



UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
DI PADOVA

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PADOVA

**Dipartimento di Ingegneria Industriale DII**

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale

# Il metodo Phase-Field per la simulazione della propagazione delle cricche

**Relatore:** prof. Mirco Zaccariotto

**Correlatore:** prof. Ugo Galvanetto

**Laureando:** Alessandro Reviezzo

**Matricola n.** 1197620

Anno Accademico 2019/2020



# Indice

INTRODUZIONE.....	9
1. MECCANICA DELLA FRATTURA: FONDAMENTI TEORICI .....	11
1.1 Frattura fragile vs duttile .....	13
1.2 Modi di carico .....	15
1.3 Approccio energetico.....	16
1.4 Approccio tensionale .....	21
2. IL METODO PHASE-FIELD PER LA FRATTURA.....	27
2.1 Introduzione al metodo .....	27
2.2 Fondamenti teorici .....	31
2.3 Formulazione basata sul FEM .....	41
2.4 Approccio incrementale-iterativo.....	45
2.5 Irreversibilità della frattura.....	49
2.6 Struttura definitiva del codice implementato .....	51
3. VALIDAZIONE DEL MODELLO E FATTORI DI INFLUENZA .....	55
3.1 Validazione del codice implementato.....	55
3.2 Dipendenza dell' <i>energy release rate</i> $G_c$ .....	63
3.3 Variazione della lunghezza iniziale di cricca .....	64
3.4 Cricca laterale vs cricca centrale.....	66
3.5 Dipendenza dal <i>displacement increment</i> .....	70
3.6 Influenza di $l_0$ e della <i>mesh size</i> .....	74
4. ESEMPI NUMERICI.....	81

4.1 Piastra con foro quadrato .....	81
4.2 Piastra con foro circolare .....	90
4.3 Piastra forata con altezza di cricca variabile .....	96
4.4 Piastra con inserto rafforzativo .....	103
CONCLUSIONI .....	107
APPENDICE A: INTRODUZIONE AL METODO DEGLI ELEMENTI FINITI .....	109
APPENDICE B: CREAZIONE DEL FILE INP DA PATRAN A MATLAB.....	119
BIBLIOGRAFIA .....	125

# Indice delle figure

<b>Figura 1.1</b> Esempio di propagazione di una cricca in una struttura reale [17].....	11
<b>Figura 1.2</b> Grafico tensione vs deformazione per frattura fragile e duttile [18].....	14
<b>Figura 1.3</b> Diverse modalità di frattura a seconda del carico applicato [31]. .....	15
<b>Figura 1.4</b> Cricca passante in una piastra infinita soggetta a trazione [5].....	17
<b>Figura 1.5</b> Diagramma di confronto tra G e R con resistenza del materiale costante (A) e variabile (B) [20].....	20
<b>Figura 1.6</b> Cricca ellittica in una piastra piana [5].....	23
<b>Figura 1.7</b> Coordinate polari per il calcolo delle tensioni nella zona vicino alla crack tip [5]. .....	24
<b>Figura 1.8</b> Distribuzione di tensioni in prossimità della zona di cricca, considerando la zona di deformazione plastica [2]. .....	25
<b>Figura 2.1</b> Rappresentazione schematica della superficie di cricca (in rosso) all'istante iniziale (A) e dopo l'applicazione della trazione (B). Si riporta la scissione "fittizia" del nodo A in A1 e A2, il che comporta l'ambiguità nell'assegnazione dello spostamento. ....	28
<b>Figura 2.2</b> Trave 1D con cricca trasversale di cross section $\Gamma$ (A). Sharp crack in $x = 0$ (B). Diffusive crack modellata mediante lunghezza di scala $l$ o $l_0$ (C) [30].....	33
<b>Figura 2.3</b> Sharp crack surface $\Gamma$ nel solido $\Omega$ (A). Diffusive crack surface $\Gamma_{l_0}(\phi)$ , funzionale del Phase-Field $\phi$ e modellato con il parametro $l_0$ (B) [30]. .....	35
<b>Figura 2.4</b> Strategia iterativa-incrementale con metodo di Newton-Raphson [34].....	45
<b>Figura 2.5</b> Strategia iterativa-incrementale con metodo di Newton-Raphson modificato [34]. .....	46
<b>Figura 2.6</b> Diagramma di flusso del codice implementato. ....	53
<b>Figura 3.1</b> Piastra in tensione con cricca laterale e vincoli applicati. ....	56
<b>Figura 3.2</b> Mesh utilizzata nel testo di riferimento [26]. ....	57
<b>Figura 3.3</b> Visualizzazione in MATLAB della discretizzazione della piastra con cricca laterale. ....	58
<b>Figura 3.4</b> Confronto tra il modello di riferimento e quello modificato con la variante dell'History field. ....	59
<b>Figura 3.5</b> Dettaglio del grafico di confronto tra i due modelli. ....	60
<b>Figura 3.6</b> Propagazione della cricca laterale per uno spostamento imposto di (A) $7.5e-5$ mm, (B) $1.0e-4$ mm, (C) $1.25e-4$ mm, (D) $1.5e-4$ mm, (E) $1.75e-4$ mm e (F) $2.0e-4$ mm. ....	61
<b>Figura 3.7</b> Dipendenza dall'energy release rate $G_c$ . ....	63

<b>Figura 3.8</b> Cricca laterale con lunghezza iniziale pari a 2 mm (A), 3.5 mm (B), 5 mm (C) e 6.5 mm (D).....	65
<b>Figura 3.9</b> Dipendenza dalla lunghezza iniziale della cricca laterale. ....	66
<b>Figura 3.10</b> Piastra in tensione con cricca centrale e vincoli applicati. ....	67
<b>Figura 3.11</b> Confronto tra cricca centrale e cricca laterale. ....	68
<b>Figura 3.12</b> Propagazione della cricca centrale per uno spostamento imposto di (A) 7.5e-5 mm, (B) 1.0e-4 mm, (C) 1.25e-4 mm, (D) 1.5e-4 mm, (E) 1.75e-4 mm e (F) 1.85e-4 mm. ....	69
<b>Figura 3.13</b> Dipendenza dall'incremento di spostamento (ovvero dal numero di step). ....	71
<b>Figura 3.14</b> Evoluzione finale della cricca nel caso di 200 step (A), di 1000 step (B) e di 2000 step (C). ....	73
<b>Figura 3.15</b> Piastra quadrata con cricca laterale, in tensione [25]. ....	74
<b>Figura 3.16</b> Accuratezza della crack surface in funzione del rapporto tra $l_0$ e la mesh size degli elementi quadrangolari [25]. ....	75
<b>Figura 3.17</b> Regularized crack surface con differenti lunghezze di scala: $l_0 = 0.2$ mm (A), $l_0 = 0.1$ mm (B), $l_0 = 0.02$ mm (C), $l_0 = 0.007$ mm (D) ottenute con mesh size $h = 0.0035$ mm [25].....	76
<b>Figura 3.18</b> Dipendenza dal rapporto $l_0/h$ per mesh coarse. ....	78
<b>Figura 3.19</b> Dipendenza dal rapporto $l_0/h$ per mesh fine. ....	78
<b>Figura 3.20</b> Grafico forza vs spostamento al variare della mesh size a convergenza [25].....	79
<b>Figura 4.1</b> Piastra con foro quadrato, cricca laterale e vincoli applicati. ....	82
<b>Figura 4.2</b> Mesh utilizzata per la piastra con foro quadrato. ....	83
<b>Figura 4.3</b> Visualizzazione in MATLAB della discretizzazione della piastra con foro quadrato.....	84
<b>Figura 4.4</b> Grafico della reazione vincolare vs spostamento imposto per la piastra con foro quadrato e cricca laterale. ....	85
<b>Figura 4.5</b> Piastra con foro quadrato e cricca laterale: propagazione della cricca per uno spostamento imposto di (A) 1.0e-4 mm, (B) 1.5e-4 mm, (C) 2.0e-4 mm, (D) 3.0e-4 mm, (E) 3.5e-4 mm e (F) 4.0e-4 mm.....	86
<b>Figura 4.6</b> Distribuzione degli stress di Von Mises per la piastra con foro quadrato e cricca laterale. ....	88
<b>Figura 4.7</b> Dettaglio della distribuzione degli stress di Von Mises per piastra con foro quadrato. ...	89
<b>Figura 4.8</b> Piastra con foro circolare, cricca laterale e vincoli applicati. ....	90
<b>Figura 4.9</b> Mesh utilizzata per la piastra con foro circolare. ....	91
<b>Figura 4.10</b> Visualizzazione in MATLAB della discretizzazione della piastra con foro circolare.....	92

<b>Figura 4.11</b> Confronto tra piastra con foro quadrato e piastra con foro circolare. ....	92
<b>Figura 4.12</b> Piastra con foro circolare e cricca laterale: propagazione della cricca per uno spostamento imposto di (A) 1.0e-4 mm, (B) 2.0e-4 mm, (C) 2.5e-4 mm, (D) 3.0e-4 mm, (E) 3.5e-4 mm e (F) 4.0e-4 mm.....	94
<b>Figura 4.13</b> Distribuzione degli stress di Von Mises per la piastra con foro circolare e cricca laterale. ....	95
<b>Figura 4.14</b> Dettaglio della distribuzione degli stress di Von Mises per piastra con foro circolare. .	96
<b>Figura 4.15</b> Piastra con foro quadrato e cricca laterale di altezza variabile.....	97
<b>Figura 4.16</b> Confronto tra piastra con foro quadrato e cricca laterale di diversa altezza y. ....	98
<b>Figura 4.17</b> Propagazione della cricca di altezza $y = 8$ mm per uno spostamento imposto di (A) 1.5e-4 mm, (B) 2.0e-4 mm, (C) 2.5e-4 mm, (D) 3.0e-4 mm, (E) 3.5e-4 mm e (F) 4.0e-4 mm. ....	100
<b>Figura 4.18</b> Propagazione della cricca di altezza $y = 3$ mm per uno spostamento imposto di (A) 1.5e-4 mm, (B) 2.0e-4 mm, (C) 2.5e-4 mm, (D) 3.0e-4 mm, (E) 3.5e-4 mm e (F) 4.0e-4 mm. ....	101
<b>Figura 4.19</b> Distribuzione degli stress di Von Mises per la piastra con foro quadrato e cricca laterale di altezza $y = 3$ mm.....	102
<b>Figura 4.20</b> Piastra con inserto quadrato, cricca laterale e vincoli applicati.....	103
<b>Figura 4.21</b> Confronto tra piastra con foro quadrato e piastra con inserto quadrato.....	104
<b>Figura 4.22</b> Piastra con inserto quadrato: propagazione della cricca per uno spostamento imposto di (A) 1.5e-4 mm, (B) 2.0e-4 mm, (C) 2.5e-4 mm, (D) 3.0e-4 mm, (E) 3.5e-4 mm e (F) 4.0e-4 mm. ....	105
<b>Figura A.1</b> Discretizzazione agli elementi finiti della struttura di un velivolo [21].....	110
<b>Figura A.2</b> Principio di approssimazione mediante elementi finiti [22]. ....	111
<b>Figura A.3</b> Tipologie di elementi bidimensionali [26]. ....	112
<b>Figura A.4</b> Trasformazione di coordinate dal sistema di riferimento globale a quello locale [23].	113





# Introduzione

L'obiettivo di questa tesi è descrivere i concetti fondamentali del metodo Phase-Field, che è uno dei metodi più recenti e innovativi per la trattazione del fenomeno della frattura, e, dopo averlo implementato in MATLAB, cercare di capirne i punti di forza e di debolezza, analizzando diversi esempi di complessità crescente. Lo studio della propagazione delle cricche è di grande rilevanza in molti campi dell'ingegneria strutturale, e in modo particolare per il settore aerospaziale, dove il fenomeno della fatica e le forti sollecitazioni a cui sono sottoposti i velivoli possono portare a conseguenze pericolose dal punto di vista strutturale; alla luce di ciò si comprende quanto sia importante, per una progettazione in sicurezza, poter simulare in modo realistico la propagazione della frattura nei materiali. In questo contesto uno dei metodi più promettenti è, appunto, il metodo Phase-Field, che abbina una grande flessibilità (è applicabile a molti campi di studio) a una relativa facilità di implementazione, visto che si riesce ad accoppiare con il metodo degli elementi finiti, che da molti anni è conosciuto e regolarmente utilizzato nell'ambito dell'ingegneria strutturale.

Operativamente si è voluto implementare il metodo Phase-Field utilizzando una formulazione che possa tenere conto dell'irreversibilità della frattura in modo automatico (grazie all'introduzione della variabile *History Field*), così da poter rappresentare più agevolmente il comportamento realistico della frattura. A partire dal codice implementato, si sono potute analizzare nello specifico le caratteristiche del metodo, osservandone le potenzialità e anche qualche aspetto critico. Al fine di mettere in mostra le diverse peculiarità del metodo, si sono considerati esempi numerici di diversa complessità, pur trattando sempre sistemi relativamente semplici come piastre bidimensionali. Infatti le analisi effettuate in questo elaborato sono puramente teoriche, e si basano su geometrie semplici proprio perché lo scopo è quello di comprendere, accuratamente e con la maggior chiarezza possibile, il funzionamento del metodo Phase-Field; ciò non toglie che questo metodo possa essere esteso, viste le grandi potenzialità, anche al campo aziendale e allo studio della propagazione delle cricche nelle strutture reali.

Nel dettaglio si tratterà, nel primo capitolo, il problema della meccanica della frattura dal punto di vista teorico, illustrando i concetti principali che poi entreranno in gioco nella formulazione del metodo implementato. Successivamente si affronterà, nell'ipotesi di materiali isotropi e fragili in regime quasi-statico, il metodo Phase-Field per la simulazione della propagazione delle cricche, discutendone nello specifico gli aspetti teorici fondamentali e quelli tecnici legati all'implementazione (secondo capitolo).

Invece gli ultimi due capitoli sono legati all'analisi numerica vera e propria. Nel terzo capitolo si studieranno, dopo aver validato il codice implementato mediante il confronto con i risultati di un articolo di riferimento, i parametri che maggiormente influenzano il metodo. In questo modo si è potuto constatare che il modello implementato riesce a riprodurre i risultati previsti dalla teoria (variando per esempio la lunghezza iniziale della cricca), e al tempo stesso comprendere alcuni degli aspetti più critici del metodo, come la dipendenza dalla dimensione della mesh.

Infine, nel quarto capitolo, si presenteranno delle analisi su sistemi più complessi, in modo da evidenziare i principali punti di forza del metodo. Gli esempi sono stati scelti per mettere in luce alcuni fenomeni che il Phase-Field, a differenza di altri metodi presenti in letteratura, riesce a simulare. Tra questi ci sono per esempio il *kinking* (piega) e il *branching* (ramificazione), che possono essere rappresentati (senza l'aggiunta di criteri addizionali) dal momento che non è necessario sapere a priori la direzione di propagazione della cricca. Inoltre, per confermare la bontà dei risultati ottenuti, si è confrontata l'evoluzione della frattura nel materiale con la distribuzione degli stress nella struttura, sapendo che il percorso preferenziale per la propagazione è quello in cui risultano i valori di tensione più elevati. Dunque, per queste analisi, si sono interfacciati software differenti: MATLAB, in cui è stato implementato il codice, PARAVIEW, tramite il quale è stato possibile elaborare i risultati in modo da visualizzare con chiarezza l'evoluzione della propagazione, e PATRAN/NASTRAN, per ottenere la distribuzione delle tensioni mediante l'analisi agli elementi finiti; quest'ultimo software è stato anche utilizzato per la preparazione della geometria e della mesh dei sistemi considerati, da cui poi si è predisposto il file di input per l'analisi Phase-Field in MATLAB.

# 1. Meccanica della frattura: fondamenti teorici

La meccanica della frattura (*Fracture Mechanics*) è la teoria che studia la propagazione delle cricche, che sono delle zone di rottura locale del materiale in cui è presente una discontinuità nella geometria della struttura (figura 1.1). È una disciplina che si pone come scopo principale quello di valutare l'influenza dei difetti (o cricche) nei materiali e di trovare relazioni quantitative tra dimensioni delle cricche, sforzo applicato e resistenza dei materiali stessi. Essa consiste, quindi, in un'analisi dei difetti del materiale e nella valutazione della loro pericolosità, cercando di capire in quale condizioni possono evolversi e propagarsi nel materiale fino a causarne la rottura.

La frattura è quel complesso di fenomeni che portano, in ultima fase, alla rottura di un materiale. Questi fenomeni si dispiegano dalla scala nanometrica (coinvolgendo eventi di rottura dei legami chimici tra atomi) fino alla scala macroscopica (determinando l'innesco, la propagazione e il frastagliamento dei fronti di frattura).



**Figura 1.1** Esempio di propagazione di una cricca in una struttura reale [17].

Le modalità di frattura sono molteplici e dipendono non solo dalle caratteristiche fisiche e chimiche del materiale, ma anche dalle specifiche condizioni di carico meccanico a cui esso è soggetto, nonché dalla sua storia (fatica del materiale). Lo stato di sforzo a cui è sottoposto un corpo è normalmente funzione sia delle condizioni al contorno (geometria del corpo, geometria del difetto e sollecitazioni

applicate), sia della legge costitutiva del materiale, la quale determina il suo comportamento in risposta all'applicazione dello sforzo.

In generale il cedimento di una struttura può essere dovuto a una sollecitazione maggiore rispetto a quella sostenibile o al fenomeno della fatica, in cui le strutture, a causa della presenza delle cricche, possono cedere anche per carichi inferiori (ma ripetuti nel tempo) rispetto a quelli ammissibili dal materiale. Questo fenomeno è ancora più pericoloso dal momento che la presenza delle cricche, a causa delle condizioni ambientali e del processo stesso di produzione, è inevitabile nelle strutture reali; ed è per questo motivo che l'approccio progettuale "classico", in cui si ipotizza che il materiale sia esente da difetti, non riesce a prevedere la vita di una struttura nel caso in cui sia determinante il fenomeno della fatica. Pertanto, proprio per tenere in considerazione questo fenomeno, nella meccanica della frattura si ammette la presenza di difetti (progettazione *damage tolerant*), purché venga valutata con correttezza la loro pericolosità.

Nelle sue applicazioni pratiche la meccanica della frattura si configura come un importante strumento per migliorare il comportamento meccanico dei materiali e dei componenti, ed è di indiscutibile valore in settori come l'aeronautico e l'aerospaziale, dove la verifica dei componenti sollecitati deve essere di massima precisione.

Per praticità si suddivide la meccanica della frattura in funzione della legge costitutiva del materiale, che determina il suo comportamento in risposta all'applicazione di uno sforzo:

- Meccanica della frattura lineare-elastica (LEFM);
- Meccanica della frattura elastoplastica (EPFM).

Nel primo caso, che verrà trattato nello specifico in questo elaborato, si considerano materiali dal comportamento lineare-elastico, mentre la EPFM studia i materiali duttili (*ductile*), che possono deformarsi plasticamente prima della frattura. La meccanica lineare-elastica è adatta a prevedere il comportamento dei materiali fragili (*brittle*), in cui il campo di tensioni in prossimità della cricca è lineare-elastico, mentre non riesce a trattare la deformazione plastica. Per questo motivo, visto che la maggior parte dei metalli usati in ingegneria strutturale sono duttili (soprattutto in ambito aerospaziale), Orowan e Irwin hanno modificato la teoria della LEFM per poter includere il comportamento dei materiali elastoplastici; queste modifiche hanno fornito la base per lo sviluppo della meccanica della frattura elastoplastica, che appunto tratta nello specifico materiali con proprietà duttili [1].

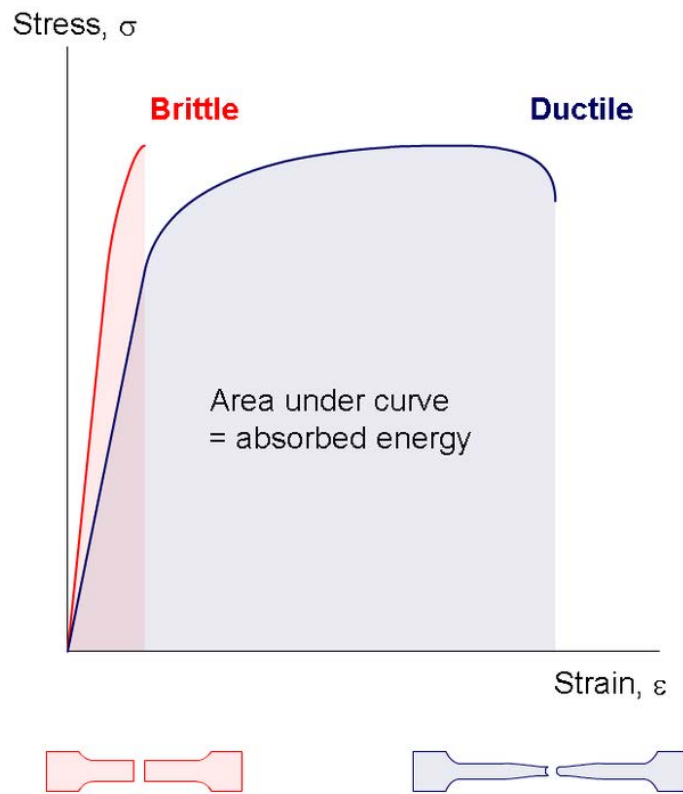
Un'altra possibile suddivisione viene fatta a seconda del punto di vista con cui si vuole studiare il problema. Il fenomeno della propagazione delle fessure in materiali fragili può essere studiato sia in termini energetici (globali) mediante il criterio di Griffith, sia in termini tensionali (locali). Questi due approcci cercano di spiegare a livello teorico lo stesso fenomeno (la frattura), pertanto, pur essendo diversi, portano alle stesse considerazioni; infatti sono strettamente legati tra loro e, come si vedrà in seguito, si riescono anche a trovare delle relazioni tra i parametri chiave dei due approcci. Mentre il criterio di Griffith tratta il problema della frattura dal punto di vista energetico, l'approccio tensionale cerca di valutare l'impatto che una cricca ha sull'integrità di una struttura in base allo studio del campo delle tensioni in prossimità della cricca stessa; ossia cerca di individuare come e per quali valori della tensione nominale il campo delle tensioni diventa critico, permettendo alla cricca di propagarsi attraverso la struttura.

Nel seguito si farà riferimento a materiali isotropi e omogenei aventi comportamento lineare-elastico (che presentano il fenomeno della frattura fragile a cedimento), e quindi il campo d'interesse è quello della meccanica della frattura lineare-elastica (LEFM). Nell'ambito della simulazione della propagazione delle cricche si colloca anche il metodo Phase-Field, oggetto principale di questo elaborato. Pertanto, al fine di comprendere le equazioni che governano il metodo che sarà implementato, è importante conoscere i fondamenti teorici che ne stanno alla base.

## 1.1 Frattura fragile vs duttile

In relazione alla legge costitutiva del materiale si possono distinguere due tipologie di frattura: fragile e duttile. I materiali fragili sono caratterizzati da una deformazione plastica trascurabile, ossia assorbono poca energia prima della frattura; inoltre mantengono un comportamento lineare-elastico fino a rottura, che di conseguenza giunge in modo improvviso. Dato che questo tipo di frattura ha una rapida velocità di crescita a partire dalla cricca iniziale, il processo è definito come instabile o critico, perché la propagazione della cricca giunge velocemente alla frattura finale. Al contrario i materiali duttili possono immagazzinare molta energia prima di raggiungere la frattura, infatti si deformano plasticamente prima di rompersi. Questi materiali mostrano una zona di strizione (restringimento) prima della frattura, fenomeno che non si verifica nei materiali fragili.

Il diverso assorbimento dell'energia prima della frattura è evidente dal diagramma stress-strain (figura 1.2), in cui è rappresentata la relazione tra tensione e deformazione per un provino soggetto a trazione. L'energia assorbita è data dall'area sottesa dalla curva, pertanto si intuisce come la maggiore duttilità permetta di immagazzinare più energia (e quindi di deformarsi di più) prima di raggiungere la frattura.



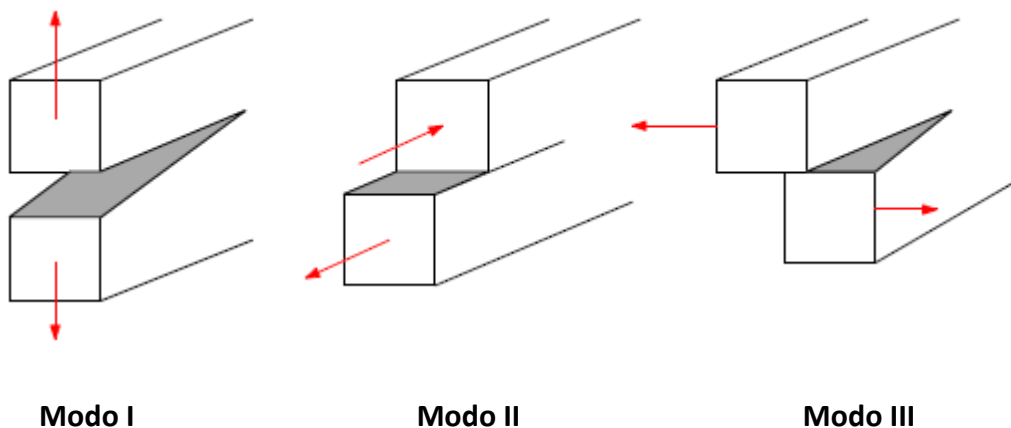
**Figura 1.2** Grafico tensione vs deformazione per frattura fragile e duttile [18].

Queste considerazioni fanno capire che, per quanto riguarda l'ingegneria strutturale e la prevenzione della propagazione delle cricche, è conveniente utilizzare materiali duttili, perché è possibile sfruttare la deformazione plastica per aumentare maggiormente il carico applicato prima di arrivare a rottura. Inoltre la frattura fragile è più pericolosa perché è più difficile da prevedere, per il fatto che giunge improvvisamente, senza che possa essere notata in precedenza alcuna deformazione plastica evidente. Tuttavia non è sempre possibile mantenere la duttilità nei materiali, perché questa può dipendere da molti fattori, come la bassa temperatura, le condizioni ambientali (per esempio l'umidità), uno stato interno di tensioni residue o le proprietà del materiale stesso [19].

## 1.2 Modi di carico

La propagazione di una cricca può avvenire secondo tre modalità, illustrate in figura 1.3:

- **Modo I (*opening mode*):** è il modo di apertura e consiste nel distacco delle due superfici tramite l'apertura della cricca; il provino in questo caso è sottoposto a trazione, con il carico applicato in direzione normale al piano della cricca;
- **Modo II (*in plane shear/sliding mode*):** è il modo di scorrimento e consiste, appunto, nello scorrimento una sull'altra delle due superfici; avviene in presenza di un carico di taglio che agisce parallelamente al piano e al fronte della cricca;
- **Modo III (*out-of-plane shear/tearing mode*):** è il modo di lacerazione; si ha questo effetto quando il provino è sottoposto a torsione, ovvero quando un carico di taglio agisce parallelamente al piano della cricca e perpendicolarmente al fronte della cricca.



**Figura 1.3** Diverse modalità di frattura a seconda del carico applicato [31].

Il modo I di apertura è il più comune; infatti in natura i materiali prediligono tale modo di propagazione del difetto in quanto, generalmente, è quello che richiede meno energia. Per questo è quello che si presenta più spesso nelle situazioni ingegneristiche che coinvolgono componenti criccati. Invece i modi I e II richiedono più energia per verificarsi, e quindi, visto che in ingegneria strutturale si vuole evitare qualsiasi tipo di frattura, sono di meno interesse pratico. Per questo motivo in questo elaborato ci si è concentrati sul modo I di frattura, per cui le analisi numeriche considerate trattano sistemi sottoposti esclusivamente a carico di trazione.

Combinando diverse modalità di carico è anche possibile avere dei modi di frattura combinati (in regime lineare vale il principio della sovrapposizione degli effetti). Per esempio applicando sia carico di trazione sia di taglio, si ottiene il modo di frattura combinato I+II. Nel caso di carichi combinati, i modi I e II possono influenzare la crescita della cricca causando il cambiamento di direzione della cricca stessa. La cricca prediligerà, comunque, le direzioni della crescita dello stato tensionale del modo I [2].

### 1.3 Approccio energetico

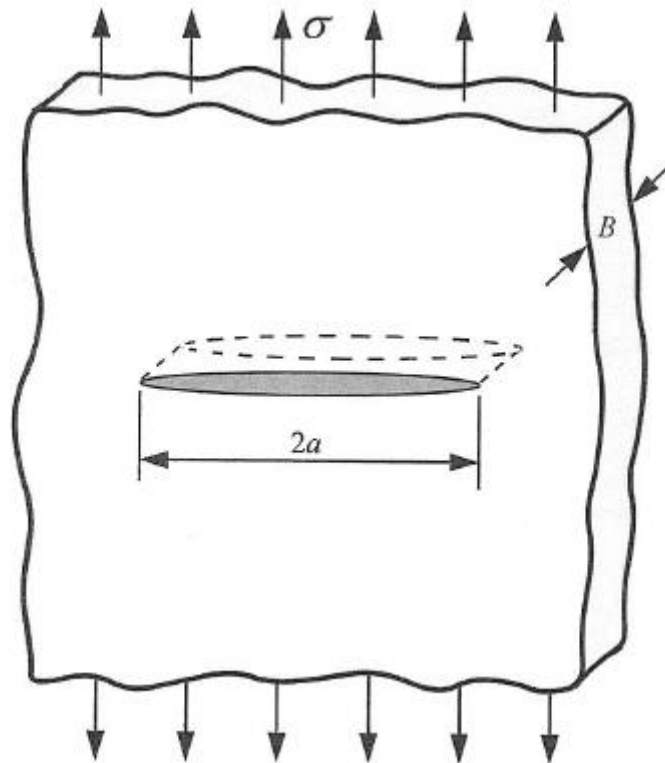
Per analizzare il fenomeno della frattura si può considerare un approccio basato sulle tensioni oppure un criterio energetico. Per quest'ultimo approccio il maggior contributo è stato dato da Griffith [3] e Irwin [4]; se il primo ha avuto l'intuizione iniziale per la formulazione di un criterio termodinamico per la frattura, il secondo ha introdotto alcune semplificazioni che si sono poi rivelate fondamentali in ambito ingegneristico. Anche il metodo Phase-Field, oggetto di questo elaborato, si basa su queste considerazioni, pertanto è fondamentale comprendere questa modalità di approccio per poi capire le equazioni che saranno implementate.

La teoria di Griffith si basa sul bilancio energetico globale: perché si verifichi la frattura, l'energia elastica immagazzinata nella struttura deve essere maggiore o uguale alla resistenza del materiale, ossia all'energia necessaria per propagare la superficie di cricca (*surface energy*). A livello atomico, affinché avvenga la frattura è necessario che l'energia assorbita dal corpo sia sufficiente per rompere i legami chimici determinati dalla tensione di coesione (tensione locale uguale o superiore al *cohesive stress*); la presenza delle cricche intensifica la tensione locale, ed è per questo che sono le zone più critiche per la propagazione della frattura.

In altri termini, il concetto fondamentale del criterio energetico è che la cricca può propagarsi solo se l'energia potenziale decresce o, al limite, rimane costante (principio di minimizzazione dell'energia potenziale). Così la condizione critica per la frattura è definita come il punto in cui la cricca si propaga in condizioni di equilibrio, ossia quando l'energia potenziale totale non varia.

Per chiarire meglio il concetto si fa riferimento, come rappresentato in figura 1.4, a una piastra infinita di spessore  $B$  e soggetta alla tensione di trazione  $\sigma$ . In essa è presente una cricca di lunghezza  $2a$  e passante lungo tutto lo spessore della piastra.





**Figura 1.4** Cricca passante in una piastra infinita soggetta a trazione [5].

Il bilancio energetico di Griffith, espresso in formula, risulta:

$$\frac{dE}{dA} = \frac{d\Pi}{dA} + \frac{dW_s}{dA} \quad (1.1)$$

in cui  $A$  è l'area di cricca,  $E$  è l'energia potenziale totale,  $\Pi$  è l'energia dovuta alla deformazione elastica e alle forze esterne e  $W_s$  è il lavoro necessario per la formazione di nuove superfici di cricca.

La condizione critica (equilibrio) si ottiene quando si eguaglia a zero l'equazione (1.1), ovvero:

$$-\frac{d\Pi}{dA} = \frac{dW_s}{dA} \quad (1.2)$$

Per il sistema in esame, considerando l'analisi sugli stress compiuta da Inglis [6], l'energia potenziale elastica  $\Pi$  vale:

$$\Pi = \Pi_0 - \frac{\pi\sigma^2 a^2 B}{E} \quad (1.3)$$

con  $\Pi_0$  l'energia potenziale elastica per la piastra senza cricca e  $E$  è il modulo di Young del materiale. Si nota che, quando si forma la cricca, l'energia elastica diminuisce e, per la relazione (1.2), la sua variazione corrisponde esattamente alla variazione del lavoro associato alla formazione della cricca (infatti  $\frac{dW_s}{dA} > 0$ ).

Invece il lavoro  $W_s$  si esprime come:

$$W_s = 4aB\gamma_s \quad (1.4)$$

con  $\gamma_s$  la *surface energy* del materiale, ovvero l'energia per unità di superficie necessaria per la propagazione della cricca. Dunque, sostituendo le equazioni (1.3) e (1.4) dentro il bilancio (1.2), si ottiene:

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{2E\gamma_s}{\pi a}} \quad (1.5)$$

Questa equazione esprime la relazione tra la tensione critica per la frattura  $\sigma_f$ , la *surface energy* e la dimensione di cricca  $a$  (*crack size*).

Per conferire una maggiore compattezza e semplicità alle equazioni, Irwin introduce il parametro  $G$ , ossia il tasso di rilascio di energia (*energy release rate*), che viene definito come:

$$G = -\frac{d\Pi}{dA} = \frac{\pi\sigma^2 a}{E} \quad (1.6)$$

Questo parametro fornisce una misura immediata dell'energia disponibile (in base al carico applicato  $\sigma$ ) da dissipare per incrementare la superficie di cricca. Dalla relazione (1.2) si ricava:

$$G_c = \frac{dW_s}{dA} = 2\gamma_s = \frac{\pi\sigma_f^2 a}{E} \quad (1.7)$$

dove il fattore 2 indica che sono due le nuove superfici di cricca che si formano con la propagazione della frattura. L'equazione (1.6) si ottiene in corrispondenza delle condizioni critiche per il *failure*, in cui si verifica una combinazione critica tra tensione applicata e *crack size*. Il parametro  $G_c$  rappresenta l'energia necessaria per la formazione delle due nuove superfici di cricca, e in questo senso indica la tenacità del materiale, cioè la sua resistenza a frattura. La comodità di aver introdotto l'*energy release rate* critico è che è possibile rappresentare la resistenza a frattura di un materiale

con un unico valore (appunto  $G_c$ ). Nell'ambito della LEFM (quindi in regime lineare-elastico), si può assumere che  $G_c$  sia un parametro costante per un dato materiale, indipendentemente dalle dimensioni e dalle geometrie del corpo criccato [5]. Nella pratica è una proprietà del materiale che deve essere determinata sperimentalmente. Invece il valore di  $G$  non critico dipende, come si deduce dalla (1.6), dalle condizioni geometriche e dai carichi applicati (condizioni al contorno).

In questo modo un criterio per la propagazione della fessura può essere espresso attraverso una disuguaglianza tra l'energia disponibile per essere rilasciata  $G$  e l'energia superficiale  $G_c$ , ovvero la quantità critica di rilascio di energia. Si definisce quindi il criterio energetico globale di Griffith:

- $G < G_c$ : assenza di propagazione;
- $G = G_c$ : propagazione quasi-statica;
- $G > G_c$ : propagazione dinamica.

Queste condizioni esprimono il fatto che se l'energia disponibile è minore di quella necessaria, la fessura non si propaga e la struttura rimane integra.

Se l'energia disponibile uguaglia quella necessaria ( $G = G_c$ ), la fessura può propagarsi staticamente, cioè in presenza di forze di inerzia trascurabili. Invece se l'energia disponibile supera quella necessaria, la struttura diventa instabile e la cricca si propaga dinamicamente. Nel caso di propagazione dinamica, l'energia in eccesso viene dunque trasformata in energia cinetica della cricca, e quindi bisogna considerare nell'equazione di bilancio anche l'energia cinetica.

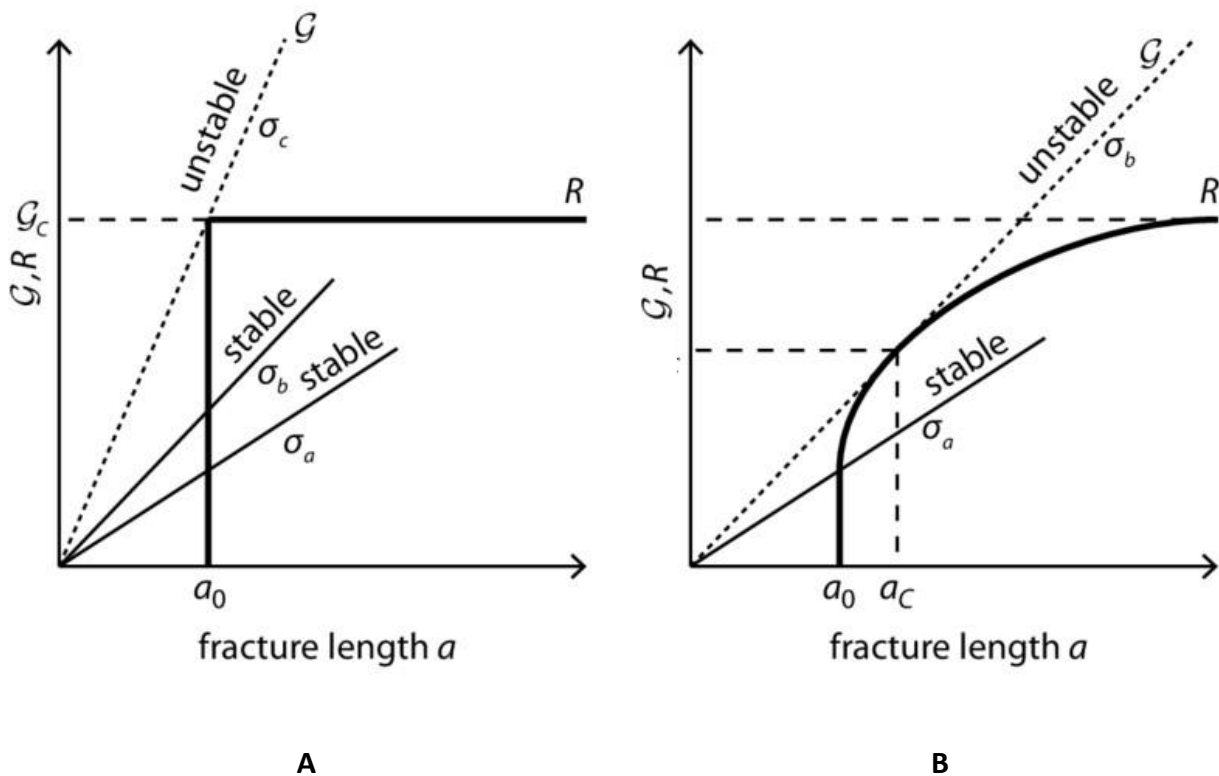
Ora, considerando il caso  $G = G_c$ , si vuole analizzare la stabilità della propagazione. Per semplicità si identifica l'*energy release rate* critico con la lettera  $R$  (quindi  $R = \frac{dW_s}{dA}$ ), per indicare che corrisponde alla resistenza (o tenacità) del materiale. Per discutere la stabilità si osserva la derivata di  $G$ , ossia la derivata seconda dell'energia potenziale elastica (equazione 1.6); infatti, dallo studio del segno della derivata seconda di una funzione, si può determinare se un punto stazionario (derivata prima nulla) è di massimo o di minimo per la funzione stessa. In questo caso la condizione di stabilità è data dal punto di minimo dell'energia totale, che è il principio fisico che spiega perché la propagazione della cricca assume una certa direzione.

Considerando il sistema in figura 1.4 e sapendo che l'area di cricca vale  $A = a B$  con  $B$  costante, si può differenziare l'equazione (1.1) dell'energia totale rispetto alla lunghezza di cricca  $a$ . In questo modo si ottengono le seguenti condizioni di stabilità e instabilità:

$$\text{minimo: } \frac{d^2E}{da^2} \geq 0 \rightarrow \frac{dG}{da} \leq \frac{dR}{da} \text{ stabilità} \quad (1.8)$$

$$\text{massimo: } \frac{d^2E}{da^2} < 0 \rightarrow \frac{dG}{da} > \frac{dR}{da} \text{ instabilità} \quad (1.9)$$

Nel caso di propagazione stabile la velocità con cui aumenta il rilascio di energia  $G$  è inferiore a quella con cui aumenta la resistenza del materiale; questa condizione porta la cricca, dopo una propagazione iniziale, a interrompere la sua evoluzione (come se subisse una decelerazione). Al contrario se  $G$  aumenta più velocemente di  $R$ , il materiale non è in grado di resistere alla propagazione, pertanto, una volta iniziato, il fenomeno della frattura tende a continuare e a divergere. Queste considerazioni sono evidenti dal grafico riportato in figura 1.5, in cui si considerano i due casi differenti di  $R$  costante (materiale perfettamente omogeneo) e variabile. Il diagramma si “legge” andando a vedere, in corrispondenza della condizione  $G = R$ , se la derivata di  $G$  rispetto ad  $a$  è maggiore o minore di quella di  $R$ . Come si nota dall’equazione (1.6) l’*energy release rate* è lineare rispetto alla lunghezza di cricca, pertanto il coefficiente angolare della retta (derivata) è proporzionale alla tensione applicata  $\sigma$ .



