



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA
FACOLTÀ DI INGEGNERIA

CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INGEGNERIA
MECCANICA E MECCATRONICA (EX 270/04)

MODELLAZIONE E CONTROLLO DI UN SISTEMA
GIROSCOPICO

RELATORE: FERRANTE AUGUSTO

LAUREANDO: CATTELAN DAVIDE

MATRICOLA 593100

ANNO ACCADEMICO:2011/2012

INDICE

1. INTRODUZIONE	4
1.1 STRUTTURA DELLA TESI	4
1.2 INQUADRAMENTO GENERALE.....	5
2. SISTEMA FISICO	6
2.1 DESCRIZIONE SISTEMA FISICO	6
2.1.1 LISTATO MATLAB.....	7
2.2 MODELLIZZAZIONE E LINEARIZZAZIONE	8
2.2.1 LISTATO MATLAB.....	11
3. CONTROLLORE PD	12
3.1 SINTESI CONTROLLORE	12
3.2 LISTATO MATLAB	15
4. CONTROLLORE PID	16
4.1 SINTESI CONTROLLORE	16
4.2 LISTATO MATLAB	19
5. CONTROLLORE COMPENSATORE	20
5.1 SINTESI CONTROLLORE	20
5.2 LISTATO MATLAB	25

6. CONFRONTO TRA I CONTROLLORI	27
6.1 CONFRONTO TRA I CONTROLLORI	27
6.2 LISTATO MATLAB	29
7. INTRODUZIONE DI RUMORE NEL SISTEMA CONTROLLATO ..	29
APPENDICE A	35
A.1 TEOREMA DI ROUTH.....	35
A.2 TEOREMA DI NYQUIST	36
A.3 CALCOLO COEFFICIENTI RETE ANTICIPATRICE	37
APPENDICE B	38
B.1 LISTATO MATLAB COMPLETO	38
BIBLIOGRAFIA	43

Capitolo 1

INTRODUZIONE

1.1 Struttura della tesi

Il presente elaborato è stato strutturato nel modo seguente:

- Nella sezione uno si riporta una breve descrizione dell'elaborato ed un inquadramento generale dell'argomento affrontato.
- Nella sezione due si illustrano: il sistema fisico con le sue caratteristiche dimensionali, il processo di modellizzazione di stato e la sua linearizzazione.
- Nella sezione tre si descrive: la sintesi del controllore PD, la determinazione dei parametri fondamentali ed, infine, la parte di implementazione in ambiente MatLab.
- Nella sezione quattro viene studiato e sintetizzato il PID e viene alla fine riportato il listato di implementazione MatLab .
- Nella sezione cinque si illustra la stabilizzazione del sistema attraverso un compensatore e relativa implementazione in MatLab.
- Nella sezione sei si riassumono i risultati raggiunti e si confrontano i tre controllori dimensionati , mettendone in evidenza pregi e difetti.
- Nella sezione sette il sistema fisico ed i controllori esaminati , vengono studiati ed implementati in Simulink introducendo un rumore di disturbo ed analizzandone gli effetti.
- Nell'appendice A si riporta un estratto dei teoremi di teoria dei sistemi utilizzati.
- Nell'appendice B si riporta il codice Matlab completo utilizzato per l'implementazione .

1.2 Inquadramento generale e breve descrizione

Nel seguente lavoro di tesi ci si occuperà della risoluzione di un problema di controllo. In particolare, l'oggetto di studio su cui ci si è concentrati è un pendolo inverso.

Il punto di partenza di questo elaborato è la modellizzazione di stato di questo sistema al fine di studiarne la stabilità e di ricercare, attraverso diversi metodi, dei controllori che possano garantirne, date ragionevoli condizioni iniziali, l'equilibrio sul punto di verticale alta ed il rispetto delle specifiche di progetto imposte.

In particolare si è focalizzata l'attenzione su tre strutture di stabilizzazione: un PD (proporzionale-derivativo), un PID (proporzionale-derivativo-integrale), ed un compensatore con: guadagno non unitario, un polo ed uno zero .

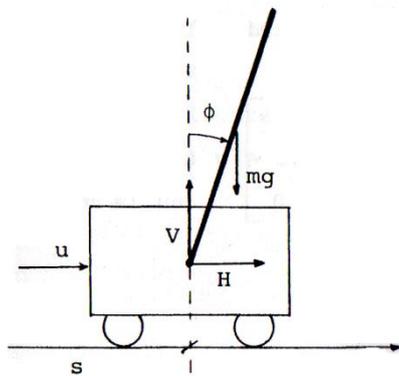
Si è proceduto poi con lo studio ed il calcolo dei parametri concernenti ogni singolo controllore, in modo cartaceo e con l'ausilio dell'implementazione in ambiente MatLab, il quale ha permesso anche la verifica dei risultati ottenuti .Si è inoltre simulato con il toolbox Simulink il caso che il sistema fosse soggetto a dei disturbi non previsti nella modellazione di stato precedentemente realizzata, osservando come, la stabilità ed i controllori dimensionati ,si comportassero in tale situazione che risulta, senza ombra di dubbio molto, più prossima ai casi reali in cui il pendolo inverso (utilizzato in tutti i sistemi giroscopici) viene effettivamente realizzato nella pratica industriale.

Capitolo 2

SISTEMA FISICO

2.1 Descrizione sistema fisico e sue caratteristiche dimensionali

Il sistema fisico preso in esame è composto da un carrello e da un'asta incernierata ad un estremo su di esso, come in figura A.



(figura A)

Caratteristiche fisiche del sistema:

CARATTERISTICA	DIMENSIONI
massa carrello M	2 kg
massa asta m	0,1 kg
accelerazione di gravità g	9,81 m/s ²
lunghezza asta L'	1 m
momento di inerzia baricentrico dell'asta J	8,33*10 ⁻³ kg*m ²

Si noti che, dal momento che l'asta è incernierata ad un estremo e non nel suo baricentro, per trovarne il momento di inerzia totale J_{tot} , al suo momento di inerzia baricentrico bisogna sommare il contributo di Huygens-Steiner (che deriva dall'omonimo teorema) ottenendo:

$$J_{TOT} = \frac{m \cdot L'^2}{12} + m \cdot L^2 = 0,0333 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

dove L è la distanza del baricentro dell'asta dalla cerniera posizionata al suo estremo.

Inoltre, si precisa che le coordinate rotazionali dell'asta sono misurate come è indicato in figura (A). In particolare, la posizione angolare dell'asta è nulla quando essa è bilanciata nel punto alto della verticale e vale $\pm\pi$ nella posizione opposta, ovvero nel punto basso della verticale. In quest'ultimo caso, il segno dell'angolo dipende dalla provenienza dell'asta: se questa si muove ruotando in senso orario il segno è positivo, viceversa in caso contrario (in altri termini, gli angoli

sono positivi se concordi con il verso orario). Si noti comunque che nel modello l'angolo dell'asta non è limitato a variare nell'intervallo $[-\pi, \pi]$.

Sono inoltre riportate rispettivamente con V ed H (per semplicità si è omessa la dipendenza dal tempo) la forza verticale ed orizzontale esercitate dal carrello sull'asta.

Ora, il comportamento dell'insieme asta-carrello può essere descritto da un modello dinamico non lineare del quarto ordine, le cui variabili di stato sono la posizione e la velocità di entrambi i componenti del plant: l'asta e il carrello. L'unico ingresso è costituito dalla spinta orizzontale applicata al carrello.

Nel seguito il sistema verrà riportato al secondo ordine trascurando gli attriti ed imponendo che la massa del carrello M sia molto maggiore di quella dell'asta m ($M \gg m$) (considerando, quindi, di fatto, la sola dinamica del carrello); come variabili di stato verranno usate la posizione angolare dell'asta θ e la sua velocità angolare $\dot{\theta}$, mantenendo come ingresso la spinta orizzontale cui è sottoposto il carrello (in questo elaborato come ingresso verrà usato un gradino di intensità 40 N, come se al carrello venisse imposta un'accelerazione di 20 m/s^2).

2.1.1 Listato MatLab di definizione delle caratteristiche fisiche

```
clc
clear all
close all

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% CARATTERISTICHE FISICHE SISTEMA %%%%%%%%%%%%%
%MASSA CARRELLO [Kg]

M=2;

%MASSA ASTA [Kg]

m=1;

%ACELLERAZIONE DI GRAVITA' [m/s^2]

g=9.81;

%DISTANZA DEL BARICENTRO DELL'ASTA DAL CARRELLO [m]

L=0.5;

%MOMENTO D'INERZIA BARICENTRICO ASTA [Kg*m^2]

J=8.33*10^(-3);
```

2.2 Modellizzazione e linearizzazione del sistema

Dalla figura A si ricava che:

Il moto del baricentro è descritto dalle equazioni:

$$H(t) = m \cdot \frac{d^2}{dt^2} (s(t) + L \cdot \sin \phi(t)) \quad (2.2.1)$$

$$V(t) - m \cdot g = m \cdot \frac{d^2}{dt^2} (L \cdot \cos \phi(t)) \quad (2.2.2)$$

ed il moto di rotazione relativo al baricentro risulta:

$$L \cdot V(t) \cdot \sin \phi(t) - L \cdot H(t) \cdot \cos \phi(t) = J \frac{d^2 \phi(t)}{dt^2} \quad (2.2.3)$$

Il moto del carrello invece è descritto dall'equazione:

$$M \cdot \ddot{s}(t) = -H(t) + u(t)$$

che, trascurando la reazione dell'asta sul carrello, diviene

$$M \cdot \ddot{s}(t) = u(t) \quad (2.2.4)$$

con s che rappresenta lo spostamento orizzontale del carrello; si ottiene, così, l'espressione della forza di ingresso.

Eseguendo le derivate di (2.2.1) ed (2.2.2) ed eliminando $V(t)$ ed $H(t)$ si perviene all'equazione:

$$(J + m \cdot L^2) \cdot \ddot{\phi} - m \cdot g \cdot L \cdot \sin \phi + m \cdot L \cdot \ddot{s} \cdot \cos \phi = 0 \quad (2.2.5)$$

Ora, dalla (2.2.5), introducendo le variabili di stato posizione angolare ϕ e velocità angolare $\dot{\phi}$

$$x_1 = \phi \quad x_2 = \dot{\phi} \quad (2.2.6)$$

ed utilizzando la (2.2.4) per esprimere \ddot{s} si ottiene il modello del sistema fisico:

$$\dot{x}_1 = x_2 = f_1(x_1, x_2, u) \quad (2.2.7)$$

$$\dot{x}_2 = g \frac{mL}{J + mL^2} \cdot \sin x_1 - \frac{mL}{J + mL^2} \cdot \frac{1}{M} \cdot \cos x_1 = f_2(x_1, x_2, u) \quad (2.2.8)$$

Dalle (2.2.7) e (2.2.8) emerge chiaramente che il sistema non è lineare e che, quindi, deve essere linearizzato attorno ad uno stato di equilibrio (si ricorda che la linearizzazione è valida solo attorno ad un punto di equilibrio ed in un intorno ristretto dello stesso).

Si assumerà quindi come punto di equilibrio la posizione sulla verticale alta dell'asta che corrisponde a $\phi = 0$ e si restringerà l'intervallo di analisi in modo tale che valga la relazione $\sin\phi \approx \phi$ che deriva dallo sviluppo in serie della funzione seno e che vale per angoli che tendono a 0 (o comunque non superiori a $0.122 \text{ rad} = 7^\circ$ se si vuole commettere un errore che sia sempre minore di 10^{-3}).

Dalla formula generale dei modelli di stato per sistemi LTI (lineari tempo invarianti):

dove \dot{x} è la derivata delle variabili di stato, u è l'ingresso, y l'uscita e le matrici A , B , C , D dipendono dal sistema fisico analizzato.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= [A] \cdot x + [B] \cdot u \\ y &= [C] \cdot x + [D] \cdot u \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

si ottiene linearizzando nell'intorno del punto $x_1=x_2=0$ per $u=0$:

$$\dot{x} = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right]_{x=0} \cdot x + \left[\frac{\partial f_i}{\partial u} \right]_{x=0} \cdot u = A \cdot x + B \cdot u = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & 0 \end{bmatrix} \cdot x + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{mL} \end{bmatrix} \cdot u$$

$$y = [1 \quad 0] \cdot x = C \cdot x$$

dove, per non appesantire la notazione, si è posto $l = \frac{(J + mL^2)}{mL}$

Come si vede, la matrice D non compare: infatti, l'uscita non ha alcuna dipendenza dall'ingresso u ; inoltre, il fatto che $D=0$ implica che la funzione di trasferimento del modello sia razionale e strettamente propria, vale infatti la relazione:

La funzione di trasferimento di un modello di stato è sempre una funzione razionale strettamente propria $\iff D=0$

Tale funzione può essere facilmente calcolata attraverso la formula:

$$W(s) = C \cdot (sI - A)^{-1} B + D \quad \text{dove } I \text{ è la matrice d'identità}$$

Si ottiene quindi:

$$fnc = \frac{-0.7501}{s^2 - 14.72} \quad (2.2.10)$$

Come facilmente prevedibile, tale funzione rappresenta un sistema intrinsecamente instabile, in quanto ha un polo a parte reale positiva in 3,836; questo si può dedurre anche dal luogo delle radici della stessa riportato in figura 1.

