UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia "Galileo Galilei"

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Aspetti della teoria di gravità nello spazio-tempo 3-dimensionale

Relatore

Dr. Dmitri Sorokin

Laureando

Giuseppe Sudano

Anno Accademico 2018/2019

Sommario

Questa tesi costituisce uno studio introduttivo ad alcune peculiarità della gravità in 2+1 dimensioni. Sono esposti i fondamenti della Relatività Generale, il formalismo di Cartan e gli spazi di de Sitter e Anti-de Sitter come soluzioni delle equazioni di Einstein con costante cosmologica. Si pone attenzione sulla Gravità Topologicamente Massiva, una possibile estensione non banale della teoria di Einstein su uno spaziotempo tridimensionale. La trattazione comprende, infine, gli aspetti principali del buco nero di Bañados, Teitelboim e Zanelli.

Indice

Introduzione **vii**

1 Basi della teoria di gravità di Einstein **1**
- 1.1 Principio di Equivalenza di Gravitazione e Inerzia . . . 1
- 1.2 Struttura matematica della Relatività Generale . . . 2
  - 1.2.1 Metrica Riemanniana e metrica pseudo-Riemanniana . . . 3
  - 1.2.2 Derivata covariante e connessione affine . . . 4
  - 1.2.3 Tensore di curvatura . . . 6
- 1.3 Equazioni di campo della teoria di gravità . . . 9
  - 1.3.1 Limite Newtoniano . . . 9
  - 1.3.2 Derivazione delle equazioni di Einstein . . . 10
- 1.4 Azione per le equazioni di Einstein . . . 11

2 Formalismo di Cartan **13**
- 2.1 Definizione di tetrade e proprietà . . . 13
- 2.2 Derivata covariante, curvatura e torsione . . . 14
- 2.3 Azione ed equazioni del moto nel vuoto . . . 17

3 Teoria di Einstein con costante cosmologica **19**
- 3.1 Equazioni di campo . . . 19
- 3.2 *"My greatest blunder"*: storia della costante cosmologica . . . 20
- 3.3 La fisica della costante cosmologica . . . 20
- 3.4 Spazi di de Sitter e Anti-de Sitter . . . 21

4 Gravità in 2+1 dimensioni **25**
- 4.1 Curvatura e soluzioni delle equazioni di Einstein . . . 25
- 4.2 Azione di gravità con termine cosmologico . . . 26
- 4.3 Gravità topologicamente massiva . . . 27
  - 4.3.1 Azione ed equazioni del moto . . . 27
  - 4.3.2 Relatività Generale linearizzata in d dimensioni . . . 31
  - 4.3.3 Onde gravitazionali in 3 dimensioni . . . 33

5 Buco nero in 2+1 dimensioni **37**
- 5.1 Metrica di Schwarzschild . . . 37
- 5.2 Buco nero di BTZ . . . 40
  - 5.2.1 Buco nero come spazio quoziente di $\widetilde{AdS}_3$ . . . 40

Conclusioni **43**

A Tensori per diffeomorfismi **45**

B Gradi di libertà della metrica dei sistemi localmente inerziali **47**

C Forme differenziali **49**

D Alcune derivazioni inerenti alla TMG **51**
D.1 Equazioni del moto per l'azione di Chern-Simons 51
D.2 Azione di Chern-Simons nel formalismo di Cartan 52
D.3 Conservazione del tensore di Cotton 53

Bibliografia **54**

Introduzione

La forza di gravità fu la prima delle interazioni fondamentali ad oggi note, ad essere studiata con successo: nei *PhilosophiæNaturalis Principia Mathematica* del 1687, Isaac Newton ne fornisce la prima descrizione matematicamente consistente, capace di spiegare leggi sperimentali già note come quelle di Keplero, o prevedere nuove scoperte come l'esistenza del pianeta Nettuno. Tuttavia, la gravità di Newton non riusciva a rendere conto di osservazioni sperimentali come la precessione del perielio nell'orbita di Mercurio, lasciando supporre la necessità di una più completa teoria. Questa nacque solo nel 1915, con l'estensione, dovuta ad Einstein, della Relatività Ristretta alle leggi della gravità, e prese il nome di *Relatività Generale*. Essa diede una rappresentazione geometrica dell'interazione gravitazionale, sconvolgendo completamente i concetti classici di spazio e tempo. Oltre a spiegare l'orbita di Mercurio, la teoria di Einstein previde la deflessione della luce da parte del Sole e l'esistenza di buchi neri, poi effettivamente provate sperimentalmente. La Relatività Generale è ancora oggi il modello teorico maggiormente predittivo per l'interazione gravitazionale. La teoria di Newton ne costituisce il limite non-relativistico e mantiene dunque la sua validità nello studio di sistemi che soddisfano certe ipotesi.

Nonostante i successi della Relatività Generale, la gravità rimane l'interazione fondamentale meno compresa. Un primo problema riguarda la costante cosmologica, che attualmente sembra dover fare parte della teoria per spiegare l'espansione accelerata dell'Universo: il valore misurato è molti ordini di grandezza più piccolo della predizione teorica. Inoltre, oggi, il Modello Standard, una teoria quantistica, permette di descrivere unitariamente le altre tre interazioni fondamentali (elettromagnetica e nucleare debole già unificate da Glashow, Salam e Weinberg, e nucleare forte), ma non si riesce a trovare un'unica teoria definitiva predittiva anche per la gravità. Questo arduo compito necessita l'ideazione di una Teoria Quantistica per il Campo Gravitazionale, che cioè unifichi la Meccanica Quantistica con la Relatività Generale. I due principali tentativi per "quantizzare" in qualche maniera il continuum spaziotemporale della visione einsteiniana, sono la Teoria delle Stringhe e la Quantum Loop Gravity. In alternativa, sono state proposte delle modifiche nel Modello Standard o nella Relatività Generale. Questa tesi si concentra su quest'ultima possibilità.

Nuovi modelli di gravità sono stati ottenuti aggiungendo all'azione della Relatività Generale, chiamata *azione di Hilbert-Einstein*, termini di ordine superiore al secondo nelle derivate della metrica. Per affrontare più agevolmente alcuni problemi tecnici che questo comporta, si può lavorare su uno spazio-tempo di 2+1 anziché 3+1 dimensioni: gli oggetti fisici cioè non si muovono nella consueta varietà con 3 dimensioni spaziali e una temporale, ma sono vincolati nello spazio, ad un piano o più in generale a una superficie. Questa scelta mantiene le principali caratteristiche della teoria di Einstein, come ad esempio la General-Covarianza o l'espressione delle equazioni del moto. Il pregio computazionale è che la dinamica del campo gravitazionale diventa banale e non vi possono essere gradi di libertà che si propagano tramite onde gravitazionali: il tensore di curvatura di Riemann in tre dimensioni ha infatti, lo stesso numero di gradi di libertà del tensore di Ricci.

L'estensione della Relatività Generale che viene studiata in dettaglio in questa tesi, è la *Gravità Topologicamente Massiva* (TMG), ottenuta aggiungendo all'azione di Hilbert-Einstein un termine del terzo ordine nelle derivate della metrica. Tale nuovo addendo è chiamato *azione topologica*, poiché a priori dipende solo dalla struttura topologica e non metrica, dello spaziotempo, o *azione di Chern-Simons*, dal nome dei due studiosi che ne hanno costruito l'impalcatura matematica. Riporta inoltre, la dipendenza da un parametro μ, che si rivela poi essere la massa associata al campo gravitazionale. Questo spiega il nome dato a questo modello di gravità: il campo assume massa per via del termine topologico. L'azione di Chern-Simons aggiunta all'azione di Einstein, permette infine, la propagazione di un grado di libertà del campo, ovvero la presenza di onde gravitazionali massive.

Inoltre, la gravità in 2+1 dimensioni con costante cosmologica negativa, ammette una soluzione di buco nero privo di carica elettrica, scritta per la prima volta da Bañados, Teitelboim e Zanelli (dunque indicata come *soluzione di BTZ*) e che presenta le principali caratteristiche dei buchi neri in 3+1 dimensioni (di Schwarzschild e di Kerr). Restringersi, dunque, a varietà 2+1-dimensionali non vuol dire rinunciare allo studio di questi oggetti cosmologici di primaria importanza.

Organizzazione dell'elaborato

Nel Capitolo 1 si espongono i fondamenti della teoria della gravità di Einstein in 4 dimensioni, partendo dal Principio di Equivalenza di Gravitazione e Inerzia e dal conseguente Principio di General-Covarianza. Si definiscono poi le strutture matematiche necessarie per la costruzione della Relatività Generale. Lo spaziotempo è una varietà differenziabile dotata di metrica pseudo-Riemanniana e su cui agiscono tensori di vario ordine. Tramite la connessione affine è possibile introdurre una derivata covariante per i tensori, in generale e lungo una curva. Fondamentale per la scrittura delle equazioni del moto è il tensore di curvatura di Riemann che esprime la distorsione dello spaziotempo dovuta alla presenza di un effettivo campo gravitazionale e di cui sono enunciate le proprietà matematiche. Vengono così scritte le equazioni di Einstein ovvero le equazioni di campo, imponendo la gravità di Newton come limite per campi deboli e stazionari e basse velocità delle particelle. Si scrive infine l'azione di Hilbert-Einstein.

Nel Capitolo 2 si affronta lo studio del formalismo di Cartan, necessario per descrivere l'interazione gravitazionale dei campi fermionici che trasformano per una rappresentazione spinoriale del gruppo di Lorentz, senza analogo nel gruppo dei diffeomorfismi. Definita la vielbein o tetrade come una base che rende punto per punto la metrica piatta, vengono espressi in questo nuovo formalismo gli oggetti matematici definiti nel capitolo precedente: sono così introdotti la connessione di spin e le equazioni di struttura di Cartan. Si riscrivono infine, l'azione di Hilbert-Einstein e le equazioni di Einstein e se ne verifica l'equivalenza con le precedenti espressioni.

L'azione di gravità e le equazioni di Einstein con costante cosmologica sono illustrate nel Capitolo 3. Si tratta di una modifica alla Relatività Generale, che attualmente dà conto dell'espansione accelerata dell'Universo e della presenza dell'energia oscura. Viene brevemente ripercorsa la storia della costante cosmologica da Einstein ai giorni nostri e sono presentati gli spazi di de Sitter e Anti-de Sitter, soluzioni delle equazioni di gravità con costante cosmologica rispettivamente positiva e negativa. L'attenzione sarà maggiormente concentrata sullo spazio di Anti-de Sitter perché coinvolto nella soluzione di buco nero di Bañados, Teitelboim e Zanelli per le equazioni di Einstein in 3 dimensioni e in più avanzati argomenti di Teoria delle Stringhe.

Il Capitolo 4 è dedicato alla gravità in 2+1 dimensioni. Dopo aver studiato la curvatura ed evidenziato come le soluzioni delle equazioni di Einstein nel vuoto siano banali, si mostra l'azione di gravità con costante cosmologica nel formalismo di tetrade, in 3 dimensioni. Si passa così alla descrizione della Gravità Topologicamente Massiva, come introdotta in [9], scrivendone l'azione e le equazioni del moto. Si presenta la Relatività Generale linearizzata in dimensione arbitraria e si verifica come in 3 dimensioni essa non possa prevedere la propagazione di onde gravitazionali. L'aggiunta del termine di Chern-Simons all'azione fornisce un grado di libertà in più e dunque la propagazione di un campo gravitazionale massivo con elicità +2 o -2. Nella tesi viene effettuata una prova originale di questo fatto.

Nel Capitolo 5 si presentano i tratti principali di alcune soluzioni di buco nero per la teoria di gravità di Einstein. La metrica di Schwarzschild descrive il campo generato da una sorgente isolata, statica e a simmetria sferica, in 4 dimensioni. Di essa viene individuata l'effettiva singolarità nella coordinata radiale $r = 0$ e si riesce, tramite le coordinate di Kruskal, a rappresentare la struttura causale globale. Viene, dunque, introdotta la soluzione di buco nero di BTZ, intesa come particolare spazio quoziente del ricoprimento universale di AdS_3.

Nelle Appendici, infine, sono riportati approfondimenti e dettagli non indispensabili per la comprensione dei contenuti principali della tesi e che riguardano il calcolo tensoriale, i gradi di libertà della metrica dei sistemi localmente inerziali, le forme differenziali e alcune dimostrazioni inerenti all'azione e alle equazioni del moto della TMG.

Si adotta la convenzione degli indici greci per tutte le componenti spaziotemporali e degli indici latini per le componenti spaziali o dei tensori di Lorentz. La segnatura scelta per la metrica è $(-, +, ..., +)$.

Capitolo 1

Basi della teoria di gravità di Einstein

La teoria della Relatività Generale, pubblicata da Einstein nel 1915, assolve al compito di estendere anche alla gravitazione, i postulati e quindi le predizioni della Relatività Ristretta. Si consideri infatti la celebre legge della gravitazione universale di Newton

$$\vec{F}_{1,2} = -G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2} \vec{u}_{1,2}, \tag{1.1}$$

dove $G = 6,67 \cdot 10^{-11} Nm^2 kg^{-2}$ è la costante di gravitazione universale. A differenza di quanto avviene per le equazioni di Maxwell, questa legge non può essere scritta naturalmente in forma relativisticamente covariante, per la presenza al denominatore di una distanza spaziale, che varia con l'osservatore. Inoltre, la forza data dalla (1.1) è definita per sorgenti statiche e può essere perciò adoperata al più in approssimazione non relativistica, quando cioè l'energia potenziale di una massa di prova $m\Phi$, nel potenziale statico $\Phi(\vec{x})$ è molto minore della sua energia a riposo mc^2. Infine tutta la Dinamica di Newton, compresa questa legge, presuppone un'azione a distanza istantanea tra le masse in gioco, in contraddizione con la condizione tipicamente relativistica del massimo c per le velocità possibili.

1.1 Principio di Equivalenza di Gravitazione e Inerzia

L'idea fondante della teoria relativistica della gravità elaborata da Einstein, è il cosiddetto *Principio di Equivalenza di Gravitazione e Inerzia*, di cui si citano due formulazioni principali. La prima prende il nome di *Principio di Equivalenza Debole* (indicato anche con l'acronimo inglese WEP): *massa inerziale e massa gravitazionale di un qualunque corpo sono uguali.* Ciò era già noto a Galileo, che con l'esperimento del piano inclinato, aveva intuito come il moto di particelle in caduta libera non dipendesse da alcuna loro proprietà intrinseca, ma solo dal potenziale gravitazionale. Vari esperimenti, tra cui il più conosciuto è quello di Eötvös, avevano poi confermato l'ipotesi che il rapporto $\frac{m_g}{m_i}$ fosse uguale per tutti i corpi a prescindere dalla loro composizione.
Einstein spiegò il WEP attraverso il famoso *gedankenexperiment* dell'ascensore. Si consideri il moto di un sistema di N particelle con velocità molto minori di c, per effetto delle loro interazioni reciproche $\vec{F}(\vec{x}_i - \vec{x}_j)$, assunte per semplicità di tipo puramente posizionale, e di un campo gravitazionale esterno $\vec{g}$ statico e omogeneo. L'equazione del moto della i-esima particella, in un sistema di coordinate inerziale, sarà:

$$m_i \frac{d^2\vec{x}_i}{dt^2} = m_i \vec{g} + \sum_{j=1, j\neq i}^{N} \vec{F}(\vec{x}_i - \vec{x}_j), \tag{1.2}$$

che, spostandosi nel sistema di un ascensore che contenga le particelle e che sia in caduta libera sotto l'azione del campo $\vec{g}$, attraverso il cambiamento di coordinate

$$\vec{x}' = \vec{x} - \frac{1}{2}\vec{g}t^2, \qquad t = t',$$

diventa

$$m_i \frac{d^2 \vec{x}'_i}{dt^2} = \sum_{j=1, j\neq i}^{N} \vec{F}(\vec{x}'_i - \vec{x}'_j). \tag{1.3}$$

Il termine riferito al campo gravitazionale si è eliso con il termine di forza d'inerzia proprio per aver assunto massa inerziale e massa gravitazionale uguali e il sistema non inerziale dell'ascensore in caduta libera, quindi con accelerazione pari al campo. Questo vuole anche dire che l'equazione (1.2) rimane uguale se anziché pensare il sistema di particelle in un campo gravitazionale esterno $\vec{g}$, lo si pensa in un sistema di riferimento non inerziale con accelerazione pari a $-\vec{g}$: un osservatore solidale al sistema non riuscirà a capire tramite esperimenti che coinvolgano particelle massive, se ci si trova in un campo gravitazionale omogeneo e costante esterno oppure in un sistema di riferimento non inerziale uniformemente accelerato.

La (1.3) è l'equazione del moto della particella i-esima in un sistema inerziale. Si è quindi trovato, nonostante la presenza di un campo gravitazionale, un sistema di coordinate che permette di scrivere le leggi della Fisica così come faremmo per i sistemi inerziali e cioè usando la Relatività Ristretta. Nel caso di un generico campo gravitazionale, però, questa elisione è possibile solo su regioni sufficientemente piccole da avervi $\vec{g}$ omogeneo e costante. Si giunge così al *Principio di Equivalenza Forte* (SEP), introdotto da Einstein: *in ciascun punto dello spaziotempo in un campo gravitazionale arbitrario è possibile scegliere un sistema di coordinate* localmente *inerziale, ovvero tale che* tutte *le leggi della Fisica si riducano a quelle della Relatività Ristretta in un intorno sufficientemente piccolo del punto.* Questa nuova formulazione è una generalizzazione del WEP alla luce dell'idea relativistica per cui la massa è manifestazione di una grandezza, il 4-momento, coinvolta in tutti gli esperimenti: un qualsiasi tipo di esperimento *locale* dunque, non permette di distinguere tra campo gravitazionale esterno e accelerazione uniforme del sistema di riferimento. Ciò induce a pensare che tutti gli enti fisici, caratterizzati da energia e impulso e non più dalla sola massa in senso pre-relativistico (compreso dunque il campo gravitazionale stesso), interagiscono per gravità e non possono avere carica gravitazionale nulla: l'accoppiamento è così, universale. Questo concetto viene sinteticamente ed elegantemente espresso affermando che lo spaziotempo è *curvato* dalla presenza di un campo gravitazionale e perde di senso il concetto newtoniano di forza.

Il Principio della Relatività Ristretta sancisce che tutte le leggi della Fisica sono invarianti in forma per le trasformazioni tra sistemi di riferimento inerziali (dette di Poincaré e indicate con $ISO(1,3)$). Einstein riuscì a generalizzare questo postulato a tutti i sistemi di coordinate tramite il Principio di General-Covarianza, conseguenza del Principio di Equivalenza di Gravitazione e Inerzia. Esso dà le condizioni per cui un'equazione fisica sia valida in presenza di un campo gravitazionale:

1. l'equazione è valida in assenza di gravità, cioè rientra tra le leggi della Relatività Ristretta;

2. l'equazione è general-covariante, cioè invariante in forma sotto un generale cambio di coordinate (diffeomorfismo).

Supponiamo, infatti, che in un arbitrario campo gravitazionale, un'equazione soddisfi entrambe queste condizioni. Per il Principio di Equivalenza, per ogni punto dello spaziotempo sarà possibile erigere un sistema di coordinate in cui valgano le leggi della Relatività Ristretta: in un questo sistema, perciò sarà anche valida la nostra equazione per via della condizione (1). Per la condizione (2), in quanto valida in un sistema di riferimento, l'equazione sarà valida in qualunque altro sistema di coordinate, anche in quelli per cui va considerato l'effetto del campo gravitazionale.

1.2 Struttura matematica della Relatività Generale

Se l'universalità dell'accoppiamento gravitazionale porta a descrivere lo spaziotempo come "curvo", il Principio di Equivalenza Forte permette di considerarlo come localmente piatto, cioè di costruire un sistema di riferimento con metrica di Minkowski in un intorno sufficientemente piccolo di ciascun punto. L'oggetto matematico più adatto a rappresentare questa nuova struttura dello spaziotempo è quello delle *varietà differenziabili*, spazi topologici separabili localmente omeomorfi (cioè, intuitivamente, assimilabili) ad aperti di $\mathbb{R}^n$. Sulla varietà non è possibile definire globalmente una metrica di tipo euclideo o pseudoeuclideo (quale è la metrica di Minkowski), dato che per il Principio di Equivalenza questa sarà solo la metrica locale. Bisogna ricorrere dunque a metriche più generali.

1.2.1 Metrica Riemanniana e metrica pseudo-Riemanniana

Una *metrica Riemanniana* su una varietà M, è definita come il campo tensoriale $g_{\mu\nu}(x)$ (forma bilineare che dipende in maniera C^∞ dal punto $P \in M$) tale che:

- $g_P(v,w) = g_P(w,v) \quad \forall P \in M, v, w \in T_P M$, cioè il campo è simmetrico;
- $g_P(v,v) > 0 \quad \forall P \in M, v \in T_P M, v \neq 0$, cioè il campo è definito positivo.

La coppia (M,g) prende il nome di *varietà Riemanniana.* Se la seconda condizione è sostituita dalla richiesta più generale che la metrica sia non degenere, cioè tale che

$$\forall P \in M \qquad g_P(v,w) = 0 \quad \forall w \in T_P M \Leftrightarrow v = 0,$$

si ha una *metrica pseudo-Riemanniana* e la coppia (M,g) si dice *varietà pseudo-Riemanniana.*

In un qualsiasi sistema di riferimento inerziale, l'*intervallo spazio-temporale infinitesimo*, invariante per trasformazioni di Lorentz, è definito come

$$ds^2 = \eta_{ab} \mathrm{d}x^a \mathrm{d}x^b, \tag{1.4}$$

in cui η_{ab} è la matrice della metrica di Minkowski

$$\eta_{ab} = \mathrm{diag}(-1,+1,+1,+1).$$

Nell'equazione (1.4), si adotta la convenzione di Einstein, di cui si fa uso in tutta la tesi: è sottinteso il simbolo di sommatoria quando vi sono degli indici ripetuti in posizioni differenti.
Sia $x^a \to x'^\mu$ una generica trasformazione di coordinate che porti da un sistema di riferimento inerziale a un qualsiasi altro sistema di riferimento. Il differenziale delle coordinate trasforma attraverso l'inversa della matrice Jacobiana:

$$\mathrm{d}x^a = \frac{\partial x^a}{\partial x'^\mu} \mathrm{d}x'^\mu.$$

Nel nuovo sistema di riferimento, l'intervallo spaziotemporale sarà dato da

$$ds^2 = \eta_{ab} \frac{\partial x^a}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^b}{\partial x'^\nu} \mathrm{d}x'^\mu \mathrm{d}x'^\nu = g_{\mu\nu}(x') \mathrm{d}x'^\mu \mathrm{d}x'^\nu,$$

dove

$$g_{\mu\nu}(x') \equiv \eta_{ab} \frac{\partial x^a}{\partial x'^\mu}(x') \frac{\partial x^b}{\partial x'^\nu}(x') \tag{1.5}$$

è l'espressione per la metrica, punto per punto, nelle nuove coordinate. La metrica viene dunque distorta se si passa ad esempio dal riferimento localmente inerziale a quello in cui è presente un campo gravitazionale. Si osservi che il tensore metrico cambia anche se non c'è un effettivo campo gravitazionale nel nuovo sistema di riferimento: su uno spaziotempo privo di gravità si può ad esempio passare da coordinate cartesiane a coordinate sferiche facendo variare la metrica. Perché lo spaziotempo sia effettivamente curvo, non è sufficiente che la metrica non sia η_{ab}, ma va richiesta una condizione aggiuntiva, illustrata nella Sottosezione 1.2.3.

La definizione (1.5) costituisce una relazione di congruenza tra le metriche g e η. Con la simmetria della η, permette di verificare la simmetria di g. A differenza della relazione di similitudine, però, essa non mantiene intatti gli autovalori. Per la legge d'inerzia di Sylvester, tale relazione preserva solo la segnatura, cioè il numero di autovalori positivi e di autovalori negativi: così come η, anche la metrica g avrà segnatura $(3+1)$ su ciascun punto della varietà. Di conseguenza non potrà essere né definita positiva né definita negativa poiché vi sono autovalori di segno discorde. Non avendo comunque autovalori nulli, la metrica sarà non degenere in ogni punto. Si tratta dunque di una metrica pseudo-Riemanniana e la coppia (M,g) studiata nell'ambito della Relatività Generale è una varietà pseudo-Riemanniana.

1.2.2 Derivata covariante e connessione affine

Gli oggetti matematici che rappresentano le grandezze fisiche su una varietà sono i tensori. Le loro proprietà fondamentali sono presentate in Appendice A. Nel caso dei tensori di Lorentz, oltre alle proprietà e operazioni ivi mostrate, vige un altro operatore tensoriale: la derivazione. La proprietà di trasformazione tensoriale della derivazione viene però persa nel contesto di generali trasformazioni di coordinate.

Sia $V^\mu(x)$ un campo tensoriale controvariante. Derivando rispetto a x'^λ ambo i membri della regola di trasformazione $V'^\mu(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} V^\nu(x)$, si ottiene che

$$\frac{\partial V'^\mu}{\partial x'^\lambda} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial V^\nu}{\partial x^\rho} + \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} V^\nu \tag{1.6}$$

dove sono state omesse le dipendenze da x o x'. Perché la derivata parziale sia un tensore, dovrebbe annullarsi il secondo addendo non omogeneo. Ciò non avviene in generale, ma solo per trasformazioni lineari, come le trasformazioni di Lorentz (nell'ambito della Relatività Ristretta, la derivazione è un operatore covariante). Si riesce tuttavia, a definire su una qualsiasi varietà (pseudo-)Riemanniana, un operatore di derivazione che agisca ad esempio su un vettore controvariante come

$$D_\lambda V^\mu \equiv \frac{\partial V^\mu}{\partial x_\lambda} + \Gamma^\mu{}_{\lambda\kappa} V^\kappa, \tag{1.7}$$

dove $\Gamma^\mu{}_{\lambda\kappa}$ prende il nome di *connessione affine*. Questo nuovo oggetto geometrico è imposto osservare una legge di trasformazione che garantisca all'operatore D_λ di trasformare come un tensore ed essere chiamato proprio per questo, *derivata covariante*. Si impone che

$$\begin{aligned} D'_\lambda V'^\mu &= \frac{\partial V'^\mu}{\partial x'^\lambda} + \Gamma'^\mu{}_{\lambda\kappa} V'^\kappa = \\ &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial V^\nu}{\partial x^\rho} + \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} V^\nu + \Gamma'^\mu{}_{\lambda\kappa} V'^\kappa \equiv \\ &\equiv \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} \Big[\frac{\partial V^\nu}{\partial x'^\rho} + \Gamma^\nu{}_{\rho\sigma} V^\sigma \Big], \end{aligned} \tag{1.8}$$

dunque, rinominando una coppia di indici ripetuti, dovrà valere

$$\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\sigma \partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} V^\sigma + \Gamma'^\mu{}_{\lambda\kappa} \frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\sigma} V^\sigma = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} \Gamma^\nu{}_{\rho\sigma} V^\sigma, \tag{1.9}$$

ottenendo per le connessioni affini la legge di trasformazione

$$\Gamma'^\mu{}_{\lambda\kappa} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\kappa} \Gamma^\nu{}_{\rho\sigma} - \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\sigma \partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\kappa}. \tag{1.10}$$

Scrivendo questa proprietà per il cambio di coordinate $x'^\mu \to x^\mu$, si ricava l'equivalente regola di trasformazione

$$\Gamma'^\lambda{}_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \Gamma^\rho{}_{\tau\sigma} + \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho}. \tag{1.11}$$

Il termine di disomogeneità nelle equazioni (1.10) e (1.11), impedisce che la connessione sia un tensore.
La derivata covariante di un vettore covariante è definita effettuando il medesimo ragionamento partendo dalla legge di trasformazione $V'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} V_\nu$ e sfruttando la (1.11):

$$D_\lambda V_\mu \equiv \frac{\partial V_\mu}{\partial x^\lambda} - \Gamma^\nu{}_{\lambda\mu} V_\nu. \tag{1.12}$$

Per un tensore di rango qualsiasi basterà sommare all'opportuna derivata parziale del tensore, un termine di contrazione con la connessione affine, come in (1.7) per ciascun indice controvariante e come in (1.12) per ciascun indice covariante. La derivata covariante è inoltre, $\mathbb{R}$-lineare, cioè per tensori dello stesso tipo vale ad esempio

$$D_\lambda(aA^\mu{}_\nu + bB^\mu{}_\nu) = aD_\lambda A^\mu{}_\nu + bD_\lambda B^\mu{}_\nu \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

Per il prodotto tensore vale la regola di Leibniz, ad esempio

$$D_\lambda(A^\mu B^\nu{}_\rho) = (D_\lambda A^\mu)B^\nu{}_\rho + A^\mu(D_\lambda B^\nu{}_\rho).$$

La connessione affine della Relatività Generale gode delle proprietà di:

- simmetria o assenza di torsione, ovvero $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu}$;
- metrico-compatibilità, cioè è tale che $D_\lambda g_{\mu\nu} = 0$.