**Figura 1.5** Diagramma di confronto tra  $G$  e  $R$  con resistenza del materiale costante (A) e variabile (B) [20].

Nelle successive analisi effettuate con il metodo Phase-Field si farà riferimento a materiali omogenei (caso A), in cui la resistenza del materiale è uguale in tutta la struttura. Dunque, come si nota dalla figura, è possibile assegnare al materiale un unico valore di *energy release rate* critico  $G_c$ ; diversamente, in casi più complessi in cui la resistenza del materiale è variabile con la lunghezza di cricca (caso B), non si riesce ad assegnare un valore univoco di  $G_c$ , perché questo cambia all'avanzare della propagazione.

Per quanto riguarda l'estensione della teoria ai materiali duttili, come accennato in precedenza, Irwin [7] e Orowan [8] hanno modificato il criterio di Griffith aggiungendo al bilancio energetico un termine legato alla plasticità, che solitamente non è trascurabile nei materiali metallici. Dunque l'equazione (1.5) diventa:

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{2E(\gamma_s + \gamma_p)}{\pi a}} \quad (1.10)$$

dove  $\gamma_p$  è il lavoro plastico per unità di superficie, che solitamente è molto più grande di  $\gamma_s$ .

Da questa equazione si deduce che, nel caso di materiali duttili, il termine plastico comporta un aumento della tensione di *failure*  $\sigma_f$ , e quindi permette di ritardare l'insorgenza della frattura.

## 1.4 Approccio tensionale

Questa modalità di approccio al problema della frattura si basa sul calcolo del campo di tensioni nell'intera struttura, sapendo che la frattura avviene quando la tensione in un certo punto supera quella ammissibile dal materiale. Se a livello concettuale è molto immediato, in passato questa considerazione (ovvia) ha destato molte perplessità; infatti non si riusciva a comprendere il motivo per cui nelle strutture la frattura insorgesse per una tensione applicata anche molto inferiore alla tensione critica del materiale. Si è poi capito che questo comportamento, all'apparenza contro-intuitivo, era dovuto alla presenza dei difetti nelle strutture, che amplificano la concentrazione di tensione e quindi possono portare a frattura anche se la tensione esterna applicata è minore di quella ammissibile.

Il primo studioso a trovare una relazione quantitativa che dimostrasse l'influenza delle cricche sull'amplificazione dello stress è stato Inglis [6], che ha analizzato cricche ellittiche in piastre piane.

In riferimento a figura 1.6, si assume di calcolare la tensione nel punto A (punta della cricca o *crack tip*) considerando che la larghezza della piastra sia molto maggiore della lunghezza di cricca ( $2a$ ); in questo modo vuole evitare che il valore di tensione in A sia influenzato dalle condizioni al contorno della piastra. Si determina che la tensione in A vale:

$$\sigma_A = \sigma \left( 1 + \frac{2a}{b} \right) \quad (1.11)$$

in cui si osserva che il valore è amplificato rispetto alla tensione esterna applicata  $\sigma$ . Per questo bisogna fare molta attenzione alla presenza dei difetti ed è necessario includerli nella progettazione al fine di evitare rotture inaspettate. Un'ulteriore criticità è data dalla geometria della punta della cricca: minore è il suo raggio di curvatura, maggiore è l'effetto amplificativo della tensione. Questo significa che una cricca è tanto più critica quanto più è "appuntita"; questo aspetto sarà valutato anche nelle analisi numeriche, in cui si effettuerà il confronto tra foro circolare e foro quadrato (dove il raggio di curvatura ai vertici è nullo).

Quanto detto è possibile ricavarlo dall'equazione (1.11) introducendo la variabile raggio di curvatura della *crack tip*, che si definisce come:

$$\rho = \frac{b^2}{a} \quad (1.12)$$

Sostituendo questo parametro dentro l'equazione (1.11) e considerando  $a \gg b$  (quindi il difetto ellittico diventa una cricca sottile o *sharp crack*), si ottiene:

$$\sigma_A = 2\sigma \sqrt{\frac{a}{\rho}} \quad (1.13)$$

in cui si vede che più il raggio di curvatura  $\rho$  diminuisce, più si amplifica la tensione in A.

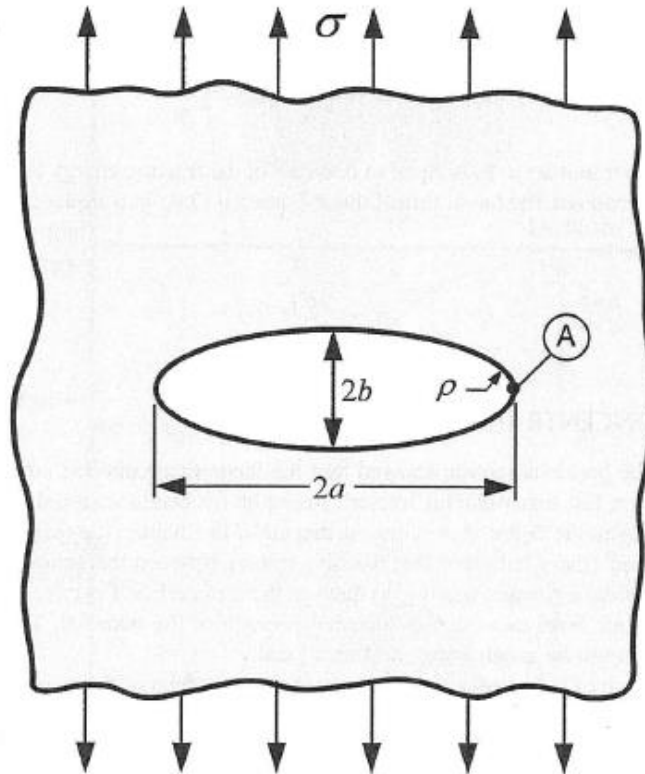


Figura 1.6 Cricca ellittica in una piastra piana [5].

Sebbene l'equazione (1.13) sia una buona approssimazione del comportamento reale del fenomeno della frattura, presenta il problema di singolarità in  $\rho = 0$ . Infatti per raggio di curvatura nullo, a prescindere dalla tensione esterna applicata, la tensione in A si amplifica all'infinito; questo è certamente non accettabile, perché significa che un sistema che presenta una cricca molto appuntita fallirebbe per qualsiasi carico esterno  $\sigma$  applicato (visto che nessun materiale può sostenere un'amplificazione di tensione infinita).

Questo problema è stato discusso da Griffith nell'ambito del criterio energetico, ma si è anche cercato di proseguire l'approccio tensionale andando ad introdurre alcuni parametri utili dal punto di vista pratico e ingegneristico. Per rappresentare lo stato tensionale in prossimità della cricca (per materiali lineari-elastici), Irwin [4] definisce il concetto di *stress intensity factor*  $K$  (SIF). Questo parametro rappresenta l'amplificazione delle tensioni nella zona del difetto a seconda della geometria e delle condizioni al contorno, e varia anche in relazione al modo di carico (viene assegnato il pedice I, II o III).

Per la piastra infinita considerata in figura 1.4, si ottiene l'espressione:

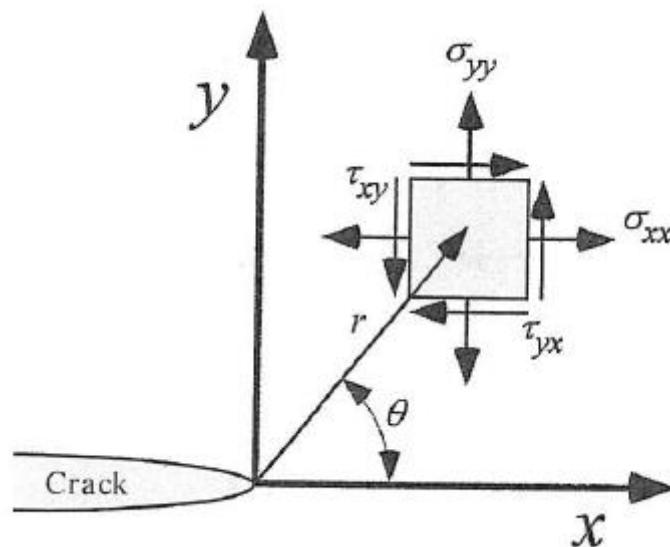
$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a} \quad (1.14)$$

Per sistemi con geometria simile si aggiunge un fattore  $Y$ , che dipende dalle forma e dalla posizione della cricca. Per esempio nel caso di cricca laterale (al bordo) si trova  $Y = 1.12$ , invece per una cricca di forma circolare (*penny-shaped crack*) di raggio  $a$  si trova  $Y = 2/\pi$ . Tuttavia, per geometrie più complesse, non esistono relazioni teoriche ed è necessario ricavare il SIF sperimentalmente o mediante analisi numeriche.

Facendo riferimento alla figura 1.7, il campo di tensioni in prossimità della cricca, che risulta dalla formulazione dello *stress intensity factor*, si esprime come:

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\vartheta) \quad (1.15)$$

dove  $K_I$  è definito dalla (1.14),  $r$  e  $\theta$  sono rispettivamente distanza e inclinazione del punto in cui si vuole calcolare la tensione rispetto alla *crack tip* (coordinate polari), e gli indici  $i$  e  $j$  rappresentano le componenti del tensore di tensione. La funzione  $f(\theta)$  è un termine adimensionale che vale 1 per  $\theta = 0$ . È importante sottolineare che l'equazione (1.15) vale esclusivamente nella zona vicino alla cricca (zona di singolarità), ossia dove il campo di tensioni è dominato dalla presenza della cricca stessa.

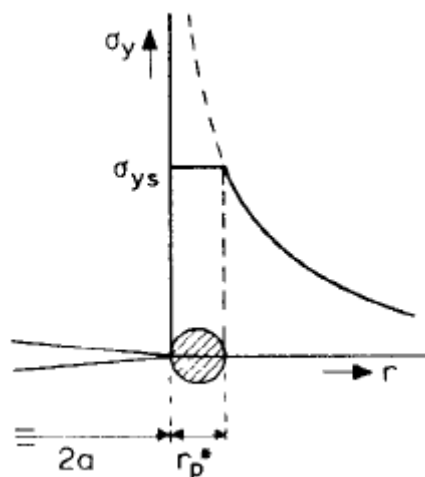


**Figura 1.7** Coordinate polari per il calcolo delle tensioni nella zona vicino alla *crack tip* [5].



Si può notare che, come per l'equazione di Inglis, anche in questo caso è presente una condizione di singolarità per cui la tensione tende a infinito. Infatti in corrispondenza della punta di cricca si ha  $r = 0$  (distanza nulla) e, se si considera che la forma sia appuntita, si verifica la condizione appena descritta. Tuttavia nella realtà la tensione non può essere infinita, e questo non accade perché i materiali non sono mai perfettamente fragili; a differenza del comportamento elastico, la duttilità permette la deformazione plastica in prossimità della *crack tip*, e questa deformazione mantiene finito il valore di tensione. Questo andamento è riportato in figura 1.8, in cui lo *yield stress* è la tensione di snervamento, oltre la quale il sistema passa dal comportamento elastico a quello plastico.

Pertanto si crea una zona di raggio  $r_p$  in cui il materiale si deforma plasticamente, e ciò impedisce il raggiungimento di valori troppo alti di tensione in prossimità della punta della cricca. Tuttavia la presenza di questa zona non impedisce l'utilizzo del fattore di amplificazione delle tensioni nell'ambito dell'approccio tensionale della frattura; infatti si dimostra che il raggio della zona plastica è funzione di  $K_I$  e della tensione di snervamento, perciò lo *stress intensity factor* permette di rappresentare tutta la distribuzione di tensione in prossimità della cricca, anche all'interno della zona plastica [2].



**Figura 1.8** Distribuzione di tensioni in prossimità della zona di cricca, considerando la zona di deformazione plastica [2].

Analogamente a quanto si era visto per l'approccio energetico, anche in questo caso la frattura avviene quando il parametro fondamentale  $K$  raggiunge un valore critico  $K_C$ . Considerando il modo di frattura I si possono avere le seguenti condizioni:

- $K_I < K_{IC}$ : assenza di propagazione;
- $K_I = K_{IC}$ : propagazione quasi-statica;
- $K_I > K_{IC}$ : propagazione dinamica.

Dunque, mentre  $K_I$  è un valore che dipende dalle condizioni geometriche e di carico,  $K_{IC}$  è una vera e propria proprietà del materiale indipendente dalla *crack size*, e può essere intesa come la tenacità del materiale in relazione alle tensioni: è la massima amplificazione degli stress che il materiale può sopportare prima della propagazione della frattura. Pertanto questo parametro critico si esprime, a partire dalla (1.14), come:

$$K_{IC} = \sigma_f \sqrt{\pi a} \quad (1.16)$$

Infine, combinando le equazioni (1.14) e (1.6), si ottiene la relazione che lega l'approccio tensionale con quello energetico:

$$G = \frac{K_I^2}{E} \quad (1.17)$$

Questa equazione è stata ricavata per un sistema specifico, ma, come dimostrato da Irwin, ha valore generale [5]. Pertanto si dimostra che, nel regime lineare-elastico, i due approcci sono sostanzialmente equivalenti.

A questo punto, discussi i principali aspetti teorici della meccanica della frattura, si può procedere con la trattazione delle strategie implementative per la simulazione della propagazione delle cricche. In particolare si vuole descrivere e implementare il metodo Phase-Field, che in questo contesto è una delle metodologie che presenta le caratteristiche più interessanti.

## 2. Il metodo Phase-Field per la frattura

In questo elaborato ci si è concentrati sul Phase-Field, che è uno dei metodi più innovativi e promettenti per lo studio della propagazione delle cricche. Il motivo principale è che si adatta a geometrie e sistemi molto diversificati e permette di simulare in modo autonomo (senza l'aggiunta di criteri aggiuntivi) fenomeni complessi come l'innesco di cricca e la ramificazione (*branching*), che sono difficilmente rappresentabili con la maggior parte dei metodi presenti in letteratura. La prima sezione consiste in un'introduzione al problema della simulazione delle cricche, in cui verranno menzionati alcuni metodi di implementazione; in questo modo sarà possibile, una volta descritto il metodo Phase-Field, comprenderne meglio i punti di forza e di debolezza, anche in relazione alle altre metodologie esistenti. Nelle sezioni successive, invece, si tratterà nel dettaglio il metodo Phase-Field, sia dal punto di vista teorico sia da quello pratico legato all'implementazione.

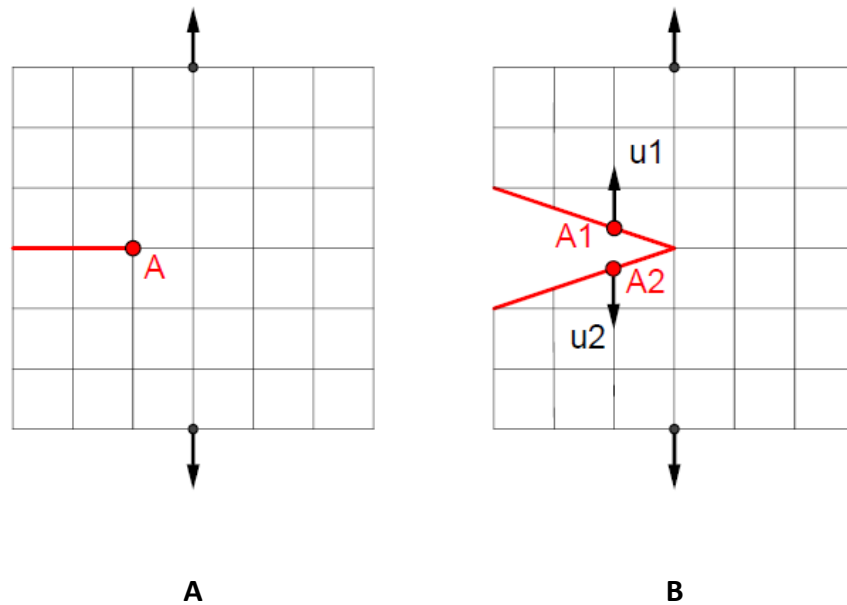
### 2.1 Introduzione al metodo

Il fenomeno della frattura è da sempre un campo di ricerca tanto importante quanto ostico; la maggiore complicazione risiede nell'implementazione di modelli che tengano conto della discontinuità nel materiale causata dalla cricca. Questo aspetto è critico per la formulazione teorica classica dell'analisi strutturale; se per esempio si considera l'asse  $x$  del sistema, si ha la seguente relazione tra spostamento e deformazione:

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} \quad (2.1)$$

Da questa equazione, una discontinuità negli spostamenti ( $u$ ) rispetto al campo spaziale ( $x$ ) implica un aumento locale infinito nel campo delle deformazioni in quella direzione ( $\varepsilon_x$ ). Utilizzando l'implementazione classica degli elementi finiti (FEM), questo problema sarebbe insormontabile. Infatti, visto che ad ogni nodo può essere assegnato un solo valore di spostamento, nei nodi appartenenti alla zona di cricca ci sarebbe ambiguità nella trattazione dello spostamento. A questo proposito in figura 2.1 è riportata l'apertura di una cricca laterale in una piastra sottoposta a trazione e discretizzata col metodo FEM; si tratta di un'apertura "fittizia" e rappresentata solo per chiarezza visiva, perché in realtà la mesh non può disunirsi (a meno dell'aggiunta di criteri particolari). Se si considera il nodo A appartenente alla superficie di cricca superiore (A1), lo spostamento sarà  $u_1$ , mentre se lo si considera appartenente alla superficie inferiore (A2), lo spostamento associato sarà

$u_2$ . Questa discontinuità nel campo degli spostamenti ( $du \neq 0$ ) nello stesso nodo ( $dx = 0$ ), comporta una deformazione locale tendente a infinito, il che è impossibile da rappresentare numericamente.



**Figura 2.1** Rappresentazione schematica della superficie di cricca (in rosso) all'istante iniziale (A) e dopo l'applicazione della trazione (B). Si riporta la scissione "fittizia" del nodo A in A1 e A2, il che comporta l'ambiguità nell'assegnazione dello spostamento.

Se da un lato il metodo degli elementi finiti classico non è applicabile nell'ambito della *Fracture Mechanics*, dall'altro è difficile rinunciarci, visto che è una tipologia di analisi comoda, conosciuta e già molto radicata soprattutto in ambito aziendale. Dunque, per la propagazione delle cricche, gli studi proseguono essenzialmente in due direzioni: metodi alternativi (e al limite interfacciabili) con il FEM e metodi agli elementi finiti che cercano di superare il problema della discontinuità nel campo degli spostamenti.

Nella prima categoria si colloca per esempio la Peridinamica [9,10], che consiste nella discretizzazione del sistema in una matrice di punti in cui ogni nodo, caratterizzato da una quota parte della massa complessiva, è collegato ai punti limitrofi mediante molle non lineari (per rappresentare lo scambio di forze). Questa teoria si basa su equazioni integrali, diverse da quelle differenziali che rappresentano le fondamenta del metodo degli elementi finiti. In questo modo la discontinuità degli spostamenti non rappresenta più un problema, visto che nelle equazioni non compare il concetto di deformazione come derivata dello spostamento. Il principale punto di forza della Peridinamica è che non è necessario conoscere a priori la direzione di propagazione delle

cricche (come per il metodo Phase-Field), ed è possibile simulare fenomeni complessi come la ramificazione senza l'aggiunta di criteri addizionali. Questo metodo funziona anche da solo per la trattazione del fenomeno della frattura, però si sta cercando di interfacciarlo con il FEM per ridurre i tempi di calcolo e il costo computazionale delle analisi. Altri esempi di metodi alternativi al FEM utilizzati in questo ambito sono il *Boundary Element Method* (BEM) e il *Finite Point Method* (FPM).

Invece nella seconda categoria ci sono quei metodi che, pur basandosi sul FEM, applicano opportune modifiche per poter trattare la discontinuità degli spostamenti. Tra questi ci sono per esempio il *virtual crack closure technique* (VCCT), che simula l'apertura della cricca con un avanzamento della propagazione proporzionale alla dimensione degli elementi [11], e il *cohesive zone model* (CZM), che simula la zona di cricca mediante l'utilizzo di elementi di interfaccia (strato coesivo) [12,13]. Queste due metodologie hanno il pregio di essere relativamente facili da implementare e con un basso costo computazionale, però hanno limitata applicabilità dal punto di vista geometrico, con la necessità di conoscere a priori la direzione di evoluzione della cricca; per questo sono metodi che possono andare bene per problemi come la delaminazione nei materiali compositi, ma non sono in grado di simulare fenomeni come l'innescamento di cricca, il *branching* (ramificazione) e il *kinking* (piega). Mentre questi ultimi due metodi mantengono sostanzialmente inalterato il metodo FEM e l'unica modifica risiede nella rappresentazione della zona di cricca, si sono sviluppati negli ultimi anni dei metodi innovativi che "aggiungono" alla teoria del FEM classico delle caratteristiche specifiche per trattare il problema della frattura; tra questi i più importanti sono l'*Extended Finite Element Method* (X-FEM) [14-16] e il *Phase-Field Method* (PFM). In realtà quest'ultimo è concettualmente indipendente dal FEM, però viene accoppiato ad esso per facilitarne l'implementazione, quindi può essere comunque visto come una forma di estensione del FEM classico.

Mentre il metodo X-FEM tratta il problema della propagazione dal punto di vista meccanico e permette di comprendere nelle equazioni la discontinuità dello spostamento [14], il metodo Phase-Field si basa sul punto di vista energetico e tratta la discontinuità in modo "indiretto", ossia ne tiene conto mediante l'aggiunta di una variabile continua e scalare, che prende appunto il nome di Phase-Field.

La trattazione del problema in questo modo, oltre ad essere di più facile implementazione rispetto all'X-FEM, permette di rappresentare anche fenomeni non simulabili con quest'ultimo metodo, come per esempio il *branching* per i sistemi 3D [25]. Questo ne fa, al momento, uno dei metodi più studiati nell'ambito della *Fracture Mechanics*, perché permette di simulare anche problemi di *crack*

*propagation* molto complessi (senza criteri aggiuntivi), pur mantenendo i vantaggi tipici della rappresentazione mediante elementi finiti.

In questo elaborato si vuole trattare nel dettaglio il fenomeno della frattura fragile, ossia in un regime elastico in cui non sono previste deformazioni plastiche prima della rottura (comportamento tipico, invece, dei materiali duttili). I fondamenti teorici della teoria classica della frattura fragile sono descritti nei lavori di Griffith [3] e Irwin [4], in cui il concetto di base è che la cricca si propaga se il tasso di rilascio di energia raggiunge un valore critico. La teoria di Griffith fornisce un criterio per la propagazione della cricca ma non è sufficiente per prevedere il percorso di cricca (*crack path*), andamenti curvilinei (*kinking*) e fenomeni come la biforcazione [31]. Queste lacune della teoria classica di Griffith per la frattura fragile possono essere colmate usando metodi variazionali basati sulla minimizzazione dell'energia. Il principio di minimizzazione dell'energia si basa sull'osservazione che i fenomeni naturali tendono spontaneamente allo stato finale che comporta il minor dispendio di energia; così per esempio un corpo in moto assume la traiettoria, tra tutte quelle possibili, che richiede meno energia (questo prende il nome di principio di minima azione, su cui si basa la meccanica lagrangiana). Tra i metodi variazionali applicati alla frattura, è rilevante il modello dell'evoluzione quasi-statica della cricca proposto da Francfort e Marigo [32]. Questo metodo non richiede né la presenza di una cricca preesistente né la definizione della traiettoria della cricca, però ha il grande problema che è di difficile implementazione [31]. Per questo motivo Bourdin et al. [33] hanno proposto una versione regolarizzata del modello di Francfort e Marigo, in modo da facilitarne l'implementazione e quindi permettendo di sfruttare anche nella pratica i suoi punti di forza. Questa regolarizzazione avviene mediante l'introduzione della variabile Phase-Field  $\phi(x,t)$ , che permette di rappresentare l'evoluzione della cricca nello spazio ( $x$ ) e nel tempo ( $t$ ).

La limitazione principale del modello di Bourdin et al. è l'incapacità di distinguere tra carico di compressione e di trazione; infatti la propagazione della cricca è guidata dall'energia di deformazione elastica  $\Psi(\epsilon)$ , che non tiene conto del segno delle tensioni (perché tratta il problema dal punto di vista energetico). Questo comporta che la propagazione della cricca può avvenire anche se il carico esterno è di compressione, il che non rispetta il comportamento fisico della frattura per la maggior parte dei materiali (avviene solo con carico di trazione). Per ovviare a questo problema, tra i diversi contributi si segnala lo studio di Miehe et al. [25], in cui avviene la decomposizione (*split*) dell'energia di deformazione elastica. Consiste nel separare i contributi di compressione e trazione, in cui solo questi ultimi sono legati nelle equazioni alla variabile Phase-Field e quindi al fenomeno

della frattura (invece la compressione non entra in gioco). Tuttavia in questo modo le equazioni si complicano e l'implementazione diventa più impegnativa, pertanto si è scelto di mantenere l'approccio di Bourdin et al., con la consapevolezza che bisogna prestare attenzione alle modalità di applicazione del carico. Inoltre, per i casi trattati in questo elaborato (in cui si è considerato il modo I di frattura), questo aspetto non costituisce un problema, e ciò giustifica la scelta presa. Tuttavia in futuro è sicuramente una modifica che può essere fatta per ottimizzare il codice ed estenderlo a sistemi ancora più complessi.

Per quanto riguarda i sistemi 3D ci sono ancora molti studi in atto; di per sé il metodo non presenta limitazioni teoriche in questo senso, ma il problema principale è legato nella pratica, come sottolineato da Miehe in [25], al tempo di calcolo richiesto per le simulazioni. Il numero di elementi e le dimensioni delle equazioni crescono notevolmente per i modelli tridimensionali, e questo comporta un eccessivo costo computazionale. Per questo motivo l'applicazione del metodo ai sistemi 3D è ancora in fase di ricerca; in particolare si stanno studiando delle strategie di ottimizzazione basate sul *mesh refinement*, in modo da infittire la discretizzazione solo in prossimità della cricca, all'avanzare della sua evoluzione all'interno della struttura.

In questo lavoro, invece, ci si concentrerà sui modelli 2D. In particolare si tratterà il fenomeno della frattura in regime quasi-statico, ossia si considera che il sistema evolva per stati successivi in cui ognuno è caratterizzato dall'equilibrio delle forze (problema statico); dal punto di vista pratico può essere rappresentato da un carico applicato molto lentamente. Nello specifico si farà riferimento al metodo descritto da Msek et al. [24], basato su Bourdin et al. [33] e Miehe et al. [25], a cui verrà sottoposta una modifica per gestire in modo differente l'irreversibilità della frattura, seguendo la metodologia introdotta in [27]. Nella prossima sezione si vogliono descrivere gli aspetti teorici e i concetti fondamentali del metodo Phase-Field, mentre successivamente si analizzeranno più nel dettaglio le strategie implementative basate sugli elementi finiti e adottate nella pratica per la costruzione del codice in MATLAB.

## 2.2 Fondamenti teorici

Il concetto di base del metodo è la trattazione della discontinuità del materiale (dovuta alla frattura), mediante una variabile scalare continua che rappresenta il "danno", ossia lo stato del materiale in seguito alla propagazione della cricca. Questa grandezza, che prende il nome di Phase-Field, può

assumere valori compresi tra 0 (stato intatto) e 1 (stato completamente danneggiato) e, come si deduce dal nome stesso, rappresenta lo stato di transizione (fase) del fenomeno della frattura nel materiale. Dunque si associa ad ogni punto del sistema (nodo nella terminologia del FEM) una variabile continua  $\phi$  per rappresentare lo stato di danneggiamento, e all'aumentare del carico esterno il valore di Phase-Field in ogni nodo fornisce l'evoluzione della cricca nel sistema.

Per capire il funzionamento del metodo, si considera inizialmente il sistema monodimensionale in figura 2.2 A, costituito da una trave infinita di sezione trasversale  $\Gamma$  e che occupa il dominio  $\Omega = \Gamma \times L$ , in cui  $L = (-\infty, +\infty)$  e  $x \in L$  è la posizione lungo l'asse della trave. Al centro della trave ( $x = 0$ ) è presente una cricca (stato danneggiato), che viene descritta introducendo la variabile  $\phi \in [0,1]$ :

$$\varphi(x) := \begin{cases} 1 & \text{per } x = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (2.2)$$

In questo modo la cricca viene rappresentata come una discontinuità (figura 2.2 B); dal punto di vista topologico è una *sharp crack*, ossia ha uno spessore infinitesimo (fessura sottile). Tuttavia, per le difficoltà computazionali che questa rappresentazione comporta, viene "spalmato" il Phase-Field in modo continuo su tutta la trave. Questa operazione porta alla *diffusive crack* (in contrapposizione alla discontinuità del caso precedente), che viene modellata (o regolarizzata) mediante l'utilizzo della lunghezza di scala  $l_0$  (figura 2.2 C). Questo parametro non ha un vero e proprio significato fisico, ma è un valore numerico necessario per fornire continuità al Phase-Field e rappresenta la zona di influenza della cricca. Infatti più piccolo è  $l_0$ , più ristretta è la zona con  $\phi$  maggiore di zero, e per la condizione  $l_0 \rightarrow 0$  la *diffusive crack* tende alla *sharp crack*. Questo andamento lo si modella con la funzione:

$$\varphi(x) = e^{-\frac{|x|}{l_0}} \quad (2.3)$$

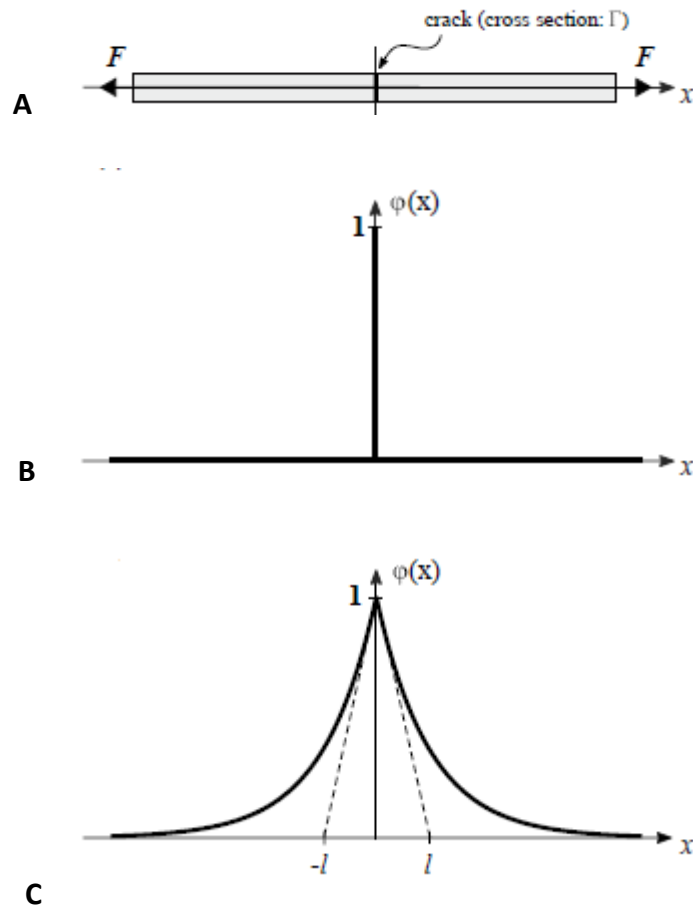
La cricca diffusa o regolarizzata presenta le seguenti proprietà:

$$\varphi(0) = 1 \quad (2.4)$$

$$\varphi(x) \rightarrow 0 \text{ per } x \rightarrow \pm\infty$$

come si può osservare dalla funzione esponenziale scelta per modellare la cricca.





**Figura 2.2** Trave 1D con cricca trasversale di cross section  $\Gamma$  (A). Sharp crack in  $x = 0$  (B). Diffusive crack modellata mediante lunghezza di scala  $l$  o  $l_0$  (C) [30].

Si può notare che la funzione (2.3) è la soluzione dell'equazione differenziale omogenea:

$$\varphi(x) - l_0^2 \varphi(x)'' = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (2.5)$$

sottoposta alle condizioni di Dirichlet (2.4). Questa è l'equazione di Eulero del principio variazionale:

$$\varphi = \arg \left\{ \inf_{\varphi \in W} I(\varphi) \right\} \quad (2.6)$$

in cui il dominio  $W$  vale:

$$W = \{ \varphi | \varphi(0) = 1, \varphi(\pm\infty) = 0 \} \quad (2.7)$$

L'espressione (2.6) afferma che il Phase-Field, nella logica di un problema variazionale, risulta da una ricerca dell'estremo inferiore del funzionale:

$$I(\varphi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{\varphi^2 + l_0^2 \varphi'^2\} dV \quad (2.8)$$

Questa funzione si ottiene integrando la forma debole dell'equazione differenziale (2.5) col metodo di Galerkin, e valutandola nella soluzione (2.3), con  $dV = \Gamma dx$ , si ottiene:

$$I\left(\varphi(x) = e^{-\frac{|x|}{l_0}}\right) = l_0 \Gamma \quad (2.9)$$

Questa equazione lega il funzionale  $I$  con la superficie di cricca  $\Gamma$ , dunque si può introdurre la funzione regolarizzata:

$$\Gamma_{l_0}(\varphi) = \frac{1}{l_0} I(\varphi) = \frac{1}{2l_0} \int_{\Omega} \{\varphi^2 + l_0^2 \varphi'^2\} dV \quad (2.10)$$

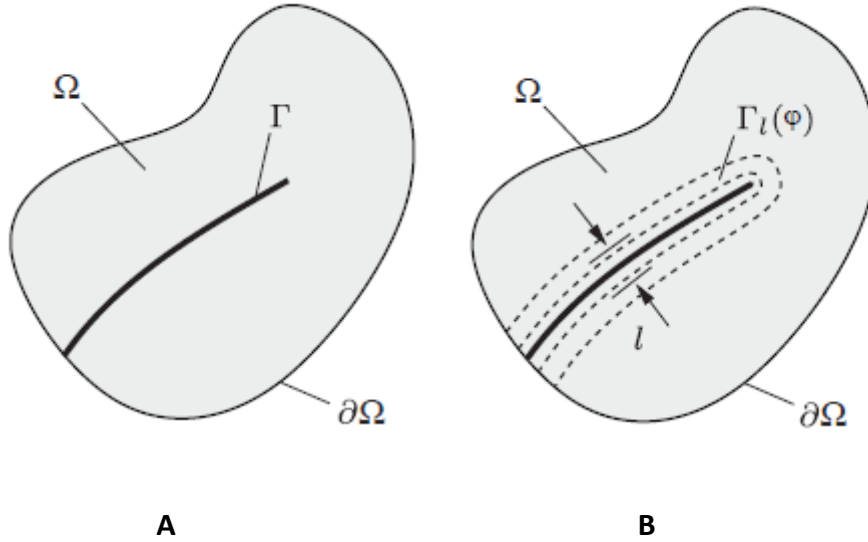
che può essere considerata come la superficie della cricca diffusa. Nel caso 1D la valutazione di  $\Gamma_{l_0}(\varphi)$  determina la superficie della cricca  $\Gamma$  per un qualsiasi valore arbitrario di  $l_0$ , come si può notare dalla (2.9). Invece, in sistemi a più dimensioni, variando  $l_0$  varia anche la superficie modellata della cricca, pertanto la scelta di questo parametro, come verrà discusso in seguito, è un aspetto di cruciale importanza per l'implementazione del metodo.

Le equazioni (2.6) e (2.10) descrivono la relazione tra Phase-Field e principio di minimizzazione dell'energia: i valori di  $\phi$  descritti dalla (2.3) derivano direttamente dalla ricerca della superficie di cricca minima, cioè quella che corrisponde alla minima energia di frattura; pertanto, dalla soluzione del problema variazionale, è garantito che i valori di Phase-Field risultanti dalle equazioni sono proprio quelli esatti, ossia quelli che corrispondono all'effettivo comportamento fisico dei fenomeni naturali. In altre parole, l'evoluzione della cricca descritta dal metodo segue, come si verifica nella realtà, il percorso energeticamente più favorevole per la propagazione.

A questo punto si estendono i concetti descritti al caso multidimensionale, in cui si considera un corpo il cui dominio nello spazio è  $\Omega \subset \mathcal{R}^\delta$  con  $\delta \in [2,3]$  e la sua superficie (frontiera) è  $\partial\Omega \subset \mathcal{R}^{\delta-1}$ , come rappresentato in figura 2.3. Se si considerano cricche che evolvono nel solido nell'intervallo di tempo  $\mathcal{T} \subset \mathcal{R}$ , si può definire la variabile Phase-Field della cricca in funzione del tempo:

$$\varphi: \begin{cases} \Omega \times \mathcal{T} \rightarrow [0,1] \\ (x, t) \rightarrow \varphi(x, t) \end{cases} \quad (2.11)$$

definita nel solido  $\Omega$ . L'aggiunta della variabile temporale permette di estendere il problema al caso dinamico, anche se in questo elaborato si considera il regime quasi-statico, con il sistema che evolve per stati consecutivi (step) in cui si assume che non ci sia dipendenza dal tempo.



**Figura 2.3** Sharp crack surface  $\Gamma$  nel solido  $\Omega$  (A). Diffusive crack surface  $\Gamma_{l_0}(\phi)$ , funzionale del Phase-Field  $\phi$  e modellato con il parametro  $l_0$  (B) [30].

L'estensione multidimensionale della superficie regolarizzata della cricca (2.10) è la seguente:

$$\Gamma_{l_0}(\phi) = \int_{\Omega} \gamma(\phi, \nabla\phi) dV \quad (2.12)$$

dove  $\gamma(\phi, \nabla\phi)$  è la densità superficiale di cricca per unità di volume (in unità  $m^2/m^3$  nel SI) e vale:

$$\gamma(\phi, \nabla\phi) = \frac{1}{2l_0} \phi^2 + \frac{l_0}{2} |\nabla\phi|^2 \quad (2.13)$$

Questa funzione dipende dal campo di fase della cricca  $\phi$  e dal suo gradiente spaziale  $\nabla\phi$ ; assumendo una data topologia superficiale della cricca  $\Gamma(t) \subset \mathcal{R}^{\delta-1}$  nel solido  $\Omega$  al tempo  $t$  (figura 2.3 A) si ottiene, analogamente all'equazione (2.6), il campo di fase regolarizzato della cricca  $\phi(\mathbf{x}, t)$  nel dominio  $\Omega$  (figura 2.3 B), secondo il principio di minimizzazione:

$$\phi = arg \left\{ \inf_{\phi \in W_{\Gamma(t)}} \Gamma_{l_0}(\phi) \right\} \quad (2.14)$$

soggetto ai vincoli di Dirichlet:

$$W_{\Gamma(t)} = \{\varphi | \varphi(\mathbf{x}, t) = 1 \text{ per } \mathbf{x} \in \Gamma(t)\} \quad (2.15)$$

Le equazioni euleriane del principio variazionale (corrispondono a una condizione di stazionarietà per il funzionale) per il caso multidimensionale sono:

$$\varphi^2 - l_0^2 \Delta \varphi = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (2.16)$$

$$\nabla \varphi \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{su } \partial \Omega \quad (2.17)$$

dove  $\Delta \varphi$  è il laplaciano del Phase-Field e  $\mathbf{n}$  è il versore normale uscente dalla superficie  $\partial \Omega$ .

Dopo aver definito la funzione regolarizzata della superficie della cricca, è possibile procedere alla valutazione del problema dal punto di vista energetico. Il fenomeno della frattura, inteso come processo naturale, è totalmente dissipativo, ed è guidato dall'energia di deformazione elastica; pertanto è necessario accoppiare questi due aspetti del problema.

Si ipotizzano piccoli spostamenti e piccole deformazioni. Le componenti spaziali di vettori o tensori sono denotate dagli indici  $i, j = 1 \dots \delta$ . Lo spostamento di un punto  $\mathbf{x} \in \Omega$  nell'istante  $t \in [0, T]$  è  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{R}^\delta$ , e il campo degli spostamenti soddisfa le condizioni al contorno di Dirichlet  $u_i(\mathbf{x}, t) = g_i(\mathbf{x}, t)$ . Il tensore delle deformazioni  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{R}^{\delta \times \delta}$  è definito da:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.18)$$

Considerando un materiale lineare isotropo, la densità di energia elastica per unità di volume si può trovare come:

$$\psi_0(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C}_0 \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.19)$$

con  $\mathbf{C}_0$  la matrice lineare elastica del sistema. Questa mette in relazione le deformazioni con le tensioni secondo l'equazione tensoriale:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_0 \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.20)$$

Nei sistemi 2D, per i casi specifici in cui lo stato del sistema è riconducibile a una condizione di deformazione piana (*plane strain*) o tensione piana (*plane stress*), è possibile ridurre la matrice elastica rispettivamente nelle forme:

$$\mathbf{C}_0 = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

$$\mathbf{C}_0 = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

in cui  $E$  e  $\nu$  sono rispettivamente il modulo di Young e il coefficiente di Poisson del materiale. Talvolta è possibile trovare queste espressioni in funzione dei parametri del materiale  $\lambda$  e  $\mu$  (costanti di Lamè), ma tramite le opportune trasformazioni ci si può comunque ricondurre alle equazioni in termini di  $E$  e  $\nu$  (ci sono anche dei software specifici che compiono queste operazioni in pochi secondi).