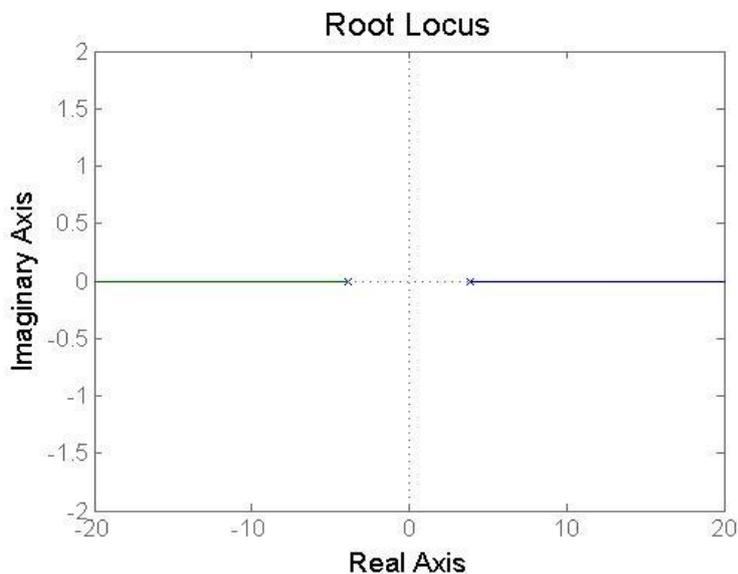
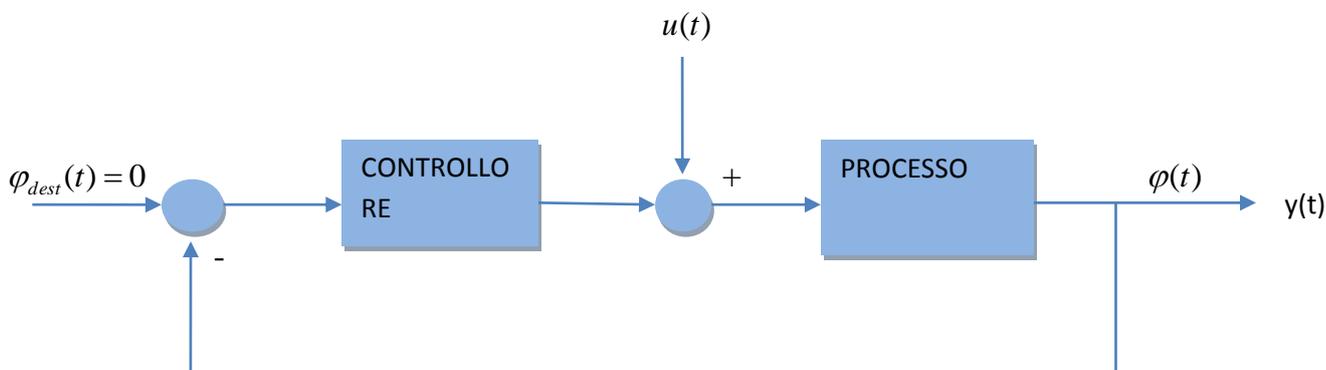
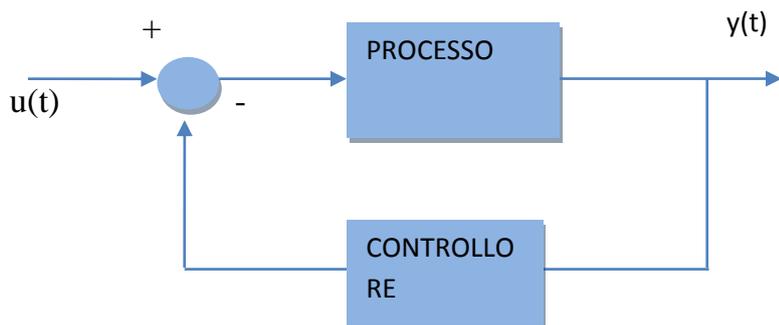


figura (1)

Il ramo a destra dell'asse immaginario infatti, tende ad infinito (dovuto al guadagno negativo) e non attraversa l'asse stesso, quindi tale sistema non sarà mai stabile. Si è pensato quindi, attraverso tre tipologie diverse di controllori, di portarlo a stabilità secondo il seguente schema:



Tuttavia, in virtù del fatto che il segnale di riferimento è nullo, il precedente schema (a due ingressi, $\varphi_{dest}(t)$ e $u(t)$, ed un'uscita, $y(t)$) è del tutto equivalente al seguente schema ad un solo ingresso ed una sola uscita:



2.2.1 Listato Matlab di implementazione del modello:

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% SISTEMA NON CONTROLLATO %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%PER NON APPESANTIRE LA NOTAZIONE DEFINISCO l=(J+M*L^2)/mL

l=0.6666;

%DEFINISCO LE 4 MATRICI DI STATO

A= [0 1 ; g/l 0 ];

B= [ 0; -(1/(M*l)) ];

C= [1 0 ];

D= 0;

%CREO IL SISTEMA DINAMICO

sist= ss(A,B,C,D)

%DEFINISCO LA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

fnc=tf(sist)

%TRACCIO IL LUOGO DELLE RADICI

figure(1)
rlocus(fnc)
```

Capitolo 3

CONTROLORE PD

3.1 Sintesi del controllore PD

Come evidenziato in precedenza, il solo sistema linearizzato non è stabile e si deve ricorrere quindi ad un modello a catena chiusa con, in retroazione, un controllore che stabilizzi il tutto. Si richiede inoltre, come specifica di progetto, che il sistema arrivi a regime in un tempo pari od inferiore a 5 secondi ed un errore a regime inferiore a 5°. Si era inizialmente pensato di utilizzare un PI con

trasferenza $K_p + \frac{K_i}{s}$, ma questo non è risultato sufficiente a soddisfare quanto richiesto. Infatti, imponendo un tempo di assestamento t_s all'1% di 4,6 secondi si ottiene che tutti i poli della funzione di trasferimento ad anello chiuso devono essere più a sinistra di -1 (si trasla di fatto l'asse verticale del luogo delle radici centrandolo in -1). Risulta quindi come denominatore della funzione ad anello chiuso:

$$D(s) = (s-1)^3 - 14.72(s-1) - 0.7501K_p(s-1) - 0.7501K_i = \quad (3.1.1)$$

$$= s^3 - 3s^2 + s(-11.72 - 0.7501K_p) + 13.72 + 0.7501K_p - 0.7501K_i$$

ed applicando il teorema di Routh si evince che il sistema non si stabilizzerà mai, in quanto sulla prima colonna il termine di secondo grado apparirà sempre negativo per qualsiasi tempo di assestamento si imponga, rendendo quindi il polinomio non Hurwitziano come dimostra la tabella di Routh che segue:

3	1	-11,72 - 0,7501K _p
2	-3	0,7501K _p - 0,7501K _i
1	A	0
0	0,7501K _p - 0,7501K _i	-----

dove $\alpha = \frac{-1}{-3} \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & -11,72 - 0,7501K_p \\ -3 & 0,7501K_p - 0,7501K_i \end{bmatrix}$ (3.1.2)

da cui risulta evidente come, anche imponendo K_i e K_p in modo tale che α risulti positivo, il termine di secondo grado sarà sempre negativo.

Si è quindi spostata l'attenzione su un controllore PD di trasferimento $K_p + K_d s$. Ricalcolando la funzione di trasferimento ad anello chiuso secondo la ben nota formula $W = \frac{G}{1 + CG}$ dove G è il processo da stabilizzare e C il controllore posto sul ramo di retroazione si ottiene:

$$W_{pd} = \frac{-0,7501}{s^2 - 0.7501K_d s - 0.7501K_p} \quad (3.1.3)$$

Secondo le specifiche imposte sul tempo di assestamento si ha, come nel caso precedente, che tutti i poli della funzione di trasferimento devono stare a sinistra del punto -1, ottenendo quindi il nuovo denominatore:

$$D(s) = (s-1)^2 - 0.75,01K_d(s-1) - 0.7501K_p = s^2 - (2+0,7501K_d)s + 0,7501(K_d-K_p) - 13,72$$

compilando ora la tabella di Routh si ottiene:

2	1	$0,7501(K_d-K_p)-13,72$
1	$-2-0,7501K_d$	0
0	$0,7501(K_d-K_p)-13,72$	-----

affinché il polinomio sia Hurwitziano è necessario che nella prima colonna ci siano tutti termini strettamente positivi quindi si deve imporre:

$$-2-0,7501K_d > 0 \quad \text{e} \quad 0,7501(K_d-K_p)-13,72 > 0$$

$$\text{ottenendo di fatto } K_d < -2,66 \quad \text{e} \quad K_p < K_d - 18,29$$

le due condizioni appena trovate sono quelle che garantiscono un tempo di assestamento all'1% di 4,6 secondi, ma non le specifiche sull'errore a regime. Per rispettare anche queste ultime si può procedere per iterazioni aumentando il fattore proporzionale K_p fino al valore di errore desiderato. Si precisa inoltre che il termine derivativo K_d influisce sulla sottoelongazione, infatti aumentando il valore di tale parametro il sistema inseguirà più rapidamente le variazioni del segnale d'ingresso, diminuendo quindi la sottoelongazione stessa. Con dei valori di K_p e K_d rispettivamente di -550 e -231, oltre a garantire la stabilità con un margine di fase di circa $89,2^\circ$ (quindi molto elevato, come risulta evidente dal diagramma di Nyquist in figura (2)),

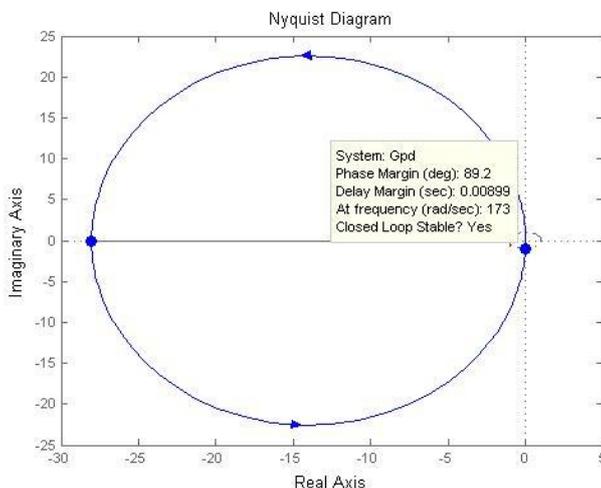


figura (2)

si rispettano anche le specifiche di progetto ottenendo un errore di 0,075 rad ovvero di 4,29° (come si può vedere dalla risposta a gradino in figura (3)).



figura (3)

Si riporta inoltre, in figura (4) , la risposta all'impulso del sistema così controllato, che evidenzia nuovamente come, anche in evoluzione libera, il sistema risulti stabile e in questo caso abbia una sottoelongazione massima di circa $4 \cdot 10^{-3}$ radianti ovvero di 0,22° quindi praticamente trascurabile.

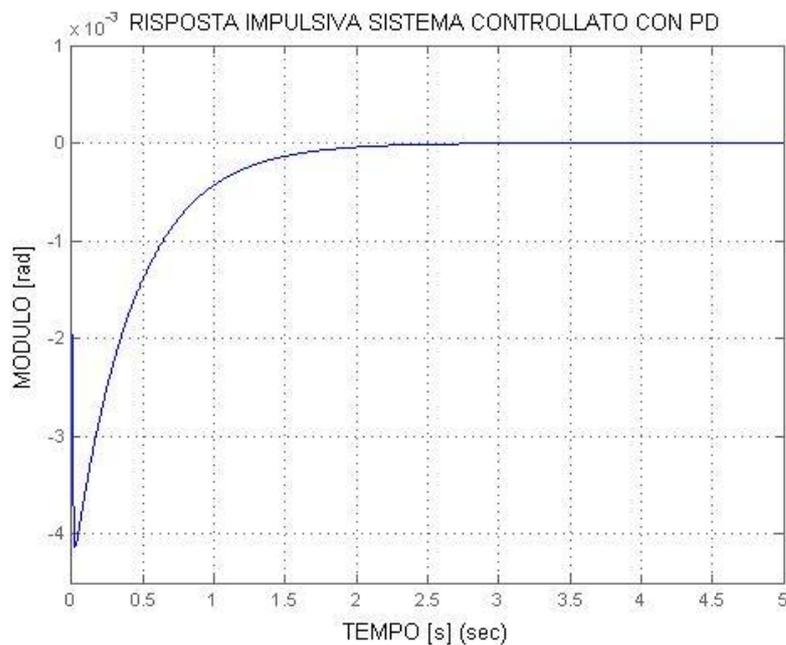


figura (4)

3.2 Listato Matlab di implementazione del controllo con controllore PD

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% STABILIZZAZIONE CON CONTROLLORE PD %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% FUNZIONE DI TRASFERIMENTO CONTROLLORE PD CALCOLATA CON IL CRITERIO DI
% ROUTH

Npd=[-231 -550];

Dpd=[1];

PD=tf(Npd,Dpd);

%TRACCIO IL DIAGRAMMA DI NYQUIST PER CONFERMARNE LA STABILITA'
Gpd=fnc*PD;
figure(2),nyquist(Gpd)

%DEFINISCO LA CATENA CHIUSA CON IL CONTROLLORE PD NEL RAMO DI RETROAZIONE

Wpd=(fnc/(1+(fnc*PD)))

%ESEGUO ORA LA SIMULAZIONE PER OTTENERE LA RISPOSTA IMPULSIVA E AL GRADINO
%DEL SISTEMA

%TEMPO DI SIMULAZIONE

t=0:0.001:5;

%DEFINISCO UN GRADINO DI AMPIEZZA 40 COME INGRESSO
u=40*ones(size(t));

%RISPOSTA IMPULSIVA
figure(3),impulse(Wpd,t),grid
title('RISPOSTA IMPULSIVA SISTEMA CONTROLLATO CON PD')
xlabel('TEMPO [s]')
ylabel('MODULO [rad]')

%RISPOSTA A GRADINO
figure(4),lsim(Wpd,u,t),grid
title('RISPOSTA A GRADINO SISTEMA CONTROLLATO CON PD')
xlabel('TEMPO [s]')
ylabel('MODULO [rad]')
```

