UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia "Galileo Galilei"

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Il problema dell'energia infinita in elettrodinamica

Relatore
Prof. Kurt Lechner

Laureando
Gabriele Castellari

Anno Accademico 2019/2020

Indice

Introduzione

Tra le interazioni fondamentali, l'elettromagnetismo è senza dubbio quella meglio compresa dal punto di vista teorico. La sua riformulazione in ambito relativistico ha dato vita a una teoria di campo (dove le interazioni avvengono non in maniera diretta tra particelle, ma tramite campi) che, sebbene sia ben compresa, è tuttora oggetto di studio da parte dell'elettrodinamica classica. Quest'ultima, in particolare, studia l'interazione di particelle cariche con i campi elettromagnetici. Ci sono tuttavia problematiche che rimangono ancora aperte.

Questa tesi si concentra su una questione di livello fondamentale che rende l'elettromagnetismo classico una teoria inconsistente. Un esempio di questa inconsistenza può essere mostrato prendendo una particella di carica e, statica, nell'origine del nostro sistema cartesiano. Tale esempio è d'importanza fondamentale poiché anche i campi originati da oggetti estesi, come ad esempio quello di un condensatore, sono prodotti in ultima analisi da particelle cariche. Il campo generato da questa particella ha la forma

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{e\vec{x}}{4\pi r^3}, \qquad \vec{B}(\vec{x}) = 0, \tag{1}$$

dove $r = |\vec{x}|$, mentre $\vec{E}$ è il campo elettrico e $\vec{B}$ quello magnetico. Il campo elettrico mostra una singolarità nell'origine, ovvero diverge se calcolato nel punto dove è posta la particella. Nella maggior parte dei casi non si ha motivo di calcolare tale campo nell'origine. Si pensi a un elettrone in moto sotto l'influenza di tale campo. Porre $r = 0$ corrisponderebbe a studiare il caso in cui l'elettrone e la particella hanno la stessa posizione, cosa che in pratica non avviene mai.

Il discorso cambia quando si cerca di misurare l'energia elettromagnetica presente in un volume di spazio contenente la particella. Rimanendo nel caso della particella statica, bisognerebbe a tal fine calcolare il seguente integrale

$$\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2}\vec{E}^2\, d^3x. \tag{2}$$

Siccome il dominio di integrazione è tutto lo spazio, esso contiene l'origine che presenta una singolarità non integrabile. Infatti, nell'intorno dell'origine il campo $\vec{E}$ si comporta come $\vec{E} \sim 1/r^2$, dunque $\vec{E}^2$ ha l'andamento $\vec{E}^2 \sim 1/r^4$ e presenta quindi una singolarità non integrabile.

Una domanda che può sorgere spontanea è se questo problema sia davvero tale. Nell'ambito dell'elettromagnetismo si ha a che fare spesso con differenze di energia e, inoltre, sono queste ultime ad essere misurate sperimentalmente. In tali differenze, le divergenze presenti si possono cancellare. Potrebbe sembrare lecito, quindi, ignorare il problema o quantomeno pensare che non abbia conseguenze fisiche. D'altra parte la conservazione dell'energia richiede che questa sia finita. Solo in questo caso è possibile affermare che si conservi. Se l'energia fosse infinita, infatti, non si potrebbe dire se varia di una quantità finita.

Il passo successivo è, quindi, quello di cercare di curare tale divergenza in modo consistente con la teoria sottostante. Il primo modo che può venire in mente è quello di togliere dal dominio di integrazione un volumetto sferico di raggio molto piccolo, ma finito, attorno all'origine. Si vedrà che questa fu la strada seguita dai primi studiosi dell'elettrodinamica.

Nella tesi si esporranno le equazioni di Maxwell in forma covariante e si farà uso della loro natura distribuzionale. Si vedrà come il divergere della quantità (2) corrisponda proprio al fatto che la densità di energia elettrostatica $\frac{1}{2}\vec{E}^2$ non è una distribuzione. In seguito mostreremo un tentativo più moderno di risolvere il problema. Questo studio si basa su un processo di regolarizzazione e rinormalizzazione del tensore energia impulso del campo elettromagnetico. Una descrizione più ampia di tale processo si può trovare in [3].

Vediamo ora di introdurre alcune quantità fondamentali e di approcciare il problema in modo più approfondito.

Le fondamenta dell'elettrodinamica sono costituite dai seguenti tre gruppi di equazioni

$$\varepsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}\partial_\nu F_{\varrho\sigma} = 0, \tag{3}$$
$$\partial_\mu F^{\mu\varrho} = j^\varrho, \tag{4}$$
$$\frac{dp^\mu}{ds} = eF^{\mu\nu}(y(s))u_\nu. \tag{5}$$

$\varepsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}$ è il tensore di Levi-Civita, $F^{\mu\nu}$ è il tensore elettromagnetico. $y(s)$ denota la linea di universo della particella in funzione del tempo proprio s. u^ν è la 4-velocità della particella, $p^\mu = mu^\mu$ è il 4-impulso, mentre j^ϱ è la 4-corrente che per una particella puntiforme di carica e assume la forma

$$j^\mu(x) = e\int \frac{dx^\mu}{d\lambda}\delta^{(4)}(x - y(\lambda))\,d\lambda, \tag{6}$$

dove come parametro λ si può usare s della particella ottenendo un'altra forma molto utile

$$j^\mu(x) = e\int u^\mu(s)\delta^{(4)}(x - y(s))\,ds. \tag{7}$$

La coordinata x è intesa come $x = (t, \vec{x})$.

Le formule (3) e (4) rispondono al problema di calcolare i campi elettromagnetici date le sorgenti, ovvero le 4-correnti. Mentre la formula (5) risponde al problema di calcolare il moto di una carica dati i campi esterni. Nel risolvere il moto di una particella tramite (5), non possiamo a priori ignorare il campo generato dalla particella stessa. É chiaro, quindi, che la quantità $F^{\mu\nu}$ in (5) va in realtà intesa come $F^{\mu\nu} = F^{\mu\nu}_{est} + F^{\mu\nu}_{auto}$. $F^{\mu\nu}_{est}$ è il tensore elettromagnetico associato a un campo esterno, mentre $F^{\mu\nu}_{auto}$ è quello associato al campo elettromagnetico generato dalla particella stessa.

Abbiamo visto nell'Introduzione che il campo elettrico generato da una particella statica diverge come $\vec{E} \sim \frac{1}{r^2}$ se calcolato vicino alla particella. Questa proprietà continua a valere per il campo generato da una particella in moto qualunque nelle vicinanze della traiettoria di quest'ultima. Siccome $F^{\mu\nu}_{auto}(x)$ è costituito dalle componenti di tali campi, esso è una quantità divergente quando è calcolato in $x = y(s)$ e ha lo stesso andamento $F^{\mu\nu}_{auto}(x) \sim \frac{1}{r^2}$. Quindi, l'equazione (5) risulta mal definita poiché il suo membro di destra è una quantità divergente. Questo è il primo di due grossi problemi che minano la consistenza interna dell'elettrodinamica classica e che derivano, in ultima analisi, dal pensare le cariche come puntiformi.

L'altro problema, su cui si concentrerà la tesi, sorge quando si cerca di costruire un tensore energia impulso per il campo elettromagnetico $T^{\mu\nu}_{em}$ giungendo alla quantità

$$T^{\mu\nu}_{em} = F^{\mu\varrho}F_\varrho{}^\nu + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F^{\varrho\sigma}F_{\varrho\sigma}. \tag{8}$$

$T^{\mu\nu}_{em}$ è bilineare in $F^{\mu\nu}$ perciò nei dintorni della traiettoria presenterà un comportamento simile a $F^{\mu\nu}$ ma più singolare. In particolare le sue componenti sono

$$T^{00}_{em} = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2), \tag{9}$$
$$T^{i0}_{em} = T^{0i}_{em} = (\vec{E}x\vec{B})^i, \tag{10}$$
$$T^{ij}_{em} = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2)\delta^{ij} - E^iE^j - B^iB^j. \tag{11}$$

Oltre a questo tensore riferito al campo, bisogna prendere in considerazione anche il contributo dovuto alla presenza di particelle. Si trova che il tensore energia impulso totale è

$$T^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}_{em} + T^{\mu\nu}_p, \tag{12}$$

dove $T^{\mu\nu}_p$ è il contributo dovuto alle particelle, che risulta essere

$$T^{\mu\nu}_p(x) = m\int u^\mu(s)u^\nu(s)\delta^{(4)}(x - y(s))\,ds = \frac{p^\mu(t)p^\nu(t)}{\varepsilon(t)}\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}(t)). \tag{13}$$

Si può dimostrare che un $T^{\mu\nu}$ così costruito soddisfa al seguente andamento asintotico

$$\lim_{|\vec{x}|\to\infty} T^{\mu\nu}(t, \vec{x})|\vec{x}|^3 = 0. \tag{14}$$

Per trovare il 4-momento totale dovuto al campo elettromagnetico presente in $\mathbb{R}^3$ bisogna computare

$$P^{\mu}_{em} = \int_{\mathbb{R}^3} T^{0\mu}_{em}\, d^3x, \tag{15}$$

trovando l'energia elettromagnetica $P^0_{em} = \varepsilon_{em}$ e le componenti del momento P^i_{em} dovuto al campo. Abbiamo visto che per una particella statica la densità di energia $T^{00}_{em} = \frac{1}{2}\vec{E}^2$ ha l'andamento $T^{00}_{em} \sim 1/r^4$ e per questo P^0_{em} diverge. Nel caso statico $P^i_{em} = 0$ perché $T^{i0}_{em} = T^{0i}_{em} = 0$, ma si può dimostrare che in generale per una particella in moto arbitrario anche P^i_{em} diverge. Più precisamente, tali integrali divergono se calcolati su ogni volume in cui è presente almeno una particella, a causa dell'andamento in prossimità di essa. Forniscono, quindi, quindi un'energia e un momento infiniti. Questo è inaccettabile dato che ogni teoria fisica basata sull'omogeneità dello spazio-tempo prevede la conservazione di tali quantità, che per conservarsi devono essere finite.

Una distribuzione regolare deve essere rappresentata da una funzione *localmente integrabile* e *polinomialmente limitata* a grandi distanze. Tuttavia, dato che $T^{\mu\nu}_{em}$ diverge come $1/r^4$ nelle vicinanze delle particelle non è localmente integrabile nello spazio tridimensionale e quindi non è una distribuzione, ovvero $T^{\mu\nu}_{em} \notin S'(\mathbb{R}^4)$. La cosa non deve sorprendere siccome $T^{\mu\nu}_{em}$ è dato da una somma di prodotti delle distribuzioni $F^{\mu\nu}$ e, in generale, tali prodotti non sono a loro volta distribuzioni.

Se valesse $T^{\mu\nu}_{em} \in S'(\mathbb{R}^4)$ potremmo usare un'altra proprietà delle distribuzioni. Le distribuzioni ammettono derivate parziali rispetto a ogni coordinata e tali derivate sono ancora distribuzioni. Questa proprietà è fondamentale se si vuole dimostrare che $T^{\mu\nu}$ sia conservato, poiché a tal fine bisogna calcolarne la 4-divergenza. Per dimostrare che il tensore $T^{\mu\nu}$ sia conservato si dovrebbe quindi calcolare $\partial_\mu(T^{\mu\nu}_{em} + T^{\mu\nu}_{p})$, ma siccome $T^{\mu\nu}_{em} \notin S'(\mathbb{R}^4)$, esso non ammette derivate parziali e la 4-divergenza risulta mal definita.

Questa tesi si concentrerà su questo problema, offrendo una panoramica dei tentativi che sono stati fatti per giungere a un tensore privo di tali comportamenti patologici e analizzandone pregi e difetti. Prima di fare ciò si rivedranno alcuni passi fondamentali compiuti alle origini dello studio dell'elettrodinamica con un focus particolare su come tale problema veniva trattato (o ignorato) nel passato.

Organizzazione del materiale. Il primo capitolo propone una breve esposizione riguardo a come veniva trattato nel passato il problema di una particella carica in moto in un campo elettromagnetico. Vedremo come la visione, che prevede di studiare tali particelle come se fossero sfere rigide cariche, abbia portato alla prima scrittura di un'equazione del moto pre-relativistica. Partendo dall'espressione dell'equazione si analizzeranno le conseguenze della visione a sfere rigide, mostrando i principali motivi per cui venne abbandonata a favore di quella puntiforme. Si mostrerà, infine, l'equazione relativistica del moto di Lorentz-Dirac che è tuttora l'equazione più completa se si vuole tenere conto anche della reazione di radiazione.

Nel secondo capitolo si mostreranno il potenziale e i campi di Lienard-Wiechert. Queste quantità saranno sottoposte a un processo di regolarizzazione. L'analisi di questo metodo di regolarizzazione, che ha il pregio di essere Lorentz-invariante, occuperà la maggior parte del capitolo. Alla fine del capitolo si giungerà alla scrittura di un tensore energia impulso regolare, ma dipendente da un parametro $\varepsilon > 0$.

Nel terzo capitolo si procederà a esporre la rinormalizzazione del tensore energia-impulso del campo elettromagnetico derivato nel capitolo precedente. Lo scopo di questa rinormalizzazione è quello di poter eseguire il limite con $\varepsilon \to \infty$ in $S'(\mathbb{R}^4)$ e ottenere infine un tensore che sia una distribuzione. Questa procedura consisterà nella sottrazione della parte divergente del tensore, detto *controtermine*. Le proprietà richieste per quest'ultimo, dopo essere state giustificate, condurranno alla scrittura di un *controtermine* con tutte le caratteristiche richieste. La correttezza di quest'ultimo sarà giustificata dai risultati del capitolo successivo.

Nel quarto capitolo si procederà a dimostrare l'esistenza di una componente del tensore elettromagnetico rinormalizzato nel caso di una particella in moto rettilineo uniforme. Successivamente si farà un accenno al caso generale di una particella in moto generico. Verrà poi trattata la questione della conservazione del tensore rinormalizzato risultante e si mostrerà come il tensore energia impulso totale, ottenuto a partire dal tensore elettromagnetico rinormalizzato, sia conservato a patto di ammettere l'equazione di Lorentz-Dirac. Questa sezione sarà organizzata in modo analogo alla precedente, ovvero saranno svolti calcoli espliciti per il caso del moto rettilineo uniforme, seguiti da un accenno al caso generale. Seguendo la stessa struttura verranno trattati gli integrali di 4-momento rinormalizzati, ottenuti sostituendo al precedente tensore energia impulso elettromagnetico quello rinormalizzato. Infine si tratterà il problema dell'unicità del tensore rinormalizzato ottenuto.