A questo punto è possibile procedere con la formulazione del problema dal punto di vista energetico. Si ipotizza che l'energia potenziale totale (che si cerca di minimizzare applicando il principio variazionale) includa, oltre al termine di energia elastica, un termine superficiale associato all'energia richiesta per la formazione della cricca, che è legato al tasso di rilascio di energia (*energy release rate*) critico  $G_c$ . Dunque l'energia potenziale totale risulta:

$$\Psi_{pot}(\mathbf{u}, \varphi) = \Psi^e(\mathbf{u}, \varphi) + \Psi^s(\varphi) = \int_{\Omega} \psi(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \varphi) dV + \int_{\Gamma} G_c d\Gamma \quad (2.23)$$

In questa equazione  $\Psi^e$  rappresenta l'energia elastica immagazzinata nel sistema (*stored bulk energy*) e dipende sia dal campo di spostamenti sia dal campo di fase, mentre  $\Psi^s$  è l'energia dissipata per la formazione della superficie di frattura (*surface fracture energy*) e dipende solamente dal Phase-Field; infatti nella realtà la cricca corrisponde a una discontinuità del materiale, quindi non è associato a essa un campo di spostamenti. Poiché si ipotizza che la frattura sia fragile, il contributo dell'energia di frattura è pari alla densità dell'energia critica di frattura ( $G_c$ ) integrata sulla superficie della cricca  $\Gamma$ .

Anche se nel regime quasi-statico può essere trascurata l'energia cinetica del corpo  $\Omega$ , per un approccio generale la si può considerare ugualmente; essa è data da:

$$\Psi_{kin}(\dot{\mathbf{u}}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{u}} \dot{\mathbf{u}} dV \quad (2.24)$$

dove  $\dot{\mathbf{u}} = \partial \mathbf{u} / \partial t$  è il campo di velocità e  $\rho$  è la densità di massa del materiale. Si può quindi scrivere la Lagrangiana per il problema della frattura:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \varphi) &= \Psi_{kin}(\dot{\mathbf{u}}) - \Psi_{pot}(\mathbf{u}, \varphi) \\ &= \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{2} \rho \dot{\mathbf{u}} \dot{\mathbf{u}} - \psi(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \varphi) \right] dV - \int_{\Gamma} G_c d\Gamma \end{aligned} \quad (2.25)$$

A partire dalla (2.25) si possono poi scrivere le equazioni di Eulero-Lagrange, che determinano il moto del corpo secondo il principio variazionale di minima azione (definita come l'integrale nel tempo della Lagrangiana). Andando ad analizzare nel dettaglio i termini che costituiscono la (2.25), si definisce:

$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \varphi) = g(\varphi) \psi_0(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad (2.26)$$

come l'energia immagazzinata nel corpo per unità di volume; questo valore è dato dalla densità di energia elastica  $\psi_0$  moltiplicata per un termine  $g(\varphi)$  che è funzione del Phase-Field. Questa funzione ha il valore di termine penalizzante, che rappresenta la degradazione dell'energia immagazzinata dovuta all'evoluzione della frattura. Prende appunto il nome di funzione di degradazione delle tensioni (*stress degradation function*) ed ha le seguenti proprietà:

$$g(0) = 1 \quad g(1) = 0 \quad g'(1) = 0 \quad (2.27)$$

Le prime due condizioni includono i due casi limite per stato intatto e stato completamente danneggiato. Invece l'ultima condizione assicura che, se il materiale converge allo stato di completo danneggiamento  $\varphi = 1$ , il rilascio dell'energia elastica converge ad un valore finito. Una funzione che rispetta queste condizioni è:

$$g(\varphi) = (1 - \varphi)^2 + k \quad (2.28)$$

con  $k \approx 0$  che è un parametro "artificiale" aggiunto per evitare il mal-condizionamento delle equazioni. Non avendo un valore fisico, si imposta questo valore come il più piccolo possibile (e positivo) che garantisca che il sistema di equazioni sia ben-condizionato.

A partire dalle equazioni (2.26) e (2.28) si ottiene l'espressione dell'energia elastica immagazzinata:

$$\Psi^e(\mathbf{u}, \varphi) = \int_{\Omega} [(1 - \varphi)^2 + k] \psi_0(\boldsymbol{\varepsilon}) dV \quad (2.29)$$

Invece per quanto riguarda l'energia di frattura presente nell'equazione (2.23), facendo riferimento alla superficie di cricca regolarizzata (2.12), si ottiene:

$$\Psi^s(\varphi) = \int_{\Gamma} G_c d\Gamma = G_c \Gamma_{l_0}(\varphi) = \int_{\Omega} G_c \gamma(\varphi, \nabla \varphi) dV \quad (2.30)$$

In questo modo si compie il collegamento tra il principio variazionale, che porta alla definizione del Phase-Field (2.14), e l'energia di frattura e quindi l'energia potenziale totale. Dunque si garantisce che i valori del campo di fase risultanti dalle equazioni sono proprio quelli che portano alla minimizzazione dell'energia potenziale, rispettando il principio fisico naturale che è alla base del calcolo variazionale impostato.

Un altro aspetto interessante dell'equazione (2.30) è che permette di visualizzare chiaramente la grande utilità della regolarizzazione della cricca: si passa da un integrale sulla superficie di cricca, che è molto difficile da implementare visto che  $\Gamma$  cambia continuamente con l'evoluzione della frattura, a un integrale di volume sull'intero dominio  $\Omega$  (che è fisso e non cambia nel tempo e nello spazio). Questa operazione è possibile proprio per l'introduzione della variabile Phase-Field, che è definita in ogni punto del solido e non solo nella zona di cricca. Inoltre si può osservare che la posizione della cricca non appare nelle equazioni, dimostrando come non sia necessaria una stima preliminare del percorso della cricca. Questo conferisce al metodo Phase-Field una grande flessibilità, che è proprio uno dei suoi punti di forza.

Dunque la funzione dell'energia potenziale totale può essere riscritta, andando a sostituire la (2.13), come:

$$\begin{aligned} \Psi_{pot}(\mathbf{u}, \varphi) &= \int_{\Omega} [(1 - \varphi)^2 + k] \psi_0(\boldsymbol{\varepsilon}) dV \\ &+ \int_{\Omega} \frac{G_c}{2} \left[ l_0 \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi + \frac{1}{l_0} \varphi^2 \right] dV \end{aligned} \quad (2.31)$$

Con la funzione costituiva dell'energia potenziale totale, è possibile ricavare le equazioni che governano il problema della frattura. Dalla risoluzione delle *governing equations* si determinano i valori di Phase-Field  $\phi$  e di spostamento  $\mathbf{u}$ , che sono le incognite del sistema. Come primo passo si definisce, in notazione indiciale, la prima variazione del lavoro esterno:

$$\delta W_{ext} = \int_{\Omega} b_j \delta u_j dV + \int_{\partial\Omega} h_j \delta u_j dA \quad (2.32)$$

in cui  $b_j$  e  $h_j$  sono rispettivamente le componenti della forza nei punti interni al corpo per unità di volume e della forza al contorno di trazione per unità di superficie. Poiché si considera che la variabile di frattura  $\phi$  sia guidata dallo spostamento  $u$  del corpo, non sono presenti carichi esterni associati con il campo di fase; per questo nell'equazione (2.32) non ci sono termini riguardanti la variazione  $\delta\phi$ . Inoltre, per quanto riguarda questo elaborato, i carichi che verranno applicati nelle simulazioni numeriche sono in termini di spostamento e non di forza (quindi  $b_j=0$  e  $h_j = 0$ ), pertanto l'intera espressione del lavoro esterno risulterà nulla; tuttavia, per una trattazione più generale, si è voluto considerare ugualmente questo termine nelle equazioni.

Invece la variazione del lavoro interno, che coincide con l'energia potenziale totale, vale:

$$\delta W_{int} = \delta \Psi_{pot} = \frac{\partial \Psi_{pot}}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta \varepsilon_{ij} + \frac{\partial \Psi_{pot}}{\partial \phi} \delta \phi \quad (2.33)$$

Sostituendo la (2.31) dentro la (2.33) si ottiene:

$$\begin{aligned} \delta \Psi_{pot} = & \int_{\Omega} [(1 - \phi)^2 + k] \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV \\ & + \int_{\Omega} -2(1 - \phi) \psi_0(\varepsilon) \delta \phi dV \\ & + \int_{\Omega} G_c \left[ l_0 \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial \delta \phi}{\partial x_i} + \frac{1}{l_0} \phi \delta \phi \right] dV \end{aligned} \quad (2.34)$$

Facendo gli appropriati trasferimenti di variabili, si può dimostrare [24] che la (2.34) è equivalente a:

$$\begin{aligned} \delta \Psi_{pot} = & \int_{\partial \Omega} [(1 - \phi)^2 + k] n_i \sigma_{ij} \delta u_j dA \\ & + \int_{\Omega} [(1 - \phi)^2 + k] \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} \delta u_j dV \\ & + \int_{\Omega} -2(1 - \phi) \psi_0(\varepsilon) \delta \phi dV \\ & + \int_{\partial \Omega} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} n_i \delta \phi dA \\ & + \int_{\Omega} G_c \left[ -l_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_i} + \frac{1}{l_0} \phi \delta \phi \right] dV \end{aligned} \quad (2.35)$$



dove  $n_i$  sono le componenti del versore normale uscente dalla frontiera  $\partial\Omega$ .

Per trovare la forma forte (*strong form*) e la forma debole (*weak form*) delle equazioni che governano il modello, si impone l'equilibrio dei lavori virtuali per il processo quasi-statico:

$$\delta W_{ext} - \delta W_{int} = 0 \quad (2.36)$$

che è un'equazione valida per ogni valore di  $\delta \mathbf{u}$  e  $\delta \phi$ . Per quanto riguarda la forma forte delle *governing equations*, combinando le equazioni (2.32), (2.35) e (2.36) si ottiene:

$$[(1 - \varphi)^2 + k] \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + b_j = 0 \quad su \Omega \quad (2.37)$$

$$[(1 - \varphi)^2 + k] n_i \sigma_{ij} = h_j \quad su \partial\Omega \quad (2.38)$$

$$u_j = \bar{u}_j \quad su \partial\Omega \quad (2.39)$$

$$-G_c l_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_i} + \left[ \frac{G_c}{l_0} + 2\psi_0(\boldsymbol{\varepsilon}) \right] \varphi = 2\psi_0(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad su \Omega \quad (2.40)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} n_i = 0 \quad su \partial\Omega \quad (2.41)$$

Queste equazioni mostrano un sistema accoppiato composto dall'equilibrio modificato delle tensioni (2.37) e dalle condizioni al contorno associate ad esso (2.38) e (2.39), e dall'evoluzione del campo di fase (2.40) e dalla relativa condizione al contorno (2.41).

Tuttavia per quanto riguarda l'implementazione, visto che gli elementi finiti si basano sulla forma debole del problema (ossia su equazioni integrali), è più conveniente lavorare direttamente con le equazioni (2.32) e (2.35).

## 2.3 Formulazione basata sul FEM

Dopo aver ricavato le equazioni teoriche che governano il fenomeno della frattura, si può procedere con l'implementazione vera e propria basata sulla formulazione agli elementi finiti; in appendice A è presente un'introduzione dedicata a questo metodo, in modo da richiamarne i concetti fondamentali che vengono utilizzati in questa sezione. La formulazione mediante il metodo FEM porta direttamente alle equazioni che saranno implementate in MATLAB per simulare la

propagazione delle cricche. Si è scelto questo software perché è agevole sia la programmazione vera e propria, sia la rappresentazione dei risultati dal punto di vista grafico.

Si discretizza il sistema in esame in un certo numero di elementi e nodi, che corrispondono ai punti del corpo in cui vengono calcolate le soluzioni. Nel FEM classico in 3D ogni nodo ha come gradi di libertà (incognite) le tre traslazioni  $u_x$ ,  $u_y$  e  $u_z$ , mentre nei sistemi 2D (oggetto di questo elaborato) si considerano solo due componenti di spostamento. Poi, per la modellazione del metodo Phase-Field, si aggiunge ad ogni nodo la variabile  $\phi$  per rappresentare il fenomeno della frattura. Dunque, dall'accoppiamento di elementi finiti e Phase-Field, risulta un metodo FEM "modificato" che, se da una parte aumenta il costo computazionale per l'aumento del numero di incognite, dall'altra unisce la comodità implementativa del FEM con la flessibilità nel prevedere la propagazione della frattura del metodo Phase-Field.

Nella formulazione agli elementi finiti, per ogni elemento si discretizzano le variabili del problema come:

$$\mathbf{u} = \sum_i^m \mathbf{N}^e \mathbf{u}_i \quad (2.42)$$

$$\varphi = \sum_i^m N_i \varphi_i \quad (2.43)$$

con  $\mathbf{N}^e$  che vale:

$$\mathbf{N}^e = \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

In queste espressioni:

- $N_i$  denota le funzioni di forma associate al nodo  $i$ -esimo;
- $\mathbf{u}_i$  sono gli spostamenti del nodo  $i$ -esimo nelle direzioni  $x$  e  $y$  (per il caso 2D);
- $\varphi_i$  sono i valori del Phase-Field del nodo  $i$ -esimo;
- $m$  corrisponde al numero di nodi dell'elemento.

In questo lavoro si è scelto di utilizzare elementi quadrangolari, pertanto  $m = 4$ . Derivando la (2.42) e la (2.43) si ottengono rispettivamente il vettore delle deformazioni e il gradiente del Phase-Field:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_i^m \mathbf{B}_i^u \mathbf{u}_i \quad (2.45)$$

$$\nabla\varphi = \sum_i^m \mathbf{B}_i^\varphi \varphi_i \quad (2.46)$$

dove  $\mathbf{B}_i^u$  è la matrice di deformazione e  $\mathbf{B}_i^\varphi$  è la matrice delle derivate cartesiane (assi x e y). Sono espresse come:

$$\mathbf{B}_i^u = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

$$\mathbf{B}_i^\varphi = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

In modo analogo si possono definire gli incrementi virtuali delle singole variabili (indicate con il simbolo  $\delta$ ):

$$\delta \mathbf{u} = \sum_i^m \mathbf{N}^e \delta \mathbf{u}_i \quad (2.49)$$

$$\delta \varphi = \sum_i^m N_i \delta \varphi_i \quad (2.50)$$

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \sum_i^m \mathbf{B}_i^u \delta \mathbf{u}_i \quad (2.51)$$

$$\nabla \delta \varphi = \sum_i^m \mathbf{B}_i^\varphi \delta \varphi_i \quad (2.52)$$

Usando queste equazioni e considerando l'arbitrarietà delle variazioni virtuali delle incognite (che quindi si possono semplificare), si ottiene, a partire dalla (2.32), il vettore delle forze esterne:

$$\mathbf{f}_{ext}^u = \int_{\Omega} \mathbf{N}_i^T \mathbf{b} dV + \int_{\partial\Omega} \mathbf{N}_i^T \mathbf{h} dA \quad (2.53)$$

dove T indica la matrice trasposta e l'apice u indica il legame con l'incognita spostamento.

Allo stesso modo dalla (2.34) si ottiene il vettore delle forze interne:

$$\mathbf{f}_{int}^u = \int_{\Omega} [(1 - \varphi)^2 + k] \mathbf{B}_i^{uT} \boldsymbol{\sigma} dV \quad (2.54)$$

A questo punto, partendo dal bilancio energetico (2.36), si può trovare l'equazione discreta relativa all'equilibrio delle tensioni per ogni elemento (apice e), che viene espressa in termini del vettore residuo (idealmente dovrebbe valere zero):

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_e^u &= \mathbf{f}_{int}^u - \mathbf{f}_{ext}^u \\ &= \int_{\Omega} [(1 - \varphi)^2 + k] \mathbf{B}_i^{uT} \boldsymbol{\sigma} dV - \int_{\Omega} \mathbf{N}_i^T \mathbf{b} dV - \int_{\partial\Omega} \mathbf{N}_i^T \mathbf{h} dA \end{aligned} \quad (2.55)$$

La (2.55) è anche detta 'equazione degli spostamenti', in contrapposizione all'equazione del residuo corrispondente all'evoluzione del Phase-Field. Questa seconda equazione, che porta al sistema matriciale definitivo, è sempre ottenuta dalla (2.34) e assume la forma:

$$\mathbf{r}_e^{\varphi} = \int_{\Omega} \left\{ G_c l_0 \mathbf{B}_i^{\varphi T} \nabla \varphi + \left[ \frac{G_c}{l_0} + 2\psi_0(\boldsymbol{\varepsilon}) \right] N_i \varphi \right\} dV - \int_{\Omega} 2N_i \psi_0(\boldsymbol{\varepsilon}) dV \quad (2.56)$$

Le equazioni (2.55) e (2.56) permettono di giungere alla conclusione della formulazione teorica del metodo Phase-Field. Per l'implementazione numerica vera e propria gli integrali su ogni elemento vengono ricondotti a sommatorie; si esegue l'integrazione numerica di Gauss (descritta nel dettaglio in appendice A), in cui il valore complessivo dell'integrale è dato dalla somma dei contributi nei punti di Gauss dell'elemento stesso (il cui numero cambia a seconda della formulazione degli elementi), che sono quelli ottimali per l'accuratezza dell'integrazione.

Il sistema dato dalle condizioni di equilibrio  $\mathbf{r}^u = 0$  e  $\mathbf{r}^{\varphi} = 0$  porta alla soluzione del problema in termini di spostamenti  $\mathbf{u}$  e campo di fase  $\phi$ , che, per la formulazione dell'energia di frattura (2.30), sono esattamente i valori che rispettano il principio variazionale introdotto nel capitolo 2.2. Tuttavia i residui sono non lineari rispetto alle variabili  $\mathbf{u}$  e  $\phi$ , pertanto non è possibile risolvere il sistema direttamente. Dunque è necessario procedere mediante una strategia incrementale-iterativa, come viene descritto nella sezione successiva.

## 2.4 Approccio incrementale-iterativo

Dal punto di vista numerico si vuole arrivare alla condizione ideale di equilibrio data da  $\mathbf{r}^u(\mathbf{u}, \phi) = 0$  e  $\mathbf{r}^\phi(\mathbf{u}, \phi) = 0$  entro una certa tolleranza. Vista la non linearità dei residui rispetto a  $\mathbf{u}$  e  $\phi$ , si implementa una strategia di soluzione incrementale-iterativa utilizzando l'approccio di Newton-Raphson. L'idea di base consiste nel combinare l'approccio incrementale, in cui si suddivide il carico esterno applicato (che comporta la propagazione della frattura) in molteplici incrementi (step), con quello iterativo, in cui ad ogni step si cerca di arrivare alla condizione di convergenza scelta entro un certo numero di iterazioni. Per visualizzare con maggiore chiarezza il funzionamento del metodo di Newton-Raphson incrementale, si fa riferimento alla figura 2.4. Ad ogni incremento viene calcolata la matrice tangente (che corrisponde alla rigidità del sistema, data dal rapporto tra forza e spostamento), ed in poche iterazioni il procedimento numerico tende alla soluzione vera di equilibrio, ossia converge entro la tolleranza desiderata. In realtà nelle analisi eseguite in questo elaborato si è impostato il carico in termini di spostamento (*displacement control*) e non di forza, ma il ragionamento è analogo a quello descritto dalla figura.

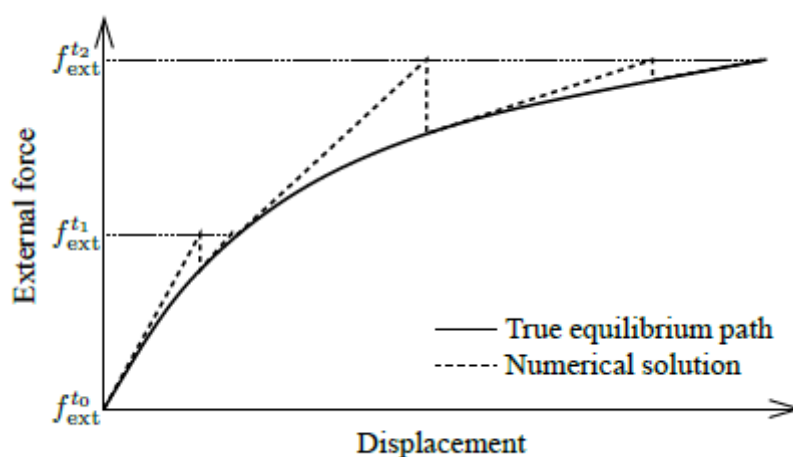
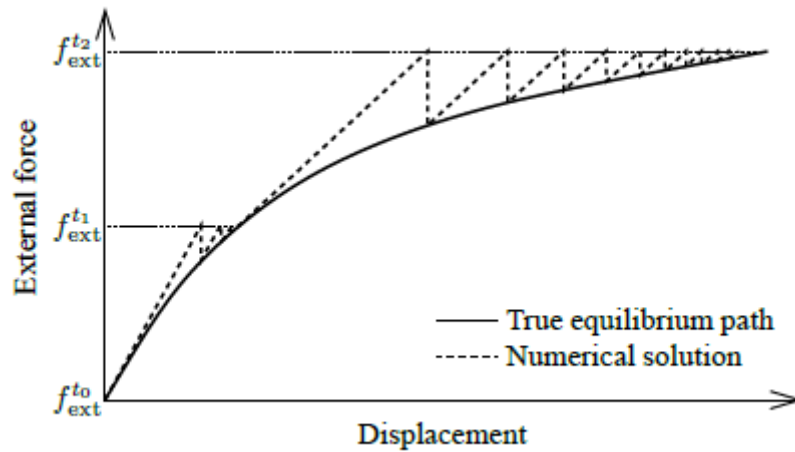


Figura 2.4 Strategia iterativa-incrementale con metodo di Newton-Raphson [34].

Dal punto di vista computazionale il metodo di Newton-Raphson puro è molto dispendioso, perché richiede di calcolare la matrice di rigidità (che ha dimensioni tanto maggiori quanto più è elevato il numero di nodi del sistema) ad ogni iterazione. Per diminuire i tempi di calcolo si è utilizzato il metodo di Newton-Raphson modificato, in cui la matrice di rigidità viene calcolata solo alla prima iterazione, ed è considerata costante per tutte quelle successive (figura 2.5). Chiaramente questo

procedimento converge più lentamente rispetto al metodo di Newton puro, ma si riduce notevolmente il costo computazionale. Inoltre, per le analisi effettuate, si è riscontrato un numero medio di iterazioni per raggiungere la convergenza pari a 2-3, che quindi giustifica la semplificazione introdotta con il metodo modificato.



**Figura 2.5** Strategia iterative-incrementale con metodo di Newton-Raphson modificato [34].

Per comprendere meglio le equazioni che verranno implementate (che sono matriciali) per la risoluzione del problema, si può procedere per analogia con quanto accade nel caso scalare e con solo una variabile in gioco. In questo caso semplificato si considera la funzione  $f(x)$ , di cui si vuole trovare il valore di  $x$  per cui  $f(x) = 0$  (equazione non lineare). Applicando il metodo di Newton-Raphson puro, ad ogni iterazione  $i$ -esima si calcola la soluzione  $x_{i+1}$  secondo la formula:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad (2.57)$$

Invece il metodo di Newton-Raphson modificato si esprime come:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_0)} \quad (2.58)$$

in cui  $x_0$  è il punto iniziale di ogni incremento (iterazione zero), che corrisponde al valore di convergenza dell'incremento precedente.

Riportando queste relazioni al caso in esame (in cui si cerca  $\mathbf{r}^u(\mathbf{u}, \phi) = 0$  e  $\mathbf{r}^\phi(\mathbf{u}, \phi) = 0$ ) e volendo utilizzare il metodo modificato perché meno dispendioso, si ottiene, per ogni incremento di carico e per ogni elemento, l'equazione matriciale:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \phi \end{Bmatrix}_{i+1} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \phi \end{Bmatrix}_i - [\mathbf{K}_0^e]^{-1} \begin{Bmatrix} \mathbf{r}^u \\ \mathbf{r}^\phi \end{Bmatrix}_i \quad (2.59)$$

in cui  $\mathbf{K}^e$  è la matrice tangente (ossia, nell'approccio in esame, la matrice di rigidezza) dell'elemento generico, che viene calcolata nelle condizioni iniziali dell'incremento corrente (pedice 0). Per semplicità si può immaginare una variabile di tempo fittizia (perché il processo è quasi-statico, quindi non viene considerata la dinamica nel tempo), in cui la condizione iniziale del generico step è  $t$ , mentre la condizione finale è indicata dal tempo  $t+\Delta t$  (con  $\Delta t$  intervallo di tempo tra due incrementi di carico successivi); questa condizione finale (convergenza) viene raggiunta in un certo numero di iterazioni a seconda della tolleranza impostata. Anche la stessa condizione di convergenza, che verrà discussa in seguito, è un aspetto importante del problema che può influenzare l'accuratezza dei risultati.

La matrice di rigidezza  $\mathbf{K}^e$  assume la forma:

$$\mathbf{K}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{uu} & \mathbf{K}^{u\phi} \\ \mathbf{K}^{\phi u} & \mathbf{K}^{\phi\phi} \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

in cui le sottomatrici che la compongono, trovate a partire dalla (2.55) e (2.56), sono:

$$\mathbf{K}_{ij}^{uu} = \frac{\partial \mathbf{r}_e^u}{\partial \mathbf{u}} = \int_{\Omega} [(1 - \phi)^2 + k] \mathbf{B}_i^{uT} \mathbf{C}_0 \mathbf{B}_j^u dV \quad (2.61)$$

$$\mathbf{K}_{ij}^{u\phi} = \frac{\partial \mathbf{r}_e^u}{\partial \phi} = \int_{\Omega} -2(1 - \phi) \mathbf{B}_i^{uT} \boldsymbol{\sigma} N_j dV \quad (2.62)$$

$$\mathbf{K}_{ij}^{\phi u} = \frac{\partial \mathbf{r}_e^\phi}{\partial \mathbf{u}} = \int_{\Omega} -2(1 - \phi) N_i \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{B}_j^u dV \quad (2.63)$$

$$\mathbf{K}_{ij}^{\phi\phi} = \frac{\partial \mathbf{r}_e^\phi}{\partial \phi} = \int_{\Omega} \left\{ G_c l_0 \mathbf{B}_i^{\phi T} \mathbf{B}_j^\phi + \left[ \frac{G_c}{l_0} + 2\psi_0(\epsilon) \right] N_i N_j \right\} dV \quad (2.64)$$

Si può notare che la matrice  $\mathbf{K}^e$  è simmetrica, infatti le componenti (2.62) e (2.63) sono una la trasposta dell'altra. Per quanto riguarda le dimensioni, la matrice di rigidezza dell'elemento,

considerando il caso 2D (quindi 3 gradi di libertà per ogni nodo, 2 di spostamento e il Phase-Field) ed elementi con 4 nodi, è una 12x12. Le singole sottomatrici invece hanno dimensioni corrispondenti alle variabili presenti come apici, pertanto la componente  $\mathbf{K}^{uu}$  è una 8x8, la  $\mathbf{K}^{u\phi}$  è una 8x4, la  $\mathbf{K}^{\phi u}$  è una 4x8 e la  $\mathbf{K}^{\phi\phi}$  è una 4x4.

Una volta costruiti i residui e la matrice di rigidezza di ogni elemento, per risolvere il problema è necessario assemblare tutte le componenti in un unico sistema; infatti nel metodo FEM i diversi elementi non sono slegati tra di loro ma interagiscono, e le soluzioni in ogni nodo sono date dalla somma dei contributi di tutti gli elementi a cui quel nodo appartiene. Dunque si procede alla costruzione della matrice di rigidezza globale  $\mathbf{K}^G$  e al vettore dei residui globali  $\mathbf{r}^G$ , che hanno rispettivamente dimensioni  $3N \times 3N$  e  $3N \times 1$ , con  $N$  numero di nodi del sistema. Questo fa capire che, all'aumentare del numero di elementi (e quindi di nodi), aumentano anche le dimensioni del sistema di equazioni, e questo comporta un inevitabile aumento del costo computazionale e dei tempi di calcolo.

Il sistema di equazioni non lineari definitivo risulta:

$$\mathbf{K}^G \boldsymbol{\xi} = \mathbf{r}^G \quad (2.65)$$

in cui  $\boldsymbol{\xi}$  è il vettore delle incognite e vale:

$$\boldsymbol{\xi} = \{u^1, v^1, u^2, v^2, \dots, u^N, v^N, \varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^N\}^T \quad (2.66)$$

con  $N$  numero totale di nodi della mesh e  $u$  e  $v$  le due componenti dello spostamento in ogni nodo (caso 2D). Si nota che l'assemblaggio della matrice di rigidezza globale deve essere fatto in modo da rispettare la forma assegnata al vettore soluzione  $\boldsymbol{\xi}$ .

Al sistema (2.65) si applica la strategia di soluzione incrementale-iterativa basata sul metodo di Newton-Raphson modificato. Ad ogni step si applica un incremento di spostamento ad alcuni nodi del sistema (condizioni al contorno), che è il carico che determina la propagazione della frattura, e si cercano le soluzioni  $\boldsymbol{\xi}$  del sistema non lineare in modo iterativo. Dal punto di vista dell'implementazione in MATLAB, il progressivo incremento di carico viene eseguito con un ciclo *for* (sul numero totale di step), in cui all'interno è presente un altro ciclo *for* (sul numero massimo di iterazioni) per il procedimento iterativo di Newton. In questo secondo ciclo viene assegnato un numero massimo di iterazioni (in modo da contenere i tempi di calcolo), ma è presente anche una condizione per cui il ciclo si interrompe e si riparte con lo step successivo. Questa condizione è detta



convergenza numerica, ed è scelta dall'utente in base alla tolleranza impostata: significa che la soluzione numerica corrente è considerata sufficiente a rappresentare la soluzione vera (data dai residui idealmente nulli). Si è scelta come condizione di convergenza numerica:

$$\|r_{non\ vinc.}^{u,G}\| < toll \quad (2.67)$$

Il vettore globale residuo  $r^{u,G}$  corrisponde alla forza nei nodi della mesh nelle due direzioni dello spostamento, quindi il suo valore nei nodi vincolati (condizioni al contorno) sarà dato dalle reazioni vincolari (diverse da zero). Per questo motivo come condizione si assegna che sia nulla la norma del residuo dello spostamento calcolato nei punti interni (ossia non vincolati); infatti il sistema è in equilibrio, pertanto, nei nodi in cui non sono presenti né vincoli né carichi applicati, è corretto che la forza risultante sia nulla (caso ideale) o minore della tolleranza desiderata (caso numerico).

## 2.5 Irreversibilità della frattura

Il sistema di equazioni descritto nella sezione precedente, risolto così com'è, non riesce a garantire l'irreversibilità della frattura, cioè la cricca una volta formata può "rimarginarsi" (*crack healing*). Questo comportamento non rispetta il fenomeno fisico reale, che è completamente dissipativo, e pertanto non reversibile. Dal punto di vista dell'evoluzione del Phase-Field, l'irreversibilità è data dalla condizione:

$$\varphi_{t+\Delta t} \geq \varphi_t \quad (2.68)$$

con  $t$  variabile di tempo fittizia e  $\Delta t$  l'intervallo di tempo tra due incrementi di spostamento successivi. Per garantire questa condizione, Msek et al. [24] aggiungono all'equazione del campo di fase un termine di penalizzazione (*penalty term*), in modo da aggirare il problema e impedire la reversibilità della cricca. Come prima cosa si definisce la funzione:

$$\langle x \rangle_- = \begin{cases} -x & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x \geq 0 \end{cases} \quad (2.69)$$

Successivamente si può introdurre il *penalty term*, che assume la forma:

$$P(\dot{\varphi}) = \frac{\eta}{n\Delta t} \langle \dot{\varphi} \rangle_-^n \quad (2.70)$$

con  $\dot{\varphi} = \varphi_{t+\Delta t} - \varphi_t$ . I parametri  $n$  e  $\eta$  sono introdotti in modo “artificiale” dall’utente e non hanno un vero e proprio significato fisico. Nell’articolo di riferimento  $n$  viene fissato uguale a 2, mentre  $\eta$ , che determina la grandezza del termine penalizzante, dovrebbe essere abbastanza elevato da garantire l’irreversibilità ma non troppo da provocare il mal-condizionamento del sistema.

Per assicurare la condizione (2.68) vengono modificate le equazioni del Phase-Field (2.56) e (2.64), che diventano rispettivamente:

$$\mathbf{r}_e^\varphi = \int_{\Omega} \left\{ G_c l_0 \mathbf{B}_i^{\varphi T} \nabla \varphi + \left[ \frac{G_c}{l_0} + 2\psi_0(\boldsymbol{\varepsilon}) \right] N_i \varphi \right\} dV - \int_{\Omega} 2N_i \left[ \psi_0(\boldsymbol{\varepsilon}) - \frac{\eta}{n\Delta t} \langle \dot{\varphi} \rangle_-^n \right] dV \quad (2.71)$$

$$\mathbf{K}_{ij}^{\varphi\varphi} = \frac{\partial \mathbf{r}_e^\varphi}{\partial \varphi} = \int_{\Omega} \left\{ G_c l_0 \mathbf{B}_i^{\varphi T} \mathbf{B}_j^\varphi + \left[ \frac{G_c}{l_0} + 2\psi_0(\boldsymbol{\varepsilon}) \right] N_i N_j \right\} dV + \int_{\Omega} \frac{\eta}{\Delta t} \langle \dot{\varphi} \rangle_-^{n-1} N_i N_j dV \quad (2.72)$$

Dopo aver fatto queste modifiche, il sistema non lineare risultante si risolve con il metodo incrementale-iterativo di Newton, come descritto in precedenza. Sebbene non ci siano grandi variazioni nel procedimento, l’introduzione del *penalty term* ha come problema la dipendenza da parametri “esterni” che devono essere stimati dall’utente. Oltre a non esserci delle chiare modalità per la scelta di  $n$  e  $\eta$ , il loro valore potrebbe anche cambiare a seconda delle analisi effettuate, in relazione alla mesh e all’entità del carico applicato.

Per questi motivi, in questo elaborato, si è deciso di adottare un’altra tecnica per la gestione dell’irreversibilità della frattura. In particolare si è fatto riferimento al metodo descritto da Miehe et al. in [27], che permette di rispettare la condizione (2.68) in modo automatico e senza l’aggiunta di parametri “artificiali”. Il fatto irrealistico che il Phase-Field diminuisca (reversibilità della frattura) è legato alla diminuzione dell’energia elastica, che guida il processo di propagazione della cricca, nelle equazioni del campo di fase (2.56) e (2.64). La diminuzione della densità di energia elastica  $\psi_0$  può essere causata, per esempio, dal rilascio del carico applicato o dal passaggio del carico stesso da trazione a compressione, ma può esserci anche nel caso di sola trazione, visto che all’avanzare della propagazione si modifica comunque lo stato tensionale nel sistema (e quindi in qualche elemento  $\psi_0$  potrebbe diminuire). Pertanto, risolvendo il sistema (2.65) senza modifiche, nel caso

in cui  $\psi_0$  dovesse diminuire localmente per alcuni elementi del sistema, ciò potrebbe portare all'irrealistica diminuzione del Phase-Field.

A partire da queste considerazioni, l'idea di Miehe è di considerare una variabile, detta *History Field*, che tenga conto della "storia" di  $\psi_0$ , ossia del progressivo valore che essa assume al variare del carico esterno applicato (in termini di spostamento imposto). Visto che una diminuzione di  $\psi_0$  porta a una diminuzione di  $\phi$ , si vuole evitare che ciò accada definendo la variabile *History Field* nel seguente modo:

$$H = \begin{cases} \psi_0(\boldsymbol{\varepsilon}) & \text{se } \psi_0(\boldsymbol{\varepsilon}) > H_t \\ H_t & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (2.73)$$

dove  $H_t$  è il valore assunto dalla variabile allo step (incremento) precedente. In questo modo la variabile *History Field*, che sostituisce la densità di energia elastica  $\psi_0$ , è sempre crescente o, al minimo, costante. Dunque, per avere sempre  $\phi$  crescente ed evitare il *crack healing*, si inserisce la variabile  $H$  nelle equazioni (2.56) e (2.64), che determinano l'evoluzione del Phase-Field. Le espressioni modificate risultano:

$$\mathbf{r}_e^\varphi = \int_{\Omega} \{G_c l_0 \mathbf{B}_i^{\varphi T} \nabla \varphi + \left[\frac{G_c}{l_0} + 2H\right] N_i \varphi\} dV - \int_{\Omega} 2N_i H dV \quad (2.74)$$

$$\mathbf{K}_{ij}^{\varphi\varphi} = \frac{\partial \mathbf{r}_e^\varphi}{\partial \varphi} = \int_{\Omega} \{G_c l_0 \mathbf{B}_i^{\varphi T} \mathbf{B}_j^\varphi + \left[\frac{G_c}{l_0} + 2H\right] N_i N_j\} dV \quad (2.75)$$

Grazie a questa nuova variabile, che è anche di facile implementazione nel codice, si riesce a garantire l'irreversibilità della frattura senza l'introduzione di parametri aggiuntivi da parte dell'utente. In questo modo, oltre alla comodità di non dover stimare i valori di  $n$  e  $\eta$ , si utilizza lo stesso procedimento per ogni tipo di analisi, senza dover cambiare qualche parametro a seconda del caso in esame.

## 2.6 Struttura definitiva del codice implementato

In questa sezione si vuole riassumere quanto descritto in precedenza a proposito del metodo Phase-Field in un diagramma di flusso (*flowchart*), in cui vengono rappresentati i vari passaggi logici utilizzati per l'implementazione del codice in MATLAB. Si è partiti, come struttura di riferimento, dai

codici utilizzati da Bulent Biner in [26] (che si basa sul procedimento presentato da Msekh et al. [24]), per poi sviluppare nello specifico il metodo descritto in questo elaborato. In particolare il codice implementato si basa sull'introduzione della variabile *History Field*, ed è in grado di trattare in modo agevole il file input in cui vengono definiti la mesh e i dati del problema (questo viene descritto nel dettaglio in appendice B). Inoltre si è dedicata particolare attenzione all'assegnazione delle proprietà del materiale ad ogni singolo elemento della mesh, in modo da poter rappresentare anche geometrie complesse composte da materiali di natura diversa.

In figura 2.6 è riportato il *flowchart* del codice principale (*main*), in cui ci si è serviti di colori differenti per evidenziare i diversi blocchi che compongono il diagramma. Dopo la lettura del file input modificato da PATRAN (in giallo), la definizione dei dati del problema e l'inizializzazione delle variabili e della cricca iniziale (qualora sia presente), si implementa in MATLAB il ciclo *for* per l'incremento del carico di spostamento (in blu), in cui *istep* indica l'incremento corrente. Ad alcuni nodi della mesh, a seconda dell'analisi che si vuole effettuare, si applica lo spostamento imposto  $u_{imp}$ , che ad ogni step viene aumentato dell'incremento desiderato. Volendo utilizzare il metodo di Newton-Raphson modificato, si calcola la matrice di rigidezza globale  $\mathbf{K}^G$  prima di procedere con il ciclo *for* per la risoluzione iterativa (*iter*) del sistema non lineare (in rosso). All'interno di questo secondo ciclo viene definito il vettore globale dei residui  $\mathbf{r}^G$  e poi, una volta imposte le condizioni al contorno dell'incremento corrente (vincoli e spostamenti applicati) ai residui e alla matrice di rigidezza, viene risolto il sistema (2.65) mediante la strategia iterativa (2.59).

Infine, prima di imporre la condizione di convergenza (2.67), vengono aggiornati i valori di tensione, deformazione e dell'*History Field*, in modo da essere pronti per l'iterazione successiva. A questo punto, se viene rispettata la condizione di convergenza entro la tolleranza desiderata, il ciclo si interrompe, altrimenti si ripete imponendo  $iter = iter + 1$ .

Finito il ciclo delle iterazioni di Newton, ma sempre all'interno del ciclo degli incrementi di carico, vengono calcolate le reazioni vincolari del sistema analizzato, che saranno poi necessarie per la costruzione del grafico reazione vincolare vs spostamento imposto per lo studio del fenomeno della frattura. Inoltre vengono anche trasferite in PARAVIEW, tramite un file in formato vtk, le informazioni legate alla propagazione della cricca per lo step corrente (*istep*), ossia i valori del Phase-Field in ogni nodo; poi si utilizzerà questo software in fase di post-processing per elaborare le immagini in modo più agevole ed esteticamente gradevole rispetto a MATLAB.