Capitolo 4

CONTROLLORE PID

4.1 Sintesi del controllore PID

Si procede ora con l'analisi e la sintesi di un altro controllore ,ovvero quello proporzionale-integrale-derivativo.Si vuole stabilizzare il sistema in modo che arrivi a regime in un tempo inferiore a 5 secondi con un errore a regime inferiore ai 5° (si vedrà in seguito che questa ultima specifica risulterà inutile). Per fare ciò si ricorda che un processo può considerarsi a regime dopo un tempo pari 5 volte la sua costante di tempo. Da questa ultima considerazione si evince che la costante di tempo della catena chiusa deve essere quindi di 1 s e che in frequenza si debba avere 0,2 rad/s. La trasferenza del controllore presa in considerazione è :

$$\frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s} \quad (4.1.1)$$

Per calcolare i tre coefficienti si è scelto il metodo della allocazione dei poli, in modo tale da poter scegliere il polo dominante e quindi la velocità della dinamica del sistema. Con questo metodo si sceglie il denominatore $D_w(s)$ della trasferenza che lega l'ingresso di riferimento all'uscita ma non si pongono vincoli sul suo numeratore $N_w(s)$.Indicando con $N_c(s)$ e $D_c(s)$,rispettivamente il numeratore ed il denominatore del controllore, si tratta quindi di determinare questi ultimi due polinomi in modo tale che venga rispettata la condizione:

$$D_c(s)D_p(s)+N_c(s)N_p(s)=D_w(s) \quad (4.1.2)$$

mentre il numeratore della $W(s)$ risulterà:

$$N_w(s)=N_c(s)N_p(s). \quad (4.1.3)$$

Senza perdita di generalità si può assumere che $D_p(s)$ e $D_w(s)$ siano monici e che $D_p(s)$ ed $N_p(s)$ siano coprimi. La funzione di trasferimento del processo come detto è strettamente propria , mentre si ammette che la funzione di trasferimento del controllore sia solo propria. In tal modo la $Q(s)=C(s)G(s)$ risulta strettamente propria e dalla (4.1.2) consegue che il denominatore $D_c(s)$ è monico.

Il problema dell'assegnazione dei poli si risolve uguagliando i coefficienti dei polinomi $N_c(s)$ e $D_c(s)$.Per quanto riguarda il numero complessivo n delle incognite e quello n_{eq} delle equazioni risultanti dalla procedura appena indicata, nell'ipotesi che (come nel nostro caso):

$\deg[N_c(s)]=\deg[D_c(s)]$ si ha che

$n=2\deg[D_c(s)]+1$ in quanto $D_c(s)$ è monico e

$n_{eq}=\deg[D_c(s)]+\deg[D_p(s)]=\deg[D_w(s)]$

in quanto pure $D_p(s)$ e $D_w(s)$ sono monici.

Affinché $n_{eq}=n$, i gradi di $D_c(s)$ e $D_w(s)$ devono comunque soddisfare i seguenti vincoli:

$$\deg[D_c(s)] = \deg[D_p(s)] - 1 \quad (4.1.4)$$

$$\deg[D_c(s)] = 2\deg[D_p(s)] - 1 \quad (4.1.5)$$

In conclusione una volta a disposizione il modello del processo, si devono scegliere i $2\deg[D_p(s)] - 1$ poli di $W(s)$ e scegliere un controllore con funzione di trasferimento propria di ordine dato dalla (4.1.4); il controllore con trasfrenza data dalla (4.1.1) soddisfa tutti i precedenti requisiti.

Come poli, per soddisfare le specifiche di progetto, si è scelto $p_1 = -5$, $p_2 = -6$ e $p_3 = -7$. Sarà infatti quello più vicino all'asse immaginario a dominare la dinamica e, imponendo lo stesso a -5 , si soddisfano le specifiche di progetto richieste. La scelta effettuata da origine dunque ad un polinomio:

$$(s+5)(s+6)(s+7) \quad (4.1.6)$$

La funzione di trasferimento in anello chiuso è data ancora una volta dalla formula $W = \frac{G}{1+CG}$ con usuale significato dei simboli. Per il caso da noi esaminato si ha quindi che

$$W_{pid} = \frac{-0,7501s}{s(s^2 - 14,72) - 0,7501(K_p s + K_d s^2 + K_i)} \quad (4.1.7)$$

ottenendo quindi una uguaglianza secondo quanto detto in precedenza:

$$(s+5)(s+6)(s+7) = s(s^2 - 14,72) - 0,7501(K_p s + K_d s^2 + K_i) \quad (4.1.8)$$

uguagliando i termini con lo stesso grado da luogo a:

$$-14,72 - 0,7501K_p = 107$$

$$-0,7501K_d = 77$$

$$-0,7501K_i = 210$$

ovvero a:

$$K_p = -162,7$$

$$K_d = -102,5$$

$$K_i = -279,96$$

La trasferenza del controllore è quindi: $C_{pid} = \frac{-102,65s^2 - 162,27s - 279,96}{s}$ (4.1.9)

Tracciando il diagramma di Nyquist del sistema controllato con tale controllore, come si può vedere dalla figura(5), risulta che il tutto viene stabilizzato

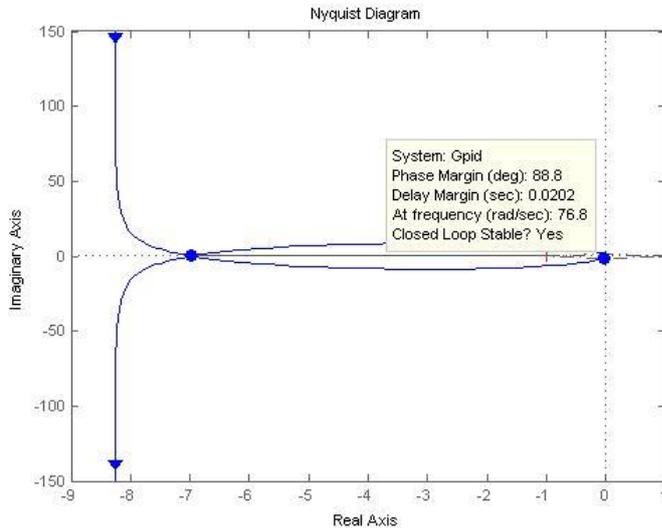


figura (5)

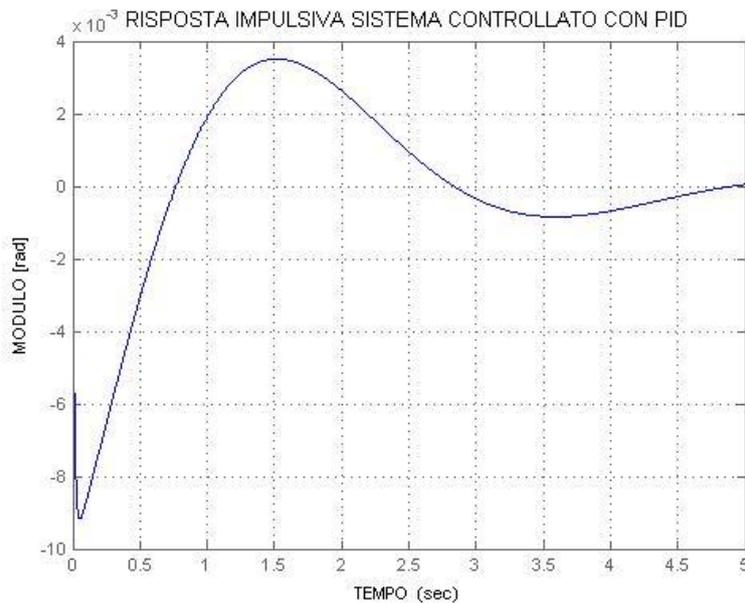
con un margine di fase di $88,8^\circ$ (quindi ben lontano dall'instabilità). Il controllore appena sintetizzato rispetta inoltre tutte le specifiche di progetto come si può osservare dalla figura (6), che rappresenta la risposta al gradino del sistema a catena chiusa.



figura (6)

Si noti come in 5 secondi il sistema arrivi con buona approssimazione a regime, avendo una sottoelongazione massima di circa il 13% ($7,44^\circ$) e quindi accettabile. Viene inoltre riportata in figura (7) anche la risposta impulsiva del sistema (che ne evidenzia il comportamento ad una forza

impulsiva in ingresso) dalla quale si può notare come la sottoelongazione massima sia molto contenuta.



figura(7)

4.2 Listato MatLab per l'implementazione del controllore PID e del sistema in catena chiusa

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% STABILIZZAZIONE CON PID %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%FUNZIONE DI TRASFERIMENTO PID CON COEFFICIENTI CALCOLATI MEDIANTE
%ALLOCAZIONE DEI POLI

Npid= [-102.65 -162.27 -279.96];

Dpid=[1 0];

PID=tf(Npid,Dpid);

%CATENA CHIUSA CON IL CONTROLLORE PID SUL RAMO DI RETROAZIONE

Wpid=((fnc)/(1+(PID*fnc)))

%DIAGRAMMA DI NYQUIST PER ULTERIORE CONFERMA DELLA STABILITA'

Gpid=fnc*PID

figure(5),nyquist(Gpid)

%ESEGUO ORA LA SIMULAZIONE PER OTTENERE LA RISPOSTA IMPULSIVA E AL GRADINO
%DEL SISTEMA

%RISPOSTA IMPULSIVA
figure(6),impulse(Wpid,t),grid
title('RISPOSTA IMPULSIVA SISTEMA CONTROLLATO CON PID')

```

```

xlabel('TEMPO [s]')
ylabel('MODULO [rad]')

