weight | coefficients | T <sub>ave</sub>   | T <sub>max</sub> | P <sub>max</sub> |
| Vehicle model                                      |                         |                       |                 | <b>Sport</b>                 | <b>50%</b>   | output coeff | 100%               | 100%             | 100%             |
| Commercial Name                                    | 0                       |                       |                 | High Dynamic                 |              | % usage      | 0%                 | 100%             | 100%             |
| Chassis  | Sportscar               |                       |                 | Cycle name                   | Cycle weight | coefficients | T <sub>ave</sub>   | T <sub>max</sub> | P <sub>max</sub> |
| Engine   | Gasoline                |                       |                 | <b>InterCity</b>             | <b>10%</b>   | output coeff | 100%               | 100%             | 100%             |
| Driveline  | RWD (4x2)               |                       |                 | Medium Dynamic               |              | % usage      | 0%                 | 100%             | 100%             |
| Engine   | Manual                  |                       |                 | Cycle name                   | Cycle weight | coefficients | T <sub>ave</sub>   | T <sub>max</sub> | P <sub>max</sub> |
|  |                         |                       |                 | <b>City</b>                  | <b>40%</b>   | output coeff | 100%               | 100%             | 100%             |
|  |                         |                       |                 | Low Dynamic                  |              | % usage      | 0%                 | 100%             | 100%             |
|  |                         |                       |                 | Expected Mileage             | 100.000      |              | km                 |                  |                  |
|  |                         |                       |                 | Corresponding overall Cycles | 51.719.021   |              | cycles             |                  |                  |
| Max Torque on CVJ                                  | Fwd                     | M <sub>max fwd</sub>  | [Nm]            | 1154                         | Clear 1      | JOINT 1      |                    | Clear 2          | JOINT 2          |
|  | Bwd                     | M <sub>max bwd</sub>  | [Nm]            | 750                          |              |              |                    |                  |                  |
| JOINT TOPOLOGY                                     |                         |                       |                 | Tripode AAR                  |              |              | Fixed FR           |                  |                  |
| CVJ Dimensioning (kinematic & pressures) - Forward |                         |                       |                 |                              |              |              |                    |                  |                  |
| Description  | Sym                     | UDM                   | Data            | Tip                          | Notes        | Data         | Tip                | Notes            |                  |
| Balls number                                       | n                       | adim                  | 6               |                              |              | 6            |                    |                  |                  |
| Roller number                                      |                         | adim                  | 3               |                              |              |              |                    |                  |                  |
| Max Static Hertzian Pressure                       | Pa                      | MPa                   | 2350            |                              |              | 3750         | J/V/Macielnskip120 |                  |                  |
| Safety Coefficient (uncertainty) over Pressure     | Cs                      | adim                  | 1,35            |                              |              | 1,35         |                    |                  |                  |
| Safety Coefficient (uncertainty) over Pressure     | Cs                      | adim                  | 1,2             |                              |              | 1,1          |                    |                  |                  |
| Max Dynamic Hertzian Pressure - long lasting       | Pd                      | MPa                   | 1347            |                              |              | 2150         | J/V/Macielnskip120 |                  |                  |
| Max Dynamic Hertzian Pressure - short lasting      | Psd                     | MPa                   | 2005            |                              |              | 3200         |                    |                  |                  |
| Pressure Angle (XY)                                | α                       | °                     | 90              |                              |              | 45           | Only 45            |                  |                  |
| Ball Track Inclination Angle (XZ -VL40°)           | γ                       | °                     | 0               | Only 0                       |              | 0            | It can vary        |                  |                  |
| Ball Track Oblique Angle (YZ)                      | ε                       | °                     | 0               | +0 (It can not vary)         |              | 0            | It can vary        |                  |                  |
| Mutual Transverse Conformity                       | ψ                       | adim                  | 1,002           | ψ=(1,002+1,008)              |              | 1,003        | ψ=(1,003+1,005)    |                  |                  |
| rate PitchCenterRadius / ballDiameter              | PCR/d                   | adim                  | 0,63            | FR/d = 0,63-0,83             |              | 1,65         | FR/d = 1,644+1,73  |                  |                  |
| Transverse Conformity                              | Xq                      | adim                  | -0,998          |                              |              | -0,997       |                    |                  |                  |
| Longitudinal Conformity                            | Xl                      | adim                  | 0,000           | It can't vary (b = =)        |              | 0,268        |                    |                  |                  |
| Hertzian Product                                   | dEp                     | adim                  | 2,004           |                              |              | 2,543        |                    |                  |                  |
| Hertzian Elliptical Coefficient                    | cos τ                   | adim                  | 0,996           |                              |              | 0,995        |                    |                  |                  |
| Hertzian Elliptical Coefficient                    | μV                      | adim                  | 2,650           |                              |              | 2,540        |                    |                  |                  |
| Conformity Coefficient                             | Cp                      | adim                  | 515             |                              |              | 629          |                    |                  |                  |
| CVJ Dimensioning (geometry) - Forward              |                         |                       |                 |                              |              |              |                    |                  |                  |
| Suggested Min Ball Diameter                        | d min                   | mm                    |                 |                              |              | 12,424       |                    |                  |                  |
| Suggested Min Roller Diameter                      |                         | mm                    | 37,654          |                              |              |              |                    |                  |                  |
| Suggested Min PitchCenterRadius                    | PCR                     | mm                    | 23,722          |                              |              | 20,499       |                    |                  |                  |
| Ball Commercial Diameter Selected                  | d                       | mm                    |                 |                              |              | 18,2560      |                    |                  |                  |
| Roller Commercial Diameter Selected                |                         | mm                    | 43,5000         |                              |              |              |                    |                  |                  |
| PCR - PitchCenterRadius Selected                   | PCR                     | mm                    | 25,5500         |                              |              | 29,9580      |                    |                  |                  |
| Suggested Min Dimension                            | A                       | mm                    |                 |                              |              | 87,6         |                    |                  |                  |