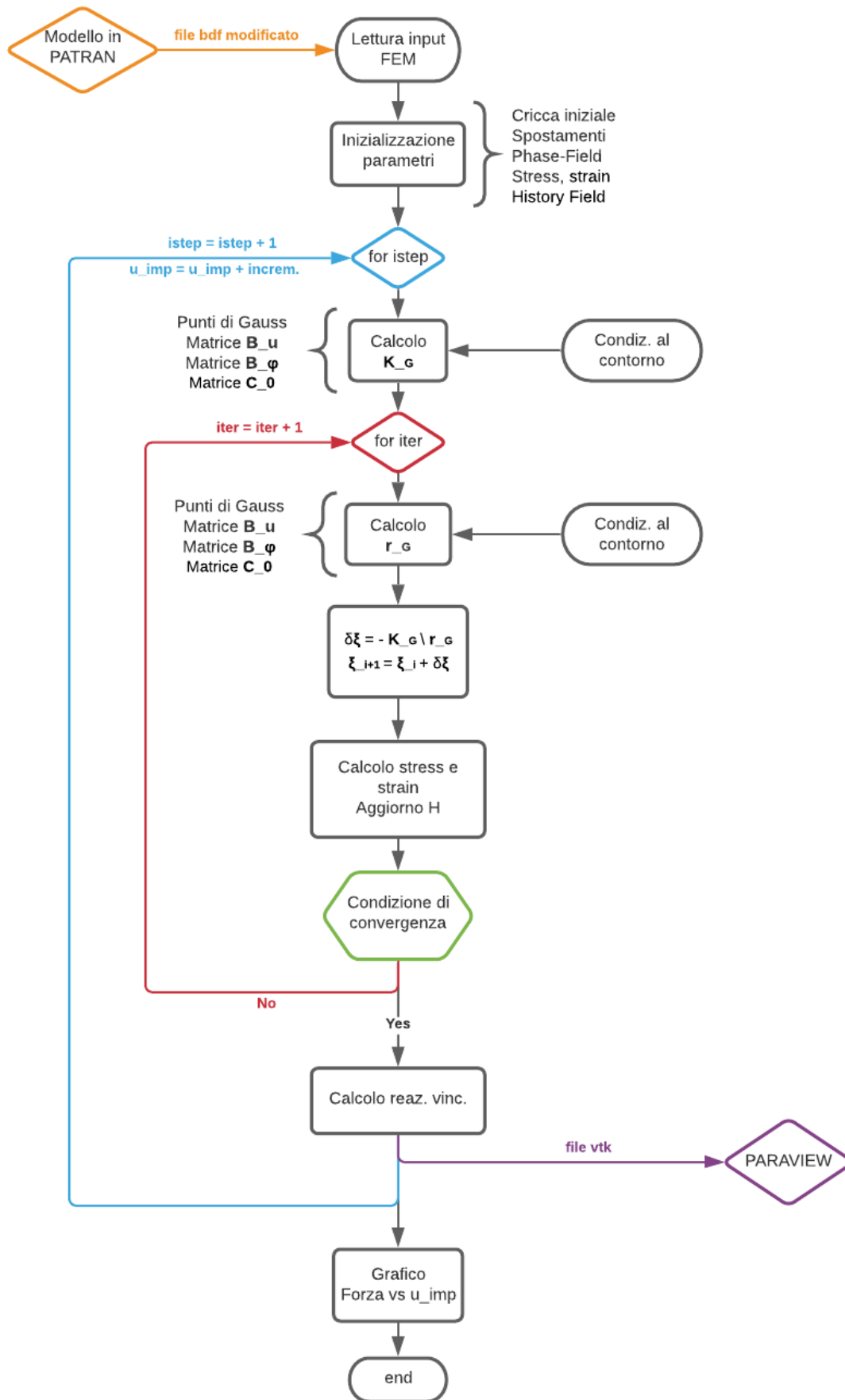


Figura 2.6 Diagramma di flusso del codice implementato.

Si può notare che per il calcolo di  $\mathbf{K}^G$  e  $\mathbf{r}^G$ , essendo costituiti da equazioni integrali, vengono introdotti i punti di Gauss, in cui vengono calcolate le funzioni di forma di ogni elemento per poter eseguire l'integrazione numerica (descritta nel dettaglio in appendice A); oltre a questo si definiscono anche le matrici  $\mathbf{B}^u$ ,  $\mathbf{B}^\phi$  e  $\mathbf{C}_0$ , che rientrano rispettivamente nelle equazioni (2.45), (2.46) e (2.20), e di conseguenza anche nelle espressioni dei residui e della matrice di rigidezza.

### 3. Validazione del modello e fattori di influenza

Per validare il metodo implementato (con la variante dell'*History Field*) si è scelto come riferimento il testo di Bulent Biner [26], che segue il procedimento descritto in [24] proponendo un esempio numerico. Una volta verificata la bontà del modello utilizzato, si sono effettuate alcune analisi numeriche per mettere in luce i principali fattori che influenzano il metodo Phase-Field, evidenziandone i punti di forza e di debolezza. In particolare si sono considerate geometrie semplici e bidimensionali (piastrine), in modo da interpretare i risultati con maggiore chiarezza e minor costo computazionale. Inoltre, per semplicità, non si è considerata la massa del sistema (come di solito si usa fare per simulazioni puramente teoriche come queste); infatti nelle analisi effettuate non entrano in gioco né la densità come parametro del materiale, né il peso come forza esterna del problema.

#### 3.1 Validazione del codice implementato

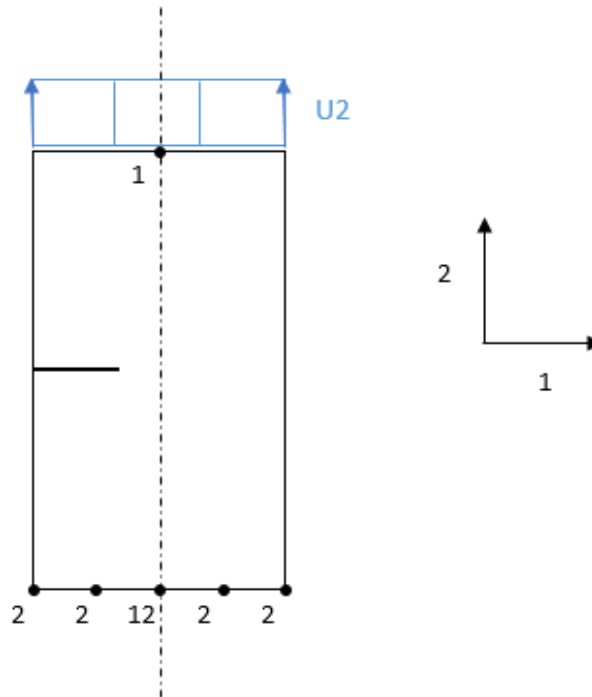
Il sistema considerato per validare il modello implementato è descritto in [26] nella sezione dedicata alla frattura fragile dei materiali. Esso consiste di una piastra semplice 2D di dimensioni 10 mm x 20 mm, la cui estremità inferiore è vincolata lungo l'asse verticale 2, come riportato in figura 3.1.

All'estremità superiore invece è imposto lo spostamento verticale  $U_2$  (*displacement control*), che viene assegnato per incrementi successivi al fine di poter determinare con buona precisione la condizione per la propagazione della cricca. Inoltre così facendo è possibile rappresentare il grafico della reazione vincolare in funzione dello spostamento imposto (che è tipico della *Fracture Mechanics*), grazie al quale è immediato individuare il punto critico per la propagazione della cricca, poiché corrisponde al crollo della forza vincolare che il sistema può esercitare.

Per rispettare la simmetria si impone il vincolo anche lungo l'asse 1 per i punti di mezziera delle due estremità della piastra. Per quanto riguarda la cricca iniziale ( $\Phi = 1$ ), si assume una lunghezza di cricca pari a 3.5 mm, posizionata lateralmente in corrispondenza del piano medio della piastra (altezza di 10 mm).

Seguendo il testo di riferimento, si assumono per il materiale isotropo  $E = 20.0e+5 \text{ N/mm}^2$ ,  $\nu = 0.3$  e  $G_c = 0.001 \text{ N/mm}$ , mentre per il valore di lunghezza di scala si considera  $l_0 = 0.125 \text{ mm}$ . Inoltre il parametro  $k$ , che come sottolineato nel capitolo precedente serve ad evitare il mal condizionamento

del sistema di equazioni, viene posto pari a  $1.0e-6$  (sufficientemente piccolo da non alterare il fenomeno fisico). Le analisi sono eseguite in condizioni *plane strain* (deformazione piana), in modo da evitare di imporre il valore di spessore della piastra (caso 2D).



**Figura 3.1** Piastra in tensione con cricca laterale e vincoli applicati.

Per l'implementazione del metodo Phase-Field descritto in [24] e [26], si considerano anche i seguenti parametri relativi al *penalty term*, definito dall'equazione 2.70, da aggiungere al modello per impedire la reversibilità della frattura:

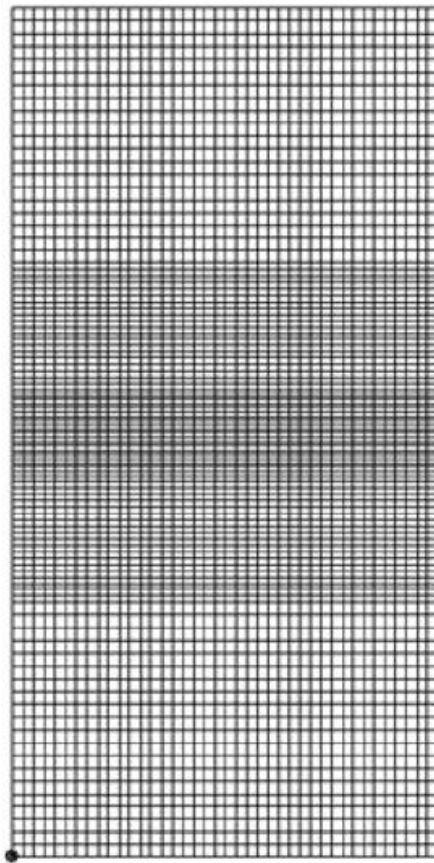
- $n = 2$ ;
- $\eta = 40.0e+5 \text{ N s/mm}^2$ .

Questi parametri aggiuntivi sono "artificiali", ossia vengono inseriti dall'utente per rappresentare il fenomeno fisico reale, ma non hanno effettivo significato fisico; pertanto potrebbe risultare complesso assegnare un valore realistico, specialmente nel caso in cui si vogliono studiare sistemi nuovi per cui non ci sono già presenti degli esempi in letteratura. Questo punto critico del metodo Phase-Field viene risolto utilizzando la variabile *History Field*, definita dall'equazione (2.73) come descritto in [27]. Infatti, come si è visto nel capitolo precedente, in questo caso non sono necessari dei parametri fittizi da aggiungere al sistema, perché si tiene conto del fenomeno di irreversibilità della *crack propagation* in modo intrinseco dall'evoluzione temporale dell'energia elastica in ogni



punto. In questo modo si garantisce che il valore del Phase-Field in ogni punto sia crescente (o al minimo costante), anche quando il carico esterno diventa nullo o di compressione.

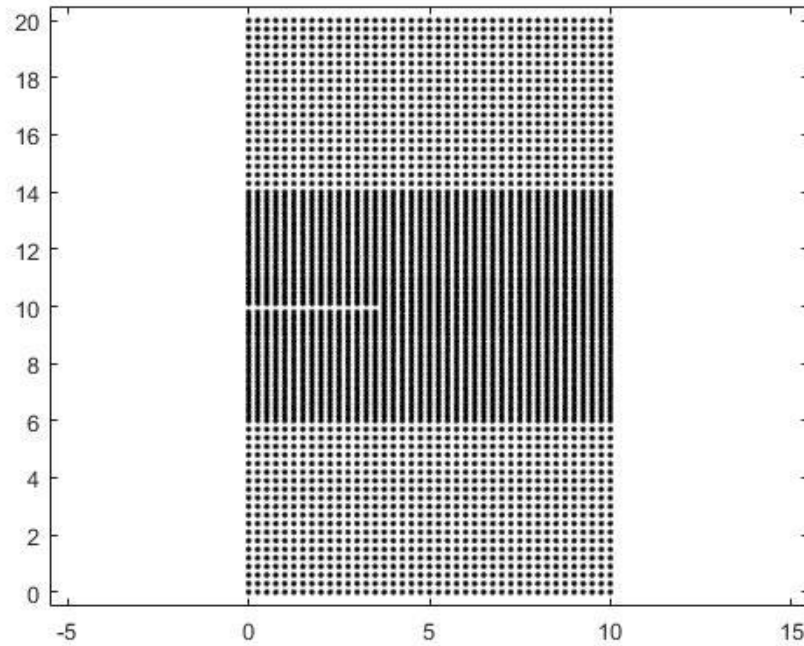
Per quanto riguarda la mesh considerata per la discretizzazione FEM della piastra, si considerano 4000 elementi quadrangolari e 4141 nodi complessivi, in linea con il testo di riferimento (figura 3.2). Si può notare come, al fine di limitare il numero di nodi del sistema e di conseguenza i tempi di calcolo, la dimensione degli elementi non sia costante, ma venga rifinita maggiormente solo nella zona dove ci si aspetta l'evoluzione della cricca; infatti nella zona di propagazione della cricca è necessaria una *mesh size* più piccola al fine di individuare in modo chiaro il percorso di propagazione, mentre lontano dalla cricca è sufficiente una mesh più *coarse*.



**Figura 3.2** Mesh utilizzata nel testo di riferimento [26].

Il fatto di poter stimare a priori la probabile zona di propagazione della cricca è un grande vantaggio perché permette di localizzare l'infittimento della mesh, riducendo i tempi di calcolo delle analisi; tuttavia non è sempre possibile, specialmente nei casi più complessi o poco analizzati in letteratura.

In figura 3.3 si propone il *plot* in MATLAB della discretizzazione utilizzata, in cui si possono evidenziare le dimensioni della piastra e della cricca iniziale (in mm), per la quale si sono considerati 30 nodi complessivi su due righe orizzontali (sono stati omessi dalla mesh in figura per facilitare la visualizzazione).



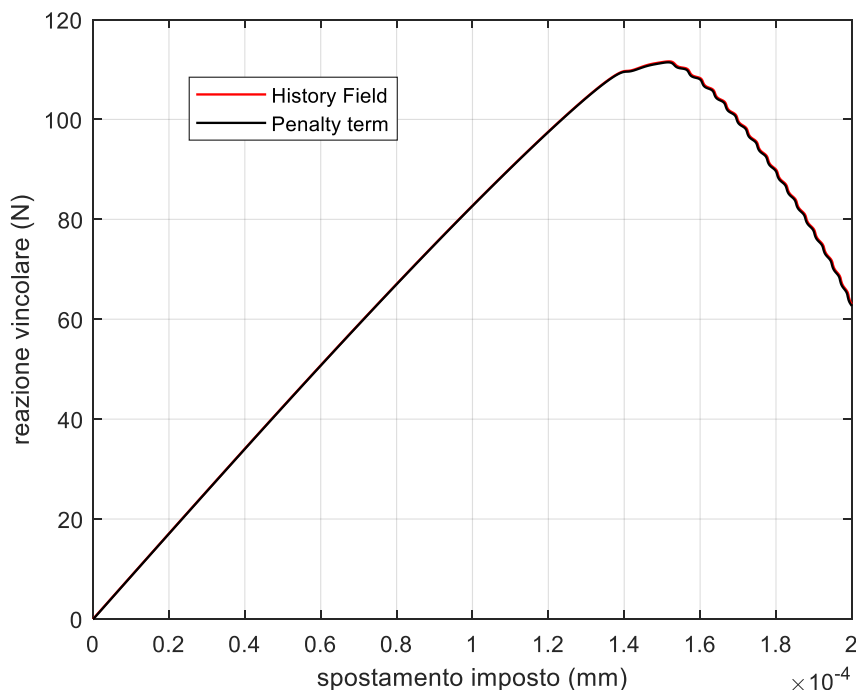
**Figura 3.3** Visualizzazione in MATLAB della discretizzazione della piastra con cricca laterale.

Dal punto di vista operativo si è applicato un incremento costante pari a  $1.0e-7$  mm per 2000 step, fino al valore di spostamento totale di  $2.0e-4$  mm. Questo valore finale è relativamente basso rispetto alle dimensioni del sistema, ma questo è dovuto alla scelta dell'*energy release rate*  $G_c$  (ha valore ridotto), che governa il processo di propagazione e determina anche lo spostamento critico da imporre per la propagazione della cricca.

Per ogni incremento si è andati a calcolare la reazione vincolare risultante lungo l'asse 2 all'estremità inferiore della piastra, intesa come la somma dei contributi di tutti i nodi vincolati. Da un altro punto vista questo valore può essere inteso come la forza che deve essere applicata all'estremità superiore per esplicitare lo spostamento imposto. Infatti, essendo il sistema equilibrato e il problema quasi-statico (ossia considerato statico e indipendente dal tempo nei singoli step), la forza complessiva nel sistema deve essere nulla. Infatti è per questo che il valore di forza risultante all'estremità inferiore deve essere necessariamente uguale a quello all'estremità superiore, il che giustifica il

duplice punto di vista appena descritto; questo può essere anche utilizzato come metodo di verifica della correttezza dei risultati, considerando che nella pratica per forza totale “nulla” si intende molto minore delle forze in gioco (almeno 5 ordini di grandezza inferiore).

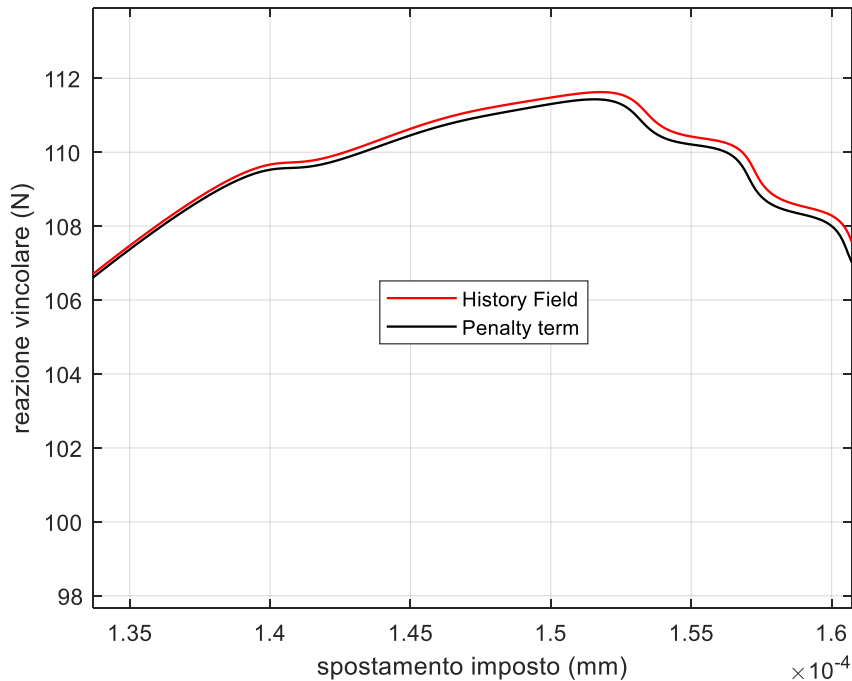
A partire dai valori di spostamento imposto e reazione vincolare (in valore assoluto) si ottiene il grafico riportato in figura 3.4 (interpolazione lineare tra i punti determinati col metodo), in cui è rappresentato il confronto tra i due metodi analizzati. Di seguito si propone anche uno zoom in corrispondenza del picco (figura 3.5), al fine di evidenziare la minima differenza che è stata riscontrata tra i risultati. La curva presenta un andamento lineare fino (circa) al raggiungimento del picco della reazione vincolare, oltre il quale la forza che la piastra può sostenere crolla e la curva assume una tangente negativa. Questo comportamento prende il nome di *softening* e corrisponde a una diminuzione della rigidità del sistema a seguito della propagazione della cricca, che inizia in prossimità del raggiungimento del picco della forza (leggermente prima del valore di forza massima, quando il sistema perde il comportamento lineare).



**Figura 3.4** Confronto tra il modello di riferimento e quello modificato con la variante dell'History field.

Si può notare che l'utilizzo della variabile *History Field* porta a un risultato molto simile rispetto al modello di Phase-Field utilizzato nell'articolo di riferimento; pertanto, alla luce dei vantaggi precedentemente descritti, è giustificato l'utilizzo di questa variante del metodo per limitare

possibili fonti di errore e incertezze dovute alla trattazione dell'irreversibilità con il *penalty term*. In particolare, dalla figura 3.5 si può osservare come la differenza tra i due metodi sia addirittura nulla nel regime lineare (prima della propagazione della cricca), dove i valori del Phase-Field nei nodi aumentano molto lentamente.

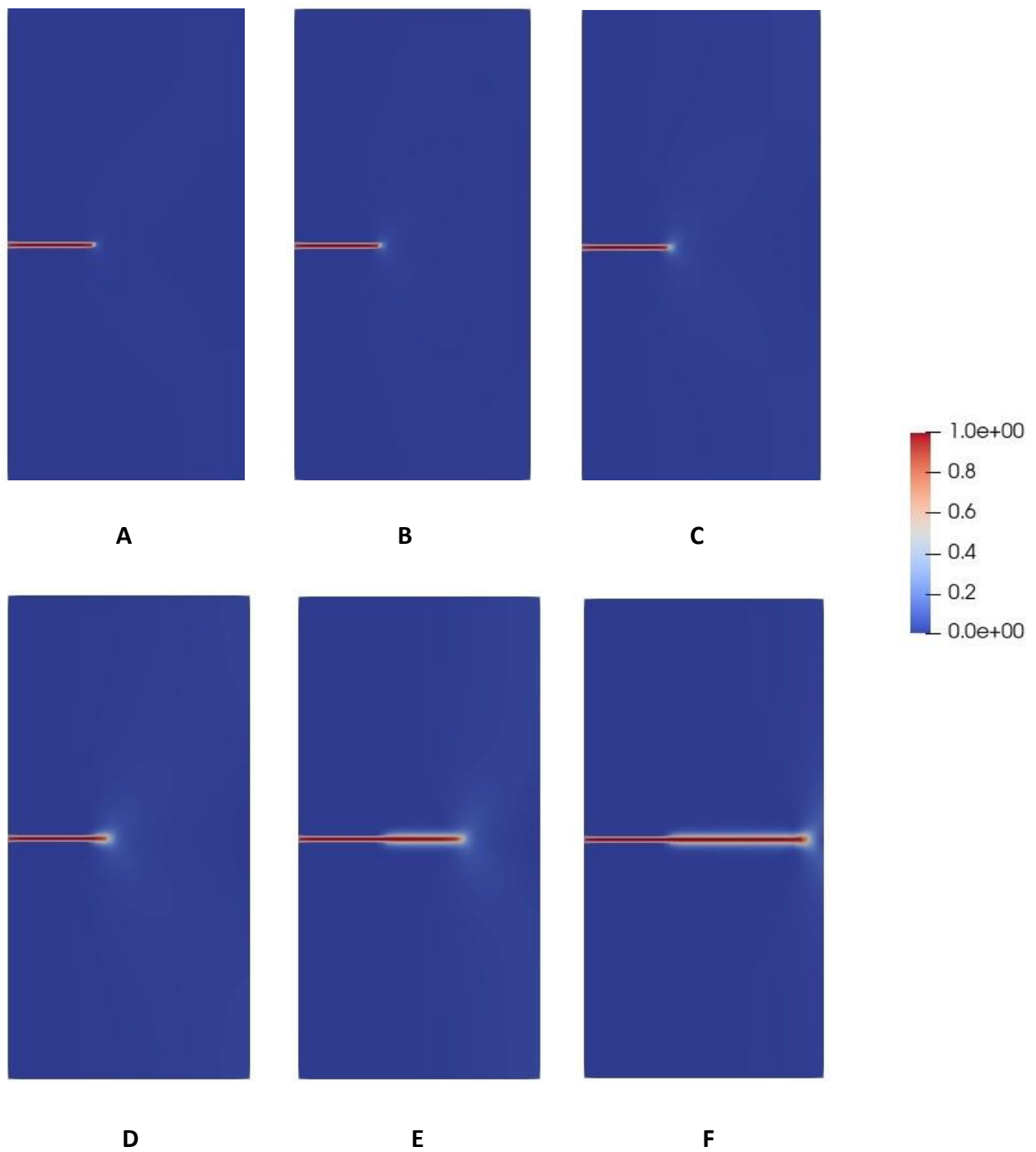


**Figura 3.5** Dettaglio del grafico di confronto tra i due modelli.

Bisogna sottolineare che, nel caso in esame, la geometria considerata e le condizioni di carico imposte non comportano particolari diminuzioni dell'energia elastica e quindi del Phase-Field (carico puramente di trazione); tuttavia i risultati non coincidono esattamente perché, all'avanzare della propagazione, si modifica comunque lo stato tensionale del sistema, e quindi in qualche elemento potrebbe diminuire l'energia di deformazione elastica (e di conseguenza anche  $\phi$ ). Dunque, visto che localmente potrebbe diminuire il Phase-Field, entra in gioco il *penalty term* e quindi le differenze tra i due metodi. Se la variabilità dei risultati è minima per il caso in esame, lo stesso non si può dire nel caso vengano trattati sistemi più complessi. Infatti, per complessità crescenti dal punto di vista geometrico o dell'applicazione del carico (per esempio con alternanza di trazione e compressione), le differenze tra i due metodi potrebbero essere consistenti, specialmente nel caso in cui non vengano scelti correttamente i valori di  $n$  e  $\eta$ . Al contrario con

l'introduzione dell'*History Field* non ci sono problemi di questo genere, e il metodo rimane inalterato per ogni geometria considerata.

In figura 3.6 si riporta l'andamento della propagazione della cricca al variare dello spostamento imposto. Mediante il software PARAVIEW è stato possibile elaborare i risultati ottenuti in MATLAB, in modo da visualizzare con più chiarezza il percorso della cricca.



**Figura 3.6** Propagazione della cricca laterale per uno spostamento imposto di (A)  $7.5e-5$  mm, (B)  $1.0e-4$  mm, (C)  $1.25e-4$  mm, (D)  $1.5e-4$  mm, (E)  $1.75e-4$  mm e (F)  $2.0e-4$  mm.

Si può notare la corrispondenza tra l'andamento della propagazione e il grafico forza vs spostamento in figura 3.4. Nella prima parte la cricca non cresce e la piastra è in grado di sostenere il carico di spostamento imposto (la reazione vincolare cresce linearmente con lo spostamento); questo andamento lineare prosegue fino al valore di spostamento critico (circa  $1.4e-4$  mm), oltre il quale la cricca inizia a propagare; in PARAVIEW questa evoluzione progressiva della cricca è rappresentata in rosso, che corrisponde a un valore unitario del Phase-Field. La cricca prosegue il suo andamento in modo rettilineo seguendo la mezzeria della piastra, rispettando quanto riportato nel testo di riferimento [26] e in altri articoli presenti in letteratura che trattano problemi analoghi [24,25].

Come ulteriore verifica del modello, si è effettuata un'analisi lineare elastica in NASTRAN (un software basato sul metodo elementi finiti) per verificare che il sistema di equazioni implementate riesca a riprodurre correttamente la rigidità del sistema (nel regime lineare, prima della frattura). Utilizzando la stessa mesh dell'analisi in MATLAB, si è considerata sempre la condizione *plane strain*, assegnando in PATRAN (il pre-processore di NASTRAN) la proprietà *2D solid* ad ogni elemento. Si è fissato lo spostamento imposto e si è andati a comparare il valore di reazione vincolare risultante all'estremità inferiore della piastra. Risulta che il valore ottenuto con NASTRAN coincide con quello del codice MATLAB, pertanto è confermata la correttezza del modello lineare-elastico implementato. Invece per la validazione del modello riguardo al comportamento a frattura (dopo lo spostamento critico), ci si riferisce alla comparazione dei risultati con il documento di riferimento, come descritto in precedenza.

A questo punto, validato il metodo considerato in questo elaborato, si è utilizzato lo stesso modello (figura 3.1) per analizzare la dipendenza dei risultati al variare del parametro  $G_c$ , della lunghezza iniziale di cricca laterale, del posizionamento della cricca stessa (cricca centrale vs cricca laterale) e dell'incremento di spostamento (*displacement increment*). Si è invece utilizzato il modello descritto da Miehe [25, 27] per studiare la dipendenza dei risultati dal parametro  $l_0$  e dalla dimensione di mesh (*mesh size*). Le prime tre analisi hanno lo scopo di verificare se il metodo Phase-Field è in grado di rispettare i comportamenti previsti dalla teoria (come ulteriore validazione del modello), le restanti quello di indagare nel dettaglio le capacità del metodo, cercando di individuarne gli aspetti potenzialmente più critici.

### 3.2 Dipendenza dell'*energy release rate* $G_c$

L'*energy release rate* indica la condizione critica per la propagazione della cricca, quindi è il parametro che guida l'evoluzione della cricca in funzione del carico esterno applicato. Nel momento in cui l'energia per unità di superficie fornita dall'esterno ( $G$ ) è uguale o superiore al valore critico  $G_c$ , la struttura non è più in grado di sostenere il carico esterno e dunque la cricca si propaga, seguendo il percorso di minima energia all'interno del materiale (ovvero quello energeticamente più favorevole per la propagazione).

Per questa analisi si è considerata la piastra descritta nella sezione precedente, tenendo costanti tutti i parametri geometrici e del materiale a eccezione di  $G_c$ . Si sono mantenuti invariati anche la mesh e l'incremento di spostamento ( $1.0e-7$  mm), in modo da lasciare l'*energy release rate* come unico fattore a influenzare i risultati.

In particolare si sono utilizzati i valori di  $G_c$  pari a  $0.001$  N/mm (come nel capitolo 3.1) e  $0.0005$  N/mm, ottenendo il grafico forza vs spostamento riportato in figura 3.7.

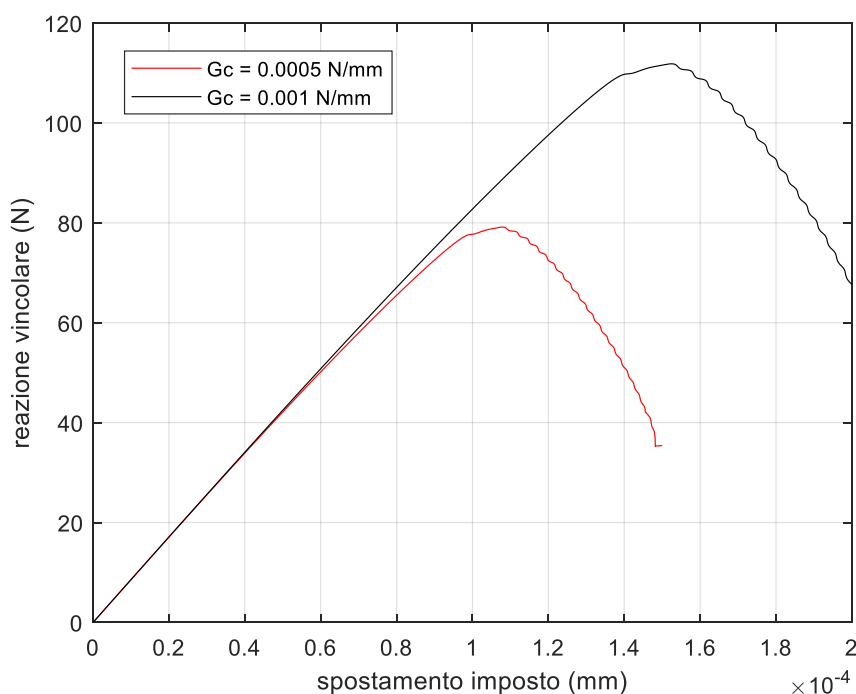


Figura 3.7 Dipendenza dall'*energy release rate*  $G_c$ .

Come indicato dalla teoria, diminuendo l'*energy release rate* il sistema collassa prima, a parità di carico esterno applicato; pertanto diminuiscono sia lo spostamento critico sia il picco della reazione vincolare. Infatti in questo punto il sistema esplica la massima reazione vincolare possibile, oltre il quale, a causa della propagazione della frattura, la rigidezza del sistema si riduce e quindi la reazione vincolare inizia a diminuire.

Inoltre si può notare che nella prima parte (andamento lineare), le due curve coincidono; questo significa che il sistema ha la stessa rigidezza in entrambi i casi, visto che coincide con la tangente del grafico (ossia la pendenza). Infatti prima dello spostamento critico la cricca non ha ancora iniziato a propagarsi, quindi il parametro  $G_c$  (che indica la condizione energetica di frattura del materiale) non è ancora entrato in gioco. Dunque, essendo uguali tutti gli altri parametri del sistema, questo andamento rispetta il comportamento teorico che ci si aspetta.

### 3.3 Variazione della lunghezza iniziale di cricca

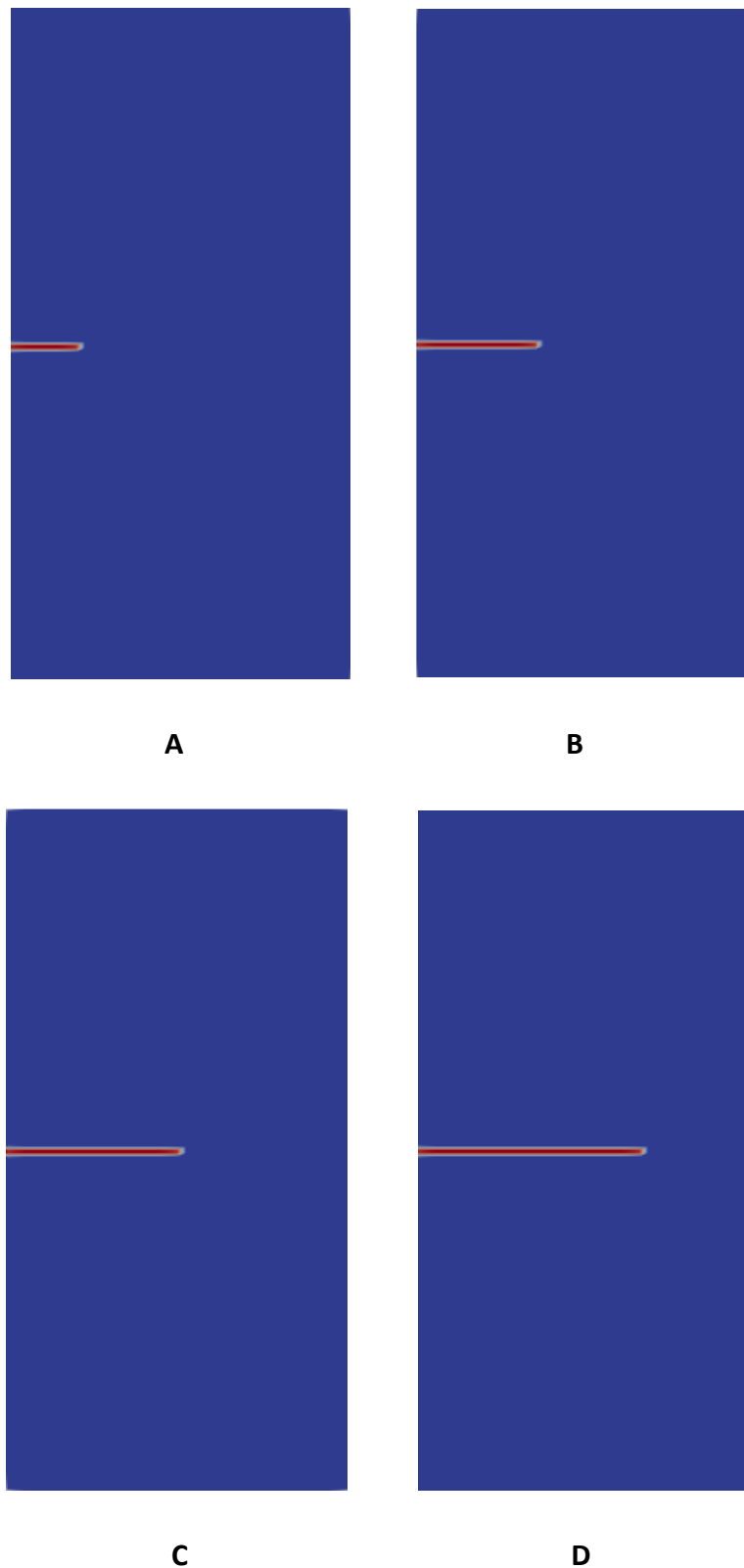
Nella sezione 3.1 si è studiato il caso di piastra in tensione con cricca laterale di lunghezza  $a = 3.5$  mm, ora si vuole vedere come cambiano i risultati al variare della lunghezza iniziale di cricca. Mantenendo l'*energy release rate* pari a  $0.001$  N/mm, si sono considerati i casi:

- Lunghezza di cricca  $a = 2$  mm;
- Lunghezza di cricca  $a = 3.5$  mm;
- Lunghezza di cricca  $a = 5$  mm;
- Lunghezza di cricca  $a = 6.5$  mm;

di cui si possono visualizzare in figura 3.8 le immagini ottenute con PARAVIEW.

Volendo determinare l'influenza dovuta alla lunghezza iniziale della cricca, si è mantenuto costante il *displacement increment* in tutte le analisi, utilizzando 1000 step fino al valore di spostamento finale  $2.0e-4$  mm.





**Figura 3.8** Cricca laterale con lunghezza iniziale pari a 2 mm (A), 3.5 mm (B), 5 mm (C) e 6.5 mm (D).

Per visualizzare la variazione dei risultati ci si riferisce nuovamente al grafico della reazione vincolare in funzione dello spostamento imposto (figura 3.9). Le curve hanno tutte un andamento simile

(infatti la propagazione avviene sempre orizzontalmente lungo la mezzeria), mentre cambia la reazione massima che la piastra può esplicare.

Si può notare come lo spostamento critico sia circa lo stesso per ogni lunghezza iniziale, come anche lo spostamento applicato per cui si ha il picco della reazione vincolare (sono valori molto vicini nel caso di materiali fragili). Tuttavia cambia la pendenza delle curve, visto che cambia la rigidità del sistema a seconda della lunghezza iniziale di cricca. Come ci si aspetta il modello più rigido (pendenza maggiore) è quello con lunghezza iniziale inferiore; questo significa che bisogna fornire dall'esterno una forza maggiore per ottenere lo stesso spostamento, ed è per questo che il picco della reazione vincolare raggiunge il valore più alto per  $a = 2$  mm. Tutti questi andamenti rispettano quanto trovato da Lu et al. [28] per la piastra in tensione con cricca laterale di lunghezza variabile.

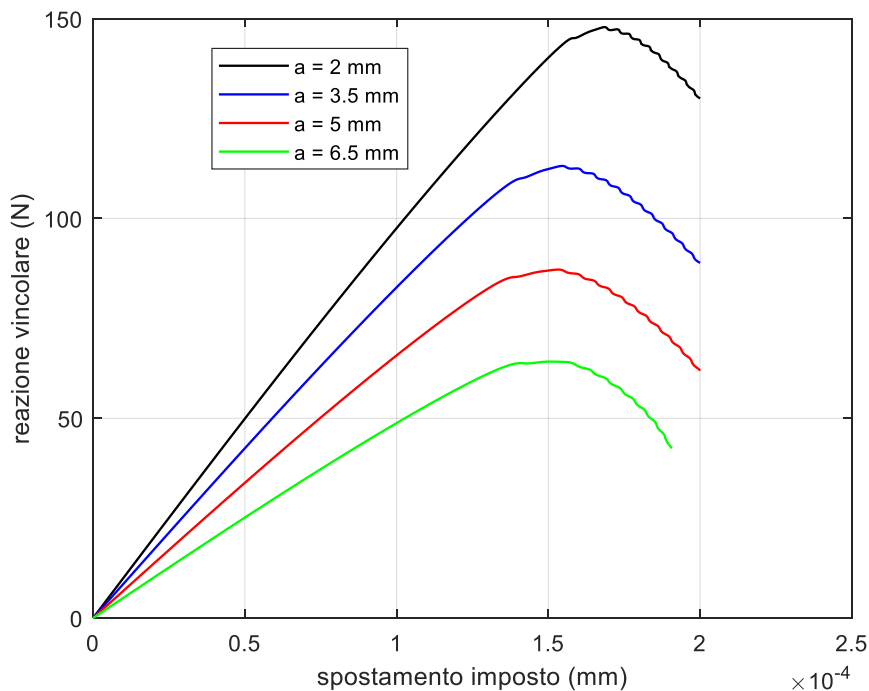
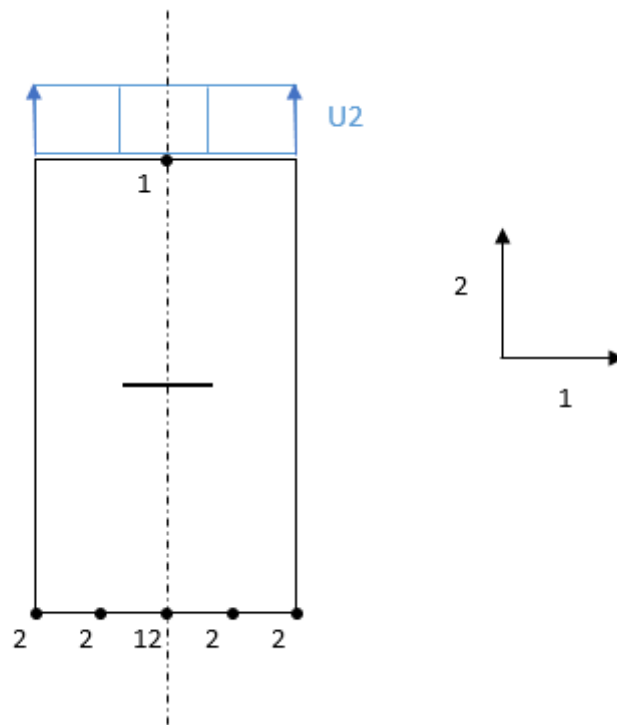


Figura 3.9 Dipendenza dalla lunghezza iniziale della cricca laterale.

### 3.4 Cricca laterale vs cricca centrale

Sempre con lo scopo di verificare se il metodo è in grado di simulare i comportamenti previsti dalla teoria, si vuole trattare il caso di cricca centrale, andando a valutare le differenze con quanto trovato per la cricca laterale. Per fare il confronto in modo oggettivo, si considera la stessa geometria discussa in precedenza, mantenendo invariati tutti i parametri (compresa la lunghezza di cricca pari

a 3.5 mm) a eccezione del posizionamento della cricca. Anche i vincoli alle estremità superiore e inferiore sono i medesimi, come mostrato in figura 3.10.



