



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Meccanica Statistica di Gas Quantistici in Trappole

Relatore

Prof. Luca Salasnich

Laureanda

Djulia Sevcenco

Anno Accademico 2017/2018

Indice

1	Limite semi-classico	3
1.1	Condensazione di Bose-Einstein	3
1.2	Gas ideali di Fermi e di Bose	4
1.3	Limite semi-classico	5
1.4	Gas in presenza di potenziali esterni	7
1.4.1	Caso dei fermioni	7
1.4.2	Caso dei Bosoni	8
1.4.3	Gas di Fermi e Bose in trappola armonica	9
2	Seconda quantizzazione	13
2.1	Campo di Schrödinger	13
2.1.1	Seconda quantizzazione del campo di Schrödinger	15
2.2	Stati Coerenti per bosoni	16
2.3	Termodinamica	17
2.3.1	Caso non interagente per bosoni e fermioni	18
2.3.2	Caso dei bosoni interagenti in un unico livello energetico	19
3	Riduzione dimensionale	21
3.1	Gross-Pitaevskii e Modello del Campo Medio	21
3.2	Potenziale esterno	22
3.3	Derivazione di Modelli 1-D e 2-D	22

Introduzione

In questa tesi mi occupo dello studio dei gas quantistici in dimensione arbitraria ed il loro comportamento in trappole armoniche. Nel Capitolo 1, tratto brevemente la Condensazione di Bose-Einstein, la quale teoria di base è stata sviluppata molti anni prima della realizzazione sperimentale dei primi condensati nel 1995. Poi derivo dei risultati nel limite dell'approssimazione semiclassica per fermioni e bosoni, in particolare la distribuzione spaziale e del momento che sono quantità anch'esse facilmente misurabili negli esperimenti.

Nel Capitolo 2 studio la seconda quantizzazione della materia e la termodinamica nell'ensemble gran canonico per bosoni ineragenti e non interagenti in un caso particolare.

Infine nel Capitolo 3 modellizzo l'equazione di Gross Pitaevskii per avere una teoria approssimata 1D e 2D e studio la forma dei condensati in tale configurazioni.

Capitolo 1

Limite semi-classico

1.1 Condensazione di Bose-Einstein

Il fenomeno della Bose-Einstein Condensation (BEC) inizialmente predetto da Bose [1] ed Einstein [2, 3], si riferisce a sistemi che obbediscono alla statistica di Bose. In particolare, quando un gas di particelle bosoniche è raffreddato sotto una temperatura critica di transizione T_C , le particelle finiscono nella BEC, dove un numero macroscopico di particelle (tipicamente da 10^3 a 10^6) condividono lo stesso stato quantistico. La BEC è in realtà una transizione di fase quantistica, che è connessa a fenomeni fisici fondamentali come la superfluidità nell'elio liquido e la superconduttività nei metalli [4].

Tutti i sistemi atomici interagenti, tranne l'elio, subiscono una transizione di fase verso lo stato solido a temperature sufficientemente basse. Questo comportamento è illustrato sotto:

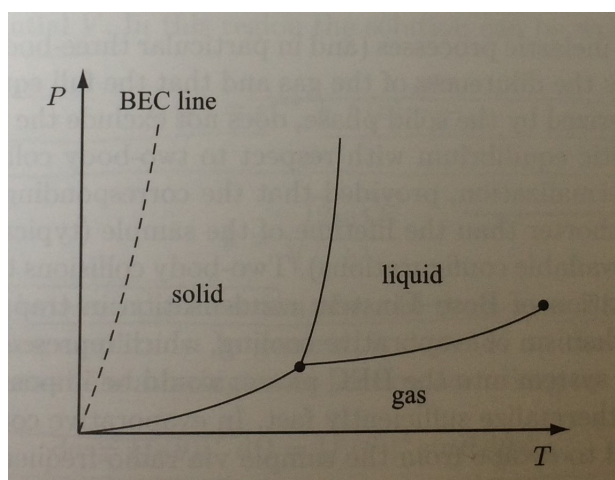


Figura 1.1: Tipico digramma di fase pressione (P) e temperatura (T)

La linea tratteggiata rappresenta la transizione di fase BEC per un gas ideale. Sopra questa linea un gas diluito sarebbe nello stato di BEC. Questa condizione è in realtà instabile poichè l'equilibrio termodinamico sotto queste condizioni di pressione e temperatura corrisponde alla fase cristallina. Questo non può essere evitato perchè il gas in equilibrio con lo stato solido è sempre classico e la linea $P(T)$ che separa la fase solida da quella gassosa sta sotto la linea della BEC. A basse temperature il meccanismo di decadimento della fase gas di BEC è generalmente dominato da ricombinazioni a tre-corpi che sono i responsabili della formazione delle molecole, eventualmente portando il sistema in una fase solida termodinamicamente stabile. A prima vista sembrerebbe che la realizzazione della BEC non sia possibile. In realtà la fase BEC può essere assicurata in condizioni di metastabilità se i seguenti criteri sono soddisfatti [5]:

- la densità del gas deve essere così bassa tale che le collisioni a tre corpi siano rare. Le densità tipicamente raggiunte in regimi BEC gassosi sono dell'ordine $10^{13} - 10^{15}$ atomi/cm³. Per poter

rivelare gli effetti quantistici desiderati, valori così bassi di densità richiedono di lavorare a temperature estremamente basse, dell'ordine dei microkelvin;

- il gas deve essere tenuto lontano da qualsiasi parete materiale, altrimenti si formerebbero le molecole;
- Gli effetti di ricombinazione sono spenti se si lavora con campioni con spin polarizzato.

Le condizioni appena sopra possono essere acquisite se si confina un gas molto diluito, freddo e spin-polarizzato in una trappola magnetica. Questa è stata, in realtà, la strada che ha portato alla realizzazione dei primi condensati di Bose-Einstein.

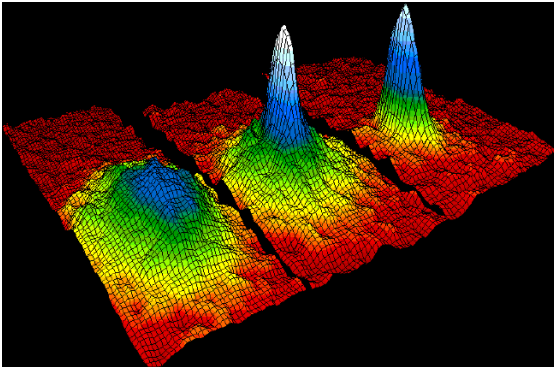


Figura 1.2: Distribuzione della velocità per un gas di Rubidio, a conferma dell'esistenza di una nuova fase di materia, la Condensazione di Bose Einstein. A sinistra: appena prima dell'apparizione del condensato. Centro: appena dopo la comparsa del condensato. A destra: dopo ulteriore evaporazione, lasciando un campione di condensato quasi puro.

Combinando differenti tecniche di raffreddamento i gruppi sperimentali di Cornell e Wieman a Boulder e di Ketterle al MIT sono riusciti nel 1995 a raggiungere le temperature e densità necessarie per osservare la condensazione di Bose-Einstein nei vapori di ^{87}Rb [6] e ^{23}Na [7]. Nello stesso anno è stata riportata anche la BEC nei vapori di ^7Li [8].

L'importanza della BEC è stata confermata e riconosciuta nel 2001 con il premio Nobel per la Fisica [9, 10].

1.2 Gas ideali di Fermi e di Bose

I gas ideali sono una modellizzazione del gas reale, dove si assume che il gas è non interagente.

Nell'immagine accanto, si vede il tipico schema di riempimento degli stati in accordo con il principio di esclusione di Pauli. Un numero macroscopico di bosoni possono occupare lo stato fondamentale del sistema, invece i fermioni occupano uno stato alla volta partendo dal più basso. In questo caso non si consideriamo lo spin, altrimenti avremo due fermioni per stato, uno con spin \uparrow e uno con spin \downarrow .

I gas di Bose ideali si ottengono con le Risonanze di Feshbach, modificando l'interazione atomo-atomo oppure addirittura spegnendo l'interazione [11].