%RISPOSTA A GRADINO
figure(7), lsim(Wpid,u,t), grid
title('RISPOSTA A GRADINO SISTEMA CONTROLLATO CON PID')
xlabel('TEMPO [s]')
ylabel('MODULO [rad]')

```

Capitolo 5

CONTROLLORE COMPENSATORE

5.1 Sintesi del compensatore

Per stabilizzare il sistema come ultimo controllore si utilizza un compensatore che ,in catena chiusa con il sistema stesso, dia un tempo di assestamento all' 1% inferiore o uguale a 5 secondi ed un errore a regime massimo di 5°. Si è pensato a tal fine di utilizzarne uno avente un polo, uno zero ed un guadagno non unitario. Dato che il sistema fisico modellizzato ha un solo polo a parte reale positiva che lo destabilizza, ponendo in retroazione un controllore ,che abbia uno zero nello stesso punto dell'asse reale positivo, si avrebbe l'elisione del polo destabilizzante rendendo quindi BIBO stabile il sistema complessivo in catena chiusa. Questa soluzione però è fortemente sconsigliata , in quanto ,ogni minimo disturbo esterno o scostamento tra il sistema fisico reale e la modellizzazione eseguita (si ricorda che al fine di realizzarne una rappresentazione matematica il modello fisico è stato linearizzato e quindi intrinsecamente approssimato) porterebbe una delle due radici, od entrambe, a spostarsi dal punto calcolato teoricamente evitando l'elisione e rendendo il sistema nuovamente instabile. Si è quindi proceduto, dopo l'analisi del luogo delle radici del sistema stesso (figura 1), a posizionare lo zero ed il polo del compensatore rispettivamente, tra l'asse immaginario ed il polo stabile del sistema fisico in -3 (di fatto sarà posto lo zero in +3 imponendo però un guadagno unitario e negativo che verrà successivamente modificato), e a sinistra di tutti i poli e gli

zeri dello stesso in -6, stabilizzando di fatto il sistema come si può notare dalla figura 8:

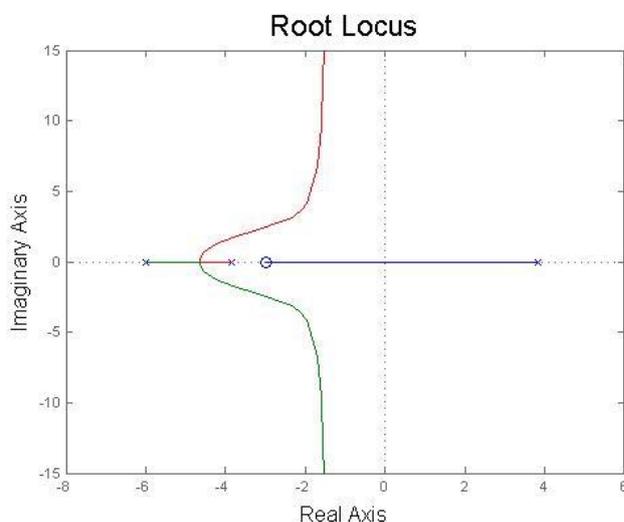


figura (8)

Si può inoltre osservare come il sistema abbia un punto doppio in -4.65 (che appartenendo al luogo stesso è quindi accettabile come tale) e che i due rami uscenti da esso tendano asintoticamente al valore di centro stella dato da:

$$\sigma_c = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n - m} = -1,5 \quad (5.1.1)$$

dove p sono i poli e z gli zeri della catena aperta ed n-m è la differenza tra i gradi del denominatore e numeratore della stessa. Per quanto riguarda il guadagno del controllore in esame, esso è stato determinato attraverso la funzione Matlab rlocfind posizionandosi in -2 ed è risultato pari a -56. Riassumendo si è quindi ottenuto un compensatore di trasferimento:

$$COM = -56 \frac{(s + 3)}{(s + 6)} \quad (5.1.2)$$

Analizzando però il diagramma di Nyquist del sistema così controllato si nota che, effettivamente il sistema è stabile, ma il suo margine di fase è molto stretto ,infatti risulta di soli 19,3° (figura 9) quando, in favore di sicurezza, se ne richiederebbero almeno 45°. Tutto questo rende il sistema molto sensibile ad eventuali disturbi od errori di approssimazione del modello di stato:

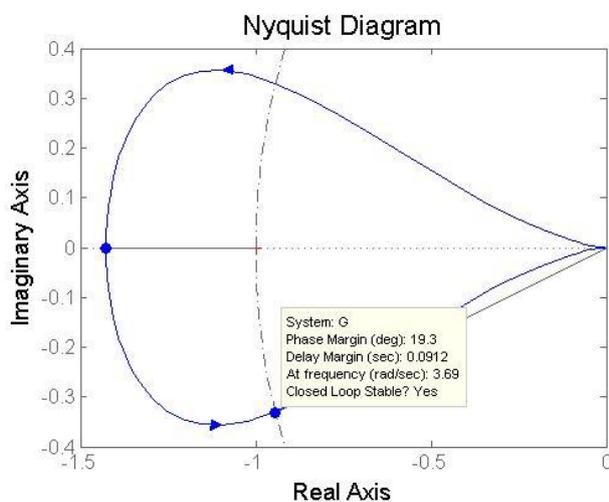


figura (9)

Per risolvere tale problema si è deciso di inserire in catena chiusa una rete correttiva elementare . Imponendo un tempo di salita t_r pari 0,5 secondi ed un nuovo margine di fase di 55° si ottiene:

$$\omega_a \approx 2 / t_r = 2 / 0.5 = 4 \frac{rad}{s} \quad \text{pulsazione di attraversamento}$$

$$m_\varphi \approx 1,04 - 0,8m_p$$

dalla quale risulta che per avere un margine di fase m_φ maggiore di 55° si deve tollerare una sovralongazione minima m_p del 10%

Si ricorda che tali formule sono approssimate e valgono solo nel caso le reti siano applicate a sistemi già stabili per migliorarne le performance, non per portare dall'instabilità alla stabilità i sistemi stessi.

Per decidere quale tipo di rete correttiva elementare utilizzare si può ora tracciare il diagramma di Bode della trasferenza di catena aperta G_p^l riportato in figura (10) :

$$G_p^l = fnc \cdot COM = \frac{42s + 126}{s^3 + 6s^2 - 14.72s - 88.32} \quad (5.1.2)$$

determinando, in particolare, il valore del suo modulo e della sua fase in corrispondenza della pulsazione di attraversamento ω_A . Ottenendo:

$$\begin{aligned} |G_p^l| &= -0.489db = 0.9452 < 1 \\ \arg[G_p^l] &= -161^\circ = 2.80rad < m_\varphi - \pi \end{aligned}$$

e rendendo necessaria quindi l'utilizzo di una rete correttiva ad azione anticipatrice di trasferenza:

$$\frac{1 + Ts}{1 + \alpha Ts} \quad (5.1.1)$$

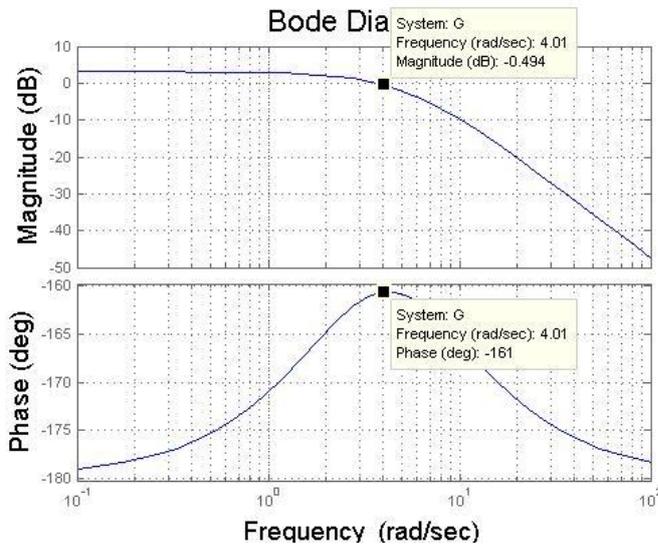


figura (10)

Si definisce inoltre:

$$\varphi = m_\varphi - (\pi + \arg[G_p^l]) = 36^\circ = 0.62 \text{ rad}$$

$$M = \frac{1}{|G_p^l|} = 1.0579$$

Prima di procedere con il calcolo dei parametri T ed α della rete si deve verificare la condizione di realizzabilità della stessa, che impone $M > \frac{1}{\cos \varphi}$. Sostituendo i valori appena calcolati si ottiene

$1,0579 > 1.236$, risultando quindi non verificata e rendendo evidente che una sola rete anticipatrice non riesce ad anticipare abbastanza fase. Si è dunque deciso di inserire due reti identiche che anticipino ciascuna 18° , in modo tale da soddisfare la condizione sopracitata.

Passando ora al calcolo dei due parametri α e T si ottiene per la nuova rete si ottiene:

$$\alpha = \frac{M \cos \varphi - 1}{M^2 - M \cos \varphi} = 0,0466$$

$$T = \frac{1}{\omega_A} \sqrt{\frac{1 - M^2}{\alpha^2 M^2 - 1}} = 0.0864$$

che sostituendo nella trasferenza (5.1.1) da luogo alla rete:

$$R = \frac{0.08643s + 1}{4.02 \cdot 10^{-3}s + 1}$$

Analizzando ora nuovamente il diagramma di Nyquist della catena chiusa, inserendo anche le due reti appena dimensionate (figura 11), si può notare come il margine di fase sia notevolmente migliorato, pari ora a $59,7^\circ$. Si osservi che non è esattamente quello voluto, a causa del fatto che il metodo usato per ricavare i parametri α e T è iterativo e quindi richiederebbe almeno un'altra iterazione ma, visto che il nuovo margine di fase è approssimativamente quello voluto ed addirittura maggiormente cautelativo, può essere accettato. Il sistema quindi ora ha una stabilità più forte ed è meno sensibile ai disturbi.

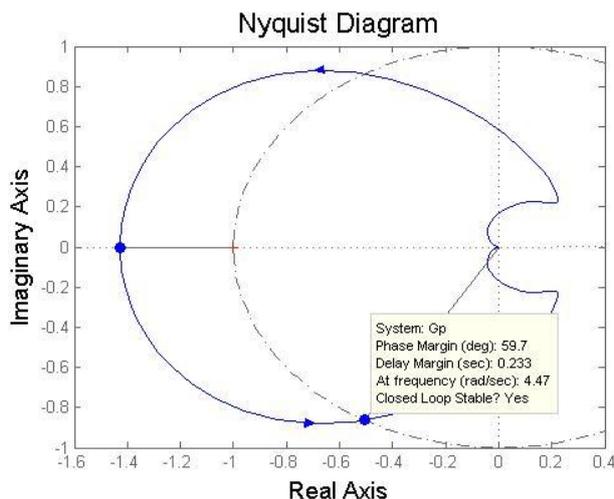


figura (11)

Fino ad ora ci siamo però solamente occupati della robustezza della stabilità del sistema complessivo ma non del suo errore a regime, infatti il sistema così come sintetizzato fino ad ora non rispetta le specifiche di errore a regime imposte, infatti l'errore a regime risulta di circa 6° . Visto lo scostamento minimo di appena un grado dalla condizione limite di progetto si è proceduto con l'aumento ulteriore del guadagno del controllore (di un fattore 20) comportando però

una riduzione del margine di fase che comunque si mantiene su un valore di sicurezza pari a 45° , come evidenziato in figura 12:

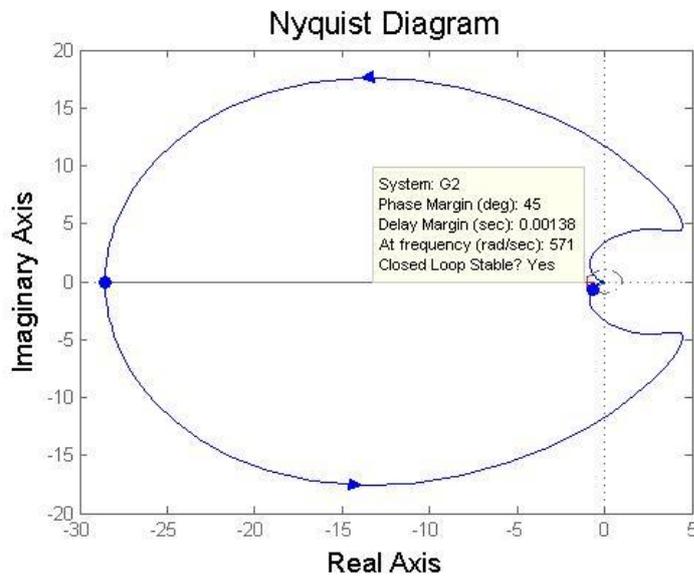


figura (12)

Dalla risposta a gradino ed impulsiva (figura 13 e 14) del sistema in catena chiusa così dimensionato, si può vedere che tutte le condizioni di progetto e di stabilità sono rispettate. Si può notare inoltre che nella risposta forzata non è praticamente presente nessun picco di sottoelongazione ma uno scostamento massimo dell'asta dalla verticale è inferiore ai 5° e pari all'errore a regime. Nella risposta all'impulso invece, il picco è pari a $4,5 \cdot 10^{-3}$ rad ovvero $0,25^\circ$ e quindi più che accettabile.

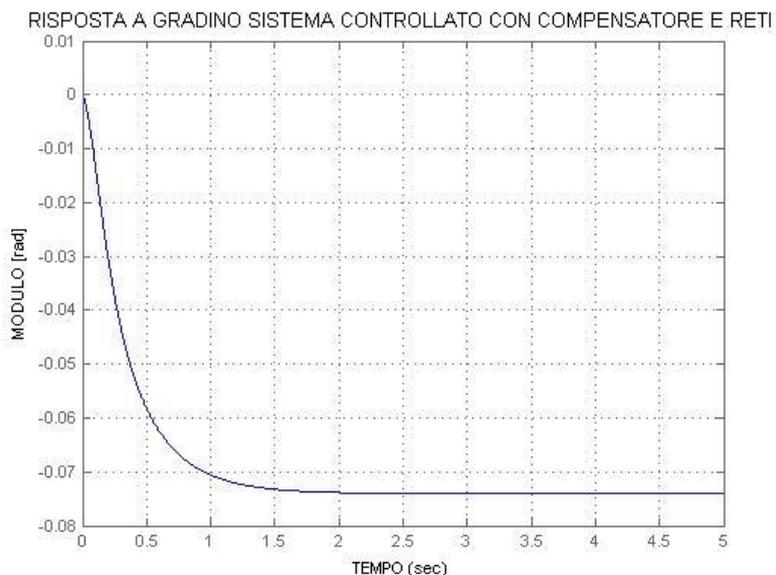


figura (13)

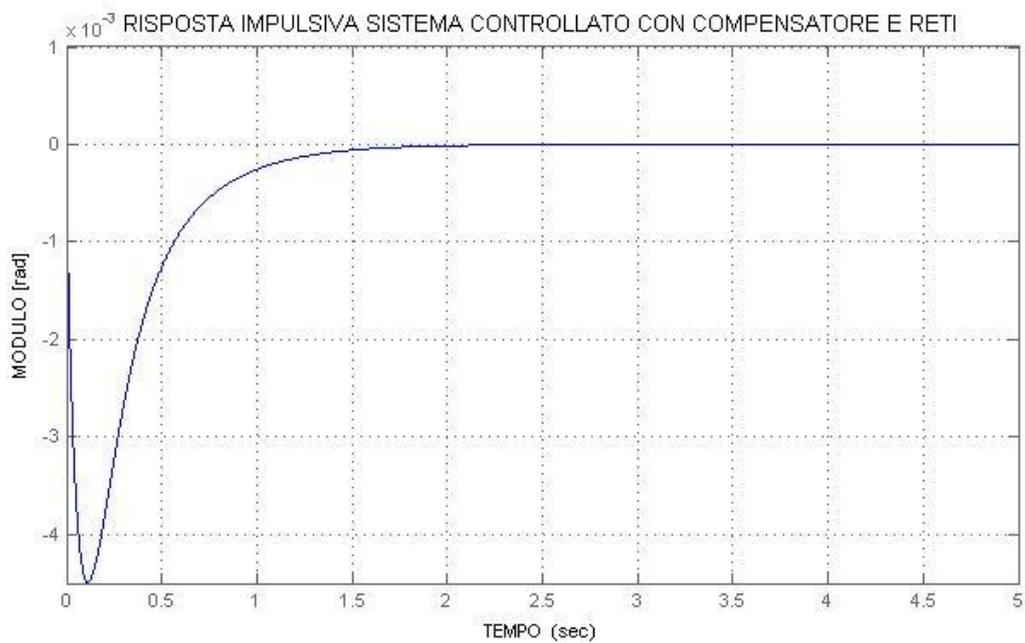


figura (14)

5.2 Listato Matlab usato per l'implementazione:

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% STABILIZZAZIONE CON COMPENSATORE %%%%%%%%%
%DEFINISCO NUMERATORE E DENOMINATORE DEL COMPENSATORE SCELTO

Nc=[-1 -3];

Dc=[1 6];

%FUNZIONE DI TRASFERIMENTO DEL COMPENSATORE

COM1=tf(Nc,Dc);

W=fnc*COM1

%TRACCIO IL LUOGO DELLE RADICI PER OSSERVARE LA STABILITA' ED ATTRAVERSO LA
%FUNZIONE rlocfind DETERMINO IL GUADAGNO NEL PUNTO (-2;0)

figure(8),rlocfind(W)

%DEFINISCO IL CONTROLLORE CON IL GUADAGNO APPENA CALCOLATO

COM=56*COM1;

%DEFINISCO LA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO DELLA CATENA APERTA

G=fnc*COM

%TRACCIO IL DIAGRAMMA DI NYQUIST PER OSSERVARE LA STABILITA' ED
%IL MARGINE DI FASE DELLA CATENA CHIUSA