Capitolo 1

Gli albori dell'elettrodinamica

Un grande contributo allo studio di come particelle cariche si muovono in campi elettromagnetici venne da H. A. Lorentz. Mentre oggi in elettrodinamica si fa l'assunzione di cariche puntiformi, Lorentz vedeva tali cariche come sferette rigide, dotate cioè di una densità di carica superficiale $\varrho(x)$ e di un raggio molto piccolo, ma non come puntiformi. Nel tentativo di descrivere il moto di particelle cariche come l'elettrone, egli si propose di mostrare come il termine inerziale presente nella loro equazione di Newton fosse dovuto prevalentemente al campo elettromagnetico che producono. In altri termini, egli pensava che le cariche, come l'elettrone, avessero una massa propria trascurabile. Il motivo di questa inerzia, prevalentemente di origine elettromagnetica, deriverebbe dal fatto che, accelerando la carica, si distorcerebbe anche il campo che essa genera e questo richiederebbe lavoro e perciò la carica mostrerebbe una certa resistenza a seguire la forza.

Il suo studio culminò nel 1892 con la scrittura della seguente equazione del moto per una particella carica nel sistema di riferimento di quiete istantanea dell'elettrone

$$\frac{e^2\vec{a}}{6\pi r c^2} = \frac{e^2}{6\pi c^3}\dot{\vec{a}} + \vec{F}_{est} + O(r). \tag{1.1}$$

Una possibile derivazione per questa formula è reperibile in [1] (16.3) pag.750. r è il raggio della carica, e si riferisce alla carica totale, mentre $\vec{a}$ è l'accelerazione a cui è soggetta, riferita al moto del centro di massa della sfera. $O(r)$ sostituisce termini di una espressione complessa e dell'ordine del raggio della particella. Per questo motivo tali termini possono risultare trascurabili, ma a priori l'unica maniera di liberarsi completamente di tali contributi è quella di pensare la particella come puntiforme. Con $\vec{F}_{est}$ si intende invece la forza dovuta a un campo esterno. Ricordando che siamo nel sistema di riferimento di quiete istantanea e perciò la velocità $\vec{v} = 0$, si ottiene la seguente formula

$$\vec{F}_{est} = \int_{sfera} \varrho(\vec{x})\vec{E}_{est}(\vec{x})\, d^3x. \tag{1.2}$$

L'equazione (1.1) mostra che trattare l'elettrone come una sfera rigida carica porta molte complicazioni, a partire dalla presenza dei termini $O(r)$. La seconda complicazione appare più chiara se si calcola l'energia posseduta da una sfera statica con una densità di carica superficiale. Se $\vec{E}$ è il campo coloumbiano generato da una sfera carica al suo esterno, allora $\vec{E}(\vec{x}) = \frac{e\vec{x}}{4\pi r^3}$, e quindi si trova

$$\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2}\vec{E}^2\, d^3x = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} d\vartheta \sin\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_r^{+\infty} \frac{e^2}{(4\pi)^2\tilde{r}^4}\tilde{r}^2 d\tilde{r} = -\frac{1}{8\pi}e^2\frac{1}{\tilde{r}}\Big|_r^{+\infty} = \frac{e^2}{8\pi r}. \tag{1.3}$$

Ricordando poi la relazione di Einstein $\varepsilon = m_{es}c^2$ si ottiene, per la massa elettrostatica dell'elettrone, la formula $m_{es} = \frac{e^2}{8\pi r c^2}$ per cui possiamo riscrivere l'equazione (1.1) come

$$\frac{4}{3}m_{es}\vec{a} = \frac{e^2}{6\pi c^3}\dot{\vec{a}} + \vec{F}_{est} + O(r). \tag{1.4}$$

Osservando l'equazione (1.4) vediamo che, se assumiamo che il termine d'inerzia sia dovuto solo alla massa elettromagnetica dell'elettrone, otteniamo un fattore 4/3 che non ci aspetteremmo. Questo fattore indica una relazione tra velocità e momento che non è quella tipica della meccanica newtoniana. Di questa complicazione Lorentz non era a conoscenza dato che la relazione di Einstein che abbiamo usato è successiva alla scrittura di (1.1).

Un'altra caratteristica peculiare dell'equazione (1.1) è la presenza del termine $\dot{\vec{a}}$ che la rende un'equazione differenziale del terzo ordine. Il problema di Cauchy ad essa associato richiederebbe quindi, oltre a $\vec{x}(0)$ e $\vec{v}(0)$, anche $\vec{a}(0)$ cioè l'accelerazione iniziale necessaria per trovare una soluzione unica. Il termine proporzionale a $\dot{\vec{a}}$ è la cosiddetta *reazione di radiazione* che rappresenta l'effetto del campo generato dalla particella sulla particella stessa.

Un altro problema insito nella descrizione lorentziana dell'elettrone sta nel fatto che una distribuzione di carica negativa o positiva concentrata sente una repulsione coloumbiana che non può renderla stabile a meno che non si introducano forze attrattive che la contrastino. Queste ultime, essendo attrattive, non possono essere di tipo elettromagnetico. La richiesta della presenza di tali forze si scontra, inevitabilmente, con il tentativo di rimanere all'interno di una descrizione di tipo puramente elettromagnetico.

L'equazione del moto (1.1) è chiaramente pre-relativistica ed è pensata per valere nel sistema di riferimento di quiete istantanea dell'elettrone. La sua estensione a un sistema di riferimento che vede l'elettrone muoversi con velocita $\vec{v}$ può essere trovata in [2]. Tale estensione tratta l'elettrone come un corpo "relativisticamente" rigido cioè tale che, se visto muoversi con velocità $\vec{v}$, presenta una contrazione lungo la direzione del moto di un fattore $1/\gamma$, con γ fattore di Lorentz. Corpi di questo tipo, d'altra parte, non esistono in relatività siccome richiederebbero una trasmissione istantanea del moto e quindi della forza. L'eliminazione di ogni possibilità di deformazioni di questa sfera, con la sola eccezione della contrazione relativistica nella direzione del moto, non permette, a priori, di estendere la trattazione con sfere rigide all'ambito relativistico.

Molti dei problemi qui esposti vengono risolti trattando le cariche come puntiformi. Nel 1938 Dirac pubblicò quella che viene chiamata equazione di Lorentz-Dirac per il moto di una particella carica. Questa equazione può essere derivata utilizzando un ragionamento euristico basato sulla conservazione del 4-momento. Per fare che si conservi dobbiamo tenere conto che una carica accelerata emette una radiazione a cui è associato un 4-momento emesso. Per questo motivo si deve considerare la reazione di radiazione, ovvero la forza che agisce sulla carica come conseguenza dell'emissione di radiazione. Quest'ultima fa variare il 4-momento della carica in modo tale che il 4-momento totale del sistema (carica e radiazione) sia conservato. Chiamando questa forza f^μ si avrebbe

$$\frac{dp^\mu}{ds} = eF^{\mu\nu}_{est}u_\nu + f^\mu, \tag{1.5}$$

dove $F^{\mu\nu}_{est}$ è il tensore elettromagnetico di un campo esterno. Per trovare la forma del 4-vettore f^μ, Dirac usò argomenti di consistenza algebrica e di conservazione dell'energia che sono reperibili in [4]. Egli ottenne la formula finale

$$\frac{dp^\mu}{ds} = \frac{e^2}{6\pi}\left(\frac{d\omega^\mu}{ds} + \omega^2 u^\mu\right) + eF^{\mu\nu}_{est}u_\nu, \tag{1.6}$$

dove ω^μ è la 4-accelerazione della particella. Questa equazione covariante a vista ha il pregio di eliminare il problema fittizio della presenza del fattore $4/3$ in (1.4) e non presenta i termini $O(r)$. Vedremo successivamente che la validità dell'equazione (1.6) è sancita in ultima analisi dalla richiesta della conservazione del 4-momento.

Capitolo 2

Regolarizzazione del tensore elettromagnetico

Prendiamo ora in considerazione le equazioni di Maxwell (4) e (3) per calcolare i campi elettromagnetici generati da una generica sorgente j^ν. L'equazione (3) è risolta da $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$, dove A^μ è il 4-potenziale. L'equazione (4) può allora essere riscritta in termini del 4-potenziale ottenendo

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu \partial^\nu A^\mu = j^\nu. \tag{2.1}$$

Imponendo la gauge di Lorentz si trova

$$\Box A^\nu = j^\nu \tag{2.2}$$

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \tag{2.3}$$

La soluzione causale dell'equazione (2.2), a cui siamo interessati, si può trovare in termini della funzione di Green ritardata del d'alambertiano che risolve $\Box G(x) = \delta^4(x)$,

$$G(x) = \frac{1}{4\pi|\vec{x}|}\delta(x^0 - |\vec{x}|) = \frac{1}{2\pi} H(x^0)\delta(x^2), \tag{2.4}$$

dove $H(x^0)$ è la funzione di Heaviside calcolata in x^0. Si ottiene il 4-potenziale di Lienard-Wiechert

$$A^\mu(x) = \int d^4y\, G(x-y)\, j^\mu(y) = \frac{1}{4\pi}\int d^3y\, \frac{j^\mu(x^0 - |\vec{x}-\vec{y}|, \vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|}. \tag{2.5}$$

Se si utilizza per la j^μ la formula (7), valida per una carica puntiforme di carica e, si ottiene

$$A^\mu(x) = \frac{e}{4\pi} \frac{u^\mu(\bar{s})}{u(\bar{s})_\nu (x^\nu - y^\nu(\bar{s}))}. \tag{2.6}$$

$\bar{s} \equiv \bar{s}(x)$ è la soluzione delle seguenti equazioni,

$$(x - y(\bar{s}))^2 = 0, \qquad x^0 - y^0(\bar{s}) \geq 0. \tag{2.7}$$

Tale soluzione si dimostra essere unica a condizione che la particella venga accelerata per un periodo limitato di tempo. Si vede che queste equazioni sono covarianti. La prima quantità è uno scalare, mentre il segno della componente temporale di un vettore di tipo luce o spazio è anch'essa Lorentz-invariante.

Introduciamo per semplicità il campo vettoriale $L^\mu(x) = x^\mu - y^\mu(\bar{s})$. Le equazioni (2.7) si riscrivono di conseguenza

$$L_\mu L^\mu = 0, \qquad L^0 \geq 0. \tag{2.8}$$

Ricordando $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$, da (2.6), si ottiene l'espressione

$$F^{\mu\nu} = \frac{e}{4\pi (uL)^3}(L^\mu u^\nu + L^\mu((uL)\omega^\nu - (\omega L) u^\nu) - (\mu \leftrightarrow \nu)). \tag{2.9}$$

(uL) sta per il prodotto scalare $u_\mu L^\mu$, mentre $(\mu \leftrightarrow \nu)$ sostituisce i due termini precedenti con gli indici scambiati. u e ω sono intese calcolate in $\bar{s}$, soluzione di (2.7). Analizziamo il caso con $x^\mu = y^\mu(s)$ che corrisponde a un punto sulla linea di universo della particella. La soluzione delle equazioni (2.7) è $\bar{s}(y(s)) = s$, che risolve la prima equazione e anche la seconda essendo $x^0 - y^0(s) = 0$. Si tratta di un caso particolare per cui vale $L^\mu(y(s)) = 0$. Come conseguenza di ciò si vede da (2.9) che $F^{\mu\nu}(y(s)) = \infty$.

Dalla seconda equazione di (2.5) si nota che $A^\mu(x^0, \vec{x})$ dipende dalla sorgente $j^\mu(y^0, \vec{y})$, valutata cioè in $y^0 = x^0 - |\vec{x} - \vec{y}|$. $|\vec{x} - \vec{y}|$ è proprio il tempo necessario al potenziale per trasmettersi da $\vec{y}$ a $\vec{x}$. In altre parole i punti y e x sono separati da una distanza di tipo luce e y si trova sulla falda inferiore del cono luce centrato in x. Questo si riflette in (2.6) nel fatto che $A^\mu(x)$ dipende dalle variabili cinematiche della particella calcolate in $\bar{s}$.

Introduciamo ora la regolarizzazione che ci porterà ad avere un $T^{\mu\nu}_{em_\varepsilon}$ regolare, cioè privo di singolarità, ma dipendente da un parametro ε positivo e con le dimensioni di una lunghezza. Vedremo nel capitolo successivo come eliminare questo parametro tramite un processo di rinormalizzazione. La regolarizzazione consiste nel sostituire alle equazioni (2.7) per $\bar{s}$ le seguenti equazioni per $\bar{s}_\varepsilon \equiv \bar{s}_\varepsilon(x)$

$$(x - y(\bar{s}_\varepsilon))^2 = \varepsilon^2, \qquad x^0 - y^0(\bar{s}_\varepsilon) \geq 0, \tag{2.10}$$

che sono covarianti per lo stesso motivo delle (2.7). Le equazioni (2.8) sono sostituite a loro volta da

$$L_{\varepsilon\mu} L^\mu_\varepsilon = \varepsilon^2, \qquad L^0_\varepsilon \geq 0. \tag{2.11}$$

Segue che vale l'equazione $(x^0 - y^0(\bar{s}_\varepsilon))^2 = |\vec{x} - \vec{y}(\bar{s}_\varepsilon)|^2 + \varepsilon^2$, che è l'equazione di un iperboloide centrato in x. La seconda equazione di (2.10) vincola y a stare sulla falda inferiore di tale iperboloide. Questo corrisponde ad ammettere che il potenziale generato da j^μ si propaghi a velocità minore di quella della luce.

Questa regolarizzazione può essere ottenuta in maniera più minimale sostituendo alla $G(x)$ una versione regolarizzata, ovvero

$$G_\varepsilon(x) = \frac{1}{4\pi\sqrt{|\vec{x}|^2 + \varepsilon^2}} \delta(x^0 - \sqrt{|\vec{x}|^2 + \varepsilon^2}) = \frac{1}{2\pi} H(x^0) \delta(x^2 - \varepsilon^2). \tag{2.12}$$

L'ultima espressione mette in risalto che questa regolarizzazione è Lorentz-invariante dato che può essere ottenuta semplicemente sostituendo $G(x)$ con $G_\varepsilon(x)$, quantità che è Lorentz-invariante a vista come si nota dal termine di destra di (2.12) . Questa proprietà è di fondamentale importanza e grazie ad essa i campi che si troveranno tramite questa regolarizzazione saranno certamente covarianti. Questo è necessario al fine di trovare una regolarizzazione dei tensori che li mantenga ancora tali.