Invece a basse temperature un gas debolmente interagente di Fermi si mostra essere quasi ideale [12]. Nell'ensemble grancanonico il numero medio di particelle N_α nello stato di singola particella $|\alpha\rangle$ con energia ϵ_α è dato da [13]:

$$N_\alpha = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_\alpha - \mu)} \pm 1} \quad (1.1)$$

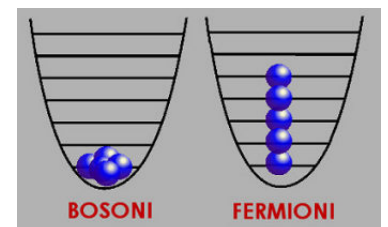


Figura 1.3: Occupazione degli stati per bosoni e fermioni

dove il + sta per i fermioni ed il – è per i bosoni. In generale, data la funzione di singola particella N_α , il numero totale medio di particelle è [14]:

$$N = \sum_{\alpha} N_{\alpha}. \quad (1.2)$$

Questa condizione fissa il potenziale chimico μ . Nel caso dei fermioni, μ non ha limitazioni, $\mu(T = 0) = E_F$, dalla quale si ottiene la temperatura di Fermi $T_F = E_F/k_B$. Sotto la temperatura di Fermi i fermioni cominciano a riempire lo stato più basso accessibile di singola particella in accordo con il principio di esclusione di Pauli (fig. 1.3).

Nel caso dei bosoni si ha:

$$N_{\alpha} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_{\alpha}-\mu)} - 1}$$

ma $\epsilon_0 < \epsilon_1 < \epsilon_2 < \dots < \epsilon_n$, dunque ϵ_0 è il più piccolo e quindi $\epsilon_0 > \mu \Rightarrow \mu < \epsilon_0$ (per $\mu \rightarrow \epsilon_0$ si ha la BEC).

$$N = \sum_{\alpha} N_{\alpha} = N_0 + N_1 + N_2 + \dots = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_0-\mu)} - 1} + \sum_{\alpha \neq 0} \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_{\alpha}-\mu)} - 1}$$

ma poichè $\mu \rightarrow \epsilon_0$ possiamo scrivere:

$$N \simeq N_0 + \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_{\alpha}-\epsilon_0)} - 1}$$

$T_C = T$ alla quale $N_0 = 0$.

$$N_0 = N - \sum_{\alpha \neq 0} \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_{\alpha}-\epsilon_0)} - 1}$$

dividendo ambo i membri per N :

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \frac{\sum_{\alpha \neq 0} \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_{\alpha}-\epsilon_0)} - 1}}{\sum_{\alpha \neq 0} \frac{1}{e^{\beta_c(\epsilon_{\alpha}-\epsilon_0)} - 1}}$$

con $\beta_c = \frac{1}{k_B T_c}$ e dove $\frac{N_0}{N}$ indica la frazione condensata. Alla temperatura critica T_c abbiamo:

$$N = 0 + \sum_{\alpha \neq 0} \frac{1}{e^{\beta_c(\epsilon_{\alpha}-\epsilon_0)} - 1},$$

e per temperature nell'intervallo $0 < T < T_c$ si ha la Condensazione di Bose-Einstein, il cui significato fisico è che lo stato di singola particella è occupato da un numero macroscopico di particelle [13].

1.3 Limite semi-classico

Lo spazio D-dimensionale è descritto da un continuo di stati [13, 15, 16] e invece degli ϵ_{α} si usa l'energia dello spazio delle fasi di singola particella classica $\epsilon(\vec{r}, \vec{p})$ con $\vec{r} = (r_1, \dots, r_D)$ vettore posizione, e $\vec{p} = (p_1, \dots, p_D)$ vettore momento lineare. Dall'equazione (1.1) si ottiene la distribuzione nello spazio delle fasi della singola particella:

$$n(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon(\vec{r}, \vec{p}) - \mu)} \pm 1}. \quad (1.3)$$

L'accuratezza semiclassica è buona se il numero di particelle è grande e la distanza tra i livelli energetici è minore di kT [13]. Per Heisenberg, il volume elementare quantistico di una singola particella in uno spazio 2D-dim è dato da $(2\pi\hbar)^D$, con \hbar costante di Plank [15]. Segue che il numero medio di particelle può essere scritto:

$$N = \int \frac{d^D \vec{r} d^D \vec{p}}{(2\pi\hbar)^D} n(\vec{r}, \vec{p}) = \int d^D \vec{r} n(\vec{r}) = \int d^D \vec{p} n(\vec{p}) \quad (1.4)$$

$$n(\vec{r}) = \int \frac{d^D \vec{p} n(\vec{r}, \vec{p})}{(2\pi\hbar)^D}, \text{ che è la distribuzione spaziale,} \quad (1.5)$$

invece si ha:

$$n(\vec{p}) = \int \frac{d^D \vec{r} n(\vec{r}, \vec{p})}{(2\pi\hbar)^D}, \text{ per la distribuzione dei momenti.} \quad (1.6)$$

E' importante notare che può essere scritto anche:

$$N = \int_0^\infty d\epsilon \rho(\epsilon) \frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} \pm 1} \quad (1.7)$$

ove la $\rho(\epsilon)$ è la densità degli stati:

$$\rho(\epsilon) = \int \frac{d^D \vec{r} d^D \vec{p}}{(2\pi\hbar)^D} \delta(\epsilon - \epsilon(\vec{r}, \vec{p})) \quad (1.8)$$

$\delta(x)$ è la delta di Dirac. Per i fermioni, nel limite $T \rightarrow 0$:

$$n(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon(\vec{r}, \vec{p}) - \mu)} + 1}$$

Ricordando che per le funzioni di Fermi [17]:

$$F_\beta(x) = \frac{1}{e^{\beta x} + 1}$$

nel limite delle basse temperature:

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} F_\beta(x) = \Theta(-x) = \begin{cases} 0 & x > 0 (\epsilon - \mu) > 0 \\ 1 & x < 0 (\epsilon - \mu) < 0 \end{cases}$$

Dunque si ha:

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} n(\vec{r}, \vec{p}) = \Theta(-\epsilon(\vec{r}, \vec{p}) + \mu) = \Theta(\mu - \epsilon(\vec{r}, \vec{p}))$$

Quindi la distribuzione nello spazio delle fasi in questo caso è:

$$n(\vec{r}, \vec{p}) = \Theta(E_F - \epsilon(\vec{r}, \vec{p})). \quad (1.9)$$

Per i bosoni, sotto la temperatura T_B di transizione di BEC, l'eq.(1.3) descrive solo la nube termica non-condensata. Non c'è un modo univoco di esprimere le funzioni d'onda in distribuzioni nello spazio

delle fasi [15], ovvero non si può introdurre una distribuzione esatta di singola particella nello spazio delle fasi del condensato di Bose. Ciononostante la distribuzione spaziale esatta di un condensato di Bose è $n_0(\vec{r}) = |\Psi(\vec{r})|^2$, funzione d'onda macroscopica del condensato. Per un gas di Bose ideale la $|\Psi(\vec{r})|$ è l'autofunzione dello stato più basso di particella singola del sistema.

1.4 Gas in presenza di potenziali esterni

Consideriamo un gas ideale di Fermi (Bose) in un potenziale di confinamento $U(\vec{r})$ in uno spazio D-dimensionale.

L'energia classica di singola particella è:

$$\epsilon(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{\vec{p}^2}{2m} + U(\vec{r}) \quad (1.10)$$

Ricordando $\delta(x) = \Theta'(x)$:

$$\rho(\epsilon) = \int \frac{d^D \vec{r} d^D \vec{p}}{(2\pi\hbar)^D} \delta(\epsilon - \epsilon(\vec{r}, \vec{p})) = \int \frac{d^D \vec{r} d^D \vec{p}}{(2\pi\hbar)^D} \delta(\epsilon - \frac{\vec{p}^2}{2m} + U(\vec{r}))$$

Tenendo conto che $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$ e $n! = \Gamma(n+1)$ si arriva a:

$$\rho(\epsilon) = \left(\frac{m}{2\pi\hbar}\right)^{D/2} \frac{1}{\Gamma(\frac{D}{2})} \int d^D \vec{r} (\epsilon - U(\vec{r}))^{\frac{D-2}{2}} \quad (1.11)$$

Definizione 1.4.1: Si definisce una funzione di Fermi [18]:

$$f_n(z) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty dy \frac{ze^{-y} y^{n-1}}{1 + ze^{-y}}$$

Definizione 1.4.2: Si definisce una funzione di Bose [18]:

$$f_n(z) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty dy \frac{ze^{-y} y^{n-1}}{1 - ze^{-y}}$$

1.4.1 Caso dei fermioni

Teorema 1.1 Per un gas ideale di Fermi in un potenziale esterno $U(\vec{r})$ e D-dimensionale la distribuzione spaziale a temperatura finita è data da:

$$n(\vec{r}) = \frac{1}{\lambda^D} f_{\frac{D}{2}}[e^{\beta(\mu - U(\vec{r}))}]$$

con μ potenziale chimico e $\lambda = \left(\frac{2\pi\hbar^2\beta}{m}\right)^{1/2}$ la lunghezza termica.