**Figura 3.10** Piastra in tensione con cricca centrale e vincoli applicati.

Utilizzando per entrambe le analisi un incremento di spostamento pari a  $1.0e-7$  mm, si ottiene il grafico della reazione vincolare in funzione dello spostamento imposto riportato in figura 3.11.

La pendenza della curva corrispondente alla cricca centrale è più alta, ossia il sistema possiede una rigidità maggiore e quindi è necessaria una forza esterna maggiore per imprimere lo stesso spostamento. Inoltre, a parità di *energy release rate* e lunghezza di cricca, la cricca laterale è più critica rispetto a quella centrale; infatti il picco della forza massima applicabile all'estremità superiore è maggiore per la cricca centrale, come anche lo spostamento critico da imporre per propagare la cricca. Si osserva questo andamento anche considerando l'evoluzione della cricca al variare dello spostamento applicato (figura 3.12), in cui si può notare che, rispetto al caso di cricca laterale, la frattura inizia a propagarsi per un valore maggiore di spostamento imposto. Inoltre la propagazione della cricca, che avviene sempre in direzione orizzontale lungo la mezzzeria, avviene in modo simmetrico, rispettando le condizioni di vincolo imposte.

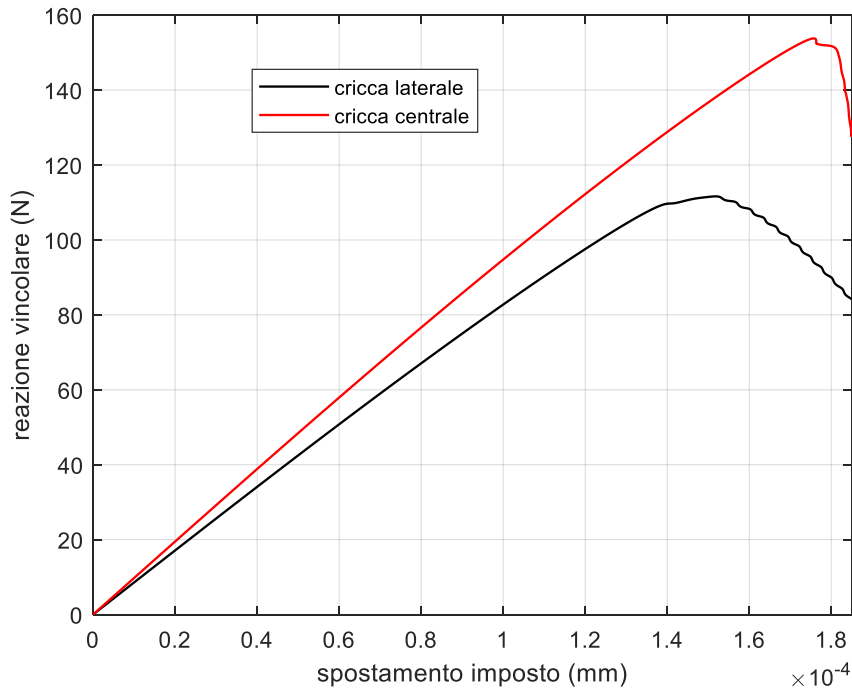


Figura 3.11 Confronto tra cricca centrale e cricca laterale.

Questo comportamento giustifica quanto descritto dalla teoria; come riportato in [5], considerando per semplicità una piastra infinita tirata da entrambe le estremità con una tensione  $\sigma$  (per piastre di dimensioni finite le formule teoriche si complicano, ma le conclusioni finali sono le stesse), per cricca centrale e cricca laterale valgono rispettivamente le equazioni:

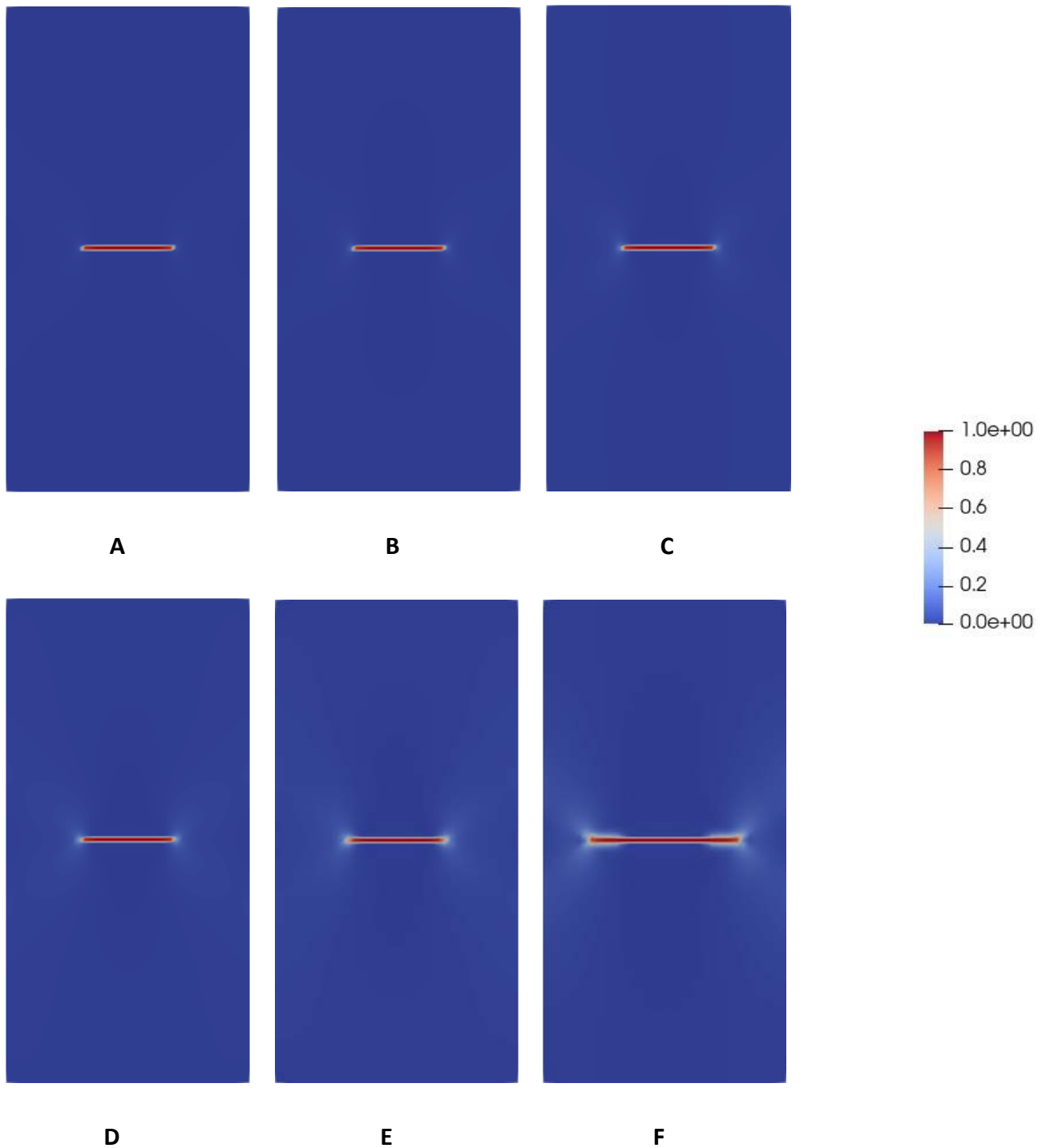
$$\sigma_c = \frac{K_{Ic}}{\sqrt{\pi a}} \quad (3.1)$$

$$\sigma_c = \frac{K_{Ic}}{1.12\sqrt{\pi a}} \quad (3.2)$$

In queste relazioni  $a$  e  $\sigma_c$  sono rispettivamente la lunghezza di cricca e la tensione critica da applicare per propagare la frattura, mentre  $K_{Ic}$  è lo *stress intensity factor* critico del sistema per il modo di frattura I, che come descritto nel capitolo 1 è strettamente legato all'*energy release rate* (definisce la tenacità del materiale).

Da queste equazioni risulta come, a parità di  $a$  e  $K_{Ic}$ , sia minore la tensione applicabile per la piastra con cricca laterale, giustificando quanto si è intuito osservando il grafico 3.11. Questa differenza è dovuta al fatto che, mentre per la cricca centrale è presente materiale non ancora danneggiato da

entrambi i lati, per la cricca laterale la compensazione dovuta al contatto con la parte intatta della piastra avviene solo da un lato; questo in sostanza la rende più "libera" di propagarsi a seguito dello spostamento esterno applicato



**Figura 3.12** Propagazione della cricca centrale per uno spostamento imposto di (A)  $7.5e-5$  mm, (B)  $1.0e-4$  mm, (C)  $1.25e-4$  mm, (D)  $1.5e-4$  mm, (E)  $1.75e-4$  mm e (F)  $1.85e-4$  mm.

### 3.5 Dipendenza dal *displacement increment*

Il metodo Phase-field, come descritto nel capitolo 2, viene risolto con la strategia iterativo-incrementale di Newton-Raphson, in cui ogni ad ogni incremento dello spostamento (step) si vuole arrivare alla condizione di convergenza (descritta dall'equazione 2.67) in un certo numero di iterazioni. In tutte le analisi effettuate si è fissato il numero massimo di iterazioni consentite a 4, sia per evitare un eccessivo aumento dei tempi di calcolo, sia perché si è visto che il metodo converge mediamente in 2-3 iterazioni utilizzando una tolleranza di  $1.0e-5$  N (considerata sufficientemente per ottenere risultati accurati). Pertanto, fissato il numero di iterazioni massimo, in questa sezione si vuole analizzare la dipendenza dei risultati dal *displacement increment*.

Relativamente alla piastra in tensione con cricca laterale descritta in [26], si sono mantenuti costanti tutti i parametri a eccezione dell'incremento di spostamento. Si è fissato anche lo spostamento totale ( $2.0e-4$  mm), pertanto si può esprimere questa analisi anche in termini di numero di step in cui viene applicato lo spostamento; in questo modo si rende l'idea dell'estensione del ciclo *for* in MATLAB con cui viene risolto il metodo Phase-Field. In particolare si sono effettuate le seguenti analisi:

- Incremento di spostamento  $1.0e-6$  mm (200 step);
- Incremento di spostamento  $2.0e-7$  mm (1000 step);
- Incremento di spostamento  $1.0e-7$  mm (2000 step).

In figura 3.13 è riportato il grafico della reazione vincolare in funzione dello spostamento imposto al variare del numero di step, in cui si può notare che i risultati dipendono notevolmente da questo parametro. Se il numero di step è troppo ridotto (per esempio 200 step) non si riesce a visualizzare chiaramente la caduta della reazione vincolare successiva alla propagazione della cricca, mentre con incremento di spostamento sufficientemente fine (numero di step elevato) il grafico assume l'andamento teoricamente atteso. Questo studio rivela chiaramente uno dei punti critici del metodo Phase-Field, visto che il numero di step è strettamente collegato al costo computazionale e i tempi di calcolo richiesti dall'analisi (aspetto importante specialmente in ambito aziendale).

Inoltre, all'aumentare del numero di step, si nota come le curve tendano ad avvicinarsi; questo significa che, infittendo sempre di più il *displacement increment*, si arriva a convergenza (in questa analisi si è considerato sufficientemente accurato il risultato ottenuto con 2000 step). Per modelli più complessi, come si vedrà in seguito, il numero di step necessario alla convergenza aumenta,

visto che il fenomeno della frattura diventa più complicato e quindi serve un incremento di spostamento più fine per individuare correttamente il percorso di evoluzione della cricca.

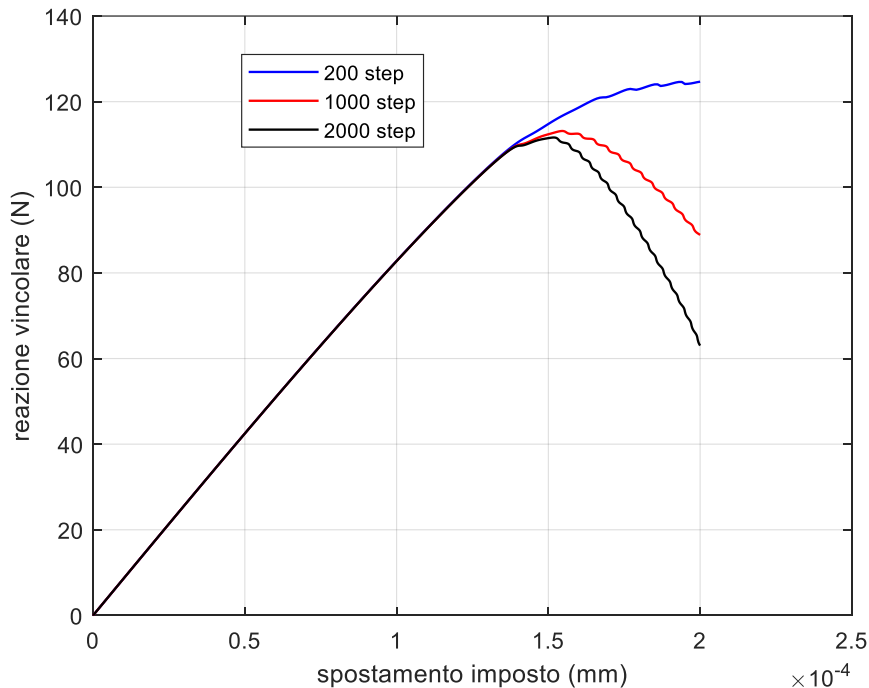


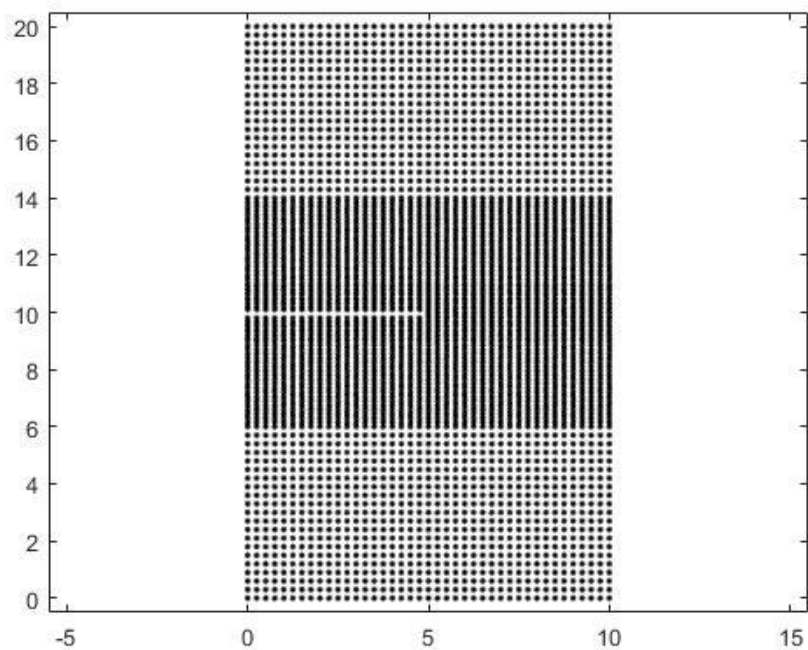
Figura 3.13 Dipendenza dall'incremento di spostamento (ovvero dal numero di step).

Osservando l'andamento del grafico nella parte lineare, si può notare come la curva sia la medesima indipendentemente dal numero di step. Questo è significativo, perché indica che la risoluzione del *displacement increment* incide prevalentemente nel range dove avviene la frattura (in prossimità e dopo il picco della forza). Dunque, se si potesse stimare a priori lo spostamento critico per il sistema in esame, si potrebbe utilizzare una strategia a incremento variabile, mantenendo un numero di step ridotto (quindi *displacement increment* più grande) nella zona lineare precedente al picco e infittendo la discretizzazione dello spostamento solo nella zona di propagazione della cricca. In questo modo si potrebbe diminuire notevolmente il costo computazionale dell'analisi (e quindi limitare il problema della forte dipendenza del metodo dal *displacement increment*), visto che si ridurrebbe l'entità del ciclo *for* in MATLAB.

Tuttavia per problemi più complessi non è sempre possibile stimare facilmente lo spostamento critico, quindi è necessario effettuare una prima analisi con numero di step sufficientemente alto

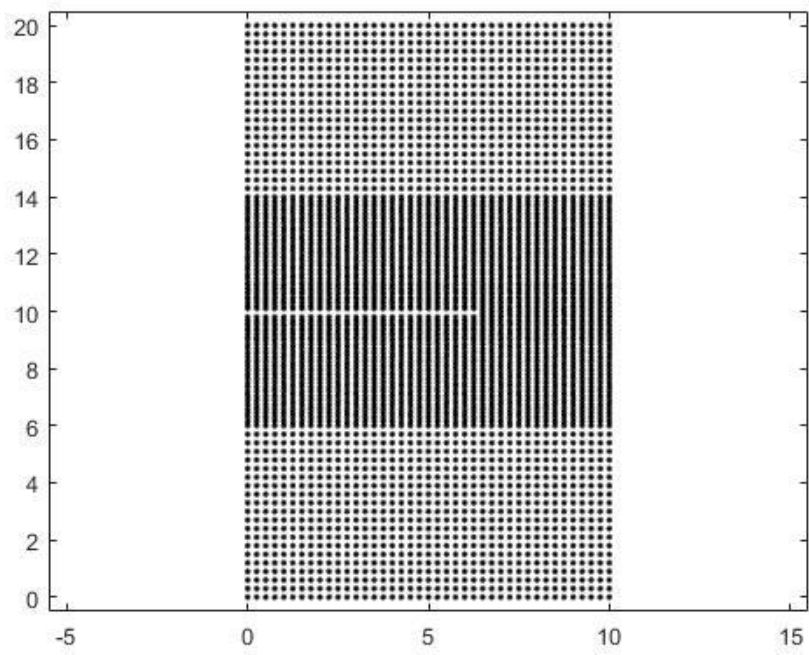
per individuare la zona del picco di forza, per poi diminuire il numero di step, e di conseguenza i tempi di calcolo, nelle analisi successive.

Gli andamenti del grafico 3.13 riflettono quello che effettivamente succede al percorso di cricca; in figura 3.14 sono mostrati gli aspetti finali della cricca nei casi di 200, 1000 e 2000 step, considerando la lunghezza iniziale di cricca costante e pari a 3.5 mm. Aumentando il numero di step si riesce a visualizzare un'evoluzione di cricca più consistente, visto che con una discretizzazione dello spostamento più fine si riesce a determinare con più accuratezza la propagazione della frattura. Questa è un'ulteriore indicazione dell'importanza del valore di *displacement increment*, che se non è settato correttamente potrebbe portare a conseguenze pericolose, visto che riflette una propagazione di cricca minore di quella reale, e quindi sovrastima la forza esterna che il sistema può sostenere.

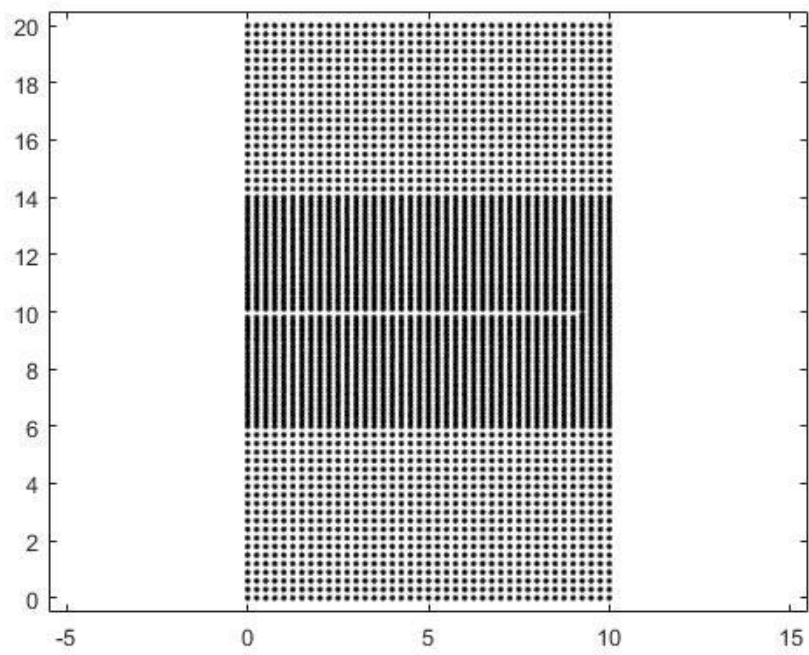


A





**B**



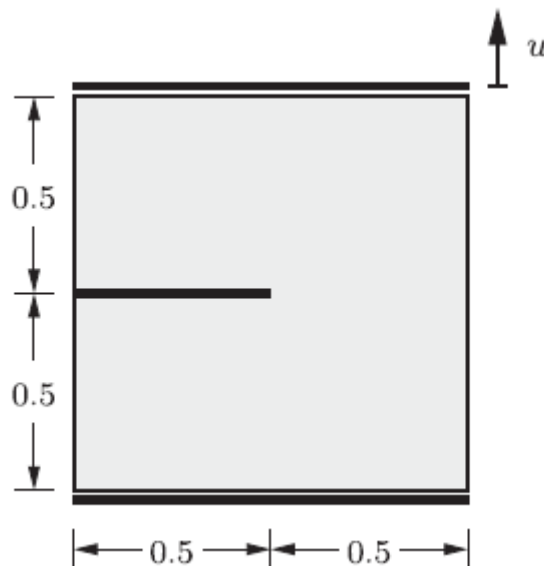
**C**

**Figura 3.14** Evoluzione finale della cricca nel caso di 200 step (A), di 1000 step (B) e di 2000 step (C).

### 3.6 Influenza di $l_0$ e della *mesh size*

Per analizzare la dipendenza dei risultati dalla lunghezza di scala  $l_0$  e dalla *mesh size*  $h$ , ci si è riferiti al modello descritto da Miehe et al. [25], che tratta nel dettaglio questo problema. L'obiettivo è quello di riprodurre, con il codice presente in questo elaborato, dei risultati a partire dal sistema presente nell'articolo di riferimento, in modo da arrivare alle stesse conclusioni sull'influenza di  $l_0$ .

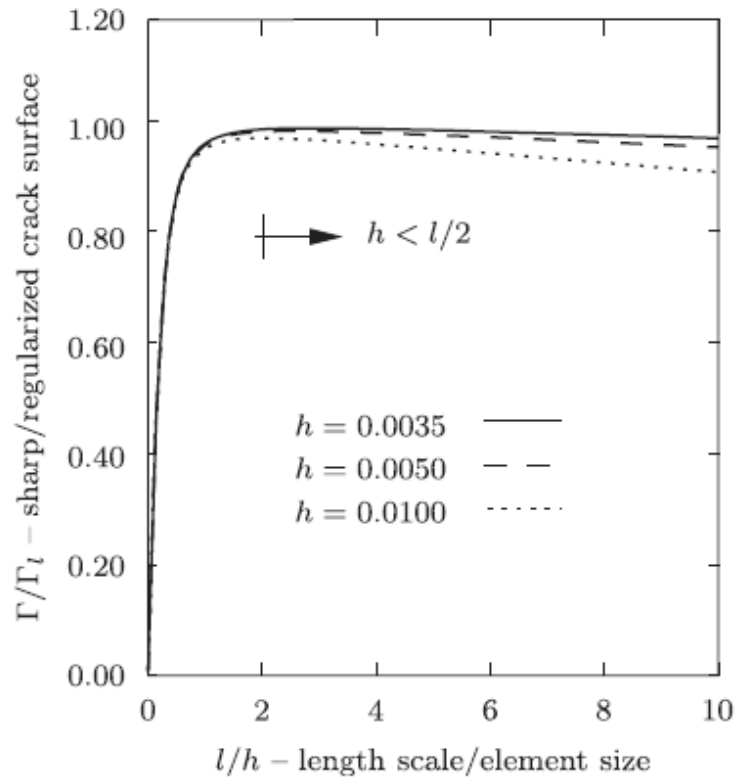
Il sistema in esame (figura 3.15) è sempre una piastra con cricca laterale in tensione in condizioni *plane strain*, rispetto a prima cambiano solo le dimensioni (in mm) e la lunghezza della cricca. Seguendo l'articolo di riferimento si sono assunti i parametri del materiale  $E = 2.1e+5 \text{ N/mm}^2$  e  $\nu = 0.3$ .



**Figura 3.15** Piastra quadrata con cricca laterale, in tensione [25].

Su questo modello, nell'articolo di riferimento, viene analizzato il rapporto tra  $\Gamma$  e  $\Gamma_{l_0}(\phi)$  in funzione del rapporto  $l_0/h$ , dove  $\Gamma$  è la *sharp crack surface* (la superficie di cricca considerata di larghezza infinitesima); invece  $\Gamma_{l_0}(\phi)$ , definita nel capitolo precedente con l'equazione (2.12), è la *regularized crack surface*, ossia la superficie della cricca modellata secondo il parametro  $l_0$  (che in [25] è chiamato  $l$ ) e che dipende dal Phase-Field. Infine  $h$  indica la *mesh size* in corrispondenza della zona di cricca, considerando che gli elementi sono quadrangolari. La *sharp crack surface*, che è la cricca teorica che si vuole simulare, in questo caso vale 0.5 mm (in 2D l'equazione 2.12 è espressa in unità di lunghezza), come si può vedere dalla figura 3.15. Sapendo che questo valore esprime l'obiettivo

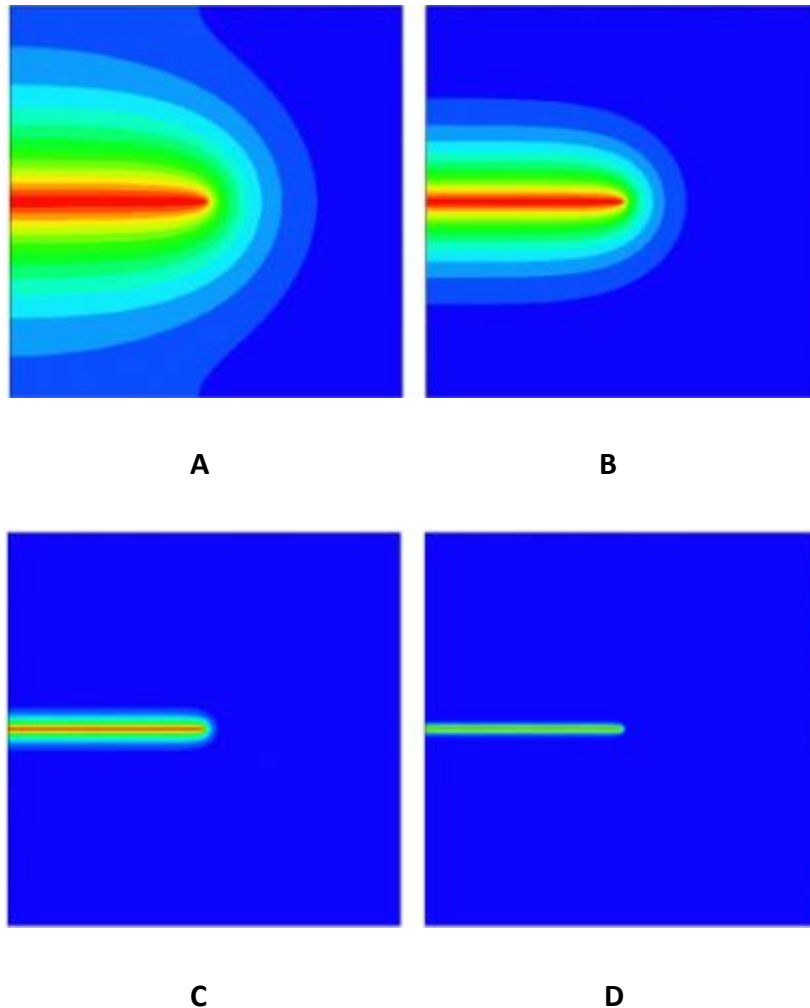
che si vuole simulare, si riportano i valori di  $\Gamma_{L0}(\phi)$  in funzione di  $l_0$  e  $h$  determinati da Mische (figura 3.16).



**Figura 3.16** Accuratezza della *crack surface* in funzione del rapporto tra  $l_0$  e la *mesh size* degli elementi quadrangolari [25].

Dal grafico si deduce come, a prescindere dalla discretizzazione della mesh, per valori  $l_0/h < 2$  il rapporto  $\Gamma/\Gamma_{L0}$  sia lontano da 1 (valore desiderato). Al contrario, assumere un rapporto  $l_0/h$  maggiore di 2, è comunemente accettato per ottenere una buona approssimazione della *sharp crack surface*. Infatti si può notare che, specialmente per le *mesh size* minori, oltre l'ascissa uguale a 2 la curva tende a stabilizzarsi al valore di  $\Gamma/\Gamma_{L0}$  unitario; tuttavia si può osservare che all'aumentare di  $h$  il grafico tende a decrescere più rapidamente (si osservi  $h = 0.01$  mm), allontanandosi sempre di più da  $\Gamma/\Gamma_{L0} = 1$  per valori di  $l_0$  crescenti. Infatti, come si vede in figura 3.17, più la lunghezza di scala  $l_0$  è piccola, migliore è la rappresentazione della *sharp crack* (cricca sottile); infatti  $l_0$ , nonostante non corrisponda all'effettiva larghezza della cricca reale, ne determina la zona di influenza (maggiore è  $l_0$ , più estesa sarà la zona con  $\phi > 0$ ). Dunque, anche se la condizione di Mische suggerisce  $l_0/h > 2$ ,

conviene non scegliere valori di questo rapporto troppo elevati al fine di ottenere risultati più accurati, specialmente se si utilizzano mesh piuttosto grossolane ( $h$  grande).



**Figura 3.17** Regularized crack surface con differenti lunghezze di scala:  $l_0 = 0.2$  mm (A),  $l_0 = 0.1$  mm (B),  $l_0 = 0.02$  mm (C),  $l_0 = 0.007$  mm (D) ottenute con *mesh size*  $h = 0.0035$  mm [25].

Riassumendo tutte queste considerazioni si può concludere che:

- Per ottenere buoni risultati sono necessarie mesh con  $h < l_0/2$  e la lunghezza di scala deve essere sufficiente piccola per poter rappresentare una cricca sottile (*sharp crack*);
- La dipendenza dei risultati da  $l_0$  diminuisce quanto più la *mesh size*  $h$  è fine.

Dunque, sebbene il parametro  $l_0$ , necessario per modellare le equazioni del Phase-Field, rappresenti un punto critico per il metodo (perché i risultati dipendono da questo valore che è “artificiale”, ossia

viene inserito dall'utente senza una base fisica o teorica), si riesce a limitarne l'influenza sui risultati utilizzando mesh sufficientemente fini. Inoltre, volendo mantenere  $l_0$  piccola per simulare cricche sottili, è comunque necessario ridurre la *mesh size* per mantenere l'accuratezza dei risultati. Il raffinamento della mesh, se da una parte è positivo perché permette di evitare di condizionare i risultati, dall'altra impone un costo computazionale necessariamente elevato, con annesso un inevitabile aumento dei tempi di calcolo. In ogni caso la zona che necessita di una discretizzazione più fitta è quella in prossimità della cricca, pertanto si possono utilizzare elementi con dimensione variabile in modo da contenere il numero di nodi complessivo (ossia le dimensioni della mesh).

Ora si vuole confermare quanto osservato utilizzando il codice in MATLAB descritto in questo elaborato. Per questo scopo si è discretizzato il modello in figura 3.15 mediante:

- Mesh coarse: 2500 elementi quadrangolari, 2601 nodi, *mesh size* nella zona di cricca pari a 0.02 mm;
- Mesh fine: 13360 elementi quadrangolari, 13608 nodi, *mesh size* nella zona di cricca pari a 0.004 mm.

In questi due casi si è andati a vedere la dipendenza dei risultati dal parametro  $l_0$ , mantenendo costanti l'*energy release rate* a 0.01 N/mm e la *displacement increment* a  $8.0e-7$  mm; si sono ottenuti i grafici riportati nelle figure 3.18 e 3.19.

Si nota come le curve al variare di  $l_0/h$  sono più ravvicinate nel caso di mesh *fine*, e questo conferma il fatto che l'influenza di questo rapporto sui risultati diminuisce se la risoluzione della mesh aumenta. Inoltre, facendo riferimento a figura 3.19, si osserva come per  $l_0/h = 0.5$  (ossia con *mesh size* più grande della lunghezza di scala) non si riesca a determinare la propagazione della cricca e quindi la caduta della reazione vincolare. Infatti, se la lunghezza di scala è minore di  $h$  nella zona di cricca, il metodo non riesce a "vedere" la propagazione della frattura, perché è guidata da una lunghezza di scala troppo piccola per la mesh considerata.

Per queste analisi, dal punto di vista pratico, si è utilizzata una strategia per limitare i tempi di calcolo, che altrimenti per la mesh *fine* sarebbero stati molto lunghi. Si è imposto uno "stop automatico" (mediante il comando *break* in MATLAB), che termina il ciclo *for* degli incrementi dello spostamento nel momento in cui la reazione vincolare in caduta raggiunge il 90% del picco. In questo modo si perdono delle informazioni relative alla propagazione della cricca dopo il raggiungimento

del picco della forza, ma, visto che non era l'obiettivo principale di questa analisi, si è preferito procedere in favore della riduzione del costo computazionale.

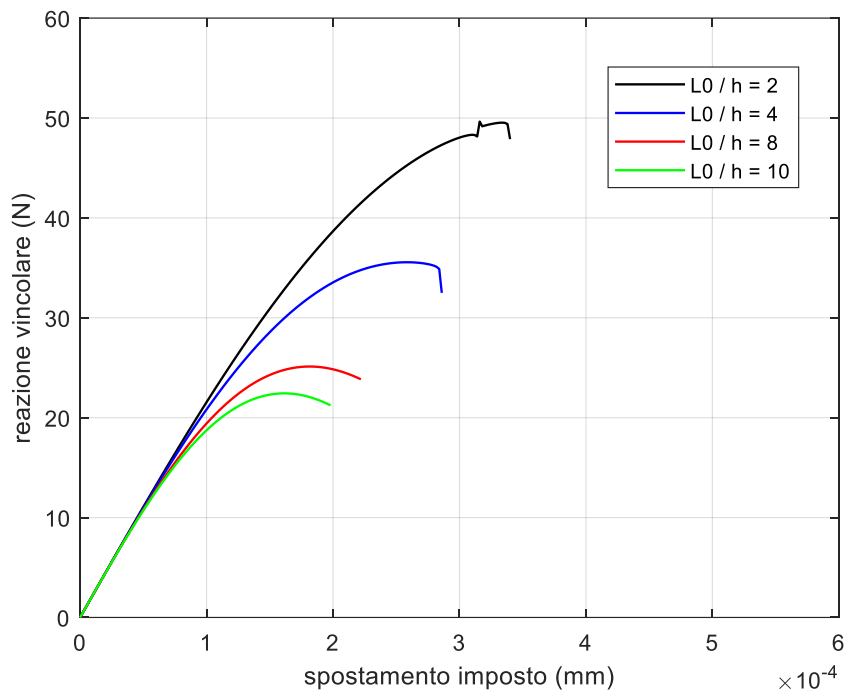


Figura 3.18 Dipendenza dal rapporto  $l_0/h$  per mesh *coarse*.

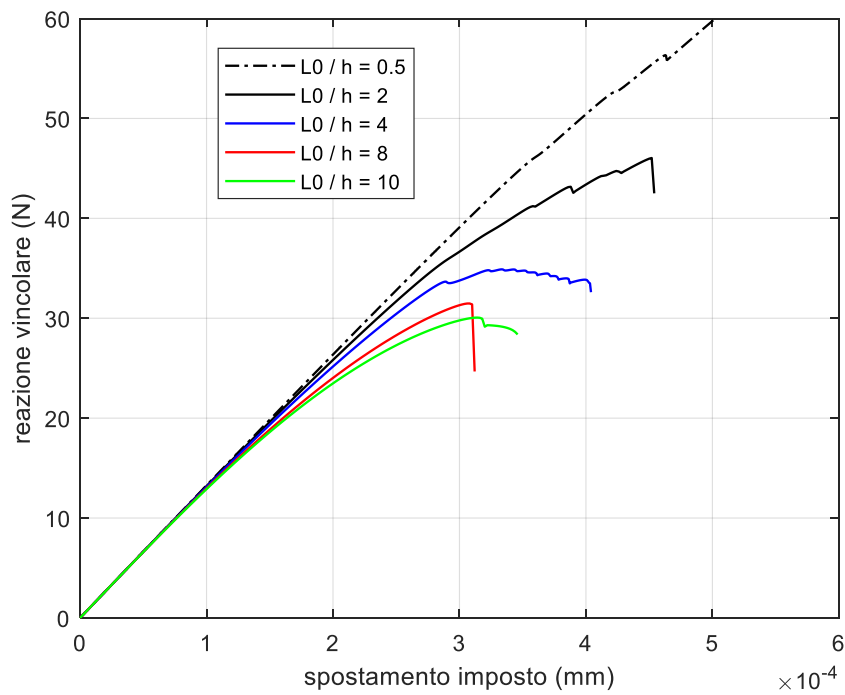
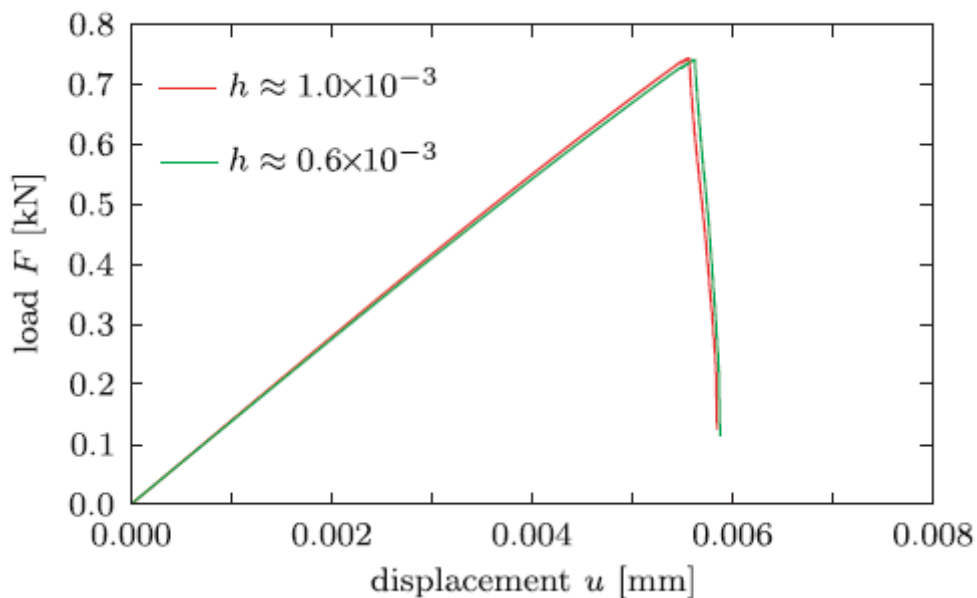


Figura 3.19 Dipendenza dal rapporto  $l_0/h$  per mesh *fine*.

Per quanto riguarda la pendenza delle curve, si nota come sia minore per la mesh *fine*; infatti, aumentando il numero di nodi complessivo, si riduce la rigidità del sistema (tangente della forza rispetto allo spostamento). Questo giustifica anche l'aumento dello spostamento critico, in prossimità del quale si realizza il picco della forza.

Per evidenziare ulteriormente l'effetto positivo del raffinamento della mesh sull'influenza del parametro  $l_0$ , nell'articolo di riferimento si sono utilizzate mesh ancora più dense, che non è stato possibile riprodurre per l'eccessiva richiesta di potenza di calcolo. Dunque si riportano, in figura 3.20, gli andamenti della reazione vincolare ottenuti da Miehe con mesh di 20000 elementi ( $h = 0.001$  mm) e di 30000 elementi ( $h = 0.0006$  mm), fissando  $l_0 = 0.0075$  mm e  $G_c = 2.7$  N/mm.



**Figura 3.20** Grafico forza vs spostamento al variare della *mesh size* a convergenza [25].

Si osserva che, come già si era notato dal grafico 3.16, per dimensioni di mesh molto elevate si tende ad annullare la dipendenza dei risultati dal rapporto  $l_0/h$  e si arriva a convergenza. Questo conferma, come in generale accade in ogni analisi agli elementi finiti, che aumentando il numero di elementi si approssima sempre meglio il sistema fisico reale, fino ad arrivare al valore limite oltre il quale i risultati restano sostanzialmente invariati (convergenza).





## 4. Esempi numerici

In questa sezione si riportano degli esempi numerici ottenuti con il codice MATLAB descritto in questo elaborato, in modo da illustrare le potenzialità del Phase-Field come metodo per risolvere la propagazione delle cricche. A questo scopo, pur utilizzando sempre modelli semplici (piastra 2D), si vogliono presentare dei problemi più complessi, che con altri metodi presenti in letteratura non sarebbero risolvibili molto facilmente. Per semplicità si utilizzano le dimensioni della piastra e le caratteristiche del materiale viste nel capitolo precedente (riferimento [26]), aggiungendo delle modifiche geometriche (fori di forma diversa e inserti rafforzativi) che influenzano il percorso della cricca e complicano il fenomeno della frattura. Dal punto di vista del carico applicato, si è scelto sempre un approccio *displacement control*, applicando lo spostamento in modo perpendicolare alla cricca così da visualizzare il modo I della frattura (quello più critico perché richiede energia minore).