Vediamo ora alcuni risultati di tale processo di regolarizzazione. Le equazioni (2.5) diventano

$$A^\mu_\varepsilon(x) = \int d^4y\, G_\varepsilon(x-y) j^\mu(y) = \frac{1}{4\pi} \int d^3y \frac{j^\mu(x^0 - \sqrt{|\vec{x} - \vec{y}|^2 + \varepsilon^2}, \vec{y})}{\sqrt{|\vec{x} - \vec{y}|^2 + \varepsilon^2}}. \tag{2.13}$$

Da queste segue che $A^\mu_\varepsilon(x)$ per una particella ha la stessa forma di (2.6) ma con la differenza sostanziale che $\bar{s}$ è sostituito con $\bar{s}_\varepsilon$ soluzione di (2.10). Lo stesso vale per $F^{\mu\nu}_\varepsilon(x)$ tenendo conto che L^μ è sostituito da L^μ_ε soluzione di (2.11). $A^\mu_\varepsilon(x)$ si trasforma ancora come un campo 4-vettoriale, mentre $F^{\mu\nu}_\varepsilon(x)$ si trasforma come un campo tensoriale di rango 2. Facendo le dovute sostituzioni in (2.9) si ottiene

$$F^{\mu\nu}_\varepsilon = \frac{e}{4\pi(uL_\varepsilon)^3} (L^\mu_\varepsilon u^\nu + L^\mu_\varepsilon((uL_\varepsilon)\omega^\nu - (\omega L_\varepsilon)u^\nu) - (\mu \leftrightarrow \nu)). \tag{2.14}$$

Il compito di questa regolarizzazione è quello di ottenere dei campi $F^{\mu\nu}_\varepsilon(x)$ che siano finiti anche se calcolati sulla linea di universo della particella. Ricordando che ora tutte le variabili cinematiche sono calcolate in $\bar{s}_\varepsilon$, se si va a studiare gli effetti del campo generato dalla sorgente vicino alla sorgente stessa, si vede che questo è proprio quello che si verifica.

Analizziamo cosa accade all'equazione (2.14) se $x^\mu \to y^\mu(s)$. In tal caso vale la pena notare che $\bar{s} \to s$. Se facessimo tendere $\varepsilon \to 0$ ritroveremmo la soluzione della (2.7) cioè che $\bar{s}_\varepsilon \to s$. Per questo ha senso espandere $\bar{s}_\varepsilon$ in serie attorno a s ottenendo quindi $\bar{s}_\varepsilon = s + \alpha\varepsilon + ...$ a meno di termini $O(\varepsilon^2)$. α è un parametro reale che possiamo determinare. Espandendo in serie $y^\mu(\bar{s}_\varepsilon)$ attorno a $y^\mu(s)$ otteniamo invece $y^\mu(\bar{s}_\varepsilon) = y^\mu(s) + \alpha\varepsilon u^\mu(s)$. Scrivendo l'equazione (2.10) per $x^\mu = y^\mu(s)$ si ottiene l'equazione $\alpha^2\varepsilon^2 u^2 = \varepsilon^2$ che è risolta da $\alpha = 1$ oppure $\alpha = -1$. Osserviamo che la seconda richiesta di (2.10) per $x^\mu = y^\mu(s)$ diventa $y^0(s) - y^0(s_\varepsilon) = -\alpha u^0 \varepsilon \geq 0$. $u^0 \geq 0$ poiché la parametrizzazione della linea di universo della particella è scelta in modo tale che x^0 aumenti nella stessa direzione di s. Segue, quindi, che la scelta da fare è $\alpha = -1$. Troviamo infine che per $x^\mu \to y^\mu(s)$ vale

$$L^\mu_\varepsilon = x^\mu - y^\mu(\bar{s}_\varepsilon) \to \varepsilon u^\mu(s). \tag{2.15}$$

Quindi per il denominatore di (2.14) varrà $(uL_\varepsilon)^3 \to \varepsilon^3$. $F_\varepsilon^{\mu\nu}(y(s))$ risulta quindi *finito*.

Questa regolarizzazione sarà più evidente prendendo il caso del moto rettilineo uniforme. Questo caso è importante anche per un altro motivo. Ammettendo che $\exists \hat{s}$ tale che la 4-accelerazione $\omega^\mu(s) = 0$ per $s < \hat{s}$, cioè la particella non sia stata accelerata per un tempo infinito e tenendo conto che vale sempre $\lim_{|\vec{x}|\to\infty} \bar{s}_\varepsilon(x) = -\infty$, si ottiene che $\lim_{|\vec{x}|\to\infty} \omega(\bar{s}_\varepsilon) = 0$. Questo significa che all'infinito spaziale il campo (2.14) ha sempre l'andamento di quello creato da una particella in moto rettilineo uniforme. Notiamo infine che questa regolarizzazione mantiene la gauge di Lorentz, infatti $A_\varepsilon^\mu = G_\varepsilon * j^\mu$, dove $*$ indica il prodotto di convoluzione. La derivata distribuzionale può essere fatta agire su uno qualsiasi dei due termini ottenendo $A_\varepsilon^\mu = G_\varepsilon * \partial_\mu j^\mu = 0$, poiché j^μ è conservata.

Caso del moto rettilineo uniforme. In questo caso la linea di universo della particella può essere parametrizzata nel seguente modo $y^\mu(s) = u^\mu s$, dove u^μ è costante. Per esplicitare $\bar{s}_\varepsilon(x)$ bisogna risolvere l'equazione di secondo grado derivante da $(x - u\bar{s}_\varepsilon)^2 = \varepsilon^2$ e scegliere la soluzione con il meno per obbedire alla seconda condizione in (2.11). Si ottiene $\bar{s}_\varepsilon(x) = (ux) - \sqrt{(ux)^2 - x^2 + \varepsilon^2}$, $L_\varepsilon^\mu = x^\mu - u^\mu(u^\nu x_\nu - \sqrt{(ux)^2 - x^2 + \varepsilon^2})$ e quindi il prodotto scalare $(uL_\varepsilon) = (ux) - \bar{s}_\varepsilon(x) = \sqrt{(ux)^2 - x^2 + \varepsilon^2}$. Ricordando poi che in questo caso $\omega^\mu = 0$, da (2.9), si ottiene

$$F_\varepsilon^{\mu\nu}(x) = \frac{e}{4\pi} \frac{x^\mu u^\nu - x^\nu u^\mu}{\left((ux)^2 - x^2 + \varepsilon^2\right)^{\frac{3}{2}}}. \tag{2.16}$$

Notiamo che questo campo è regolare anche se calcolato sulla linea di universo della particella, cioè con $x^\mu \to u^\mu s$.

Per fare il confronto con il caso mostrato nell'Introduzione, prendiamo una particella statica nell'origine. Abbiamo quindi $u^\mu = (1,0,0,0)$, ed è facile derivare da (2.16) le componenti di $F_\varepsilon^{\mu\nu}(x)$

$$\vec{E}_\varepsilon(\vec{x}) = \frac{e\vec{x}}{4\pi(|\vec{x}|^2 + \varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad \vec{B}_\varepsilon(\vec{x}) = 0. \tag{2.17}$$

L'energia elettromagnetica regolarizzata risulta essere

$$\varepsilon_{em_\varepsilon} = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2}\vec{E}_\varepsilon^2\, d^3x = \frac{e^2}{32\pi^2}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{r^2}{(r^2+\varepsilon^2)^3}\, d^3x = \frac{3e^2}{128\varepsilon}. \tag{2.18}$$

Per $\varepsilon > 0$ essa è dunque finita, mentre per $\varepsilon \to 0$ diverge come $\varepsilon_{em_\varepsilon} \sim 1/\varepsilon$. Ritroviamo quindi un risultato simile all'energia elettrostatica di una sfera carica. L'andamento per $\varepsilon \to 0$ è infatti lo stesso di (1.3) per $r \to 0$ a meno dei coefficienti. La differenza più evidente è che, nella formula (1.3), quello che è stato fatto è semplicemente eliminare dal dominio di integrazione un intorno della singolarità senza regolarizzare le quantità interessate come la densità di energia. La regolarizzazione introdotta ci permetterà invece di definire un tensore elettromagnetico regolarizzato che sia Lorentz-covariante. Per quanto detto riguardo alla sua regolarità e al suo andamento asintotico, $F_\varepsilon^{\mu\nu}$ è una distribuzione regolare $C^\infty(\mathbb{R}^4)$ limitata.

Riassumendo, $F_\varepsilon^{\mu\nu}(x)$ è regolare anche se calcolato sulla linea di universo della particella , $x^\mu = y^\mu(s)$ e inoltre vale il limite

$$\lim_{\varepsilon\to 0} F_\varepsilon^{\mu\nu}(x) = F^{\mu\nu}(x), \qquad \forall x^\mu \neq y^\mu(s). \tag{2.19}$$

Utilizzando $F_\varepsilon^{\mu\nu}$ possiamo costruire un tensore elettromagnetico regolarizzato che chiamiamo $T_{em_\varepsilon}^{\mu\nu}$

$$T_{em_\varepsilon}^{\mu\nu} = F_\varepsilon^{\mu\varrho} F_{\varepsilon\varrho}{}^{\nu} + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu} F_\varepsilon^{\varrho\sigma} F_{\varepsilon\varrho\sigma}. \tag{2.20}$$

Questa quantità è un tensore per quanto detto precedentemente sulla Lorentz-invarianza della regolarizzazione. Inoltre è una distribuzione regolare $C^\infty(\mathbb{R}^4)$ limitata perché è prodotto di distribuzioni con tale regolarità e quindi $T_{em_\varepsilon}^{\mu\nu} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^4)$. Aggiungiamo che per $|\vec{x}| \to \infty$ $F_\varepsilon^{\mu\nu} \sim 1/r^2$ e si ottiene l'andamento $T_{em_\varepsilon}^{\mu\nu} \sim 1/r^4$. Inoltre, utilizzando (2.19), fuori dalla linea di universo della particella il limite per $\varepsilon \to 0$ di $T_{em_\varepsilon}^{\mu\nu}$ ci restituisce ovviamente il tensore (3.3) scritto nell'Introduzione,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} T_{em_\varepsilon}^{\mu\nu}(x) = T_{em}^{\mu\nu}(x), \qquad \forall x^\mu \neq y^\mu(s). \tag{2.21}$$

Tuttavia, $T_{em_\varepsilon}^{\mu\nu}(x)$ rappresenta una successione di distribuzioni che non converge a un tensore $T_{em}^{\mu\nu}(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^4)$, come si è mostrato precedentemente.

Ad esempio nel caso della particella statica avevamo trovato

$$T_{em_\varepsilon}^{00} = \frac{1}{2}\vec{E}_\varepsilon(\vec{x})^2 = \frac{e^2}{32\pi^2}\frac{r^2}{(r^2+\varepsilon^2)^3}, \tag{2.22}$$

che nel limite con $\varepsilon \to 0$ per $\vec{x} \neq 0$ ammette il *limite puntuale*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} T^{00}_{em_\varepsilon} = \frac{e^2}{32\pi^2} \frac{1}{r^4} = T^{00}_{em}, \tag{2.23}$$

il quale, come visto, non è una distribuzione.

Capitolo 3

Rinormalizzazione del tensore elettromagnetico regolarizzato

La causa della non esistenza del limite $S'-\lim_{\varepsilon\to 0} T^{\mu\nu}_{em_\varepsilon}(x)$, cioè del limite nella topologia di $S'(\mathbb{R}^4)$, è da ricercarsi nella singolarità di $T^{\mu\nu}_{em_\varepsilon}(x)$ lungo la linea di universo della particella $y^\mu(s)$. Prima di calcolare il limite con $\varepsilon \to 0$ sarà necessario individuare ed estrarre i termini che costituiscono la parte divergente di $T^{\mu\nu}_{em_\varepsilon}$. Questi termini verranno raccolti in un tensore che sarà ovviamente divergente sulla linea di universo e verrà definito *controtermine* e indicato con il simbolo $\widehat{T}^{\mu\nu}_{em_\varepsilon}$. Successivamente il controtermine verrà sottratto a $T^{\mu\nu}_{em_\varepsilon}$ in modo che la parte divergente del secondo si elida con il primo. Solo dopo aver fatto questi passaggi si potrà computare il limite

$$S'-\lim_{\varepsilon\to 0}(T^{\mu\nu}_{em_\varepsilon}(x) - \widehat{T}^{\mu\nu}_{em_\varepsilon}(x)) = \widetilde{T}^{\mu\nu}_{em}(x), \tag{3.1}$$

ottenendo un tensore $\widetilde{T}^{\mu\nu}_{em} \in S'(\mathbb{R}^4)$. Questo tensore finale sostituirà a tutti gli effetti il tensore energia impulso del campo elettromagnetico $T^{\mu\nu}_{em}$ trovato all'inizio. Il calcolo effettivo del limite (3.1) verrà svolto solo per una componente di $\widetilde{T}^{\mu\nu}_{em}$, nel caso particolare di una particella in moto rettilineo uniforme. La scrittura del $\widehat{T}^{\mu\nu}_{em_\varepsilon}$, allo stesso modo, sarà svolta nel caso rettilineo uniforme, ma con qualche riferimento al caso generale di un moto qualsiasi. Come ulteriore prova della validità del tensore elettromagnetico costruito si mostrerà infine che il nuovo tensore totale nel caso con u^μ costante

$$\widetilde{T}^{\mu\nu} = \widetilde{T}^{\mu\nu}_{em} + T^{\mu\nu}_{p}, \tag{3.2}$$

è conservato solo se vale l'equazione di Lorentz ovvero, nel caso trattato, se $\omega^\mu = 0$.

Questo capitolo si concentrerà sui passaggi che ci porteranno a dedurre la forma $\widehat{T}^{\mu\nu}_{em_\varepsilon}$. Il processo che ci porterà a una scrittura esplicita del limite (3.1) che definisce il tensore elettromagnetico rinormalizzato $\widetilde{T}^{\mu\nu}_{em}$, si chiama *rinormalizzazione.* Nel Capitolo successivo ci concentreremo sulla prova dell'esistenza e dell'unicità del limite (3.1).