La distribuzione spaziale a temperatura nulla è invece data da:

$$n(\vec{r}) = \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^{\frac{D}{2}} \frac{1}{\Gamma(\frac{D}{2} + 1)} (E_F - U(\vec{r}))^{\frac{D}{2}} \Theta(E_F - U(\vec{r}))$$

Dimostrazione. La distribuzione spaziale si trova sostituendo l'eq.(1.3) col segno + nell'eq.(1.5) e integrando sul momento, ovvero:

$$\begin{aligned} n(\vec{r}) &= \int \frac{d^D \vec{p}}{(2\pi\hbar)^D} \frac{1}{e^{\beta(\epsilon(\vec{r}, \vec{p}) - \mu)} + 1} = \int \frac{d^D \vec{p}}{(2\pi\hbar)^D} \frac{1}{e^{\beta(\frac{\vec{p}^2}{2m} + U(\vec{r}) - \mu)} + 1} \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar^2)^D} \frac{D\pi^{D/2}}{\Gamma(\frac{D}{2} + 1)} \int_0^\infty dp \frac{p^{D-1} e^{\beta(\mu - U(\vec{r}))} e^{-\beta(\frac{p^2}{2m})}}{1 + e^{\beta(\mu - U(\vec{r}))} e^{-\beta(\frac{p^2}{2m})}} \end{aligned}$$

Faccio il cambio di variabile $y = \beta(p^2/2m)$, cosicché:

$$dpp^{D-1} = [(\frac{2m}{\beta})^{1/2} \frac{1}{2} y^{-1/2} dy][(\frac{2m}{\beta})^{1/2(D-1)} (y^{1/2})^{D-1}] = \frac{1}{2} (\frac{2m}{\beta})^{D/2} y^{D/2-1}$$

e abbiamo :

$$\begin{aligned} n(\vec{r}) &= \frac{1}{(2\pi\hbar^2)^D} \frac{D\pi^{D/2}}{\Gamma(\frac{D}{2} + 1)} \left(\frac{2m}{\beta}\right)^{D/2} \frac{1}{2} \int_0^\infty dy \frac{y^{D/2-1} z e^{-y}}{1 + z e^{-y}} \\ &= \left(\frac{1}{2\pi\hbar^2}\right)^D \frac{D\pi^{D/2}}{\Gamma(\frac{D}{2} + 1)} \left(\frac{2m}{\beta}\right)^{D/2} \frac{\Gamma(\frac{D}{2})}{2} f_{D/2}(z) \end{aligned}$$

Ricordando la proprietà della funzione Gamma $\Gamma(\omega + 1) = \omega\Gamma(\omega)$ si ottiene:

$$n(\vec{r}) = \frac{1}{\lambda^D} f_{\frac{D}{2}}(e^{\beta(\mu - U(\vec{r}))})$$

Il caso della temperatura nulla si ottiene utilizzando come distribuzione spaziale la (1.8) e osservando che:

$$\begin{aligned} n(\vec{r}) &= \int \frac{d^D \vec{p}}{(2\pi\hbar)^D} \Theta(E_F - \frac{\vec{p}^2}{2m} - U(\vec{r})) \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar^2)^D} \frac{D\pi^{D/2}}{\Gamma(\frac{D}{2} + 1)} \Theta(E_F - U(\vec{r})) \int_0^{\sqrt{2m(E_F - U(\vec{r}))}} d^{D-1} p \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar^2)^D} \frac{D\pi^{D/2}}{\Gamma(\frac{D}{2} + 1)} \Theta(E_F - U(\vec{r})) \frac{1}{D} \sqrt{(2m(E_F - U(\vec{r})))^D} \end{aligned}$$

□

1.4.2 Caso dei Bosoni

Teorema 1.2 Per un gas di Bose ideale in potenziale un esterno $U(\vec{r})$ la distribuzione spaziale della nube non condensata è:

$$n(\vec{r}) = \frac{1}{\lambda^D} g_{\frac{D}{2}}(e^{\beta(\mu - U(\vec{r}))})$$

con μ potenziale chimico e $\lambda = (\frac{2\pi\hbar^2\beta}{m})^{1/2}$ la lunghezza termica.

Dimostrazione. Come il caso dei fermioni, ma con il segno - nell'eq.(1.3) e la funzione di Bose $g_{D/2}(z)$ con $z = e^{\beta(\mu - U(\vec{r}))}$. □

1.4.3 Gas di Fermi e Bose in trappola armonica

Per trovare la distribuzione del momento, la temperatura di Fermi e la temperatura di Bose, è necessario specificare il potenziale esterno. In molti esperimenti con atomi dei metalli alcalini (Li, Na, K, Rb, Cs, Fr) la trappola esterna può essere accuratamente modellata da un potenziale armonico [14]. La densità degli stati in un potenziale armonico D-dimensionale della forma:

$$U(\vec{r}) = Ar^2 = \frac{1}{2}m\omega^2\vec{r}^2$$

è calcolata dall'eq.(1.11), ovvero:

$$\rho(\epsilon) = (\hbar\omega)^{-D} \frac{\epsilon^{(D-1)}}{\Gamma(D)}. \quad (1.12)$$

Possiamo adesso enunciare due teoremi per i gas ideali di Bose e Fermi confinati da un potenziale armonico:

Teorema 1.3 Consideriamo un gas di Fermi ideale in un potenziale armonico $U(\vec{r}) = \frac{1}{2}m\omega^2\vec{r}^2$ con $r = |\vec{r}| = \sqrt{\sum_{i=0}^D x_i^2}$, la distribuzione del momento a temperatura finita è:

$$n(\vec{p}) = \frac{1}{(2\hbar\sqrt{\pi})^D} \left(\frac{2}{\beta m \omega^2} \right)^{D/2} f_{D/n}(e^{\beta(\mu - \frac{p^2}{2m})})$$

A temperatura zero la distribuzione del momento è:

$$n(\vec{p}) = \frac{1}{(2\hbar\sqrt{\pi})^D} \left(\frac{2}{m\omega^2} \right)^{D/2} (E_F - \frac{\vec{p}^2}{2m})^{D/2} \Theta(E_F - \frac{\vec{p}^2}{2m})$$

L'energia di Fermi e la temperatura di Fermi sono date da:

$$E_F = kT_F = \left[(\hbar\omega)^D \Gamma(D+1) N \right]^{1/D}$$

Con N il numero di fermioni nel gas.

Dimostrazione. Si trova dall'eq.(1.6) e integrando sullo spazio delle coordinate nell'eq.(1.3) (presa con il segno +):

$$n(\vec{p}) = \int \frac{d^D \vec{r}}{(2\pi\hbar)^D} \frac{1}{e^{\beta(\vec{p}^2/2m + A\vec{r}^2 - \mu)} + 1} = \frac{1}{(2\pi\hbar^2)^D} \frac{D\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2 + 1)} \int_0^\infty dr \frac{r^{D-1} e^{\beta(\mu - p^2/2m)} e^{-\beta Ar^2}}{1 + e^{\beta(\mu - p^2/2m)} e^{-\beta Ar^2}}$$

dove $D\pi^{D/2}/\Gamma(D/2 + 1)$ è il volume della sfera D-dimensionale unitaria. Faccio il cambio di variabile $y = \beta Ar^2$

$$\begin{aligned} n(\vec{p}) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^D} \frac{D\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2 + 1)} \int_0^\infty \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\beta A} \right)^{D/2} dy \frac{y^{\frac{D}{2}-1} z e^{-y}}{1 + z e^{-y}} \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar^2)^D} \frac{D\pi^{D/2}}{\left(\frac{D}{2}\right)\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\beta A} \right)^{D/2} \Gamma\left(\frac{D}{2}\right) f_{D/2}(z) \\ &= \left[\frac{1}{2\sqrt{\pi}\hbar} \right]^D \left(\frac{2}{\beta m \omega^2} \right)^{D/2} f_{D/2}(z) \end{aligned}$$

Per temperatura zero dei fermioni, utilizzando come distribuzione dei momenti la (1.9):

$$\begin{aligned}
 n(\vec{p}) &= \int \frac{d^D \vec{r}}{(2\pi\hbar)^D} \Theta\left(E_F - \frac{\vec{p}^2}{2m} - U(\vec{r})\right) \\
 &= \frac{1}{(2\pi\hbar^2)^D} \frac{D\pi^{D/2}}{\Gamma(\frac{D}{2} + 1)} \Theta\left(E_F - \frac{\vec{p}^2}{2m}\right) \int_0^{A^{-1/2}(E_F - \vec{p}^2/2m)^{1/2}} dr r^{D-1} \\
 &= \frac{1}{(2\pi\hbar^2)^D} \frac{D\pi^{D/2}}{\Gamma(\frac{D}{2} + 1)} \Theta\left(E_F - \frac{\vec{p}^2}{2m}\right) \frac{1}{D} \left(A^{-1/2}(E_F - \frac{\vec{p}^2}{2m})^{1/2}\right)^D \\
 &= \frac{1}{(2\pi\hbar^2)^D} \frac{D\pi^{D/2}}{\Gamma(\frac{D}{2} + 1)} \Theta\left(E_F - \frac{\vec{p}^2}{2m}\right) \frac{1}{D} \left(\frac{E_F - \frac{\vec{p}^2}{2m}}{A}\right)^{D/2}
 \end{aligned}$$