Le discretizzazioni dei modelli considerati si sono impostate in PATRAN, dal quale si è partiti per creare il file input per l'analisi in MATLAB (appendice B). Infatti, tramite questo software per l'analisi agli elementi finiti, è molto più agevole la generazione della mesh, che al contrario in MATLAB richiederebbe molto più tempo. Inoltre ci si è serviti di questo programma per delle analisi di post-processing, confrontando e interfacciando i risultati ottenuti in MATLAB e PARAVIEW con quanto osservato in PATRAN dall'analisi degli stress sulla struttura.

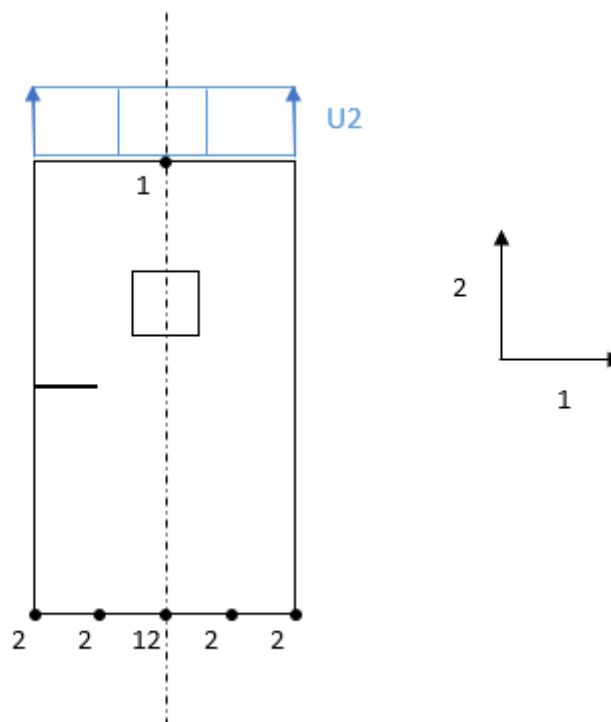
Per i diversi casi trattati si sono considerate mesh sufficientemente fitte per rappresentare la propagazione della cricca, ma che al tempo stesso non portassero a un aumento eccessivo del tempo di calcolo. È opportuno questo compromesso perché, rispetto alla piastra semplice vista nel capitolo precedente, in questi casi il fenomeno della frattura è più complesso e pertanto richiede un *displacement increment* più piccolo per avere risultati accurati (già per questo il costo computazionale delle analisi aumenta). Sempre in accordo con quanto osservato sui fattori di influenza del metodo nel capitolo 3.6, si è fissato il valore di  $l_0 = 3 h$ , cercando di mantenere la *mesh size* il più possibile costante per tutte le analisi, al fine di poter fare un confronto oggettivo dei risultati.

### 4.1 Piastra con foro quadrato

Come primo esempio si considera una piastra con foro quadrato e cricca laterale. Si è scelto questo tipo di sistema sia per vedere l'interazione tra cricca iniziale e foro, sia perché l'utilizzo della piastra

senza cricca laterale aumenta lo spostamento da imporre per l'insorgenza della frattura (quindi il numero di step del metodo e di conseguenza i tempi di calcolo). Tuttavia è importante sapere che il metodo Phase-Field, dal punto di vista della sua implementazione, sarebbe in grado di rappresentare non solo la propagazione delle cricche, ma anche la loro insorgenza (innesco) per un sistema inizialmente intatto; pertanto il fatto di aggiungere una cricca iniziale (in questo caso laterale) si rivela utile per quanto spiegato, ma non sarebbe indispensabile.

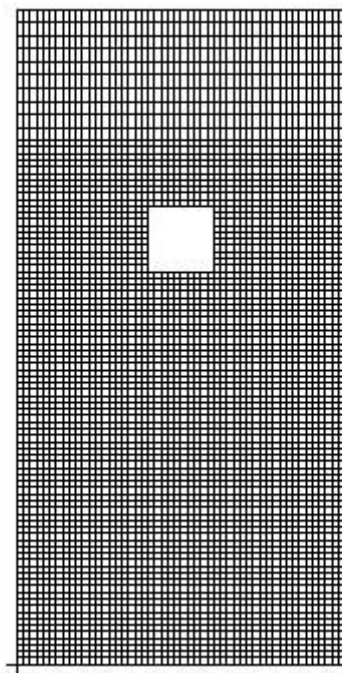
La piastra è posta in trazione mediante lo spostamento imposto  $U_2$ , come rappresentato in figura 4.1. L'estremità inferiore è vincolata lungo l'asse verticale (asse 2), mentre i punti centrali delle due estremità sono vincolati in direzione orizzontale (asse 1), in modo da garantire la simmetria (sia la geometria e sia gli spostamenti applicati sono simmetrici) e al tempo stesso impedire labilità al sistema.



**Figura 4.1** Piastra con foro quadrato, cricca laterale e vincoli applicati.

Al fine di rappresentare la propagazione della cricca in modo corretto, si è scelta una mesh di 4400 elementi quadrangolari e 4560 nodi complessivi, considerata sufficientemente fitta per rappresentare accuratamente i risultati senza inficiare in modo eccessivo sul costo computazionale. In figura 4.2 è riportato il dettaglio della mesh utilizzata, in cui si è scelta una dimensione di elemento

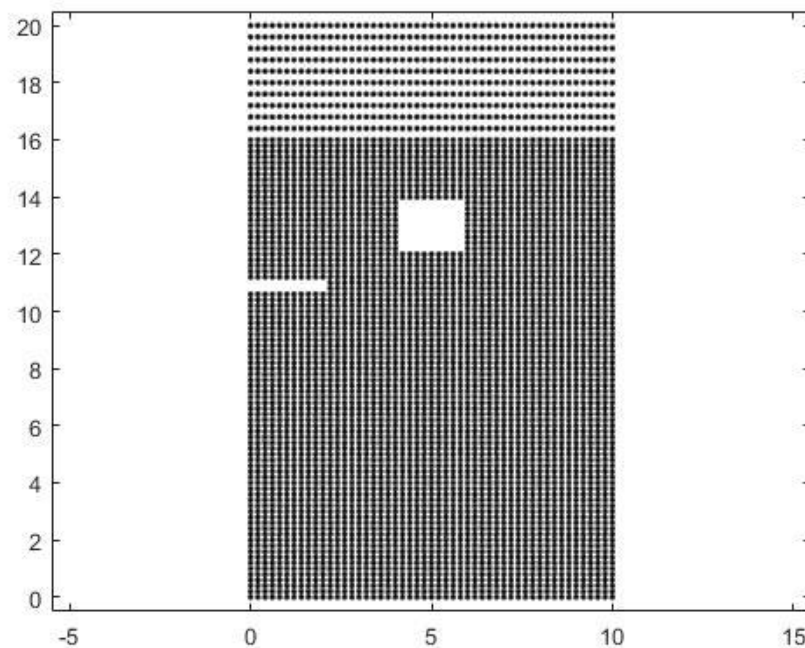
inferiore nella zona in cui ci si aspetta la propagazione; tuttavia questa previsione è più difficile da fare rispetto al caso della piastra semplice trattato nel capitolo precedente, pertanto si è scelto di infittire una porzione consistente della piastra per evitare incertezze. Inoltre in questo modo è stato possibile utilizzare la stessa mesh anche per le successive analisi al variare dell'altezza di cricca, potendo quindi fare un confronto oggettivo dei risultati. Invece, nella parte superiore della piastra, si è deciso di aumentare la dimensione di elemento (si è ritenuto che questa zona non fosse interessata dalla frattura), in modo da ridurre il numero complessivo dei nodi e quindi le dimensioni della matrice di rigidezza del sistema e delle equazioni in gioco.



**Figura 4.2** Mesh utilizzata per la piastra con foro quadrato.

Operativamente si è costruito il modello in PATRAN, utilizzando il mesher *Isomesh* per definire la discretizzazione, visto che la geometria in esame permette in questo modo di generare una mesh molto regolare (superfici semplici in cui è possibile applicare un sistema di coordinate parametriche). Inoltre, come verrà spiegato nel dettaglio in appendice B, è opportuno numerare i nodi in modo consecutivo senza lasciare *offset* (dovuti per esempio all'utilizzo del comando *Equivalence* per unire i nodi coincidenti di due superfici adiacenti), così da facilitare la "lettura" del file input durante l'analisi MATLAB.

Il foro quadrato ha dimensioni 2 mm x 2 mm ed il suo centro è posto ad una altezza di 13 mm, mentre la cricca laterale ha lunghezza di 2 mm e altezza di 11 mm dalla base inferiore. Per visualizzare più chiaramente le misure della geometria e della discretizzazione, si riporta in figura 4.3 il *plot* ottenuto con MATLAB, in cui si sono “eliminati” per facilitare la comprensione, i nodi corrispondenti alla cricca iniziale (in realtà questi nodi sono considerati nelle equazioni e gli è assegnato il valore  $\phi = 1$ ).

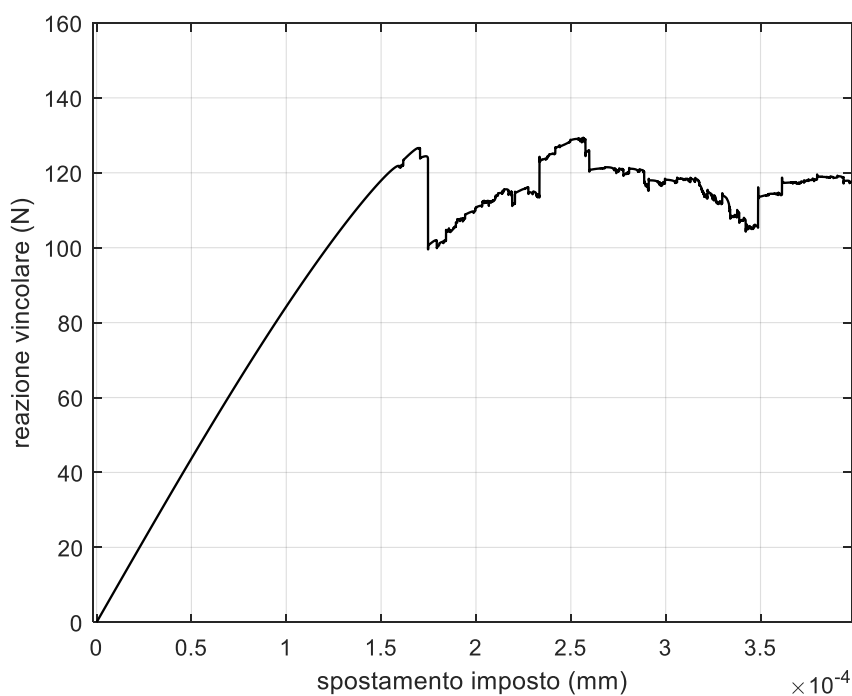


**Figura 4.3** Visualizzazione in MATLAB della discretizzazione della piastra con foro quadrato.

Mantenendo  $E = 20.0e+5 \text{ N/mm}^2$ ,  $\nu = 0.3$  e  $G_c = 0.001 \text{ N/mm}$  come nel capitolo precedente, si è utilizzato un incremento di spostamento costante pari a  $5.0e-8 \text{ mm}$  per 8000 step, arrivando allo spostamento finale di  $4.0e-4 \text{ mm}$ . Con questi valori si è visto che si riesce a ottenere un’ apprezzabile andamento del percorso di cricca; il *displacement increment* è minore rispetto a quello considerato per la piastra semplice in tensione, perché in questo caso il fenomeno della frattura è più complesso e richiede una discretizzazione dello spostamento imposto più fitta.

Questa maggiore complessità si riflette anche nel grafico della reazione vincolare in funzione dello spostamento (figura 4.4), in cui l’andamento della forza è più irregolare rispetto al caso della piastra semplice senza fori. Tuttavia, oltre alle caratteristiche intrinseche del fenomeno, alcuni salti repentini della forza potrebbero anche essere dovuti ai valori considerati di *displacement increment*

e numero massimo di iterazioni di Newton-Raphson; con una discretizzazione spaziale ancora più densa e aumentando il numero di iterazioni del metodo, si potrebbero limitare le irregolarità fittizie, lasciando solamente quelle proprie della frattura per il caso in esame. In questo senso, però, si è sempre proceduto facendo un compromesso tra accuratezza dei risultati e limitazioni legate alla potenza di calcolo, da qui la scelta dei parametri descritti.

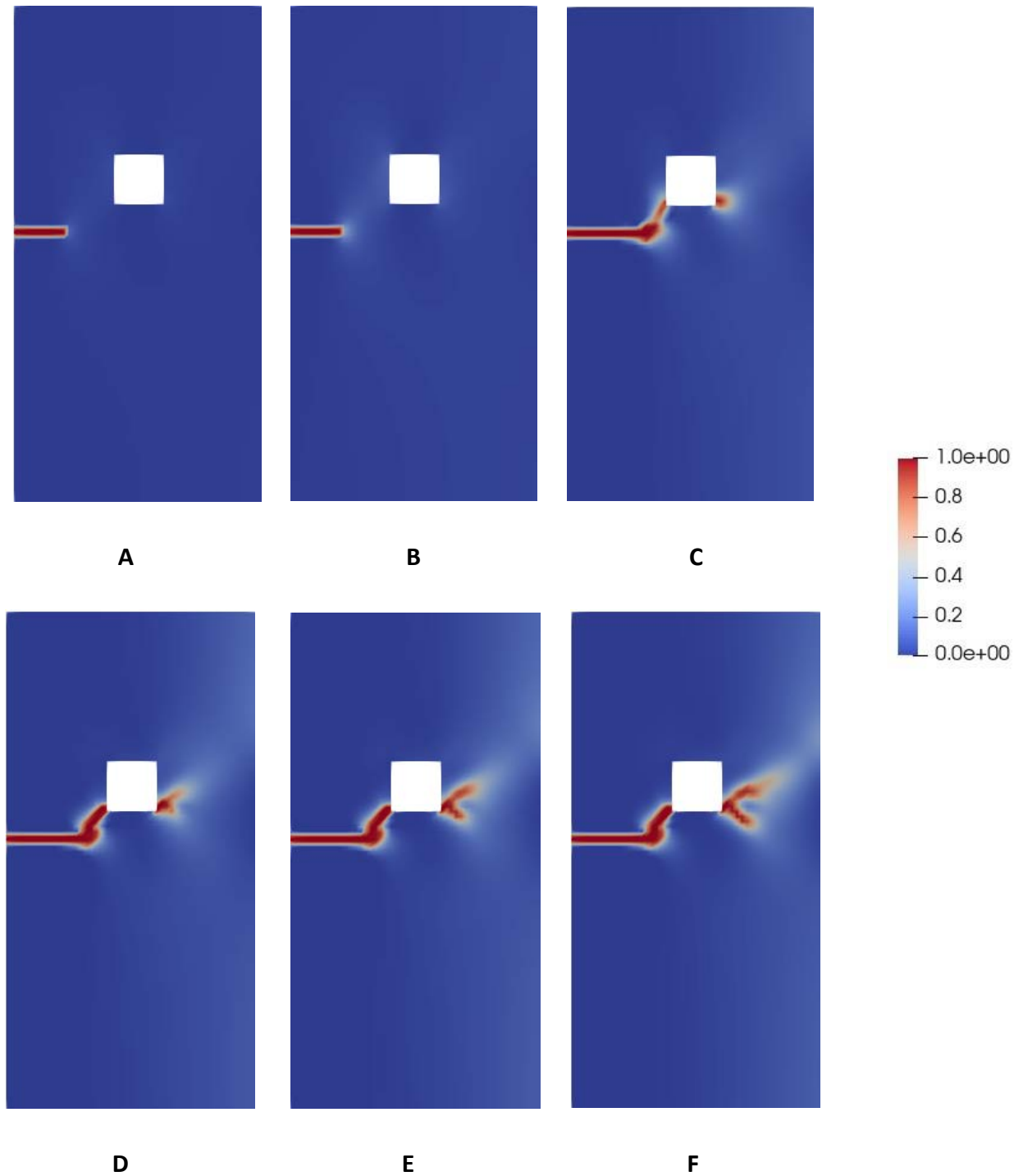


**Figura 4.4** Grafico della reazione vincolare vs spostamento imposto per la piastra con foro quadrato e cricca laterale.

Alcuni aspetti del grafico sono gli stessi visti per il caso della piastra semplice in tensione: l'andamento iniziale della forza è lineare (visto che il regime è lineare-elastico e la frattura non è ancora giunta) e la non linearità si verifica in prossimità del picco (spostamento critico). In questo momento infatti inizia a propagarsi la cricca, la rigidezza del sistema si riduce e, una volta raggiunto il picco, la forza che la piastra può sostenere crolla. Tuttavia l'andamento post-picco è diverso, con la caduta della reazione vincolare che non è più dolce e continua come per la piastra senza foro. In questo caso sono presenti diversi picchi successivi, ognuno corrispondente a una nuova propagazione della cricca.

Nel dettaglio il percorso di cricca al variare dello spostamento imposto è riportato in figura 4.5, in cui è interessante notare la corrispondenza con il grafico della forza. Fino circa a  $1.5 \times 10^{-4}$  mm di spostamento imposto la cricca non propaga e la reazione vincolare cresce linearmente, per  $2.0 \times 10^{-4}$

mm la propagazione è consistente (infatti nel grafico la forza ha subito un brusco crollo), mentre per spostamenti successivi la crescita della cricca è moderata ed effettivamente le variazioni della forza sono meno gravose.



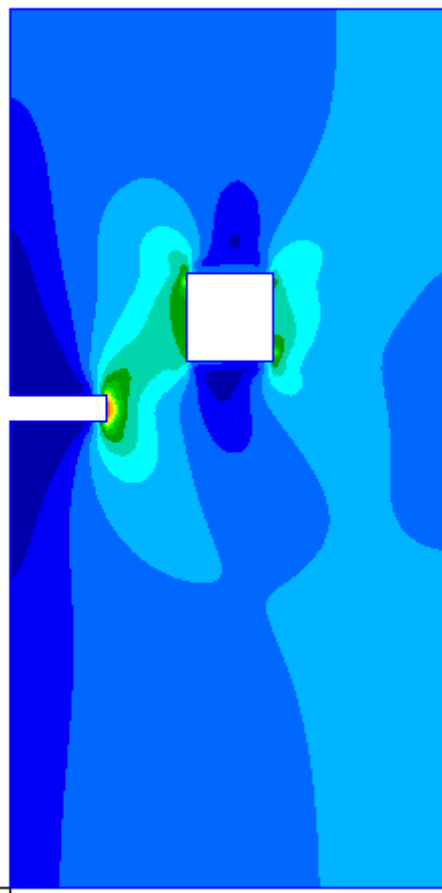
**Figura 4.5** Piastra con foro quadrato e cricca laterale: propagazione della cricca per uno spostamento imposto di (A)  $1.0e-4$  mm, (B)  $1.5e-4$  mm, (C)  $2.0e-4$  mm, (D)  $3.0e-4$  mm, (E)  $3.5e-4$  mm e (F)  $4.0e-4$  mm.

Inoltre dalle figure E e F si nota il fenomeno della biforcazione della cricca (*branching*). Questo aspetto è interessante ed evidenzia uno dei punti di forza del metodo Phase-Field, come sottolineato in [29]; infatti la ramificazione della cricca è un processo molto difficile da simulare con metodi tradizionali come il *virtual crack closure technique* (VCCT) e il *cohesive zone model* (CZM), in cui è necessario prevedere a priori il percorso della cricca e aggiungere al modello degli algoritmi specifici per il *branching*. Al contrario, per il metodo Phase-Field è stato sufficiente fornire in input i parametri del materiale  $E$ ,  $\nu$  e  $G_c$ , senza fornire ulteriori indicazioni. Infatti, assegnando ad ogni nodo la variabile aggiuntiva Phase-Field, è possibile mantenere la continuità (tramite questo campo scalare) anche in presenza della discontinuità dovuta alla cricca, visto che la rappresentazione di quest'ultima avviene proprio grazie alla variabile  $\phi$ . Pertanto la flessibilità nel riprodurre fenomeni diversi è senz'altro una grande potenzialità del metodo Phase-Field, che lo accomuna per certi aspetti alla Peridinamica, un altro metodo recente e innovativo che si serve di un variabile scalare di "danno" per la simulazione della propagazione delle cricche.

A questo punto si è deciso di sfruttare NASTRAN per effettuare l'analisi lineare-elastica per il sistema in esame, così da ottenere la distribuzione degli stress sulla struttura. Lo scopo è quello di determinare i punti più critici (dove la tensione è massima) e capire se è possibile legare i risultati trovati con l'andamento di cricca determinato in MATLAB. In questo senso non si vuole né simulare il fenomeno della frattura in NASTRAN (non è il software adatto per questo tipo di analisi), né trovare dei risultati in termini quantitativi. Infatti l'obiettivo è, applicando alla piastra uno spostamento arbitrario, determinare in modo qualitativo (tramite una scala di colori) le zone di maggiore stress per la struttura, confrontandole con l'andamento della cricca riscontrato. Questo confronto può essere utile dal momento che, come spiegato nella formulazione teorica (capitolo 2), il metodo Phase-Field permette di tracciare il percorso di cricca energeticamente più favorevole (energia potenziale totale minima), ovvero quello a cui corrispondono gli sforzi tensionali più intensi; infatti quando lo stress supera il valore critico (che in questo caso è legato direttamente a  $G_c$ ), si ha propagazione della cricca in quella direzione. Pertanto, alla luce di queste considerazioni, è possibile considerare i risultati in NASTRAN come metodo di conferma e verifica di quanto riscontrato con l'analisi in MATLAB.

Operativamente si è considerato in PATRAN lo stesso modello utilizzato in MATLAB, mantenendo invariati la mesh, i parametri del materiale isotropo (solo  $E$  e  $\nu$  sono necessari visto che non entra in gioco la frattura e quindi  $G_c$ ) e i vincoli applicati. Per non lasciare labilità, visto che la

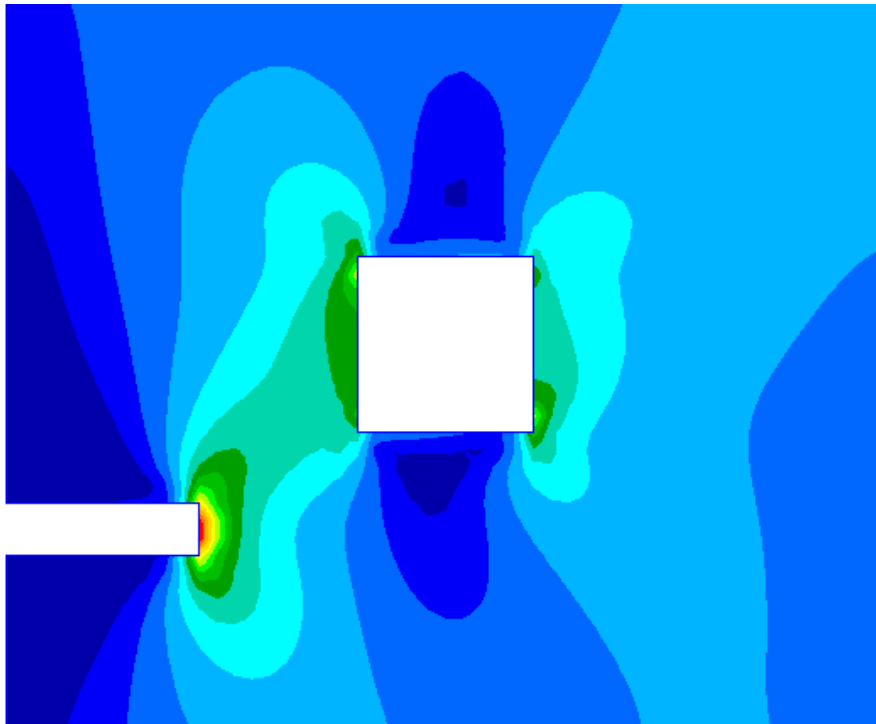
representazione in PATRAN è in 3 dimensioni, si sono vincolati per tutti i nodi del sistema i gradi di libertà rotazionali e quello traslazionale fuori dal piano della piastra (asse 3); questa azione è necessaria perché altrimenti il software restituisce un errore, visto che l'analisi è statica e quindi deve esserci equilibrio delle forze. Gli elementi sono tutti CQUAD4 ed è stata assegnata la proprietà *2D solid* di tipo *plane strain*, in analogia con l'analisi MATLAB. Per rappresentare la piastra comprensiva della cricca iniziale (discontinuità), si sono eliminati dal modello i nodi corrispondenti a  $\phi = 1$ , poiché non contribuiscono alla rigidità effettiva del sistema. In questo modo si fornisce asimmetria al modello, come realmente accade dal momento che la cricca è laterale; pertanto, anche se la geometria è simmetrica, la presenza della cricca iniziale rende la distribuzione degli stress di Von Mises non simmetrica, come si riscontra in figura 4.6. Questa immagine si ottiene nella fase di post-processing in PATRAN mediante il comando *quick plot*, in cui l'intensità delle tensioni è rappresentata da una scala di colori che va dal blu (stress minore) al rosso (stress maggiore). Come detto in precedenza, per gli scopi di questa analisi non è significativo riportare i valori specifici degli stress, dal momento che i risultati hanno solo valore qualitativo.



**Figura 4.6** Distribuzione degli stress di Von Mises per la piastra con foro quadrato e cricca laterale.



La distribuzione dei colori mostra come gli stress di maggiore intensità siano presenti a valle della cricca laterale e in prossimità del foro. In particolare, dallo zoom proposto in figura 4.7, si nota come i colori suggeriscano il percorso che la cricca tenderà a intraprendere. Infatti è evidente la corrispondenza con l'andamento della propagazione (figura 4.5), che evolve dalla cricca laterale verso la parte sinistra del foro quadrato. Anche la parte successiva della propagazione (per spostamenti più elevati) mostra una buona somiglianza tra le elaborazioni in PARAVIEW e il *quick plot* in PATRAN; infatti il percorso di cricca si propaga a partire dal vertice in basso a destra del foro, dove gli stress sono più intensi (colore verde), per poi ramificarsi in due direzioni principali, come si può intuire dall'andamento del colore azzurro chiaro.



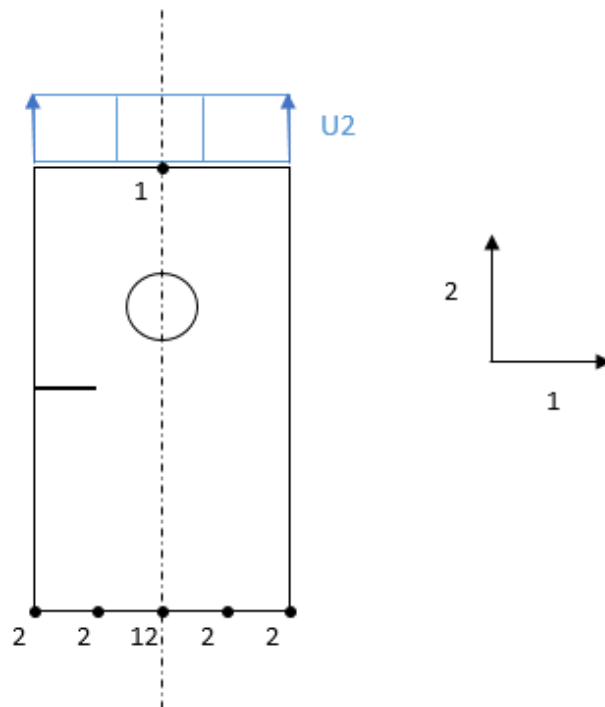
**Figura 4.7** Dettaglio della distribuzione degli stress di Von Mises per piastra con foro quadrato.

Come ultima nota è bene sottolineare che le analisi in PATRAN sono utili come termine di paragone, ma non rappresentano una certezza assoluta e non possono sostituire le analisi svolte con gli algoritmi di simulazione in MATLAB. Anche perché, con questa analisi lineare-statica, si è fatta una sorta di “fotografia istantanea” della distribuzione degli stress con cricca iniziale, senza considerare l'andamento al variare dello spostamento imposto. In un problema quasi-statico, andrebbero svolte queste analisi in ogni istante, e l'andamento complessivo delle tensioni potrebbe non sempre

corrispondere a quanto visto dalla distribuzione all'istante iniziale (perché la cricca cresce e quindi gli stress cambiano continuamente). In conclusione, l'analisi così eseguita in PATRAN è comoda, semplice e può fornire delle conferme interessanti, ma è necessario mantenere sempre la dovuta prudenza nell'interpretazione dei risultati.

## 4.2 Piastra con foro circolare

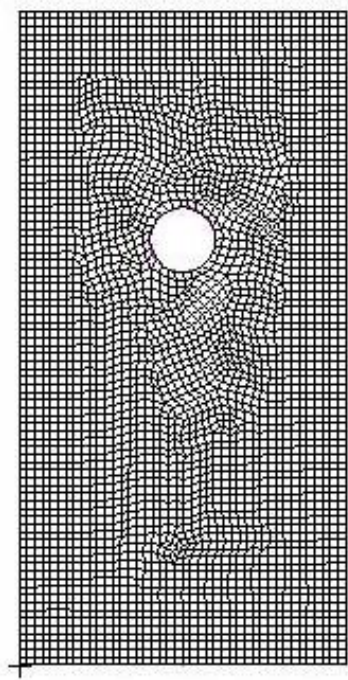
Si considera una piastra con foro circolare e cricca laterale (figura 4.8), con dimensioni sempre 10 mm x 20 mm e vincoli applicati come nel caso precedente. Al fine di poter fare un confronto con la piastra con foro quadrato, si sono utilizzati gli stessi parametri del materiale ( $E$ ,  $\nu$  e  $G_c$ ) e la stessa lunghezza e altezza di cricca iniziale, rispettivamente pari a 2 mm e 11 mm. Inoltre il centro del foro rimane invariato (altezza pari a 13 mm) e si considera un diametro di 2 mm, pari al lato del foro quadrato.



**Figura 4.8** Piastra con foro circolare, cricca laterale e vincoli applicati.

Come discretizzazione, riportata in figura 4.9, si è considerata una mesh di 3651 nodi e 3511 elementi quadrangolari (dimensione media simile a quella della piastra con foro quadrato). In

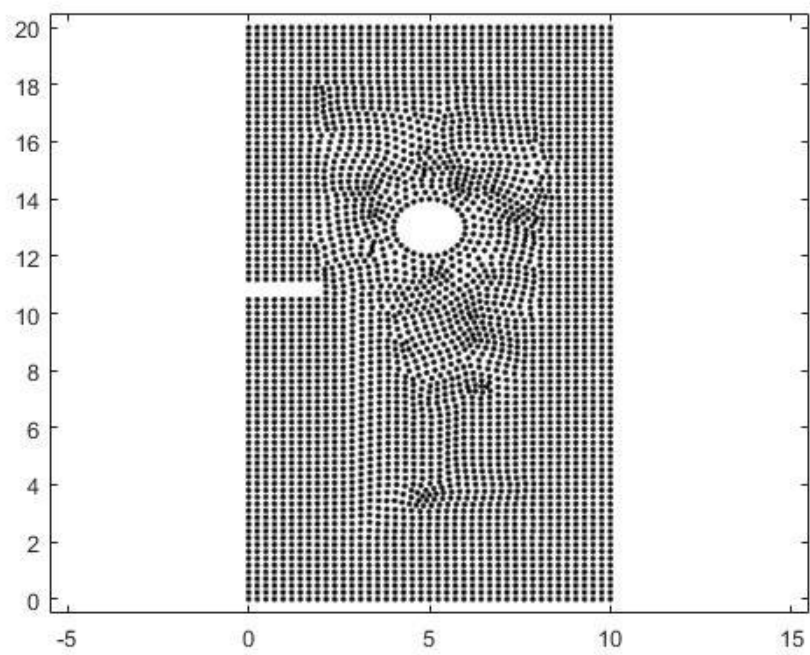
PATRAN si è generata la mesh tramite il mesher *Paver*, scelta necessaria dal momento che la geometria in esame non è una superficie parametrica (quindi non è possibile utilizzare *Isomesh*, che avrebbe permesso una mesh più regolare). Inoltre con *Paver*, che è il mesher più flessibile di tutti, è possibile forzare la presenza di soli elementi quadrangolari (CQUAD4); questo è utile dal momento che il codice di questo elaborato è basato su elementi a 4 nodi, pertanto se ci dovessero essere anche elementi triangolari bisognerebbe modificare parzialmente il codice MATLAB.



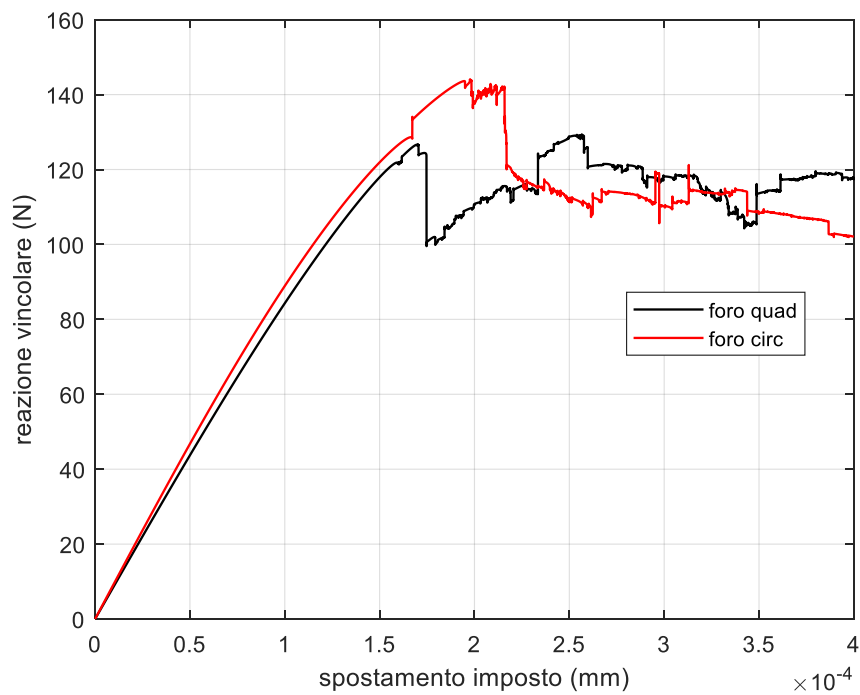
**Figura 4.9** Mesh utilizzata per la piastra con foro circolare.

Al fine di visualizzare meglio le dimensioni e le discretizzazioni considerate, si è rappresentato in figura 4.10 il *plot* MATLAB della mesh, in cui si sono nascosti i nodi relativi alla cricca iniziale ( $\phi = 1$ ).

Per quanto riguarda lo spostamento imposto, si è sempre adottato un incremento costante pari a  $5.0e-8$  mm per 8000 step, analogamente a quanto visto per il caso precedente. Per ogni step si è andati a calcolare la risultante delle reazioni vincolari lungo l'asse 2 nei nodi della piastra inferiore, in modo da ottenere il grafico della forza in funzione dello spostamento (figura 4.11). In particolare la figura mostra il confronto tra l'andamento per la piastra con foro circolare e quella con foro quadrato.



**Figura 4.10** Visualizzazione in MATLAB della discretizzazione della piastra con foro circolare.

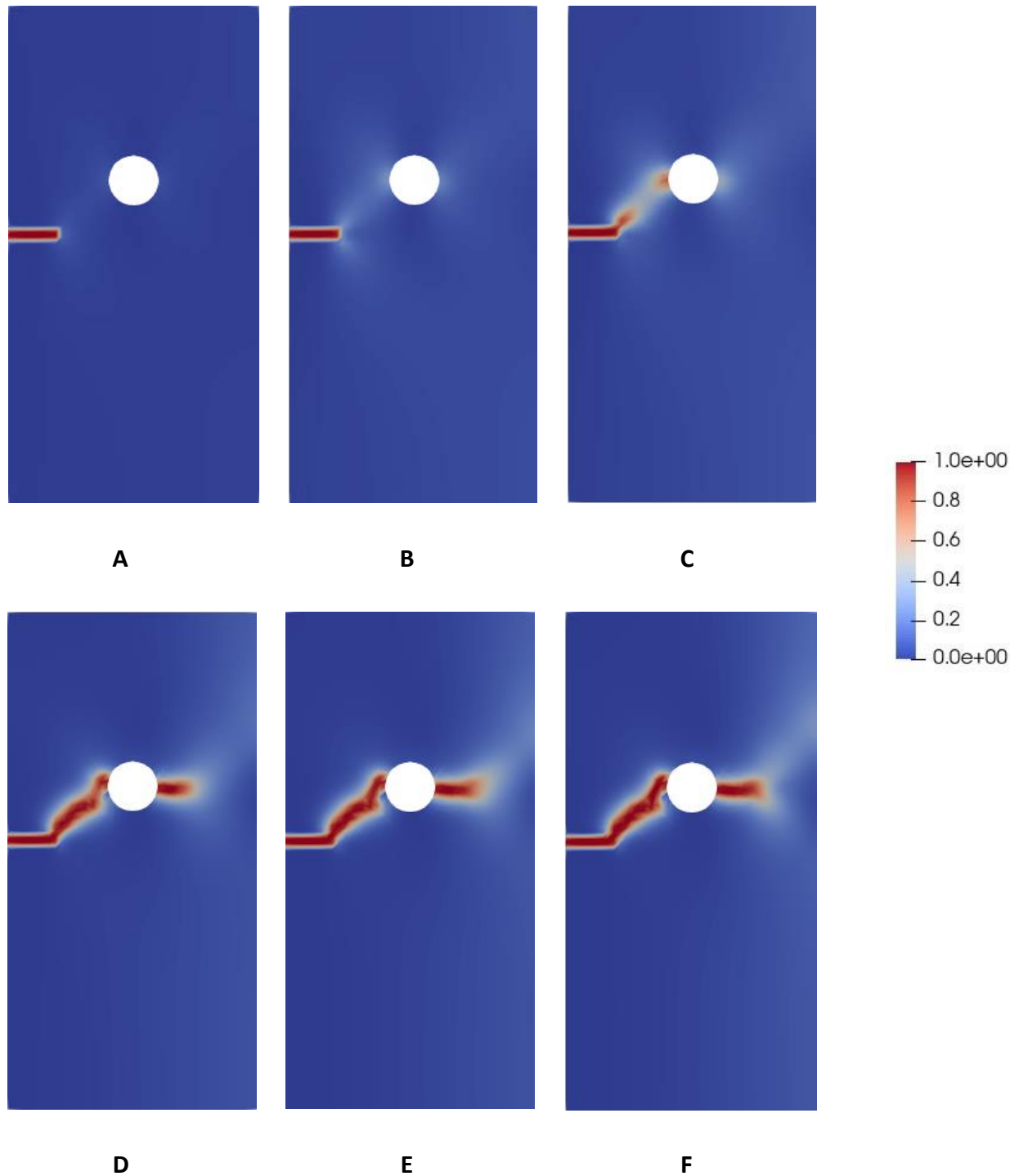


**Figura 4.11** Confronto tra piastra con foro quadrato e piastra con foro circolare.

Si può notare che la piastra con foro circolare presenta una pendenza maggiore nella fase lineare (quindi maggiore rigidità del sistema) e ha valori più elevati sia di spostamento critico sia di reazione vincolare massima. Tuttavia queste differenze sono contenute (variazione del picco della forza inferiore al 10%) poiché la tensione sulla piastra è applicata solo in senso verticale, quindi è limitato l'effetto critico dei vertici del foro quadrato. Se invece si considerasse un carico di tensione lungo i tre lati non vincolati della piastra, si otterrebbe una differenza nei risultati molto più consistente. Infatti entrerebbero di più in gioco i vertici del foro quadrato, che rispetto alla curvatura del foro circolare comportano una concentrazione dello stress molto maggiore, e quindi la frattura sopraggiunge prima (per carichi meno elevati); come visto nel primo capitolo, è più critico il fenomeno della frattura (in corrispondenza di un difetto, una cricca o un foro) quanto minore è il raggio di curvatura, pertanto i vertici del foro quadrato (raggio di curvatura nullo) sono i punti più pericolosi per la propagazione (o insorgenza) delle cricche. Invece per il foro circolare lo stress viene distribuito uniformemente su tutta la circonferenza, senza concentrazioni di tensione in punti specifici. Queste considerazioni stanno alla base, per esempio, della progettazione degli oblò degli aerei, che sono appunto di forma circolare per ritardare l'insorgenza della frattura, dovuta al fenomeno della fatica per la continua sollecitazione dei carichi esterni (pressione atmosferica variabile e tensioni aerodinamiche sulla fusoliera).

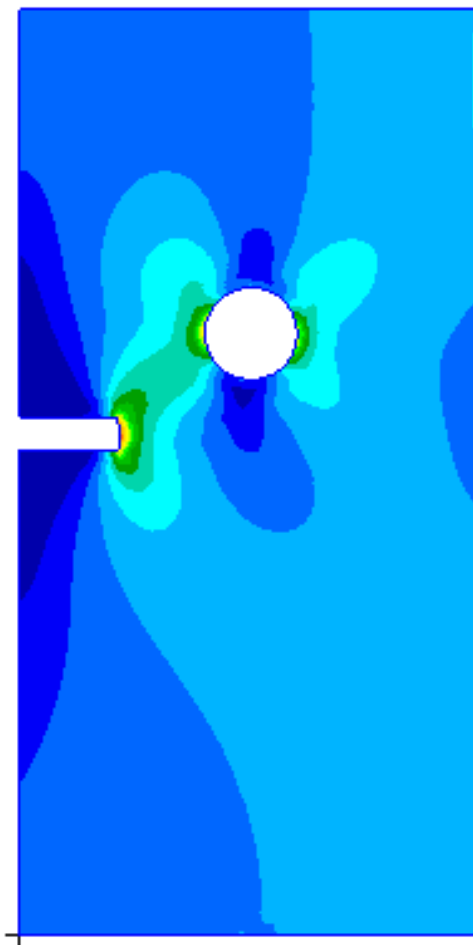
Come per la piastra con foro quadrato, anche in questo caso si può osservare che l'andamento della forza è più irregolare rispetto al caso di piastra rettangolare non forata; questo è conseguenza del fenomeno stesso della frattura, che è più complesso per la presenza del foro, che tende ad attirare la propagazione della cricca laterale. Infine, per entrambe le curve, si nota una brusca caduta della forza in prossimità del picco (circa  $2.0e-4$  mm per il foro circolare), oltre il quale si ha propagazione della cricca, e un successivo assestamento della reazione vincolare, in cui diminuisce l'intensità della variazione. Questo andamento è confermato dalle elaborazioni in PARAVIEW del percorso di cricca al variare dello spostamento applicato, come rappresentato in figura 4.12; infatti dalle figure D, E e F si nota che la propagazione è circa stazionaria rispetto allo spostamento imposto.