Determinazione del controtermine. Al fine di determinare il controtermine $\widehat{T}^{\mu\nu}_{em_\varepsilon}$ si tiene conto che esso deve soddisfare alcune proprietà

- Deve essere un tensore sotto trasformazioni di Poincarè.

  Questa richiesta segue dal fatto che il controtermine è la parte divergente di un tensore e per questo deve essere esso stesso un tensore. Vedremo che, in particolare, richiedere che sia invariante sotto traslazioni ci permette di escludere la presenza di alcuni termini.

- Il suo supporto può essere al più la linea di universo della particella, ovvero $\widehat{T}^{\mu\nu}_{em_\varepsilon}(x) \neq 0$ solo se $x^\mu = y^\mu(s)$.

  Questo segue dal fatto che sul complemento della linea di universo il $\lim_{\varepsilon\to 0} T^{\mu\nu}_{em_\varepsilon}(x) = T^{\mu\nu}_{em}(x)$ restituisce il tensore dell'Introduzione, che calcolato su $x^\mu \neq y^\mu(s)$ è regolare e conservato. Avevamo visto nell'Introduzione che il calcolo della 4-divergenza non si poteva fare in maniera diretta siccome essa era mal definita a causa delle singolarità del tensore. Se $x^\mu \neq y^\mu(s)$ tale calcolo può essere portato avanti in quanto, $T^{\mu\nu}_{em}(x)$ non presenta singolarità fuori dalla linea di universo della particella. Vediamolo brevemente, partendo da

  $$T^{\mu\nu}_{em} = F^{\mu\varrho}F_\varrho{}^\nu + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F^{\varrho\sigma}F_{\varrho\sigma}, \tag{3.3}$$

si ottiene

$$\partial_\mu T^{\mu\nu}_{em} = \partial_\mu F^{\mu\varrho} F_\varrho{}^\nu + F^{\mu\varrho}\partial_\mu F_\varrho{}^\nu + \frac{1}{4}\partial^\nu (F^{\varrho\sigma}F_{\varrho\sigma}), \tag{3.4}$$

$$= -j_\varrho F^{\nu\varrho} + \frac{1}{2}F_{\mu\varrho}(\partial^\mu F^{\varrho\nu} - \partial^\varrho F^{\mu\nu}) + \frac{1}{2}F_{\varrho\sigma}\partial^\nu F^{\varrho\sigma}, \tag{3.5}$$

$$= \frac{1}{2}F_{\mu\varrho}(\partial^\mu F^{\varrho\nu} + \partial^\varrho F^{\nu\mu} + \partial^\nu F^{\mu\varrho}) = 0. \tag{3.6}$$

Nella seconda riga abbiamo usato l'equazione di Maxwell (4), nella terza l'identità di Bianchi (3). Infine il fatto che questo calcolo è effettuato per $x^\mu \neq y^\mu(s)$ ci ha permesso di dire che $j^\varrho(x) = e\int u^\varrho(s)\delta^{(4)}(x-y(s))\,ds = 0$.

Una seconda ragione per cui non si vuole modificare $T^{\mu\nu}_{em}(x)$ al di fuori della linea di universo è che la sua forma lontana dalla sorgente è ben testata dal punto di vista sperimentale grazie a fenomeni come l'irraggiamento che sono facilmente misurabili.

$T^{\mu\nu}_{em}(x)$ è divergente se $x^\mu = y^\mu(s)$ questo vuol dire $(t,\vec{x}) = (y^0,\vec{y})$, cioè che sia le coordinate spaziali che quelle temporali coincidono. Ne segue che risulta naturale pensare di prendere $\widehat{T}^{\mu\nu}_{em_\varepsilon}(x)$ proporzionale alla quantità Lorentz-invariante

$$\int \delta^4(x-y(s))\,ds = \sqrt{1-\vec{v}^2(t)}\,\delta^3(\vec{x}-\vec{y}(t)). \tag{3.7}$$

Ammettere un controtermine proporzionale a questa quantità significa dire che il suo supporto è concentrato nei punti in cui $\vec{x} = \vec{y}(t)$ cioè sul punto spaziale in cui, a t fissato, sta la particella.

- Deve essere simmetrico e a traccia nulla, cioè $\widehat{T}^{\mu\nu}_{em_\varepsilon} = \widehat{T}^{\nu\mu}_{em_\varepsilon}$ e $\widehat{T}^{\mu\nu}_{em_\varepsilon}\eta_{\mu\nu} = 0$.

  Questa richiesta è dovuta al fatto che $\widehat{T}^{\mu\nu}_{em_\varepsilon}$ rappresenta la parte divergente di $T^{\mu\nu}_{em_\varepsilon}$, il quale è un tensore simmetrico e a traccia nulla. Segue quindi che $\widehat{T}^{\mu\nu}_{em_\varepsilon}$ deve essere proporzionale a un tensore $H^{\mu\nu}$ simmetrico e a traccia nulla. Giungiamo quindi a dire che

$$\widehat{T}^{\mu\nu}_{em_\varepsilon} \propto \int H^{\mu\nu}\delta^4(x-y(s))\,ds, \tag{3.8}$$

  dove $H^{\mu\nu}$ risulta definito solo sulla linea di universo della particella essendo moltiplicato per la $\delta^4(x-y(s))$.

- Deve essere scelto in maniera tale che esista il seguente limite nella topologia di S'

$$S'\!-\lim_{\varepsilon\to 0}(T^{\mu\nu}_{em_\varepsilon}(x) - \widehat{T}^{\mu\nu}_{em_\varepsilon}(x)) = \widetilde{T}^{\mu\nu}_{em}(x). \tag{3.9}$$

  Questa richiesta, come è già stato detto, è necessaria affinchè $\widetilde{T}^{\mu\nu}_{em}$ sia una distribuzione e si possa quindi calcolarne la 4-divergenza $\partial_\mu\widetilde{T}^{\mu\nu}_{em}$. Abbiamo già visto nell'equazione (2.18) che per il moto rettilineo uniforme vale che $\varepsilon_{em_\varepsilon} = \int T^{00}_{em_\varepsilon}$ è proporzionale a $1/\varepsilon$. Il controtermine dovrà avere esattamente lo stesso andamento per $\varepsilon \to 0$ in modo da cancellare la divergenza. Quindi possiamo ipotizzare che $\widehat{T}^{\mu\nu}_{em_\varepsilon} \propto 1/\varepsilon$. Ragionando in questo modo il controtermine sarà definito a meno di termini finiti per $\varepsilon \to 0$ e di termini di ordine ε che sono irrilevanti poiché svaniscono nel limite (3.1). Precisiamo che il ragionamento precedente si basa sul fatto che $\varepsilon_{em_\varepsilon}$ è proporzionale a $1/\varepsilon$ e questo risultato è stato derivato nel caso del moto rettilineo uniforme. In seguito accenneremo al caso più generale di un moto accelerato e vedremo che la forma del controtermine, ricavata in questo capitolo, si estende anche a tale moto.

- Deve essere tale che il tensore energia impulso totale è conservato

$$\partial_\mu(\widetilde{T}^{\mu\nu}_{em} + T^{\mu\nu}_p) = 0, \tag{3.10}$$

  se vale un'opportuna equazione del moto.

Proseguendo nella determinazione di $\widehat{T}^{\mu\nu}_{em_\varepsilon}$ notiamo che nell'equazione (2.18) è presente un'altra grandezza dimensionale, e^2, che quindi manteniamo come coefficiente nel controtermine, ottenendo $\widehat{T}^{\mu\nu}_{em_\varepsilon} \propto e^2/\varepsilon$. Da questa scrittura possiamo dedurre che $H^{\mu\nu}$ deve essere adimensionale, infatti $\int \delta^4(x-y(s))\,ds$ ha le dimensioni di $(lunghezza)^{-3}$ mentre e^2 di $(energia)\cdot(lunghezza)$. Ricordando che ε ha le dimensioni di una lunghezza e che $\widehat{T}^{\mu\nu}_{em_\varepsilon}$ deve avere quelle di una densità di energia, si deduce che $H^{\mu\nu}$ deve essere adimensionale.

Come abbiamo detto $H^{\mu\nu}$ è definito solo sulla linea di universo, ne consegue che in termini di variabili può dipendere solamente da quelle cinematiche della particella y^μ, u^μ, ω^μ e eventualmente dalle loro derivate. Di queste variabili solamente u^μ è adimensionale. A partire dalla sola variabile u^μ, l'unico termine simmetrico e a traccia nulla che si può costruire utilizzando la metrica $\eta^{\mu\nu}$, è della forma

$$H^{\mu\nu} = a(u^\mu u^\nu - \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}). \tag{3.11}$$

Ci sono però altre combinazioni adimensionali di variabili cinematiche e derivate che sono anch'esse simmetriche e a traccia nulla. La loro combinazione più generale è $c(y^\mu\omega^\nu + y^\nu\omega^\mu - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}y^\varrho\omega_\varrho) + d(y^\mu\partial^\nu + y^\nu\partial^\mu - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}y^\varrho\partial_\varrho)$, dove c e d sono costanti adimensionali. Nel caso del moto rettilineo uniforme la parentesi moltiplicata per la costante c è esclusa perché $\omega^\mu = 0$, ma nel caso generale, almeno a livello dimensionale, potrebbe sembrare permessa. La seconda parentesi invece potrebbe sembrare permessa in entrambi i casi. In realtà queste combinazioni sono proibite poiché y^μ non è invariante per traslazioni, ma trasforma come $y^\mu \to y^\mu + a^\mu$. Quindi esse non soddisfano la prima richiesta che abbiamo fatto, ovvero che il controtermine trasformi come un tensore sotto tutto il gruppo di Poincarè. Abbiamo, quindi, determinato il controtermine per il moto rettilineo uniforme a meno di una costante moltiplicativa. Aggiungendo un fattore $\frac{1}{(4\pi)^2}$, che torna utile nel calcolo del limite (3.1), abbiamo

$$\widehat{T}^{\mu\nu}_{em_\varepsilon} = \frac{a}{\varepsilon}\Big(\frac{e}{4\pi}\Big)^2 \int (u^\mu u^\nu - \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu})\delta^4(x - y(s))\, ds. \tag{3.12}$$

Secondo queste argomentazioni euristiche, il tensore elettromagnetico rinormalizzato assumerebbe quindi la forma

$$\widetilde{T}^{\mu\nu}_{em} = S'\!-\lim_{\varepsilon\to 0}\Big(T^{\mu\nu}_{em_\varepsilon}(x) - \frac{a}{\varepsilon}\Big(\frac{e}{4\pi}\Big)^2 \int (u^\mu u^\nu - \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu})\delta^4(x - y(s))\, ds\Big) = S'\!-\lim_{\varepsilon\to 0}\widetilde{T}^{\mu\nu}_{em_\varepsilon}(x). \tag{3.13}$$

Dove abbiamo definito per semplicità $\widetilde{T}^{\mu\nu}_{em_\varepsilon}$ la quantità su cui agisce il limite. Per poter affermare che un tale tensore esiste dobbiamo dimostrare che esiste una costante a tale che il limite (3.13) esista in S'.

Capitolo 4

Esistenza e unicità del tensore elettromagnetico rinormalizzato

4.1 Esistenza del tensore elettromagnetico rinormalizzato

In questa sezione si mostreranno i calcoli riferiti alla determinazione della componente $\widetilde{T}^{00}_{em}$ nel caso di una particella in moto rettilineo uniforme. Il tensore definito da (3.13) è Lorentz-covariante, grazie al fatto che lo sono il tensore regolarizzato e il controtermine. Dimostrando l'esistenza e l'unicità di $\widetilde{T}^{\mu\nu}_{em}$ nel sistema di riferimento di riposo della particella, segue che avremo dimostrato queste proprietà per qualunque altro sistema inerziale. Prendiamo dunque $u^\mu = (1,0,0,0)$ e poniamo la particella nell'origine.

Prima di tutto bisogna determinare le componenti del tensore elettromagnetico regolarizzato e del controtermine. Nel caso statico le componenti di $T^{\mu\nu}_{em_\varepsilon}$ si trovano a partire dalle quantità riportate nell'Introduzione (9)(10)(11), sostituendo a $\vec{E}$ il campo regolarizzato $\vec{E}_\varepsilon$ determinato in (2.17). Si trova

$$T^{00}_{em_\varepsilon} = \frac{1}{2}\vec{E}^2_\varepsilon = \frac{1}{2}\Big(\frac{e}{4\pi}\Big)^2 \frac{r^2}{(r^2+\varepsilon^2)^3}, \tag{4.1}$$

$$T^{i0}_{em_\varepsilon} = T^{0i}_{em_\varepsilon} = 0, \tag{4.2}$$

$$T^{ij}_{em_\varepsilon} = \frac{1}{2}\vec{E}^2_\varepsilon \delta^{ij} - E^i_\varepsilon E^j_\varepsilon = \frac{1}{2}\Big(\frac{e}{4\pi}\Big)^2 \frac{r^2\delta^{ij} - 2x^i x^j}{(r^2+\varepsilon^2)^3}. \tag{4.3}$$

Le componenti del controtermine si determinano in maniera diretta ricordando che nel caso statico abbiamo $\int \delta^4(x - y(s))\, ds = \delta^3(\vec{x} - \vec{y}(t))$. Il limite (3.13) di cui dobbiamo dimostrare l'esistenza risulta essere costituito dalle seguenti componenti

$$\widetilde{T}^{00}_{em} = \frac{1}{2}\Big(\frac{e}{4\pi}\Big)^2 S'\!-\!\lim_{\varepsilon\to 0}\Big(\frac{r^2}{(r^2+\varepsilon^2)^3} - \frac{3a}{2\varepsilon}\delta^3(\vec{x})\Big), \tag{4.4}$$

$$\widetilde{T}^{i0}_{em} = \widetilde{T}^{0i}_{em} = 0, \tag{4.5}$$

$$\widetilde{T}^{ij}_{em} = \frac{1}{2}\Big(\frac{e}{4\pi}\Big)^2 S'\!-\!\lim_{\varepsilon\to 0}\Big(\frac{r^2\delta^{ij} - 2x^i x^j}{(r^2+\varepsilon^2)^3} - \frac{a}{2\varepsilon}\delta^{ij}\delta^3(\vec{x})\Big). \tag{4.6}$$

Esistenza di $\widetilde{T}^{00}_{em}$. Concentriamoci sul limite (4.4), siccome si tratta di un limite nella topologia di S' dobbiamo dimostrare che si può trovare una costante a per cui la "successione" di numeri complessi ottenuta applicando $\widetilde{T}^{00}_{em_\varepsilon}$ a una *qualsiasi* funzione di test $\varphi(\vec{x}) \in S(\mathbb{R}^4)$, converge a un limite finito se $\varepsilon \to 0$.