□

La temperatura di Fermi T_F e l'energia di Fermi E_F si trovano dalla condizione di normalizzazione a temperatura zero della distribuzione dei momenti:

$$\begin{aligned}
 N &= \int d^D \vec{p} \frac{1}{(2\hbar\sqrt{\pi})^D} \left(\frac{2}{m\omega^2}\right)^{D/2} \left(E_F - \frac{\vec{p}^2}{2m}\right)^{D/2} \Theta\left(E_F - \frac{\vec{p}^2}{2m}\right) \\
 N &= \frac{1}{(2\hbar\sqrt{\pi})^D} \left(\frac{2}{m\omega^2}\right)^{D/2} \int_0^{\sqrt{2mE_F}} dp p^{D-1} \left(E_F - \frac{p^2}{2m}\right)^{D/2}
 \end{aligned}$$

Cambio variabile per integrare $x = p^2/2m$ e osservando [18]:

$$\int_0^{E_F} dx x^{D/2-1} (E_F - x)^{D/2} = \frac{\Gamma(\frac{D}{2})\Gamma(\frac{D}{2} + 1)}{\Gamma(D + 1)} E_F^D$$

si ricava:

$$N = \frac{1}{(2\hbar\sqrt{\pi})^D} \left(\frac{2}{m\omega^2}\right)^{D/2} \frac{\Gamma(\frac{D}{2})\Gamma(\frac{D}{2} + 1)}{\Gamma(D + 1)} E_F^D$$

Invertendo si trova la E_F .

Teorema 1.4 Consideriamo un gas di Bose ideale in un potenziale armonico $U(\vec{r}) = \frac{1}{2}m\omega^2\vec{r}^2$ con $r = |\vec{r}| = \sqrt{\sum_{i=0}^D x_i^2}$. La distribuzione a temperatura finita della distribuzione del momento della frazione non condensata è data da:

$$n(\vec{p}) = \frac{1}{(2\hbar\sqrt{\pi})^D} \left(\frac{2}{\beta m\omega^2}\right)^{D/2} g_{D/2}(e^{\beta(\mu - \vec{p}^2/2m)}).$$

La temperatura di transizione di Bose T_B legge:

$$kT_B = \left[(\hbar\omega)^D \frac{N}{\zeta(D)} \right]^{\frac{1}{D}}$$

Dove N rappresenta il numero di bosoni nel gas. E la frazione condensata invece è data da:

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_B}\right)^D$$

Dimostrazione. Si procede come prima con l'eq.(1.6) e integrando sullo spazio delle coordinate l'eq.(1.3) (presa con il segno -). Segue che si deve utilizzare la funzione di Bose $g_{D/2}(z)$ con $z = e^{\beta(\mu - (p^2/2m))}$:

$$n(\vec{p}) = \frac{1}{(2\pi\hbar^2)^D} \frac{D\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2 + 1)} \int_0^\infty dr \frac{r^{D-1} e^{\beta(\mu - p^2/2m)} e^{-\beta Ar^2}}{1 - e^{\beta(\mu - p^2/2m)} e^{-\beta Ar^2}}$$

dove $D\pi^{D/2}/\Gamma(D/2 + 1)$ è il volume della sfera D-dimensionale unitaria. Faccio il cambio di variabile $y = \beta Ar^2$

$$\begin{aligned} n(\vec{p}) &= \frac{1}{(2\pi\hbar^2)^D} \frac{D\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2 + 1)} \int_0^\infty \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\beta A} \right)^{D/2} dy \frac{y^{\frac{D}{2}-1} z e^{-y}}{1 - z e^{-y}} \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar^2)^D} \frac{D\pi^{D/2}}{\left(\frac{D}{2}\right)\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\beta A} \right)^{D/2} \Gamma\left(\frac{D}{2}\right) g_{D/2}(e^{\beta(\mu - p^2/2m)}) \\ &= \left[\frac{1}{2\sqrt{\pi}\hbar} \right]^D \left(\frac{2}{\beta m \omega^2} \right)^{D/2} g_{D/2}(z) \end{aligned}$$

Alla temperatura di transizione T_B , il potenziale chimico $\mu = 0$ ed il numero di particelle N può essere determinato in maniera analitica:

$$\begin{aligned} N &= \int \frac{d^D \vec{r} d^D \vec{p}}{(2\pi\hbar)^D} n(\vec{r}, \vec{p}) = \int d^D \vec{p} \bar{n}(\vec{p}) \\ &= \int d^D \vec{p} \left[\frac{1}{2\sqrt{\pi}\hbar} \right]^D \left(\frac{1}{\beta A} \right)^{D/2} g_{D/2}(e^{\beta(-p^2/2m)}) \\ &= \left[\frac{1}{2\sqrt{\pi}\hbar} \right]^D \frac{D\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2 + 1)} \left(\frac{1}{\beta A} \right)^{D/2} \sum_{i=1}^\infty \frac{1}{i^D} \int_0^\infty dp p^{D-1} e^{-i\beta(p^2/2m)} \end{aligned}$$

dove si è sfruttata la proprietà della funzione $g_n(z) = \sum_{i=1}^\infty \frac{z^i}{i^n}$ e riconoscendo la funzione Gamma definita tramite un integrale convergente $\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx$, cambiando variabile $x = i\beta p^2/2m$, si arriva a:

$$\begin{aligned} N &= \left[\frac{1}{2\sqrt{\pi}\hbar} \right]^D \frac{D\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2 + 1)} \left(\frac{1}{\beta A} \right)^{D/2} \sum_{i=1}^\infty \frac{1}{i^{D/2}} \frac{1}{2} \left(\frac{2m}{i\beta} \right)^{D/2} \Gamma(D/2) \\ &= \left[\frac{1}{2\hbar} \right]^D \left(\frac{1}{\beta A} \right)^{D/2} \left(\frac{2m}{\beta} \right)^{D/2} \sum_{i=1}^\infty \frac{1}{i^D} \end{aligned}$$

Dunque poichè $\sum_0^\infty \frac{1}{i^D} = \zeta(D)$, se $Re(D) > 1$ si ha:

$$N(T) = \left(\frac{kT}{\hbar\omega} \right)^D \zeta(D)$$

Invertendo la funzione $N = N(T)$ si può facilmente ricavare la temperatura di transizione T_B . Sotto la T_B un numero macroscopico N_0 di particelle occupano lo stato fondamentale di singola-particella del sistema :

$$T_B = \frac{\hbar\omega}{k} \left[\frac{N}{\zeta(D)} \right]^{1/D}$$

Dunque dalle equazioni precedenti $N - N_0$ è il numero delle particelle non-condensate. E la frazione condensata è $N_0/N = 1 - (T/T_B)^D$. \square

Capitolo 2

Seconda quantizzazione

Discutiamo la seconda quantizzazione del campo di materia non-relativistico, che è il campo di Schrödinger. Esso può essere espresso come la somma di infiniti oscillatori armonici, che descrivono possibili autoenergie del campo di materia che sono quantizzate con l'introduzione degli operatori di creazione e distruzione, che agiscono sullo spazio di Fock nella rappresentazione dei numeri. La seconda quantizzazione, chiamata anche Teoria Quantistica dei Campi, è uno strumento potente per descrivere il fenomeno a temperatura zero e a temperatura finita, dove il numero di particelle non è conservato, oppure è conservato solo nella media (a differenza della prima quantizzazione dove il numero era fissato a priori).