| Suggested Min Dimension                            | B                       | mm                    |                 |                              |              | 30,4         |                    |                  |                  |
| Suggested Min Dimension                            | C                       | mm                    |                 |                              |              | 42,6         |                    |                  |                  |
| Suggested Min Dimension                            | D                       | mm                    |                 |                              |              | 15,2         |                    |                  |                  |
| Suggested Min Dimension                            | E                       | mm                    |                 |                              |              | 24,3         |                    |                  |                  |
| Trunnion diameter                                  |                         | mm                    | 21,8            |                              |              |              |                    |                  |                  |
| Needles diameter                                   |                         | mm                    | 2,2             |                              |              |              |                    |                  |                  |
| Effective needle length                            | l <sub>e</sub>          | mm                    | 24,9            | pag 90 Tab.4.6               |              |              |                    |                  |                  |
| Number of needles                                  | z                       | adim                  | 35,0            |                              |              |              |                    |                  |                  |
| CVJ Static Torque                                  | Ms                      | Nm                    | 7,992           |                              |              | 6,734        |                    |                  |                  |
| CVJ Dynamic Torque - Long Lasting                  | Md                      | Nm                    | 1,607           |                              |              | 1,269        |                    |                  |                  |
| CVJ Dynamic Torque - Short Lasting                 | Msd                     | Nm                    | 4,964           |                              |              | 4,183        |                    |                  |                  |
| CVJ Verification - Forward & Backward              |                         |                       |                 |                              |              |              |                    |                  |                  |
| Forward - Static Torque Safety Coefficient         | Sc <sub>st fwd</sub>    | adim                  | 6,923           | verified                     |              | 5,833        | verified           |                  |                  |
| Backward - Static Torque Safety Coefficient        | Sc <sub>st bwd</sub>    | adim                  | 10,661          | verified                     |              | 8,983        | verified           |                  |                  |
| durability   | L <sub>50</sub> SC      | hours                 | 1,591           |                              |              | 1,146        |                    |                  |                  |
| safety coefficient                                 | Cs                      | adim                  | 1,35            |                              |              | 1,35         |                    |                  |                  |
| tolerance on calculation spread                    | tol                     | adim                  | 0%              |                              |              | 15%          |                    |                  |                  |
| durability w/o SC                                  | L <sub>50</sub>         | hours                 | 2,148           |                              |              | 1,547        |                    |                  |                  |
| durability w/o SC w tolerance                      | L <sub>50 tol</sub>     | hours                 | 2,148           |                              |              | 1,779        |                    |                  |                  |
| average velocity                                   | V <sub>ave</sub>        | kph                   | 113,9           |                              |              | 113,9        |                    |                  |                  |
| expected mileage                                   | K <sub>tot exp</sub>    | km                    | 100.000         |                              |              | 100.000      |                    |                  |                  |
| calculated mileage                                 | K <sub>tot calc</sub>   | km                    | 244.574         | exceeded                     |              | 202.617      | exceeded           |                  |                  |
| Mileage count                                      | Main Articulation Angle |                       | β               | °                            | 6,5          | 6            |                    |                  |                  |
|  | Cycle weight            |                       | 30%             |                              | 73372,08368  | 30%          | 60785,03643        |                  |                  |
| Effective mileage count                            | calculated mileage      | K <sub>tot calc</sub> | km              | 164.088                      |              | 140.772      |                    |                  |                  |
|  | P <sub>50AA</sub>       |                       | 45%             |                              |              | 43%          |                    |                  |                  |
|  | Steering +              |                       | β <sub>2+</sub> | °                            | 0            | 0            | 0                  |                  |                  |
|  | Cycle weight            |                       | 0%              | 0                            |              | 0%           | 0                  |                  |                  |
|  | calculated mileage      | K <sub>tot calc</sub> | km              | 244.574                      |              | 202.617      |                    |                  |                  |
|  | P <sub>50+</sub>        |                       | 0%              |                              |              | 0%           |                    |                  |                  |
|  | Steering --             |                       | β <sub>2-</sub> | °                            | 0            | 0            | 0                  |                  |                  |
|  | Cycle weight            |                       | 0%              | 0                            |              | 0%           | 0                  |                  |                  |
|  | calculated mileage      | K <sub>tot calc</sub> | km              | 244.574                      |              | 202.617      |                    |                  |                  |
|  | P <sub>50-</sub>        |                       | 0%              |                              |              | 0%           |                    |                  |                  |
|  | Shock +                 |                       | β <sub>2+</sub> | °                            | 8            | 8            | 8                  |                  |                  |
|  | Cycle weight            |                       | 35%             | 88600,76427                  |              | 35%          | 70915,87584        |                  |                  |
|  | calculated mileage      | K <sub>tot calc</sub> | km              | 147.121                      |              | 121.882      |                    |                  |                  |
|  | P <sub>50+</sub>        |                       | 58%             |                              |              | 58%          |                    |                  |                  |
|  | Shock --                |                       | β <sub>2-</sub> | °                            | 12,8         | 10,5         | 10,5               |                  |                  |
|  | Cycle weight            |                       | 35%             | 88600,76427                  |              | 35%          | 70915,87584        |                  |                  |
|  | calculated mileage      | K <sub>tot calc</sub> | km              | 99.204                       |              | 100.128      |                    |                  |                  |
|  | P <sub>50-</sub>        |                       | 86%             |                              |              | 71%          |                    |                  |                  |
|  | expected mileage        | K <sub>tot exp</sub>  | km              | 100.000                      |              | 100.000      |                    |                  |                  |
|  | calculated mileage      | K <sub>tot calc</sub> | km              | 129.277                      | exceeded     | 117.671      | fully met          |                  |                  |

Figura 4.3.10: Foglio di calcolo della vita dei giunti dal punto di vista della fatica piste e corpi volenti.