$$\widetilde{T}^{00}_{em}(\varphi) = \lim_{\varepsilon\to 0}\widetilde{T}^{00}_{em_\varepsilon}(\varphi) = \frac{1}{2}\Big(\frac{e}{4\pi}\Big)^2 \lim_{\varepsilon\to 0}\int \Big(\frac{r^2}{(r^2+\varepsilon^2)^3} - \frac{3a\delta^3(\vec{x})}{2\varepsilon}\Big)\varphi(x)\, d^4x. \tag{4.7}$$

D'altra parte, nel caso statico, $T^{\mu\nu}_{em_\varepsilon}$ non dipende dal tempo, quindi la dipendenza temporale si trova solo in $\varphi(x)$. Risulta interessante notare che per calcolare gli integrali di 4-momento in un volume V a un tempo fissato bisogna applicare $\widetilde{T}^{0\mu}_{em}$ a distribuzioni in cui la dipendenza temporale è particolarmente semplice, ovvero $\bar{\varphi}(t,\vec{x}) = \delta(t - t^0)\chi_V(\vec{x})$, dove $\chi_V(\vec{x})$ è la funzione caratteristica del volume V. $\bar{\varphi}(t,\vec{x})$ però non è una "funzione di test", cioè $\bar{\varphi}(t,\vec{x}) \notin S(\mathbb{R}^4)$. Innanzitutto non è continua. Come vedremo tra poco $\widetilde{T}^{\mu\nu}_{em_\varepsilon} \in S'(\mathbb{R}^4)$ per cui è, per definizione, un funzionale lineare continuo che agisce su $S(\mathbb{R}^4)$. Quindi, a priori, non possiamo farlo agire su distribuzioni come $\bar{\varphi}(t,\vec{x}) = \delta(t-t^0)\chi_V(\vec{x})$. A tale problema, in realtà, si può rimediare pensando di approssimare $\bar{\varphi}(t,\vec{x}) = \delta(t-t^0)\chi_V(\vec{x})$ con una successione di funzioni $\{\bar{\varphi}_n\}$ tale che $\bar{\varphi}_n(t,\vec{x}) \in S(\mathbb{R}^4)$ $\forall n$ e tali che vale il seguente limite, puntualmente e quasi ovunque

$$\lim_{n\to\infty} \bar{\varphi}_n(t,\vec{x}) = \bar{\varphi}(t,\vec{x}). \tag{4.8}$$

A questo punto si definisce la quantità di nostro interesse come

$$\widetilde{T}^{0\mu}_{em}(\bar{\varphi}) = \lim_{n\to\infty} \widetilde{T}^{0\mu}_{em}(\bar{\varphi}_n). \tag{4.9}$$

Tornando alla dimostrazione dell'esistenza del limite (4.7), conviene integrare la delta su d^3x, ottenendo

$$\int\int \Big(\frac{3a\delta^3(\vec{x})}{2\varepsilon}\varphi(t,\vec{x})\,d^3x\Big)\,dt = \int \frac{3a}{2\varepsilon}\varphi(t,0)\,dt. \tag{4.10}$$

Segue che dobbiamo dimostrare l'esistenza di

$$\widetilde{T}^{00}_{em}(\varphi) = \lim_{\varepsilon\to 0} \widetilde{T}^{00}_{em_\varepsilon}(\varphi) = \frac{1}{2}\Big(\frac{e}{4\pi}\Big)^2 \lim_{\varepsilon\to 0}\Big(\int\int \frac{r^2\varphi(t,\vec{x})}{(r^2+\varepsilon^2)^3}\,d^3x\,dt - \int \frac{3a\varphi(t,0)}{2\varepsilon}\,dt\Big), \tag{4.11}$$

per $\forall\varphi(t,\vec{x}) \in S(\mathbb{R}^4)$. A tal fine risulta utile utilizzare il seguente integrale

$$\int \frac{r^2}{(r^2+\varepsilon^2)^3}\,d^3x = \frac{3\pi^2}{4\varepsilon}. \tag{4.12}$$

Sfruttando tale risultato, possiamo aggiungere e togliere la stessa quantità dentro all'integrale, ottenendo

$$\widetilde{T}^{00}_{em}(\varphi) = \frac{1}{2}\Big(\frac{e}{4\pi}\Big)^2 \lim_{\varepsilon\to 0}\Big(\int\int \Big(\frac{r^2(\varphi(t,\vec{x})-\varphi(t,0))}{(r^2+\varepsilon^2)^3}\Big)\,d^3x\,dt + \int \Big(\frac{\pi^2}{2} - a\Big)\frac{3\varphi(t,0)}{2\varepsilon}\,dt\Big). \tag{4.13}$$

Una buona costante sembrerebbe $a = \frac{\pi^2}{2}$. In questo caso ci basterebbe dimostrare l'esistenza dell'integrale del primo addendo. Per farlo risulta utile portare il limite sotto il segno di integrale usando un corollario del teorema della convergenza dominata. Chiamando l'integrando $f_\varepsilon(t,\vec{x})$, il passaggio del limite sotto l'integrale è permesso se $\exists g(t,\vec{x}) \in L^1(\mathbb{R}^4)$ tale che $|f_\varepsilon(t,\vec{x})| \le g(t,\vec{x})$, $\forall\varepsilon$ e quasi ovunque. Osservando

$$f_\varepsilon(t,\vec{x}) = \frac{r^2(\varphi(t,\vec{x})-\varphi(t,0))}{(r^2+\varepsilon^2)^3}, \tag{4.14}$$

a prima vista può sembrare che non sia possibile limitarla con una funzione integrabile a causa del suo andamento in $r=0$ nel limite $\varepsilon\to 0$. In realtà tale andamento non dà problemi. Per renderlo più chiaro dobbiamo dividere il dominio di integrazione tridimensionale in due domini, ovvero dove $r>1$ e dove $r<1$. Questo corrisponde a studiare l'integrando

$$f'_\varepsilon(t,\vec{x}) = \frac{r^2(\varphi(t,\vec{x})-\varphi(t,0))}{(r^2+\varepsilon^2)^3}H(1-r) + \frac{r^2(\varphi(t,\vec{x})-\varphi(t,0))}{(r^2+\varepsilon^2)^3}H(r-1), \tag{4.15}$$

dove H rappresenta la funzione di Heaviside. L'integrando può essere modificato con l'aggiunta di un termine in modo che non venga cambiato il valore dell'integrale, ottenendo

$$f'_\varepsilon(t,\vec{x}) = \frac{r^2(\varphi(t,\vec{x})-\varphi(t,0)-x^i\partial_i\varphi(t,0))}{(r^2+\varepsilon^2)^3}H(1-r) + \frac{r^2(\varphi(t,\vec{x})-\varphi(t,0))}{(r^2+\varepsilon^2)^3}H(r-1). \tag{4.16}$$

Studiamo il contributo all'integrale del termine che abbiamo aggiunto

$$\int\int \frac{r^2x^i\partial_i\varphi(t,0)}{(r^2+\varepsilon^2)^3}H(1-r)\,d^3x\,dt. \tag{4.17}$$

Andando in coordinate sferiche possiamo riscrivere l'integrale come segue

$$\int\int\int \frac{r^2x^i\partial_i\varphi(t,0)}{(r^2+\varepsilon^2)^3}H(1-r)\,r^2dr\,d\Omega\,dt = \int \partial_i\varphi(t,0)\,dt\int_0^1 \frac{r^5}{(r^2+\varepsilon^2)^3}\,dr\int n^i\,d\Omega. \tag{4.18}$$

Abbiamo definito $n^i = \frac{x^i}{r}$. Per motivi di invarianza per rotazioni vale $\int n^i \, d\Omega = 0$ e il termine (4.17) risulta nullo.

L'equazione (4.16) può essere maggiorata con

$$|f'_\varepsilon(t,\vec{x})| \leq \frac{|\varphi(t,\vec{x}) - \varphi(t,0) - x^i \partial_i \varphi(t,0)|}{r^4} H(1-r) + \frac{1}{r^4} \frac{2}{1+t^2} \sup_{(t,\vec{x})} \big((1+t^2)|\varphi(t,\vec{x})|\big) H(r-1) = g(t,\vec{x}), \tag{4.19}$$

dove $\sup_{(t,\vec{x})} \big((1+t^2)|\varphi(t,\vec{x})|\big)$ indica l'estremo superiore di $(1+t^2)|\varphi(t,\vec{x})|$ in $\mathbb{R}^4$. Notiamo che $g(t,\vec{x})$ ha l'andamento $g \sim \frac{1}{r^2}$ se $r \to 0$ e $g \sim \frac{1}{r^4 t^2}$ se $r \to \infty$ e $t \to \infty$, per questo $g \in L^1(\mathbb{R}^4)$. Quindi, grazie al corollario del teorema della convergenza dominata, possiamo portare il limite sotto il segno d'integrale. Otteniamo che il limite (4.13) esiste solo se vale $a = \frac{\pi^2}{2}$ ed esso si riduce a

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int \int \Big(\frac{r^2(\varphi(t,\vec{x}) - \varphi(t,0))}{(r^2+\varepsilon^2)^3}\Big) d^3x \, dt = \int \Big(\int_{r<1} \frac{\varphi(t,\vec{x}) - \varphi(t,0) - x^i \partial_i \varphi(t,0)}{r^4} d^3x + \int_{r>1} \frac{\varphi(t,\vec{x}) - \varphi(t,0)}{r^4} d^3x \Big) dt. \tag{4.20}$$

Al fine di ottenere una forma più compatta risulta utile notare che, una volta che la convergenza degli integrali in (4.20) è stata assicurata, possiamo eliminare il termine $\frac{x^i \partial_i \varphi(t,0)}{r^4}$ a patto di integrare prima sull'angolo solido. Si ottiene così il risultato finale

$$\widetilde{T}^{00}_{em}(\varphi) = \frac{1}{2} \Big(\frac{e}{4\pi}\Big)^2 \int \int \Big(\frac{\varphi(t,\vec{x}) - \varphi(t,0)}{r^4}\Big) d^3x \, dt. \tag{4.21}$$

Non va però dimenticato che l'integrale scritto nella forma ottenuta in (4.21) converge se si integra prima sugli angoli e, quindi, si tratta di un esempio di *convergenza condizionata*. Abbiamo dunque trovato un $\widetilde{T}^{00}_{em}$ che è finito per $\forall \varphi(t,\vec{x}) \in S(\mathbb{R}^4)$. Concludiamo quindi che $\widetilde{T}^{00}_{em}$ è una distribuzione e quest'ultima espressione definisce completamente la densità di energia rinormalizzata poiché mostra come agisce su una funzione di test che è generica. In un modo simile si può dimostrare anche l'esistenza del limite (4.6), ottenendo

$$\widetilde{T}^{ij}_{em}(\varphi) = \frac{1}{2} \Big(\frac{e}{4\pi}\Big)^2 \int \int \frac{\varphi(t,\vec{x}) - \varphi(t,0)}{r^4} \Big(\delta^{ij} - \frac{2x^i x^j}{r^2}\Big) d^3x \, dt. \tag{4.22}$$

Esistenza di $\widetilde{T}^{\mu\nu}_{em}$ nel caso generale. Nel seguente paragrafo si darà solo un cenno di come dimostrare l'esistenza di $\widetilde{T}^{\mu\nu}_{em}$ nel caso di una particella che si muove con un moto generale. I calcoli si possono trovare in [3]. Nel caso di un moto generale, la forma del controtermine risulta essere la stessa del caso del moto rettilineo uniforme, ovvero quella definita in (3.12). Questo fatto non è banale. Infatti, ricordiamo che la condizione $\widehat{T}^{\mu\nu}_{em_\varepsilon} \propto 1/\varepsilon$ ci aveva permesso di escludere alcune forme del controtermine. Tuttavia tale condizione era stata prevista nel caso di un moto rettilineo uniforme. In un caso generale avrebbe potuto a priori non essere l'unico andamento divergente possibile.

Prima di procedere è importante notare che fino ad ora non abbiamo considerato il contributo dei campi esterni che non richiedevano nessuna regolarizzazione trattandosi di campi liberi, cioè lontani dalle sorgenti e per questo regolari. Infatti, come abbiamo visto, i campi andavano regolarizzati proprio a causa del loro andamento vicino alla sorgente. Abbiamo poi definito tramite l'equazione (2.20) il tensore energia impulso elettromagnetico regolarizzato chiamato $T^{\mu\nu}_{em_\varepsilon}$. Nell'equazione (2.20) compaiono solo i campi $F^{\mu\nu}_\varepsilon$ definiti da (2.14), che sono i campi di Lienard-Wiechert generati dalla particella stessa. In realtà il campo totale a cui è soggetta tale particella può contenere anche campi esterni per cui sarà della forma

$$\mathscr{F}^{\mu\nu}_\varepsilon = F^{\mu\nu}_\varepsilon + F^{\mu\nu}_{est}, \tag{4.23}$$

dove $\mathscr{F}^{\mu\nu}_\varepsilon$ rappresenta il campo totale, mentre $F^{\mu\nu}_{est}$ rappresenta il campo esterno. A questo punto possiamo cercare il tensore elettromagnetico regolarizzato associato a questo campo totale. Lo chiameremo $\mathscr{T}^{\mu\nu}_{em_\varepsilon}$. Sostituendo $\mathscr{F}^{\mu\nu}_\varepsilon$ in (2.20), si trova

$$\mathscr{T}^{\mu\nu}_{em_\varepsilon} = \mathscr{F}^{\mu\varrho}_\varepsilon \mathscr{F}_{\varepsilon\varrho}{}^{\nu} + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} \mathscr{F}^{\varrho\sigma}_\varepsilon \mathscr{F}_{\varepsilon\varrho\sigma}. \tag{4.24}$$