Una siffatta connessione affine è unica ed è detta *connessione di Levi-Civita*. La sua espressione coincide con il *simbolo di Christoffel*, ovvero il membro destro della relazione

$$\Gamma^\rho{}_{\lambda\mu} = \frac{1}{2}g^{\rho\nu}\Big[\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu}\Big], \tag{1.13}$$

che si può equivalentemente scrivere come

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = g_{\mu\rho}\Gamma^\rho{}_{\lambda\nu} + g_{\nu\sigma}\Gamma^\sigma{}_{\lambda\mu}. \tag{1.14}$$

Anche l'inversa $g^{\mu\nu}$ della metrica e la $\delta^\mu{}_\nu$ hanno derivata covariante nulla:

$$D_\lambda g^{\mu\nu} = D_\lambda(g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}g_{\rho\sigma}) = (D_\lambda g^{\mu\rho})\delta^\nu{}_\rho + \delta^\mu{}_\sigma(D_\lambda g^{\nu\sigma}) = 2D_\lambda g^{\mu\nu} \Rightarrow D_\lambda g^{\mu\nu} = 0,$$
$$D_\lambda \delta^\mu{}_\nu = D_\lambda(g^{\mu\sigma}g_{\sigma\nu}) = (D_\lambda g^{\mu\sigma})g_{\sigma\nu} + g^{\mu\sigma}(D_\lambda g_{\sigma\nu}) = 0.$$

La metrico-compatibilità, con queste ultime due proprietà che ne discendono, implica che:

- derivata covariante e abbassamento/innalzamento degli indici commutano, ad esempio
$$D_\lambda(g^{\mu\nu}V_\nu) = g^{\mu\nu}D_\lambda V_\nu;$$
- la derivata covariante di un tensore contratto è la contrazione della derivata covariante (operazione ben definita perché la derivata covariante è un tensore), ad esempio
$$D_\lambda(\delta^\mu{}_\nu T^\nu{}_{\mu\rho}) = \delta^\mu{}_\nu D_\lambda T^\nu{}_{\mu\rho}.$$

Siano infine, $A^\mu(x(s))$ e $B_\mu(x(s))$ due vettori rispettivamente controvariante e covariante, definiti lungo la curva $x^\mu(s)$, descritta da una particella lungo la varietà e parametrizzata attraverso il tempo proprio. Le loro derivate covarianti lungo tale curva saranno definite come:

$$\frac{DA^\mu}{Ds} \equiv \frac{dA^\mu}{ds} + \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}\frac{dx^\lambda}{ds}A^\nu, \qquad \frac{DB_\mu}{Ds} \equiv \frac{dB_\mu}{ds} - \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\frac{dx^\nu}{ds}B_\lambda, \tag{1.15}$$

che trasformano proprio come vettori. La generalizzazione a tensori di tipo qualsiasi è diretta.
In un sistema di riferimento inerziale, se $U^a(s) \equiv \frac{dx^a}{ds}(s)$, l'equazione del moto di una particella non interagente è

$$\frac{dU^a}{ds} = 0.$$

In un generico sistema di riferimento, sarà valida la sua forma general-covariante

$$\frac{DU^\mu}{Ds} = 0, \tag{1.16}$$

che è l'equazione di una particella soggetta al solo campo gravitazionale. Per la (1.15), equivale a

$$\frac{d^2x^\lambda}{ds^2} + \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} = 0. \tag{1.17}$$

(1.16) e (1.17) sono due espressioni dell'*equazione della geodetica*: in un campo gravitazionale le particelle si muovono lungo curve che rendono minimo il tempo proprio. Valendo inoltre, il teorema di esistenza e unicità, basterà conoscere $x^\mu(0)$ e $U^\mu(0)$ per avere $x^\mu(s)$ e $U^\mu(s)$, $\forall s$: un vettore così costruito si dice definito per *trasporto parallelo*.

1.2.3 Tensore di curvatura

Metrica e connessione rappresentano formalmente gli effetti della gravità: l'equazione della geodetica (1.17), infatti, mostra come la connessione affine sia il corrispettivo relativistico della forza gravitazionale e per la (1.13), la metrica può essere intesa come l'analogo del potenziale gravitazionale. Si vuole scrivere un tensore che dipenda dalla metrica e dalle sue derivate, in modo da condensare in un unico oggetto le informazioni riguardanti la gravità.

Definizione e significato fisico

Si vuole studiare il moto di due particelle distinte poste nell'ascensore del *gedankenexperiment* di Einstein, con linee di Universo infinitesimamente distanti: $x^\mu(s)$ e $x^\mu(s) + \delta x^\mu(s)$, con s tempo proprio uguale per entrambe al primo ordine. Per l'osservatore posto in un ascensore accelerato in una regione priva di gravità, le due particelle avranno la medesima accelerazione d'inerzia e dunque lo stesso moto, mentre per l'osservatore posto in un ascensore in caduta libera in un campo gravitazionale non omogeneo, le particelle descriveranno moti differenti, a seconda del campo nel punto che occupano (un effetto di ciò è dato ad esempio dalle maree). Le equazioni delle geodetiche descritte dalle due particelle saranno:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}(x)\frac{dx^\nu}{ds}\frac{dx^\lambda}{ds}, \\
0 &= \frac{d^2}{ds^2}[x^\mu + \delta x^\mu] + \Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}(x+\delta x)\frac{d}{ds}[x^\lambda + \delta x^\lambda]\frac{d}{ds}[x^\nu + \delta x^\nu].
\end{aligned}$$

Sottraendo membro a membro, fermandosi al primo ordine in δx^μ, si ottiene:

$$0 = \frac{d^2}{ds^2}\delta x^\mu + \frac{\partial \Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}}{\partial x^\rho}\delta x^\rho \frac{dx^\lambda}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} + 2\Gamma^\mu_{\nu\lambda}\frac{dx^\lambda}{ds}\frac{d\delta x^\nu}{ds}. \tag{1.18}$$

Applicando due volte la (1.15), si calcola la derivata covariante seconda di δx^λ lungo $x^\mu(s)$:

$$\frac{D^2}{Ds^2}\delta x^\lambda = \frac{d^2\delta x^\lambda}{ds^2} + \frac{\partial \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\kappa}{ds}\delta x^\nu - \Gamma^\lambda{}_{\eta\nu}\Gamma^\eta{}_{\mu\kappa}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\kappa}{ds}\delta x^\nu + 2\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{d\delta x^\nu}{ds} + \Gamma^\lambda{}_{\kappa\eta}\Gamma^\eta{}_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\kappa}{ds}\delta x^\nu.$$

Si aggiunge e sottrae alla parte di destra il termine $\frac{\partial \Gamma^\lambda{}_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\kappa}{ds}\delta x^\nu$ e si sfrutta la condizione (1.18) ottenendo

$$\begin{aligned}
\frac{D^2}{Ds^2}\delta x^\lambda &= \frac{\partial \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\kappa}{ds}\delta x^\nu - \frac{\partial \Gamma^\lambda{}_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\kappa}{ds}\delta x^\nu + \Gamma^\lambda{}_{\kappa\eta}\Gamma^\eta{}_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\kappa}{ds}\delta x^\nu + \\
&\quad - \Gamma^\lambda{}_{\eta\nu}\Gamma^\eta{}_{\mu\kappa}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\kappa}{ds}\delta x^\nu + \frac{d^2\delta x^\lambda}{ds^2} + \frac{\partial \Gamma^\lambda{}_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\kappa}{ds}\delta x^\nu + 2\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{d\delta x^\nu}{ds} = \\
&= -R^\lambda{}_{\mu\nu\kappa}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\kappa}{ds}\delta x^\nu,
\end{aligned} \tag{1.19}$$

dove si è definito

$$R^\lambda{}_{\mu\nu\kappa} \equiv \frac{\partial \Gamma^\lambda{}_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa} + \Gamma^\lambda{}_{\nu\eta}\Gamma^\eta{}_{\mu\kappa} - \Gamma^\lambda{}_{\eta\kappa}\Gamma^\eta{}_{\mu\nu}. \tag{1.20}$$

La (1.19) è detta *equazione di deviazione geodetica* poiché quantifica l'evoluzione nel tempo della separazione tra le geodetiche di due particelle distinte in un campo gravitazionale non omogeneo.

L'oggetto definito dalla (1.20) è detto *tensore di curvatura di Riemann.* Si può verificare che esso trasforma come un tensore calcolando direttamente $R'^\lambda{}_{\mu\nu\kappa}$ dalla sua definizione e sfruttando la regola di trasformazione (1.11) delle connessioni affini, oppure osservando come sia la derivata covariante seconda lungo la traiettoria delle particelle sia $\frac{dx^\mu}{ds}$ e δx^ν trasformano come tensori: perché valga la (1.19), anche $R^\lambda{}_{\mu\nu\kappa}$ deve essere un tensore. Il nome *curvatura* si riferisce al fatto che il tensore di Riemann quantifica gli effetti dovuti a un campo gravitazionale. Esso permette ad esempio, di distinguere una metrica differente da quella di Minkowski solo per l'utilizzo di un sistema di coordinate x^μ accelerate rispetto ad un sistema di riferimento inerziale, da una effettivamente distorta dalla presenza di un campo gravitazionale. Condizione necessaria e sufficiente perché la generica metrica $g_{\mu\nu}(x)$, definita su una varietà, sia, almeno localmente[1], Minkowski-equivalente è data da:

1. $R^{\lambda}{}_{\mu\nu\kappa}(x) = 0 \; \forall \; x$, con $R^{\lambda}{}_{\mu\nu\kappa}$ tensore di Riemann calcolato a partire da $g_{\mu\nu}$;
2. in almeno un punto X della varietà, $g_{\mu\nu}(X)$ ha tre autovalori positivi e uno negativo.

In questo caso esisterà un unico cambio di coordinate $x^{\mu} \to x^{a}$ tale che

$$\eta^{ab} = \frac{\partial x^a}{\partial x^\mu}(x)\frac{\partial x^b}{\partial x^\nu}(x) g^{\mu\nu}(x) \; \forall x.$$

Il tensore di curvatura di Riemann dipende dunque dalla metrica e dalle sue derivate prime e seconde. L'ordine minimo di derivate della metrica non banali che si possano inserire in un tensore è proprio il secondo. Come verificato, infatti, nell'Appendice B, per ogni punto della varietà ci si può spostare in un sistema di riferimento in cui le derivate prime della metrica si annullino. Questa condizione è di tipo tensoriale, perciò valida in un sistema di riferimento qualunque: un tensore che dipenda dalla metrica e dalle sue derivate prime è, in realtà, dipendente solo dalla metrica. Le derivate seconde del tensore metrico, invece, non possono essere imposte tutte nulle in nessun sistema di riferimento.

Proprietà algebriche e differenziali

Si ricava una relazione notevole utile nel seguito:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial x^\kappa}\delta^{\rho}{}_{\lambda} = \frac{\partial}{\partial x^\kappa}(g^{\rho\sigma}g_{\sigma\lambda}) = \frac{\partial g^{\rho\sigma}}{\partial x^\kappa}g_{\sigma\lambda} + g^{\rho\sigma}\frac{\partial g_{\sigma\lambda}}{\partial x^\kappa} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\partial g^{\rho\sigma}}{\partial x^\kappa}g_{\sigma\lambda} &= -g^{\rho\sigma}\frac{\partial g_{\sigma\lambda}}{\partial x^\kappa} \overset{(1.14)}{=} -g^{\sigma\rho}(\Gamma^{\eta}{}_{\kappa\lambda}g_{\eta\sigma} + \Gamma^{\eta}{}_{\kappa\sigma}g_{\eta\lambda}). \end{aligned} \tag{1.21}$$

La forma completamente covariante del tensore di Riemann è:

$$\begin{aligned} R_{\lambda\mu\nu\kappa} &= g_{\lambda\sigma}R^{\sigma}{}_{\mu\nu\kappa} \overset{(1.20)}{=} \\ &= g_{\lambda\sigma}\Big[\frac{\partial \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa} + \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\eta}\Gamma^{\eta}{}_{\mu\kappa} - \Gamma^{\lambda}{}_{\eta\kappa}\Gamma^{\eta}{}_{\mu\nu}\Big] \overset{(1.13)}{=} \\ &= \frac{1}{2}g_{\lambda\sigma}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\Big[g^{\sigma\rho}\Big(\frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^\kappa} + \frac{\partial g_{\rho\kappa}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\kappa}}{\partial x^\rho}\Big)\Big] + \\ &\quad - \frac{1}{2}g_{\lambda\sigma}\frac{\partial}{\partial x^\kappa}\Big[g^{\sigma\rho}\Big(\frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho}\Big)\Big] + \\ &\quad + g_{\lambda\sigma}\Big[\Gamma^{\eta}{}_{\mu\kappa}\Gamma^{\sigma}{}_{\nu\eta} - \Gamma^{\eta}{}_{\mu\nu}\Gamma^{\sigma}{}_{\kappa\eta}\Big] \overset{(1.21)}{=} \\ &= \frac{1}{2}\Big[\frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\lambda} - \frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 g_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} + \frac{\partial^2 g_{\lambda\kappa}}{\partial x^\nu \partial x^\mu}\Big] + \\ &\quad + g_{\lambda\sigma}[\Gamma^{\eta}{}_{\kappa\lambda}\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu} - \Gamma^{\eta}{}_{\lambda\nu}\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\kappa}]. \end{aligned} \tag{1.22}$$

In questa scrittura sono più evidenti le proprietà algebriche del tensore di curvatura:

- simmetria per scambio della prima e seconda coppia di indici:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = R_{\nu\kappa\lambda\mu};$$

- antisimmetria nello scambio dei primi due o degli ultimi due indici:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = -R_{\mu\lambda\nu\kappa} = R_{\mu\lambda\kappa\nu} = -R_{\lambda\mu\kappa\nu};$$

[1]Globalmente, infatti, sono a curvatura intrinseca nulla anche varietà topologicamente diverse dallo spaziotempo di Minkowski, come ad esempio, il cilindro.

- ciclicità per permutazione di tre indici qualsiasi (*prima identità di Bianchi*), ad esempio:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} + R_{\mu\nu\lambda\kappa} + R_{\nu\lambda\mu\kappa} = 0.$$

Spesso, anziché il tensore di curvatura, si utilizzano le sue forme contratte seguenti:

- $R_{\mu\kappa} \equiv g^{\lambda\nu} R_{\lambda\mu\nu\kappa}$ detto *tensore di Ricci*;
- $R \equiv g^{\mu\kappa} R_{\mu\kappa}$ detto *curvatura scalare.*

Il tensore di Ricci è simmetrico:

$$R_{\kappa\mu} = g^{\lambda\nu} R_{\lambda\kappa\nu\mu} = g^{\lambda\nu} R_{\nu\mu\lambda\kappa} = g^{\lambda\nu} R_{\lambda\mu\nu\kappa}.$$

È inoltre l'unico tensore non banale, a meno di segno, che si può ottenere dalla contrazione di due indici del tensore di curvatura. Il numero delle possibili coppie di indici da contrarre sarà dato dal numero di combinazioni senza ripetizione di 2 elementi scelti da 4, ovvero $\binom{4}{2} = 6$. Per l'antisimmetria, le altre 5 possibili contrazioni saranno:

$$\begin{gathered} g^{\lambda\mu} R_{\lambda\mu\nu\kappa} = g^{\nu\kappa} R_{\lambda\mu\nu\kappa} = 0, \\ g^{\lambda\kappa} R_{\lambda\mu\nu\kappa} = g^{\lambda\kappa} R_{\mu\lambda\kappa\nu} = -g^{\lambda\kappa} R_{\mu\lambda\nu\kappa} = -R_{\mu\nu}. \end{gathered}$$

Anche la curvatura R sarà l'unico scalare, a meno di un segno, che può essere ottenuto dal tensore di Riemann. In 4 dimensioni, infatti, tutti i tensori controvarianti di ordine 4 saranno combinazione lineare di $g^{\lambda\mu} g^{\nu\kappa}$, $g^{\lambda\nu} g^{\mu\kappa}$, $g^{\lambda\kappa} g^{\mu\nu}$ e $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$, che contratti con il tensore di curvatura, per l'antisimmetria e la ciclicità, danno:

$$\begin{gathered} g^{\lambda\nu} g^{\mu\kappa} R_{\lambda\mu\nu\kappa} = -g^{\lambda\kappa} g^{\mu\nu} R_{\lambda\mu\nu\kappa} = R, \\ g^{\lambda\mu} g^{\nu\kappa} R_{\lambda\mu\nu\kappa} = 0, \\ \varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho} R_{\lambda\mu\nu\rho} = 0. \end{gathered}$$

Per mostrare adesso una notevole identità differenziale, detta *seconda identità di Bianchi*, si lavora in un sistema di coordinate localmente inerziale in un certo punto x della varietà. In tali coordinate si annullano tutte le componenti della connessione affine, ma non le sue derivate. Per l'equazione (1.22), dato che i termini di derivata della connessione sono sempre moltiplicati per la connessione stessa, in x si avrà che

$$D_\eta R_{\lambda\mu\nu\kappa} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^\eta} \left[\frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\lambda} - \frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 g_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} + \frac{\partial^2 g_{\lambda\kappa}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} \right]$$

e per permutazione ciclica in η, ν e κ, si ricava che

$$D_\eta R_{\lambda\mu\nu\kappa} + D_\nu R_{\lambda\mu\kappa\eta} + D_\kappa R_{\lambda\mu\eta\nu} = 0. \tag{1.23}$$

Questa è l'identità cercata: poiché covariante a vista, è valida in un qualsiasi sistema di coordinate. Di essa saranno utili le forme contratte, ottenute ricordando che la matrice della metrica ha derivata covariante nulla. Contraendo gli indici λ e ν, si ottiene

$$g^{\lambda\nu} [D_\eta R_{\lambda\mu\nu\kappa} + D_\nu R_{\lambda\mu\kappa\eta} + D_\kappa R_{\lambda\mu\eta\nu}] = D_\eta R_{\mu\kappa} - D_\kappa R_{\mu\eta} + D_\nu R^\nu{}_{\mu\kappa\eta} = 0.$$

Effettuando poi la contrazione degli indici μ e κ si ha che

$$\begin{aligned} g^{\mu\kappa} [D_\eta R_{\mu\kappa} - D_\kappa R_{\mu\eta} + D_\nu R^\nu{}_{\mu\kappa\eta}] = D_\eta R - 2 D_\mu R^\mu{}_\eta = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow D_\mu (R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R) = 0. \end{aligned} \tag{1.24}$$

1.3 Equazioni di campo della teoria di gravità

Le *equazioni di Einstein* descrivono la dinamica del campo gravitazionale sulla base delle sorgenti che lo generano e condensano in una scrittura compatta la principale intuizione fisica alla base della Relatività Generale: la gravità si esprime come una curvatura dello spaziotempo, cioè una distorsione punto per punto, della metrica, che non potrà più essere ricondotta se non localmente, alla metrica di Minkowski. A differenza del campo elettromagnetico, che non costituisce sorgente di altro campo, il campo gravitazionale possiede energia, che a sua volta costituisce sorgente di campo gravitazionale per l'equivalenza massa-energia. Le equazioni di campo di Einstein non potranno dunque essere lineari nelle sorgenti.

1.3.1 Limite Newtoniano

Punto di partenza per Einstein è la Teoria della Dinamica e della Gravità di Newton: in un potenziale gravitazionale stazionario $\Phi(\vec{x})$, le particelle di prova si muovono secondo l'equazione

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -\vec{\nabla}\Phi. \tag{1.25}$$

Questa può essere intesa come il limite dell'equazione del moto relativistica (1.17), per particelle che si muovano a velocità molto piccola rispetto a quella della luce e per un campo debole e stazionario. Imponendo $\left|\frac{d\vec{x}}{ds}\right| << \left|\frac{dt}{ds}\right|$, l'equazione (1.17) diventa

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu{}_{00}\Big(\frac{dt}{ds}\Big)^2 = 0,$$

con $\Gamma^\mu{}_{00} = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\nu}$ poiché le derivate temporali della metrica si annullano per la stazionarietà del campo.
A livello newtoniano, inoltre, il campo gravitazionale non è *auto-interagente*, dato che è privo di massa: le equazioni del moto saranno lineari nelle sorgenti. La gravità di Einstein, pertanto, coincide con quella di Newton se i campi gravitazionali sono sufficientemente deboli da avere la metrica (che è il corrispettivo relativistico del potenziale gravitazionale) lineare nelle sorgenti, cioè

$$g_{ab} = \eta_{ab} + h_{ab}, \qquad\qquad |h_{ab}| << 1, \tag{1.26}$$

con η_{ab} metrica di Minkowski e h_{ab} piccola perturbazione. Fermandosi al primo ordine in h, gli indici della perturbazione sono sollevati o abbassati tramite η_{ab}: ciò spiega l'utilizzo anche per h e dunque per g, degli indici latini tipici dei sistemi inerziali. Al primo ordine in h, la connessione è

$$\Gamma^a{}_{00} = -\frac{1}{2}\eta^{ab}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^b}$$

e le equazioni del moto saranno date da

$$\begin{cases} \frac{d^2\vec{x}}{ds^2} = \frac{1}{2}\Big(\frac{dt}{ds}\Big)^2\vec{\nabla}h_{00} \\ \frac{d^2t}{ds^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \frac{1}{2}\vec{\nabla}h_{00}. \tag{1.27}$$

L'ultimo passaggio è permesso proprio dal fatto che $\frac{dt}{ds}$ è costante e certamente non nullo ($\frac{dt}{ds} = \gamma \to 1$ se $\beta << 1$). Confrontando (1.25) con (1.27) si ricava che

$$h_{00} = -2\Phi + K,$$

con K costante sia nello spazio sia nel tempo. A distanza infinita dalle sorgenti, $\Phi = 0$ poiché i potenziali vanno come l'inverso della distanza e $h_{00} = 0$ proprio perché all'infinito non si rivela alcun campo gravitazionale e dunque la metrica è quella di Minkowski: di conseguenza, $K = 0$. Ripristinando solo adesso il simbolo di uguaglianza approssimata al posto dell'uguale, si ha

$$g_{00} \approx -1 - 2\Phi, \tag{1.28}$$

che conferma la considerazione della Sottosezione 1.2.3, per cui la metrica corrisponde al potenziale gravitazionale. Nella Fisica Newtoniana, infine, è valida l'equazione di Poisson

$$\vec{\nabla}^2\Phi = 4\pi G\rho, \tag{1.29}$$

dove ρ è la densità di massa.

Si ricava adesso la forma del tensore energia-impulso nel limite newtoniano. Per un fluido ideale relativistico (nient'altro che un insieme di particelle massive o meno, nella Meccanica di Newton tutte massive), esso sarà dato da:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu + pg_{\mu\nu} \approx \rho U_\mu U_\nu, \tag{1.30}$$

con U^μ la 4-velocità del fluido, p e ρ le densità di energia e di impulso nel sistema di coordinate solidale al fluido stesso. Il secondo passaggio è dovuto al fatto che per basse velocità, la pressione diventa trascurabile. Nel riferimento solidale al fluido,

$$U^\mu = (U^0, 0, 0, 0).$$

Per la condizione di normalizzazione $g_{\mu\nu}U^\mu U^\nu = -1$ (valida in sistemi inerziali e general-covariante, dunque valida in un qualsiasi sistema di coordinate),

$$U^0 = \sqrt{-g^{00}}.$$

Un campo debole corrisponde a una densità di massa molto piccola, cioè $\rho << 1$. Non sarà quindi necessario espandere l'espressione di U^0 in funzione della perturbazione di g^{ab}, in quanto ciò porterebbe in (1.30), a termini almeno del secondo ordine. Trascurando dunque completamente h, $U^0 = \sqrt{-\eta^{00}} = 1$ e $U_0 = -1$, così $T_{00} \approx \rho$ per la (1.30).
Quest'ultimo risultato, insieme a (1.28) e (1.29), dà l'approssimazione Newtoniana delle equazioni di campo che stiamo cercando:

$$\vec{\nabla}^2 g_{00} = -8\pi G T_{00}. \tag{1.31}$$

1.3.2 Derivazione delle equazioni di Einstein

In analogia con (1.31), si può supporre che le equazioni di campo debole siano

$$G_{ab} = -8\pi G T_{ab},$$

con G_{ab} combinazione lineare della metrica e delle sue derivate prime e seconde e T_{ab} generica distribuzione di energia e impulso. Per scrivere questa equazione in forma general-covariante cosicché sia valida in ogni sistema di coordinate, si cerca un tensore $G_{\mu\nu}$, detto *tensore di Einstein*, tale che

$$G_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu} \tag{1.32}$$

e che in condizioni di campo debole si riduca a G_{ab}. Si richiede, inoltre, in consistenza con (1.31), che $G_{\mu\nu}$ sia dell'ordine della derivata seconda della metrica. Imponendo che i campi non varino troppo velocemente o troppo lentamente con le lunghezze, saranno permessi solo termini lineari nelle derivate seconde o quadratici nelle derivate prime della metrica. Si può verificare che l'unico campo tensoriale che soddisfi questa richiesta è il tensore di curvatura di Riemann. Tuttavia, esso possiede 4 indici anziché i due richiesti per $G_{\mu\nu}$, per cui si adottano le sue uniche due forme contratte. Data la simmetria di $T_{\mu\nu}$, si esige che anche il tensore di Einstein sia simmetrico. Si potrà così scrivere che

$$G_{\mu\nu} = C_1 R_{\mu\nu} + C_2 g_{\mu\nu} R.$$

Le due costanti C_1 e C_2 saranno ricavate tramite due ulteriori vincoli. In primis, a livello di Relatività Ristretta vige la condizione $\partial_a T^{ab} = 0$, che in forma general-covariante diventa $D_\mu T^{\mu\nu} = 0$. Perché sia vera la (1.32), dovrà valere anche che

$$0 = D_\mu G^{\mu\nu} = D_\mu(C_1 R^{\mu\nu} + C_2 g^{\mu\nu} R) = \Big(\frac{C_1}{2} + C_2\Big) D_\mu(g^{\mu\nu} R) = \Big(\frac{C_1}{2} + C_2\Big) g^{\mu\nu} D_\mu R,$$

dove nel penultimo passaggio si è sfruttata la (1.24). Le soluzioni non banali sono $C_2 = -\frac{C_1}{2}$ oppure $D_\mu R = 0$ ovunque. La seconda opzione, tuttavia, è insensata fisicamente. Infatti,

$$G^\lambda{}_\lambda = (C_1 + 4C_2)R = -8\pi G T^\lambda{}_\lambda,$$

dunque se $D_\mu R = 0$ ovunque, anche $\partial_\mu T^\lambda{}_\lambda = 0$, che non è sicuramente il caso di una distribuzione qualsiasi di materia non relativistica. Il tensore di Einstein sarà perciò della forma

$$G_{\mu\nu} = C_1(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R).$$

Infine, nel limite Newtoniano dovrà valere l'equazione (1.31), dunque

$$G_{00} \approx \vec{\nabla}^2 g_{00}. \tag{1.33}$$

Le particelle si muovono a basse velocità dunque $|T_{ij}| << |T_{00}|$: perché sia vera l'equazione (1.32) dovrà sussistere la condizione $|G_{ij}| << |G_{00}|$ e quindi $R_{ij} \approx \frac{1}{2} g_{ij} R$. Nel limite di campo debole, la metrica coincide in prima approssimazione, con la metrica di Minkowski, dunque

$$R \approx R_{ii} - R_{00} \approx \frac{3}{2} R - R_{00} \Rightarrow R \approx 2R_{00}.$$

Di conseguenza,

$$G_{00} \approx C_1[R_{00} - \frac{1}{2}(-1) \cdot 2R_{00}] = 2C_1 R_{00}.$$

Per un campo debole, inoltre, le componenti della connessione affine sono in prima approssimazione nulle, dunque per la (1.22), il tensore di curvatura nella sua forma totalmente covariante, sarà

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} \approx \frac{1}{2}\Big[\frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\lambda} - \frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 g_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} + \frac{\partial^2 g_{\lambda\kappa}}{\partial x^\nu \partial x^\mu}\Big].$$

Per la stazionarietà temporale del campo e quindi della metrica,

$$R_{0000} \approx 0, \quad R_{i0j0} \approx -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^i \partial x^j} \quad \Rightarrow \quad G_{00} \approx -C_1 \vec{\nabla}^2 g_{00}.$$

Affinché questa espressione sia uguale alla (1.33), dovrà avvenire che $C_1 = -1$.
Si è così ricavato il tensore cercato e quindi le *equazioni di Einstein*:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu}. \tag{1.34}$$

Scritture alternative si ottengono contraendo ambo i membri di questa equazione con $g^{\mu\nu}$:

$$R = -8\pi G T^\mu{}_\mu, \qquad R_{\mu\nu} = 8\pi G\Big(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T^\lambda{}_\lambda\Big). \tag{1.35}$$

1.4 Azione per le equazioni di Einstein

Come le equazioni di Maxwell, anche le equazioni di Einstein possono essere ricavate dalla condizione di stazionarietà rispetto alla variazione del campo, di una grandezza scalare detta *azione*, che nel caso studiato sarà

$$S = \frac{1}{16\pi G} S_{HE} + S_M, \tag{1.36}$$

cioè somma di due azioni, una relativa al solo campo gravitazionale, valida nel vuoto, detta *azione di Hilbert-Einstein* e una relativa alla materia e alla radiazione presente nello spazio. L'azione scalare permette di avere equazioni di campo general-covarianti.