2.1 Campo di Schrödinger

Wigner e Jordan, basandosi sull'analogia del campo di luce composto da un numero infinito di quanti (fotoni), propongono un modello simile per la materia. Suggestiscono che in meccanica quantistica non-relativistica il campo di materia non sia altro che il campo di Schrödinger $\psi(\vec{r}, t)$ di singola particella della meccanica quantistica, che soddisfa [17]:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\vec{r}) \right] \psi(\vec{r}, t)$$

con $U(\vec{r})$ il potenziale esterno che agisce sulla particella quantistica e scrivendo $\psi(\vec{r}, t) = \phi_\alpha(\vec{r}) e^{-i\epsilon_\alpha t/\hbar}$ si trova:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\vec{r}) \right] \phi_\alpha(\vec{r}) = \epsilon_\alpha \phi_\alpha(\vec{r})$$

che separa la parte spaziale da quella temporale. Questa è l'equazione di Schrödinger stazionaria per l'autofunzione $\phi_\alpha(\vec{r})$ con autovalori ϵ_α dove α è un indice che rappresenta un insieme di numeri quantici. In questo caso $\psi(\vec{r}, t)$ è uno stato stazionario del sistema: $|\psi(\vec{r}, t)|^2 = |\phi_\alpha(\vec{r})|^2$, cioè non dipende da t . In generale il campo di Schrödinger $\psi(\vec{r}, t)$ non è uno stato stazionario del sistema:

$$\psi(\vec{r}, t) = \sum_{\alpha} c_{\alpha}(t) \phi_{\alpha}(\vec{r})$$

dove

$$\int d^3\vec{r} \phi_{\alpha}^*(\vec{r}) \phi_{\beta}(\vec{r}) = \delta_{\alpha\beta}$$

da

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \sum_{\alpha} c_{\alpha}(t) \phi_{\alpha}(\vec{r}) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\vec{r}) \right] \sum_{\alpha} c_{\alpha}(t) \phi_{\alpha}(\vec{r})$$

$$i\hbar \sum_{\alpha} [\dot{c}_{\alpha}(t)] = \epsilon_{\alpha} \sum_{\alpha} c_{\alpha}(t)$$

si arriva a

$$i\hbar [\dot{c}_{\alpha}(t)] = \epsilon_{\alpha} c_{\alpha}(t)$$

la cui soluzione generale è:

$$c_{\alpha}(t) = c_{\alpha}(0) e^{-i\epsilon_{\alpha} t/\hbar}.$$

In questo caso il campo di Schrödinger $\psi(\vec{r}, t)$ non è uno stato stazionario del sistema:

$$\begin{aligned} |\psi(\vec{r}, t)|^2 &= \left[\sum_{\alpha} c_{\alpha}(t) \phi_{\alpha}(\vec{r}) \right]^* \left[\sum_{\beta} c_{\beta}(t) \phi_{\beta}(\vec{r}) \right] \\ &= \sum_{\alpha, \beta} c_{\alpha}(t)^* \phi_{\alpha}(\vec{r})^* c_{\beta}(t) \phi_{\beta}(\vec{r}) \\ &= \sum_{\alpha, \beta} c_{\alpha}(0)^* e^{i\epsilon_{\alpha} t/\hbar} c_{\beta}(0) e^{-i\epsilon_{\beta} t/\hbar} \phi_{\alpha}(\vec{r})^* \phi_{\beta}(\vec{r}) \\ &= \sum_{\alpha, \beta} c_{\alpha}(0)^* c_{\beta}(0) e^{-i(\epsilon_{\beta} - \epsilon_{\alpha}) t/\hbar} \phi_{\alpha}(\vec{r})^* \phi_{\beta}(\vec{r}) \end{aligned}$$

dipende dal tempo ed ovviamente l'integrale:

$$\begin{aligned} \int d^3\vec{r} |\psi(\vec{r}, t)|^2 &= \int d^3\vec{r} \sum_{\alpha, \beta} c_{\alpha}(0)^* c_{\beta}(0) e^{-i(\epsilon_{\beta} - \epsilon_{\alpha}) t/\hbar} \phi_{\alpha}(\vec{r})^* \phi_{\beta}(\vec{r}) \\ &= \sum_{\alpha, \beta} c_{\alpha}(0)^* c_{\beta}(0) e^{-i(\epsilon_{\beta} - \epsilon_{\alpha}) t/\hbar} \delta_{\alpha\beta} \\ &= \sum_{\alpha} c_{\alpha}^*(0) c_{\alpha}(0) \\ &= \sum_{\alpha} |c_{\alpha}(0)|^2 \end{aligned}$$

invece non dipende dal tempo.

La costante del moto associata al campo di Schrödinger $\psi(\vec{r}, t)$ è la media dell'energia totale del sistema, data da:

$$\begin{aligned}
H &= \int d^3\vec{r} \psi^*(\vec{r}, t) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\vec{r}) \right] \psi(\vec{r}, t) \\
&= \int d^3\vec{r} \sum_{\alpha} c_{\alpha}(t)^* \phi_{\alpha}(\vec{r})^* \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\vec{r}) \right] \sum_{\beta} c_{\beta}(t) \phi_{\beta}(\vec{r}) \\
&= \sum_{\alpha} c_{\alpha}(t)^* \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\vec{r}) \right] \sum_{\beta} c_{\beta}(t) \delta_{\alpha\beta} \\
&= \sum_{\alpha} (c_{\alpha}^* c_{\alpha} + c_{\alpha} c_{\alpha}^*) \frac{\epsilon_{\alpha}}{2}
\end{aligned}$$

Quest'energia è ovviamente indipendente dal tempo. Se si usano le variabili reali $q_{\alpha}(t)$ e $p_{\alpha}(t)$, al posto delle ampiezze complesse $c_{\alpha}(t)^*$, $c_{\alpha}(t)$ si trova:

$$\begin{aligned}
q_{\alpha}(t) &= \sqrt{\frac{2\hbar}{\omega_{\alpha}}} \frac{1}{2} (c_{\alpha}(t) + c_{\alpha}^*(t)) \\
p_{\alpha}(t) &= \sqrt{2\hbar\omega_{\alpha}} \frac{1}{2i} (c_{\alpha}(t) - c_{\alpha}^*(t))
\end{aligned}$$

tale che l'energia del campo di materia diventi:

$$H = \sum_{\alpha} \left(\frac{p_{\alpha}^2}{2} + \frac{1}{2} \omega_{\alpha}^2 q_{\alpha}^2 \right)$$

con $\omega_{\alpha} = \frac{\epsilon_{\alpha}}{\hbar}$ l'autofrequenza associata alla autoenergia ϵ_{α} .

Questa energia è quella di infiniti oscillatori armonici con massa unitaria e frequenza ω_{α} . E' scritta in termini di un insieme infinito di oscillatori armonici; uno per ogni modo caratterizzato dai numeri quantici α e frequenze ω_{α} . E' chiara l'analogia tra l'energia del campo di Schrödinger e l'energia del campo elettromagnetico, che riportiamo qui sotto:

$$H = \sum_{\vec{k}} \sum_s \left(\frac{p_{\vec{k},s}^2}{2} + \frac{1}{2} \omega_{\vec{k}}^2 q_{\vec{k},s}^2 \right)$$

dove \vec{k} è il vettore d'onda e s è la polarizzazione.

2.1.1 Seconda quantizzazione del campo di Schrödinger

La quantizzazione canonica della Hamiltoniana classica $H = \sum_{\alpha} \left(\frac{p_{\alpha}^2}{2} + \frac{1}{2} \omega_{\alpha}^2 q_{\alpha}^2 \right)$ è ottenuta promuovendo le coordinate reali q_{α} ed i momenti reali p_{α} agli operatori:

$$\begin{aligned}
q_{\alpha} &\rightarrow \hat{q}_{\alpha} \\
p_{\alpha} &\rightarrow \hat{p}_{\alpha}
\end{aligned}$$

che soddisfino le regole di commutazione $[\hat{q}_{\alpha}, \hat{p}_{\beta}] = i\hbar \delta_{\alpha\beta}$. La Hamiltoniana quantistica è:

$$H = \sum_{\alpha} \left(\frac{\hat{p}_{\alpha}^2}{2} + \frac{1}{2} \omega_{\alpha}^2 \hat{q}_{\alpha}^2 \right). \quad (2.1)$$

Con l'introduzione degli operatori di creazione e distruzione:

$$\begin{aligned} \hat{c}_{\alpha} &= \sqrt{\frac{\omega_{\alpha}}{2\hbar}} \left(\hat{q}_{\alpha} + \frac{i}{\omega_{\alpha}} \hat{p}_{\alpha} \right) \\ \hat{c}_{\alpha}^{\dagger} &= \sqrt{\frac{\omega_{\alpha}}{2\hbar}} \left(\hat{q}_{\alpha} - \frac{i}{\omega_{\alpha}} \hat{p}_{\alpha} \right) \end{aligned}$$

che soddisfano le seguenti regole di commutazione: $[\hat{c}_{\alpha}, \hat{c}_{\beta}^{\dagger}] = \delta_{\alpha\beta}$, $[\hat{c}_{\alpha}, \hat{c}_{\beta}] = [\hat{c}_{\alpha}^{\dagger}, \hat{c}_{\beta}^{\dagger}] = 0$, la Hamiltoniana quantistica diventa:

$$\hat{H} = \sum_{\alpha} \epsilon_{\alpha} \left(\hat{c}_{\alpha}^{\dagger} \hat{c}_{\alpha} + \frac{1}{2} \right).$$