9. Foglio ausiliario per la costruzione dei cicli affaticanti: questo foglio è costituito da una serie di tabelle che permettono la stima della percentuale di utilizzo delle varie marce per ciascuna modalità di guida (sport, city e intercity) e per ciascuna condizione di carico motore (coppia media, coppia massima, potenza massima e freno motore).

| City Cycle - Low Dynamic    |       |       |       |       |       |                                |       |       |        |        |        | InterCity Cycle - Medium Dynamic |       |       |       |       |       |                                |       |       |        |        |        | Sport Cycle - High Dynamic  |        |       |       |       |       |                                |       |       |        |        |        |       |       |        |
|-----------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|--------------------------------|-------|-------|--------|--------|--------|----------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|--------------------------------|-------|-------|--------|--------|--------|-----------------------------|--------|-------|-------|-------|-------|--------------------------------|-------|-------|--------|--------|--------|-------|-------|--------|
| Ave Torque coefficient      |       |       |       |       |       | 100% % di coppia max in output |       |       |        |        |        | Ave Torque coefficient           |       |       |       |       |       | 100% % di coppia max in output |       |       |        |        |        | Ave Torque coefficient      |        |       |       |       |       | 100% % di coppia max in output |       |       |        |        |        |       |       |        |
| Max Torque usage            |       |       |       |       |       | 100% % utilizzo a coppia max   |       |       |        |        |        | Max Torque usage                 |       |       |       |       |       | 100% % utilizzo a coppia max   |       |       |        |        |        | Max Torque usage            |        |       |       |       |       | 100% % utilizzo a coppia max   |       |       |        |        |        |       |       |        |
| Max Power coefficient       |       |       |       |       |       | 100% % potenza max in output   |       |       |        |        |        | Max Power coefficient            |       |       |       |       |       | 100% % potenza max in output   |       |       |        |        |        | Max Power coefficient       |        |       |       |       |       | 100% % potenza max in output   |       |       |        |        |        |       |       |        |
| AVE TORQUE per gear - % max |       |       |       |       |       |                                |       |       |        |        |        | AVE TORQUE per gear - % max      |       |       |       |       |       |                                |       |       |        |        |        | AVE TORQUE per gear - % max |        |       |       |       |       |                                |       |       |        |        |        |       |       |        |
| ratio                       | 11    | 10    | 9     | 8     | 7     | 6                              | 5     | 4     | 3      | 2      | 1      | ratio                            | 11    | 10    | 9     | 8     | 7     | 6                              | 5     | 4     | 3      | 2      | 1      | ratio                       | 11     | 10    | 9     | 8     | 7     | 6                              | 5     | 4     | 3      | 2      | 1      |       |       |        |
| 1                           | 0,712 | 0,712 | 0,632 | 0,632 | 0,712 | 0,712                          | 0,942 | 1,122 | 3,002  | 10,502 | 31,202 | 1                                | 0,712 | 0,712 | 0,632 | 0,632 | 0,712 | 0,712                          | 0,942 | 1,122 | 3,002  | 10,502 | 31,202 | 1                           | 0,712  | 0,712 | 0,632 | 0,632 | 0,712 | 0,712                          | 0,942 | 1,122 | 3,002  | 10,502 | 31,202 |       |       |        |
| 2                           | 2,222 | 2,702 | 2,402 | 2,402 | 2,222 | 2,222                          | 3,902 | 5,222 | 11,502 | 19,512 |        | 2                                | 2,222 | 2,702 | 2,402 | 2,402 | 2,222 | 2,222                          | 3,902 | 5,222 | 11,502 | 19,512 |        | 2                           | 2,222  | 2,702 | 2,402 | 2,402 | 2,222 | 2,222                          | 3,902 | 5,222 | 11,502 | 19,512 |        |       |       |        |
| 3                           | 4,222 | 4,402 | 4,522 | 5,222 | 4,902 | 5,222                          | 7,242 | 9,242 | 9,902  |        |        | 3                                | 4,222 | 4,402 | 4,522 | 5,222 | 4,902 | 5,222                          | 7,242 | 9,242 | 9,902  |        |        | 3                           | 4,222  | 4,402 | 4,522 | 5,222 | 4,902 | 5,222                          | 7,242 | 9,242 | 9,902  |        |        |       |       |        |
| 4                           | 4,802 | 4,902 | 4,802 | 5,402 | 5,002 | 5,942                          | 6,402 | 7,452 |        |        |        | 4                                | 4,802 | 4,902 | 4,802 | 5,402 | 5,002 | 5,942                          | 6,402 | 7,452 |        |        |        | 4                           | 4,802  | 4,902 | 4,802 | 5,402 | 5,002 | 5,942                          | 6,402 | 7,452 |        |        |        |       |       |        |