L'azione di Hilbert-Einstein è data da

$$S_{HE} = \int \sqrt{-g(x)} R(x) d^d x, \tag{1.37}$$

dove d è la dimensione dello spazio su tutto il quale è calcolato l'integrale e $g = \det g_{\mu\nu}$, che è sempre negativo per la congruenza di $g_{\mu\nu}$ con la metrica di Minkowski data da $\mathrm{diag}(-1, +1, ..., +1)$. Le equazioni di Euler-Lagrange per questa azione sono quelle di Einstein nel vuoto. Per verificarlo si studia

$$\delta(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}) = \delta(\sqrt{-g})R + \sqrt{-g}R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}.$$

Si cerca di esprimere il primo e terzo addendi in funzione della variazione della metrica inversa:

$$g^{\mu\rho}g_{\rho\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu} \Rightarrow \delta g^{\mu\rho}g_{\rho\nu} + g^{\mu\sigma}\delta g_{\sigma\nu} = 0 \Rightarrow \delta g_{\sigma\nu} = -g_{\mu\sigma}g_{\rho\nu}\delta g^{\mu\rho}. \tag{1.38}$$

Per la condizione $\delta(\det M) = \det M\, \mathrm{Tr}(M^{-1}\delta M)$,

$$\delta g = g(g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}) = -g(g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}),$$

perciò

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\delta g = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}. \tag{1.39}$$

Ricordando che la variazione della connessione è un tensore che soddisfa l'*identità di Palatini*

$$\delta R_{\mu\nu} = D_{\nu}\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\lambda} - D_{\lambda}\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} \tag{1.40}$$

e che derivata covariante e prodotto con la metrica commutano, si ha che

$$\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \sqrt{-g}[D_{\nu}(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\lambda}) - D_{\lambda}(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu})] = \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\lambda}) - \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}).$$[2]

L'integrale su tutto lo spazio di quest'ultimo addendo, dunque, si annulla per il teorema di Gauss, richiedendo che all'infinito la metrica sia Minkowskiana, dunque le connessioni nulle. Avremo perciò, considerato che $g \neq 0$,

$$\frac{\delta S_{HE}}{\delta g^{\mu\nu}} = 0 \Leftrightarrow R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 0,$$

che è quanto si voleva dimostrare.

L'azione di materia si può definire come la grandezza scalare

$$S_M \equiv \int d^dx\sqrt{-g}L_M, \tag{1.42}$$

con L_M *Lagrangiana materiale*, che dà le equazioni del moto di materia e radiazione al netto dell'interazione gravitazionale. Perché il principio di minima azione permetta di ricavare anche le equazioni di Einstein in presenza di materia e radiazione, basterà dare una nuova definizione di tensore energia-impulso. Si effettui la derivata variazionale dell'azione (1.36) rispetto all'inversa della metrica e si imponga la condizione di stazionarietà:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{16\pi G}(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}) + \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} = 0. \tag{1.43}$$

Definendo

$$T_{\mu\nu} \equiv -2\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}, \tag{1.44}$$

la condizione (1.43) dà proprio le equazioni di Einstein. Questa definizione può apparire un po' avventata, dal momento che il tensore energia-impulso $T^{\mu\nu}$ che introduce sembra non avere nulla a che vedere con quello caratteristico dell'Elettrodinamica. In realtà questi due oggetti godono delle medesime proprietà e quindi possono essere identificati. Si può mostrare, infatti, che sotto l'unica ipotesi, già assicurata dal fatto che l'azione è scalare, che le equazioni del moto siano general-covarianti, anche l'oggetto definito dalla (1.44) è un tensore di ordine $(0, 2)$, simmetrico e conservato, cioè vale l'equazione di continuità $D_{\mu}T^{\mu\nu} = 0$.

[2] La divergenza covariante di un vettore controvariante è data da

$$D_{\mu}T^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}(\sqrt{-g}T^{\mu}); \tag{1.41}$$

nel caso di un tensore qualsiasi, per ciascun indice non contratto si aggiunge o sottrae l'usuale termine della definizione di derivata covariante.

Capitolo 2

Formalismo di Cartan

Le basi implicitamente scelte finora per esprimere la Relatività Generale di Einstein sono $\{\partial_\mu\}$ e $\{\mathrm{d}x^\mu\}$ rispettivamente per lo spazio tangente e per lo spazio cotangente in un punto x della varietà. Esse sono dette *basi di coordinate* dal momento che un cambio di coordinate su un intorno di x della varietà, le trasforma attraverso la sua matrice Jacobiana. È tuttavia possibile introdurre per spazio tangente e spazio cotangente in un qualsiasi punto x della varietà, delle basi localmente ortogonali che trasformino come tensori di Lorentz: la descrizione della teoria di gravità di Einstein che viene fuori esprimendo in queste nuove basi le grandezze o gli operatori fin qui introdotti (metrica, connessione, derivata covariante, azione di gravità) prende il nome di *formalismo di Cartan.* Quest'ultimo è indispensabile per accoppiare alla gravità i campi spinoriali fermionici, che trasformano per rappresentazioni del gruppo di Lorentz e non del gruppo dei diffeomorfismi.

2.1 Definizione di tetrade e proprietà

Per ogni punto x si definisce *tetrade* o *vielbein* (in tedesco sta per "molte gambe") una qualsiasi base locale ortogonale di 1-forme $e^a{}_\mu(x)\mathrm{d}x^\mu$, che rende in x la metrica piatta, cioè tale che

$$g_{\mu\nu}(x) = e^a{}_\mu(x)e^b{}_\nu(x)\eta_{ab}. \tag{2.1}$$

Se d è la dimensione della varietà, si avranno *zweibein* (d=2), *dreibein* (d=3), *vierbein* (d=4), ...
Queste basi esistono per il Principio di Equivalenza: se $g_{\mu\nu}(x)$ è la metrica nel sistema di coordinate x^μ, nel sistema di coordinate localmente inerziale $\bar{x}^a$, la metrica sarà quella di Minkowski:

$$\eta_{ab} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^a}\frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^b}g_{\mu\nu}(x) \Rightarrow g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^\mu}\frac{\partial \bar{x}^b}{\partial x^\nu}\eta_{ab}. \tag{2.2}$$

Per ogni punto x una tetrade sarà data dalle componenti

$$\bar{e}^a_\mu(x) \equiv \frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^\mu}, \tag{2.3}$$

con $\bar{x}^a(x)$ sistema localmente inerziale in x.
Queste costituiscono le componenti della matrice Jacobiana, denotata con $\bar{e}$, del cambio di coordinate $x^\mu \to \bar{x}^a$ e quindi sono le componenti degli elementi di una base $\{\bar{e}^a(x)\}$ per lo spazio cotangente la varietà in x, rispetto alla base di coordinate $\mathrm{d}x^\mu$.
Avendo $g = \det g_{\mu\nu}$ e $\det \eta_{ab}$ il medesimo segno (negativo) per le considerazioni sulla congruenza,

$$g\ \det \eta^{ab} = -g \Rightarrow \det \bar{e} = \sqrt{-g} \neq 0.$$

Tale matrice, così come il cambio di base, sarà dunque invertibile, con inversa data da

$$\bar{e}^\mu_a(x) \equiv \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^a}, \tag{2.4}$$

che sono le componenti degli elementi della base $\{\bar{e}_a(x)\}$ dello spazio tangente la varietà in x. Omettendo la dipendenza dal punto, varranno le condizioni

$$\bar{e}^\mu_a \bar{e}^a_\nu = \delta^\mu{}_\nu, \qquad \bar{e}^\mu_a \bar{e}^b_\mu = \delta^a{}_b.$$

Siano $e^a(x) = e^a{}_\mu(x)\mathrm{d}x^\mu$ gli elementi di una tetrade qualsiasi in x e sia $\Lambda^{a'}{}_a(x)$ la matrice, dipendente anch'essa dal punto, tale che

$$e^{a'}{}_\mu(x) = \Lambda^{a'}{}_a(x)\bar{e}^a_\mu(x) = \Lambda^{a'}{}_a(x)\frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^\mu}. \tag{2.5}$$

Per la (2.1), valida per $e(x)$ e $\bar{e}(x)$,

$$\eta^{a'b'} = e^{a'}{}_\mu(x)e^{b'}{}_\nu(x)g^{\mu\nu}(x) = \Lambda^{a'}{}_a(x)\Lambda^{b'}{}_b(x)e^a{}_\mu(x)e^b{}_\nu(x)g^{\mu\nu}(x) = \Lambda^{a'}{}_a(x)\Lambda^{b'}{}_b(x)\eta^{ab},$$

dunque le tetradi in un punto trasformano per le Λ tali che $\Lambda\eta\Lambda^T = \eta$, cioè $\Lambda \in SO(1, d-1)$. Vanno dunque fissati i $\frac{d}{2}(d-1)$ parametri delle trasformazioni di Lorentz per definire univocamente una tetrade in x, per cui e avrà

$$d^2 - \frac{d}{2}(d-1) = \frac{d}{2}(d+1)$$

gradi di libertà, quanti quelli della metrica $g_{\mu\nu}(x)$.
Tramite $e^a{}_\mu(x)$ e la sua inversa, un qualsiasi tensore di rango (p,q) può essere espresso nelle nuove coordinate inerziali:

$$T^{a_1\ldots a_p}_{b_1\ldots b_q}(x) = e^{a_1}{}_{\mu_1}(x)\ldots e^{a_2}{}_{\mu_2}(x)e^{\nu_1}{}_{b_1}(x)\ldots e^{\nu_1}{}_{b_1}(x)T^{\mu_1\ldots\mu_p}_{\nu_1\ldots\nu_q}(x).$$

In virtù della (2.1) gli indici latini sono abbassati o sollevati dalla metrica di Minkowski: ad esempio,

$$V_a = e^\mu{}_a(g_{\mu\nu}V^\nu) = e^\mu{}_a g_{\mu\nu}e^\nu{}_b V^b = \eta_{ab}V^b.$$

Gli indici greci relativi al sistema di riferimento generico sono talvolta detti *olonomi* mentre quelli latini relativi al sistema di riferimento inerziale sono detti *di fibra* o *anolonomi* o *di Lorentz* (proprio perché sollevati o abbassati dalla metrica di Minkowski).

2.2 Derivata covariante, curvatura e torsione

Si riesce a definire per i tensori espressi con il formalismo di tetrade, una *derivata covariante* analoga a quella introdotta per i tensori in indici olonomi. Considerato che la derivata covariante di un vettore controvariante è un tensore, trasformando l'indice controvariante "curvo" in indice di fibra "piatto", si ottiene:

$$\begin{aligned}
D_\mu V^n &= e^n{}_\nu D_\mu V^\nu = \\
&= e^n{}_\nu \partial_\mu V^\nu + e^n{}_\nu \Gamma^\nu{}_{\mu\lambda}V^\lambda = \\
&= e^n{}_\nu \partial_\mu(e^\nu{}_a V^a) + e^n{}_\nu \Gamma^\nu{}_{\mu\lambda}e^\lambda{}_a V^a = \\
&= \partial_\mu V^n + e^n{}_\nu(\partial_\mu e^\nu{}_a + \Gamma^\nu{}_{\mu\lambda}e^\lambda{}_a)V^a = \\
&= \partial_\mu V^n + \omega_\mu{}^n{}_a V^a,
\end{aligned} \tag{2.6}$$

dove è stata definita la *connessione di spin*

$$\omega_\mu{}^a{}_b = e^a{}_\nu(\partial_\mu e^\nu{}_b + \Gamma^\nu{}_{\mu\lambda}e^\lambda{}_b). \tag{2.7}$$

Notando come nel linguaggio della Geometria Differenziale, $D_\mu V^n$ sono i coefficienti di una 1-forma, la (2.6) può essere vista come la definizione di un operatore D che agisce su 0-forme (oggetti senza indici olonomi) a valori tensoriali (in quanto possono avere un qualsivoglia numero di indici di fibra):

$$DV^a = \mathrm{d}V^a + \omega^a{}_b V^b. \tag{2.8}$$

Partendo invece, dalla regola di derivata covariante, in coordinate, per un vettore covariante, si ha che

$$DV_a = \mathrm{d}V_a - \omega^b{}_a V_b, \tag{2.9}$$

così la derivata covariante è stata definita per un tensore qualsiasi con indici di fibra.
Il nome "connessione di spin" deriva dal fatto che si tratta del corrispettivo nel formalismo di Cartan, dei simboli di Christoffel $\Gamma^\rho{}_{\lambda\nu}$ e diventa necessaria per definire la derivata covariante per i cosiddetti *spinori.* Anche la proprietà di trasformazione della connessione di spin per trasformazioni di Lorentz ricalca quella delle connessioni affini. Infatti, se $V'^a(x) = \Lambda^a{}_b(x)V^b(x)$ (sta cambiando solo l'indice, non il punto in cui è calcolato il vettore),

$$\Lambda^a{}_b DV^b = \Lambda^a{}_b \mathrm{d}V^b + \Lambda^a{}_b\omega^b{}_c V^c = \mathrm{d}(\Lambda^a{}_b V^b) - (\mathrm{d}\Lambda^a{}_b)(\Lambda^{-1})^b{}_c\Lambda^c{}_d V^d + \Lambda^a{}_b\omega^b{}_c(\Lambda^{-1})^c{}_d\Lambda^d{}_f V^f.$$

D'altro canto,

$$D'V'^a = \mathrm{d}(\Lambda^a{}_b V^b) + \omega'^a{}_b\Lambda^b{}_c V^c.$$

Imponendo la regola di trasformazione $D'V'^a = \Lambda^a{}_b DV^b$, si ricava che

$$\omega'^a{}_b = \Lambda^a{}_c\omega^c{}_d(\Lambda^{-1})^d{}_b - (\mathrm{d}\Lambda^a{}_c)(\Lambda^{-1})^c{}_b, \tag{2.10}$$

che è effettivamente analoga alla regola (1.10) se si sostituiscono le trasformazioni di Lorentz con i diffeomorfismi.

Nel formalismo di Cartan, vige una proprietà caratteristica talvolta chiamata "postulato di tetrade":

$$D_\mu e_\nu{}^a = 0. \tag{2.11}$$

Per la (2.6) e la (2.7), infatti:

$$\begin{aligned} D_\mu e_\nu{}^a &= \partial_\mu e_\nu{}^a - \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}e_\lambda{}^a + \omega^a{}_{\mu b}e_\nu{}^b = \\ &= \partial_\mu e_\nu{}^a - \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}e_\lambda{}^a + e_\rho{}^a(\partial_\mu e^\rho{}_b + \Gamma^\rho{}_{\mu\lambda}e^\lambda{}_b)e_\nu{}^b = \\ &= \partial_\mu e_\nu{}^a + e_\rho{}^a(\partial_\mu e^\rho{}_b)e_\nu{}^b = \\ &= \partial_\mu e_\nu{}^a - \delta^\rho{}_\nu\ \partial_\mu e_\rho{}^a = 0, \end{aligned}$$

sfruttando nel penultimo passaggio il fatto che

$$0 = \partial_\mu\delta_b{}^a = \partial_\mu(e^\rho{}_b e_\rho{}^a) \Leftrightarrow (\partial_\mu e^\rho{}_b)e_\rho{}^a = -(\partial_\mu e_\rho{}^a)e^\rho{}_b. \tag{2.12}$$

Per la metrico-compatibilità, inoltre,

$$0 = D_\mu g^{\rho\sigma} = D_\mu(e^\rho{}_a\eta^{ab}e^\sigma{}_b) = e^\rho{}_a D_\mu\eta^{ab}e^\sigma{}_b,$$

dato che per il postulato di tetrade gli altri due termini della derivata si annullano. Di conseguenza,

$$D_\mu\eta^{ab} = 0 \Rightarrow \omega_\mu{}^a{}_c\eta^{cb} + \omega_\mu{}^b{}_c\eta^{ac} = 0 \Rightarrow \omega_\mu{}^{ab} = -\omega_\mu{}^{ba}, \tag{2.13}$$

ovvero la connessione di spin è una 1-forma a valori in $Skew(\mathbb{R}^{1,d-1})$, cioè una matrice antisimmetrica nei suoi due indici di fibra, che dipende dal punto sullo spazio tangente alla varietà in un dato punto x.
La definizione di derivata covariante si può generalizzare a un qualsiasi tensore con indici olonomi e indici di fibra:

$$D_\nu T^{a_1\ldots a_k}_{\mu_1\ldots\mu_p} = \partial_\nu T^{a_1\ldots a_k}_{\mu_1\ldots\mu_p} + \sum_{i=1}^{k}\omega_\nu{}^{a_i}{}_b T^{a_1\ldots b\ldots a_k}_{\mu_1\ldots\mu_p} - \sum_{j=1}^{p}\Gamma^\lambda{}_{\mu_j\nu}T^{a_1\ldots a_k}_{\mu_1\ldots\lambda\ldots\mu_p}.$$

Se poi T è una p-forma negli indici curvi, basterà contrarre con la base $\mathrm{d}x^\nu \wedge \mathrm{d}x^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_p}$. Il fatto che la connessione sia priva di torsione fa sparire gli addendi con i simboli di Christoffel:

$$DT^{a_1\ldots a_k} = \mathrm{d}T^{a_1\ldots a_k} + \sum_{i=1}^{k}\omega^{a_i}{}_b \wedge T^{a_1\ldots b\ldots a_k}. \tag{2.14}$$

Le *equazioni di struttura di Cartan* definiscono rispettivamente la curvatura e la torsione nell'ambito del formalismo di tetrade:

$$R^a{}_b = \mathrm{d}\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b, \tag{2.15}$$
$$T^a = \mathrm{d}e^a + \omega^a{}_b e^b, \tag{2.16}$$

con

$$R^a{}_b \equiv \frac{1}{2} R_{\mu\nu}{}^a{}_b dx^\mu \wedge dx^\nu, \tag{2.17}$$

che sta per l'intero tensore di Riemann e non va confuso con il tensore di Ricci.
Queste due nuove scritture sono equivalenti alle definizioni di tensore di Riemann e torsione in coordinate. Per verificare ciò, si osservi preliminarmente che se per una forma differenziale qualsiasi A, $\mathrm{d}^2 A = 0$,

$$\begin{aligned} D^2 V^a &= D(\mathrm{d}V^a + \omega^a{}_b V^b) = \\ &= \mathrm{d}^2 V^a + \mathrm{d}\omega^a{}_b V^b - \omega^a{}_b \wedge \mathrm{d}V^b + \omega^a{}_b \wedge \mathrm{d}V^b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b \wedge V^b = \\ &= \mathrm{d}\omega^a{}_b V^b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b V^b. \end{aligned}$$

Così, le equazioni di struttura di Cartan possono equivalentemente scriversi come:

$$R^a{}_b V^b = D^2 V^b, \tag{2.18}$$
$$T^a = De^a. \tag{2.19}$$

Le derivate covarianti di un tensore, in generale, non commutano:

$$\begin{aligned} D_\mu D_\nu V^\rho &= D_\mu \Big[\frac{\partial V^\rho}{\partial x^\nu} + \Gamma^\rho{}_{\lambda\nu} V^\lambda \Big] = \\ &= \frac{\partial^2 V^\rho}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \frac{\partial \Gamma^\rho{}_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} V^\lambda + \Gamma^\rho{}_{\lambda\nu} \frac{\partial V^\lambda}{\partial x^\mu} + \Gamma^\rho{}_{\mu\sigma} \Big[\frac{\partial V^\sigma}{\partial x^\nu} - \Gamma^\sigma{}_{\lambda\nu} V^\lambda \Big] - \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu} \Big[\frac{\partial V^\rho}{\partial x^\sigma} + \Gamma^\rho{}_{\lambda\sigma} V^\lambda \Big], \end{aligned}$$

dunque

$$[D_\mu, D_\nu] V^\rho = R^\rho{}_{\lambda\mu\nu} V^\lambda. \tag{2.20}$$

Nel linguaggio delle tetradi, vigono le due condizioni

$$\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu [D_\mu, D_\nu] e^\rho{}_r V^r = 2 e^\rho{}_r D^2 V^r,$$
$$\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu R^\rho{}_{\lambda\mu\nu} V^\lambda = \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu R^r{}_{s\mu\nu}\ e^\rho{}_r V^s = 2 e^\rho{}_r R^r{}_s V^s,$$

che uguagliate danno proprio la (2.18).
La torsione, invece, in coordinate viene definita come

$$T^\rho{}_{\mu\nu} = \Gamma^\rho{}_{\mu\nu} - \Gamma^\rho{}_{\nu\mu}, \tag{2.21}$$

che per la connessione affine della metrica $g_{\mu\nu}$, sarà nulla. Invertendo la definizione (2.7) si ottiene

$$\Gamma^\rho{}_{\mu\nu} = e^\rho{}_a\ \omega_\mu{}^a{}_b\ e^b{}_\nu - (\partial_\mu e^\rho{}_b)\ e^b{}_\nu,$$

perciò

$$\begin{aligned} T^\rho{}_{\mu\nu} &= e^\rho{}_a \omega_\mu{}^a{}_b e^b{}_\nu - (\partial_\mu e^\rho{}_b) e^b{}_\nu - e^\rho{}_a \omega_\nu{}^a{}_b e^b{}_\mu + (\partial_\nu e^\rho{}_b) e^b{}_\mu = \\ &= e^\rho{}_b \partial_\mu e^b{}_\nu - e^\rho{}_b \partial_\nu e^b{}_\mu + e^\rho{}_b \omega_\mu{}^b{}_a e^a{}_\nu - e^\rho{}_b \omega_\nu{}^b{}_a e^a{}_\mu, \end{aligned} \tag{2.22}$$

dove nell'ultimo passaggio è stata sfruttata la condizione $(\partial_\mu e^\rho{}_b) e^b{}_\nu = -e^\rho{}_b \partial_\mu e^b{}_\nu$, analoga della (2.12), e sono stati rinominati gli indici di Lorentz sommati.
Per la (2.14), la derivata covariante di $e^r = e^r{}_\mu \mathrm{d}x^\mu$, sarà

$$De^r = \mathrm{d}e^r + \omega^r{}_b \wedge e^b \tag{2.23}$$

o, esplicitando gli indici olonomi,

$$De^r = [\partial_\mu e^r{}_\nu - \partial_\nu e^r{}_\mu + \omega_\mu{}^r{}_b e^b{}_\nu - \omega_\nu{}^r{}_b e^b{}_\mu]\, \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu.$$

Di conseguenza, per la (2.22)

$$e^\rho{}_r T^r{}_{\mu\nu} \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu = e^\rho{}_r De^r,$$

da cui deriva l'equazione (2.19). Per il postulato di tetrade, si ha dunque che anche nel formalismo di Cartan,

$$T^a = De^a = 0.$$

2.3 Azione ed equazioni del moto nel vuoto

L'*azione di Palatini* è l'espressione dell'azione di Hilbert-Einstein in 4 dimensioni, nel formalismo di tetrade:

$$S_{HE} = -\frac{1}{2}\int \varepsilon_{abcd}\, R^{ab} \wedge e^c \wedge e^d. \tag{2.24}$$

In 4 dimensioni,

$$d^4x = \mathrm{d}x^0 \wedge \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 \Rightarrow \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \wedge \mathrm{d}x^\rho \wedge \mathrm{d}x^\sigma = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} d^4x,$$

proprio perché il prodotto esterno è antisimmetrico. Inoltre,

$$\varepsilon_{abcd} e^a{}_\alpha e^b{}_\beta e^c{}_\rho e^d{}_\sigma = e\varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma},$$

perciò

$$\begin{aligned}
S_{HE} &= -\frac{1}{2}\int \varepsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^c \wedge e^d = \\
&= -\frac{1}{4}\int R^{ab}{}_{\mu\nu} e^c{}_\rho e^d{}_\sigma \varepsilon_{abcd}\, \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \wedge \mathrm{d}x^\rho \wedge \mathrm{d}x^\sigma = \\
&= -\frac{1}{4}\int R^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} \varepsilon_{abcd} e^a{}_\alpha e^b{}_\beta e^c{}_\rho e^d{}_\sigma\, \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \wedge \mathrm{d}x^\rho \wedge \mathrm{d}x^\sigma = \\
&= -\frac{1}{4}\int R^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} \varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} e\, d^4x = \\
&= \int R^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} \delta^\mu{}_{[\alpha} \delta^\nu{}_{\beta]} \sqrt{-g}\, d^4x = \\
&= \int R\sqrt{-g}\, d^4x.
\end{aligned}$$

Le equazioni del moto, ovvero le equazioni di Einstein nel vuoto, si ottengono imponendo la stazionarietà dell'azione (2.24) rispetto alla variazione di e^d:

$$\frac{\delta S_{HE}}{\delta e^d} = -\varepsilon_{abcd}(R^{ab} \wedge e^c) = 0. \tag{2.25}$$

Per verificare l'equivalenza con le equazioni già note, si calcola:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^c \wedge e^h &= \frac{1}{2}\varepsilon_{abcd} R^{\rho\sigma}{}_{\mu\nu} e^a{}_\rho e^b{}_\sigma e^c{}_\alpha e^h{}_\beta\, \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \wedge \mathrm{d}x^\alpha \wedge \mathrm{d}x^\beta = \\
&= \frac{1}{2}\varepsilon_{abcd'} e^a{}_\rho e^b{}_\sigma e^c{}_\alpha e^{d'}{}_\eta e^\eta{}_d e^h{}_\beta \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} R^{\rho\sigma}{}_{\mu\nu}\, d^4x = \\
&= \frac{1}{2} e\varepsilon_{\rho\sigma\alpha\eta} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} e^\eta{}_d e^h{}_\beta R^{\rho\sigma}{}_{\mu\nu}\, d^4x = \\
&= -\frac{1}{2} e3! R^{\rho\sigma}{}_{\mu\nu} \delta^\mu{}_{[\rho} \delta^\nu{}_\sigma \delta^\beta{}_{\eta]} e^\eta{}_d e^h{}_\beta\, d^4x = \\
&= \left(2R^h{}_d - R\delta^h{}_d\right)\sqrt{-g}\, d^4x.
\end{aligned}$$

L'azione di Palatini è inoltre automaticamente stazionaria rispetto alla connessione di spin. Per la (2.15),

$$\delta R^{ab} = \delta \mathrm{d}\omega^{ab} + \delta\omega^{a}{}_{c} \wedge \omega^{cb} + \omega^{a}{}_{c} \wedge \delta\omega^{cb}.$$

Per alleggerire la notazione, nei calcoli adesso presentati sarà omesso il simbolo di prodotto esterno. Considerando che la connessione è una 1-forma e che variazione e derivata esterna commutano, per la regola (C.5) si ottiene

$$\varepsilon_{abcd}\ \delta \mathrm{d}\omega^{ab} e^c e^d = [\varepsilon_{abcd}\ \mathrm{d}(\delta\omega^{ab} e^c e^d) + \varepsilon_{abcd}\ \delta\omega^{ab} \mathrm{d}(e^c e^d)].$$

Sfruttando invece, l'antisimmetria di ω^{ab} e del prodotto esterno, si ha

$$\varepsilon_{abcd}(\delta\omega^{a}{}_{f}\omega^{fb} + \omega^{a}{}_{f}\delta\omega^{fb}) = \varepsilon_{afcd}(\delta\omega^{ab}\omega_{b}{}^{f} + \omega^{a}{}_{b}\delta\omega^{bf}) = 2\varepsilon_{afcd}\delta\omega^{ab}\omega_{b}{}^{f}.$$

Inserendo questi termini nella (2.24), si ottiene la variazione

$$\delta S_{HE} = -\frac{1}{2}[\varepsilon_{abcd}\ \mathrm{d}(\delta\omega^{ab} e^c e^d) + \varepsilon_{abcd}\delta\omega^{ab}\mathrm{d}(e^c e^d) + 2\ \varepsilon_{afcd}\delta\omega^{ab}\omega_{b}{}^{f} e^c e^d].$$

Così,

$$\frac{\delta S_{HE}}{\delta\omega^{ab}} = -[\varepsilon_{abcd}\ \mathrm{d}(e^c e^d) + 2\ \varepsilon_{afcd}\omega_{b}{}^{f} e^c e^d]$$

e quindi

$$\begin{aligned}
\frac{\delta S_{HE}}{\delta\omega^{ab}}\varepsilon^{abik} &= -\varepsilon^{abik}[\varepsilon_{abcd}\ \mathrm{d}(e^c e^d) + 2\ \varepsilon_{afcd}\omega_{b}{}^{f} e^c e^d] = \\
&= 2(\mathrm{d}e^{[i}e^{k]} + 2\cdot 3!\delta^{b}{}_{[f}\delta^{i}{}_{c}\delta^{k}{}_{d]}\omega_{b}{}^{f} e^c e^d) = \\
&= 2(\mathrm{d}e^{[i}e^{k]} + \omega^{[i|}{}_{b}e^{b}e^{|k]}) = 0,
\end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio si sono usati la proprietà (2.23) e il postulato di tetrade.
Se alternativamente, si applica il principio di minima azione a S_{HE}, imponendo la sua variazione nulla rispetto al campo indipendente ω^{ab}, si ottengono le sue equazioni del moto, date proprio da

$$De^a = 0.$$

Capitolo 3

Teoria di Einstein con costante cosmologica

La prima modifica alle equazioni (1.34) fu suggerita dallo stesso Einstein e prevedeva l'introduzione di un addendo chiamato *termine cosmologico*, poiché permetteva di rendere consistente la Relatività Generale con le caratteristiche al tempo presunte per l'Universo. Eliminato poi dalle equazioni di campo perché ritenuto non fisico, si è ripristinato definitivamente solo con la verifica sperimentale dell'espansione accelerata dell'Universo.