Gli operatori $\hat{c}_{\alpha}, \hat{c}_{\alpha}^{\dagger}$ agiscono sullo spazio di Fock delle particelle del campo di Schrödinger. Uno stato generico dello spazio di Fock è dato da: $|\cdots n_{\alpha} \cdots n_{\beta} \cdots n_{\gamma} \cdots\rangle$. Gli operatori $\hat{c}_{\alpha}, \hat{c}_{\alpha}^{\dagger}$ sono chiamati operatori di annichilazione e creazione rispettivamente, perché loro distruggono e creano una particella nello stato di singola particella $|\alpha\rangle$:

$$\begin{aligned} \hat{c}_{\alpha} |\cdots n_{\alpha} \cdots\rangle &= \sqrt{n_{\alpha}} |\cdots n_{\alpha} - 1 \cdots\rangle \\ \hat{c}_{\alpha}^{\dagger} |\cdots n_{\alpha} \cdots\rangle &= \sqrt{n_{\alpha} + 1} |\cdots n_{\alpha} + 1 \cdots\rangle, \end{aligned}$$

e lo stato di vuoto, cioè dove non ci sono particelle $|0\rangle = |\cdots 0 \cdots 0 \cdots 0 \cdots\rangle$. Si trova che $N_{\alpha} = \hat{c}_{\alpha}^{\dagger} \hat{c}_{\alpha}$ che è l'operatore numero che conta il numero di particelle nello stato di singola-particella $|\alpha\rangle$, cioè $\hat{N}_{\alpha} |\cdots n_{\alpha} \cdots\rangle = n_{\alpha} |\cdots n_{\alpha} \cdots\rangle$. La Hamiltoniana quantistica del campo di materia (caso non interagente) è data da:

$$\hat{H} = \sum_{\alpha} \epsilon_{\alpha} \hat{N}_{\alpha}. \quad (2.2)$$

2.2 Stati Coerenti per bosoni

Vediamo un'applicazione alla Bose Einstein Condensation (BEC) di quello che abbiamo visto finora. E' stato dimostrato che BEC in realtà sono onde di materia coerenti [19]. E' possibile produrre gas bosonici diluiti e ultra freddi fatti da atomi di metalli alcalini in un potenziale di confinamento $U(\vec{r})$ magnetico oppure ottico. Si possono avere fino a 1 milione di atomi di ^{87}Rb alla temperatura di 100 nK nello stato più basso di singola particella. Il sistema può essere così diluito che l'interazione interatomica possa essere trascurata, sotto queste condizioni si ha un BEC puro fatto di bosoni non interagenti descritti dall'Hamiltoniana:

$$\hat{H} = \int d^3\vec{r} \psi^{\dagger}(\vec{r}) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\vec{r}) \right] \psi(\vec{r}) = \sum_{\alpha} \epsilon_{\alpha} \hat{c}_{\alpha}^{\dagger} \hat{c}_{\alpha}.$$

Se ci sono esattamente N bosoni nello stato più basso di singola particella di energia ϵ_0 allora il ground state del sistema è uno stato di Fock:

$$|F_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}}(\hat{c}_0^\dagger)^N |0\rangle = |N, 0, 0, \dots\rangle,$$

si ha $\langle F_N | \hat{\psi}(\vec{r}) | F_N \rangle = 0$, mentre il valore di aspettazione di $\hat{\psi}^\dagger(\vec{r})\hat{\psi}(\vec{r})$ è dato da:

$$\langle F_N | \hat{\psi}^\dagger(\vec{r})\hat{\psi}(\vec{r}) | F_N \rangle = N|\psi_0(\vec{r})|^2.$$

Si può supporre che il numero di bosoni non sia fissato, in altre parole che il sistema non è uno stato di Fock.

Introduciamo uno stato coerente $|c_0\rangle$ tale che:

- $\hat{c}_0 |c_0\rangle = c_0 |c_0\rangle$ con $\langle c_0 | c_0 \rangle = 1$;
- $|c_0\rangle$ è autostato dell'operatore di annichilazione \hat{c}_0 con autovalore $c_0 = |c_0|e^{i\theta_0}$;
- $|c_0\rangle$ non ha un numero fissato di bosoni, cioè non è un autostato dell'operatore numero \hat{N} , nemmeno di \hat{N}_0 ;
- $|c_0\rangle = e^{-|c_0|^2/2} \sum_0^\infty \frac{c_0^N}{\sqrt{N!}} |N, 0, 0, \dots\rangle$.

Si trova (da $\hat{c}_0 |c_0\rangle = c_0 |c_0\rangle$) dunque che $\bar{N} = \langle c_0 | \hat{N} | c_0 \rangle = |c_0|^2$, con $c_0 = \sqrt{\bar{N}}e^{i\theta_0}$, dove \bar{N} è il numero medio di bosoni nello stato coerente, mentre θ_0 è la fase.

Il valore di aspettazione del campo di materia $\hat{\psi}(\vec{r})$ nello stato coerente $|c_0\rangle$ legge:

$$\langle c_0 | \hat{\psi}(\vec{r}) | c_0 \rangle = \sqrt{\bar{N}}e^{i\theta_0} \phi_0(\vec{r}), \text{ con } \omega_0 = \epsilon_0/\hbar,$$

mentre il valore di aspettazione di $\hat{\psi}^\dagger(\vec{r})\hat{\psi}(\vec{r})$ è dato da:

$$\langle c_0 | \hat{\psi}^\dagger(\vec{r})\hat{\psi}(\vec{r}) | c_0 \rangle = \bar{N}|\phi_0(\vec{r})|^2.$$

2.3 Termodinamica

In meccanica quantistica la media termica di un qualsiasi operatore \hat{A} è ottenuta come:

$$\langle \hat{A} \rangle_T = \frac{1}{Z} \text{Tr}[\hat{A}e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})}].$$

Supponiamo che $\hat{A} = \hat{H}$, allora è abbastanza facile mostrare che:

$$\begin{aligned} \langle \hat{H} \rangle &= \frac{1}{Z} \text{Tr}[(\hat{H} - \mu\hat{N})e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})}] \\ &= -\frac{\partial}{\partial\beta} \ln(\text{Tr}[e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})}]) \\ &= -\frac{\partial}{\partial\beta} \ln(Z) \end{aligned}$$

2.3.1 Caso non interagente per bosoni e fermioni

Consideriamo un campo di materia non-interagente in equilibrio con un bagno termico alla temperatura T . Le quantità termodinamiche del sistema le otteniamo dalla funzione di partizione gran-canonica Z , data da:

$$Z = Tr[e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})}],$$

dove $\beta = 1/k_B T$ con $k_B =$ costante di Boltzmann. Poichè $\hat{H} = \sum_{\alpha} \epsilon_{\alpha} \hat{N}_{\alpha}$ è la Hamiltoniana quantistica, $\hat{N} = \sum_{\alpha} \hat{N}_{\alpha}$ è l'operatore di numero totale e μ è il potenziale chimico (esso è fissato dalla conservazione della media del numero di particelle). Questo implica che:

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{\{n_{\alpha}\}} \langle \dots n_{\alpha} \dots | e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})} | \dots n_{\alpha} \dots \rangle \\ &= \sum_{\{n_{\alpha}\}} \langle \dots n_{\alpha} \dots | e^{-\beta \sum_{\alpha} (\epsilon_{\alpha}-\mu)\hat{N}_{\alpha}} | \dots n_{\alpha} \dots \rangle \\ &= \sum_{\{n_{\alpha}\}} e^{-\beta \sum_{\alpha} (\epsilon_{\alpha}-\mu)n_{\alpha}} \\ &= \sum_{\{n_{\alpha}\}} \prod_{\alpha} e^{-\beta(\epsilon_{\alpha}-\mu)n_{\alpha}} \\ &= \prod_{\alpha} \sum_{n_{\alpha}} e^{-\beta(\epsilon_{\alpha}-\mu)n_{\alpha}} \text{ qui } \alpha \text{ è fissato} \\ &\vdots \\ &= \prod_{\alpha} \sum_{n=0}^1 e^{-\beta(\epsilon_{\alpha}-\mu)n} = \prod_{\alpha} (1 + e^{\beta(\epsilon_{\alpha}-\mu)}) \text{ per i fermioni,} \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$= \prod_{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta(\epsilon_{\alpha}-\mu)n} = \prod_{\alpha} \frac{1}{1 - e^{-\beta(\epsilon_{\alpha}-\mu)}} \text{ per i bosoni.} \quad (2.4)$$

Si ottiene utilizzando le (2.3) e (2.4):

$$\begin{aligned} \ln(Z) &= \pm \sum_{\alpha} \ln(1 \pm e^{-\beta(\epsilon_{\alpha}-\mu)}) \\ \langle \hat{H} \rangle_T &= \sum_{\alpha} \epsilon_{\alpha} \langle \hat{N}_{\alpha} \rangle_T \\ \langle \hat{N} \rangle_T &= \sum_{\alpha} \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_{\alpha}-\mu)} \pm 1} \end{aligned}$$

con il + per i fermioni ed invece il - per i bosoni.