Inoltre, anche per la piastra con foro circolare e altezza di 11 mm, si trova che la propagazione della cricca laterale confluisce nel foro, seppur in corrispondenza di un valore di spostamento maggiore rispetto al caso della piastra con foro quadrato.



**Figura 4.12** Piastra con foro circolare e cricca laterale: propagazione della cricca per uno spostamento imposto di (A)  $1.0e-4$  mm, (B)  $2.0e-4$  mm, (C)  $2.5e-4$  mm, (D)  $3.0e-4$  mm, (E)  $3.5e-4$  mm e (F)  $4.0e-4$  mm.

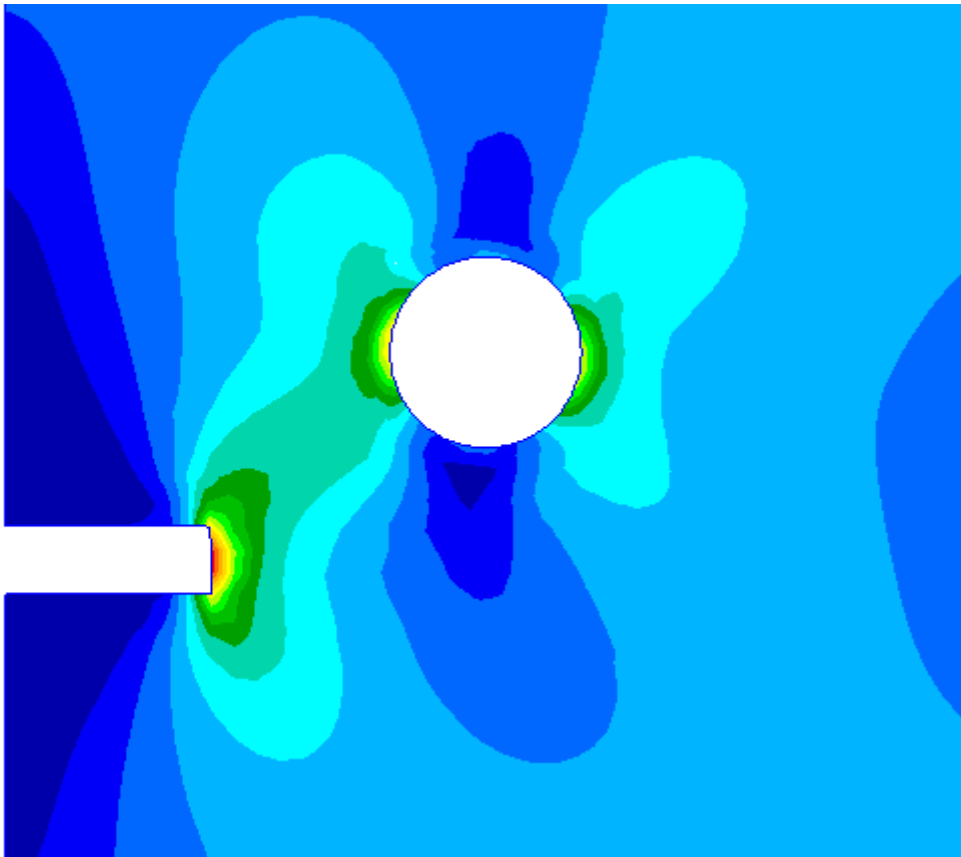
In ultima analisi, si è deciso di rapportare il percorso di cricca appena trovato con la distribuzione iniziale degli stress sulla struttura (in cui si sono eliminati i nodi corrispondenti alla cricca iniziale), determinata mediante un'analisi lineare-elastica in NASTRAN. Una volta applicato uno spostamento arbitrario all'estremità superiore della piastra (tanto non si cercano risultati in termini quantitativi, ma qualitativi) ed effettuata l'analisi utilizzando la stessa mesh considerata in MATLAB, è possibile elaborare i risultati in PATRAN per il post-processing. In quest'ultima fase si è impostato un *quick plot* degli stress di Von Mises sulla struttura, ottenendo la distribuzione in figura 4.13.



**Figura 4.13** Distribuzione degli stress di Von Mises per la piastra con foro circolare e cricca laterale.

In particolare, dal dettaglio della zona di frattura (figura 4.14), si osservano i punti più critici per la propagazione della cricca, nei quali l'intensità dello stress è più elevata. La zona adiacente alla cricca laterale, in cui la tensione è maggiore (colore rosso), è proprio quella che interessa per prima il fenomeno della frattura. Successivamente la propagazione della cricca prosegue verso la parte

sinistra del foro e riprende il suo percorso dal lato di destra. Inoltre, come si vede dalle immagini in PARAVIEW, la cricca non propaga nelle zone sopra e sotto il foro circolare; comportamento giustificato dalla distribuzione degli stress in PATRAN, che mostra come in quelle porzioni della piastra la tensione sia relativamente bassa (colore blu) e quindi non favorevole alla frattura.



**Figura 4.14** Dettaglio della distribuzione degli stress di Von Mises per piastra con foro circolare.

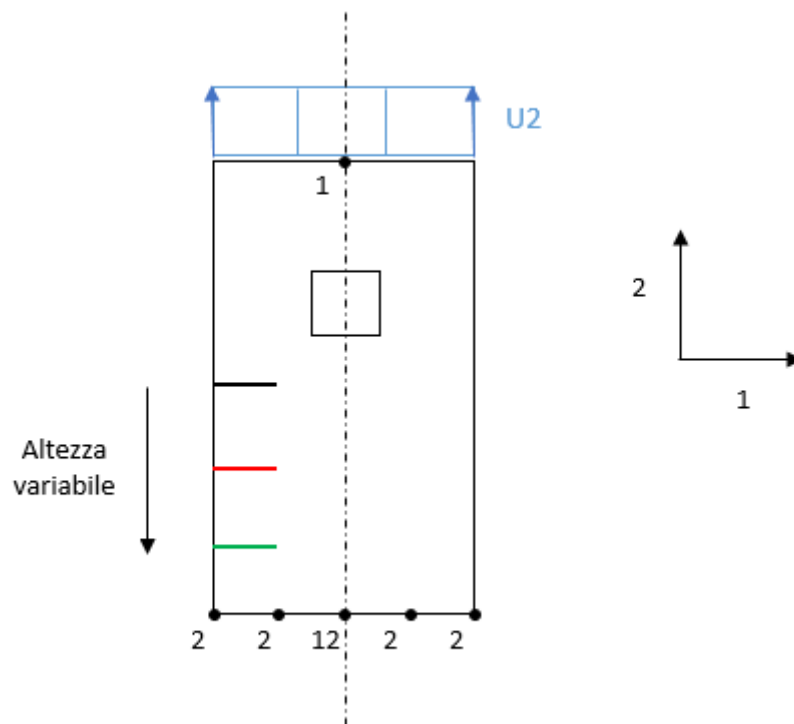
### 4.3 Piastra forata con altezza di cricca variabile

In questa sezione si vuole determinare l'influenza del foro al variare dell'altezza della cricca. Si considera la piastra con foro quadrato descritta nel capitolo 4.1, in cui si è andati a cambiare l'altezza della cricca laterale (figura 4.15), che per semplicità verrà chiamata  $y$ . Sempre nella logica di poter fare un confronto oggettivo, si sono mantenuti costanti tutti i parametri a eccezione di  $y$ , ovvero:

- Dimensioni della mesh: 4400 elementi quadrangolari e 4560 nodi (figura 4.2);
- $E = 20.0e+5 \text{ N/mm}^2$ ;
- $\nu = 0.3$ ;



- $G_c = 0.001 \text{ N/mm}$ ;
- Lunghezza di cricca  $a = 2 \text{ mm}$ ;
- Incremento di spostamento di  $5.0e-8 \text{ mm}$  per 8000 step;
- Numero massimo di iterazioni di Newton-Raphson = 4;
- Tolleranza per la convergenza =  $1.0e-5 \text{ N}$ .



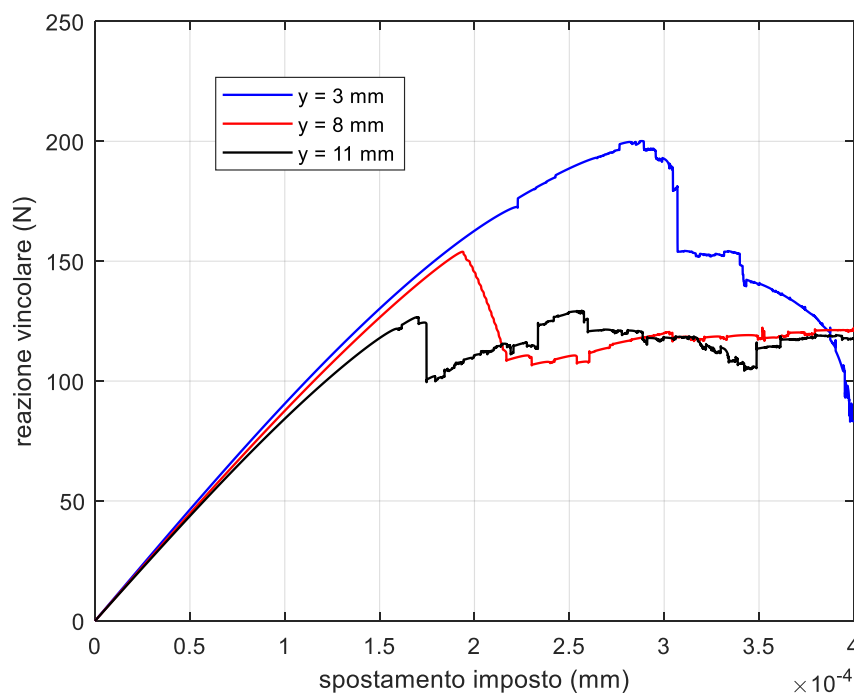
**Figura 4.15** Piastra con foro quadrato e cricca laterale di altezza variabile.

Invece per quanto riguarda le altezze di cricca, si sono considerati i valori:

- $y = 11 \text{ mm}$  (trattato nella sezione 4.1);
- $y = 8 \text{ mm}$ ;
- $y = 3 \text{ mm}$ .

Andando a calcolare la reazione vincolare come somma del contributo verticale (asse 2) di tutti i nodi dell'estremità inferiore della piastra (si considera il valore assoluto), si ottiene il grafico in funzione dello spostamento riportato in figura 4.16. Il confronto mostra, come da aspettativa, che la condizione più critica per la piastra è quando la cricca laterale è più vicina al foro ( $y = 11 \text{ mm}$ );

infatti, in questo caso, è minore il picco della reazione vincolare e anche lo spostamento critico oltre il quale la cricca inizia a propagarsi. Al contrario, il caso con cricca laterale a  $y = 3 \text{ mm}$  è quello in cui la propagazione della cricca è maggiormente ritardata, ossia si realizza per spostamenti maggiori. Tuttavia all'aumentare dello spostamento imposto i valori della forza tendono a uniformarsi (nel range di spostamento considerato); in effetti è proprio la cricca ad altezza minore che presenta la caduta di forza (seppur ritardata) più intensa, probabilmente dovuta al fatto che, essendo più vicina alla base, interferisce maggiormente con l'effetto di reazione compiuto dai vincoli.



**Figura 4.16** Confronto tra piastra con foro quadrato e cricca laterale di diversa altezza  $y$ .

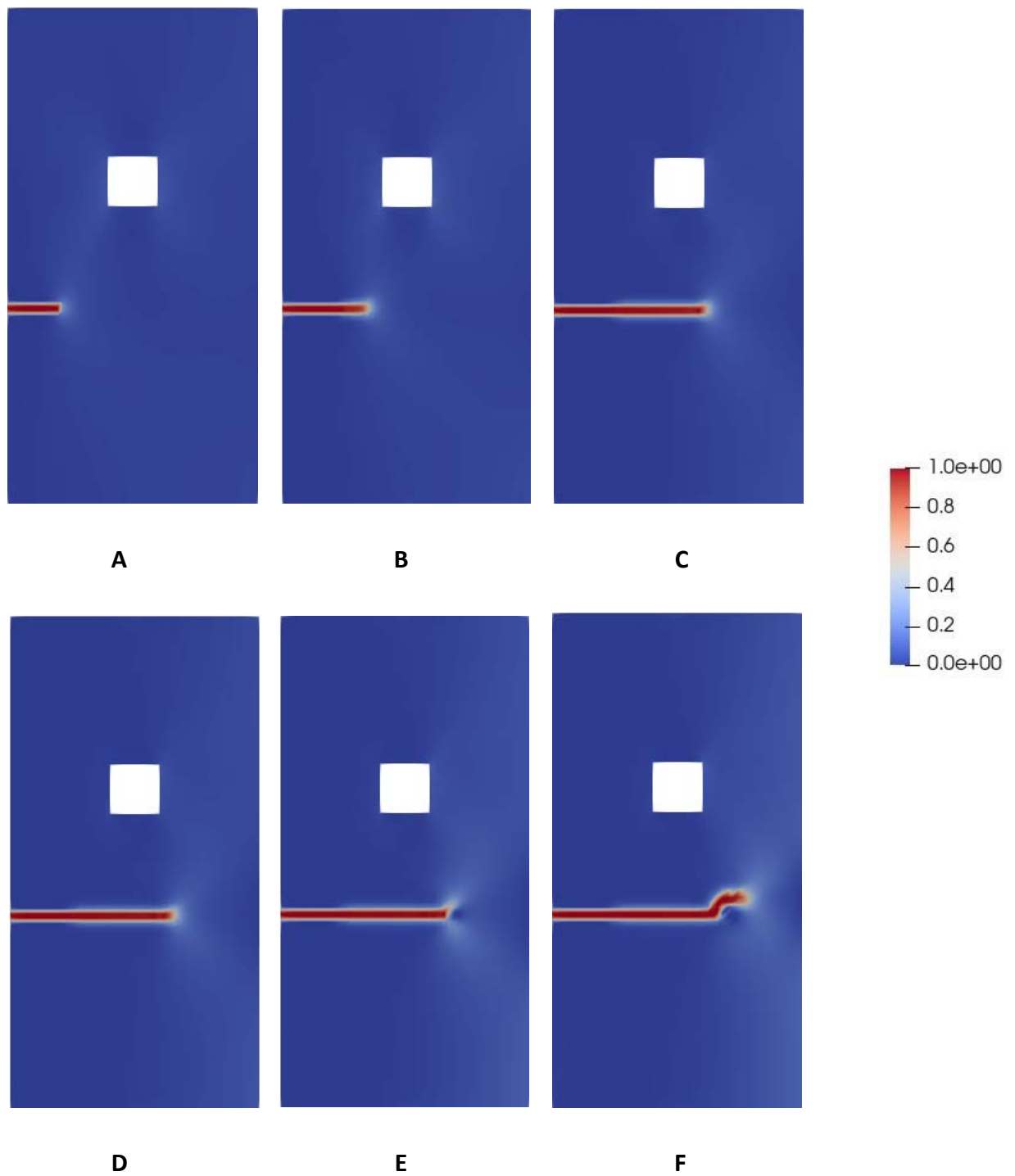
Dal punto di vista della rigidità del sistema (pendenza della curva), nel tratto lineare iniziale è maggiore per il caso con cricca più lontana dal foro, il che si riflette poi in una condizione meno critica per la propagazione della frattura. Da queste considerazioni si deduce che le fessurazioni sono tanto più pericolose quanto più sono vicine al foro, perché è in prossimità di queste zone che si verificano gli stress più intensi per la struttura.

Per visualizzare invece il percorso di cricca, e quindi capire la diversa entità dell'attrazione verso il foro, si riportano le elaborazioni in PARAVIEW per il caso  $y = 8 \text{ mm}$  e  $y = 3 \text{ mm}$ , rispettivamente in

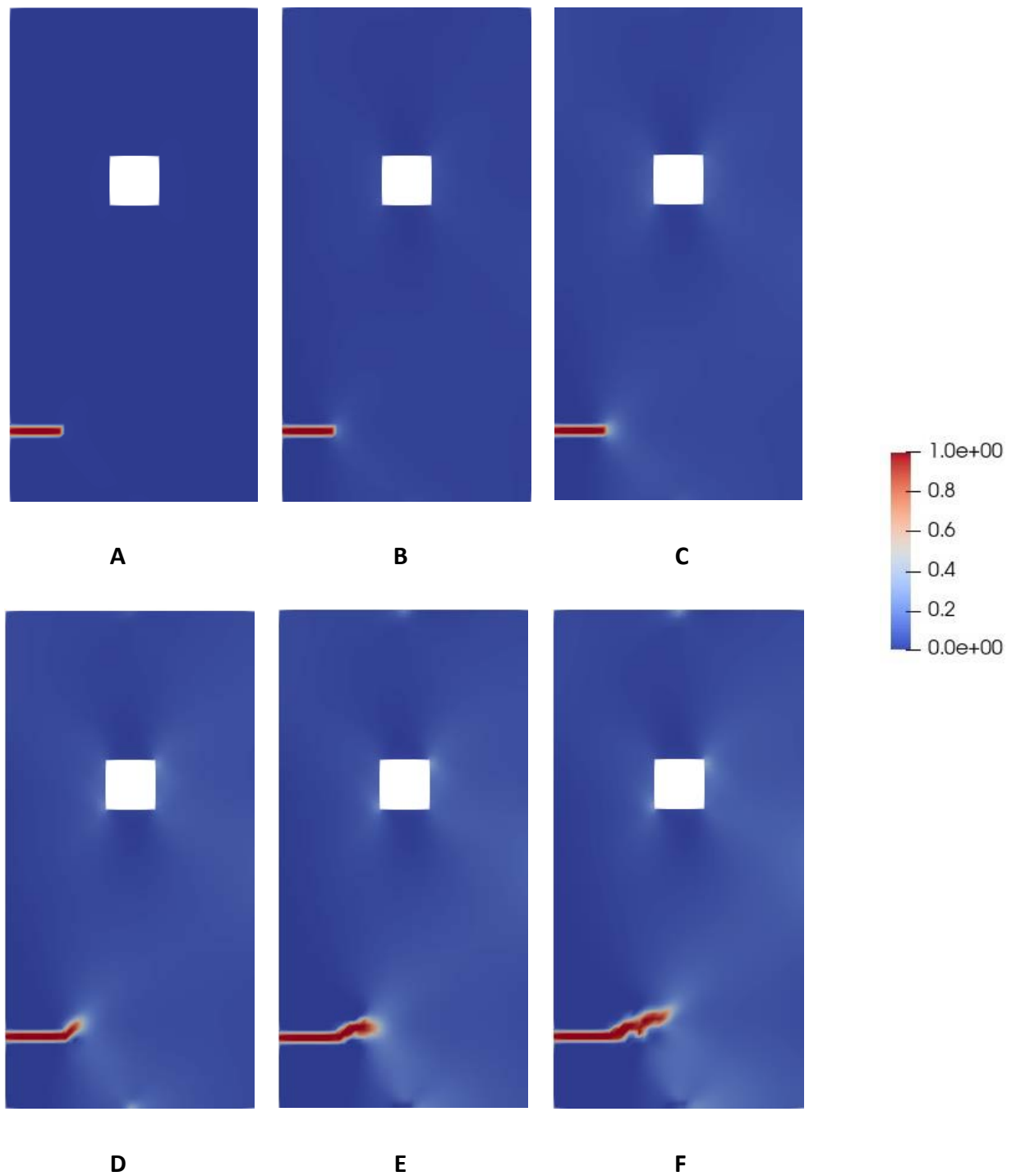
figura 4.17 e 4.18. Invece per quanto riguarda la cricca di altezza  $y = 11$  mm, si rimanda a figura 4.5. Mentre nel caso in cui la cricca ha altezza 11 mm il foro incide notevolmente sul percorso della propagazione (visto che la cricca confluisce proprio nelle zone di massimo stress intorno a esso), negli altri casi l'effetto di "attrazione" del foro è minore. Infatti la cricca è più distante, pertanto la concentrazione di tensione agli angoli del foro quadrato, seppur alta, non è abbastanza intensa da determinare il percorso della cricca. Per esempio, per il caso di  $y = 8$  mm, si vede che il percorso è influenzato solo in parte dal foro (figure E e F), mentre per spostamenti imposti di minore entità la cricca prosegue orizzontalmente senza subire l'attrazione del foro.

In particolare dalle figure D, E e F per il caso  $y = 3$  mm, si osserva come le zone ai vertici del foro si schiariscano, a significare che in quei nodi il valore del Phase-Field sta aumentando. Questo conferma come i vertici del foro siano comunque caratterizzati da grande concentrazione di stress, ma al tempo stesso gli spostamenti imposti siano ancora troppo ridotti per poter innescare la propagazione (avviene quando  $\phi = 1$ ). Incrementando lo spostamento applicato anche le zone limitrofe al foro sarebbero interessate dalla frattura, solo che per motivi di confronto si è preferito mantenere costante lo spostamento finale del sistema per tutte le analisi. Inoltre, dal punto di vista pratico, molto spesso si vuole evitare proprio che la propagazione cominci, quindi è più significativa l'evoluzione della frattura che si realizza a spostamenti minori.

Come anche notato dal grafico forza vs spostamento, si vede come il caso con cricca più lontana dal foro ( $y = 3$  mm) sia quello in cui la propagazione comincia più lentamente, per uno spostamento di circa  $2.75e-4$  mm. In generale, come in tutti i casi precedentemente trattati, è significativa la corrispondenza tra propagazione della cricca e caduta della forza, il che conferma la grande importanza che assume questo grafico nell'ambito della meccanica della frattura.



**Figura 4.17** Propagazione della cricca di altezza  $y = 8$  mm per uno spostamento imposto di (A)  $1.5 \cdot 10^{-4}$  mm, (B)  $2.0 \cdot 10^{-4}$  mm, (C)  $2.5 \cdot 10^{-4}$  mm, (D)  $3.0 \cdot 10^{-4}$  mm, (E)  $3.5 \cdot 10^{-4}$  mm e (F)  $4.0 \cdot 10^{-4}$  mm.

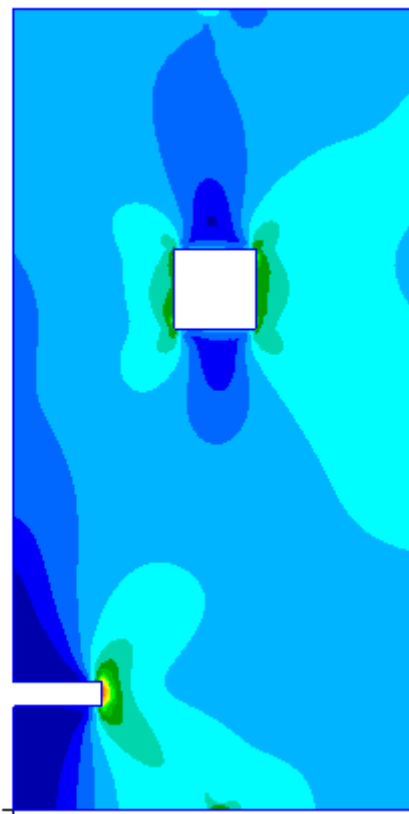


**Figura 4.18** Propagazione della cricca di altezza  $y = 3$  mm per uno spostamento imposto di (A)  $1.5 \cdot 10^{-4}$  mm, (B)  $2.0 \cdot 10^{-4}$  mm, (C)  $2.5 \cdot 10^{-4}$  mm, (D)  $3.0 \cdot 10^{-4}$  mm, (E)  $3.5 \cdot 10^{-4}$  mm e (F)  $4.0 \cdot 10^{-4}$  mm.

Infine, a titolo di esempio, si riporta per il caso  $y = 3$  mm anche l'analisi in NASTRAN relativa alla distribuzione degli stress, in modo da confermare l'andamento della cricca che tende a non confluire nel foro quadrato.

Il *quick plot* delle tensioni di Von Mises sulla struttura (figura 4.19) è in buon accordo con il percorso di cricca riscontrato. Infatti si può notare come la zona di maggiore stress sia in prossimità della cricca laterale (colore rosso), che è proprio quella che interessa per prima il fenomeno della frattura. Anche gli elementi intorno al foro presentano stress elevato (colore verde), ma questo non è sufficiente ad interessare la propagazione della cricca per i valori di spostamento considerati. Mentre per il caso  $y = 11$  mm era presente un corridoio che collegava la cricca laterale al foro in cui lo stress aveva intensità molto elevata, in questo caso l'interazione tra i due elementi è limitata a causa della distanza che li separa. Questo giustifica il fatto che la cricca non sia sufficientemente attirata dal foro da confluirci dentro, come effettivamente si è visto dall'analisi in MATLAB.

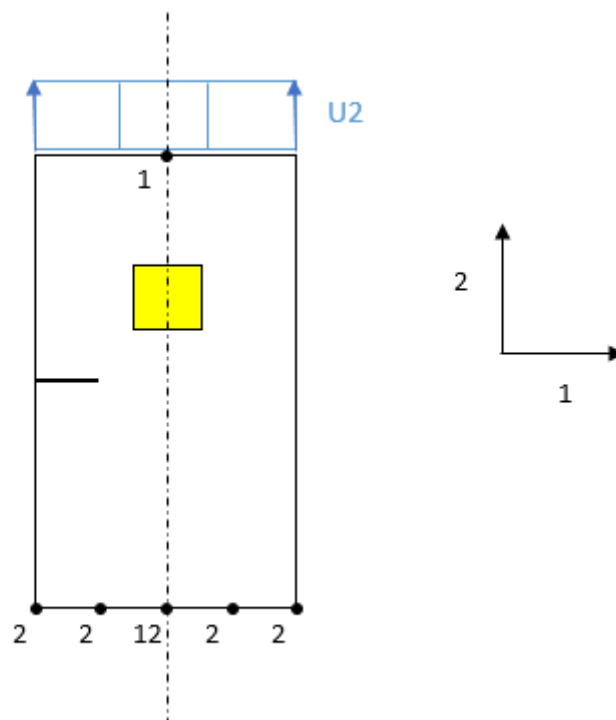
Inoltre è interessante notare le analogie tra gli schiarimenti di colore nelle immagini di PARAVIEW ( $\phi$  aumenta) e la distribuzione degli stress in PATRAN. In questo senso si può osservare un principio di biforcazione in prossimità della cricca laterale (che si compierà per spostamenti più elevati), come anche un aumento di tensione nel punto centrale dell'estremità superiore della piastra, dove è presente il vincolo di simmetria. Quindi anche in questo caso l'analisi in NASTRAN si è rivelata uno strumento utile per la conferma dei risultati trovati con il metodo Phase-Field.



**Figura 4.19** Distribuzione degli stress di Von Mises per la piastra con foro quadrato e cricca laterale di altezza  $y = 3$  mm.

## 4.4 Piastra con inserto rafforzativo

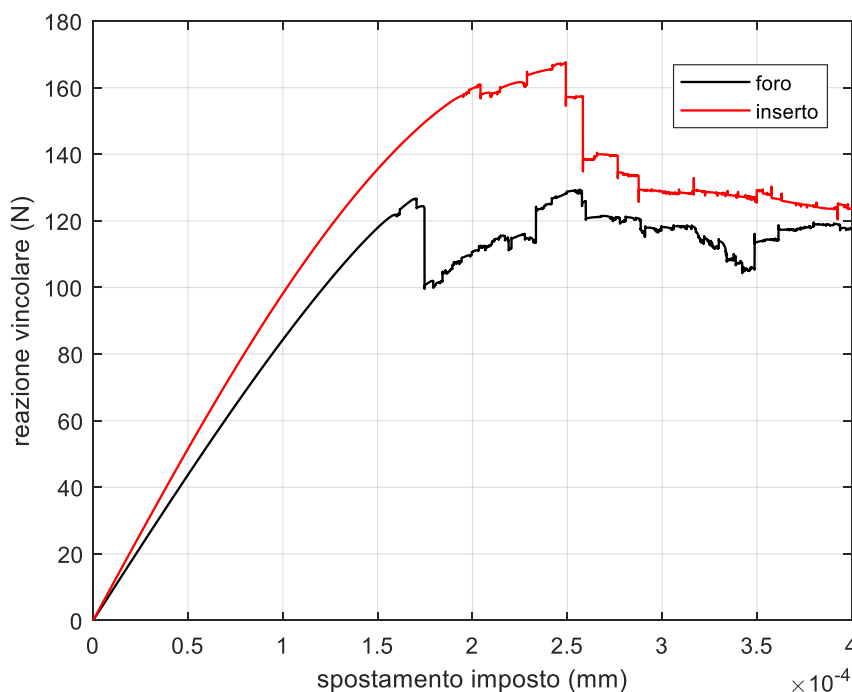
Come ultima analisi si è considerata una piastra con cricca laterale e inserto quadrato, di coordinate e dimensioni pari a quelle del foro quadrato per il caso 4.1. In questo modo si vuole simulare l'influenza sul fenomeno della frattura di un elemento rafforzativo (inserto), che al contrario del foro tende ad allontanare la propagazione della cricca, invece di attirarla. Si vuole verificare se effettivamente sia questo il comportamento assunto dal percorso di cricca, e al tempo stesso comparare i risultati in termini di reazione vincolare vs spostamento con la piastra forata. A questo scopo si sono mantenuti costanti i parametri del materiale e lunghezza e altezza della cricca laterale iniziale (rispettivamente 2 mm e 11 mm). I vincoli applicati alle estremità della piastra sono riportati in figura 4.20, in cui l'inserto di geometria quadrata è rappresentato in giallo. Si è simulato questo elemento mantenendo invariati  $E$  e  $\nu$ , mentre si è assunto un  $G_c$  5 volte superiore rispetto alla parte restante della piastra. Il codice descritto in questo elaborato permette di associare ad ogni elemento della mesh un materiale (isotropo) specifico, caratterizzato dai 3 parametri  $E$ ,  $\nu$  e  $G_c$ ; pertanto è agevole la progettazione di sistemi che includono materiali con caratteristiche diverse, come appunto nel caso dell'inserto rafforzativo. Mentre per la piastra si è assunto  $G_c = 0.001$  N/mm come per le precedenti analisi, per l'inserto si è considerato un *energy release rate* pari a 0.005 N/mm.



**Figura 4.20** Piastra con inserto quadrato, cricca laterale e vincoli applicati.

Per quanto riguarda i parametri di *displacement increment* e numero di incrementi totali, si sono considerati rispettivamente i valori  $5.0e-8$  mm e 8000 step. Invece per la mesh si è considerata la stessa del caso di piastra con foro quadrato, con la differenza che in questo caso viene discretizzata anche la zona riservata all'inserto; pertanto si arriva alla mesh definitiva caratterizzata da 4500 elementi quadrangolari e 4641 nodi.

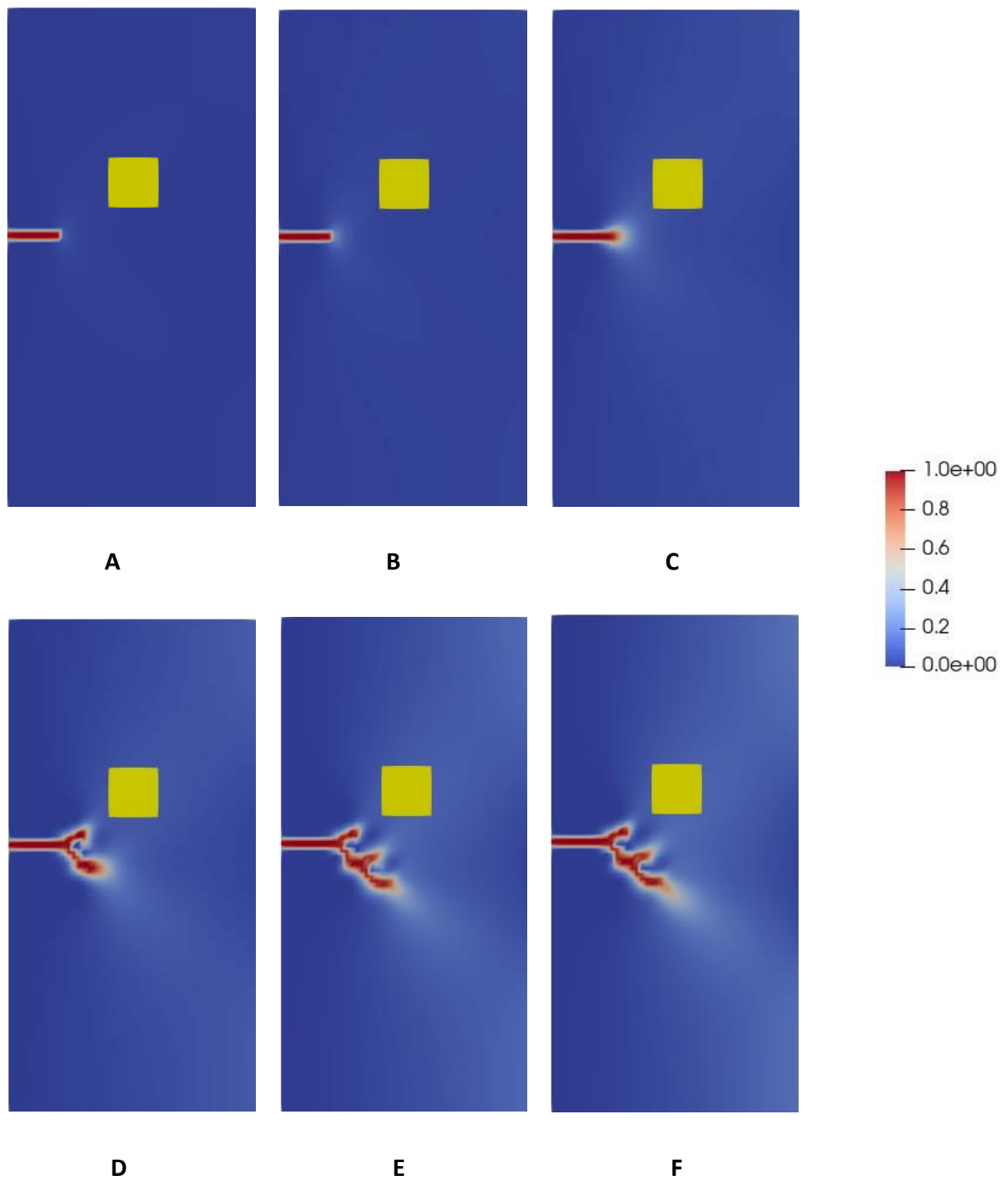
Eseguendo l'analisi in MATLAB, si sono andati a comparare i risultati della reazione vincolare (coincide, in valore assoluto, con la forza applicata per ottenere lo spostamento voluto) in funzione dello spostamento imposto per la piastra con inserto e la piastra forata, ottenendo il grafico in figura 4.21.



**Figura 4.21** Confronto tra piastra con foro quadrato e piastra con inserto quadrato.

Come ci si aspetta, la propagazione della cricca avviene più lentamente per il caso di piastra con inserto, che è anche quella con rigidità maggiore (pendenza della curva rossa). Infatti, a parità di geometria e posizione di foro e inserto, si nota che, per il primo caso, sia il valore di reazione vincolare massima sia lo spostamento critico sono inferiori. Questo comportamento di maggiore resistenza alla frattura per la piastra con inserto lo si deduce anche dall'andamento della propagazione, riportato in figura 4.22.





**Figura 4.22** Piastra con inserto quadrato: propagazione della cricca per uno spostamento imposto di (A)  $1.5e-4$  mm, (B)  $2.0e-4$  mm, (C)  $2.5e-4$  mm, (D)  $3.0e-4$  mm, (E)  $3.5e-4$  mm e (F)  $4.0e-4$  mm.

Come prima cosa si può notare che, per uno spostamento imposto di  $2.0e-4$  mm, la piastra con inserto è ancora intatta (spostamento inferiore a quello critico), mentre la stessa condizione per la piastra forata prevedeva una propagazione molto più avanzata, con la cricca che era già stata attirata dal vertice in basso a sinistra del foro (figura 4.5 C).

Inoltre si osserva che la cricca tende a ramificarsi verso il basso, allontanandosi sempre di più dall'inserito rafforzativo all'aumentare dello spostamento imposto. Infatti le biforcazioni verso l'alto tendono a interrompersi per la vicinanza dell'inserito, mentre quelle verso il basso sono maggiormente libere di propagarsi in zone a  $G_c$  inferiore. Dunque, da questo andamento, è confermato l'effetto "repulsivo" dell'inserito rafforzativo, che avendo un *energy release rate* più elevato, non è interessato dalla frattura per il range di spostamenti considerato; proprio per questo la propagazione della cricca laterale tende a bloccarsi in prossimità della zona con materiale più resistente.

## Conclusioni

Nel vasto campo della meccanica della frattura, di grande importanza in quasi tutti gli ambiti ingegneristici, si è deciso di affrontare nello specifico il metodo Phase-Field, al fine di simulare la propagazione delle cricche nelle strutture. Questo metodo nasce dall'idea innovativa di rappresentare, con una variabile scalare continua (chiamata appunto Phase-Field), la discontinuità nel materiale causata dalla frattura, superando moltissime delle limitazioni che sono legate a questo aspetto. Grazie al codice implementato in MATLAB, è stato possibile analizzare personalmente, e in modo dettagliato, le principali caratteristiche del metodo Phase-Field, nel campo della frattura fragile in regime quasi-statico per materiali isotropi; in particolare si è voluto includere, nella formulazione del metodo, una strategia per trattare in automatico l'irreversibilità della frattura (in accordo con il fenomeno fisico reale), introducendo una nuova variabile che prende il nome di *History Field*. Dopo aver dimostrato la bontà del modello considerato, mediante il confronto con articoli di riferimento e la riproduzione di alcuni risultati previsti dalla teoria, si sono eseguite delle analisi in modo da mettere in luce sia i punti di forza, sia gli aspetti potenzialmente più critici del metodo.

Il principale vantaggio del metodo Phase-Field, oltre alla comodità di implementazione grazie alla formulazione FEM, è che riesce a riprodurre, senza condizioni o criteri aggiuntivi e senza la necessità di sapere a priori la direzione di evoluzione delle cricche, diversi fenomeni fisici legati alla frattura (come l'innesco, la piega e la ramificazione), difficilmente simulabili con molti altri metodi presenti in letteratura. Si è cercato di mostrare questi aspetti nelle diverse analisi numeriche effettuate, in cui si sono considerate geometrie bidimensionali di diversa complessità (che presentano fori di forma differente o inserti in materiale più resistente). Inoltre, per confermare l'evoluzione della cricca riscontrata, si sono eseguite delle analisi in NASTRAN, al fine di ottenere la distribuzione degli stress nella struttura; in questo modo si è voluto verificare se la propagazione della frattura segue effettivamente il percorso più favorevole, ossia quello che presenta i valori di tensione maggiori.

Invece, concentrandosi su geometrie più semplici (per maggiore chiarezza), si sono valutati i principali parametri che influenzano il metodo Phase-Field, in modo da poter comprendere i risultati e ottimizzare le analisi. In questo modo si è visto che gli aspetti più critici sono la dipendenza dei risultati dall'incremento di spostamento imposto (*displacement control*) e dalla dimensione della mesh, che è strettamente legata alla lunghezza di scala  $l_0$ ; se questi parametri non sono settati

correttamente, l'analisi può portare a risultati anche molto distorti, con possibili conseguenze pericolose per l'integrità della struttura. L'aspetto positivo è, invece, che per mesh e discretizzazioni di spostamento imposto sufficientemente fini, i risultati sostanzialmente non dipendono più da questi parametri, rendendo le analisi uniformi e in accordo con i fenomeni fisici simulati. Tuttavia procedere in questo senso comporta un inevitabile aumento del costo computazionale e dei tempi di calcolo; quindi, all'aumentare della complessità del sistema, aumentano le risorse necessarie per la simulazione. Questo aspetto comporta delle limitazioni anche riguardo l'utilizzo di elementi 3D, visto che per sistemi tridimensionali il numero di nodi complessivi cresce notevolmente; per questo motivo, nell'ambito della ricerca, si stanno sviluppando delle strategie di *mesh refinement* per ridurre le dimensioni del sistema e quindi il costo computazionale delle analisi.