3.1 Equazioni di campo

Si sostituisca la Lagrangiana materiale dell'equazione (1.42), con $L'_M = L_M - \frac{\Lambda}{8\pi G}$, dove Λ è una costante, detta *costante cosmologica*. L'azione (1.36) andrà riscritta come

$$S' = \frac{1}{16\pi G}(S_{HE} + S_\Lambda) + S_M = \\ = \frac{1}{16\pi G}\int (R - 2\Lambda)\sqrt{-g}d^dx + \int L_M\sqrt{-g}d^dx, \tag{3.1}$$

con S_M azione di materia di Lagrangiana L_M come definita in (1.42). Le corrispondenti equazioni del moto, note come *equazioni di Einstein con costante cosmologica*, sono date da

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \tag{3.2}$$

dove $T_{\mu\nu}$ è il tensore energia-impulso di materia e radiazione e $\Lambda g_{\mu\nu}$ è detto *termine cosmologico*. Λ è quindi, una nuova costante universale che governa l'accoppiamento gravitazionale insieme alla costante di Newton G. Nel formalismo di Cartan, in assenza di materia e radiazione e per $d = 4$, l'azione (2.24) con termine cosmologico diventa

$$S' = -\frac{1}{32\pi G}\int \varepsilon_{abcd}(R^{ab} - 2\Lambda e^a \wedge e^b) \wedge e^c \wedge e^d. \tag{3.3}$$

Ciò può essere verificato adattando a 4 dimensioni la dimostrazione data nella Sezione 4.2 per l'azione in 3 dimensioni.
Il nuovo tensore simmetrico $G'^{\mu\nu} \equiv R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R + \Lambda g^{\mu\nu}$ rispetta la condizione $D_\mu G'^{\mu\nu} = 0$ dal momento che $D_\mu G^{\mu\nu} = 0$ e la connessione affine è metrico-compatibile. Il Principio di Equivalenza ci permette di non inserire termini contenenti derivate prime della metrica: la (1.32) e la (3.2) rappresentano le equazioni candidate a descrivere il campo gravitazionale. Perché la seconda delle due sia consistente con la teoria di Newton nel limite non-relativistico, Λ dovrà essere sufficientemente piccola.

Un excursus storico aiuta adesso a comprendere se la presenza del termine cosmologico nelle equazioni di campo è effettivamente consistente con l'osservazione sperimentale. Successivamente ne è presentata l'interpretazione fisica, insieme a questioni ancora aperte che lo riguardano.

3.2 *"My greatest blunder"*: storia della costante cosmologica

L'equazione (3.2) fu scritta per la prima volta da Einstein, che la pubblicò nel 1917. Ci si aspettava infatti, che la Relatività Generale riuscisse a risolvere un problema posto più di secoli prima da Newton: perché, pur attraendosi reciprocamente, le masse non collassano tutte in un punto e l'Universo rimane stabile? Dopo aver trovato un argomento matematico per cui potesse esistere un Universo con masse in mutua attrazione, ma fisse nelle loro posizioni iniziali, Einstein scoprì che nessuna distribuzione di masse era consistente con una tale ipotesi di Universo statico. Fu dunque costretto a introdurre nelle sue equazioni il termine cosmologico $\Lambda g_{\mu\nu}$, che rappresentasse l'energia repulsiva (di origine completamente ignota) necessaria ad evitare il collasso gravitazionale. Nasce così l'*Universo sferico statico di Einstein*, una soluzione a queste sue nuove equazioni.

Fu però il matematico russo Aleksandr Friedmann a mettere in luce nel 1922, come anche le nuove equazioni di Einstein, potessero ammettere come soluzioni un Universo in espansione, in contrazione o addirittura pulsante. Le sue conclusioni furono confermate da uno studio del fisico belga Georges Lemaître, pubblicato nel 1927. Nel frattempo, nel 1917, il fisico olandese Willem de Sitter aveva reso nota una soluzione non identicamente nulla delle equazioni di Einstein con costante cosmologica (detta appunto *Universo di de Sitter*), relativa ad uno spazio vuoto. Il termine cosmologico aveva così scardinato un assunto filosofico che aveva guidato Einstein nell'elaborazione della sua teoria, ovvero il principio di Mach, da cui discende che non può esservi curvatura dello spaziotempo senza materia. Se in un messaggio a Weyl del 1923, Einstein sembrava già accettare la "non staticità" dell'Universo e dunque la rimozione del termine cosmologico dalle equazioni, ancora al V Congresso Solvay del 1927, egli proponeva argomenti per difenderla. Solo la pubblicazione definitiva della legge di Hubble-Humason, avvenuta nel 1931, fece desistere del tutto Einstein. I lavori sperimentali dei due scienziati al Mount Wilson Observatory, in California, confermarono infatti, la recessione delle galassie e dunque un'espansione dell'Universo, sulla base del red-shift osservato nelle linee spettrali di galassie molto distanti dalla Via Lattea, allora chiamate "nebulose a spirale". Fu così che il termine cosmologico sparì dalle equazioni della gravità: in una conversazione con il fisico russo George Gamow, Einstein lo definì *"my greatest blunder"*, cioè "il mio più grande abbaglio". I testi classici sulla Relatività Generale, come quelli di Pauli o di Landau-Lifshitz, editi negli anni '50, considerano non fisica l'aggiunta all'azione di Hilbert-Einstein.

Nei decenni successivi, in diverse occasioni, alcuni modelli teorici o osservazioni sperimentali suggerirono un reinserimento del termine cosmologico nelle equazioni di Einstein. Invalidando i modelli o riuscendo a spiegare alternativamente i dati, di volta in volta la costante cosmologica scompariva dalle equazioni. Nel 1998, però, gli esperimenti Supernova Cosmology Project e High-z SN Search rivelarono indipendentemente, per la prima volta, l'espansione accelerata dell'Universo, che venne spiegata, come è chiaro dalla prossima Sezione, ricorrendo proprio alla costante cosmologica: le equazioni di Einstein prescelte allo stato attuale, sono dunque date dalla (3.2).

3.3 La fisica della costante cosmologica

Definendo $Q_{\mu\nu} \equiv \frac{\Lambda}{8\pi G} g_{\mu\nu} \equiv \rho_\Lambda g_{\mu\nu}$, l'equazione (3.2) può scriversi nella forma equivalente

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G (T_{\mu\nu} - Q_{\mu\nu}). \tag{3.4}$$

$Q_{\mu\nu}$ può essere considerato come il tensore energia-impulso di un fluido relativistico ideale con densità di energia ρ_Λ e pressione $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$ (come si evince dalla sua espressione $Q_{ab} = \rho_\Lambda \eta_{ab}$ in un sistema di coordinate inerziale). La sua equazione di stato sarà perciò $p_\Lambda + \rho_\Lambda = 0$. Tale fluido contribuisce, tramite $Q_{\mu\nu}$, alla curvatura dello spaziotempo. Tuttavia, le equazioni del moto della materia coincidono per le due Lagrangiane L_M a L'_M, in quanto esse differiscono per un termine costante: $Q_{\mu\nu}$ non può perciò dipendere dalla materia ordinaria, ma da un ulteriore oggetto fisico ancora poco noto, chiamato *energia oscura*. Questa potrebbe essere associata all'*energia di punto zero* o *dello stato quantistico fondamentale*, che è non nulla per il principio di indeterminazione di Heisenberg e per cui si può creare dal vuoto una coppia particella-antiparticella.

Si mette adesso in relazione la non staticità dell'Universo con la costante cosmologica. Siano $x^\mu(s)$ e $x^\mu + \delta x^\mu(s)$ due geodetiche infinitesimamente vicine su uno spaziotempo privo di materia ordinaria. Si indicano con g^i le componenti spaziali dell'accelerazione relativa $\frac{D^2\delta x^\lambda}{Ds^2}$ tra due particelle di prova che si muovono lungo di esse. Per l'equazione (1.19),

$$g^i \equiv \frac{D^2\delta x^i}{Ds^2} = R^i{}_{\mu\nu\rho}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\delta x^\rho.$$

Per un osservatore punto per punto localmente inerziale lungo la prima geodetica, $\frac{dx^\mu}{ds} = (1,0,0,0)$, dunque,

$$g^i = R^i{}_{00j}\delta x^j,$$

dove per l'antisimmetria del tensore di curvatura, sono rimaste solo le componenti spaziali δx^j. Si calcola la divergenza dell'accelerazione relativa

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{g} \equiv \frac{\partial g^i}{\partial \delta x^i} = R^i{}_{00i} = -R_{00} = 8\pi G\Big(Q_{00} + \frac{1}{2}g_{00}Q\Big),$$

in cui si sono usate le equazioni di Einstein (3.4) con termine cosmologico. Quindi, sempre nel medesimo sistema di riferimento localmente inerziale:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{g} = 8\pi G\Big(Q_{00} - \frac{1}{2}Q\Big) = 8\pi G\Big[-\rho_\Lambda - \frac{1}{2}\Big(-\rho_\Lambda + 3p_\Lambda\Big)\Big] = -4\pi G(\rho_\Lambda + 3p_\Lambda) = 8\pi G\rho_\Lambda.$$

$\vec{\nabla}\cdot\vec{g}$ quantifica l'espansione o contrazione dell'Universo:

$$\begin{cases} \Lambda > 0 \Rightarrow \rho_\Lambda > 0 \Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{g} > 0: & \text{Universo in espansione} \\ \Lambda < 0 \Rightarrow \rho_\Lambda < 0 \Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{g} < 0: & \text{Universo in contrazione.} \end{cases}$$

Dalle osservazioni sperimentali si deduce oggi che la costante cosmologica è positiva, con valore $|\Lambda| \approx 10^{-56}cm^{-2}$. Rimangono ancora aperti, tuttavia, alcuni problemi teorici, ad esempio:

- ${\rho_\Lambda}^{obs} \approx 10^{-8}erg\ cm^{-3}$ è il valore sperimentale della densità di energia dovuta alla costante cosmologica. Esso è di 120 ordini di grandezza più piccolo del valore teorico ${\rho_\Lambda}^{th} \approx 10^{112}erg\ cm^{-3}$ calcolato in Teoria Quantistica di Campo. Questa discrepanza, ancora da spiegare, è nota come *problema della costante cosmologica.*
- Ci si aspetta che una teoria che riesca a spiegare perché Λ sia così piccola, giustifichi anche perché essa sia positiva.

3.4 Spazi di de Sitter e Anti-de Sitter

La presenza del termine cosmologico nelle equazioni di Einstein permette l'esistenza di spazi curvi anche in assenza di materia o radiazione. Prova di ciò fu nel 1917, l'introduzione degli *spazi di de Sitter* (*dS*) e di *Anti-de Sitter* (*AdS*), due soluzioni delle equazioni di Einstein con costante cosmologica, nel vuoto. Essi, infatti, presentano una metrica con segnatura di Lorentz $(-,+,...,+)$ e curvatura costante rispettivamente positiva e negativa. Si tratta dunque degli analoghi lorentziani della sfera e dello spazio di Lobačevskij (spazi a metrica euclidea con curvatura costante rispettivamente positiva e negativa).
Curvatura e costante cosmologica hanno il medesimo segno, perciò dS e AdS sono soluzioni delle equazioni di Einstein con costante cosmologica rispettivamente positiva o negativa. Infatti, per la (3.2), in assenza di sorgenti materiali,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = -8\pi G\Lambda g_{\mu\nu},$$

che, moltiplicando ambo i membri per $g^{\mu\nu}$, dà

$$R = \frac{2d}{d-2}8\pi G\Lambda,$$

con $d > 2$ dimensione della varietà spaziotemporale. Si evince dunque che

$$\begin{cases} \Lambda > 0 \Rightarrow R > 0 : & \text{spazio di de Sitter} \\ \Lambda < 0 \Rightarrow R < 0 : & \text{spazio di Anti} - \text{de Sitter.} \end{cases}$$

In d dimensioni, lo spazio di de Sitter di raggio $\mathcal{R}$ è definito come un embedding in uno spazio $(d+1)$ - dimensionale, di equazione

$$-{X_0}^2 + \sum_{i=1}^{d-1} {X_i}^2 + {X_{d+1}}^2 = \mathcal{R}^2, \tag{3.5}$$

che è appunto l'analoga dell'equazione di una sfera di raggio $\mathcal{R}$, se però, sullo spazio a $(d+1)$ dimensioni, è definita la metrica di Minkowski

$$ds^2 = -\mathrm{d}{X_0}^2 + \sum_{i=1}^{d-1} \mathrm{d}{X_i}^2 + \mathrm{d}{X_{d+1}}^2, \tag{3.6}$$

al posto della metrica euclidea. Come la sfera d-dimensionale è invariante per il gruppo delle rotazioni $SO(d+1)$, lo spazio di de Sitter d-dimensionale è invariante per trasformazioni del gruppo di Lorentz $SO(1,d)$, che lasciano invariata la metrica di embedding (3.6) e sono perciò chiamate *isometrie*.
Lo spazio di Anti-de Sitter d-dimensionale (AdS_d) è invece definito dall'equazione di embedding in uno spazio a $(d+1)$ dimensioni, data da

$$-{X_0}^2 + \sum_{i=1}^{d-1} {X_i}^2 - {X_{d+1}}^2 = -\mathcal{R}^2, \tag{3.7}$$

in cui si è usata la metrica

$$ds^2 = -\mathrm{d}{X_0}^2 + \sum_{i=1}^{d-1} \mathrm{d}{X_i}^2 - \mathrm{d}{X_{d+1}}^2. \tag{3.8}$$

Il gruppo di simmetrie per lo spazio di Anti-de Sitter e la sua metrica di embedding è costituito da $SO(2,d-1)$.

Nonostante le osservazioni più recenti suggeriscano un valore positivo per la costante cosmologica, in questo lavoro ci si concentrerà sullo spazio di Anti-de Sitter, che ha una rilevanza notevole nell'ambito della Teoria delle Stringhe o della Fisica della Materia Condensata, con la *corrispondenza AdS/CFT*.
Lo spazio di Anti-de Sitter e la metrica (3.8) possono essere espressi in vari sistemi di coordinate. Uno di questi è dato dalle *coordinate di Poincaré*:

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{1}{2u}(1 + u^2(\mathcal{R}^2 + \vec{x}^2 - t^2)), \\ X_{d+1} &= \mathcal{R}ut, \\ X_i &= \mathcal{R}ux_i, \quad i = 1, ..., d-2 \\ X_{d-1} &= \frac{1}{2u}(1 - u^2(\mathcal{R}^2 - \vec{x}^2 + t^2)), \end{aligned} \tag{3.9}$$

che infatti soddisfano l'equazione di embedding (3.7). In questo sistema di coordinate la metrica (3.8) assume l'espressione

$$ds^2 = \mathcal{R}^2\Big(u^2(-\mathrm{d}t^2 + \sum_{i=1}^{d-2} \mathrm{d}{x_i}^2) + \frac{\mathrm{d}u^2}{u^2}\Big),$$

con $-\infty < t, x_i < +\infty$ e $0 < u < +\infty$. In questa forma la metrica è palesemente invariante sia per le trasformazioni del gruppo di Poincaré $ISO(1,d-2)$, che agiscono su $(t,\vec{x})$, sia per le simmetrie

di riscalamento di $SO(1,1)$, del tipo $(t,\vec{x},u) \to (\lambda t, \lambda\vec{x}, \lambda^{-1}u)$. Questi due tipi di trasformazioni costituiscono due sottogruppi del gruppo massimale $SO(2,d-1)$ delle trasformazioni per cui AdS è invariante.
Basta imporre $u \equiv \frac{1}{x_0}$ con $0 < x_0 < +\infty$ per ottenere la forma equivalente

$$ds^2 = \frac{\mathcal{R}^2}{{x_0}^2}\Big(-\mathrm{d}t^2 + \sum_{i=1}^{d-2} \mathrm{d}{x_i}^2 + \mathrm{d}{x_0}^2\Big). \tag{3.10}$$

Il termine $\frac{\mathcal{R}^2}{{x_0}^2}$ prende il nome di *fattore conforme* e non influisce sulla propagazione della luce, descritta dall'equazione $ds^2 = 0$. In seguito a un opportuno riscalamento, la metrica (3.10) di uno spazio di Anti-de Sitter sembrerebbe coincidere con quella dello spazio di Minkowski d-dimensionale e i due spazi coinciderebbero pur essendo stati definiti in maniera differente. In realtà, le coordinate di Poincaré non descrivono tutto AdS_d, ma solo un suo sottoinsieme: esse rappresentano soltanto una carta locale, chiamata appunto *carta di Poincaré*, definita solo per $x_0 > 0$ o per $x_0 < 0$. Infine, lo spazio di Anti-de Sitter in coordinate di Poincaré, viene spesso inteso come uno spazio di Minkowski $(d-1)$ - dimensionale nelle coordinate $(t, x_1, ..., x_{d-2})$, con un fattore di distorsione x_0 che rappresenta il potenziale gravitazionale.

La curvatura scalare relativa alla metrica dello spazio AdS_d nelle coordinate di Poincaré (3.10), sarà automaticamente negativa. Adoperando le definizioni (1.13) di connessione e (1.20) di curvatura e ponendo $a = (t, i)$ si ricava che

$$\begin{cases} R_{00} = -\frac{d-1}{x_0} \\ R_{0a} = 0 \\ R_{ab} = -\frac{d-1}{\mathcal{R}^2}\eta_{ab} \end{cases} \Rightarrow R_{\mu\nu} = -\frac{d-1}{\mathcal{R}^2}g_{\mu\nu} \Rightarrow R_{AdS} = -\frac{d(d-1)}{\mathcal{R}^2} < 0 \ \forall d > 1.$$

La costante cosmologica per $d > 2$ sarà dunque data da

$$\Lambda_{AdS} = -\frac{(d-1)(d-2)}{16\pi G\mathcal{R}^2} = -\frac{(d-1)(d-2){M_P}^2}{2\mathcal{R}^2}. \tag{3.11}$$

La grandezza M_P che qui compare, è la *massa di Planck ridotta*, definita come $M_P \equiv \sqrt{\frac{\hbar c}{8\pi G}}$, dove $\hbar$ è la costante di Planck ridotta. Usando unità di misura tali che $\hbar = 1$ e $c = 1$, $M_P = \frac{1}{\sqrt{8\pi G}}$, dunque ${M_P}^2 = \frac{1}{8\pi G}$. M_P è una delle unità di misura naturali del sistema di Planck, espresse solo in termini delle costanti fondamentali: c, $\hbar$, G, k di Boltzmann e ε_0 costante dielettrica del vuoto. Fanno parte di questo sistema anche la *massa di Planck* non ridotta e la *lunghezza di Planck*

$$m_P \equiv \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \approx 1,2 \cdot 10^{19} GeV/c^2, \qquad l_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \approx 1,6 \cdot 10^{-35} m. \tag{3.12}$$

Si osserva che se $c = 1$ e $G = 1$, le due unità di misura appena definite sono l'una il reciproco dell'altra. Inoltre, m_P è di 19 ordini di grandezza più grande della massa a riposo del protone, mentre l_P è di 20 ordini di grandezza inferiore rispetto al suo diametro. Questa è la lunghezza al di sotto della quale si ritiene inizi a diventare necessaria una descrizione quantistica della gravità.

Un sistema di coordinate globali per AdS_d è dato da:

$$\begin{aligned} X_0 &= \mathcal{R}\cosh\rho\cos\tau, \\ X_i &= \mathcal{R}\sinh\rho\ \Omega_i, \quad i = 1, ..., d-1 \\ X_{d+1} &= \mathcal{R}\cosh\rho\sin\tau, \end{aligned} \tag{3.13}$$

con $\tau \in [0, 2\pi]$ e $\rho \geq 0$ affinché venga ricoperto tutto lo spazio. Ω_i rappresenta la componente del versore radiale di una sfera $(d-2)$-dimensionale lungo la coordinata i-esima. La condizione $\sum_i {\Omega_i}^2 = 1$ fa sì che anche questo sistema di coordinate effettivamente soddisfi l'equazione di embedding (3.7). In queste coordinate globali, la metrica è

$$ds^2 = \mathcal{R}^2(-\cosh^2\rho\ \mathrm{d}\tau^2 + \mathrm{d}\rho^2 + \sinh^2\rho\ \mathrm{d}\vec{\Omega}^2_{d-2}), \tag{3.14}$$

dove $\mathrm{d}\vec{\Omega}^2_{d-2}$ è la metrica di una sfera $(d-2)$-dimensionale con raggio unitario. L'espansione di (3.14) intorno a $\rho = 0$, ovvero

$$ds^2 \approx \mathcal{R}^2(-\mathrm{d}\tau^2 + \mathrm{d}\rho^2 + \rho^2 \mathrm{d}\vec{\Omega}^2_{d-2}),$$

mostra come lo spazio di Anti-de Sitter abbia la topologia di $S^1 \times \mathbb{R}^{d-1}$, con evidenti problemi di causalità, dovuti alla periodicità della coordinata temporale. Per ripristinare la causalità basta definire la coordinata temporale su tutto $\mathbb{R}$: lo spaziotempo così trovato è detto *ricoprimento universale di* AdS_d e verrà indicato con $\widetilde{AdS_d}$.
Si può, infine, applicare alla metrica in coordinate globali (3.14), la trasformazione

$$\sinh\rho = \frac{r}{\mathcal{R}}, \qquad \tau = \frac{\bar{t}}{\mathcal{R}}$$

e poi sfruttare l'equazione (3.11) per scrivere un'espressione della metrica in funzione di Λ, valida anche nel caso sia positiva (dunque anche per lo spazio di de Sitter):

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\Big(1 + \frac{r^2}{\mathcal{R}^2}\Big)\mathrm{d}\bar{t}^2 + \frac{\mathrm{d}r^2}{1 + \frac{r^2}{\mathcal{R}^2}} + r^2 \mathrm{d}\vec{\Omega}^2_{d-2} = \\ &= -\Big(1 - \frac{2\Lambda}{(d-1)(d-2){M_P}^2} r^2\Big)\mathrm{d}\bar{t}^2 + \frac{\mathrm{d}r^2}{1 - \frac{2\Lambda}{(d-1)(d-2){M_P}^2} r^2} + r^2 \mathrm{d}\vec{\Omega}^2_{d-2}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Capitolo 4

Gravità in 2+1 dimensioni

Finora si è lavorato principalmente su generiche varietà spaziotemporali d-dimensionali, studiate tramite oggetti matematici, tensori o meno, con d componenti per indice. Si concentra adesso l'attenzione sullo studio della gravità per varietà 3-dimensionali ($d = 3$ componenti per ciascun indice, una temporale e due spaziali), principale interesse di questa tesi.

4.1 Curvatura e soluzioni delle equazioni di Einstein

Per il computo del numero di componenti indipendenti C_d del tensore di curvatura di Riemann su una varietà d-dimensionale (d generico), consideriamo i suoi primi due e gli ultimi due indici come un unico indice: si tratta dunque $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$ come un tensore $R_{(\lambda\mu)(\nu\kappa)}$, di tipo $(0, 2)$ e simmetrico. Questo particolare escamotage prende il nome di *notazione di Petrov.* Ciascun indice $(\lambda\mu)$ potrà assumere $\frac{d}{2}(d-1)$ "valori binari", che è il numero di componenti indipendenti di una matrice antisimmetrica d-dimensionale. Perciò $R_{(\lambda\mu)(\nu\kappa)}$ sarà una matrice simmetrica, $\frac{d}{2}(d-1)$-dimensionale, con un numero di componenti indipendenti, al netto di ulteriori vincoli, pari a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{2}(d-1)(\frac{d}{2}(d-1)+1) = \frac{1}{8}d(d-1)(d^2-d+2).$$

Questo sarebbe il numero di componenti indipendenti del tensore di curvatura in d dimensioni se quest'ultimo non dovesse rispettare le condizioni di ciclicità

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} + R_{\lambda\nu\kappa\mu} + R_{\lambda\kappa\mu\nu} = 0. \tag{4.1}$$

Considerata l'antisimmetria della parte sinistra di questa relazione, il numero di condizioni effettivamente indipendenti imposte con la (4.1) sarà pari al numero di combinazioni di 4 elementi scelti tra d: $\binom{d}{4} = \frac{1}{24}d(d-1)(d-2)(d-3)$. In totale dunque, le componenti indipendenti del tensore di Riemann in d dimensioni saranno:

$$C_d = \frac{1}{8}d(d-1)(d^2-d+2) - \frac{1}{24}d(d-1)(d-2)(d-3) = \frac{1}{12}d^2(d+1)(d-1). \tag{4.2}$$

Nel caso $d = 4$, le componenti indipendenti sono $C_4 = 20$, coerentemente con il numero di gradi di libertà per la scelta dei valori delle derivate seconde della metrica in un punto, calcolati in Appendice B. Se si considera infatti, che il tensore di Riemann dipende dalle derivate prime e seconde della metrica e che per il Principio di Equivalenza le derivate prime possono sempre essere poste pari a 0, i gradi di libertà del tensore di curvatura coincidono con quelli delle derivate seconde della metrica.