Per i fermioni nel limite $\beta \rightarrow \infty$, cioè per temperatura zero si ha:

$$\begin{aligned} \langle \hat{H} \rangle_0 &= \sum_{\alpha} \epsilon_{\alpha} \langle \hat{N}_{\alpha} \rangle_0 \\ \langle \hat{N} \rangle_0 &= \sum_{\alpha} \Theta(\mu - \epsilon_{\alpha}), \end{aligned}$$

dove il potenziale chimico μ a temperatura zero è solo l'energia di Fermi $\epsilon_F = \mu(T = 0)$.

2.3.2 Caso dei bosoni interagenti in un unico livello energetico

Consideriamo un caso particolare dove abbiamo dei bosoni interagenti in un unico livello energetico con hamiltoniana di interazione del seguente tipo:

$$\hat{H} = \epsilon \hat{N} + \frac{U}{2} \hat{N}(\hat{N} - 1)$$

Stiamo guardando il livello fondamentale e tutte le particelle hanno la stessa energia ϵ , se vogliamo potenziale e cinetica. Nel grancanonico si ha:

$$\begin{aligned} Z &= \text{Tr}[e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})}] \\ &= \sum_n \langle n | e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})} | n \rangle \\ &= \sum_n e^{-\beta(\epsilon n + \frac{U}{2}n(n-1) - \mu n)} \\ &\simeq \int_0^\infty dn e^{-\beta[(\epsilon - \mu - \frac{U}{2})n] + \frac{U}{2}n^2} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2\beta U}} e^{-\beta \frac{(\epsilon - \mu - \frac{U}{2})^2}{2U}} \text{erfc}\left[\sqrt{\frac{\beta}{2U}}(\epsilon - \mu - \frac{U}{2})\right] \end{aligned} \quad (2.5)$$

Dove la (2.5) si ottiene dall'approssimazione semiclassica, avendo sostituito $\sum \rightarrow \int$. Nella (2.6) si ha la funzione degli errori complementare $\text{erfc}(x) := 1 - \text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt$. Adesso studiamo la termodinamica.

Calcoliamo il logaritmo di Z , e poi possiamo calcolare il numero di particelle in questo stato:

$$\langle \hat{N} \rangle = \frac{\partial}{\partial a} \ln Z, \text{ dove } a = \beta\mu,$$

$$\ln(Z) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\pi}{2\beta U}\right) - \frac{\beta}{2U} \left(\epsilon - \mu - \frac{U}{2}\right)^2 + \ln\left\{\text{erfc}\left[\sqrt{\frac{\beta}{2U}}(\epsilon - \mu - \frac{U}{2})\right]\right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\pi}{2\beta U}\right) = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{\beta}{2U} \left(\epsilon - \mu - \frac{U}{2}\right)^2 \right] &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{\beta}{2U} \left(\epsilon^2 + \mu^2 + \frac{U^2}{4} - 2\epsilon\mu - \epsilon U + \mu U\right) \right] \\ &= \frac{1}{2U} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\beta\epsilon^2 + \frac{(\beta\mu)^2}{\beta} + \beta \frac{U^2}{4} - 2\epsilon\beta\mu - \beta\epsilon U + \beta U\mu \right] \\ &= \frac{1}{2U} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\beta\epsilon^2 + \frac{\alpha^2}{\beta} + \beta \frac{U^2}{4} - 2\epsilon\alpha - \beta\epsilon U + \beta U\mu \right] \\ &= \frac{1}{U} \left(\frac{\alpha}{\beta} - \epsilon \right) \end{aligned}$$

Sviluppiamo in serie la funzione cumulativa degli errori complementare $\text{erfc}(x)$:

$$\text{erfc}(x) = \frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{(2x^2)^n} \right]$$

e ai fini dei calcoli consideriamo l'approssimazione al primo ordine:

$$\operatorname{erfc}(x) \simeq \frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}}, \text{ con } x = \frac{\beta}{2U}(\epsilon - \mu - \frac{U}{2}).$$

In questo caso il $\ln[\operatorname{erfc}(x)] = -x^2 - \ln x - \ln \sqrt{\pi}$. E derivando rispetto ad α e sostituendo al posto di x il suo valore:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} \ln \left[\operatorname{erfc}\left(\frac{\beta}{2U}(\epsilon - \mu - \frac{U}{2})\right) \right] &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[-\frac{\beta}{2U}(\epsilon - \mu - \frac{U}{2})^2 \right] - \frac{\partial}{\partial \alpha} \ln \left[\frac{\beta}{2U}(\epsilon - \mu - \frac{U}{2}) \right] - \frac{\partial}{\partial \alpha} \sqrt{\pi} \\ &= \frac{1}{U} \left[\frac{\alpha}{\beta} - \epsilon \right] + \frac{1}{\beta(\epsilon - \mu - \frac{U}{2})} \end{aligned}$$

Mettendo insieme tutti i termini abbiamo per il numero medio di particelle:

$$\langle N \rangle_T = \frac{2}{U}(\mu - \epsilon) + \frac{1}{\beta(\epsilon - \mu - \frac{U}{2})}.$$

Capitolo 3

Riduzione dimensionale

3.1 Gross-Pitaevskii e Modello del Campo Medio

Da un punto di vista teorico la dinamica della BEC può essere descritta per mezzo di una teoria del campo medio effettiva. Questo approccio è più semplice del trattare l'equazione a molti-corpi di Schrödinger completa. Il modello rilevante è l'equazione classica nonlineare d'evoluzione, la cosiddetta equazione di Gross-Pitaevskii (GP) [20, 21]. In realtà è una variante della famosa equazione nonlineare di Schrödinger [22]. La non linearità nel modello di GP è introdotta dalle interazioni interatomiche. Lo studio della GP permette la predizione e la descrizione di effetti nonlineari e stati nonlineari (come solitoni e vortici), sperimentalmente rilevanti.

La Hamiltoniana a moti corpi per N bosoni intragenti di massa m e confinati da un potenziale esterno $U(\vec{r})$ e data dalla seconda quantizzazione da:

$$\hat{H} = \int \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\vec{r}) \right] \hat{\Psi}(\vec{r}) d\vec{r} + \frac{1}{2} \int \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}) \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}') V(\vec{r} - \vec{r}') \hat{\Psi}(\vec{r}) \hat{\Psi}(\vec{r}') d\vec{r} d\vec{r}'$$

dove $\hat{\Psi}(\vec{r})$ e $\hat{\Psi}^\dagger(\vec{r})$ sono rispettivamente i operatori di campo di annichilazione e creazione dei bosoni e $V(\vec{r} - \vec{r}')$ è il potenziale interatomico a due corpi. Usiamo l'approssimazione del campo medio $\hat{\Psi}(\vec{r}, t) = \Psi(\vec{r}, t) + \hat{\Psi}'(\vec{r}, t)$ e l'equazione di Heisenberg $i\hbar(\partial\hat{\Psi}/\partial t) = [\hat{\Psi}, \hat{H}]$ e otteniamo:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\Psi}(\vec{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\vec{r}) + \int d\vec{r}' \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}', t) V(\vec{r}' - \vec{r}) \hat{\Psi}(\vec{r}', t) \right] \hat{\Psi}(\vec{r}, t)$$

Adesso dobbiamo semplificare il potenziale interatomico $V(\vec{r}' - \vec{r})$. Consideriamo il caso rilevante di un gas ultra freddo diluito con collisioni binarie a basse energie, caratterizzato dalla lunghezza s -wave di scattering a . In questo limite il potenziale interatomico può essere sostituito da un'interazione effettiva descritta da una funzione delta $V(\vec{r}' - \vec{r}) = g\delta(\vec{r}' - \vec{r})$, dove la costante di accoppiamento è data da $g = 4\pi\hbar^2 a/m$. Con questo potenziale, sostituendo l'operatore campo $\hat{\Psi}$ con il campo classico Ψ abbiamo la equazione GP:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\vec{r}) + g|\Psi(\vec{r}, t)|^2 \right] \Psi(\vec{r}, t). \quad (3.1)$$

3.2 Potenziale esterno

Il potenziale esterno nella GP può assumere diverse forme, dipendente dal tipo di trappola (per es. magnetica oppure ottica). Nel caso della trappola magnetica standard il potenziale esterno assume la forma tipica armonica:

$$V_{MT} = \frac{1}{2}m(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2),$$

dove le frequenze della trappola $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ generalmente sono diverse. Come risultato, la geometria della trappola, perciò anche la forma dello stesso condensato, può variare da forme isotrope a forme fortemente anisotrope. In particolare se $\omega_x = \omega_y \equiv \omega_r \approx \omega_z$ la trappola è isotropa ed il condensato (BEC) è quasi sferico. Mentre se la trappola è anisotropa:

- se $\omega_z < \omega_r$ il BEC è allungato (a forma di sigaro);
- se $\omega_z > \omega_r$ il BEC è schiacciato/appiattito (a forma di piadina).