| 5                           | 4,902 | 4,902 | 4,222 | 4,812 | 4,792 | 4,902                          | 4,312 |       |        |        |        | 5                                | 4,902 | 4,902 | 4,222 | 4,812 | 4,792 | 4,902                          | 4,312 |       |        |        |        | 5                           | 4,902  | 4,902 | 4,222 | 4,812 | 4,792 | 4,902                          | 4,312 |       |        |        |        |       |       |        |
| 6                           | 3,902 | 3,902 | 3,222 | 3,402 | 3,352 | 3,922                          |       |       |        |        |        | 6                                | 3,902 | 3,902 | 3,222 | 3,402 | 3,352 | 3,922                          |       |       |        |        |        | 6                           | 3,902  | 3,902 | 3,222 | 3,402 | 3,352 | 3,922                          |       |       |        |        |        |       |       |        |
| 7                           | 2,752 | 2,402 | 2,102 | 2,222 | 2,222 |                                |       |       |        |        |        | 7                                | 2,752 | 2,402 | 2,102 | 2,222 | 2,222 |                                |       |       |        |        |        | 7                           | 2,752  | 2,402 | 2,102 | 2,222 | 2,222 |                                |       |       |        |        |        |       |       |        |
| 8                           | 2,002 | 1,642 | 1,752 | 1,432 |       |                                |       |       |        |        |        | 8                                | 2,002 | 1,642 | 1,752 | 1,432 |       |                                |       |       |        |        |        | 8                           | 2,002  | 1,642 | 1,752 | 1,432 |       |                                |       |       |        |        |        |       |       |        |
| 9                           | 1,512 | 1,402 | 1,202 |       |       |                                |       |       |        |        |        | 9                                | 1,512 | 1,402 | 1,202 |       |       |                                |       |       |        |        |        | 9                           | 1,512  | 1,402 | 1,202 |       |       |                                |       |       |        |        |        |       |       |        |
| 10                          | 1,312 | 1,052 |       |       |       |                                |       |       |        |        |        | 10                               | 1,312 | 1,052 |       |       |       |                                |       |       |        |        |        | 10                          | 1,312  | 1,052 |       |       |       |                                |       |       |        |        |        |       |       |        |
| 11                          | 0,912 |       |       |       |       |                                |       |       |        |        |        | 11                               | 0,912 |       |       |       |       |                                |       |       |        |        |        | 11                          | 0,912  |       |       |       |       |                                |       |       |        |        |        |       |       |        |
| back                        | 0,202 | 0,202 | 0,202 | 0,202 | 0,202 | 0,202                          | 0,202 | 0,202 | 0,202  | 0,202  | 0,202  | back                             | 0,202 | 0,202 | 0,202 | 0,202 | 0,202 | 0,202                          | 0,202 | 0,202 | 0,202  | 0,202  | 0,202  | back                        | 0,202  | 0,202 | 0,202 | 0,202 | 0,202 | 0,202                          | 0,202 | 0,202 | 0,202  | 0,202  | 0,202  |       |       |        |
| MAX TORQUE per gear - % max |       |       |       |       |       |                                |       |       |        |        |        | MAX TORQUE per gear - % max      |       |       |       |       |       |                                |       |       |        |        |        | MAX TORQUE per gear - % max |        |       |       |       |       |                                |       |       |        |        |        |       |       |        |
| ratio                       | 11    | 10    | 9     | 8     | 7     | 6                              | 5     | 4     | 3      | 2      | 1      | ratio                            | 11    | 10    | 9     | 8     | 7     | 6                              | 5     | 4     | 3      | 2      | 1      | ratio                       | 11     | 10    | 9     | 8     | 7     | 6                              | 5     | 4     | 3      | 2      | 1      |       |       |        |
| 1                           | 0,712 | 0,712 | 0,632 | 0,632 | 0,712 | 0,712                          | 0,942 | 1,122 | 3,002  | 10,502 | 31,202 | 1                                | 0,712 | 0,712 | 0,632 | 0,632 | 0,712 | 0,712                          | 0,942 | 1,122 | 3,002  | 10,502 | 31,202 | 1                           | 0,712  | 0,712 | 0,632 | 0,632 | 0,712 | 0,712                          | 0,942 | 1,122 | 3,002  | 10,502 | 31,202 |       |       |        |