I gradi di libertà del tensore di Riemann su una varietà spaziotemporale tridimensionale, saranno $C_3 = 6$, esattamente quanti i gradi di libertà del tensore di Ricci (tensore simmetrico, dunque caratterizzato da $\frac{d}{2}(d+1)$ componenti): basterà dunque il tensore di Ricci per descrivere la curvatura dello spaziotempo in 3 dimensioni. In questo caso la relazione tra tensore di curvatura e tensore di Ricci sarà:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = g_{\lambda\nu}R_{\mu\kappa} - g_{\lambda\kappa}R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}R_{\lambda\kappa} + g_{\mu\kappa}R_{\lambda\nu} - \frac{1}{2}(g_{\lambda\nu}g_{\mu\kappa} - g_{\lambda\kappa}g_{\mu\nu})R. \tag{4.3}$$

La metrica è infatti, sempre simmetrica nei suoi due indici, dunque per il teorema spettrale esiste un sistema di coordinate in cui essa è diagonale in un certo punto x della varietà spaziotemporale. Lavorando in questo sistema di coordinate,

$$R_{01} = g^{00}R_{0001} + g^{11}R_{1011} + g^{22}R_{2021} = g^{22}R_{0212} \Rightarrow R_{0212} = g_{22}R_{01}.$$

Analogamente si ricava che

$$R_{1012} = g_{11}R_{02}, \qquad R_{0102} = g_{00}R_{12}.$$

Inoltre,

$$\begin{cases} R_{00} = g^{11}R_{0101} + g^{22}R_{0202} \\ R_{11} = g^{22}R_{1212} + g^{00}R_{1010} \end{cases} \Rightarrow g_{11}R_{00} + g_{00}R_{11} = 2R_{0101} + g^{22}(g_{11}R_{0202} + g_{00}R_{1212}) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow R_{0101} = g_{11}R_{00}{+}g_{00}R_{11} - g_{00}g_{11}(g^{00}g^{11}R_{0101} + g^{00}g^{22}R_{0202} + g^{11}g^{22}R_{1212}) = \\ = g_{11}R_{00} + g_{00}R_{11} - \frac{1}{2}g_{00}g_{11}R, \end{aligned}$$

con le analoghe equazioni

$$R_{0202} = g_{22}R_{00} + g_{00}R_{22} - \frac{1}{2}g_{00}g_{22}R, \qquad R_{1212} = g_{22}R_{11} + g_{11}R_{22} - \frac{1}{2}g_{11}g_{22}R.$$

Queste relazioni per le 6 componenti indipendenti del tensore di curvatura in 3 dimensioni, confermano la validità della (4.3) in un sistema di coordinate ortogonale in x. Questa equazione è inoltre, covariante a vista, dunque sarà valida in un qualsiasi sistema di coordinate per il Principio di General-Covarianza.

In 3 dimensioni, saremmo indotti a contare 6 componenti indipendenti del tensore di Einstein, data la sua simmetria. Tuttavia, la condizione $D_\mu G^{\mu\nu} = 0$, cioè la seconda identità di Bianchi contratta, costituisce 3 vincoli per questo tensore, cosicché le effettive componenti indipendenti di $G_{\mu\nu}$ saranno 3. Disponiamo quindi di 3 equazioni di Einstein indipendenti per le 6 componenti della metrica: i 3 gradi di libertà rimanenti sono quelli delle trasformazioni di coordinate in 3 dimensioni, che per la General-Covarianza delle equazioni di campo, mandano una soluzione (a $T^{\mu\nu}$ fissato) in un'altra soluzione. Per l'unicità dovremo quindi imporre 3 condizioni sulle coordinate, ad esempio le condizioni di armonicità.

Su una varietà spaziotemporale di qualsiasi dimensione, nel vuoto, cioè nel caso in cui $T_{\mu\nu} = 0$, le equazioni di Einstein avranno la soluzione

$$R_{\mu\nu} = 0$$

su tutta la varietà. È già stato osservato come in 3 dimensioni gli effetti della gravità possano essere descritti solamente attraverso il tensore di Ricci, in quanto ha lo stesso numero di gradi di libertà del tensore di Riemann. In questo caso, dunque, l'annullarsi del tensore di Ricci comporta l'assenza di curvatura e quindi nessun campo gravitazionale possibile nello spazio privo di sorgenti: non si può parlare di onde gravitazionali su una varietà 3-dimensionale.

Per avere soluzioni non banali per le equazioni della gravità in uno spaziotempo tridimensionale privo di materia, è necessario considerare le equazioni di Einstein con il termine cosmologico. Una metrica identicamente piatta non soddisfa queste equazioni, cosicché può aversi la propagazione di onde gravitazionali. Sono, invece, soluzioni gli spazi di de Sitter e di Anti-de Sitter.

4.2 Azione di gravità con termine cosmologico

In presenza di costante cosmologica Λ non nulla e $L_M = 0$, l'azione di gravità in 3 dimensioni è

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{16\pi G}(S_{HE} + S_\Lambda) = \\ &= \frac{1}{16\pi G}\int (R - 2\Lambda)\sqrt{-g}d^3x. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Nel formalismo di Cartan, essa si esprime in funzione di una dreibein $\{e^a\}_{a=0,1,2}$ come:

$$S = \frac{1}{16\pi G}\int \varepsilon_{abc}(R^{ab} - \frac{2}{3!}\Lambda e^a \wedge e^b) \wedge e^c. \tag{4.5}$$

Infatti, ricordando che $R^{ab} = \frac{1}{2}R^{ab}{}_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu$ e che se $e \equiv \det e^a{}_\mu$, allora $\varepsilon_{abc}e^a{}_\rho e^b{}_\sigma e^c{}_\alpha = e\varepsilon_{\rho\sigma\alpha}$,

$$\begin{aligned}
S &= -\frac{1}{16\pi G}\int \varepsilon_{abc}\Big(\frac{1}{2}R^{ab}{}_{\mu\nu} - \frac{2}{3!}\Lambda e^a{}_\mu e^b{}_\nu\Big)e^c{}_\alpha \ \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \wedge \mathrm{d}x^\alpha = \\
&= -\frac{1}{16\pi G}\int \varepsilon_{abc}\Big(\frac{1}{2}e^a{}_\rho e^b{}_\sigma e^c{}_\alpha R^{\rho\sigma}{}_{\mu\nu} - \frac{2}{3!}\Lambda e^a{}_\mu e^b{}_\nu e^c{}_\alpha\Big)\varepsilon^{\mu\nu\alpha} \ d^3x = \\
&= -\frac{1}{16\pi G}\int e\Big(\frac{1}{2}\varepsilon_{\rho\sigma\alpha}\varepsilon^{\mu\nu\alpha}R^{\rho\sigma}{}_{\mu\nu} - \frac{2}{3!}\Lambda\varepsilon_{\mu\nu\alpha}\varepsilon^{\mu\nu\alpha}\Big)d^3x = \\
&= \frac{1}{16\pi G}\int e(\delta^\mu{}_{[\rho}\delta^\nu{}_{\sigma]}R^{\rho\sigma}{}_{\mu\nu} - 2\Lambda)d^3x = \\
&= \frac{1}{16\pi G}\int (R - 2\Lambda)\sqrt{-g}d^3x.
\end{aligned}$$

Le equazioni del moto in formalismo di vielbein sono

$$\frac{\delta S}{\delta e^c} = \varepsilon_{abc}(R^{ab} - \Lambda e^a \wedge e^b) = 0, \tag{4.6}$$

equivalenti alle equazioni di Einstein (3.2), con termine cosmologico nel formalismo in coordinate, dal momento che

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{abc}(R^{ab} - \Lambda e^a \wedge e^b) \wedge e^h &= \varepsilon_{abc}\Big(\frac{1}{2}R^{\rho\sigma}{}_{\mu\nu}e^a{}_\rho e^b{}_\sigma - \Lambda e^a{}_\mu e^b{}_\nu\Big)e^h{}_\alpha \ \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \wedge \mathrm{d}x^\alpha = \\
&= \varepsilon_{abc'}\Big(\frac{1}{2}e^a{}_\rho e^b{}_\sigma e^{c'}{}_\eta R^{\rho\sigma}{}_{\mu\nu} - \Lambda e^a{}_\mu e^b{}_\nu e^{c'}{}_\eta\Big)e^\eta{}_c e^h{}_\alpha \varepsilon^{\mu\nu\alpha} \ d^3x = \\
&= e\Big(\frac{1}{2}\varepsilon_{\rho\sigma\eta}\varepsilon^{\mu\nu\alpha}R^{\rho\sigma}{}_{\mu\nu} - \Lambda\varepsilon_{\mu\nu\eta}\varepsilon^{\mu\nu\alpha}\Big)e^\eta{}_c e^h{}_\alpha \ d^3x = \\
&= e\Big(-\frac{1}{2}3!R^{\rho\sigma}{}_{\mu\nu}\delta^\mu{}_{[\rho}\delta^\nu{}_\sigma\delta^\alpha{}_{\eta]} + 2\Lambda\delta^\alpha{}_\eta\Big)e^\eta{}_c e^h{}_\alpha \ d^3x = \\
&= \Big(2R^h{}_c - R\delta^h{}_c + 2\Lambda\delta^h{}_c\Big)\sqrt{-g} \ d^3x.
\end{aligned}$$

Le equazioni del moto si riducono dunque a

$$R_{\mu\nu} = 2\Lambda g_{\mu\nu}, \tag{4.7}$$

le cui soluzioni sono spazi a curvatura costante come dS o AdS.

4.3 Gravità topologicamente massiva

Oltre al termine cosmologico, è possibile aggiungere all'azione di gravità nel vuoto, in $2+1$ dimensioni, un termine detto *topologico*, in quanto a priori non dipende dalle proprietà metriche della varietà, ma solo da quelle di connessione e quindi intrinsecamente topologiche. In virtù di questo nuovo addendo, l'azione prevede anche la possibilità della propagazione di onde gravitazionali in 3 dimensioni, in questo caso, però, massive. La teoria di gravità, divenuta massiva per via del termine topologico, prende il nome di *Gravità Topologicamente Massiva*, abbreviata con TMG.

4.3.1 Azione ed equazioni del moto

Il termine topologico fu suggerito a Deser, Jackiw e Templeton in [9], dalle teorie dei matematici Chern e Simons e per questo viene talvolta indicato come S_{CS}, cioè *azione di Chern-Simons.* Esso è dato da

$$S_{CS} = \frac{1}{2}\int d^3x\varepsilon^{\lambda\mu\nu}\Big(\Gamma^\rho{}_{\lambda\sigma}\partial_\mu\Gamma^\sigma{}_{\rho\nu} + \frac{2}{3}\Gamma^\rho{}_{\lambda\sigma}\Gamma^\sigma{}_{\mu\tau}\Gamma^\tau{}_{\nu\rho}\Big)\Big], \tag{4.8}$$

dove $\varepsilon^{012} = 1$, cosicché a priori, non è presente la dipendenza dalla metrica e permane solo quella dalla connessione[1]. Tuttavia, nel caso in esame, Γ coincide con il simbolo di Christoffel, a sua volta dipendente dalla metrica e dalle sue derivate prime: il termine di Chern-Simons è dunque del terzo ordine nelle derivate della metrica. L'azione totale, data dal termine di Hilbert-Einstein con l'aggiunta di termine cosmologico e termine di Chern-Simons, si scrive perciò come

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{16\pi G}(S_{HE} + S_\Lambda + \frac{1}{\mu}S_{CS}) = \\ &= \frac{1}{16\pi G}\Big[\int d^3x\sqrt{-g}(R-2\Lambda) + \frac{1}{2\mu}\int d^3x\varepsilon^{\lambda\mu\nu}\Big(\Gamma^\rho{}_{\lambda\sigma}\partial_\mu\Gamma^\sigma{}_{\rho\nu} + \frac{2}{3}\Gamma^\rho{}_{\lambda\sigma}\Gamma^\sigma{}_{\mu\tau}\Gamma^\tau{}_{\nu\rho}\Big)\Big], \end{aligned} \tag{4.11}$$

con μ parametro costante della dimensione di una massa. Le equazioni del moto relative a questa azione, ricavate in Appendice D, sono date da

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} + \frac{1}{\mu}C_{\mu\nu} = 0, \tag{4.12}$$

con

$$C_{\mu\nu} = \frac{\varepsilon_\mu{}^{\alpha\beta}}{\sqrt{-g}}D_\alpha S_{\beta\nu} = \frac{\varepsilon_\mu{}^{\alpha\beta}}{\sqrt{-g}}D_\alpha\big(R_{\beta\nu} - \frac{1}{4}Rg_{\beta\nu}\big) \tag{4.13}$$

detto *tensore di Cotton* e

$$S_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{4}Rg_{\mu\nu} \tag{4.14}$$

chiamato *tensore di Schouten.*

Il tensore di Cotton è simmetrico. Infatti, per la seconda identità di Bianchi (1.23) e per la relazione (4.3)

$$\begin{aligned} 0 &= \varepsilon^{\lambda\mu\nu}D_\lambda R_{\mu\nu\rho\sigma} = \\ &= \varepsilon^{\lambda\mu\nu}\Big(g_{\mu\rho}D_\lambda R_{\sigma\nu} - g_{\nu\rho}D_\lambda R_{\sigma\mu} - \frac{1}{2}g_{\mu\rho}g_{\sigma\nu}D_\lambda R - g_{\mu\sigma}D_\lambda R_{\rho\nu} + g_{\nu\sigma}D_\lambda R_{\rho\mu} + \frac{1}{2}g_{\mu\sigma}g_{\rho\nu}D_\lambda R\Big) = \\ &= \varepsilon_\rho{}^{\lambda\nu}\big(-D_\lambda R_{\sigma\nu} - D_\lambda R_{\sigma\nu} + \frac{1}{2}g_{\sigma\nu}D_\lambda R\big) + \varepsilon_\sigma{}^{\lambda\nu}\big(D_\lambda R_{\rho\nu} + D_\lambda R_{\rho\nu} - \frac{1}{2}g_{\rho\nu}D_\lambda R\big), \end{aligned}$$

che dà proprio

$$C_{\mu\nu} = C_{\nu\mu}. \tag{4.15}$$

Si noti inoltre, che

$$\varepsilon_\mu{}^{\alpha\beta}D_\alpha(g_{\beta\nu}R) = \varepsilon_\mu{}^{\alpha\beta}g_{\beta\nu}D_\alpha R = -\varepsilon_{\mu\nu}{}^\alpha D_\alpha R,$$

dunque il secondo addendo della definizione (4.13) è antisimmetrico negli indici μ e ν. Di conseguenza, coincidendo con la sua simmetrizzazione, il tensore di Cotton può essere equivalentemente scritto come

$$C_{\mu\nu} = \frac{1}{2\sqrt{-g}}\big(\varepsilon_\mu{}^{\rho\sigma}D_\rho R_{\sigma\nu} + \varepsilon_\nu{}^{\rho\sigma}D_\rho R_{\sigma\mu}\big). \tag{4.16}$$

Questa espressione alternativa permette di mostrare due importanti proprietà:

- $C_{\mu\nu}$ è privo di traccia. Infatti, per la simmetria del tensore di Ricci,

$$C^\mu{}_\mu = g^{\mu\nu}C_{\mu\nu} = \frac{1}{2\sqrt{-g}}\big(\varepsilon^{\mu\rho\sigma}D_\rho R_{\sigma\mu} + \varepsilon^{\mu\rho\sigma}D_\rho R_{\sigma\mu}\big) = \frac{\varepsilon^{\mu\rho\sigma}}{\sqrt{-g}}D_\rho R_{\sigma\mu} = 0.$$

[1] Nel formalismo di Cartan, l'azione di Chern-Simons si scrive come

$$\tilde{S}_{CS} = -\frac{1}{4}\int d^3x\varepsilon^{\mu\nu\alpha}\big[R_{\mu\nu ab}\omega_\alpha{}^{ab} + \frac{2}{3}\omega_{\mu b}{}^c\omega_{\nu c}{}^a\omega_{\alpha a}{}^b\big], \tag{4.9}$$

con

$$R_{\mu\nu ab} \equiv \partial_\mu\omega_{\nu ab} + \omega_{\mu a}{}^c\omega_{\nu cb} - (\mu \leftrightarrow \nu) \tag{4.10}$$

e $\omega_{\mu ab} = -\omega_{\mu ba}$ per la (2.13). La verifica dell'equivalenza di questa scrittura e la (4.8) è data nell'Appendice D.

- $C_{\mu\nu}$ è conservato (in senso covariante), cioè

$$D_\mu C^{\mu\nu} = 0. \tag{4.17}$$

  Questa proprietà è verificata nell'Appendice D.

Da queste caratteristiche del tensore di Cotton si riesce a mostrare come l'azione di Chern-Simons sia invariante per diffeomorfismi. Per la condizione

$$\delta g^{\mu\nu}(x) = D^\mu \xi^\nu(x) + D^\nu \xi^\mu(x),$$

la variazione (D.2) dell'azione di Chern-Simons per diffeomorfismi infinitesimi sarà

$$\begin{aligned}
\delta S_{CS} &= \int d^3x \sqrt{-g} C_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} = \\
&= \int d^3x \sqrt{-g} C_{\mu\nu} \big(D^\mu \xi^\nu + D^\nu \xi^\mu\big) = \\
&= 2 \int \sqrt{-g} d^3x D_\mu \big(C^{\mu\nu} \xi_\nu\big) - 2 \int d^3x \sqrt{-g} \big(D_\mu C^{\mu\nu}\big) \xi_\nu = \\
&= 2 \int d^3x \sqrt{-g} D_\mu \big(C^{\mu\nu} \xi_\nu\big) \stackrel{(1.41)}{=} \\
&= 2 \int d^3x \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\sqrt{-g} C^{\mu\nu} \xi_\nu) = 0,
\end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza è dovuta all'annullarsi dei termini di bordo.

Da adesso in poi non si riporta più il fattore $\frac{1}{\sqrt{-g}}$ che compare nel tensore di Cotton e dunque nelle equazioni del moto[2]. Si può, inoltre, semplificare l'espressione (4.12), calcolando la traccia di ambo i membri. Si ottiene così che

$$R - \frac{3}{2} R + 3\Lambda = 0 \Rightarrow R = 6\Lambda \tag{4.18}$$

indipendentemente dal valore del parametro μ. Le equazioni del moto, pertanto, diventano

$$R_{\mu\nu} - 2\Lambda g_{\mu\nu} + \frac{1}{\mu} \varepsilon_\mu{}^{\rho\sigma} D_\rho R_{\sigma\nu} = 0. \tag{4.19}$$

Una qualsiasi soluzione delle equazioni di Einstein con termine cosmologico, cioè $R_{\mu\nu} = 2\Lambda g_{\mu\nu}$, sarà anche soluzione di (4.19), dato che, per la metrico-compatibilità, $D_\rho g_{\sigma\nu} = 0$.
Ci si concentra adesso, sul caso in cui $\Lambda = 0$. Per la (4.18), anche

$$R = 0$$

su tutto lo spaziotempo. Inoltre, dalla (4.19), con $\Lambda = 0$ discende che

$$D_\rho R_{\sigma\nu} = \mu R_{\mu\nu} \varepsilon^\mu{}_{\rho\sigma}$$

e dunque

$$D_\rho R^\rho{}_\nu = 0.$$

Le equazioni del moto nel caso di costante cosmologica nulla, sono infine,

$$\begin{cases}
R_{\mu\nu} + \frac{1}{\mu} \varepsilon_\mu{}^{\rho\sigma} D_\rho R_{\sigma\nu} = 0 \\
R = 0 \\
D^\mu R_{\mu\nu} = 0.
\end{cases} \tag{4.20}$$

Si introduce adesso l'operatore

$$\mathcal{O}_{\mu\nu}{}^{\lambda\sigma}(\mu) \equiv \big(\delta^\lambda{}_\mu \delta^\sigma{}_\nu - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\lambda\sigma}\big) + \frac{1}{\mu} \varepsilon_\mu{}^{\alpha\beta} \big(\delta^\lambda{}_\beta \delta^\sigma{}_\nu - \frac{1}{4} g^{\lambda\sigma} g_{\nu\beta}\big) D_\alpha, \tag{4.21}$$

[2]Ciò equivale ad imporre che $\sqrt{-g}\varepsilon^{012} = 1$.

che dipende dal parametro μ. Così la prima delle equazioni del moto in (4.20) può scriversi in maniera compatta come

$$\mathcal{O}_{\mu\nu}{}^{\lambda\sigma}(\mu)R_{\lambda\sigma}=0. \tag{4.22}$$

Essendo (4.21) un operatore lineare, si avrà che

$$0=\mu^2\mathcal{O}_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu}(-\mu)\mathcal{O}_{\mu\nu}{}^{\lambda\sigma}(\mu)R_{\lambda\sigma}. \tag{4.23}$$

L'operatore a secondo membro è dato da

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu}(-\mu)\mathcal{O}_{\mu\nu}{}^{\lambda\sigma}(\mu) &= \big[\big(\delta^\mu{}_\alpha\delta^\nu{}_\beta-\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}g^{\mu\nu}\big)-\frac{1}{\mu}\varepsilon_\alpha{}^{\rho\tau}\big(\delta^\mu{}_\tau\delta^\nu{}_\beta-\frac{1}{4}g^{\mu\nu}g_{\rho\tau}\big)D_\rho\big]\cdot\\
&\quad\big[\big(\delta^\lambda{}_\mu\delta^\sigma{}_\nu-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\lambda\sigma}\big)+\frac{1}{\mu}\varepsilon_\mu{}^{\gamma\kappa}\big(\delta^\lambda{}_\kappa\delta^\sigma{}_\nu-\frac{1}{4}g^{\lambda\sigma}g_{\nu\kappa}\big)D_\gamma\big]=\\
&=\delta^\lambda{}_\alpha\delta^\sigma{}_\beta-\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}g^{\lambda\sigma}-\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}g^{\lambda\sigma}+\frac{3}{4}g_{\alpha\beta}g^{\lambda\sigma}+\\
&\quad-\frac{1}{\mu}\varepsilon_\alpha{}^{\rho\tau}\big(\delta^\mu{}_\tau\delta^\nu{}_\beta-\frac{1}{4}g^{\mu\nu}g_{\rho\tau}\big)\big(\delta^\lambda{}_\mu\delta^\sigma{}_\nu-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\lambda\sigma}\big)D_\rho+\\
&\quad+\frac{1}{\mu}\varepsilon_\mu{}^{\gamma\kappa}\big(\delta^\mu{}_\alpha\delta^\nu{}_\beta-\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}g^{\mu\nu}\big)\big(\delta^\lambda{}_\kappa\delta^\sigma{}_\nu-\frac{1}{4}g^{\lambda\sigma}g_{\nu\kappa}\big)D_\gamma+\\
&\quad-\frac{1}{\mu^2}\varepsilon_\alpha{}^{\rho\tau}\varepsilon_\mu{}^{\gamma\kappa}\big(\delta^\mu{}_\tau\delta^\nu{}_\beta-\frac{1}{4}g^{\mu\nu}g_{\rho\tau}\big)\big(\delta^\lambda{}_\kappa\delta^\sigma{}_\nu-\frac{1}{4}g^{\lambda\sigma}g_{\nu\kappa}\big)D_\rho D_\gamma=\\
&=\delta^\lambda{}_\alpha\delta^\sigma{}_\beta-\frac{1}{4}g_{\alpha\beta}g^{\lambda\sigma}-\frac{1}{\mu}\varepsilon_\alpha{}^{\rho\tau}\big(\delta^\lambda{}_\tau\delta^\sigma{}_\beta-\frac{1}{4}g^{\lambda\sigma}g_{\rho\tau}-\frac{1}{2}g_{\tau\beta}g^{\lambda\sigma}+\frac{3}{8}g_{\rho\tau}g^{\lambda\sigma}\big)D_\rho+\\
&\quad+\frac{1}{\mu}\varepsilon_\mu{}^{\gamma\kappa}\big(\delta^\mu{}_\alpha\delta^\sigma{}_\beta\delta^\lambda{}_\kappa-\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}g^{\mu\sigma}\delta^\lambda{}_\kappa-\frac{1}{4}g^{\lambda\sigma}g_{\beta\kappa}\delta^\mu{}_\alpha+\frac{1}{8}g_{\alpha\beta}g^{\lambda\sigma}\delta^\mu{}_\kappa\big)D_\gamma+\\
&\quad-\frac{1}{\mu^2}\varepsilon_\alpha{}^{\rho\tau}\varepsilon_\mu{}^{\gamma\kappa}\big(\delta^\mu{}_\tau\delta^\lambda{}_\kappa\delta^\sigma{}_\beta-\frac{1}{4}\delta^\lambda{}_\kappa g^{\mu\sigma}g_{\rho\tau}-\frac{1}{4}g^{\lambda\sigma}\delta^\mu{}_\tau g_{\beta\kappa}+\frac{1}{16}\delta^\mu{}_\kappa g_{\rho\tau}g^{\lambda\sigma}\big)D_\rho D_\gamma=\\
&=\delta^\lambda{}_\alpha\delta^\sigma{}_\beta-\frac{1}{4}g_{\alpha\beta}g^{\lambda\sigma}-\frac{1}{\mu}\varepsilon_\alpha{}^{\rho\lambda}\delta^\sigma{}_\beta D_\rho-\frac{1}{2\mu}\varepsilon^\rho{}_{\alpha\beta}g^{\lambda\sigma}D_\rho+\frac{1}{\mu}\varepsilon_\alpha{}^{\gamma\lambda}\delta^\sigma{}_\beta D_\gamma+\\
&\quad-\frac{1}{2\mu}\varepsilon^{\sigma\gamma\lambda}g_{\alpha\beta}D_\gamma+\frac{1}{4\mu}\varepsilon^\gamma{}_{\alpha\beta}g^{\lambda\sigma}D_\gamma-\frac{1}{\mu^2}\varepsilon_\alpha{}^{\rho\mu}\varepsilon_\mu{}^{\gamma\lambda}\delta^\sigma{}_\beta D_\rho D_\gamma+\frac{1}{4\mu^2}\varepsilon_\alpha{}^{\rho\mu}\varepsilon^\gamma{}_{\beta\mu}g^{\lambda\sigma}D_\rho D_\gamma.
\end{aligned}$$

Applicando questa espressione al tensore di Ricci e ricordando che la costante cosmologica è assunta nulla, perciò $R=0$, si ricava che

$$\begin{aligned}
&\mu^2\mathcal{O}_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu}(-\mu)\mathcal{O}_{\mu\nu}{}^{\lambda\sigma}(\mu)R_{\lambda\sigma}=\\
&=\mu^2[R_{\alpha\beta}-\frac{1}{4}g_{\alpha\beta}R-\frac{1}{\mu}\varepsilon_\alpha{}^{\rho\lambda}D_\rho R_{\lambda\beta}+\frac{1}{2\mu}\varepsilon^\rho{}_{\beta\alpha}D_\rho R+\frac{1}{\mu}\varepsilon_\alpha{}^{\gamma\lambda}D_\gamma R_{\lambda\beta}-\frac{1}{2\mu}\varepsilon^{\sigma\gamma\lambda}g_{\alpha\beta}D_\gamma R_{\lambda\sigma}+\\
&\quad-\frac{1}{4\mu}\varepsilon^\gamma{}_{\beta\alpha}D_\gamma R-\frac{1}{\mu^2}\varepsilon_\alpha{}^{\rho\mu}\varepsilon_\mu{}^{\gamma\lambda}D_\rho D_\gamma R_{\lambda\beta}+\frac{1}{4\mu^2}\varepsilon_\alpha{}^{\rho\mu}\varepsilon^\gamma{}_{\beta\mu}D_\rho D_\gamma R]=\\
&=\mu^2R_{\alpha\beta}+\delta^\gamma{}_\alpha g^{\lambda\rho}D_\rho D_\gamma R_{\lambda\beta}-D_\rho D^\rho R_{\alpha\beta}=\\
&=\mu^2R_{\alpha\beta}-D_\rho D^\rho R_{\alpha\beta}+D_\lambda D_\alpha R^\lambda{}_\beta.
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Ricordando l'equazione (2.20), riadattata al caso di un tensore qualsiasi, si ha che

$$\begin{aligned}
[D_\lambda,D_\alpha]R^\lambda{}_\beta &= R^\lambda{}_{\sigma\lambda\alpha}R^\sigma{}_\beta-R^\lambda{}_\sigma R^\sigma{}_{\beta\lambda\alpha}=\\
&=R^{\lambda\sigma}R_{\sigma\beta\alpha\lambda}+R^\sigma{}_\beta R_{\sigma\alpha}=\\
&=R^{\lambda\sigma}(g_{\sigma\alpha}R_{\beta\lambda}-g_{\alpha\beta}R_{\lambda\sigma}-g_{\sigma\lambda}R_{\alpha\beta}+g_{\beta\lambda}R_{\alpha\sigma})+R_{\alpha\sigma}R^\sigma{}_\beta=\\
&=3R_{\alpha\sigma}R^\sigma{}_\beta-g_{\alpha\beta}R^{\lambda\sigma}R_{\lambda\sigma},
\end{aligned}$$

dove si sono usate la (4.3) e la condizione $R\equiv0$. D'altro canto, per l'ultima delle equazioni del moto (4.20),

$$D_\alpha D_\lambda R^\lambda{}_\beta=0.$$

Si ha perciò che

$$D_\lambda D_\alpha R^\lambda{}_\beta = [D_\lambda, D_\alpha]R^\lambda{}_\beta + D_\alpha D_\lambda R^\lambda{}_\beta = 3R_{\alpha\sigma}R^\sigma{}_\beta - g_{\alpha\beta}R^{\lambda\sigma}R_{\lambda\sigma}$$

e infine, dall'equazione (4.23), discende che

$$(D_\rho D^\rho - \mu^2)R_{\alpha\beta} = 3R_{\alpha\sigma}R^\sigma{}_\beta - g_{\alpha\beta}R^{\lambda\sigma}R_{\lambda\sigma}. \tag{4.25}$$

Il significato fisico di quest'ultima relazione e delle equazioni del moto (4.20) è chiaro nell'ambito della Relatività Generale nel limite di campi deboli, presentata nella successiva Sottosezione e che si considera nel seguito. Intanto si osserva che il membro di sinistra della (4.25) è l'operatore che appare nell'equazione di Klein-Gordon per un campo massivo.