```

```

figure(9), nyquist(G)

%TRACCIO IL DIAGRAMMA DI BODE DELLA CATENA CHIUSA PER DIMENSIONARE LA RETE

figure(10), bode(G)

%DEFINISCO LA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO DELLA RETE APPENA CALCOLATA

numR=[0.08643 1];
denR=[0.00402 1];
R=tf(numR,denR)

%LE RETI DA POSIZIONARE NEL CIRCUITO SONO RISULTATE DUE QUINDI:

Rtot=R*R;

%DEFINISCO LA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO IN CATENA APERTA PER TRACCIARE
%DIAGRAMMA DI NYQUIST E VALUTARE NUOVAMENTE STABILITA' E MARGINE DI FASE

Gp=G*R*R

figure(11), nyquist(Gp)

%OSSERVO CHE LA RISPOSTA AL GRADINO NON SODDISFA I REQUISITI SULL'ERRORE A
%REGIME QUINDI AUMENTO IL GUADAGNO PER RIDURLO

COM2=20*COM

%TRACCIO NUOVAMENTE IL DIAGRAMMA DI NYQUIST PER RIVALUTARE LA STABILITA'

G2=fnc*COM2*Rtot

figure(12), nyquist(G2)

%DEFINISCO ORA LA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO AD ANELLO CHIUSO DEL SISTEMA E
%DEI CONTROLLORI APPENA SINTETIZZATI

Wcom=(fnc/(1+fnc*COM2*Rtot))

%ESEGUO ORA LA SIMULAZIONE PER OTTENERE LA RISPOSTA IMPULSIVA E AL GRADINO
%DEL SISTEMA

%RISPOSTA IMPULSIVA
figure(13), impulse(Wcom,t), grid
title('RISPOSTA IMPULSIVA SISTEMA CONTROLLATO CON COMPENSATORE E RETI')
xlabel('TEMPO [s]')
ylabel('MODULO [rad]')

%RISPOSTA A GRADINO
figure(14), lsim(Wcom,u,t), grid
title('RISPOSTA A GRADINO SISTEMA CONTROLLATO CON COMPENSATORE E RETI')
xlabel('TEMPO [s]')
ylabel('MODULO [rad]')

```

Capitolo 6

CONFRONTO

6.1 Confronto tra tutti i controllori analizzati

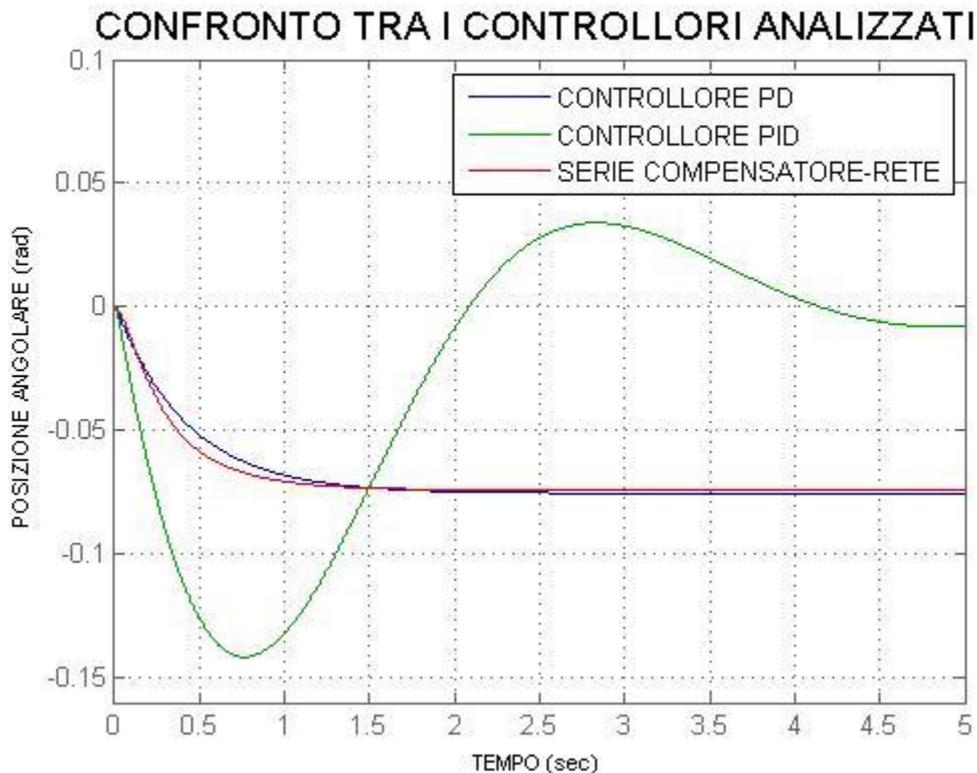


figura (15)

Si riporta ora in figura (15) la risposta a gradino di tutti i controllori fino ad ora analizzati. Si può notare come tutti e tre rispettino le specifiche minime di progetto imposte, in quanto il tempo di assestamento all' 1% è inferiore a 5 secondi e l'errore a regime è minore di 5° (0,08 rad). Dal confronto emerge come l'errore a regime ottenuto con il controllore PD e con la serie compensatore-rete anticipatrice sia pressoché identico, risulta infatti una differenza tra i due minore di 0,001 rad tra gli 0,0754 rad del primo e 0,0740 rad del secondo, mentre l'errore del sistema controllato con il PID risulta addirittura nullo. Per contro però quest'ultimo presenta una sottoelongazione e delle oscillazioni decisamente più marcate, che per quanto riguarda il picco massimo sono nell'ordine dei 0,14 radianti (circa 8°), portando quindi l'asta a continui cambi di posizione prima di fermarsi sulla verticale esatta. Negli altri due casi esaminati invece, è praticamente assente il picco di sottoelongazione in quanto, il valore dello scostamento massimo dell'asta dalla verticale durante il transitorio è uguale al valore di errore a regime. Si può inoltre notare come la pendenza della curva ottenuta con il controllore PID sia molto più elevata rispetto alle altre due avendo quindi un tempo di salita molto minore. Questo fenomeno è dovuto principalmente alla parte integrale del controllore (che negli altri non è presente), che però se da un lato ha due effetti positivi, ovvero limita il rise time ed elimina l'errore a regime, dall'altro aumenta notevolmente il tempo di assestamento del

sistema (mantenendolo comunque dentro le specifiche di progetto imposte) e la sua sottoelongazione. Nel caso del controllore PD e della serie compensatore-rete anticipatrice, si può invece notare come l'effetto derivativo dei due controllori : riduca notevolmente il transitorio, (che risulta quasi dimezzato rispetto al caso PID) e la sottoelongazione (che è praticamente assente), ma non abbia effetto sull'errore a regime (che risulta sensibilmente maggiore rispetto al caso PID). L'azione proporzionale invece, riduce quest'ultimo a scapito però di un aumento della sottoelongazione. Si riporta nella tabella sottostante, per maggiore chiarezza, un resoconto degli effetti sul tempo di salita, sulla sottoelongazione, sul transitorio e sull'errore a regime permanente di ogni singola azione a parità di processo da controllare:

AZIONE	TEMPO DI SALITA	SOTTOELONGAZIONE	TRANSITORIO	ERRORE A REGIME PERMANENTE
PROPORZIONALE K_p	Diminuisce	Aumentano	Non Influisce	Diminuisce
INTEGRALE K_i	Diminuisce	Aumentano	Aumenta	Eliminato
DERIVATIVA K_d	Non Influisce	Diminuiscono	Diminuisce	Non Influisce

Riassumendo, se si vuole avere un errore a regime nullo si deve forzatamente inserire un controllore con azione integrale, a scapito però di una maggiore sottoelongazione e di un transitorio più lungo, mentre se si vuole una sottoelongazione limitata ed un transitorio più veloce si deve esercitare una azione derivativa tollerando un errore a regime più elevato rispetto al caso precedente. L'azione proporzionale infine ha effetti positivi sul tempo di salita e sull'errore a regime, ma aumenta la sottoelongazione e non ha effetto sul transitorio.

Si deve quindi cercare il miglior trade off in base all'applicazione, alle performance desiderate e alla complessità circuitale che si è disposti ad implementare. Si noti ad esempio che se l'applicazione necessita di un alta precisione a regime l'unica scelta possibile tra quelle analizzate risulta senza dubbio il controllore PID, in quanto, è l'unico con errore a regime nullo, questo però va a scapito della prontezza e della rapidità di riposizionamento dell'asta. Se invece si tollera un errore a regime inferiore ai 5°, come da condizioni di progetto, la soluzione più vantaggiosa risulta senza dubbio quella del controllore PD, infatti, nonostante abbia le stesse prestazioni della serie compensatore-rete anticipatrice, ha una complessità circuitale decisamente inferiore (che si riflette quindi sui costi). Quest'ultima necessita infatti di ben tre controllori sul ramo di retroazione a differenza del caso PD, che da solo, risulta adeguato e sufficiente. Inoltre il margine di fase di quest'ultimo risulta decisamente maggiore (circa il doppio), comportando quindi una stabilità decisamente più robusta ad eventuali disturbi interni ed esterni.