| 2                           | 2,222 | 2,702 | 2,402 | 2,402 | 2,222 | 2,222                          | 3,902 | 5,222 | 11,502 | 19,512 |        | 2                                | 2,222 | 2,702 | 2,402 | 2,402 | 2,222 | 2,222                          | 3,902 | 5,222 | 11,502 | 19,512 |        | 2                           | 2,222  | 2,702 | 2,402 | 2,402 | 2,222 | 2,222                          | 3,902 | 5,222 | 11,502 | 19,512 |        |       |       |        |
| 3                           | 4,222 | 4,402 | 4,522 | 5,222 | 4,902 | 5,222                          | 7,242 | 9,242 | 9,902  |        |        | 3                                | 4,222 | 4,402 | 4,522 | 5,222 | 4,902 | 5,222                          | 7,242 | 9,242 | 9,902  |        |        | 3                           | 4,222  | 4,402 | 4,522 | 5,222 | 4,902 | 5,222                          | 7,242 | 9,242 | 9,902  |        |        |       |       |        |
| 4                           | 4,802 | 4,902 | 4,802 | 5,402 | 5,002 | 5,942                          | 6,402 | 7,452 |        |        |        | 4                                | 4,802 | 4,902 | 4,802 | 5,402 | 5,002 | 5,942                          | 6,402 | 7,452 |        |        |        | 4                           | 4,802  | 4,902 | 4,802 | 5,402 | 5,002 | 5,942                          | 6,402 | 7,452 |        |        |        |       |       |        |
| 5                           | 4,902 | 4,902 | 4,222 | 4,812 | 4,792 | 4,902                          | 4,312 |       |        |        |        | 5                                | 4,902 | 4,902 | 4,222 | 4,812 | 4,792 | 4,902                          | 4,312 |       |        |        |        | 5                           | 4,902  | 4,902 | 4,222 | 4,812 | 4,792 | 4,902                          | 4,312 |       |        |        |        |       |       |        |
| 6                           | 3,902 | 3,902 | 3,222 | 3,402 | 3,352 | 3,922                          |       |       |        |        |        | 6                                | 3,902 | 3,902 | 3,222 | 3,402 | 3,352 | 3,922                          |       |       |        |        |        | 6                           | 3,902  | 3,902 | 3,222 | 3,402 | 3,352 | 3,922                          |       |       |        |        |        |       |       |        |
| 7                           | 2,752 | 2,402 | 2,102 | 2,222 | 2,222 |                                |       |       |        |        |        | 7                                | 2,752 | 2,402 | 2,102 | 2,222 | 2,222 |                                |       |       |        |        |        | 7                           | 2,752  | 2,402 | 2,102 | 2,222 | 2,222 |                                |       |       |        |        |        |       |       |        |
| 8                           | 2,002 | 1,642 | 1,752 | 1,432 |       |                                |       |       |        |        |        | 8                                | 2,002 | 1,642 | 1,752 | 1,432 |       |                                |       |       |        |        |        | 8                           | 2,002  | 1,642 | 1,752 | 1,432 |       |                                |       |       |        |        |        |       |       |        |
| 9                           | 1,512 | 1,402 | 1,202 |       |       |                                |       |       |        |        |        | 9                                | 1,512 | 1,402 | 1,202 |       |       |                                |       |       |        |        |        | 9                           | 1,512  | 1,402 | 1,202 |       |       |                                |       |       |        |        |        |       |       |        |
| 10                          | 1,312 | 1,052 |       |       |       |                                |       |       |        |        |        | 10                               | 1,312 | 1,052 |       |       |       |                                |       |       |        |        |        | 10                          | 1,312  | 1,052 |       |       |       |                                |       |       |        |        |        |       |       |        |
| 11                          | 0,912 |       |       |       |       |                                |       |       |        |        |        | 11                               | 0,912 |       |       |       |       |                                |       |       |        |        |        | 11                          | 0,912  |       |       |       |       |                                |       |       |        |        |        |       |       |        |
| back                        | 0,202 | 0,202 | 0,202 | 0,202 | 0,202 | 0,202                          | 0,202 | 0,202 | 0,202  | 0,202  | 0,202  | back                             | 0,202 | 0,202 | 0,202 | 0,202 | 0,202 | 0,202                          | 0,202 | 0,202 | 0,202  | 0,202  | 0,202  | back                        | 0,202  | 0,202 | 0,202 | 0,202 | 0,202 | 0,202                          | 0,202 | 0,202 | 0,202  | 0,202  | 0,202  |       |       |        |
| MAX POWER per gear - % max  |       |       |       |       |       |                                |       |       |        |        |        | MAX POWER per gear - % max       |       |       |       |       |       |                                |       |       |        |        |        | MAX POWER per gear - % max  |        |       |       |       |       |                                |       |       |        |        |        |       |       |        |