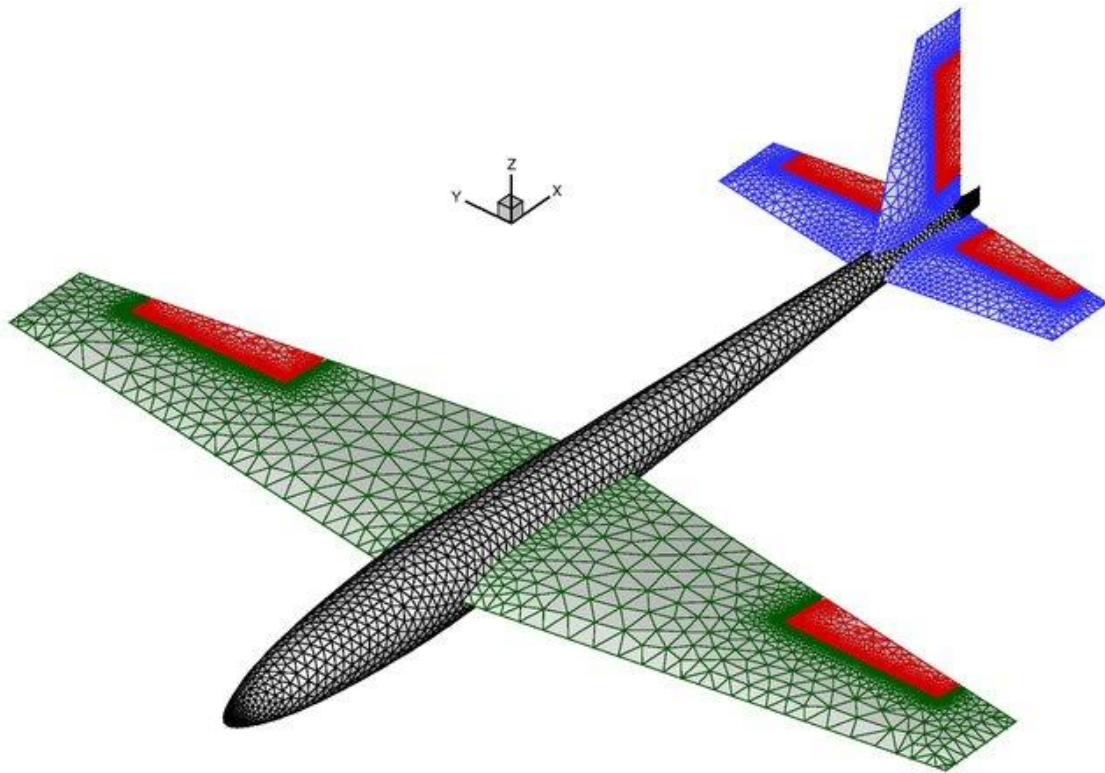
In conclusione, mediante il codice implementato e le analisi numeriche considerate in questo elaborato, si sono potuti mettere in evidenza le grandi potenzialità del metodo, e al tempo stesso comprenderne gli aspetti a cui prestare maggiore attenzione. Ad ogni modo è possibile, nel prossimo futuro, migliorare e ottimizzare ulteriormente il modello descritto, modificando le equazioni in gioco per estenderlo, per esempio, al campo dei materiali duttili e non isotropi e al regime dinamico, al fine di simulare ancora più realisticamente il comportamento della frattura.

## Appendice A: Introduzione al metodo degli elementi finiti

Il Metodo degli Elementi Finiti (FEM) è un approccio numerico che permette di risolvere le PDE (equazioni alle derivate parziali) per ottenere soluzioni numeriche approssimate. Trova varietà di impiego come strumento di analisi e progettazione in molti ambiti, non solo in ingegneria strutturale. In numerosi problemi, infatti, risulta conveniente ottenere soluzioni numeriche approssimate, piuttosto che soluzioni analitiche esatte di difficile utilizzo pratico (poiché richiederebbero un costo computazionale troppo elevato). Sebbene originariamente fosse stato sviluppato per studiare il campo tensionale nelle strutture aeronautiche, è stato poi esteso ed applicato al vasto campo della meccanica del continuo.

L'idea di base è quella di discretizzare un sistema reale (continuo) mediante un numero finito di elementi, che possono essere 1D, 2D o 3D a seconda della struttura che si vuole simulare. Con l'analisi FEM si possono rappresentare anche strutture molto complesse: a titolo di esempio si riporta, in figura A.1, la discretizzazione di un generico velivolo. Idealmente ogni sistema reale potrebbe essere rappresentato con elementi 3D, ma siccome richiedono un più alto costo computazionale, si prediligono elementi di ordine inferiore qualora la geometria lo permettesse; per esempio, al fine di rappresentare una piastra molto sottile, è sufficiente utilizzare elementi 2D, che permettono di mantenere una buona accuratezza dei risultati impiegando un minor tempo di calcolo.

Nell'ambito del FEM esistono due formulazioni di base: l'approccio Lagrangiano ed Euleriano. Il primo è ampiamente usato nelle modellazioni per la meccanica dei solidi, mentre il secondo è utilizzato principalmente nella modellazione della meccanica dei fluidi. Nella descrizione Lagrangiana, tempo e coordinate sono usati come variabili indipendenti per descrivere il moto e le altre proprietà fisiche del materiale; la configurazione di riferimento nella descrizione Lagrangiana è quella iniziale (indeformata). Invece la descrizione Euleriana utilizza le coordinate spaziali e il tempo per tracciare il movimento e le altre proprietà fisiche in punti fissi nello spazio, mentre il materiale scorre nel tempo.



**Figura A.1** Discretizzazione agli elementi finiti della struttura di un velivolo [21].

La procedura di discretizzazione agli elementi finiti riduce il sistema ad un problema con un numero finito di incognite, suddividendo il dominio in elementi ed esprimendo il campo incognito in termini di funzioni approssimanti, definite all'interno di ogni elemento. Le funzioni approssimanti, chiamate anche funzioni di forma, vengono individuate mediante i valori che la variabile dipendente assume in punti specifici detti nodi. Ogni elemento deve garantire l'equilibrio delle forze ai nodi: questa è una condizione necessaria per ottenere la soluzione. I valori che la variabile di campo assume ai nodi, ne definiscono univocamente l'andamento della variabile stessa all'interno dell'elemento. Nella rappresentazione agli elementi finiti di un sistema continuo, i valori nodali della variabile di campo rappresentano le nuove incognite del problema discretizzato.

L'idea di base dell'approssimazione usata nel FEM è quella di approssimare il vero andamento delle funzioni incognite (nel metodo implementato in questo elaborato si tratta di spostamenti e Phase-Field) con quello di alcune funzioni particolari ad andamento noto (generalmente polinomiali, ma anche trigonometriche ed esponenziali). Vengono presi in considerazione un numero limitato di punti (nodi) interni al dominio di integrazione, per i quali i valori della funzione approssimata risulteranno identici a quelli della soluzione esatta. In Figura A.2 è mostrato chiaramente questo

principio per il caso di una trave monodimensionale: una volta suddiviso il dominio di integrazione in intervalli (che possono essere anche irregolari), si procede ad approssimare la funzione incognita (esatta) con delle funzioni ad andamento noto (approssimata), scegliendo, come incognite del problema trattato, i soli valori ai nodi. Dalla soluzione delle equazioni algebriche si otterranno i valori nodali del campo approssimato, invece i valori interni agli intervalli vengono valutati in base alle funzioni di interpolazione utilizzate (funzioni di forma), il cui ordine dipende dal numero di nodi degli elementi (in figura le funzioni di forma sono lineari).

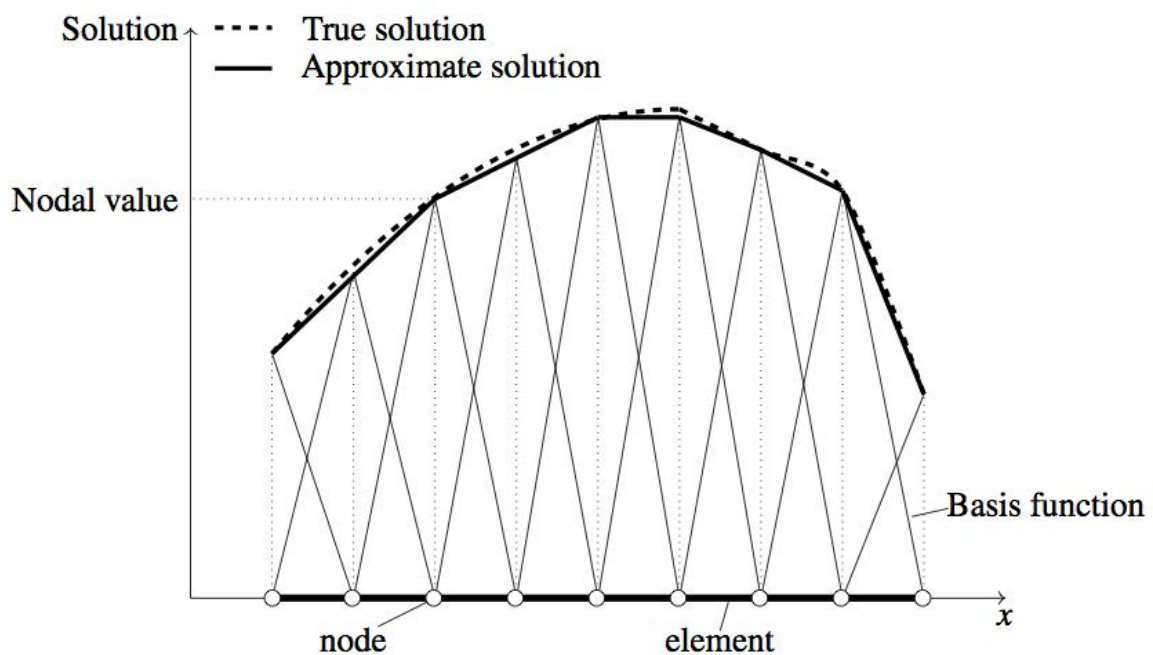


Figura A.2 Principio di approssimazione mediante elementi finiti [22].

È necessario sottolineare come la precisione dell'approssimazione dipenda, oltre che dal grado del polinomio utilizzato, anche dalla dimensione dell'intervallo di suddivisione. È evidente come risulti necessario infittire la discretizzazione solo nelle zone in cui vi è la presenza di forti gradienti (pendenze) della funzione da approssimare, piuttosto che in tutto il dominio della stessa. Tale flessibilità è uno dei maggiori vantaggi del FEM.

La discretizzazione del dominio porta quindi alla generazione di un numero finito di nodi e di elementi, che nell'insieme formano la mesh (maglia). I nodi, nelle applicazioni del metodo FEM, sono entità molto importanti in quanto la soluzione dell'intera struttura viene riferita ad essi;

successivamente, per estendere i valori del campo delle incognite su tutto il corpo, vengono utilizzate delle funzioni di forma per interpolare i valori determinati ai nodi.

Gli elementi finiti sono delle entità geometriche più o meno regolari caratterizzate da un determinato numero di nodi a seconda del tipo di elemento. Tali nodi possono coincidere con i vertici degli elementi, ma, in alcuni casi, possono essere anche disposti lungo i lati degli elementi stessi o addirittura all'interno. Un elemento quadrangolare, ad esempio, può avere un numero di nodi variabile da quattro (uno per ogni vertice) a nove (quattro ai vertici, quattro nei punti medi dei lati e uno centrale).

È evidente che all'aumentare del numero di nodi aumenta il grado del polinomio utilizzato per l'interpolazione dei dati ai nodi e, quindi, aumenta anche la qualità dell'approssimazione. Infatti il numero di elementi finiti con cui rappresentare l'intera struttura dipende dal tipo e dalla precisione richiesta per rappresentare la realtà del continuo. In generale, l'impiego di pochi elementi finiti di grandi dimensioni permette una valutazione rapida ma alquanto approssimata del comportamento della struttura reale, mentre un numero maggiore di elementi finiti porta a risultati più attendibili ma ad un costo computazionale certamente maggiore. L'ovvio compromesso porta frequentemente ad una griglia di schematizzazione i cui elementi sono di dimensioni diverse, nelle quali vengono utilizzati elementi di dimensioni ridotte nelle parti che richiedono un'analisi più accurata, ed elementi di dimensioni più grandi nelle altre zone. Per quanto riguarda i sistemi bidimensionali, le principali tipologie di elementi sono riportate in figura A.3, in cui si può notare la distinzione tra sistema di riferimento globale ( $x, y$ ) e sistema di riferimento locale dell'elemento ( $\zeta, \eta$ ).

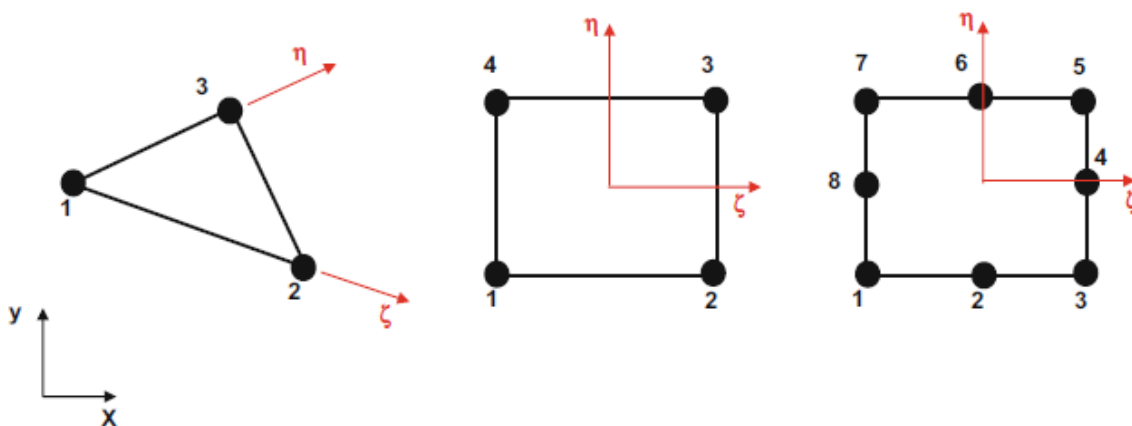
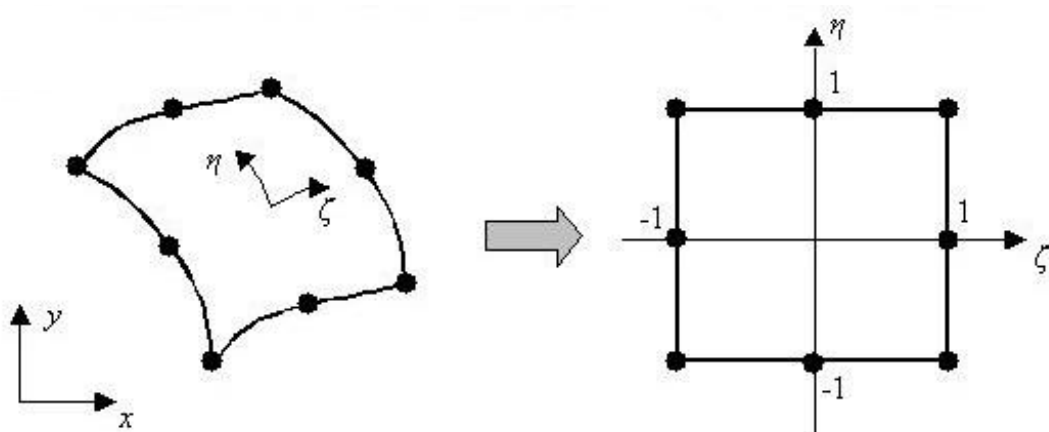


Figura A.3 Tipologie di elementi bidimensionali [26].



Questi elementi vengono chiamati isoparametrici, perché le stesse funzioni di forma utilizzate per definire la trasformazione da coordinate globali a locali vengono usate anche per definire gli spostamenti incogniti. L'introduzione del sistema locale permette di trattare in modo agevole elementi che, nel sistema globale, presentano andamenti irregolari o curvilinei, a seconda della struttura reale che si vuole simulare e approssimare; infatti, come si può osservare dalla figura A.4, gli elementi quadrangolari (di forma qualsiasi nel sistema globale) vengono riportati sempre a una forma quadrata nel sistema locale parametrico, in cui le coordinate dei nodi sono mostrate in figura. Dunque è conveniente esprimere le funzioni di forma in termini di un sistema di coordinate adimensionali locali ( $\zeta$  e  $\eta$ ) il cui valore varia tra  $-1$  e  $1$  su un elemento. La trasposizione in questo sistema di coordinate locali risulta particolarmente utile anche per l'integrazione numerica delle equazioni, come si vedrà in seguito.



**Figura A.4** Trasformazione di coordinate dal sistema di riferimento globale a quello locale [23].

La scelta delle funzioni di forma, che sono generalmente polinomiali (o comunque a comportamento noto), è un altro punto fondamentale che permette di ottenere una soluzione del modello FEM più o meno vicina alla realtà che si vuole simulare. Le funzioni di forma devono sottostare al principio che, all'aumentare del grado di raffinamento della mesh, la soluzione converga a quella esatta. Inoltre non sono funzioni arbitrarie, ma vengono scelte in modo da soddisfare le seguenti condizioni:

- Le funzioni di forma devono assumere valori unitari nel nodo considerato e valori nulli sul resto dei nodi;
- Le funzioni di forma devono garantire la continuità tra elementi adiacenti su qualsiasi contorno dell'elemento, ossia devono assumere un valore univoco per i nodi in comune con più elementi (non ci devono essere discontinuità).

Per quanto riguarda le equazioni, come primo punto si introduce, nel caso 2D, la variabile  $\xi(x,y)$ , che esprime il vettore delle incognite del problema che si vuole risolvere. Al fine di sfruttare il principio di approssimazione, si dovrà scegliere un insieme di punti (nodi) in cui specificare le incognite  $\xi_i$ , mentre i valori assunti dalla variabile nel resto dell'elemento dipendono dalle funzioni di forma  $N_i$ . Dunque nel generico elemento (e), in seguito alla discretizzazione del sistema, risulta:

$$\xi(x, y) = \sum_{i=1}^m N_i^e(x, y) \xi_i^e \quad (\text{A.1})$$

con m il numero di nodi dell'elemento.

Essendo gli elementi isoparametrici, le stesse funzioni di forma sono anche utilizzate per esprimere le coordinate del sistema discretizzato. Quindi un qualsiasi punto all'interno di un elemento, di cui sono note le coordinate globali cartesiane  $x_i$  e  $y_i$  nei nodi (nel caso 2D), può essere rappresentato nel sistema di coordinate locali  $\zeta$  e  $\eta$  mediante l'uso delle funzioni di forma, nel seguente modo:

$$x(\zeta, \eta) = \sum_{i=1}^m N_i^e(\zeta, \eta) x_i^e \quad (\text{A.2})$$

$$y(\zeta, \eta) = \sum_{i=1}^m N_i^e(\zeta, \eta) y_i^e \quad (\text{A.3})$$

dove il pedice (i) si riferisce al nodo considerato, mentre l'apice (e) all'elemento che racchiude il punto di coordinate globali x e y. Con le equazioni (A.2) e (A.3) è possibile trasformare le coordinate di un qualsiasi punto dal sistema di riferimento locale di elemento a quello globale.

Nelle equazioni alle derivate parziali, come anche nel metodo Phase-Field, compaiono le derivate cartesiane in funzione delle coordinate x e y; anche in questo caso si vogliono trovare questi valori a partire dalle coordinate locali, con le quali è più semplice esprimere le equazioni. Si considera una generica funzione f (che può rappresentare il Phase-Field o una variabile di spostamento), definita sull'elemento analogamente all'equazione (A.1):

$$f(\zeta, \eta) = \sum_{i=1}^m N_i^e(\zeta, \eta) f_i^e \quad (\text{A.4})$$

Le derivate cartesiane di f si calcolano usando la regola della catena:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (\text{A.6})$$

dove le derivate parziali rispetto alle coordinate locali, a partire dalla (A.4), valgono:

$$\frac{\partial f}{\partial \zeta} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial N_i^e}{\partial \zeta} f_i^e \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial N_i^e}{\partial \eta} f_i^e \quad (\text{A.8})$$

I termini  $\frac{\partial \zeta}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \zeta}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial \eta}{\partial x}$  e  $\frac{\partial \eta}{\partial y}$  sono ignoti, tuttavia si conoscono i valori inversi  $\frac{\partial x}{\partial \zeta}$ ,  $\frac{\partial x}{\partial \eta}$ ,  $\frac{\partial y}{\partial \zeta}$  e  $\frac{\partial y}{\partial \eta}$ , ottenibili dalle equazioni (A.2) e (A.3), in cui si esprimono rispettivamente  $x$  e  $y$  in funzione di  $\zeta$  e  $\eta$ . L'insieme di queste ultime derivate parziali costituisce la matrice Jacobiana del generico elemento, che permette la trasformazione di coordinate tra i due sistemi di riferimento. Questa si esprime come:

$$J^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m \frac{\partial N_i^e}{\partial \zeta} x_i^e & \sum_{i=1}^m \frac{\partial N_i^e}{\partial \zeta} y_i^e \\ \sum_{i=1}^m \frac{\partial N_i^e}{\partial \eta} x_i^e & \sum_{i=1}^m \frac{\partial N_i^e}{\partial \eta} y_i^e \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

Dall'inverso della matrice Jacobiana è possibile determinare le derivate cartesiane delle variabili incognite (rappresentate dalla generica funzione  $f$ ), secondo le equazioni (A.5) e (A.6). L'inverso della matrice Jacobiana vale:

$$[J^e]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \zeta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(J^e)} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

Per concludere, le derivate cartesiane di  $f$ , che si trovano a partire dal trasferimento di coordinate da sistema di riferimento locale a globale, si calcolano come:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} = [J^e]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

in cui è sottintesa l'ipotesi di elementi isoparametrici, visto che non si è considerata nessuna distinzione tra le funzioni di forma della variabile incognita  $f$  e delle coordinate globali  $x$  e  $y$ .

La trasformazione in coordinate locali risulta essere molto conveniente anche in fase di integrazione sulla superficie dell'elemento. L'integrazione è sempre presente quando si trattano corpi estesi (non puntiformi) e, nel caso di discretizzazione agli elementi finiti, la risoluzione delle equazioni integrali viene eseguita in modo numerico; in sostanza si convertono gli integrali definiti (campo continuo) in somme discrete, cercando di rendere l'approssimazione più accurata possibile. Tra i vari procedimenti di integrazione numerica, quello utilizzato in questo ambito è la quadratura di Gauss (dal nome dello studioso che lo ha definito).

Come primo passo si definisce, a partire dal determinante della matrice Jacobiana, l'area degli elementi:

$$dxdy = \det(J^e) d\zeta d\eta \quad (\text{A.12})$$

Tale calcolo risulta complesso da trattare dal punto di vista numerico quando la geometria dell'elemento originario presenta distorsioni notevoli, come rapporti tra i lati molto grandi o angoli ai vertici vicini o maggiori di  $180^\circ$ . In tali casi il determinante può risultare nullo o addirittura negativo, innescando una serie di problemi legati all'inversione della matrice di trasformazione Jacobiana. Per questo motivo si vuole avere una mesh più regolare possibile; inoltre, per evitare risultati distorti, all'interno del codice in MATLAB si è inserito un *warning* che interrompe l'analisi nel caso si verifichi che, per qualche elemento della mesh, il determinante di  $J^e$  risulta minore o uguale a zero.

Considerando una generica funzione  $f(x,y)$  definita su un elemento isoparametrico (dominio  $\Omega^e$ ), è possibile integrarla numericamente passando da coordinate globali a locali:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega^e} f(x,y) dxdy &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\zeta,\eta) \det(J^e) d\zeta d\eta \\ &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} g(\zeta,\eta) d\zeta d\eta \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Per gli elementi 2D a 4 nodi (utilizzati in tutte le analisi effettuate), l'integrale (A.13) può essere espresso, con la regola di Gauss-Legendre, come:

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} g(\zeta, \eta) d\zeta d\eta = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M W_i W_j g(\bar{\zeta}_i, \bar{\eta}_j) \quad (\text{A.14})$$

dove M è l'ordine dell'integrazione numerica,  $W_i$  e  $W_j$  sono i coefficienti di peso e  $g(\bar{\zeta}_i, \bar{\eta}_j)$  corrisponde al valore assunto dalla funzione  $g$  nei punti di campionamento dell'elemento (in numero  $M^2$ ). Questi vengono anche chiamati punti di Gauss, e sono quelli che ottimizzano l'integrazione.

In questo elaborato si è sempre considerato un ordine di integrazione pari a  $M = 2$ ; a questa condizione corrispondono valori di peso unitari ( $W_i W_j = 1$ ) e, utilizzando le coordinate ottimali dei 4 punti di campionamento indicate da Gauss, l'integrale (A.14) risulta:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} g(\zeta, \eta) d\zeta d\eta &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 W_i W_j g(\bar{\zeta}_i, \bar{\eta}_j) = \\ &= g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + g\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + g\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Pertanto il calcolo dell'integrale si riduce a una somma algebrica di 4 contributi, valutati in coordinate specifiche che ottimizzano l'accuratezza dell'integrazione. Questo procedimento è relativamente semplice da implementare, e al tempo stesso rende molto comoda la risoluzione di equazioni che analiticamente sarebbero decisamente più complicate da risolvere.



## Appendice B: creazione del file inp da PATRAN a MATLAB

Un aspetto importante del codice implementato è che le informazioni di input per l'analisi possono essere scritte in un file esterno, evitando di dover modificare ogni volta lo script in MATLAB. Questo file esterno ha estensione inp, e contiene i dati relativi alla mesh, al materiale e in generale i parametri necessari per la risoluzione col metodo degli elementi finiti. Sarebbe possibile costruire la mesh del sistema considerato (matrice di nodi e elementi) anche direttamente in MATLAB, ma questo procedimento sarebbe lento e macchinoso, visto che non è il software adatto per questo tipo di progettazioni.

Dunque si è deciso di affrontare il problema in PATRAN, un software dedicato alla progettazione FEM, con cui è molto più agevole la costruzione di mesh e geometrie, anche complesse. Poi, una volta finita la progettazione, è necessario fornire le informazioni della mesh come input in MATLAB, per proseguire con l'analisi del metodo Phase-Field (che è basato sulla formulazione FEM). Per fare questo si imposta un'analisi lineare-elastica al solo fine di avere a disposizione il file bdf; questo normalmente sarebbe il file di input per il solutore NASTRAN, ma in questo caso specifico non è richiesto di procedere in questo senso. Infatti l'obiettivo è quello di trasportare alcune delle informazioni contenute nel file bdf in un file esterno (di estensione inp), in cui sono presenti solo i dati strettamente necessari per l'analisi in MATLAB. Il passo successivo, invece, è quello di programmare in MATLAB un codice adatto a leggere il file inp; per le analisi considerate non è stato necessario modificarlo (anche perché i vincoli e le condizioni al contorno sono sempre gli stessi), e questo rappresenta una grande comodità, perché permette di lavorare solo (o quasi) in PATRAN per la progettazione di nuove analisi.

Per quanto riguarda la costruzione di mesh e geometria in PATRAN, il procedimento è piuttosto semplice, anche perché si sono sempre considerate piastre 2D; il punto più critico a cui bisogna prestare attenzione è la numerazione dei nodi, che deve essere sempre consecutiva (senza offset), al fine di facilitare la lettura del codice in MATLAB. Infatti, nel caso ci siano due o più superfici adiacenti (utilizzate per costruire mesh di dimensioni differenti o per trattare geometrie forate), è necessario usare il comando *Equivalence* per unire i nodi in comune. Questo procedimento porta a degli offset indesiderati nella numerazione dei nodi, e per ovviare a questo problema si usa l'*utilities FEM Node* cliccando sulla voce *Node ID Offset*, con la quale è possibile mantenere continuativa la numerazione dei nodi. Inoltre, nella sezione *Analysis*, cliccando sulla voce *Translation Parameters*, bisogna impostare il *Card Format Small*, in modo da visualizzare nel bdf le coordinate dei nodi in un

formato di 8 caratteri (compresa la virgola), così da uniformare i dati e permettere la lettura del codice MATLAB senza equivoci.

Dopo aver impostato l'analisi e ottenuto il file bdf, si procede nel seguente modo per costruire il file inp:

- Si aprono in Notepad (o un documento equivalente) il file bdf e un file inp, al momento vuoto;
- Si individuano nel bdf le porzioni relative a:
  - Assegnazione dei nodi ai rispettivi elementi;
  - Coordinate dei nodi della mesh;
  - Vincoli e spostamenti applicati;

Si selezionano queste parti e, usando il comando Alt per escludere le parole (per esempio CQUAD4, GRID) o eventuali commenti, vengono copiate e incollate nel file inp;

- Si aggiungono, nella prima riga del file inp, le seguenti informazioni in quest'ordine:
  - Numero di nodi complessivi;
  - Numero di elementi complessivi;
  - Numero totale di nodi vincolati;
  - Tipologia di soluzione (1 = plane stress, 2 = plane strain);
  - Numero di nodi per elemento (uguale a 4);
  - Numero di gradi di libertà per nodo (uguale a 3 nel caso bidimensionale, due spostamenti e la variabile Phase-Field);
  - Numero di dimensioni spaziali;
  - Ordine dell'integrazione numerica di Gauss (uguale a 2);
  - Numero di componenti dello stress (uguale a 3 nel caso bidimensionale:  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\tau_{12}$ );
  - Numero di materiali (isotropi) presenti nel sistema;
  - Numero di proprietà per ogni materiale (sono E,  $\nu$  e  $G_c$ ).
  
- Si aggiungono manualmente, nell'ultima riga del file inp, i valori delle tre proprietà per ogni materiale presente nel modello.

Questo procedimento, che all'apparenza può sembrare lento, in realtà è relativamente agevole, anche perché la maggior parte dei valori restano invariati durante le analisi; inoltre evita di dover



modificare per ogni analisi il programma in MATLAB. Ad ogni modo è l'unica procedura parzialmente manuale che è necessario fare per eseguire l'analisi Phase-Field, perché dopo aver fornito i dati in input è tutto risolto in automatico dal codice. A titolo di esempio, in seguito si riporta il file *'foro\_quadrato.inp'*, in cui sono presenti i dati di input per il caso di piastra con foro quadrato (analizzato nella sezione 4.1).

4560 4400 102 2 4 3 2 2 3 1 3 → Dati di input della formulazione FEM.

```

1  1  1  2  53  52
2  1  2  3  54  53
3  1  3  4  55  54
4  1  4  5  56  55
5  1  5  6  57  56
...
4396 1  4504 4505 4556 4555
4397 1  4505 4506 4557 4556
4398 1  4506 4507 4558 4557
4399 1  4507 4508 4559 4558
4400 1  4508 4509 4560 4559

```

Assegnazione ad ogni elemento del materiale (seconda colonna) e dei 4 nodi ai vertici.

```

1      0.  0.
2      .2  0.
3      .4  0.
4      .6  0.
5      .8  0.
...
4557   9.4 20.
4558   9.59999920.
4559   9.8 20.
4560  10. 20.

```

Assegnazione ad ogni nodo delle coordinate cartesiane globali (in questo caso 2D).

2 1 51 →

Vincoli all'estremità inferiore: asse vincolato (asse 2), nodo iniziale (a sinistra) e nodo finale (a destra).

```
1 26 4535
```

Vincoli di simmetria: asse vincolato (asse 1), nodo centrale della piastra inferiore e della piastra superiore.

```
4510 2 1. 4511 2 1.  
4512 2 1. 4513 2 1.  
4514 2 1. 4515 2 1.  
...  
4556 2 1. 4557 2 1.  
4558 2 1. 4559 2 1.  
4560 2 1.
```

Spostamento unitario applicato ai nodi (poi verrà moltiplicato per il *displacement increment*, definito dentro il main) dell'estremità superiore, in direzione dell'asse verticale (asse 2).

```
1 20.0e5 0.3 0.001
```

Proprietà dei materiali isotropi: nell'ordine E (in N/mm<sup>2</sup>),  $\nu$  e  $G_c$  (in N/mm).

Il file input così impostato viene letto dalla function MATLAB chiamata *'reading\_FEM.m'*, riportata in seguito, in cui si utilizza il comando *fscanf* per scansionare in modo progressivo (da sinistra verso destra e dall'alto verso il basso) tutti i valori presenti nel file che corrispondono al formato numerico indicato (%d per i numeri interi e %f per i numeri con virgola fissa). Inoltre, per evidenziare le diverse porzioni del codice e descrivere con più chiarezza la nomenclatura utilizzata, si sono aggiunti dei commenti specifici (in verde).

```
function [npoin,nelem,nvfix,ntype,nnode,ndofn,ndime,ngaus, ...  
        nstre,nmats,nprop,lnods,matno,coord,props,nofix, ...  
        iffix,fixed] = reading_FEM()  
  
global in; % variabile che corrisponde al file foro_quadrato.inp  
  
% dati generali per la formulazione FEM  
  
npoin = fscanf(in,'%d',1);  
nelem = fscanf(in,'%d',1);  
nvfix = fscanf(in,'%d',1);  
ntype = fscanf(in,'%d',1);  
nnode = fscanf(in,'%d',1);  
ndofn = fscanf(in,'%d',1);  
ndime = fscanf(in,'%d',1);  
ngaus = fscanf(in,'%d',1);  
nstre = fscanf(in,'%d',1);  
nmats = fscanf(in,'%d',1);  
nprop = fscanf(in,'%d',1);  
  
% assegnazione ad ogni elemento del materiale e dei nodi ai vertici  
  
for ielem = 1:nelem
```

```

jelem = fscanf(in,'%d',1);
sample1 = fscanf(in,'%d',1);
sample2 = fscanf(in,'%d',[nnode,1]);
for inode = 1:nnode
    lnods(jelem,inode) = sample2(inode); % lista dei nodi di ogni elemento
end
matno(jelem) = sample1; % materiale per ogni elemento
end

% coordinate cartesiane dei nodi

for ipoin = 1:npoin
    jpoin = fscanf(in,'%d',1);
    sample = fscanf(in,'%8f',[2,1]);
    for idime = 1:ndime
        coord(ipoin,idime) = sample(idime); % coordinate dei nodi
    end
end

% vincoli all'estremità inferiore della piastra

sample = fscanf(in,'%d',1); % direzione dell'asse vincolato
nodo_in = fscanf(in,'%d',1);
nodo_end = fscanf(in,'%d',1);
tot_sotto = nodo_end - nodo_in + 1; % numero totale dei nodi vincolati
for i = 1:tot_sotto
    if i == 1
        nofix(i) = nodo_in; % lista dei nodi vincolati
    else
        nofix(i) = nodo_in + i - 1;
    end
    if sample == 1
        iffik(i,:) = [1 0]; % assi vincolati di ogni nodo (1=vincolato, 0=libero)
    else
        iffik(i,:) = [0 1];
    end
    for idime=1:ndime
        fixed(i,idime)= 0.0; % coordinate (fisse) dei nodi vincolati
    end
end

% vincoli di simmetria (al centro delle estremità inferiore e superiore)

sample2 = fscanf(in,'%d',1); % direzione dell'asse vincolato
nodo_1 = fscanf(in,'%d',1);
nodo_2 = fscanf(in,'%d',1);
nodo_alto_sx = nofix(tot_sotto+1);
j = nodo_2 - nodo_alto_sx + 1;
for i = 1:2
    if sample2 == 1
        iffik(nodo_1,sample2) = 1;
        iffik(tot_sotto+j,sample2) = 1;
    else
        iffik(nodo_1,sample2) = 1;
        iffik(tot_sotto+j,sample2) = 1;
    end
end

% vincoli all'estremità superiore della piastra

tot_sopra = tot_sotto;

```

```

for i = 1: tot_sopra
    if mod(i,2) == 1
        trash = fscanf(in, '%d', 1); % solo uno per riga (quindi solo i dispari)
    end
    nodo_sopra = fscanf(in, '%d', 1);
    sample1 = fscanf(in, '%d', 1); % direzione dello spostamento imposto
    spost = fscanf(in, '%f', 1); % spostamento unitario imposto

    nofix(tot_sotto+i) = nodo_sopra; % nodi vincolati dell'estremità superiore
    if sample == 1
        iffix(tot_sotto+i, :) = [1 0];
    else
        iffix(tot_sotto+i, :) = [0 1];
    end
    fixed(tot_sotto+i, :) = [0.0 0.0];
    fixed(tot_sotto+i, sample1) = spost;
end

% assegnazione delle proprietà ai materiali presenti nel sistema

for imats = 1:nmats
    jmats = fscanf(in, '%d', 1);
    sample = fscanf(in, '%lf', [3,1]);
    for iprop = 1:nprop
        props(jmats, iprop) = sample(iprop); % proprietà dei materiali: E, v, Gc
    end
end
end

```

# Bibliografia

- [1] Adrian P. Mouritz, *Introduction to Aerospace Materials*, Woodhead Publishing, 2012.
- [2] Broek D., *Elementary Engineering Fracture Mechanics*, Martinus Nijhoff Publishers, 1984.
- [3] Griffith A.A., *The Phenomena of Rupture and Flow in Solids*, Philosophical Transactions, Series A 1920, Vol. 221, pp. 163-198.
- [4] Irwin G.R., *Analysis of Stresses and Strains near the End of a Crack Traversing a Plate*, Journal of Applied Mechanics 1957, Vol. 24, pp. 361-364.
- [5] Anderson T.L., *Fracture mechanics – Fundamentals and application*, 2005, p. 12-6.
- [6] Inglis C.E., *Stresses in Plates Due to the Presence of Cracks and Sharp Corners*, Transactions of the Institute of Naval Architects, Vol. 55, pp. 219-241, 1913.
- [7] Irwin G.R., *Fracture Dynamics, Fracturing of Metals*, American Society for Metals, Cleveland, OH, 1948, pp. 147-166
- [8] Orowan E., *Fracture and Strength of Solids*, Reports on Progress in Physics, Vol. XII, pp. 185, 1948.
- [9] Silling S.A., *Reformulation of Elasticity Theory for Discontinuities and Long-Range Forces*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Vol. 48, pp. 175-209, 2000.
- [10] Zaccariotto M., Luongo F., Sarego G., Galvanetto U., *Examples of applications of the peridynamic theory to the solution of static equilibrium problems*, The Aeronautical Journal, 2015, Vol. 119 n. 1216.
- [11] Krueger R. *The Virtual Crack Closure Technique: History, Approach and Applications*, 2004, ICASE Report No. 2002-10.
- [12] Mi Y., Crisfield M.A., DavAVies G.A.O., Hellweg H.B. *Progressive delamination using interface elements*, J Compos Mater, 1998, 32, pp 1246-1272.
- [13] Munoz J.J., Galvanetto U., Robinson P. *On the numerical simulation of fatigue driven delamination with interface elements*, Int J Fatigue, 2006, 28, pp 1136-1146.

- [14] Giovanardi B., Scotti A., Formaggia L., *A hybrid XFEM - Phase Field (Xfield) method for crack propagation in brittle materials*, MOX-Report n. 41/2016, Dipartimento di Matematica, Politecnico di Milano.
- [15] Zi G., Belytschko T., *New crack-tip elements for XFEM and applications to cohesive cracks*, Int J Numer Meth Eng, 2003, 57, pp. 2221-2240.
- [16] Belytschko T., Chen H., Xu J.X., Zi G., *Dynamic crack propagation based on loss of hyperbolicity and a new discontinuous enrichment*, Int J Numer Meth Eng, 2003, 58, pp. 1873-1905.
- [17] *Evaluating cracking in concrete: procedures*, Giatec Scientific Inc., 2019.
- [18] Amgreen, *Brittle v ductile stress-strain behaviour*, 2010.
- [19] Kopeliovich D., *Fracture Toughness*, SubsTech, 2015.
- [20] Stockhert F., *Fracture Mechanics applied to Hydraulic Fracturing in Laboratory Experiments*, Doctoral Thesis, Ruhr University Bochum, 2015.
- [21] Ritter M., Dillinger J., *Nonlinear numerical flight dynamics for the prediction of maneuver loads*, DLR - Institute of Aeroelasticity, IFASD 2011.
- [22] Rovitto M., *Electromigration Reliability Issue in Interconnects for Three-Dimensional Integration Technologies*, Technischen Universität Wien, 2016.
- [23] *Isoparametric elements*, StudyLib, Math & Algebra.
- [24] Msekh M.A., Sargado J.M., Jamshidian M., Areras P.M., Rabczuk T., *Abaqus implementation of phase-field model for brittle fracture*, Computational Material Science (2015), 96, pp. 472-484.
- [25] Miehe C., Welschinger F., Hofacker M., *Thermodynamically consistent phase-field models of fracture: Variational principles and multi-field FE implementations*, Int. J. Numer. Meth. Engng 2010, 83, pp. 1273–1311.
- [26] Bulent Biner S., *Programming Phase-Field Modeling*, Springer, 2017.

- [27] Miehe C., Hofacker M., Welschinger F., *A phase-field model for rate-independent crack propagation: Robust algorithmic implementation based on operator splits*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 199 (2010), pp. 2765-2778.
- [28] Lu X., Li C., Tie Y., Hou Y., Zhang C., *Crack propagation simulation in brittle elastic materials by a phase field method*, Theoretical & Applied Mechanics Letters 9 (2019), pp. 339-352.
- [29] Zhou S., Zhuang X., Zhu H., Rabczuk T., *Phase field modelling of crack propagation, branching and coalescence in rocks*, Theoretical and Applied Fracture Mechanics 96, 2018, pp. 174-192.
- [30] Martinez-Paneda E., *ABAQUS implementation of the phase field fracture method*, ResearchGate, 2018.
- [31] Pundir M., *Crack propagation analysis using Phase-Field model in the framework of Isogeometric analysis and Finite Cell Method*, Delft University of Technology, Master of Science Thesis, 2016.
- [32] Francfort G.A., Marigo J.J., *Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids 1998, Vol. 46, pp. 1319–1342.
- [33] Bourdin B., Francfort G.A., Marigo J.J., *The Variational Approach to Fracture*, Springer Verlag, Berlin, 2008.
- [34] De Borst R., Crisfield A., Remmers J.J.C., Verhoosel C.V., *Non-linear finite element analysis of solids and structures*, Second edition, Wiley, 2012.