4.3.2 Relatività Generale linearizzata in d dimensioni

Si chiama *Relatività Generale linearizzata* la teoria di gravità di Einstein adattata al caso di campi gravitazionali deboli. Nel caso in cui il vuoto corrisponda allo spaziotempo piatto, tale assunzione porta a scrivere la metrica come

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \tag{4.26}$$

con $h_{\mu\nu} << 1$ piccola perturbazione. La Relatività Generale linearizzata può essere dunque considerata come la teoria del campo $h_{\mu\nu}$ che si propaga su un fondo piatto. Le sue equazioni del moto si ottengono adattando al caso specifico le equazioni di Einstein.

La (1.13) fornisce la nuova espressione per la connessione affine al primo ordine in h:

$$\begin{aligned}\Gamma^\rho{}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\big(\eta^{\rho\alpha} + h^{\rho\alpha}\big)\big(\partial_\mu h_{\nu\alpha} + \partial_\nu h_{\alpha\mu} - \partial_\alpha h_{\mu\nu}\big) \approx \\ &\approx \frac{1}{2}\eta^{\rho\alpha}\big(\partial_\mu h_{\nu\alpha} + \partial_\nu h_{\alpha\mu} - \partial_\alpha h_{\mu\nu}\big).\end{aligned}$$

Di conseguenza, calcolato sulla base della definizione (1.20), il tensore di Riemann al primo ordine in $h_{\mu\nu}$, è

$$\begin{aligned}R^L_{\rho\mu\sigma\nu} &= \frac{1}{2}\big(\partial_\sigma\partial_\mu h_{\rho\nu} + \partial_\nu\partial_\sigma h_{\rho\mu} - \partial_\sigma\partial_\rho h_{\mu\nu} - \partial_\nu\partial_\mu h_{\rho\sigma} - \partial_\nu\partial_\sigma h_{\rho\mu} + \partial_\nu\partial_\rho h_{\mu\sigma}\big) = \\ &= \frac{1}{2}\big(\partial_\sigma\partial_\mu h_{\rho\nu} + \partial_\nu\partial_\rho h_{\mu\sigma} - \partial_\sigma\partial_\rho h_{\mu\nu} - \partial_\nu\partial_\mu h_{\rho\sigma}\big) = \partial_\sigma\partial_{[\mu}h_{\rho]\nu} + \partial_\nu\partial_{[\mu}h_{\rho]\nu},\end{aligned} \tag{4.27}$$

cosicché il tensore di Ricci e la curvatura scalare sono rispettivamente

$$R^L_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\big(\partial_\alpha\partial_\mu h^\alpha{}_\nu + \partial_\nu\partial_\alpha h^\alpha{}_\mu - \Box h_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial_\nu h\big), \tag{4.28}$$

$$R^L = \partial_\mu\partial_\nu h^{\mu\nu} - \Box h. \tag{4.29}$$

Il tensore di Einstein linearizzato è perciò

$$\begin{aligned}G^L_{\mu\nu} &= R^L_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}R^L = \\ &= \frac{1}{2}\big(\partial_\sigma\partial_\nu h^\sigma{}_\mu + \partial_\sigma\partial_\mu h^\sigma{}_\nu - \partial_\mu\partial_\nu h - \Box h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\partial_\alpha\partial_\beta h^{\alpha\beta} + \eta_{\mu\nu}\Box h\big).\end{aligned} \tag{4.30}$$

La dinamica del campo $h_{\mu\nu}$ gode della libertà di gauge per variazioni

$$\delta h_{\mu\nu} = \partial_\mu\xi_\nu + \partial_\nu\xi_\mu, \tag{4.31}$$

con $\xi_\mu(x)$ funzione arbitraria. Si tratta del limite nel caso linearizzato, della variazione della metrica per un diffeomorfismo infinitesimo. Si effettui, infatti, una trasformazione infinitesima di coordinate $x^\mu \to x^\mu + \xi^\mu$, con ξ^μ dello stesso ordine della perturbazione h. La metrica varia secondo la (1.38) e la condizione

$$\delta g^{\mu\nu} = \frac{\partial\xi^\mu}{\partial x^\rho}g^{\rho\nu} + \frac{\partial\xi^\nu}{\partial x^\sigma}g^{\mu\sigma} - \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}\xi^\lambda.$$

Fermandosi al primo ordine si ottiene che

$$\begin{aligned}\delta h_{\mu\nu} &= \delta g_{\mu\nu} = g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}\delta g^{\rho\sigma} = \\ &= g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}\big(\frac{\partial\xi^\rho}{\partial x^\lambda}g^{\lambda\sigma} + \frac{\partial\xi^\sigma}{\partial x^\lambda}g^{\lambda\rho} - \frac{\partial g^{\rho\sigma}}{\partial x^\lambda}\xi^\lambda\big) = \\ &= \eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma}\big(\frac{\partial\xi^\rho}{\partial x^\lambda}\eta^{\lambda\sigma} + \frac{\partial\xi^\sigma}{\partial x^\lambda}\eta^{\lambda\rho}\big) = \\ &= \partial_\nu\xi_\mu + \partial_\mu\xi_\nu.\end{aligned}$$

Per verificare come la trasformazione $h_{\mu\nu} \to h_{\mu\nu} + \delta h_{\mu\nu}$ non ha influenza sulla dinamica, basta osservare che lascia invariato il tensore di curvatura di Riemann (4.27):

$$\begin{aligned}\delta R^L_{\rho\mu\sigma\nu} &= \frac{1}{2}\big(\partial_\sigma\partial_\mu\delta h_{\rho\nu} + \partial_\nu\partial_\rho\delta h_{\mu\sigma} - \partial_\sigma\partial_\rho\delta h_{\mu\nu} - \partial_\nu\partial_\mu\delta h_{\rho\sigma}\big) = \\ &= \frac{1}{2}\big[\partial_\sigma\partial_\mu(\partial_\rho\xi_\nu + \partial_\nu\xi_\rho) + \partial_\nu\partial_\rho(\partial_\mu\xi_\sigma + \partial_\sigma\xi_\mu) - \partial_\sigma\partial_\rho(\partial_\mu\xi_\nu + \partial_\nu\xi_\mu) - \partial_\nu\partial_\mu(\partial_\rho\xi_\sigma + \partial_\sigma\xi_\rho)\big] = 0.\end{aligned}$$

Il tensore di curvatura linearizzato $R^L_{\rho\mu\sigma\nu}$ gode dunque di due proprietà fondamentali del tensore di Maxwell $F_{\mu\nu}$ dell'Elettrodinamica: può essere scritto come la parte antisimmetrica di un tensore ed è invariante di gauge.

È sempre possibile scegliere una gauge per cui

$$\partial^\nu\tilde{h}_{\mu\nu} = 0, \tag{4.32}$$

con

$$\tilde{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h.$$

Infatti, sia $h_{\mu\nu}$ una piccola perturbazione qualsiasi. Si cerca una funzione $\xi_\mu(x)$, tale che $h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \delta h_{\mu\nu}$ rispetti la condizione di gauge (4.32)

$$\partial^\nu\big(h'_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h'\big) = 0,$$

ovvero

$$\begin{aligned}&\partial^\nu\big(h_{\mu\nu} + \partial_\nu\xi_\mu + \partial_\mu\xi_\nu - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h - \eta_{\mu\nu}\partial_\rho\xi^\rho\big) = \\ &= \partial^\nu h_{\mu\nu} + \Box\xi_\mu + \partial_\mu\partial_\nu\xi^\nu - \frac{1}{2}\partial_\mu h - \partial_\mu\partial_\rho\xi^\rho = 0.\end{aligned}$$

Questa è equivalente all'*equazione di d'Alembert non omogenea*

$$\Box\xi_\mu = -\partial^\nu h_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu h,$$

che ha un insieme non vuoto di soluzioni. La condizione (4.32) è pertanto un buon vincolo di gauge-fixing e rappresenta l'equivalente gravitazionale della gauge di Lorenz elettromagnetica. Tuttavia, proprio come nel caso elettromagnetico, essa non determina univocamente il campo e lascia una *libertà di gauge residua*. Sia infatti $h_{\mu\nu}$ un campo che soddisfi il vincolo di gauge e $\xi_\mu(x)$ un parametro di gauge tale che anche per $h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \partial_\mu\xi_\nu + \partial_\nu\xi_\mu$ si abbia

$$\partial^\nu(h'_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h') = 0.$$

Si ottiene che

$$\begin{aligned}0 &= \partial^\nu(h_{\mu\nu} + \partial_\mu\xi_\nu + \partial_\nu\xi_\mu - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h - \eta_{\mu\nu}\partial_\rho\xi^\rho) = \\ &= \partial_\mu\partial^\nu\xi_\nu + \Box\xi_\mu - \eta_{\mu\nu}\partial^\nu\partial_\rho\xi^\rho,\end{aligned}$$

da cui si ricava la condizione

$$\Box\xi_\mu = 0 \tag{4.33}$$

a cui devono essere sottoposte le trasformazioni di gauge residue. Per il tensore $\tilde{h}_{\mu\nu}$ la condizione di gauge residua si scriverà come

$$\begin{aligned}\tilde{h}'_{\mu\nu} =& h'_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h' = \\ =& h_{\mu\nu} + \partial_\mu\xi_\nu + \partial_\nu\xi^\mu - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}(h + 2\partial_\rho\xi^\rho) = \\ =& \tilde{h}_{\mu\nu} + \partial_\mu\xi_\nu + \partial_\nu\xi_\mu - \eta_{\mu\nu}\partial_\rho\xi^\rho.\end{aligned}$$

Con queste condizioni di gauge, le equazioni di Einstein linearizzate, nel vuoto, possono scriversi come

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\partial_\mu\partial_\nu h - \frac{1}{2}\partial_\mu\partial_\nu h + \partial_\mu\partial_\nu h + \Box h_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta h - \eta_{\mu\nu}\Box h = \\ = \Box h_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\Box h - \eta_{\mu\nu}\Box h = \\ = \Box(h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h) = \Box\tilde{h}_{\mu\nu} = 0,\end{aligned} \tag{4.34}$$

che è l'*equazione di Klein-Gordon* per un campo senza massa, di spin 2 in dimensione $d \geq 4$, chiamato *gravitone.*

4.3.3 Onde gravitazionali in 3 dimensioni

Si è già osservato che in 3 dimensioni, la teoria della Relatività Generale nega la possibilità di propagazione di onde gravitazionali. Una conferma di ciò viene dal fatto che sono banali le soluzioni dell'equazione di Klein - Gordon (4.34), con le condizioni di gauge aggiuntive:

$$\Box\tilde{h}^{\mu\nu} = 0 \tag{4.35}$$

$$\partial_\mu\tilde{h}^{\mu\nu} = 0 \tag{4.36}$$

$$\tilde{h}^{\mu\nu} \approx \tilde{h}^{\mu\nu} + \partial^\mu\xi^\nu + \partial^\nu\xi^\mu - \eta^{\mu\nu}\partial_\rho\xi^\rho, \quad \Box\xi^\mu = 0. \tag{4.37}$$

In funzione delle loro trasformate di Fourier, $\tilde{h}^{\mu\nu}$ e ξ^μ si scrivono come

$$\tilde{h}^{\mu\nu}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int d^3p\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}p_\lambda x^\lambda}\tilde{h}^{\mu\nu}(p), \qquad \xi^\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{i}}\int d^3p\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}p_\lambda x^\lambda}\xi^\mu(p),$$

dove nella seconda espressione si è aggiunta al denominatore una ininfluente unità immaginaria rispetto alla definizione standard, per rendere agevoli i calcoli. La condizione di realtà di campo e diffeomorfismo implica che

$$\tilde{h}^{\mu\nu}(-p) = (\tilde{h}^{\mu\nu})^*(p), \qquad \xi^\mu(-p) = -(\xi^\mu)^*(p),$$

dove l'apice * indica l'operazione di coniugazione complessa. Le soluzioni per le due equazioni di d'Alembert omogenee sono una sovrapposizione delle cosiddette *onde elementari* date da

$$\tilde{h}^{\mu\nu}(x) = v^{\mu\nu}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_\rho x^\rho} + c.c., \qquad \xi^\mu(x) = \lambda^\mu\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_\rho x^\rho} + c.c., \tag{4.38}$$

su cui concentriamo l'attenzione. La forma simmetrica $v^{\mu\nu}$ e λ^μ sono i cosiddetti *tensori di polarizzazione* che seguono le regole di trasformazioni tensoriali sotto diffeomorfismi. Da (4.35) discende che

$$p^2 = p^\mu p_\mu = 0,$$

da cui, scegliendo x^1 come asse di propagazione spaziale dell'onda, $p^0 = p^1 = k$, dunque

$$p^\mu = (k, k, 0). \tag{4.39}$$

Da (4.36) si ottiene la condizione di trasversalità

$$p_\mu \tilde{h}^{\mu\nu} = 0,$$

che insieme a (4.39) implica che

$$\tilde{h}^{0\nu} = \tilde{h}^{1\nu},$$

dunque

$$v^{0\nu} = v^{1\nu}.$$

Ricordando la sua simmetria, il tensore di polarizzazione $v^{\mu\nu}$ può così essere scritto come:

$$v^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} v^{00} & v^{00} & v^{02} \\ v^{00} & v^{00} & v^{02} \\ v^{02} & v^{02} & v^{22} \end{pmatrix}.$$

Nei termini delle onde elementari (4.38), la trasformazione di gauge residua si scrive come

$$v'^{\mu\nu} = v^{\mu\nu} + p^\mu \lambda^\nu + p^\nu \lambda^\mu - \eta^{\mu\nu} p_\rho \lambda^\rho, \tag{4.40}$$

da cui si ottiene che

$$\begin{aligned} v'^{00} &= v^{00} + k\lambda^0 + k\lambda^1, \\ v'^{02} &= v^{02} + k\lambda^2, \\ v'^{22} &= v^{22} + k\lambda^0 - k\lambda^1. \end{aligned}$$

Dato un qualsiasi tensore di polarizzazione, dunque, basterà imporre la trasformazione di gauge residua pari a

$$\lambda^\mu = (-\frac{v^{00} + v^{22}}{2k}, -\frac{v^{00} - v^{22}}{2k}, -\frac{v^{02}}{k}),$$

perché si annullino tutte le componenti del tensore di polarizzazione per il campo $\tilde{h}$. Questo implica automaticamente che

$$h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} h \equiv 0.$$

Prendendo la traccia di questa equazione si ha che $h = 0$ e dunque

$$h_{\mu\nu} \equiv 0, \tag{4.41}$$

che mostra come sulla base della sola teoria di Einstein, in 3 dimensioni non può aversi la propagazione di un campo debole e dunque non possono esistere onde gravitazionali.

Se però, alla teoria di Einstein si aggiunge il termine di Chern-Simons e si studia l'equazione (4.25) nel caso di campo debole, possono prevedersi delle onde gravitazionali massive. Nel limite di gravità linearizzata, infatti, il membro di destra di questa equazione si annulla e risulta che

$$(D_\rho D^\rho - \mu^2) {R_{\mu\nu}}^L = 0. \tag{4.42}$$

Inoltre, le derivate covarianti linearizzate si riducono alla derivata parziale, così la precedente espressione diventa

$$(\Box - \mu^2) {R_{\mu\nu}}^L = 0, \tag{4.43}$$

che è l'equazione di Klein-Gordon per il tensore di Ricci linearizzato, in 3 dimensioni. Il parametro μ è proprio quello comparso con l'azione di Chern-Simons: il campo gravitazionale in 2+1 dimensioni assume dunque massa a riposo μ in virtù del termine topologico e per questo si parla di *Gravità topologicamente massiva*. Le onde gravitazionali così previste non potranno propagarsi alla velocità

della luce.
La versione linearizzata per le equazioni del moto (4.20), è

$$\begin{cases} \varepsilon_\mu{}^{\rho\sigma}\partial_\rho R_{\sigma\nu}{}^L + \mu R_{\mu\nu}{}^L = 0 \\ R^L = 0 \\ \partial^\mu R^L_{\mu\nu} = 0, \end{cases} \tag{4.44}$$

la prima delle quali è una delle due fattorizzazioni dell'equazione di Klein-Gordon (vedi l'equazione (4.23)), mentre l'ultima è la *condizione di trasversalità*: nonostante la sua analogia con la condizione di gauge di Lorenz $\partial_\mu A^\mu = 0$, essa non è una condizione di gauge-fixing, dato che come già visto, $R_{\mu\nu}{}^L$ è gauge-invariante.

Si analizza il numero di gradi di libertà del tensore di Ricci linearizzato in 3 dimensioni, così da verificare l'esistenza delle onde gravitazionali nelle ipotesi della TMG. $R^L_{\mu\nu}$ è simmetrico, perciò le componenti libere da studiare sono 6. La condizione di traccia nulla e quella di trasversalità costituiscono rispettivamente 1 e 3 vincoli, lasciando dunque due soli gradi di libertà. In realtà, questi sono collegati tra loro dalla prima delle equazioni (4.44), così ci si aspetta che il grado di libertà sia solo uno. Per determinarlo, si scrive il tensore di Ricci in funzione della sua trasformata di Fourier come

$$R_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3p\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}p_\rho x^\rho} \hat{R}_{\mu\nu}(p),$$

dove si sono omessi gli apici "L" relativi alla linearizzazione e così si farà nel seguito della Sottosezione. La condizione di realtà sul tensore di Ricci, impone che

$$\hat{R}_{\mu\nu}(p)^* = \hat{R}_{\mu\nu}(-p).$$

Dall'equazione (4.43), si ricava che

$$(-p_\rho p^\rho - \mu^2)\hat{R}_{\mu\nu}(p) = 0.$$

Ipotizzando la trasformata di Fourier non identicamente nulla (consistentemente con l'ipotesi che esistano onde gravitazionali non banali), dovrà valere che

$$-(p^0)^2 + (p^i)^2 = -\mu^2.$$

Ci si può perciò mettere nel sistema di riferimento di quiete istantanea del gravitone, in cui cioè il campo è costante: si torna nel sistema di riferimento generico del laboratorio attraverso un boost inverso di parametro $\beta = \frac{|\vec{p}|}{p^0} < 1$. In questo nuovo sistema di riferimento,

$$p^\mu = (\mu, \vec{0}). \tag{4.45}$$

Dalla condizione di trasversalità, discende che

$$\mathrm{i}p_\mu \hat{R}^{\mu\nu} = \mathrm{i}\mu \hat{R}^{0\nu} = 0,$$

dunque

$$\hat{R}^{0\nu} = \hat{R}^{\nu 0} = 0. \tag{4.46}$$

Per la condizione di traccia nulla,

$$-\hat{R}^{00} + \delta_{ij}\hat{R}^{ij} = 0,$$

perciò, poiché per la (4.46) $\hat{R}^{00} = 0$,

$$\delta_{ij}\hat{R}^{ij} = 0. \tag{4.47}$$

Sembrerebbero così rimaste due componenti indipendenti, non nulle, per il tensore $\hat{R}^{\mu\nu}$, contenute nella $\hat{R}^{ij}$. Esse tuttavia, costituiscono solo un effettivo grado di libertà. La prima delle equazioni (4.44), infatti, si scriverà in trasformata di Fourier come

$$\hat{R}_{\mu\nu}(p) + \frac{\mathrm{i}}{\mu}\varepsilon_\mu{}^{\rho\sigma} p_\rho \hat{R}_{\sigma\nu}(p) = 0. \tag{4.48}$$

Poiché come si osserva in (4.45), l'unica componente non nulla di p^μ nel sistema di quiete istantanea è la prima, si avrà che

$$\hat{R}^\mu{}_\nu(p) = \mathrm{i}\varepsilon^{0\mu\sigma}\hat{R}_{\sigma\nu}.$$

Imponendo l'indice $\mu = 0$ si ottiene nuovamente la (4.46). Se $\mu = i$ con $i = 1, 2$, definendo $\varepsilon^{ij} \equiv \varepsilon^{0ij}$ si ottiene

$$\hat{R}^i{}_0 = \mathrm{i}\varepsilon^{ik}\hat{R}_{k0} = 0$$

sempre per via della (4.46). Rimane perciò, solo il caso in cui $\mu = i$, $\nu = j$ con $i, j = 1, 2$, per cui l'equazione del moto (4.48) si scrive come

$$\hat{R}^i{}_j = \mathrm{i}\varepsilon^{ik}\hat{R}_{kj}.$$

Da questa discendono le equazioni

$$\begin{aligned}
\hat{R}^1{}_1(p) &= \mathrm{i}\varepsilon^{12}\hat{R}_{21}(p) = \mathrm{i}\hat{R}_{21}(p), & \hat{R}^2{}_2(p) &= \mathrm{i}\varepsilon^{21}\hat{R}_{12}(p) = -\,\mathrm{i}\hat{R}_{12}(p),\\
\hat{R}^1{}_2(p) &= \mathrm{i}\varepsilon^{12}\hat{R}_{22}(p) = \mathrm{i}\hat{R}_{22}(p), & \hat{R}^2{}_1(p) &= \mathrm{i}\varepsilon^{21}\hat{R}_{11}(p) = -\,\mathrm{i}\hat{R}_{11}(p),
\end{aligned}$$

delle quali solo due sono indipendenti. Si possono considerare dunque solo quelle della riga superiore. Per via della simmetria del tensore di Ricci, esse sono consistenti con la (4.47). Inoltre, mostrano come sia sufficiente un solo grado di libertà, ad esempio $\hat{R}_{21}$, per esprimere le componenti non nulle di $\hat{R}$: le onde gravitazionali della TMG possono essere descritte come un campo massivo a un unico grado di libertà che si propaga su uno spaziotempo piatto.

L'elicità associata a queste onde sarà +2 o -2. Infatti, sia

$$\Lambda^\mu{}_\nu(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

la matrice di rotazione di angolo θ intorno al piano individuato dalle componenti spaziali. Il tensore di polarizzazione trasformerà secondo la regola

$$\hat{R}'^{\mu\nu}(p') = \Lambda^\mu{}_\rho(\theta)\Lambda^\nu{}_\sigma(\theta)\hat{R}^{\rho\sigma}(p).$$

È sufficiente adesso calcolare come trasformano le componenti $\hat{R}_{ij} = \hat{R}^{ij}$ (le altre sono tutte nulle). Ad esempio, omettendo le variabili p e p',

$$\begin{aligned}
\hat{R}'_{11} &= \cos(2\theta)\hat{R}_{11} + \sin(2\theta)\hat{R}_{12} = \\
&= [\cos(2\theta) - \mathrm{i}\sin(2\theta)]\hat{R}_{11} = \\
&= \mathrm{e}^{-2\,\mathrm{i}\theta}\hat{R}_{11}.
\end{aligned}$$

Si trova quindi che

$$\hat{R}'_{ij} = \mathrm{e}^{-2\,\mathrm{i}\theta}\hat{R}_{ij} \quad \forall\ i, j.$$

Nello specifico caso in esame, l'elicità è dunque -2. Un'onda con elicità +2 risolve invece la seconda fattorizzazione dell'equazione di Klein-Gordon (4.23), che è equazione del moto per l'azione di Chern-Simons con il segno opposto per il parametro μ.

Capitolo 5

Buco nero in 2+1 dimensioni

Particolari soluzioni delle equazioni di campo della Relatività Generale in 4 dimensioni corrispondono ad oggetti fisici chiamati *buchi neri.* Queste sono tra le metriche più studiate, poiché permettono di comprendere la struttura di tali oggetti cosmologici che popolano l'Universo, gli effetti quantistici dei campi di cui sono sorgenti e la produzione di onde gravitazionali: come confermato dai recenti esperimenti LIGO e Virgo, infatti, la fusione di due buchi neri di masse poche decine di volte più grandi di quella del Sole genera onde di questo tipo. È stato mostrato in [3] e [4], che anche la gravità in 3 dimensioni con costante cosmologica negativa presenta una soluzione di tipo analogo, detta "buco nero di BTZ". Essa infatti, prevede un orizzonte degli eventi e un orizzonte interno nel caso rotante, compare come lo stato finale del collasso gravitazionale della materia e le sue proprietà termodinamiche sono molto simili a quelle dei buchi neri in 4 dimensioni (Schwarzschild o Kerr). Tuttavia, a differenza di questi ultimi, il buco nero di BTZ è asintoticamente Anti-de Sitter anziché Minkowski e non ha una singolarità di curvatura nell'origine.

La metrica di Schwarzschild è la più semplice di siffatte soluzioni della gravità in 3+1 dimensioni; essa viene qui presentata per mettere in luce le caratteristiche fondamentali di un buco nero. Della soluzione di BTZ, trattata successivamente, ci si concentra sulla struttura geometrica.

5.1 Metrica di Schwarzschild

Si è interessati a conoscere la metrica dello spaziotempo al di fuori di una sorgente di campo gravitazionale, isolata, statica e a simmetria sferica. Bisogna dunque risolvere le equazioni di Einstein nel vuoto. Per il *teorema di Birkhoff*, la soluzione $g_{\mu\nu}$ cercata, chiamata "esterna" dovrà essere *statica* (cioè esiste un sistema di riferimento in cui $g_{i0} = 0$ e tutte le componenti non nulle della metrica sono indipendenti dal tempo) e *asintoticamente piatta* (ovvero indistinguibile dalla metrica di Minkowski a grandi distanze dalle sorgente). L'unica soluzione che soddisfa queste richieste è data dalla *metrica di Schwarzschild*, che in coordinate (t, r, θ, Φ) è

$$ds^2 = -\Big(1 - \frac{2GM}{r}\Big)\mathrm{d}t^2 + \Big(1 - \frac{2GM}{r}\Big)^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\ \mathrm{d}\Phi^2), \tag{5.1}$$

dove il parametro M può essere interpretato come la massa Newtoniana della sorgente che si misurerebbe studiando le orbite di particelle di prova a grandi distanze da essa.

Si può osservare come in queste coordinate, le componenti della metrica presentino due singolarità: $r = 0$ e $r = 2GM$, detto *raggio di Schwarzschild.* Questi valori non rappresentano necessariamente punti non regolari nello spaziotempo considerato, poiché le componenti della metrica dipendono dalle coordinate prescelte. Quantità indipendenti dal sistema di riferimento sono gli scalari ottenuti dal tensore di curvatura: $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$, $R^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$, $R^{\mu\nu\rho\sigma}R_{\mu\nu\rho\sigma}$, ... Condizione sufficiente (ma non necessaria) perché un punto sia considerato una singolarità è che in esso, almeno uno di questi scalari sia infinito. Nel caso della metrica di Schwarzschild, si può calcolare direttamente a partire dai simboli di Christoffel lo scalare

$$R^{\mu\nu\rho\sigma}R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{48G^2M^2}{r^6},$$

che diventa infinito per $r = 0$: questa è dunque effettivamente una singolarità.