| ratio                       | 11    | 10    | 9     | 8     | 7     | 6                              | 5     | 4     | 3      | 2      | 1      | ratio                            | 11    | 10    | 9     | 8     | 7     | 6                              | 5     | 4     | 3      | 2      | 1      | ratio                       | 11     | 10    | 9     | 8     | 7     | 6                              | 5     | 4     | 3      | 2      | 1      |       |       |        |
| 1                           | 0,042 | 0,042 | 0,042 | 0,042 | 0,042 | 0,042                          | 0,142 | 0,172 | 0,232  | 1,002  | 4,502  | 16,102                           | 1     | 0,042 | 0,042 | 0,042 | 0,042 | 0,042                          | 0,042 | 0,142 | 0,172  | 0,232  | 1,002  | 4,502                       | 16,102 | 1     | 0,042 | 0,042 | 0,042 | 0,042                          | 0,042 | 0,042 | 0,142  | 0,172  | 0,232  | 1,002 | 4,502 | 16,102 |
| 2                           | 0,252 | 0,302 | 0,402 | 0,402 | 0,252 | 0,252                          | 0,752 | 1,122 | 3,702  | 11,502 | 19,512 | 2                                | 0,252 | 0,302 | 0,402 | 0,402 | 0,252 | 0,252                          | 0,752 | 1,122 | 3,702  | 11,502 | 19,512 | 2                           | 0,252  | 0,302 | 0,402 | 0,402 | 0,252 | 0,252                          | 0,752 | 1,122 | 3,702  | 11,502 | 19,512 |       |       |        |
| 3                           | 0,752 | 1,152 | 1,152 | 2,252 | 2,252 | 2,252                          | 4,302 | 6,702 | 10,402 | 13,902 |        | 3                                | 0,752 | 1,152 | 1,152 | 2,252 | 2,252 | 2,252                          | 4,302 | 6,702 | 10,402 | 13,902 |        | 3                           | 0,752  | 1,152 | 1,152 | 2,252 | 2,252 | 2,252                          | 4,302 | 6,702 | 10,402 | 13,902 |        |       |       |        |
| 4                           | 1,202 | 2,102 | 2,202 | 3,402 | 3,402 | 3,402                          | 6,202 | 9,202 | 12,502 |        |        | 4                                | 1,202 | 2,102 | 2,202 | 3,402 | 3,402 | 3,402                          | 6,202 | 9,202 | 12,502 |        |        | 4                           | 1,202  | 2,102 | 2,202 | 3,402 | 3,402 | 3,402                          | 6,202 | 9,202 | 12,502 |        |        |       |       |        |
| 5                           | 2,102 | 3,202 | 4,252 | 4,812 | 4,812 | 4,812                          | 7,202 | 9,112 |        |        |        | 5                                | 2,102 | 3,202 | 4,252 | 4,812 | 4,812 | 4,812                          | 7,202 | 9,112 |        |        |        | 5                           | 2,102  | 3,202 | 4,252 | 4,812 | 4,812 | 4,812                          | 7,202 | 9,112 |        |        |        |       |       |        |
| 6                           | 2,402 | 3,502 | 4,102 | 5,102 | 5,102 | 5,102                          | 6,512 | 6,512 |        |        |        | 6                                | 2,402 | 3,502 | 4,102 | 5,102 | 5,102 | 5,102                          | 6,512 | 6,512 |        |        |        | 6                           | 2,402  | 3,502 | 4,102 | 5,102 | 5,102 | 5,102                          | 6,512 | 6,512 |        |        |        |       |       |        |
| 7                           | 2,752 | 3,402 | 3,902 | 4,232 | 5,252 |                                |       |       |        |        |        | 7                                | 2,752 | 3,402 | 3,902 | 4,232 | 5,252 |                                |       |       |        |        |        | 7                           | 2,752  | 3,402 | 3,902 | 4,232 | 5,252 |                                |       |       |        |        |        |       |       |        |
| 8                           | 3,002 | 3,002 | 3,252 | 3,252 |       |                                |       |       |        |        |        | 8                                | 3,002 | 3,002 | 3,252 | 3,252 |       |                                |       |       |        |        |        | 8                           | 3,002  | 3,002 | 3,252 | 3,252 |       |                                |       |       |        |        |        |       |       |        |
| 9                           | 2,932 | 2,402 | 2,102 |       |       |                                |       |       |        |        |        | 9                                | 2,932 | 2,402 | 2,102 |       |       |                                |       |       |        |        |        | 9                           | 2,932  | 2,402 | 2,102 |       |       |                                |       |       |        |        |        |       |       |        |
| 10                          | 2,442 | 2,452 |       |       |       |                                |       |       |        |        |        | 10                               | 2,442 | 2,452 |       |       |       |                                |       |       |        |        |        | 10                          | 2,442  | 2,452 |       |       |       |                                |       |       |        |        |        |       |       |        |