6.2 Listato Matlab:

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% CONFRONTO TRA I CONTROLLORI SINTETIZZATI%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% RISPOSTE A GRADINO DI TUTTI I CONTROLLORI

figure(15)

lsim(Wpd,u,t),grid
hold on
lsim(Wpid,u,t),grid
hold on
lsim(Wcom,u,t),grid
hold on;
xlabel('TEMPO');ylabel('POSIZIONE ANGOLARE (rad)');
legend('CONTROLLORE PD','CONTROLLORE PID','SERIE COMPENSATORE-RETE');
title('CONFRONTO TRA I CONTROLLORI ANALIZZATI');
```

Capitolo 7

7.1 Introduzione di rumore come disturbo

I casi analizzati fino ad ora erano privi di qualsiasi disturbo sia interno che esterno e si è intrinsecamente assunto come ipotesi che la modellizzazione effettuata fosse completamente aderente al sistema fisico. Come già ricordato in precedenza questo non è del tutto vero. Nell'applicazione reale e nella pratica realizzativa infatti, avendo linearizzato il modello attorno ad un punto di equilibrio, è stato commesso (per quanto piccolo) un errore di approssimazione .Inoltre i componenti fisici che si usano per la realizzazione del sistemi di controllo , sono affetti da non idealità, da disturbi elettromagnetici e da rumori termici di fondo, ed infine ci possono essere delle componenti esterne al sistema, che ne disturbano e modificano la dinamica rispetto a quella calcolata.Si pensi ad esempio agli attriti,all'eventuale presenza di vento che opporrebbe resistenza al riposizionamento in verticale dell'asta (nel caso il sistema sia esposto agli agenti atmosferici) e più in generale a qualsiasi altro fattore fisico esterno non considerato nella modellizzazione del sistema stesso. Tutti questi fattori si traducono in uno scostamento più o meno accentuato della risposta del sistema in catena chiusa da quella analizzata ed ottenuta fino ad ora: facendone quindi variare le prestazioni . Per considerare quindi tutti questi fenomeni si è usato il toolbox Simulink di Matlab inserendo all'interno della catena chiusa un disturbo (sottoforma di rumore con andamento gaussiano normale) ed analizzando la risposta del sistema in catena chiusa stesso. Lo schema di simulazione utilizzato è riportato nella pagina seguente (figura (16.a)): dove in blu è stato riportato il segnale di ingresso, in rosso quello di rumore,in verde sono stati evidenziati i controllori,in giallo invece è stato riportato il solo sistema linearizzato. Si precisa che i tre sistemi in giallo in figura sono identici e sono stati così riportati per una maggiore chiarezza espositiva ,preferendo tale soluzione a quella ,sicuramente più compatta ma meno chiara,di riportare un solo blocco giallo preceduto da un multiplexer a tre ingressi e seguito da un demultiplexer con quattro uscite. Mentre per l'uscita al fine di una maggiore rapidità di confronto si è usato un multiplexer a quattro ingressi in modo da avere tutti gli andamenti plottati in un unico grafico.

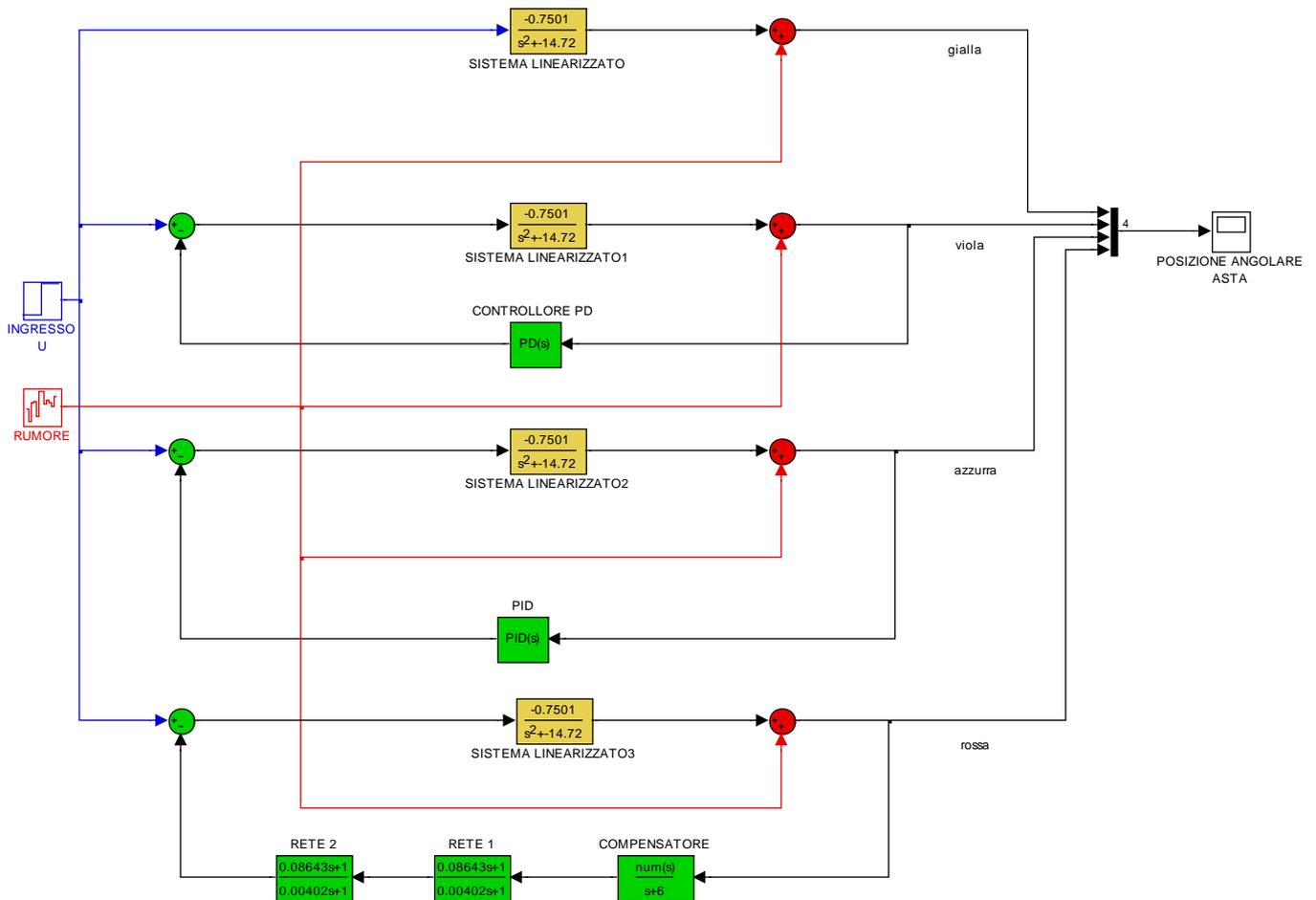


figura (16.a)

Il processo è stato simulato per un tempo di dieci secondi, tempo che si è ritenuto sufficiente a valutare le risposte in quanto è pari al doppio del tempo di assestamento massimo consentito dalle specifiche di progetto. Come si può vedere dalla figura (16.b) il sistema risulta alquanto disturbato con delle continue oscillazioni dell'asta attorno alla posizione $\vartheta=0$ di ampiezza approssimativa di 0,12 rad che sono palesemente inaccettabili. Per di più esse sono ad elevata frequenza che ,oltre ai ben comprensibili problemi sulle performance del sistema ,potrebbe influire negativamente anche sull'integrità strutturale del sistema fisico stesso, creando delle vibrazioni sulla cerniera a cui è vincolata l'asta che potrebbe arrivare a rottura per fatica causata dalle stesse .

LEGENDA:

CON CONTROLLORE PD

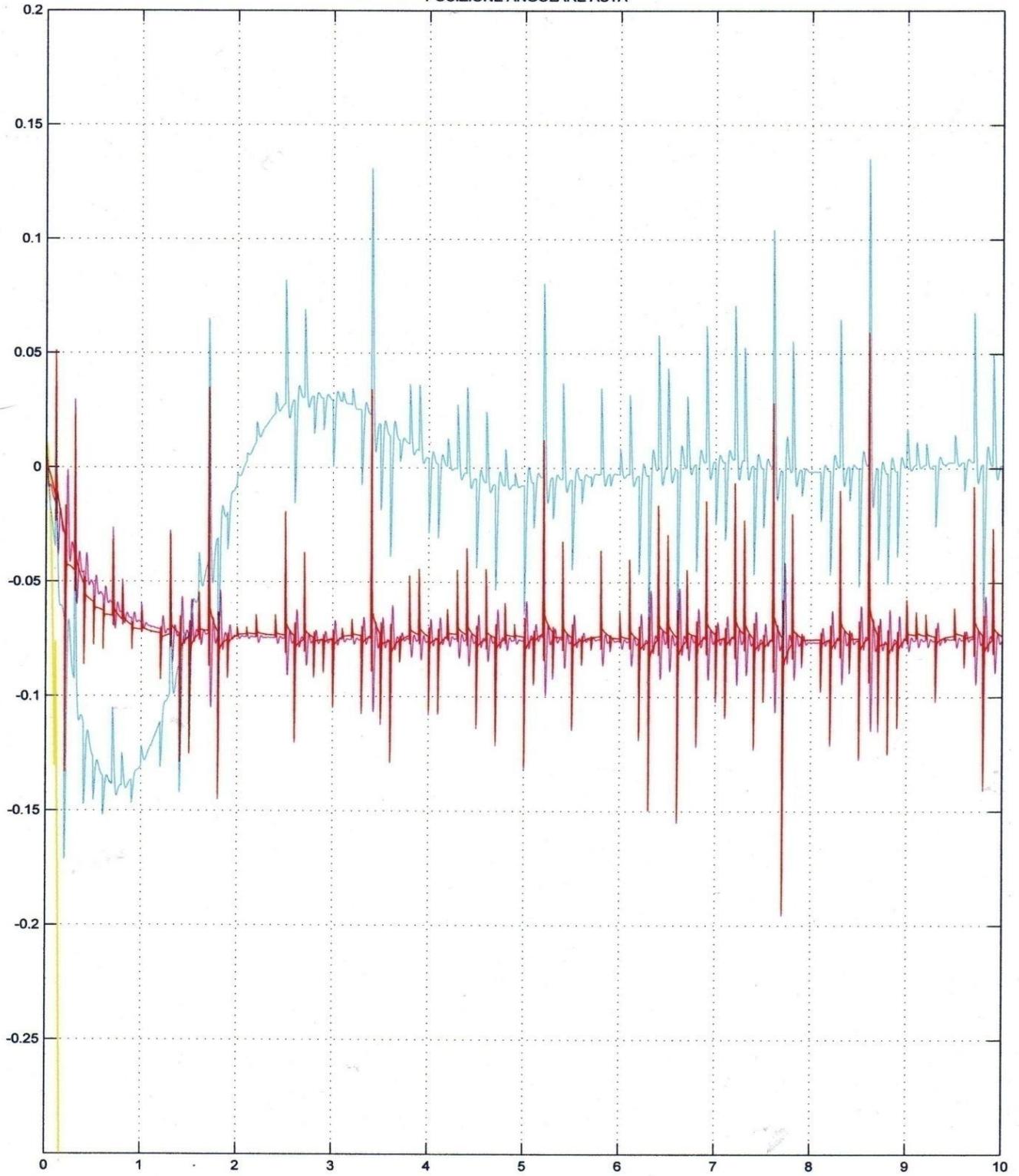
CON CONTROLLORE PID

CON CONTROLLORE SERIE COMPENSATORE-RETE

SISTEMA NON CONTROLLATO



POSIZIONE ANGOLARE ASTA



Time offset: 0

figura (16.b)

Il problema può essere limitato inserendo un blocco di filtraggio composto da un filtro passa basso (LPF) che elimini le componenti in alta frequenza tipiche del rumore (figura (17.a)). Il low pass filter deve essere dimensionato in modo che il segnale di ingresso e di catena chiusa dei controllori attraversi lo stesso senza subire distorsioni mentre le componenti rumorose vengano attenuate od eliminate. Risulta quindi evidente come il collo di bottiglia sia il processo in catena chiusa e che quindi il filtro debba avere banda passante superiore alla banda del processo stesso (si potrebbe in alternativa utilizzare un filtro di ordine molto elevato limitando così la banda passante stessa). La banda del filtro è richiesta superiore e non uguale a quella del sistema controllato perché ponendole uguali e considerando che i filtri fisicamente realizzabili non sono ideali (non sono quindi delle finestre rettangolari con selettività pari ad uno) alla frequenza di taglio superiore ed inferiore (nel caso del LPF è presente solo la prima), essi hanno un'attenuazione di 3 db ovvero, attenuano il segnale di un fattore

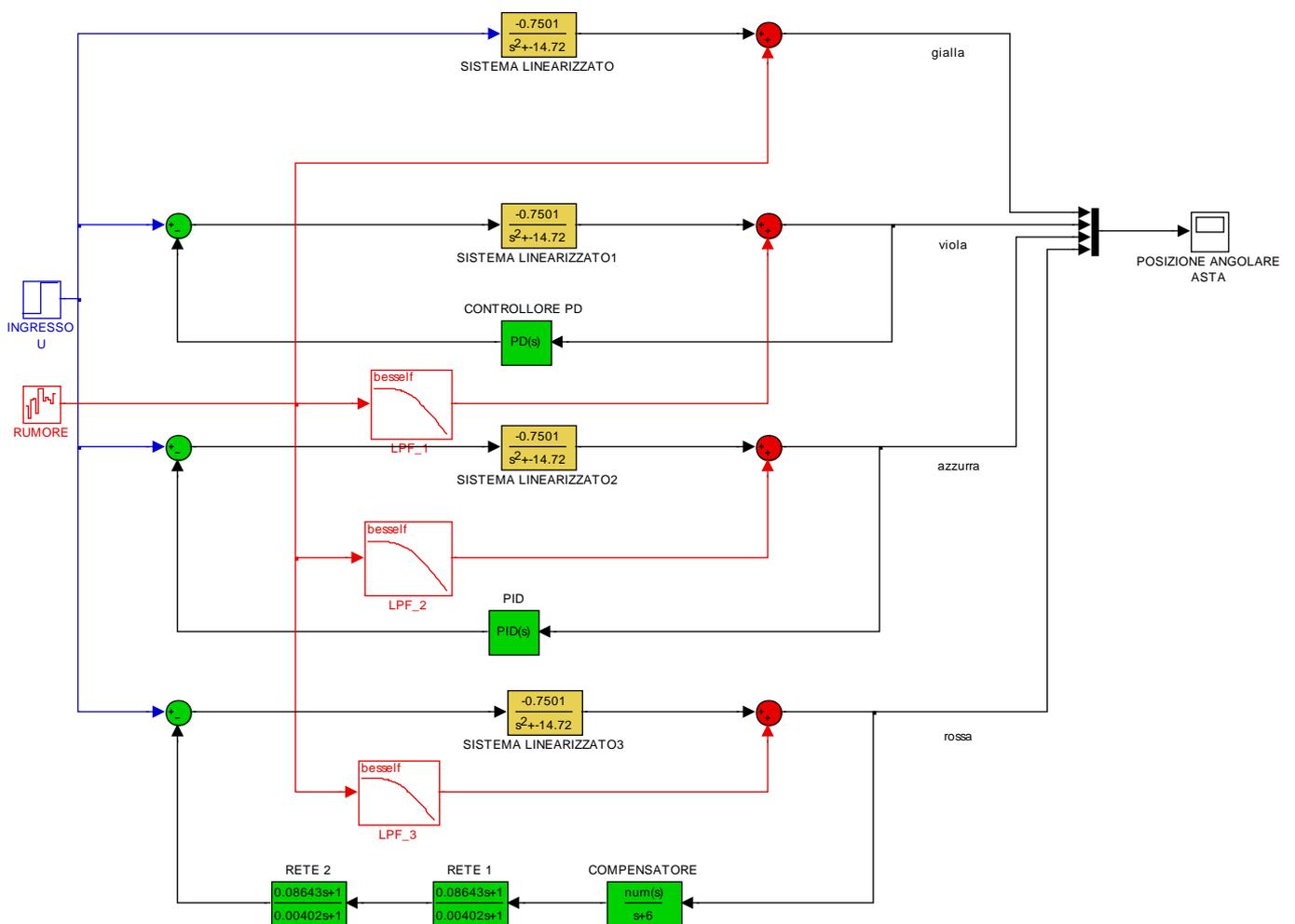


figura (17.a)

$\frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707$ che corrisponde ad un errore di circa il 30%. Gli effetti della non idealità non sono inoltre trascurabili neanche all'interno della banda passante. Si riportano nella seguente tabella

alcuni valori dell'errore e_r commesso dal filtro al variare della frequenza del segnale in ingresso f_0 a parità di banda B_3 :

tabella (3)

f_0	e_r	f_0	e_r
B_3	29,3%	$0,5B_3$	10,6%
$0,9B_3$	25,7%	$0,4B_3$	7,2%
$0,8B_3$	21,9%	$0,3B_3$	4,2%
$0,7B_3$	18,1%	$0,2B_3$	1,9%
$0,6B_3$	14,2%	$0,1B_3$	0,5%

Si precisa che la tabella (3) è riferita ai filtri di primo ordine quindi i valori di errore nel caso di ordine superiore saranno inferiori a quelli riportati.

Dalla tabella (3) si può facilmente dedurre che, se si vuole che il filtro abbia un'azione trascurabile sul segnale, è necessario che lo stesso abbia banda passante di almeno 5 o 10 volte quella dell'ingresso. Si noti però che l'aumentare della larghezza di banda del filtro, se da un lato produce come detto una minore influenza dello stesso sul sistema riducendo l'attenuazione del segnale in ingresso, dall'altro produce anche due effetti negativi: all'aumentare della larghezza di banda aumenta il tempo di salita del sistema a causa dell'elemento capacitivo presente all'interno del filtro stesso secondo le relazioni (7.1.1) e (7.1.2), che risulterà con una capacità maggiore e quindi con un maggior tempo di carica e scarica:

$$t_r = K \cdot \frac{1}{B_3} \quad (7.1.1)$$

dove K è un parametro legato alla struttura analitica della funzione di trasferimento e quindi alla topologia del circuito e B_3 è la banda a 3 decibel.

$$B_3 = \frac{1}{2\pi\tau} \quad (7.1.2)$$

dove τ è la costante di tempo del filtro data dal prodotto della resistenza e della capacità del filtro stesso