Poi abbiamo il caso della trappola fortemente anisotropa ($\omega_z \ll \omega_r$ oppure $\omega_z \gg \omega_r$), la quale è effettivamente connessa alla BEC di dimensioni più basse, cioè condensato quasi 1-dimensionale (1D), oppure quasi 2-dimensionale (2D), rispettivamente.

3.3 Derivazione di Modelli 1-D e 2-D

Assumiamo che $\omega_x = \omega_y \equiv \omega_r$, allora se la lunghezza trasversa dell'oscillatore armonico $a_{oa,r} \equiv \sqrt{\hbar/m\omega_r} < \xi$, allora il confinamento trasverso del condensato è così stretto che la dinamica di un tale condensato a forma di sigaro può essere considerato effettivamente 1D. Questo ci permette la riduzione dall'equazione completa 3D GP ad un modello effettivamente 1D GP, il quale può essere ottenuto per rapporti sufficientemente piccoli di frequenze di intrappolamento ω_z/ω_r . Porgiamo di nuovo attenzione al fatto che una tale riduzione può essere considerata come il limite 1D di una teoria 3D del campo medio e non una teoria genuina 1D.

Considerazioni simili valgono per il condensato a forma di piadina, per il quale la condizione $a_{ho,z} < \xi$ insieme alla richiesta di rapporti sufficientemente piccoli di frequenze di intrappolamento ω_r/ω_z , permette la riduzione ad un modello effettivo 2D GP.

Nel modello quasi-1D, assumiamo una trappola altamente anisotropa con $\omega_z \ll \omega_\perp \equiv \omega_x = \omega_y$, decomponiamo la funzione d'onda Ψ in una componente longitudinale (lungo l'asse z) e una componente trasversa (sul piano (x,y)) e cerchiamo soluzioni della (3.1) nella forma

$$\Psi(\vec{r}, t) = \psi(z, t)\Phi(r)e^{-i\mu t}, \quad (3.2)$$

dove $r^2 \equiv x^2 + y^2$, mentre il potenziale chimico μ e la funzione d'onda trasversa $\Phi(r)$ sono coinvolte nel problema ausiliario per l'oscillatore armonico quantistico:

$$\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_\perp^2\Phi - \frac{1}{2}m\omega_r^2 r^2\Phi + \mu\Phi = 0,$$

dove $\nabla_\perp^2 \equiv \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$. Poichè il sistema considerato è effettivamente 1D, è naturale assumere che la componente trasversa della funzione d'onda del condensato $\Phi(r)$ rimane nello stato fondamentale; in tal caso $\Phi(r)$ prende la forma:

$$\Phi(r) = \frac{1}{a_r \sqrt{\pi}} e^{-r^2/2a_r^2}$$

Poi sostituendo (3.2) in (3.1) e mediando l'equazione risultante nella direzione r (cioè moltiplicando $\Phi^* = \Phi$ e integrando rispetto ad r) si ottiene l'equazione 1D GP:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(z, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + V(z) + \tilde{g} |\psi(z, t)|^2 \right] \psi(z, t),$$

dove la nuova costante di accoppiamento $\tilde{g} = g/2\pi a_r^2 = 2a\hbar\omega_r$ è effettivamente 1D e $V(z) = (1/2)m\omega_z^2 z^2$.

A temperature vicine allo zero, dove le fluttuazioni di fase sono trascurabili, tali condensati quasi 1D oppure quasi 2D debolmente interagenti sono possibili e sono stati realizzati sperimentalmente in trappole ottiche e magnetiche e microtrappole di superficie. Anche il caso puro 1D, fortemente interagente, gas di Tonks-Girardeau [23, 24] è stato osservato sperimentalmente, nel quale un gas di bosoni interagenti si comporta come un sistema di fermioni liberi [25, 26].

Conclusioni

Con l'ausilio dell'approssimazione semiclassica e l'ensemble gran canonico, ho derivato le proprietà termodinamiche dei gas ideali in particolare la distribuzione spaziale (che come visto non necessita della esplicitazione del potenziale), la distribuzione dei momenti, l'energia di transizione ed il numero di particelle nel caso di potenziale armonico di confinamento.

Nel secondo capitolo, oltre ad una presentazione generale della Teoria del Campo Medio per il campo di materia, ho riderivato quantità rilevanti nel caso di bosoni e fermioni non interagenti. Grazie all'approssimazione semiclassica ho risolto il caso dei bosoni in un unico livello energetico ma con un potenziale di interazione non lineare.

Infine l'ultimo capitolo, oltre ad essere una presentazione di condensati in dimensioni basse, rappresenta uno spunto teorico e sperimentale per ulteriori sviluppi di condensati o fenomeni correlati alla fisica delle basse temperature con metalli alcalini in configurazioni insolite.

Bibliografia

- [1] S.N. Bose, Z. Phys. **26**, 178 (1924)
- [2] A.Einstein, Sitzungsber. K. Preuss. Akad. Wiss., Phys. Math. Kl. **261** (1924)
- [3] A.Einstein, Sitzungsber. K. Preuss. Akad. Wiss., Phys. Math. Kl. **3** (1925)
- [4] A. Griffin, D. W. Snoke, S. Stringari (eds.), *Bose-Einstein Condensation* (Cambridge University Press, Cambridge, 1995)
- [5] L. Pitaevskii, S. Stringari, *Bose-Einstein Condensation* (Oxford Science Publication, Oxford , 2002)
- [6] M. H. Anderson, E. A. Cornell, J. R. Ensher, M. R. Matthews e C. E. Wieman, Science, Vol. **269**, 198-201 (1995)
- [7] F. Davolfo, S. Giorgini, L.P.Pitaevskii e S. Stringari (1999). *Rev. Mod. Phys.*, **71**, 463
- [8] C.C. Bradley, A. Sackett, J.J. Tollett e R.G. Hulet (1995) *Phys. Rev. Lett.*, **75**, 1687
- [9] E. A. Cornell, C.E. Wieman, Rev. Mod. Phys. **74**, 875 (2002)
- [10] W. Ketterle, Rev. Mod. Phys. **74**, 1131 (2002)
- [11] S. Inouye, M.R. Andrews, J. Stenger, H.J. Meisner, D.M. Stamper-Kurn e W. Ketterle, Nature (London) **392**, 151-154 (1998)
- [12] B. DeMarco e D.S. Jin, Science **285**, 1703-1706 (1999)
- [13] K. Huang, *Statistical Mechanics* (Wiley, New York, 1987)
- [14] L. Salasnich, J. Math. Phys., Vol 41 Num 12, 8016-8024 (2000)
- [15] A.M.O. De Almeida, *Hamiltonian Systems: Chaos and Quantization* (Cambridge University Press, Cambridge, 1988)
- [16] V. Bagnato, D.E. Pritchard e D. Kleppner, Phys. Rev. A **35**, 4354-4358 (1987)
- [17] L. Salasnich *Quantum Physics of Light and Matter* (Springer Verlag, Padova, 2014)
- [18] M. Abramowitz e I.A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions* (Dover, New York, 1965)
- [19] M.R. Andrews, C.G. Townsend, H.-J. Miesner, D.S. Durfee, D.M. Kurn, W. Ketterle, Science **275**, 637 (1999)
- [20] E.P. Gross, J. Math. Phys. **4**, 195 (1963)
- [21] L.P. Pitaevskii, Sov. Phys. JETP **13**, 451 (1961)
- [22] C. Sulem, P.L. Sulem, *The Nonlinear Schrödinger Equation*, (Springer, Berlin Heidelberg New York, 1999)
- [23] L. Tonks, Phys. Rev. **50**, 955 (1936)
- [24] M. Girardeau, J. Math. Phys. (N.Y.) **1**, 516 (1960)

- [25] B. Paredes, A. Widera, V. Murg, O. Mandel, S. Fölling, I. Cirac, G.V. Shlyapnikov, T.W. Häansch, I. Bloch, *Nature* **429**, 277 (2004)
- [26] T. Kinoshita, T. Wenger, D.S. Weiss, *Science* **305**, 1125 (2004)