| 11                          | 2,212 |       |       |       |       |                                |       |       |        |        |        | 11                               | 2,212 |       |       |       |       |                                |       |       |        |        |        | 11                          | 2,212  |       |       |       |       |                                |       |       |        |        |        |       |       |        |
| back                        | 0,052 | 0,052 | 0,052 | 0,052 | 0,052 | 0,052                          | 0,052 | 0,052 | 0,052  | 0,052  | 0,052  | back                             | 0,052 | 0,052 | 0,052 | 0,052 | 0,052 | 0,052                          | 0,052 | 0,052 | 0,052  | 0,052  | 0,052  | back                        | 0,052  | 0,052 | 0,052 | 0,052 | 0,052 | 0,052                          | 0,052 | 0,052 | 0,052  | 0,052  | 0,052  |       |       |        |
| RELEASE per gear - % max    |       |       |       |       |       |                                |       |       |        |        |        | RELEASE per gear - % max         |       |       |       |       |       |                                |       |       |        |        |        | RELEASE per gear - % max    |        |       |       |       |       |                                |       |       |        |        |        |       |       |        |
| ratio                       | 11    | 10    | 9     | 8     | 7     | 6                              | 5     | 4     | 3      | 2      | 1      | ratio                            | 11    | 10    | 9     | 8     | 7     | 6                              | 5     | 4     | 3      | 2      | 1      | ratio                       | 11     | 10    | 9     | 8     | 7     | 6                              | 5     | 4     | 3      | 2      | 1      |       |       |        |
| 1                           | 0,042 | 0,042 | 0,042 | 0,042 | 0,042 | 0,042                          | 0,142 | 0,172 | 0,232  | 1,002  | 4,502  | 16,102                           | 1     | 0,042 | 0,042 | 0,042 | 0,042 | 0,042                          | 0,042 | 0,142 | 0,172  | 0,232  | 1,002  | 4,502                       | 16,102 | 1     | 0,042 | 0,042 | 0,042 | 0,042                          | 0,042 | 0,042 | 0,142  | 0,172  | 0,232  | 1,002 | 4,502 | 16,102 |
| 2                           | 0,252 | 0,302 | 0,402 | 0,402 | 0,252 | 0,252                          | 0,752 | 1,122 | 3,702  | 11,502 | 1      |                                  |       |       |       |       |       |                                |       |       |        |        |        |                             |        |       |       |       |       |                                |       |       |        |        |        |       |       |        |





# Capitolo 5

## Conclusioni

In questa tesi è stato riportato lo studio dei giunti scorrevoli a tripode GI, appartenenti alla famiglia dei giunti *pode* descritta sommariamente nel capitolo §1.

L'analisi di questi meccanismi inizia con la loro trattazione cinematica ricavata prendendo a riferimento l'approccio descritto negli articoli [1, 2]. Tale analisi permette di ricavare in modo rigoroso le caratteristiche di moto di un giunto tripode. Si ha la dimostrazione che il giunto in questione non è omocinetico, più propriamente viene considerato quasi omocinetico poiché la deviazione tra angolo di ingresso  $\theta$  e quello di uscita  $\psi$  può essere considerata piccola. Dalle relazioni ricavate emerge che la deviazione dall'omocineticità è influenzata dai parametri geometrici quali il raggio delle piste  $R$ , la lunghezza dell'albero  $l$  e l'angolo di articolazione  $\gamma_0$ . In particolare è stato appurato che all'aumentare di  $R$  e di  $\gamma_0$  aumenta il grado di irregolarità; mentre l'aumento della lunghezza  $l$  ha effetti di miglioramento. Durante il funzionamento si è constatato che il centro dello *spider* percorre una traiettoria ellittica la cui ampiezza aumenta all'aumentare dell'angolo  $\gamma_0$  e del raggio delle piste  $R$ : questo comporta una variazione dell'angolo istantaneo di articolazione  $\gamma$ . Inoltre i centri dei *roller* si muovono lungo un percorso circolare che tende a divenire ellittico solo all'aumentare dell'angolo di articolazione  $\gamma_0$ . L'importanza di questo studio è data dalla possibilità di poterlo applicare anche ai giunti dipode, quadripode e tripode AAR. Successivamente è stata riportata l'analisi numerica che ha permesso di ricavare diagrammi utili in ambito progettuale. Infine, sulla base dei risultati ricavati dalla risoluzione numerica, è stato proposto un metodo che permetta di stimare in prima approssimazione le velocità e le accelerazioni dei *roller* e dello *spider*. In un lavoro futuro sarebbe interessante utilizzare le espressioni delle accelerazioni per eseguire uno studio sugli effetti delle inerzie in ambito NVH.

Nel terzo capitolo si riporta l'analisi bibliografica condotta sui fenomeni dinamici a cui il giunto a tripode è soggetto. Dalla letteratura è emerso che in condizioni stazionarie le forze d'inerzia non sono tali da indurre fenomeni di disturbo. Tuttavia i giunti a tripode generano durante il funzionamento delle vibrazioni a frequenza tripla rispetto alla

velocità di rotazione. Infatti quando il giunto si trova a lavorare con un certo angolo di articolazione tra i *roller* e le piste si instaurano degli attriti che danno luogo a delle forze assiali la cui risultante è una forza alternata di periodicità R3 detta *GAF* (*Generated Axial Force*).