il secondo effetto negativo è la riduzione della quantità di frequenze rumorose filtrate, quindi eliminate od attenuate, peggiorando la qualità dell'uscita (essendo le frequenze dei disturbi interni come ad esempio il rumore termico tipicamente ad alta frequenza). Conoscendo dai diagrammi di Bode la pulsazione di attraversamento del processo controllato nei modi fino a qui esaminati, ricorrendo alla relazione approssimata $\omega_A \approx 2\pi B$ e tollerando un errore dell' 1,9% si ottengono le seguenti larghezze di banda dei filtri:

- Per il caso del controllore PD 137,65 Hz
- Per il caso del controllore PID 60,7 Hz
- Per il caso della serie compensatore-rete anticipatrice 459,95 Hz

Da cui si può dedurre, come in presenza di disturbi, il controllore più adatto sia il PID in quanto è quello che richiede una banda minore, permettendo quindi al filtro di filtrare più efficacemente le componenti in alta frequenza dei disturbi e incidere in modo minore sul rise time. Il compensatore risulta ancora una volta il meno adeguato dei tre avendo una banda decisamente maggiore rispetto agli altri. L'andamento delle risposte del sistema inserendo i filtri è plottato in figura (17.b).

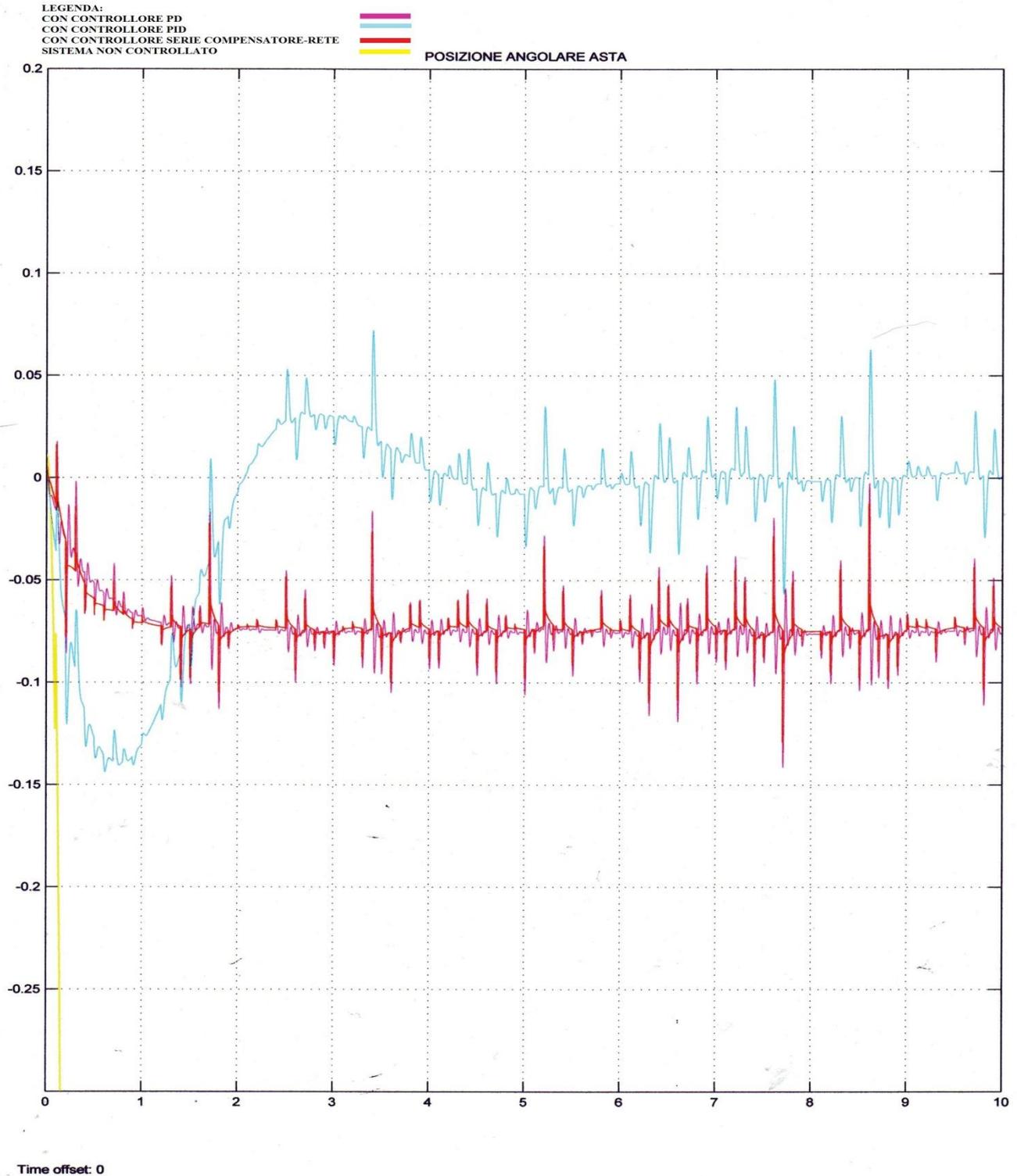


figura (17.b)

APPENDICE A

A.1 Teorema di Routh

Il criterio di Routh, nella sua formulazione tradizionale, consiste nel costruire una tabella di numeri in cui le prime due righe sono formate dai coefficienti del polinomio $A(s)$ come indicato:

$$\begin{array}{cccc} a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots\dots \\ a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots\dots \end{array}$$

Se n è pari, a_0 appartiene alla prima riga, che risulta formata di $(n+2)/2$ elementi mentre la seconda è formata di $n/2$ elementi e termina con a_1 , disposto sotto a_2 ; se invece n è dispari, entrambe le righe sono formate di $(n+1)/2$ elementi, la prima termina con a_1 e la seconda con a_0 . Gli elementi della riga successiva:

$$r_i \qquad r_{i-2} \qquad r_{i-4} \qquad \dots\dots$$

sono formati a partire dagli elementi delle due righe che la precedono:

$$\begin{array}{cccc} p_{i+2} & p_i & p_{i-2} & \dots\dots \\ q_{i+1} & q_{i-1} & q_{i-3} & \dots\dots \end{array}$$

mediante la formula:

$$r_j = - \frac{\begin{bmatrix} p_{i+2} & p_j \\ q_{i+1} & q_{j-1} \end{bmatrix}}{q_{i+1}} = p_j - \frac{p_{i+2}}{q_{i+1}} \cdot q_{j-1} \tag{A.1.1}$$

valida anche per $j=1$ o $j=0$ considerando nulli tutti gli elementi che nelle righe precedenti verrebbero ad avere un pedice negativo. Se il procedimento della tabella può essere completato, ossia non vi è alcuna riga della stessa che inizia con un elemento nullo allora:

1. Il numero n_n degli zeri del polinomio $A(s)$ che si trovano nel semipiano sinistro è pari al numero di permanenze di segno fra elementi consecutivi della prima colonna della tabella
2. Il numero n_p degli zeri del polinomio $A(s)$ che si trovano nel semipiano destro è pari al numero di variazioni di segno fra elementi consecutivi della prima colonna della tabella
3. Il polinomio $A(s)$ non ha zeri sull'asse immaginario.

Da cui si può dimostrare che:

Il polinomio $A(s)$ è hurwitziano se e solo se tutti gli elementi della prima colonna sono strettamente dello stesso segno.

A.2 Teorema di Nyquist

Il criterio di Nyquist consiste in un procedimento di tipo grafico che consente di determinare il numero di poli con parte reale positiva (e quindi la stabilità) di un sistema a retroazione dall'esame del diagramma di Nyquist della funzione di trasferimento ad anello aperto. Il criterio verrà esposto prima per sistemi a retroazione unitaria ed in seguito esteso al caso più generale al caso di retroazione diversa da uno.

Sia $G(s)$ una funzione razionale propria e P_p il numero di poli a parte reale positiva di $G(s)$. Si assuma inoltre che $G(s)$ non abbia poli sull'asse immaginario.

- Nel caso in cui il diagramma di Nyquist di $G(s)$ non attraversi il punto $-1+j0$, sia N il numero complessivo di giri in senso orario compiuti dal diagramma di Nyquist $G(s)$ (orientato nel verso delle ω crescenti) intorno al punto $-1+j0$. Allora il numero Z_p dei poli con parte reale positiva della funzione di trasferimento del sistema retro azionato:

$$W(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} \text{ è pari a } Z_p = N + P_p.$$

- Nel caso in cui il diagramma di Nyquist di $G(s)$ attraversi il punto $-1+j0$, a ciascun passaggio del diagramma di $G(s)$ per tale punto corrisponde un polo di $W(s)$ sull'asse immaginario o, se ciò avviene per ω tendente a zero, un polo all'infinito (ossia $W(s)$ è impropria).

Corollario 1:

Il sistema a retroazione unitaria è BIBO stabile se e solo se il diagramma di Nyquist di $G(s)$ non attraversa il punto $-1+j0$ e inoltre: $N = -P_p$.

Corollario 2:

Se $G(s)$ non ha poli con parte reale positiva, allora il sistema con retroazione unitaria è BIBO stabile se e solo se il diagramma di Nyquist non attraversa e non circonda il punto $-1+j0$.

Si consideri ora il caso più generale di sistemi con blocco di retroazione di funzione di trasferimento

$H(s)$. La corrispondente funzione di trasferimento è data da:
$$W(s) = \frac{G(s)}{1+H(s)G(s)}$$

I poli di $W(s)$ corrispondono agli zeri di $D(s)=1+G(s)H(s)$ a meno che nel prodotto $G(s)H(s)$ non si abbiano cancellazioni. Nel caso più generico in cui queste cancellazioni non avvengono, la stabilità può essere studiata con il criterio di Nyquist applicato al prodotto $G(j\omega)H(j\omega)$ anziché alla sola $G(j\omega)$.

A.3 Calcolo dei parametri di una rete anticipatrice elementare

Definendo:

$$M = \frac{1}{|G_p|} > 1$$

$$\varphi = m_\varphi - (\pi + \arg[G_p]) > 0$$

Si devono determinare i parametri α e T del controllore di funzione di trasferimento:

$$|G_{ant}(s)| = \frac{1+Ts}{1+\alpha Ts} \quad \text{con } 0 < \alpha < 1 \text{ e } T > 0$$

In modo che $G_{ant}(j\omega_A) = M e^{j\varphi}$. Il diagramma di Nyquist della rete anticipatrice per $\omega \geq 0$ è una semicirconferenza che giace nel primo quadrante ed ha estremi nei punti $1+j0$ e $\frac{1}{\alpha} + j0$ in corrispondenza di $\omega = \infty$. α può essere ottenuto imponendo il passaggio della semicirconferenza per il punto $M e^{j\varphi}$, ossia che:

$$M^2 \sin^2 \varphi = (M \cos \varphi - 1) \left(\frac{1}{\alpha} - M \cos \varphi \right). \quad (\text{A.3.1})$$

Per determinare T basta imporre:

$$\frac{1+T^2(\omega_A)^2}{1+\alpha^2 T^2(\omega_A)^2} = M^2 \quad (\text{A.3.2})$$

Risolvendo in α e T le (A.3.1) e (A.3.2) si ottiene:

$$\alpha = \frac{M \cos \varphi - 1}{M(M - \cos \varphi)} \quad \text{e} \quad T = \frac{1}{\omega_A} \sqrt{\frac{1-M^2}{\alpha^2 M^2 - 1}}$$

A queste formule si deve inoltre imporre la condizione $\alpha > 0$ ossia:

$$M > \frac{1}{\cos \varphi}$$

tale condizione è stringente nel senso che, se non è verificata non esiste una funzione di trasferimento idonea, in quanto φ non può essere diminuito senza violare le specifiche.

APPENDICE B

Codice Matlab completo