Per $r = 2GM$, nessuno scalare diverge. Si mostra però, che un osservatore esterno solidale con le coordinate $\{\mathrm{t},\ \mathrm{r},\ \theta,\ \Phi\}$, non vedrà mai una particella raggiungere questa distanza dall'esterno. Se si considera infatti, una curva radiale di tipo luce, con θ e Φ costanti,

$$ds^2 = 0 = -\Big(1 - \frac{2GM}{r}\Big)\mathrm{d}t^2 + \Big(1 - \frac{2GM}{r}\Big)^{-1}\mathrm{d}r^2,$$

da cui si ricava che

$$\frac{dt}{dr} = \pm\Big(1 - \frac{2GM}{r}\Big)^{-1}.$$

La pendenza dei coni-luce nel piano t-r è dunque, ± 1 a grandi distanze, cresce al diminuire di r e diverge in prossimità del raggio di Schwarzschild. Qui il cono-luce degenera in una retta verticale e non possono transitare curve che rispettino la causalità (di tipo tempo o luce): una particella che si muove verso l'interno da punti con $r > 2GM$, non potrà mai raggiungere tale distanza (né tanto meno attraversarla), per un osservatore esterno. Tuttavia, in altre coordinate, non si osserva un siffatto comportamento asintotico e $r = 2GM$ è punto regolare per la metrica di Schwarzschild. Un esempio è costituito dalle *coordinate di Eddington-Finkelstein*, ottenute sostituendo t con $v = t + r^*$ o $u = t - r^*$, dove

$$r^* = +r + 2GM \ln\Big(\frac{r}{2GM} - 1\Big).$$

Scegliendo la coordinata v, la metrica diventa

$$ds^2 = -\Big(1 - \frac{2GM}{r}\Big)\mathrm{d}v^2 + \big(\mathrm{d}v\mathrm{d}r + \mathrm{d}r\mathrm{d}v\big) + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\ \mathrm{d}\Phi^2). \tag{5.2}$$

Anche se per $r = 2GM$, $g_{vv} = 0$, il determinante della metrica non si annulla, confermando che si tratta di un punto regolare. Le geodetiche di tipo luce radiali in caduta (r decrescente) sono caratterizzate da $v = \text{const}$, mentre quelle in uscita (r crescente) da $u = \text{const}$. Ciò implica che

$$\frac{dv}{dr} = \begin{cases} 0 & \text{(r decrescenti)},\\ 2\Big(1 - \frac{2GM}{r}\Big)^{-1} & \text{(r crescenti)}. \end{cases} \tag{5.3}$$

$r = 2GM$ rappresenta una superficie localmente regolare, sulla quale i coni-luce non sono degeneri. Tuttavia, per $r < 2GM$ le curve di tipo luce o tempo dirette nel futuro sono orientate nella direzione di r decrescente. La superficie $r = 2GM$ viene detta *orizzonte degli eventi*: una particella in caduta che l'abbia oltrepassata non potrà più (classicamente) attraversarla in verso opposto. La regione dello spaziotempo separata dall'infinito da un orizzonte degli eventi è chiamata *buco nero*, nel senso che un osservatore esterno non può, classicamente, ricevere alcun segnale proveniente da essa.

Si osserva dunque che le coordinate in cui è espressa la metrica di Schwarzschild in (5.1) non sono adatte a rappresentare tutto lo spazio, così come le coordinate di Eddington-Finkelstein perdono di significato lontano dall'orizzonte. Un sistema di riferimento per la soluzione di Schwarzschild che possa essere utile per comprendere la struttura causale globale, è invece, costituito dalle *coordinate di Kruskal* (T, R, θ, Φ). Le coordinate nuove rispetto a quelle usate in (5.1), sono T e R: esse sono indipendenti da θ e Φ e soddisfano le condizioni

$$\begin{aligned} T^2 - R^2 &= \Big(1 - \frac{r}{2GM}\Big)\,\mathrm{e}^{r/2GM},\\ \frac{T}{R} &= \tanh\Big(\frac{t}{4\pi GM}\Big). \end{aligned} \tag{5.4}$$

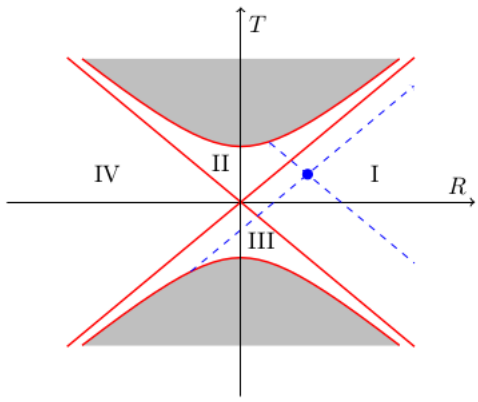

Figura 5.1: Diagramma di Kruskal

La metrica di Schwarzschild si scrive come

$$ds^2 = \frac{32G^3M^3}{r}\,\mathrm{e}^{-r/2GM}(\mathrm{d}T^2 - \mathrm{d}R^2) + r^2((\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\Phi^2)). \tag{5.5}$$

Le curve radiali di tipo luce sono allora descritte dall'equazione

$$T = \pm R + \text{const},$$

come sullo spaziotempo di Minkowski. Una qualsiasi superficie con r costante corrisponde all'iperbole

$$T^2 - R^2 = \text{const},$$

così l'orizzonte degli eventi a $r = 2GM$ avrà equazione

$$T = \pm R.$$

La seconda delle relazioni (5.4) permette di dedurre che le curve a t costante sono delle rette passanti per l'origine. Mostra anche che $T = R$ è la curva $t = +\infty$ mentre $T = -R$ si riferisce a $t = -\infty$. Perché le coordinate T e R ricoprano tutto lo spaziotempo a eccezione della singolarità per $r = 0$, dovranno soddisfare le relazioni

$$-\infty \leq R \leq +\infty, \qquad T^2 < R^2 + 1.$$

Queste considerazioni permettono di tracciare sul piano T-R il cosiddetto *diagramma di Kruskal*, che mostra la struttura causale globale di una soluzione di buco nero. In esso ciascun punto rappresenta una 2-sfera. Una rappresentazione schematica è data nella Figura 5.1. I due rami di iperbole (corrispondenti alla singolarità $r = 0$) e le due bisettrici (corrispondenti al'orizzonte degli eventi per $r = 2GM$) suddividono il diagramma di Kruskal in 4 regioni. La regione I corrisponde a $r > 2GM$ e le coordinate originarie sono ivi ben definite. Geodetiche causali contenute nel cono-luce tratteggiato in figura portano da qui alla regione II nel futuro e alla regione III nel passato. II corrisponde al buco nero: un qualsiasi segnale che oltrepassi l'orizzonte $R = T$ termina sulla singolarità $r = 0$ (curve di tipo tempo o luce hanno r necessariamente decrescente) e non potrà più tornare nella regione I. III è l'inverso temporale di II e viene detta *buco bianco*: un qualsiasi segnale di tipo tempo o luce potrà raggiungerla da I (regione in cui si trova presumibilmente l'osservatore) solo se diretto nel passato di I o analogamente, un segnale dello stesso tipo che da III pretenda di passare in I sarà diretto nel passato di III. Un segnale, infine, potrà congiungere IV e I solo se superluminale. Per evitare di rappresentare anche regioni causalmente inaccessibili, III e IV sono in genere identificate topologicamente rispettivamente con II e I.

5.2 Buco nero di BTZ

Imponendo $G = \frac{1}{8}$ e $-l^{-2} = \Lambda < 0$, l'azione (4.4) della gravità di Einstein con termine cosmologico, in 3 dimensioni e nel vuoto, si riscrive come

$$I = \frac{1}{2\pi} \int \sqrt{-g}[R + 2l^{-2}]d^3x. \tag{5.6}$$

Come osservato per la prima volta in [3] e [4], le equazioni del moto di (5.6) sono risolte dalla metrica del cosiddetto *buco nero di BTZ* (dai nomi dei tre ideatori, Bañados, Teitelboim e Zanelli):

$$ds^2 = -N^2\mathrm{d}t^2 + N^{-2}\mathrm{d}r^2 + r^2(N^\Phi\mathrm{d}t + \mathrm{d}\Phi)^2, \tag{5.7}$$

dove

$$N^2(r) = -M + \frac{r^2}{l^2} + \frac{J^2}{4r^2},$$
$$N^\Phi(r) = -\frac{J}{2r^2}$$

e $-\infty < t < +\infty$, $0 < r < +\infty$ e $0 \leq \Phi < 2\pi$. M e J possono essere intese come la massa e il momento angolare del sistema. Le singolarità della metrica (5.7) sono date da $r = 0$ e dalle radici di $N(r)$, ovvero

$$r_\pm = l\Big[\frac{M}{2}\Big(1 \pm \sqrt{1 - (\frac{J}{Ml})^2}\Big)\Big]^{1/2}. \tag{5.8}$$

Perché queste radici esistano dovrà avvenire che

$$M > 0 \qquad |J| \leq Ml.$$

Per $J \neq 0$, cioè nel caso di buco nero rotante, r_+ e r_- costituiscono gli orizzonti interno ed esterno (per $J = 0$ l'orizzonte interno degenera nel punto di coordinate $r = 0$). Se inoltre, $|J| = Ml$, allora $r_+ = r_-$, ovvero i due orizzonti coincidono. A differenza di quanto avviene per la metrica di Schwarzschild, $r = 0$ non è una effettiva singolarità, poiché è punto non regolare solo per le coordinate scelte.

5.2.1 Buco nero come spazio quoziente di $\widetilde{AdS}_3$

Sulla base delle definizioni (3.7) e (3.8), lo spazio di Anti-de Sitter in 3 dimensioni AdS_3 è l'embedding in uno spazio piatto 4-dimensionale di metrica

$$ds^2 = -\mathrm{d}u^2 - \mathrm{d}v^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2, \tag{5.9}$$

tramite l'equazione

$$-v^2 - u^2 + x^2 + y^2 = -l^2. \tag{5.10}$$

Per costruzione, (5.9) è invariante per il gruppo $SO(2, 2)$. I vettori di Killing corrispondenti sono

$$J_{ab} = x_b\frac{\partial}{\partial x^a} - x_a\frac{\partial}{\partial x^b}, \tag{5.11}$$

con $x^a = (v, u, x, y)$. Ad esempio, $J_{23} = y\partial_x - x\partial_y = \partial_\theta$ genera le rotazioni nel piano x - y, mentre $J_{01} = v\partial_u - u\partial_v = \partial_\lambda$ genera gli shift temporali. Il più generale vettore di Killing di AdS_3 è dato da

$$\frac{1}{2}\omega^{ab}J_{ab},$$

con $\omega^{ab} = -\omega^{ba}$, ed è perciò identificato da un tensore antisimmetrico 4×4.
Un qualsiasi vettore di Killing ξ genera un sottogruppo a un parametro di $SO(2, 2)$, con trasformazioni di un punto P dello spazio nel punto P' dato da

$$P' = \mathrm{e}^{m\xi}P. \tag{5.12}$$

Imponendo il parametro m discreto, ad esempio $m = 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, si ottiene il *sottogruppo delle identificazioni*. Se si definisce la relazione di equivalenza

$$P' \sim P \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } P' = \mathrm{e}^{2\pi k\xi} P,$$

lo spazio quoziente ottenuto dal ricoprimento universale $\widetilde{AdS_3}$ di AdS (definito nella Sezione 3.4) identificando i punti equivalenti eredita una metrica ben definita, con costante di curvatura negativa, proprio perché (5.12) è un'isometria. Esso, dunque, sarà ancora soluzione delle equazioni di Einstein con termine cosmologico. Per ottenere il buco nero cercato, il generatore infinitesimo dell'identificazione dovrà essere

$$\xi = \frac{r_+}{l} J_{12} - \frac{r_-}{l} J_{03} - J_{13} + J_{23}, \tag{5.13}$$

con $r_\pm$ dato da (5.8) e J_{ab} da (5.11).
Con l'identificazione introdotta, una curva con estremi due punti distinti che si trovano sulla stessa orbita del sottogruppo delle identificazioni diventa chiusa. Perché il nuovo spaziotempo non violi la causalità, non dovranno esistere curve chiuse di tipo tempo o nulle. Perché ciò avvenga è sufficiente che il generatore dato da (5.13) sia di tipo spazio, cioè

$$\xi \cdot \xi > 0. \tag{5.14}$$

Bisognerà dunque individuare in $\widetilde{AdS_3}$ tutte le regioni in cui ξ soddisfa (5.14) e lì effettuare l'identificazione.

Si consideri il caso in cui ${r_+}^2 - {r_-}^2 > 0$. Con questa condizione, è possibile effettuare una trasformazione in $SO(2,2)$ che porti l'espressione (5.13) di ξ nella più semplice forma

$$\xi' = \frac{r_+}{l} J_{12} - \frac{r_-}{l} J_{03}. \tag{5.15}$$

La norma di ξ sarà dunque pari alla norma di ξ', data da

$$\xi' \cdot \xi' = \frac{{r_+}^2}{l^2}(u^2 - x^2) + \frac{{r_-}^2}{l^2}(v^2 - y^2) = \frac{{r_+}^2 - {r_-}^2}{l^2}(u^2 - x^2) + {r_-}^2, \tag{5.16}$$

dove nell'ultimo passaggio si è usata la condizione di embedding (5.10). Nella regione in cui vale la (5.14) dovrà dunque sussistere che

$$-\frac{{r_-}^2 l^2}{{r_+}^2 - {r_-}^2} < u^2 - x^2 < \infty. \tag{5.17}$$

Tale regione di $\widetilde{AdS_3}$ può essere ulteriormente suddivisa in un numero infinito di regioni di tre differenti tipi:

- *Regioni di tipo I o esterne:* regioni connesse con $u^2 - x^2 > l^2$ e y e u di segno definito. Per la (5.10) non possono aversi punti con $y = 0$. Per la (5.16), la norma del vettore di Killing è tale che ${r_+}^2 < \xi' \cdot \xi' < +\infty$.

- *Regioni di tipo II o intermedie:* regioni connesse con $0 < u^2 - x^2 < l^2$ e u e v di segno definito. La norma del vettore di Killing è tale che ${r_-}^2 < \xi' \cdot \xi' < {r_+}^2$.

- *Regioni di tipo III o interne:* regioni connesse con $-\frac{{r_-}^2 l^2}{{r_+}^2 - {r_-}^2} < u^2 - x^2 < 0$ e x e v di segno definito. Esistono solo per $r_- \neq 0$. Non possono aversi punti con $x = 0$ e il vettore di Killing soddisfa la condizione $0 < \xi' \cdot \xi' < {r_-}^2$.

Questi tre tipi di regioni sono separati da superficie di tipo luce, che costituiscono gli orizzonti. Le loro equazioni sono $u^2 - x^2 = 0$ o $v^2 - y^2 = l^2 - (u^2 - x^2) = 0$.

Su tre regioni contigue, ognuna di un tipo diverso, si possono costruire delle uniche coordinate (t, r, Φ), ma con differente parametrizzazione per ciascuna di esse. Per esempio, per la regione di tipo I, ovvero per $r_+ < r$,

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{A(r)} \cosh \tilde{\Phi}(t, \Phi), \\ x &= \sqrt{A(r)} \sinh \tilde{\Phi}(t, \Phi), \\ y &= \sqrt{B(r)} \cosh \tilde{t}(t, \Phi), \\ v &= \sqrt{B(r)} \sinh \tilde{t}(t, \Phi), \end{aligned} \tag{5.18}$$

dove

$$A(r) = l^2 \Big(\frac{r^2 - {r_-}^2}{{r_+}^2 - {r_-}^2} \Big), \qquad B(r) = l^2 \Big(\frac{r^2 - {r_+}^2}{{r_+}^2 - {r_-}^2} \Big), \qquad \tilde{t} = \frac{r_+ t}{l(l - r_- \Phi)}, \qquad \tilde{\Phi} = -\frac{r_- t}{l(l + r_+ \Phi)}.$$

In queste coordinate la metrica (5.9) ha un'espressione unica per tutte e tre le regioni, data da

$$ds^2 = -N^2 \mathrm{d}t^2 + N^{-2} \mathrm{d}r^2 + r^2 (N^\Phi \mathrm{d}t + \mathrm{d}\Phi)^2, \tag{5.19}$$

con $-\infty < t < +\infty$ e $-\infty < \Phi < +\infty$. Il vettore di Killing dato da (5.15), invece, diventa

$$\xi' = \frac{\partial}{\partial \Phi},$$

per cui è adesso sufficiente effettuare l'identificazione

$$\Phi \to \Phi + 2k\pi,$$

per ottenere la metrica di BTZ (5.7).

Per una comprensione approfondita delle teorie quantistiche per il campo gravitazionale, è oggi ritenuto fondamentale lo studio delle soluzioni di buco nero. Si è osservato come anche la gravità in 2+1 dimensioni con costante cosmologica negativa, ammetta soluzioni di questo tipo. Il loro vantaggio consiste in una struttura sufficientemente semplice da rimuovere molte difficoltà computazionali invece presenti nel caso 3+1-dimensionale. Ricorrere a questo modello semplificato di gravità, perciò, non limita le possibilità di studio, ma agevola l'elaborazione di predizioni altrimenti difficili da ottenere, sugli stessi oggetti che popolano lo spaziotempo 4-dimensionale.

Conclusioni

In questa tesi si sono presentati gli aspetti fondamentali della Relatività Generale in 3+1 dimensioni, dal Principio di Equivalenza agli oggetti geometrici necessari per una scrittura matematica. Si sono ricavate le equazioni di campo e la relativa azione. Si è poi espresso il tutto nel formalismo di Cartan, indispensabile per accoppiare la gravità ai campi spinoriali fermionici.

L'addizione di un termine cosmologico nell'azione e nelle equazioni dinamiche ha portato ad una prima estensione della teoria di gravità in 4 dimensioni, che tenesse conto dell'espansione accelerata dell'Universo. Sono state mostrate le principali caratteristiche dello spazio di de Sitter e di Anti-de Sitter, soluzioni delle equazioni di Einstein con costante cosmologica rispettivamente positiva e negativa.

Si è così passati allo studio della gravità in 2+1 dimensioni, mostrando come le soluzioni delle equazioni di Einstein nel vuoto siano banali. Si è presentata l'azione della Gravità Topologicamente Massiva, sommando all'azione di Hilbert-Einstein il termine cosmologico e quello di Chern-Simons. Si è verificato come nel caso di costante cosmologica nulla, ciò preveda la propagazione di un grado di libertà del campo massivo di elicità +2 o -2.

Infine, si sono descritte le caratteristiche principali della soluzione di buco nero di Schwarzschild in 4 dimensioni, mostrandone anche la struttura causale globale. Con le dovute differenze, anche in 2+1 dimensioni si ha la possibilità di studiare questi particolari oggetti cosmologici: la metrica di buco nero di BTZ, soddisfa infatti, le equazioni di Einstein in 3 dimensioni, con costante cosmologica negativa.

La Gravità Topologicamente Massiva con costante cosmologica non nulla, con le relative soluzioni di buco nero, può essere uno sviluppo di questo lavoro. Si ottengono poi, altre estensioni della Relatività Generale in 3 dimensioni, aggiungendo all'azione di Hilbert-Einstein termini di ordine superiore al secondo nelle derivate della metrica, differenti da quello di Chern-Simons. Esempi sono la *New Massive Gravity* (con le sue ulteriori estensioni), introdotta in [5], e la *Minimal Massive Gravity*, proposta in [6]. Si può inoltre, estendere la trattazione del buco nero di BTZ alla luce della Teoria Quantistica di Campo, che permette tra l'altro, di studiarne le proprietà termodinamiche. Notevole argomento di studio correlato è infine, la corrispondenza AdS/CFT nell'ambito della Teoria delle Stringhe e della Fisica della Materia Condensata.

Appendice A

Tensori per diffeomorfismi

I *tensori* sono gli oggetti matematici che permettono di fare uso diretto del Principio di General-Covarianza: una uguaglianza tra due espressioni tensoriali sarà infatti invariante in forma sotto un qualsiasi cambio di coordinate. I tensori sono definiti in base a come trasformano rispetto a una generico cambio di coordinate $x^\mu \to x'^\mu$:

- *scalari* Φ, che trasformano secondo la regola $\Phi'(x') = \Phi(x)$;
- *vettori controvarianti* $V^\mu(x)$, per cui $V'^\mu(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} V^\nu(x)$;
- *vettori covarianti* $V_\mu(x)$, per cui $V'_\mu(x') = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} V_\nu(x)$.

In generale, l'oggetto $T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q}(x)$ si definisce tensore p-controvariante e q-covariante o tensore di tipo (p, q) se con un generico diffeomorfismo $x^\mu \to x'^\mu$, trasforma secondo la regola

$$T'^{\mu'_1 \dots \mu'_p}_{\nu'_1 \dots \nu'_q}(x') = \frac{\partial x'^{\mu'_1}}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial x'^{\mu'_p}}{\partial x^{\mu_p}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x'^{\nu'_1}} \dots \frac{\partial x^{\nu_q}}{\partial x'^{\nu'_q}} T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q}(x). \tag{A.1}$$

È chiaro da questa definizione che uno scalare è un tensore di tipo $(0, 0)$, un vettore controvariante un tensore di tipo $(1, 0)$, mentre un vettore covariante è un tensore di tipo $(0, 1)$. Se tutti gli indici sono alti il tensore si dirà controvariante, se tutti gli indici sono bassi si dirà covariante, altrimenti si dice misto.
La metrica $g_{\mu\nu}$ è il più classico esempio di tensore covariante. Se nelle coordinate x^μ essa è infatti,

$$g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x^a}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^b}{\partial x^\nu} \eta_{ab},$$

nel sistema di coordinate x'^μ sarà data da

$$g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^a}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^b}{\partial x'^\nu} \eta_{ab} = \frac{\partial x^a}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^b}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \eta_{ab} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} g_{\rho\sigma}(x).$$

Se una equazione è scritta come uguaglianza tra due tensori dello stesso tipo, è allora general-covariante: entrambi i tensori infatti trasformano secondo l'equazione (A.1), dunque l'uguaglianza vale in un sistema di coordinate se e solo se vale in un qualsiasi altro.

L'insieme dei tensori di tipo (p, q) costituisce uno spazio vettoriale su un arbitrario campo di scalari. Se ad esempio $A^\mu{}_\nu$ e $B^\mu{}_\nu$ sono due tensori di tipo $(1, 1)$ e a, b due scalari, $T^\mu{}_\nu = aA^\mu{}_\nu + bB^\mu{}_\nu$ sarà ancora un tensore. Si ha infatti che per una generica trasformazione di coordinate:

$$\begin{aligned}
T'^\mu{}_\nu &= aA'^\mu{}_\nu + bB'^\mu{}_\nu = \\
&= a \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} A^\rho{}_\sigma + b \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} B^\rho{}_\sigma = \\
&= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} (aA^\rho{}_\sigma + bB^\rho{}_\sigma) = \\
&= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} T^\mu{}_\nu,
\end{aligned}$$

dove sono state omesse le dipendenze da x' o x. L'insieme di tutti i tensori definiti su una varietà è la somma diretta di questi spazi vettoriali al variare del rango: è anch'esso uno spazio vettoriale. Su questo insieme, inoltre, si può definire un'operazione binaria interna bilineare, detta *prodotto tensore* o *prodotto diretto*, che lo rende un'algebra. Il prodotto di un tensore di tipo (p_1, q_1) e uno di tipo (p_2, q_2) trasforma come un tensore di tipo $(p_1 + p_2, q_1 + q_2)$, le cui componenti sono i prodotti delle componenti dei tensori di partenza. Siano ad esempio $A^\mu{}_\nu$ e B^ρ due tensori di tipo rispettivamente $(1, 1)$ e $(1, 0)$. Il loro prodotto è

$$T^\mu{}_\nu{}^\rho \equiv A^\mu{}_\nu B^\rho, \tag{A.2}$$

che trasforma proprio come un tensore di ordine $(2, 1)$:

$$T'^\mu{}_\nu{}^\rho = A'^\mu{}_\nu B'^\rho = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}A^\lambda{}_\sigma\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\kappa}B^\kappa = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\kappa}T^\lambda{}_\sigma{}^\kappa. \tag{A.3}$$

Un'ulteriore operazione sui tensori è la *contrazione*, definita imponendo uguale un indice alto e uno basso di un tensore misto (p, q): il risultato è ancora un tensore, ma del tipo $(p - 1, q - 1)$. Ad esempio, dato $T^{\mu\nu}{}_\rho$,

$$T^\mu \equiv \delta^\rho{}_\nu T^{\mu\nu}{}_\rho = T^{\mu\nu}{}_\nu$$

è la contrazione dei suoi ultimi due indici. Vige la proprietà

$$\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma}\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu} = \delta^\lambda{}_\sigma,$$

con $\delta^\mu{}_\nu$ chiamato *tensore di Kronecker*, tale che $\delta^\mu{}_\nu = 1$ se $\mu = \nu$ e 0 altrimenti. Perciò si ha che

$$T'^\mu = T'^{\mu\nu}{}_\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma}\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu}T^{\rho\sigma}{}_\lambda = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}T^\rho, \tag{A.4}$$

confermando che la contrazione di due indici di posizione diversa in un tensore misto dà un tensore del tipo $(p - 1, q - 1)$.

Se sulla varietà è definita una metrica, un vettore può essere equivalentemente espresso attraverso le sue componenti controvarianti o covarianti; la differenza tra i due tipi di componenti è meramente geometrica. Con la prima scrittura, infatti, si indicano le componenti nella base $\{\partial_\mu\}$, dei cosiddetti vettori tangenti alla varietà, mentre nel secondo caso si indicano le componenti dei vettori cotangenti, espressi nella base $\{\mathrm{d}x^\mu\}$. Si passa da una scrittura all'altra attraverso la metrica o la sua inversa $g^{\mu\nu}$ (tale che $g^{\mu\sigma}g_{\sigma\nu} = \delta^\mu{}_\nu$):

$$A_\mu = g_{\mu\nu}A^\nu, \qquad A^\mu = g^{\mu\nu}A_\nu. \tag{A.5}$$

Si dice che la metrica *abbassa* gli indici, mentre la sua inversa li *solleva*. Per un tensore qualsiasi la metrica cambia la posizione dell'indice con cui è contratta, lasciando inalterata quella degli altri. L'operazione di *sollevamento o abbassamento* degli indici trasforma tensori in tensori in quanto composizione di prodotto tensore e contrazione.

Esistono anche oggetti chiamati *densità tensoriali*, che per un diffeomorfismo trasformano similmente ai tensori, con un fattore supplementare costituito da una potenza del determinante della Jacobiana (il cui esponente è detto *peso* della densità), da premettere alle matrici Jacobiane o alle loro inverse. Ad esempio,

$$I'^\mu{}_\nu = \left(\det\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^W\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda}\frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\nu}I^\lambda{}_\kappa. \tag{A.6}$$

I tensori sono dunque densità di peso zero. Altri esempi sono l'elemento di volume infinitesimo come definito in (C.7), il determinante g della metrica e il simbolo di Levi-Civita $\varepsilon^{\mu\nu\lambda\kappa}$, completamente antisimmetrico nei suoi indici e tale che $\varepsilon^{0123} = +1$. Esso trasforma infatti, secondo l'identità del determinante

$$\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu}\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu}\frac{\partial x'^\eta}{\partial x^\lambda}\frac{\partial x'^\xi}{\partial x^\kappa}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\kappa} = \left(\det\frac{\partial x'}{\partial x}\right)\varepsilon^{\rho\sigma\eta\xi}. \tag{A.7}$$

Trasforma come un tensore, invece, il prodotto $\sqrt{-g}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\kappa}$, dove $g = \det g_{\mu\nu}$.