Svolgendo i calcoli

$$\mathscr{T}^{\mu\nu}_{em_\varepsilon} = F^{\mu\varrho}_\varepsilon F_{\varepsilon\varrho}{}^{\nu} + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu} F^{\varrho\sigma}_\varepsilon F_{\varepsilon\varrho\sigma} + F^{\mu\varrho}_{est} F_{est\varrho}{}^{\nu} + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu} F^{\varrho\sigma}_{est} F_{est\varrho\sigma} + F^{\mu\varrho}_\varepsilon F_{est\varrho}{}^{\nu} + F^{\mu\varrho}_{est} F_{\varepsilon\varrho}{}^{\nu} + \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu} F^{\varrho\sigma}_\varepsilon F_{est\varrho\sigma}, \tag{4.25}$$

che equivale a

$$\mathscr{T}^{\mu\nu}_{em_\varepsilon} = T^{\mu\nu}_{em_\varepsilon} + T^{\mu\nu}_{em_{est}} + T^{\mu\nu}_{misto_\varepsilon}. \tag{4.26}$$

$T^{\mu\nu}_{em_{est}}$ corrisponde al tensore trovato sostituendo i campi $F^{\mu\nu}_\varepsilon$ con quelli esterni $F^{\mu\nu}_{est}$ in (2.20), trovando

$$T^{\mu\nu}_{em_{est}} = F^{\mu\varrho}_{est} F_{est\varrho}{}^{\nu} + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu} F^{\varrho\sigma}_{est} F_{est\varrho\sigma}. \tag{4.27}$$

Mentre $T^{\mu\nu}_{misto_\varepsilon}$ corrisponde a

$$T^{\mu\nu}_{misto_\varepsilon} = F^{\mu\varrho}_{\varepsilon} F_{est\varrho}{}^{\nu} + F^{\mu\varrho}_{est} F_{\varepsilon\varrho}{}^{\nu} + \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu} F^{\varrho\sigma}_{\varepsilon} F_{est\varrho\sigma}. \tag{4.28}$$

Se analizziamo il tensore elettromagnetico totale $\mathcal{T}^{\mu\nu}_{em_\varepsilon}$ nel limite con $\varepsilon \to 0$ vicino alla linea di universo della particella, notiamo che chiaramente $T^{\mu\nu}_{est}$ non presenta divergenze, mentre, come sappiamo, in tale limite $T^{\mu\nu}_{em_\varepsilon}$ tende a $T^{\mu\nu}_{em}$. Esso sulla linea di universo diverge come $1/r^4$ e perciò non è una distribuzione. $T^{\mu\nu}_{misto_\varepsilon}$ d' altra parte nel limite $\varepsilon \to 0$ rimane una distribuzione in quanto tende a

$$T^{\mu\nu}_{misto} = F^{\mu\varrho} F_{est\varrho}{}^{\nu} + F^{\mu\varrho}_{est} F_{\varrho}{}^{\nu} + \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu} F^{\varrho\sigma} F_{est\varrho\sigma}. \tag{4.29}$$

Quest'ultima quantità è lineare in $F^{\mu\nu}$ che diverge vicino alla linea di universo come $1/r^2$ e quindi è ancora una distribuzione. Visto che $F^{\mu\nu}_{est}$ è regolare, segue che $T^{\mu\nu}_{misto}$ è una distribuzione. Varranno, quindi, i seguenti limiti, di cui il secondo è banale poiché $F^{\mu\nu}_{est}$ non dipende da ε.

$$S'\text{–}\lim_{\varepsilon\to 0} T^{\mu\nu}_{misto_\varepsilon} = T^{\mu\nu}_{misto}, \tag{4.30}$$

$$S'\text{–}\lim_{\varepsilon\to 0} T^{\mu\nu}_{est} = T^{\mu\nu}_{est}. \tag{4.31}$$

In presenza di campi esterni il limite (3.9) è sostituito dal seguente limite

$$S'\text{–}\lim_{\varepsilon\to 0}(\mathcal{T}^{\mu\nu}_{em_\varepsilon} - \widehat{T}^{\mu\nu}_{em_\varepsilon}) = \widetilde{\mathcal{T}}^{\mu\nu}_{em}, \tag{4.32}$$

dove abbiamo definito il tensore energia impulso elettromagnetico totale rinormalizzato $\widetilde{\mathcal{T}}^{\mu\nu}_{em}$, e dove $\widehat{T}^{\mu\nu}_{em_\varepsilon}$ rappresenta il controtermine che si eliderà con la parte divergente di $\mathcal{T}^{\mu\nu}_{em_\varepsilon}$ ancora da determinare. Risulta utile, infine, definire il tensore energia impulso totale rinormalizzato del campo e della particella, che chiameremo $\widetilde{\mathcal{T}}^{\mu\nu}$. Esso si ottiene sommando il tensore $T^{\mu\nu}_{p}$ definito nell'equazione (13) dell'Introduzione

$$\widetilde{\mathcal{T}}^{\mu\nu} = \widetilde{\mathcal{T}}^{\mu\nu}_{em} + T^{\mu\nu}_{p}. \tag{4.33}$$

Risulta evidente dai limiti (4.30) e (4.31) che, al fine di determinare la parte divergente di $\mathcal{T}^{\mu\nu}_{em_\varepsilon}$ che si eliderà con il controtermine $\widehat{T}^{\mu\nu}_{em_\varepsilon}$ in (4.32), ci possiamo concentrare su un unico termine della somma presente in (4.26), ovvero su $T^{\mu\nu}_{em_\varepsilon}$. Cerchiamo di fissare la forma generale dei termini di $T^{\mu\nu}_{em_\varepsilon}$ che divergono nel limite $\varepsilon \to 0$. A questo fine è utile riscrivere il tensore regolarizzato (2.20) come somma di tre termini $T^{\mu\nu}_{em_\varepsilon} = \sum_i T^{\mu\nu}_{em_\varepsilon i}$, divisi a seconda della dipendenza da $L_{\varepsilon\mu}L^{\mu}_{\varepsilon}$, la quale si trova all'interno di $F^{\mu\nu}_{\varepsilon}$. Si veda a riguardo (2.14). Questi termini sono proporzionali rispettivamente a $1/L^4_\varepsilon, 1/L^3_\varepsilon, 1/L^2_\varepsilon$. Partendo dalla seguente espressione

$$T^{\mu\nu}_{em_\varepsilon} = \Big(\frac{e}{4\pi}\Big)^2 \frac{1}{(uL_\varepsilon)^6}\big(L^{\mu}_{\varepsilon}u^{\varrho} + L^{\mu}_{\varepsilon}\Delta^{\varrho} - (\mu \leftrightarrow \varrho)\big)\big(L_{\varepsilon\varrho}u^{\nu} + L_{\varepsilon\varrho}\Delta^{\nu} - (\nu \leftrightarrow \varrho)\big) + \tag{4.34}$$

$$\Big(\frac{e}{4\pi}\Big)^2 \frac{1}{(uL_\varepsilon)^6}\frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}\big(L^{\varrho}_{\varepsilon}u^{\sigma} + L^{\varrho}_{\varepsilon}\Delta^{\sigma} - (\varrho \leftrightarrow \sigma)\big)\big(L_{\varepsilon\varrho}u_{\sigma} + L_{\varepsilon\varrho}\Delta_{\sigma} - (\varrho \leftrightarrow \sigma)\big). \tag{4.35}$$

Sommando i termini in base alla dipendenza da L_ε si ottiene

$$T^{\mu\nu}_{em_\varepsilon 1} = \Big(\frac{e}{4\pi}\Big)^2 \frac{1}{(uL_\varepsilon)^6}\Big(2(uL_\varepsilon)L^{(\mu}_{\varepsilon}u^{\nu)} - L^{\mu}_{\varepsilon}L^{\nu}_{\varepsilon} - \varepsilon^2 u^{\mu}u^{\nu} - \frac{\eta^{\mu\nu}}{4}(2(uL_\varepsilon)^2 - 2\varepsilon^2)\Big), \tag{4.36}$$

$$T^{\mu\nu}_{em_\varepsilon 2} = \Big(\frac{e}{4\pi}\Big)^2 \frac{1}{(uL_\varepsilon)^6}\Big(2(uL_\varepsilon)L^{(\mu}_{\varepsilon}\Delta^{\nu)} + 2(\omega L_\varepsilon)L^{\mu}_{\varepsilon}L^{\nu}_{\varepsilon} - 2\varepsilon^2 u^{(\mu}\Delta^{\nu)} - \frac{\eta^{\mu\nu}}{4}4\varepsilon^2(\omega L_\varepsilon)\Big), \tag{4.37}$$

$$T^{\mu\nu}_{em_\varepsilon 3} = \Big(\frac{e}{4\pi}\Big)^2 \frac{1}{(uL_\varepsilon)^6}\Big(-\Delta^2 L^{\mu}_{\varepsilon}L^{\nu}_{\varepsilon} - \varepsilon^2\Delta^{\mu}\Delta^{\nu} - \frac{\eta^{\mu\nu}}{4}(-2\varepsilon^2\Delta^2)\Big). \tag{4.38}$$

Dove con $L^{(\mu}_{\varepsilon}u^{\nu)}$ si intende la parte simmetrica di $L^{\mu}_{\varepsilon}u^{\nu}$. Applicando $T^{\mu\nu}_{em_\varepsilon i}$ a una generica funzione $\varphi(x) \in S(\mathbb{R}^4)$ e studiando il limite $\varepsilon \to 0$, si ottiene che le parti divergenti dei tre termini sono

$$T^{\mu\nu}_{em_\varepsilon 1|div} = \Big(\frac{e}{4\pi}\Big)^2 \int \Big(\frac{\pi^2}{2\varepsilon}\big(u^{\mu}u^{\nu} - \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}\big) + \frac{16\pi}{3}\ln\varepsilon\, u^{(\mu}\omega^{\nu)}\Big)\delta^4(x - y(s))\,ds, \tag{4.39}$$

$$T^{\mu\nu}_{em_\varepsilon 2|div} = -\Big(\frac{e}{4\pi}\Big)^2 \frac{16\pi}{3}\ln\varepsilon \int u^{(\mu}\omega^{\nu)}\delta^4(x - y(s))\,ds, \tag{4.40}$$

$$T^{\mu\nu}_{em_\varepsilon 3|div} = 0. \tag{4.41}$$

Calcolando $T^{\mu\nu}_{em_\varepsilon|div} = \sum_i T^{\mu\nu}_{em_\varepsilon i|div}$ i termini che contengono $\ln\varepsilon$ si semplificano e ritroviamo il controtermine del caso rettilineo uniforme

$$T^{\mu\nu}_{em_\varepsilon|div} = \widehat{T}^{\mu\nu}_{em_\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{e^2}{32}\int (u^\mu u^\nu - \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu})\delta^4(x-y(s))\,ds. \tag{4.42}$$

Le divergenze logaritmiche incontrate si potevano anche prevedere sulla base dei ragionamenti fatti nel capitolo precedente. Se non si richiede più che $\widehat{T}^{\mu\nu}_{em_\varepsilon}$ sia proporzionale unicamente a $1/\varepsilon$, gli altri andamenti divergenti permessi sono del tipo $1/\varepsilon^\alpha$ con $\alpha > 1$, oppure del tipo $\ln\varepsilon$ che rappresenta la divergenza più debole. Ragionando in termini dimensionali, i primi vanno esclusi poiché questi andamenti sarebbero dati da termini che richiedono di essere moltiplicati per fattori che contengono y^μ a numeratore e che, come abbiamo detto, sono proibiti dalla richiesta che $\widehat{T}^{\mu\nu}_{em_\varepsilon}$ sia un tensore sotto traslazioni. Termini del secondo tipo soddisfano tutti i requisiti se $\ln\varepsilon$ viene moltiplicato da termini che sono del tipo $a(u^\mu\omega^\nu + u^\nu\omega^\mu) + b(u^\mu\partial^\nu + u^\nu\partial^\mu)$, dove a, b sono costanti adimensionali. Vale la pena notare che questi termini sono a traccia nulla in quanto $\omega^\mu u_\mu = 0$, mentre $u^\mu\partial^\nu$ è a traccia nulla se, come in questo caso, la derivata si applica alla delta. Infatti la sua traccia risulta

$$\int \frac{dy^\mu}{ds}\partial_\mu\delta^4(x-y(s))\,ds = -\int \frac{d\delta^4(x-y(s))}{ds} = -\delta^4(x-y(s))|^{s=+\infty}_{s=-\infty} = 0. \tag{4.43}$$

In effetti studiando i termini $T^{\mu\nu}_{em_\varepsilon i|div}$ si osserva la comparsa proprio di termini proporzionali a $\ln\varepsilon\, u^{(\mu}\omega^{\nu)}$. Solo il calcolo diretto mostra che in realtà questi termini non contribuiscono perché si elidono nella somma. Abbiamo quindi estratto la parte divergente di $T^{\mu\nu}_{em_\varepsilon}$ e abbiamo osservato che coincide con $\widehat{T}^{\mu\nu}_{em}$ scritto in (4.42). Fatto questo, per quanto detto a riguardo dei tensori $T^{\mu\nu}_{em_{est}}$ e $T^{\mu\nu}_{misto_\varepsilon}$, il limite (4.32) esiste banalmente perché la parte divergente $T^{\mu\nu}_{em_\varepsilon|div}$ si elide con il controtermine sottratto prima di calcolare il limite stesso.