Sono emersi poi altri due fenomeni definiti come coppia complementare e *LTS* (*Load To Stoke*) che si generano quando il giunto si trova a lavorare con un certo angolo di articolazione. La coppia complementare è un momento flettente che tende a disallineare il *pot* e che si genera anche in assenza dell'attrito tra *rollers* e piste. In merito a questo disturbo in letteratura si è trovata una breve citazione nell'articolo di J. P. Mariot [6] nel quale si riporta l'andamento di tale coppia scomposto nelle due direzioni X e Y. Il parametro *LTS* è la resistenza allo scorrimento esplicitata dal giunto e dipende dalla frizione che si ha tra *rollers* e piste. Questo fa sì che il giunto trasmetta le vibrazioni provenienti dal sistema motore-cambio al telaio.

Nella seconda parte del capitolo §3 si riporta il modello empirico ad attrito sviluppato da C. H. Lee [4] poiché si ritiene possa essere utile per identificare strumenti di ausilio alla progettazione. Tale modello deriva da una serie di prove durante le quali sono stati caratterizzati l'attrito statico e dinamico che dipendono dalla coppia applicata e dall'angolo di articolazione rispettivamente. Per ciascuna tipologia di attrito gli autori hanno ricavato una relazione empirica valida per ampi range di valori di coppia  $T_d$  e angolo  $\gamma$ . Il modello permette di esprimere l'attrito come costituito da una componente media che non ha alcuna influenza sul *GAF* ma può risultare utile per la stima delle tensioni generate sui componenti e della vita a fatica. In uno sviluppo futuro si potrebbe quindi costruire un nuovo metodo per la validazione di questa tipologia di giunti (vedi capitolo §4) aggiungendo anche la verifica a fatica dei bracci dello *spider*. Oltre alla componente media di attrito il modello proposto da C. H. Lee prevede anche una componente dinamica attribuibile alla fluttuazione di forze che causa fenomeni vibratorii. Dalla relazione sull'attrito dinamico si ricava quindi un'espressione che permette una stima del *GAF* che ben rappresenta i risultati sperimentali. In uno studio successivo sarebbe utile servirsi di questo modello ad attrito (magari servendosi di un Multi-body) per poter stimare più accuratamente il *GAF*; oppure ricavarne uno nuovo avvalendosi anche della sperimentazione, magari con prove che prevedano il giunto in rotazione a una certa velocità angolare.

# Bibliografia

- [1] Journal of mechanisms, transmissions and automation in design; Vol. 106; N. 2; pp. 228-234; 1984; E. Akbil, T. W. Lee; On the motion characteristics of tripod joints. Part1: General case
- [2] Journal of mechanisms, transmissions and automation in design; Vol. 106; N. 2; pp. 235-241; 1984; E. Akbil, T. W. Lee; On the motion characteristics of tripod joints. Part2: Applications
- [3] Multibody system dynamics; Vol. 3; pp. 85-105; 1999; J.-P. Mariot, J.-Y. K'nevez, B.Bardette; Kinematics of tripod transmissions. A new approach
- [4] Tribology international; Vol. 43; pp. 844-858; 2010; Chul-Hee Lee, Andreas A. Polycarpou; A phenomenological friction model of tripod constant velocity (CV) joints
- [5] International journal of automotive technology; Vol. 11; N. 3; pp. 355-361; 2010; J. S. Sa, T. W. Kang, C. M. Kim; Experimental study of the characteristics of idle vibrations that result from axial forces and the spider positions of constant velocity joints
- [6] Multibody system dynamics; Vol. 11; pp. 127-145; 2004; J.-P. Mariot, J.-Y. K'nevez, B.Bardette; Tripod and ball joint automotive transmission kinetostatic model including friction
- [7] International journal of automotive technology; Vol. 9; N. 3; pp. 317-322; 2008; C.-H. Lee; Development of a semi-empirical friction model in automotive driveshaft joints
- [8] International journal of automotive technology; Vol. 13; N. 5; pp. 751-757; 2012; Q.-C. Cai, K.-H. Lee, W.-L. Song, C.-H. Lee, Y. Lee; Simplified dynamics model for axial force in tripod constant velocity joint
- [9] Multibody system dynamics; Vol. 19; pp. 209-226; 2008; S. Serveto, J.-P. Mariot, M.Diaby; Modelling and measuring the axial forces generated by tripod joint of automotive driveshaft

- 
- [10] Multibody system dynamics; Vol. 2; pp. 355-367; 1998; F.Urbinati, E.Pennestrì; Kinematic and dynamic analyses of tripode joint
- [11] Multibody system dynamics; Vol. 22; pp. 145-162; 2009; Y.-H. Lim, M.-E. Song, W.-H. Lee, H.-J. Cho, D.-S. Bae; Mulbody dynamics analysis of the driveshaft coupling of the ball and tripod types of constant velocity joints
- [12] Springer-Verlag; Berlin Heidelberg 1992; H. Chr. Seherr-Thoss, F. Schmelz, E. Aucktor; Universal Joints and Driveshafts (1st edition)
- [13] Springer-Verlag; Berlin Heidelberg 2006; H. Chr. Seherr-Thoss, F. Schmelz, E. Aucktor; Universal Joints and Driveshafts (2nd edition)