```
clc
clear all
close all

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% CARATTERISTICHE FISICHE SISTEMA %%%%%%%%%
% MASSA CARRELLO [Kg]

M=2;

%MASSA ASTA [Kg]

m=1;

% ACELLERAZIONE DI GRAVITA' [m/s^2]

g=9.81;

% DISTANZA DEL BARICENTRO DELL'ASTA DAL CARRELLO [m]

L=0.5;

% MOMENTO D'INERZIA BARICENTRICO ASTA [Kg*m^2]

J=8.33*10^(-3);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% SISTEMA NON CONTROLLATO %%%%%%%%%
% PER NON APPESANTIRE LA NOTAZIONE DEFINISCO  $l = (J+M*L^2) / mL$ 

l=0.6666;

% DEFINISCO LE 4 MATRICI DI STATO

A= [0 1 ; g/l 0 ];

B= [ 0; -(1/(M*l)) ];

C= [1 0 ];

D= 0;

% CREO IL SISTEMA DINAMICO

sist= ss(A,B,C,D)

% DEFINISCO LA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

fnc=tf(sist)

% TRACCIO IL LUOGO DELLE RADICI
```

```

figure(1)

rlocus(fnc)

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% STABILIZZAZIONE CON CONTROLLORE PD %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% FUNZIONE DI TRASFERIMENTO CONTROLLORE PD CALCOLATA CON IL CRITERIO DI
% ROUTH

Npd=[-231 -550];

Dpd=[1];

PD=tf(Npd,Dpd);

% TRACCIO IL DIAGRAMMA DI NYQUIST PER CONFERMARNE LA STABILITA'

Gpd=fnc*PD;

figure(2),nyquist(Gpd)

% DEFINISCO LA CATENA CHIUSA CON IL CONTROLLORE PD NEL RAMO DI RETROAZIONE

Wpd=(fnc/(1+(fnc*PD)))

% ESEGUO ORA LA SIMULAZIONE PER OTTENERE LA RISPOSTA IMPULSIVA E AL GRADINO
% DEL SISTEMA

% TEMPO DI SIMULAZIONE

t=0:0.001:5;

%DEFINISCO UN GRADINO DI AMPIEZZA 40 COME INGRESSO

u=40*ones(size(t));

% RISPOSTA IMPULSIVA

figure(3),impulse(Wpd,t),grid
title('RISPOSTA IMPULSIVA SISTEMA CONTROLLATO CON PD')
xlabel('TEMPO [s]')
ylabel('MODULO [rad]')

% RISPOSTA A GRADINO

figure(4),lsim(Wpd,u,t),grid
title('RISPOSTA A GRADINO SISTEMA CONTROLLATO CON PD')
xlabel('TEMPO [s]')
ylabel('MODULO [rad]')

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% STABILIZZAZIONE CON PID %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% FUNZIONE DI TRASFERIMENTO PID CON COEFFICIENTI CALCOLATI MEDIANTE
% ALLOCAZIONE DEI POLI

Npid= [-102.65 -162.27 -279.96];

```

```

Dpid=[1 0];

PID=tf(Npid,Dpid);

% CATENA CHIUSA CON IL CONTROLLORE PID SUL RAMO DI RETROAZIONE

Wpid=((fnc)/(1+(PID*fnc)))

% DIAGRAMMA DI NYQUIST PER ULTERIORE CONFERMA DELLA STABILITA'

Gpid=fnc*PID

figure(5),nyquist(Gpid)

% ESEGUO ORA LA SIMULAZIONE PER OTTENERE LA RISPOSTA IMPULSIVA E AL GRADINO
% DEL SISTEMA

% RISPOSTA IMPULSIVA

figure(6),impulse(Wpid,t),grid
title('RISPOSTA IMPULSIVA SISTEMA CONTROLLATO CON PID')
xlabel('TEMPO [s]')
ylabel('MODULO [rad]')

% RISPOSTA A GRADINO

figure(7),lsim(Wpid,u,t),grid
title('RISPOSTA A GRADINO SISTEMA CONTROLLATO CON PID')
xlabel('TEMPO [s]')
ylabel('MODULO [rad]')

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% STABILIZZAZIONE CON COMPENSATORE %%%%%%%%%

% DEFINISCO NUMERATORE E DENOMINATORE DEL COMPENSATORE SCELTO

Nc=[-1 -3];

Dc=[1 6];

% FUNZIONE DI TRASFERIMENTO DEL COMPENSATORE

COM1=tf(Nc,Dc);

W=fnc*COM1

% TRACCIO IL LUOGO DELLE RADICI PER OSSERVARE LA STABILITA' ED ATTRAVERSO LA
% FUNZIONE rlocfind DETERMINO IL GUADAGNO NEL PUNTO (-2;0)

figure(8),rlocfind(W)

% DEFINISCO IL CONTROLLORE CON IL GUADAGNO APPENA CALCOLATO

COM=56*COM1;

% DEFINISCO LA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO DELLA CATENA APERTA

```

```

G=fnc*COM

% TRACCIO IL DIAGRAMMA DI NYQUIST PER OSSERVARE LA STABILITA' ED
% IL MARGINE DI FASE DELLA CATENA CHIUSA

figure(9), nyquist(G)

% TRACCIO IL DIAGRAMMA DI BODE DELLA CATENA CHIUSA PER DIMENSIONARE LA RETE

figure(10), bode(G)

% DEFINISCO LA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO DELLA RETE APPENA CALCOLATA

numR=[0.08643 1];

denR=[0.00402 1];

R=tf(numR,denR)

% LE RETI DA POSIZIONARE NEL CIRCUITO SONO RISULTATE DUE QUINDI:

Rtot=R*R;

% DEFINISCO LA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO IN CATENA APERTA PER TRACCIARE
% DIAGRAMMA DI NYQUIST E VALUTARE NUOVAMENTE STABILITA' E MARGINE DI FASE

Gp=G*R*R

figure(11), nyquist(Gp)

% OSSERVO CHE LA RISPOSTA AL GRADINO NON SODDISFA I REQUISITI SULL'ERRORE A
% REGIME QUINDI AUMENTO IL GUADAGNO PER RIDURLO

COM2=20*COM

% TRACCIO NUOVAMENTE IL DIAGRAMMA DI NYQUIST PER RIVALUTARE LA STABILITA'

G2=fnc*COM2*Rtot

figure(12), nyquist(G2)

% DEFINISCO ORA LA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO AD ANELLO CHIUSO DEL SISTEMA E
% DEI CONTROLLORI APPENA SINTETIZZATI

Wcom=(fnc/(1+fnc*COM2*Rtot))

% ESEGUO ORA LA SIMULAZIONE PER OTTENERE LA RISPOSTA IMPULSIVA E AL GRADINO
% DEL SISTEMA

% RISPOSTA IMPULSIVA
figure(13), impulse(Wcom,t), grid
title('RISPOSTA IMPULSIVA SISTEMA CONTROLLATO CON COMPENSATORE E RETI')
xlabel('TEMPO [s]')
ylabel('MODULO [rad]')

```

```

% RISPOSTA A GRADINO
figure(14), lsim(Wcom,u,t),grid
title('RISPOSTA A GRADINO SISTEMA CONTROLLATO CON COMPENSATORE E RETI')
xlabel('TEMPO [s]')
ylabel('MODULO [rad]')

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% CONFRONTO TRA I CONTROLLORI SINTETIZZATI%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% RISPOSTE A GRADINO DI TUTTI I CONTROLLORI
figure(15)
lsim(Wpd,u,t),grid
hold on
lsim(Wpid,u,t),grid
hold on
lsim(Wcom,u,t),grid
hold on;
xlabel('TEMPO');ylabel('POSIZIONE ANGOLARE (rad)');
legend('CONTROLLORE PD','CONTROLLORE PID','SERIE COMPENSATORE-RETE');
title('CONFRONTO TRA I CONTROLLORI ANALIZZATI');

```

BIBLIOGRAFIA

➤ INTRODUZIONE AI CONTROLLI AUTOMATICI

AUGUSTO FERRANTE ANTONIO LEPSCHY UMBERTO VIARO

➤ INTRODUZIONE ALLE MISURE ELETTRONICHE

MATTEO BERTOCCO ALESSANDRO SONA

➤ APPUNTI DI TEORIA DEI SISTEMI

E. FORNASINI G. MARCHESINI

➤ SEGNALI E SISTEMI

GIUSEPPE RICCI MARIA ELENA VALCHER