4.2 Conservazione del tensore elettromagnetico rinormalizzato

Equazione di continuità di $\widetilde{T}^{\mu\nu}$ nel caso rettilineo uniforme. Torniamo al caso di una particella in moto rettilineo uniforme. Come affermato nella richiesta (3.10) dobbiamo dimostrare che il tensore totale $\widetilde{T}^{\mu\nu}$ dato da (3.2) è conservato se vale un'opportuna equazione del moto che, in questo caso, è l'equazione di Lorentz. Essa in assenza di campi esterni prevede semplicemente $\frac{dp^\nu}{ds} = 0$. Nel nostro caso abbiamo

$$\partial_\mu T^{\mu\nu}_p = \int \frac{dp^\nu}{ds}\delta^4(x-y(s))\,ds = 0. \tag{4.44}$$

Per dimostrare che il tensore totale è conservato ci basta quindi mostrare che $\partial_\mu\widetilde{T}^{\mu\nu}_{em} = 0$. La componente $\nu = 0$ di questa equazione è soddisfatta siccome $\widetilde{T}^{i0}_{em} = 0$ (si veda (4.5)), mentre $\widetilde{T}^{00}_{em}$ è indipendente dal tempo. Si veda a questo riguardo (4.21). Rimane da dimostrare $\partial_i\widetilde{T}^{ij}_{em} = 0$. A tal fine non si userà l'equazione (4.22), ma si userà la forma (4.6) di $\widetilde{T}^{ij}_{em}$ in cui ancora non si è computato il limite $\varepsilon \to 0$. Poiché abbiamo dimostrato che tale limite in S' esiste per $a = \frac{\pi^2}{2}$ e ∂_μ è un'operazione continua in S', allora possiamo scambiare la derivata con il limite. Si ottiene

$$\partial_i\widetilde{T}^{ij}_{em} = \frac{1}{2}\Big(\frac{e}{4\pi}\Big)^2 S'\!-\!\lim_{\varepsilon\to 0}\Big(\partial_i\Big(\frac{r^2\delta^{ij} - 2x^i x^j}{(r^2+\varepsilon^2)^3}\Big) - \frac{\pi^2}{4\varepsilon}\partial_j\delta^3(\vec{x})\Big). \tag{4.45}$$

Il primo termine nel limite, come abbiamo visto, è una distribuzione regolare $C^\infty(\mathbb{R}^4)$ e perciò le sue derivate possono essere calcolate nel senso delle funzioni. Otteniamo

$$\partial_i\Big(\frac{r^2\delta^{ij} - 2x^i x^j}{(r^2+\varepsilon^2)^3}\Big) = \frac{-6\varepsilon^2 x^j}{(r^2+\varepsilon^2)^4} = \partial_j\Big(\frac{\varepsilon^2}{(r^2+\varepsilon^2)^3}\Big). \tag{4.46}$$

In questo modo possiamo raccogliere la derivata ∂_j e scambiarla con il limite, a patto che quest'ultimo esista, ottenendo

$$\partial_i\widetilde{T}^{ij}_{em} = \frac{1}{2}\Big(\frac{e}{4\pi}\Big)^2\partial_j S'\!-\!\lim_{\varepsilon\to 0}\Big(\frac{\varepsilon^2}{(r^2+\varepsilon^2)^3} - \frac{\pi^2}{4\varepsilon}\delta^3(\vec{x})\Big). \tag{4.47}$$

Se vogliamo dimostrare che il $\widetilde{T}^{\mu\nu}_{em}$ sia conservato, il limite, oltre ad esistere, deve essere zero. Per dimostrare ciò dobbiamo prima calcolare la quantità nel limite in (4.47) applicata a una generica $\varphi(x) \in S(\mathbb{R}^4)$

$$\int\int \frac{\varepsilon^2\varphi(t,\vec{x})}{(r^2+\varepsilon^2)^3}\,d^3x\,dt - \int \frac{\pi^2\varphi(t,0)}{4\varepsilon}\,dt = \int\int \frac{\varepsilon^2(\varphi(t,\vec{x}) - \varphi(t,0))}{(r^2+\varepsilon^2)^3}\,d^3x\,dt = \int\int h_\varepsilon(t,\vec{x})\,d^3x\,dt, \tag{4.48}$$

dove abbiamo usato l'integrale

$$\int \frac{d^3x}{(r^2+\varepsilon^2)^3} = \frac{\pi^2}{4\varepsilon^3}. \tag{4.49}$$

Inoltre, sfruttando il cambio di variabili $\vec{x} \to \varepsilon\vec{x}$, abbiamo introdotto in (4.48) la seguente quantità

$$h_\varepsilon(t,\vec{x}) = \frac{\varphi(t,\varepsilon\vec{x}) - \varphi(t,0)}{\varepsilon(r^2+1)^3}. \tag{4.50}$$

Prima di portare il limite sotto il segno di integrale bisogna provare che questa operazione sia lecita. Come nel caso della dimostrazione dell'esistenza di $\widetilde{T}^{00}_{em}$, l'integrazione in dt non dà problemi poiché in $h_\varepsilon(t,\vec{x})$ la dipendenza temporale è contenuta solo in $\varphi(t,\vec{x}) - \varphi(t,0)$ e $\varphi(t,\vec{x}) \in S(\mathbb{R}^4)$. Notiamo che valgono le seguenti relazioni

$$|\varphi(t,\varepsilon\vec{x}) - \varphi(t,0)| = |\int_0^1 \frac{d}{d\lambda}\varphi(t,\lambda\varepsilon\vec{x})\,d\lambda| = |\int_0^1 \varepsilon\vec{x}\cdot\vec{\nabla}\varphi(t,\lambda\varepsilon\vec{x})\,d\lambda| \le \frac{\varepsilon|\vec{x}|}{1+t^2}\sup_{(t,\vec{x})}\big((1+t^2)|\vec{\nabla}\varphi(t,\vec{x})|\big). \tag{4.51}$$

Utilizzando la maggiorazione (4.51) in (4.50) abbiamo

$$|h_\varepsilon(t,\vec{x})| \le \frac{r}{(1+t^2)(r^2+1)^3}\sup_{(t,\vec{x})}\big((1+t^2)|\vec{\nabla}\varphi(t,\vec{x})|\big) = g(t,\vec{x}) \in L^1(\mathbb{R}^4), \tag{4.52}$$

possiamo quindi portare il limite sotto il segno di integrale. Si ottiene

$$\int\int \lim_{\varepsilon\to 0} h_\varepsilon(t,\vec{x})\,d^3x\,dt = \int\int \frac{x^i\partial_i\varphi(t,0)}{(r^2+1)^3}\,d^3x\,dt = \int \partial_i\varphi(t,0)\,dt \int \frac{r^3}{(r^2+1)^3}\,dr \int n^i\,d\Omega = 0. \tag{4.53}$$

Nel limite abbiamo usato De L'Hospital e quindi derivato numeratore e denominatore di $h_\varepsilon(t,\vec{x})$ rispetto a ε. L'ultimo passaggio in (4.53) si ottiene invece ricordando che $\int n^i\,d\Omega = 0$. Si è quindi dimostrato che $\widetilde{T}^{\mu\nu}_{em}$ di una particella statica, e dunque per un qualsiasi moto rettilineo uniforme, è conservato. Concludiamo che lo è anche il tensore totale $\widetilde{T}^{\mu\nu}$, definito in (3.2) per il moto rettilineo uniforme.

Equazione di continuità di $\widetilde{\mathcal{T}}^{\mu\nu}$ nel caso generale. La dimostrazione della conservazione del tensore energia impulso totale nel caso di una particella con un moto generale è complicata e verrà solamente accennata. Per approfondimenti si rimanda sempre alla referenza [3]. Risulta interessante notare che per approcciare il caso generale dobbiamo supporre anche l'esistenza di un campo esterno altrimenti l'unica soluzione fisica dell'equazione di Lorentz-Dirac risulta essere quella di un moto rettilineo uniforme e si torna al caso precedente. Per questo dobbiamo considerare anche i contributi $T^{\mu\nu}_{est}$, $T^{\mu\nu}_{misto}$ al tensore elettromagnetico definiti nelle (4.27) e (4.29).

Il nostro obiettivo è mostrare alcuni dei passaggi attraverso cui si dimostra che la 4-divergenza del tensore energia impulso totale definito in (4.33) è nulla, ovvero vale $\partial_\mu\widetilde{\mathcal{T}}^{\mu\nu} = 0$, se vale l'equazione del moto di Lorentz-Dirac (1.6).

Come abbiamo visto in precedenza, se è presente un campo esterno invece del solo $T^{\mu\nu}_{em_\varepsilon}$, dobbiamo analizzare piuttosto $\mathcal{T}^{\mu\nu}_{em_\varepsilon}$ per tenere conto di tutti i contributi. Risulta che, poiché il controtermine per un moto generale ha comunque la forma (4.42), esplicitando il controtermine, il limite (4.32) diventa

$$\widetilde{\mathcal{T}}^{\mu\nu}_{em} = S'-\lim_{\varepsilon\to 0}\Big(\mathcal{T}^{\mu\nu}_{em_\varepsilon} - \frac{e^2}{32\varepsilon}\int (u^\mu u^\nu - \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu})\delta^4(x-y(s))\,ds\Big). \tag{4.54}$$

Utilizziamo ora i limiti (4.30) e (4.31) ricordando che il limite in $S'(\mathbb{R}^4)$ non richiede accortezze particolari nel caso di $T^{\mu\nu}_{misto_\varepsilon}$, in quanto quest'ultimo anche nel limite rimane una distribuzione. La 4-divergenza che dobbiamo calcolare risulta quindi

$$\partial_\mu\widetilde{\mathcal{T}}^{\mu\nu}_{em} = \partial_\mu(T^{\mu\nu}_{est} + T^{\mu\nu}_{misto} + \widetilde{T}^{\mu\nu}_{em}) = \partial_\mu(T^{\mu\nu}_{est} + T^{\mu\nu}_{misto}) + \partial_\mu\Big(S'-\lim_{\varepsilon\to 0}\Big(T^{\mu\nu}_{em_\varepsilon} - \frac{e^2}{32\varepsilon}\int (u^\mu u^\nu - \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu})\delta^4(x-y(s))\,ds\Big)\Big). \tag{4.55}$$

Dato che il limite presente in (4.55) esiste possiamo portare la derivata dentro al limite, ottenendo

$$\partial_\mu\widetilde{\mathcal{T}}^{\mu\nu}_{em} = \partial_\mu(T^{\mu\nu}_{est} + T^{\mu\nu}_{misto}) + S'-\lim_{\varepsilon\to 0}\Big(\partial_\mu T^{\mu\nu}_{em_\varepsilon} - \frac{e^2}{32\varepsilon}\partial_\mu\int (u^\mu u^\nu - \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu})\delta^4(x-y(s))\,ds\Big). \tag{4.56}$$

Calcoliamo innanzitutto il termine $\partial_\mu \widehat{T}^{\mu\nu}_{em_\varepsilon}$, ovvero la derivata del controtermine che viene sottratta nel limite in (4.56). Riportando per chiarezza la sua forma,

$$\partial_\mu \widehat{T}^{\mu\nu}_{em_\varepsilon} = \frac{e^2}{32\varepsilon}\partial_\mu \int (u^\mu u^\nu - \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu})\delta^4(x-y(s))\,ds. \tag{4.57}$$

Procedendo con i calcoli, si ottiene

$$\partial_\mu \widehat{T}^{\mu\nu}_{em_\varepsilon} = \frac{e^2}{32\varepsilon}\int (u^\mu u^\nu - \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu})\partial_\mu \delta^4(x-y(s))\,ds = \frac{e^2}{32\varepsilon}\int \big(u^\nu \frac{dy^\mu}{ds}\partial_\mu \delta^4(x-y(s)) - \frac{1}{4}\partial^\nu \delta^4(x-y(s))\big)\,ds = \tag{4.58}$$

$$\frac{e^2}{32\varepsilon}\int \big(-u^\nu \frac{d\delta^4(x-y(s))}{ds} - \frac{1}{4}\partial^\nu \delta^4(x-y(s))\big)\,ds = \frac{e^2}{32\varepsilon}\int (\omega^\nu - \frac{1}{4}\partial^\nu)\delta^4(x-y(s))\,ds. \tag{4.59}$$

Si è utilizzato il fatto che u^μ e u^ν dipendono solo da s. Mentre nel penultimo passaggio si è fatta un'integrazione per parti. Si ottiene il terzo termine della somma presente in (4.56) che corrisponde a

$$\partial_\mu \widetilde{T}^{\mu\nu}_{em} = S'\text{–}\lim_{\varepsilon\to 0}\big(\partial_\mu T^{\mu\nu}_{em_\varepsilon} - \frac{e^2}{32\varepsilon}\int (\omega^\nu - \frac{1}{4}\partial^\nu)\delta^4(x-y(s))\,ds\big). \tag{4.60}$$

Per quanto riguarda la prima quantità nel limite (4.60), ricordando la definizione di $T^{\mu\nu}_{em_\varepsilon}$ data in (2.20) e svolgendo calcoli analoghi a quelli delle equazioni (3.4)(3.5)(3.6), si ottiene

$$\partial_\mu T^{\mu\nu}_{em_\varepsilon} = -j_{\varepsilon\varrho}F^{\nu\varrho}_\varepsilon. \tag{4.61}$$

j^μ_ε è definito da $j^\mu_\varepsilon = \partial_\nu F^{\nu\mu}_\varepsilon$, si veda (2.14). L'identità di Bianchi usata nella riga (3.6) vale anche per $F^{\mu\nu}_\varepsilon$.

In modo simile si calcola il terzo termine di (4.56)

$$\partial_\mu T^{\mu\nu}_{misto} = \partial_\mu\big(F^{\mu\varrho}F_{est\varrho}{}^\nu + F^{\mu\varrho}_{est}F_\varrho{}^\nu + \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}F^{\varrho\sigma}F_{est\varrho\sigma}\big) = \tag{4.62}$$

$$j^\varrho F_{est\varrho}{}^\nu + F^{\mu\varrho}\partial_\mu F_{est\varrho}{}^\nu + F^{\mu\varrho}_{est}\partial_\mu F_\varrho{}^\nu + \frac{1}{2}\partial^\nu(F^{\varrho\sigma}F_{est\varrho\sigma}) = \tag{4.63}$$

$$j^\varrho F_{est\varrho}{}^\nu + \frac{1}{2}F^{\mu\varrho}\partial_\mu F_{est\varrho}{}^\nu + \frac{1}{2}F^{\varrho\mu}\partial_\varrho F_{est\mu}{}^\nu + \frac{1}{2}F^{\mu\varrho}_{est}\partial_\mu F_\varrho{}^\nu + \frac{1}{2}F^{\varrho\mu}_{est}\partial_\varrho F_\mu{}^\nu + \frac{1}{2}\partial^\nu F^{\varrho\sigma}F_{est\varrho\sigma} + \frac{1}{2}F^{\varrho\sigma}\partial^\nu F_{est\varrho\sigma} = \tag{4.64}$$

$$j^\varrho F_{est\varrho}{}^\nu + \frac{1}{2}F_{\mu\varrho}(\partial^\mu F^{\varrho\nu}_{est} + \partial^\varrho F^{\nu\mu}_{est} + \partial^\nu F^{\mu\varrho}_{est}) + \frac{1}{2}F_{est\mu\varrho}(\partial^\mu F^{\varrho\nu} + \partial^\varrho F^{\nu\mu} + \partial^\nu F^{\mu\varrho}) = -j_\varrho F^{\nu\varrho}_{est}. \tag{4.65}$$

Nel calcolo abbiamo usato che $\partial_\mu F^{\mu\nu}_{est} = 0$ poiché $F^{\mu\nu}_{est}$ è un campo libero mentre $\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$. Nell'equazione (4.65) abbiamo utilizzato l'equazione di Bianchi che vale sia per $F^{\mu\nu}_{est}$ che per $F^{\mu\nu}$.