Appendice B

Gradi di libertà della metrica dei sistemi localmente inerziali

Si cerca di rendere più precisa dal punto di vista matematico la definizione di sistema localmente inerziale sui punti di una varietà con metrica pseudo-Riemanniana qualsiasi $g_{\mu\nu}(x)$. In un qualsiasi punto $x = X$ della varietà, esiste un cambio di coordinate $x^\mu \to \xi^a$ che porta la metrica esattamente nella forma di Minkowski:

$$\eta_{ab} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^a}(X)\frac{\partial x^\nu}{\partial \xi^b}(X)g_{\mu\nu}(X). \tag{B.1}$$

Allargandosi, però, anche ad un piccolo intorno del punto, non si potrà più avere un unico sistema di coordinate inerziale, dato che il campo gravitazionale sarà in generale variabile nello spaziotempo. Si avrà dunque, che

$$\bar{g}_{ab}(x) = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^a}(x)\frac{\partial x^\nu}{\partial \xi^b}(x)g_{\mu\nu}(x), \tag{B.2}$$

con $\bar{g}_{ab}(x) = \eta_{ab}$ solo per $x = X$. Tuttavia, per continuità, si potrà effettuare un'espansione di Taylor di tale metrica, in un intorno di X:

$$\bar{g}_{ab}(x) = \eta_{ab} + \frac{\partial \bar{g}_{ab}}{\partial x^\lambda}(X)(x^\lambda - X^\lambda) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \bar{g}_{ab}}{\partial x^\rho x^\sigma}(X)(x^\rho - X^\rho)(x^\sigma - X^\sigma) + O(|x - X|^3). \tag{B.3}$$

Conoscendo $g_{\mu\nu}$ e le sue derivate in X, si può analogamente effettuare un'espansione in serie di Taylor nell'intorno del punto, per la metrica $g_{\mu\nu}$. Lo stessa espansione è possibile per la trasformazione di coordinate $x^\mu \to \xi^a$, poiché è nota e ne sono dunque note le derivate in X. Si inverte la (B.2), ottenendo

$$g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial \xi^a}{\partial x^\mu}(x)\frac{\partial \xi^b}{\partial x^\nu}(x)\bar{g}_{ab}(x).$$

Inserendo in questa equazione le tre suddette espansioni e omettendo ininfluenti coefficienti, si ricava che:

$$\begin{aligned}
&g_{\mu\nu}(X) + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}(X)(x^\lambda - X^\lambda) + \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho \partial x^\sigma}(X)(x^\rho - X^\rho)(x^\sigma - X^\sigma) + ... = \\
&= \big[\eta_{ab} + \frac{\partial \bar{g}_{ab}}{\partial x^\lambda}(X)(x^\lambda - X^\lambda) + \frac{\partial^2 \bar{g}_{ab}}{\partial x^\rho x^\sigma}(X)(x^\rho - X^\rho)(x^\sigma - X^\sigma) + ...\big]\cdot \\
&\quad \cdot \big[\frac{\partial \xi^a}{\partial x^\mu}(X) + \frac{\partial^2 \xi^a}{\partial x^\mu \partial x^\lambda}(X)(x^\lambda - X^\lambda) + \frac{\partial^3 \xi^a}{\partial x^\rho \partial x^\sigma \partial x^\mu}(X)(x^\rho - X^\rho)(x^\sigma - X^\sigma) + ...\big]\cdot \\
&\quad \cdot \big[\frac{\partial \xi^b}{\partial x^\nu}(X) + \frac{\partial^2 \xi^b}{\partial x^\nu \partial x^\lambda}(X)(x^\lambda - X^\lambda) + \frac{\partial^3 \xi^b}{\partial x^\rho \partial x^\sigma \partial x^\nu}(X)(x^\rho - X^\rho)(x^\sigma - X^\sigma) + ...\big].
\end{aligned}$$

Si uguagliano i coefficienti dei termini dello stesso ordine in $(x - X)$.
All'ordine zero, si ottiene chiaramente l'equazione (B.1). Se, per assurdo, non si conoscesse $\eta_{ab} = \bar{g}_{ab}(X)$, andrebbero fissati i suoi 10 parametri indipendenti di matrice simmetrica in 4 dimensioni. Ciò è

possibile poiché i gradi di libertà disponibili sono 16, uno per ciascun elemento della Jacobiana del cambio di coordinate. I 6 gradi di libertà rimanenti corrispondono a quelli delle trasformazioni di Lorentz che permettono di passare da un sistema di riferimento inerziale a un altro senza variare i coefficienti di η_{ab}.
Al primo ordine, i 40 parametri necessari per definire le derivate della metrica $\bar{g}_{ab}$ (10 per ciascuno dei 4 indici λ) sono determinati una volta fissati i 40 gradi di libertà costituiti dai coefficienti dell'Hessiana $\frac{\partial^2 \xi^a}{\partial x^\mu \partial x^\lambda}(X)$. Una scelta opportuna di questi ultimi parametri porta alla condizione

$$\frac{\partial \bar{g}_{ab}}{\partial x^\lambda}(X) = 0, \quad \forall \lambda, a, b = 0, 1, 2, 3.$$

Al secondo ordine, infine, si può pensare di fissare i coefficienti $\frac{\partial^2 \bar{g}_{ab}}{\partial x^\rho \partial x^\sigma}$ dell'Hessiana della metrica, che gode della simmetria sia negli indici a e b sia negli indici di derivazione ρ e σ: in totale i coefficienti richiesti saranno dunque 100. La libertà aggiuntiva rispetto ai due casi precedenti riguarda la scelta delle componenti di $\frac{\partial^3 \xi^a}{\partial x^\mu \partial x^\rho \partial x^\sigma}$, il cui numero, per ciascun valore di a è dato dal numero di combinazioni (data la simmetria della derivata l'ordine non conta) con ripetizione, di 3 elementi estratti da 4: $\binom{4+3-1}{3} = \binom{6}{3} = 20$. In totale vi sono dunque 80 gradi di libertà, che non sono sufficienti a fissare tutte le derivate seconde di $\bar{g}_{ab}$. I 20 gradi di libertà mancanti coincidono con i gradi di libertà del tensore di curvatura di Riemann, che è definito tramite le derivate prime e le derivate seconde del tensore metrico.

Tali considerazioni sui gradi di libertà della metrica di un sistema localmente inerziale suggeriscono una formulazione del Principio di Equivalenza più precisa dal punto di vista matematico: *in ciascun punto X della varietà spaziotemporale, con una metrica qualsiasi, è possibile costruire un sistema di coordinate localmente inerziale, cioè tale che la sua metrica sia Minkowskiana in X e le derivate prime ivi si annullino. In un intorno di X dunque la metrica per tale sistema di coordinate sarà:*

$$\bar{g}_{ab}(x) = \eta_{ab} + O(|x - X|^2).$$

Appendice C

Forme differenziali

Le *p-forme differenziali* sono definite come tensori $(0,p)$ completamente antisimmetrici nei loro indici. È dunque evidente che gli scalari sono 0-forme, i vettori covarianti 1-forme, $\sqrt{-g}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ 4-forma, mentre su una varietà d-dimensionale non possono esistere p-forme differenziali non banali con $p > d$, dato che l'antisimmetria porterebbe tutte le componenti ad annullarsi. L'insieme delle p-forme differenziali su una varietà M d-dimensionale, è denotato con $\Lambda^p(M)$ e contiene $\binom{d}{p} = \frac{d!}{p!(d-p)!}$ elementi linearmente indipendenti, tanti quanti i sottoinsiemi di p elementi estratti senza ripetizione da un insieme che ne contenga d. Non si discriminano i sottoinsiemi per l'ordine degli elementi, proprio perché l'antisimmetria porterebbe a forme linearmente dipendenti da altre. L'insieme di tutte le forme differenziali sulla varietà M è denotato con

$$\Lambda(M) = \bigoplus_{p=0}^{n} \Lambda^p(M),$$

somma diretta di spazi vettoriali dunque esso stesso spazio vettoriale.

Si consideri la base del duale dello spazio tangente la varietà nel suo punto x, costituita dall'insieme dei differenziali $\{\mathrm{d}x^\mu\}_{\mu=1,\dots,d}$. Per i differenziali è definita l'operazione *prodotto esterno*, indicata con $\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu$, associativa, anticommutativa e bilineare:

$$\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu = -\mathrm{d}x^\nu \wedge \mathrm{d}x^\mu. \tag{C.1}$$

Un elemento qualsiasi dello spazio vettoriale generato dal prodotto esterno di p differenziali,

$$A = \frac{1}{p!} A_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p},$$

avrà le componenti completamente antisimmetriche data l'antisimmetria della base, pertanto può essere identificato con le p-forme differenziali. Si definisce così il *prodotto esterno* come l'operazione binaria interna $\wedge : \Lambda(M) \times \Lambda(M) \to \Lambda(M)$ che a partire dalla p-forma A e la q-forma B, dà la $(p+q)$-forma

$$A \wedge B \equiv \frac{1}{p!}\frac{1}{q!} A_{[\mu_1 \dots \mu_p} B_{\mu_{p+1} \dots \mu_{p+q}]} \mathrm{d}x^{\mu_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_{p+q}}. \tag{C.2}$$

Il prodotto esterno è associativo e bilineare, dunque rende $\Lambda(M)$ un'algebra. Inoltre, è:

- *graduato*, cioè se A p-forma e B q-forma allora $A \wedge B$ $(p+q)$-forma;
- *anticommutativo*, nel senso che $A \wedge B = (-1)^{pq} B \wedge A$.

$\Lambda(M)$ è quindi un'algebra graduata e anticommutativa.

Una seconda operazione sulle forme differenziali è la *derivata esterna* $\mathrm{d} : \Lambda^p(M) \to \Lambda^{p+1}(M)$ (qualsiasi $p < d$), data da

$$\mathrm{d}A \equiv \frac{1}{p!} \partial_{[\mu_1} A_{\mu_2 \dots \mu_{p+1}]} \mathrm{d}x^{\mu_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_{p+1}}. \tag{C.3}$$

Alcune sue proprietà notevoli sono:

- se $\mathrm{d}^2 \equiv \mathrm{d} \wedge \mathrm{d}$, allora
$$\mathrm{d}^2 A = 0; \tag{C.4}$$

- *regola di Leibniz generalizzata*: se A p-forma e B q-forma, allora
$$\mathrm{d}(A \wedge B) = \mathrm{d}A \wedge B + (-1)^p (A \wedge \mathrm{d}B), \tag{C.5}$$
$$\mathrm{d}(B \wedge A) = \mathrm{d}B \wedge A + (-1)^q (B \wedge \mathrm{d}A); \tag{C.6}$$

- nel caso di connessione simmetrica (come avviene in Relatività Generale) la derivata esterna di una p-forma A qualsiasi si può scrivere come
$$\mathrm{d}A \equiv \frac{1}{p!} D_{[\mu_1} A_{\mu_2 \ldots \mu_{p+1}]} \, \mathrm{d}x^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_{p+1}}.$$
Questo dimostra anche che la derivata esterna di una forma trasforma come un tensore antisimmetrico: la derivata esterna è perciò una forma a tutti gli effetti.

Si ricorda infine, che una p-forma differenziale A si dice *chiusa* se $\mathrm{d}A = 0$, mentre si dice *esatta* se $A = \mathrm{d}\Phi$, dove Φ è una $(p-1)$-forma differenziale detta *potenziale di A*. Una forma esatta è banalmente chiusa per la proprietà (C.4), mentre una forma chiusa sarà anche esatta solo in alcuni casi, ad esempio se è definita su una varietà contraibile (*lemma di Poincaré*).

L'importanza dello studio delle forme differenziali si comprende considerando che su una varietà d-dimensionale non si integrano funzioni scalari, ma precisamente d-forme differenziali, di cui tali funzioni sono le componenti. Intuitivamente, l'elemento di volume infinitesimo (o misura) può essere considerato come volume di un parallelepipedo, funzione dunque dei d vettori che lo delimitano. Per la multilinearità e l'antisimmetria nei suoi argomenti (il volume è orientato), il volume infinitesimo è a tutti gli effetti un oggetto antisimmetrico nei suoi d indici. Nel sistema di coordinate x^μ l'elemento di volume infinitesimo potrà definirsi come:

$$d^d x \equiv \mathrm{d}x^0 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{d-1}, \tag{C.7}$$

che sotto un generale cambiamento di coordinate trasforma come una densità tensoriale e non come un tensore:

$$\begin{aligned} d^d x &= \frac{1}{d!} \varepsilon_{\mu_1 \ldots \mu_d} \, \mathrm{d}x^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_d} = \\ &= \frac{1}{d!} \varepsilon_{\mu_1 \ldots \mu_d} \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial x^{\mu'_1}} \ldots \frac{\partial x^{\mu_d}}{\partial x^{\mu'_d}} \, \mathrm{d}x^{\mu'_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{\mu'_d} = \\ &= \frac{1}{d!} \left(\det \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \right) \varepsilon_{\mu'_1 \ldots \mu'_d} \, \mathrm{d}x^{\mu'_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{\mu'_d} = \\ &= \left(\det \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \right) d^d x', \end{aligned}$$

dove si è usata la relazione $\varepsilon_{\mu_1 \ldots \mu_d} A^{\mu_1}{}_{\mu'_1} \ldots A^{\mu_d}{}_{\mu'_d} = (\det A) \varepsilon_{\mu'_1 \ldots \mu'_d}$ valida per A matrice qualsiasi. Un elemento di volume che trasformi come un tensore sarà dato da:

$$\sqrt{-g} \, d^d x = \sqrt{-g} \, \mathrm{d}x^0 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{d-1}, \tag{C.8}$$

con $g = \det g_{\mu\nu}$, che è il termine che compare nell'azione di Hilbert-Einstein (1.37). Applicando la formula di Binet sul determinante del prodotto di matrici alla relazione di congruenza tra le componenti della metrica in sistemi di coordinate differenti, si trova che $g' = \left(\det \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \right)^2 g$, dunque

$$\sqrt{-g'} \, d^d x' = \left(\det \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \right) \sqrt{-g} \left(\det \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} \right) d^d x = \sqrt{-g} \, d^d x.$$

Appendice D

Alcune derivazioni inerenti alla TMG

Si dimostrano in questa Appendice, alcuni concetti enunciati nella Sottosezione 4.3.1.

D.1 Equazioni del moto per l'azione di Chern-Simons

Si ricavano le equazioni del moto (4.12), cioè

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} + \frac{1}{\mu}C_{\mu\nu} = 0,$$

relative all'azione (4.11)

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{16\pi G}(S_{HE} + S_\Lambda + \frac{1}{\mu}S_{CS}) = \\ &= \frac{1}{16\pi G}\Big[\int d^3x\sqrt{-g}(R-2\Lambda) + \frac{1}{2\mu}\int d^3x\varepsilon^{\lambda\mu\nu}\Big(\Gamma^\rho{}_{\lambda\sigma}\partial_\mu\Gamma^\sigma{}_{\rho\nu} + \frac{2}{3}\Gamma^\rho{}_{\lambda\sigma}\Gamma^\sigma{}_{\mu\tau}\Gamma^\tau{}_{\nu\rho}\Big)\Big].\end{aligned}$$

Esse sono date da

$$\frac{\delta S}{\delta g_{\lambda\kappa}} = 0.$$

Le variazioni di S_{HE} e S_Λ coincidono con quelle già calcolate nelle Sezioni 1.4 e 3.1. Ci si concentra dunque sul termine di Chern-Simons. La variazione dell'azione rispetto ai coefficienti Γ della connessione è

$$\delta S_{CS} = \int d^3x\varepsilon^{\lambda\mu\nu}\delta\Gamma^\rho{}_{\lambda\sigma}\big(\partial_\mu\Gamma^\sigma{}_{\rho\nu} + \Gamma^\sigma{}_{\mu\tau}\Gamma^\tau{}_{\nu\rho}\big). \tag{D.1}$$

Va effettuata la variazione rispetto alla metrica, dell'espressione (1.13) per il simbolo di Christoffel. Si ottiene che

$$\delta\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}\big[D_\nu\delta g_{\rho\mu} + D_\mu\delta g_{\rho\nu} - D_\rho\delta g_{\mu\nu}\big],$$

che inserita in (D.1), dà

$$\begin{aligned}\delta S_{CS} &= \int d^3x\varepsilon^{\lambda\mu\nu}\big(\partial_\mu\Gamma^\sigma{}_{\rho\nu} + \Gamma^\sigma{}_{\mu\tau}\Gamma^\tau{}_{\nu\rho}\big)\cdot\frac{1}{2}g^{\rho\kappa}(D_\sigma\delta g_{\kappa\lambda} + D_\lambda\delta g_{\kappa\sigma} - D_\kappa\delta g_{\lambda\sigma}) = \\ &= \int d^3x\frac{1}{4}\varepsilon^{\lambda\mu\nu}R^{\sigma\kappa}{}_{\mu\nu}(D_\sigma\delta g_{\kappa\lambda} + D_\lambda\delta g_{\kappa\sigma} - D_\kappa\delta g_{\lambda\sigma}).\end{aligned}$$

La regola di Leibniz è valida anche per la derivata covariante, dunque è possibile integrare per parti. Rinominando poi gli indici e sfruttando le proprietà di simmetria della metrica e antisimmetria del tensore di curvatura, si ottiene che

$$\begin{aligned}\delta S_{CS} &= \frac{1}{4}\int d^3x\varepsilon^{\lambda\mu\nu}\big(-D_\sigma R^{\sigma\kappa}{}_{\mu\nu}\delta g_{\kappa\lambda} - D_\lambda R^{\sigma\kappa}{}_{\mu\nu}\delta g_{\kappa\sigma} + D_\kappa R^{\sigma\kappa}{}_{\mu\nu}\delta g_{\lambda\sigma}\big) = \\ &= -\frac{1}{4}\int d^3x\big(\varepsilon^{\lambda\mu\nu}D_\sigma R^{\sigma\kappa}{}_{\mu\nu} + \varepsilon^{\sigma\mu\nu}D_\sigma R^{\lambda\kappa}{}_{\mu\nu} - \varepsilon^{\lambda\mu\nu}D_\sigma R^{\kappa\sigma}{}_{\mu\nu}\big)\delta g_{\lambda\kappa} = \\ &= \frac{1}{2}\int d^3x\varepsilon^{\lambda\mu\nu}D_\sigma R^{\kappa\sigma}{}_{\mu\nu}\delta g_{\lambda\kappa}.\end{aligned}$$

La proprietà (4.3) può scriversi in funzione del tensore di Schouten come

$$R_{\kappa\sigma\mu\nu} = g_{\sigma\nu}S_{\kappa\mu} - g_{\sigma\mu}S_{\kappa\nu} - (k \leftrightarrow \sigma),$$

perciò

$$\begin{aligned}\delta S_{CS} &= \int d^3x\frac{\varepsilon^{\lambda\mu\nu}}{2}D_\sigma\big[\delta^\kappa{}_\mu S^\sigma{}_\nu + \delta^\sigma{}_\nu S^\kappa{}_\mu - \delta^\kappa{}_\nu S^\sigma{}_\mu - \delta^\sigma{}_\mu S^\kappa{}_\nu\big]\delta g_{\lambda\kappa} = \\ &= \int d^3x\varepsilon^{\lambda\mu\nu}D_\sigma\big[\delta^\kappa{}_\mu S^\sigma{}_\nu + \delta^\sigma{}_\nu S^\kappa{}_\mu\big]\delta g_{\lambda\kappa} = \\ &= \int d^3x\big[\sqrt{-g}C^{\lambda\kappa} + \varepsilon^{\lambda\kappa\nu}D_\sigma S^\sigma{}_\nu\big]\delta g_{\lambda\kappa} = \int d^3x\sqrt{-g}C^{\lambda\kappa}\delta g_{\lambda\kappa}.\end{aligned} \tag{D.2}$$

D.2 Azione di Chern-Simons nel formalismo di Cartan

Le due scritture per il termine topologico, (4.8),

$$S_{CS} = \frac{1}{2}\int d^3x\varepsilon^{\lambda\mu\nu}\Big(\Gamma^\rho{}_{\lambda\sigma}\partial_\mu\Gamma^\sigma{}_{\rho\nu} + \frac{2}{3}\Gamma^\rho{}_{\lambda\sigma}\Gamma^\sigma{}_{\mu\tau}\Gamma^\tau{}_{\nu\rho}\Big)\Big]$$

e (4.9),

$$\tilde{S}_{CS} = -\frac{1}{4}\int d^3x\varepsilon^{\mu\nu\alpha}\big[R_{\mu\nu ab}\omega_\alpha{}^{ab} + \frac{2}{3}\omega_{\mu b}{}^c\omega_{\nu c}{}^a\omega_{\alpha a}{}^b\big]$$

sono equivalenti: la variazione infatti di quest'ultima coincide proprio con la variazione della prima scritta in (D.1). Per verificarlo, si sfruttano la definizione (4.10) per la curvatura, l'antisimmetria di ω nei suoi due indici anolonomi e l'antisimmetria di $\varepsilon^{\mu\nu\alpha}$. L'azione di Chern-Simons nel formalismo di tetrade sarà dunque

$$\begin{aligned}\tilde{S}_{CS} &= -\frac{1}{4}\int d^3x\varepsilon^{\mu\nu\alpha}\big[2\partial_\mu\omega_{\nu ab}\omega_\alpha{}^{ab} + 2\omega_{\mu a}{}^c\omega_{\nu cb}\omega_\alpha{}^{ab} - \frac{2}{3}\omega_{\nu b}{}^c\omega_{\mu c}{}^a\omega_{\alpha a}{}^b\big] = \\ &= -\frac{1}{4}\int d^3x\varepsilon^{\mu\nu\alpha}\big[2\partial_\mu\omega_{\nu ab}\omega_\alpha{}^{ab} + \frac{4}{3}\omega_{\mu a}{}^c\omega_{\nu cb}\omega_\alpha{}^{ab}\big].\end{aligned}$$

La variazione di questa azione è:

$$\begin{aligned}\delta\tilde{S}_{CS} &= -\frac{1}{4}\int d^3x\varepsilon^{\mu\nu\alpha}\big[4\partial_\mu\omega_{\nu ab} + 4\omega_{\mu a}{}^c\omega_{\nu cb}\big]\delta\omega_\alpha{}^{ab} = \\ &= -\frac{1}{2}\int d^3x\varepsilon^{\mu\nu\alpha}R^{ab}{}_{\mu\nu}\delta\omega_\alpha{}^{ab}.\end{aligned} \tag{D.3}$$

Per il postulato di tetrade,

$$0 = D_\alpha e_{a\mu} = \partial_\alpha e_{\alpha\mu} + \omega_{\alpha a}{}^b e_{b\mu} - \Gamma^\lambda{}_{\alpha\mu}e_{a\lambda}.$$

Effettuando la variazione di questa espressione, si ricava che

$$\delta\omega_{\alpha ab} = e^\mu{}_b\big(e_{a\sigma}\delta\Gamma^\sigma{}_{\mu\alpha} - D_\alpha\delta e_{a\mu}\big).$$

Inserito questo risultato in (D.3), il secondo addendo non contribuisce per la seconda identità di Bianchi e si ottiene che

$$\delta\tilde{S}_{CS} = \frac{1}{2}\int d^3x\varepsilon^{\mu\alpha\beta}R_{\nu\sigma\alpha\beta}\delta\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu},$$

che è proprio (D.1).

D.3 Conservazione del tensore di Cotton

Il tensore di Cotton è conservato in senso covariante. Infatti, per la scrittura (4.16) e la metrico-compatibilità della connessione,

$$\sqrt{-g}D_\mu C^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\big(\varepsilon^{\mu\rho\sigma}D_\mu D_\rho R_\sigma{}^\nu + \varepsilon^{\nu\rho\sigma}D_\mu D_\rho R_\sigma{}^\mu\big).$$

Per la definizione di derivata covariante e sfruttando la simmetria dei simboli di Christoffel, si ha che

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{\mu\rho\sigma}D_\mu D_\rho R_\sigma{}^\nu &= \varepsilon^{\mu\rho\sigma}D_\mu\big[\partial_\rho R_\sigma{}^\nu + \Gamma^\nu{}_{\rho\lambda}R_\sigma{}^\lambda - \Gamma^\lambda{}_{\rho\sigma}R_\lambda{}^\nu\big] = \\
&= \varepsilon^{\mu\rho\sigma}[\partial_\mu\partial_\rho R_\sigma{}^\nu + \partial_\mu\Gamma^\nu{}_{\rho\lambda}R_\sigma{}^\lambda + \Gamma^\nu{}_{\rho\lambda}\partial_\mu R_\sigma{}^\lambda + \Gamma^\nu{}_{\mu\lambda}(\partial_\rho R_\sigma{}^\lambda + \Gamma^\lambda{}_{\rho\tau}R_\sigma{}^\tau) + \\
&\quad - \Gamma^\lambda{}_{\mu\rho}(\partial_\lambda R_\sigma{}^\nu + \Gamma^\nu{}_{\lambda\tau}R_\sigma{}^\tau) - \Gamma^\lambda{}_{\mu\sigma}(\partial_\rho R_\lambda{}^\nu + \Gamma^\nu{}_{\rho\tau}R_\lambda{}^\tau)] = \\
&= \varepsilon^{\mu\rho\sigma}\big[\partial_\mu\Gamma^\nu{}_{\rho\lambda}R_\sigma{}^\lambda + \Gamma^\nu{}_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\rho\tau}R_\sigma{}^\tau\big].
\end{aligned}$$

Per la definizione (1.20) di curvatura e per la proprietà (4.3), questa espressione diventa

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\rho\sigma}R_{\rho\mu\tau}{}^\nu R_\sigma{}^\tau &= \frac{1}{4}\varepsilon^{\mu\rho\sigma}\big(g_{\rho\tau}R_\mu{}^\nu R_\sigma{}^\tau - g_{\mu\tau}R_\rho{}^\nu R_\sigma{}^\tau - \frac{1}{2}Rg_{\rho\tau}\delta_\mu{}^\mu R_\sigma{}^\tau\big) = \\
&= \frac{1}{4}\varepsilon^{\mu\rho\sigma}(R_{\sigma\rho}R_\mu{}^\nu - R_{\sigma\mu}R_\rho{}^\nu - \frac{1}{2}RR_{\sigma\rho}\delta^\nu{}_\mu) = 0,
\end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio si è usata la simmetria del tensore di Ricci. Totalmente analogamente si mostra che

$$\varepsilon^{\nu\rho\sigma}D_\mu D_\rho R_\sigma{}^\mu = 0,$$

per cui, in sintesi,

$$D_\mu C^{\mu\nu} = 0.$$

Bibliografia

[1] Abate M. e F. Tovena: *Geometria Differenziale*. Springer-Verlag Italia, Milano (2010).

[2] Alkaç, G.: *Supersimmetry, black holes and holography in three dimensions*. University of Groningen (2017).

[3] Bañados, M., C. Teitelboim e J. Zanelli: *The Black Hole in Three Dimensional Space Time*. Phys. Rev. Lett. 69 (1992): 1849-1851.

[4] Bañados, M., M. Henneaux, C. Teitelboim e J. Zanelli: *Geometry of the 2+1 Black Hole*. Phys. Rev. D 48 (1993): 1506-1525.

[5] Bergshoeff, E. A., O. Hohm e P. K. Townsend: *Massive Gravity in Three Dimensions*. Phys. Rev. Lett. 102, 201301 (2009).

[6] Bergshoeff, E. A., O. Hohm, W. Merbis, A. J. Routh e P. K. Townsend: *Minimal Massive 3D Gravity*. Class. Quant. Grav. 31, 145008 (2014).

[7] Carroll, S. M.: *Spacetime and geometry. An introduction to General Relativity*. Pearson New International Edition, Harlow, Essex (2014).

[8] Davis, T. e B. Griffen: *Cosmological constant*. Scholarpedia, 5(9):4473 (2010).

[9] Deser, S., R. Jackiw e S. Templeton: *Topologically Massive Gauge Theories*. Ann. Phys. 140 (1982): 372–411.

[10] Gamow, G.: *My world line. An informal autobiography*. The Viking Press, Inc., New York (1970).

[11] Gasperini, M.: *Lezioni di Relatività Generale e Teoria della Gravitazione*. Springer-Verlag Italia, Milano (2010).

[12] Kovacevic, M.: *Aspects of three dimensional gravity*. University of Groningen (2017).

[13] Lechner, K.: *Elettrodinamica classica*. Springer-Verlag Italia, Milano (2014).

[14] Mazzoldi, P., M. Nigro e C. Voci: *Fisica Vol.I. Meccanica - Termodinamica, Seconda edizione*. Edises, Napoli (2013).

[15] Năstase, H.: *Introduction to AdS/CFT correspondence*. Cambridge University Press, Cambridge (2015).

[16] Padmanhaban, T.: *Cosmology and Astrophysics through problems*. Cambridge University Press, Cambridge (1996).

[17] Padmanhaban, T.: *Cosmological constant - the weight of the vacuum*. Phys. Rept. 380 (2003): 235-320.

[18] Skenderis, K., M. Taylor e B. C. van Rees: *Topologically Massive Gravity and the AdS/CFT Correspondence*. JHEP 0909:045 (2009).

[19] Weinberg, S.: *Gravitation and Cosmology. Principles and application of the General Theory of Relativity*. John Wiley & Sons, Inc., New York (1972).