D'altra parte, invece, vale $\partial_\mu F^{\mu\nu}_{est} = 0$ e ripercorrendo i calcoli svolti in (3.4)(3.5)(3.6) si evince che $T^{\mu\nu}_{est}$ è banalmente conservato, ovvero $\partial_\mu T^{\mu\nu}_{est} = 0$. Sostituendo i risultati trovati in (4.61) e (4.65) in (4.56), si ottiene per la (4.56)

$$\partial_\mu \widetilde{\mathcal{T}}^{\mu\nu}_{em} = -F^{\nu\varrho}_{est}j_\varrho + S'\text{–}\lim_{\varepsilon\to 0}\big(-F^{\nu\varrho}_\varepsilon j_{\varepsilon\varrho} - \frac{e^2}{32\varepsilon}\int (\omega^\nu - \frac{1}{4}\partial^\nu)\delta^4(x-y(s))\,ds\big). \tag{4.66}$$

Il calcolo di $F^{\nu\varrho}_\varepsilon j_{\varepsilon\varrho}$ non è banale, si veda [3] a tal proposito. Il suo risultato fornisce la seguente forma

$$F^{\nu\varrho}_\varepsilon j_{\varepsilon\varrho} = \big(\frac{e}{4\pi}\big)^2\int \big(\frac{8\pi}{3}\big(\frac{d\omega^\nu}{ds} + \omega^2 u^\nu\big) - \frac{\pi^2}{2\varepsilon}\big(\omega^\nu - \frac{1}{4}\partial^\nu\big)\big)\delta^4(x-y(s))\,ds + O(\varepsilon), \tag{4.67}$$

dove $O(\varepsilon)$ sono termini che svaniscono nel limite svolto nella topologia di $S'(\mathbb{R}^4)$ per $\varepsilon \to 0$. Inserendo (4.67) in (4.66), i termini proporzionali a $1/\varepsilon$ si elidono e quelli che sono $O(\varepsilon)$ svaniscono nel limite. Si ottiene

$$\partial_\mu \widetilde{\mathcal{T}}^{\mu\nu}_{em} = -F^{\nu\varrho}_{est}j_\varrho - \big(\frac{e^2}{6\pi}\big)\int \big(\frac{d\omega^\nu}{ds} + \omega^2 u^\nu\big)\delta^4(x-y(s))\,ds. \tag{4.68}$$

Sostituendo alla j_ϱ la forma della corrente generata da una particella di carica e

$$-F^{\nu\varrho}_{est}j_\varrho = -F^{\nu\varrho}_{est}e\int u_\varrho \delta^4(x-y(s))\,ds = -\int eF^{\nu\varrho}_{est}(y(s))u_\varrho \delta^4(x-y(s))\,ds, \tag{4.69}$$

otteniamo la 4-divergenza del tensore (4.54), ovvero

$$\partial_\mu \widetilde{\mathcal{T}}^{\mu\nu}_{em} = \int \big(-eF^{\nu\varrho}_{est}(y(s))u_\varrho - \frac{e^2}{6\pi}\big(\frac{d\omega^\nu}{ds} + \omega^2 u^\nu\big)\big)\delta^4(x-y(s))\,ds. \tag{4.70}$$

Ricordando che $\partial_\mu T^{\mu\nu}_p = \int \frac{dp^\nu}{ds}\delta^4(x-y(s))\,ds$, si ottiene il risultato per la 4-divergenza del tensore energia impulso totale rinormalizzato (4.33). Quest'ultimo è ottenuto sommando al tensore elettromagnetico totale il tensore riferito alla particella. Ricordando la definizione (4.33) e ricordando che vale $\partial_\mu T^{\mu\nu}_p = \int \frac{dp^\nu}{ds}\delta^4(x-y(s))\,ds$, si ottiene

$$\partial_\mu \widetilde{\mathcal{T}}^{\mu\nu} = \partial_\mu(\widetilde{\mathcal{T}}^{\mu\nu}_{em} + T^{\mu\nu}_p) = \int \big(\frac{dp^\nu}{ds} - eF^{\nu\mu}_{est}(y(s))u_\mu - \frac{e^2}{6\pi}\big(\frac{d\omega^\nu}{ds} + \omega^2 u^\nu\big)\big)\delta^4(x-y(s))\,ds = 0. \tag{4.71}$$

Il tensore energia impulso totale risulta conservato a patto che valga l'equazione di Lorentz-Dirac (1.6).

4.3 Integrali di 4-momento rinormalizzati

Integrali di 4-momento nel caso rettilineo uniforme. La prova dell'esistenza di $\widetilde{T}^{00}_{em}$ svolta all'inizio del capitolo ci ha fornito la definizione operativa (4.21) dell'energia elettromagnetica rinormalizzata per una particella statica nell'origine. I risultati analoghi per una particella in moto rettilineo uniforme si ricavano facilmente sfruttando la Lorentz-covarianza delle quantità in esame. Come abbiamo già accennato, il modo corretto di calcolare gli integrali di 4-momento, come l'energia elettrostatica in un volume V, è applicare $\widetilde{T}^{\mu\nu}_{em}$ alla funzione $\varphi(x) = \delta(x^0 - t)\chi_V(\vec{x})$. Si veda (4.21), sostituendo $\varphi(t,\vec{x})$ con $\delta(x^0-t)\chi_V(\vec{x})$. Si ottiene per una particella statica nell'origine

$$\widetilde{\varepsilon}_{em}(V) = \widetilde{T}^{00}_{em}(\varphi) = \frac{1}{2}\big(\frac{e}{4\pi}\big)^2 \int \big(\frac{\chi_V(\vec{x}) - \chi_V(0)}{r^4}\big)\,d^3x, \tag{4.72}$$

dove $\chi_V(\vec{x})$ indica la funzione caratteristica del volume V. Se il volume non contiene l'origine, ovvero la particella, si ritrova la definizione classica di energia elettrostatica in un volume V

$$\varepsilon_{em}(V) = \int_V T^{00}_{em}\,d^3x = \frac{1}{2}\int \vec{E}^2\,d^3x = \frac{1}{2}\big(\frac{e}{4\pi}\big)^2 \int_V \frac{1}{r^4}\,d^3x, \tag{4.73}$$

analoga a quella fornita nell'equazione (2) dell'Introduzione. Questo segue naturalmente dal fatto che il tensore elettromagnetico non è stato modificato fuori dalla linea di universo della particella.

Se V_R è una sfera di raggio R centrata nell'origine, $\chi(\vec{x}) - \chi(0) = H(R-r) - 1 = -H(r-R)$ e, se si utilizza la nuova definizione (4.72), si trova per l'energia elettrostatica rinormalizzata il seguente valore

$$\widetilde{\varepsilon}_{em}(V_R) = -\frac{1}{2}\big(\frac{e}{4\pi}\big)^2 \int_{r>R} \frac{1}{r^4}\,d^3x = -\frac{e^2}{8\pi R}, \tag{4.74}$$

La prima differenza che si nota rispetto all'energia elettrostatica calcolata con (4.73) è che ora il risultato è negativo, mentre prima era sempre positivo. Prendendo il limite con $R \to \infty$ si trova che vale

$$\widetilde{\varepsilon}_{em}(\mathbb{R}^3) = 0. \tag{4.75}$$

Per cui l'energia elettrostatica rinormalizzata calcolata in tutto $\mathbb{R}^3$ è nulla.

A tal proposito è interessante fare un confronto con la formula classica nel caso di una carica statica nell'origine. Avevamo visto nell'Introduzione qual'era la prima cosa che si può pensare per risolvere il problema che (4.73) diverge se V contiene l'origine, ovvero la particella. Avevamo visto che si può pensare di rimuovere un volumetto sferico centrato nell'origine di raggio R_0 ottenendo quindi una divisione del volume V in due domini, a patto di prendere successivamente il limite $R_0 \to 0$. Facendo questo, se si vuole calcolare l'energia elettrostatica all'interno di un volumetto sferico V_R centrato nell'origine con raggio $R > R_0$, con la definizione classica si trova

$$\varepsilon_{em}(V_R) = \lim_{R_0\to 0} \frac{e^2}{8\pi R_0} - \frac{e^2}{8\pi R}. \tag{4.76}$$

Prendendo il limite si trova che l'energia elettrostatica diverge a $+\infty$ in qualsiasi volume contenente la particella, come quello considerato. Confrontando la (4.76) con la (4.74) si nota che la rinormalizzazione è come se eliminasse dalla (4.76) la parte divergente dipendente da R_0 in modo da ottenere il risultato finito

$$\widetilde{\varepsilon}_{em}(V_R) = -\frac{e^2}{8\pi R}. \tag{4.77}$$

Definiamo il 4-momento totale del campo elettromagnetico rinormalizzato

$$\widetilde{P}^{\nu}_{em} = \int \widetilde{\mathcal{T}}^{0\nu}_{em}\, d^3x. \tag{4.78}$$

Nel caso che stiamo trattando, ovvero il caso di particella statica o in moto rettilineo uniforme, occorre porre il campo esterno a zero, $F^{\mu\nu}_{est} = 0$. Ricordando le definizioni (4.27) e (4.29) abbiamo quindi che $T^{0\nu}_{est} = T^{0\nu}_{misto} = 0$ e il 4-momento elettromagnetico totale si riduce a

$$\widetilde{P}^{\nu}_{em} = \int \widetilde{T}^{0\nu}_{em}(t,\vec{x})\, d^3x. \tag{4.79}$$

Notiamo che per una particella statica o in moto rettilineo uniforme vale $\widetilde{T}^{0i}_{em} = 0$. Si veda a riguardo la formula (4.5). Segue, ricordando la (4.75), che il 4-momento elettromagnetico generato da una particella statica in tutto lo spazio è $\widetilde{P}^{\mu}_{em} = \int \widetilde{T}^{0\mu}_{em} d^3x = 0$. Questo risultato si estende al moto rettilineo uniforme. Notiamo infatti che per fare tale estensione è sufficiente che $\widetilde{P}^{\mu}_{em}$ sia un 4-vettore e quindi trasformi come tale. D'altra parte per avere questo risultato è necessario che il tensore $\widetilde{T}^{\mu\nu}_{em}$ sia conservato, ma questo è stato dimostrato con l'equazione (4.53).

Integrali di 4-momento nel caso generale. Abbiamo ottenuto in precedenza la 4-divergenza del tensore elettromagnetico totale con la formula (4.70) che ricordiamo

$$\partial_\mu \widetilde{\mathcal{T}}^{\mu\nu}_{em} = \int \Big(-eF^{\nu\varrho}_{est}(y(s))u_\varrho - \frac{e^2}{6\pi}\big(\frac{d\omega^\nu}{ds} + \omega^2 u^\nu\big)\Big)\delta^4(x-y(s))\, ds. \tag{4.80}$$

Se svolgiamo la 4-divergenza di $\widetilde{\mathcal{T}}^{\mu\nu}_{em}$ e integriamo su $\mathbb{R}^3$ otteniamo per il termine di sinistra

$$\partial_0 \int \widetilde{\mathcal{T}}^{0\nu}_{em}\, d^3x + \int \partial_i \widetilde{\mathcal{T}}^{i\nu}_{em}\, d^3x, \tag{4.81}$$

dove abbiamo sfruttato il fatto che la derivata ∂_0 può essere portata fuori dall'integrale. Utilizziamo ora il teorema di Gauss e l'andamento all'infinito spaziale di $\widetilde{\mathcal{T}}^{\mu\nu}_{em}$ per affermare che il secondo termine in (4.81) è nullo. Il termine di destra dell'equazione (4.80), integrando su $\mathbb{R}^3$ e eliminando la parte spaziale della delta, diventa invece

$$\int \Big(-eF^{\nu\varrho}_{est}(y(s))u_\varrho - \frac{e^2}{6\pi}\big(\frac{d\omega^\nu}{ds} + \omega^2 u^\nu\big)\Big)\delta(x^0-y^0(s))\, ds. \tag{4.82}$$

Mettendo insieme i risultati otteniamo l'equazione

$$\partial_0 \int \widetilde{\mathcal{T}}^{0\nu}_{em}\, d^3x = \int \Big(-eF^{\nu\varrho}_{est}(y(s))u_\varrho - \frac{e^2}{6\pi}\big(\frac{d\omega^\nu}{ds} + \omega^2 u^\nu\big)\Big)\delta(x^0-y^0(s))\, ds. \tag{4.83}$$

Facciamo inoltre un cambio di variabile ottenendo

$$\frac{ds}{dt}\frac{d}{ds}\int \widetilde{\mathcal{T}}^{0\nu}_{em}\, d^3x = \int \Big(-eF^{\nu\varrho}_{est}(y(s))u_\varrho - \frac{e^2}{6\pi}\big(\frac{d\omega^\nu}{ds} + \omega^2 u^\nu\big)\Big)\delta(x^0-y^0(s))\,\frac{ds}{dy^0}\, dy^0. \tag{4.84}$$

Integriamo rispetto a y^0 eliminando la delta. Segue che le variabili cinematiche nel termine di destra di (4.84) saranno calcolate in $s(y^0)$, soluzione di $x^0 - y^0(s) = 0$. Poiché $y^0 = t$ semplifichiamo i $\frac{ds}{dt}$ nei due termini dell'equazione e, ricordando la definizione (4.78), troviamo

$$\frac{d\widetilde{P}^{\nu}_{em}}{ds} = -eF^{\nu\varrho}_{est}(y(s))u_\varrho - \frac{e^2}{6\pi}\Big(\frac{d\omega^\nu(s)}{ds} + \omega^2(s)u^\nu(s)\Big). \tag{4.85}$$

Per integrare questa equazione facciamo uso delle condizioni asintotiche che abbiamo imposto nel Capitolo 2 per i moti generali, ammettiamo cioè che $\exists \hat{s}$ tale che per $s < \hat{s}$, la 4-accelerazione $\omega^\mu(s) = 0$ e, consistentemente, anche il campo esterno $F^{\mu\nu}_{est}(t,\vec{x}) = 0$ per $t < \hat{t}$. Si ottiene in questo modo

$$\widetilde{P}^{\mu}_{em}(s) = -\int_{-\infty}^{s} eF^{\mu\nu}_{est}(y(s))u_\nu\, ds - \frac{e^2}{6\pi}\Big(\omega^\mu(s) + \int_{-\infty}^{s}\omega^2(\lambda)u^\mu(\lambda)\, d\lambda\Big), \tag{4.86}$$

che è la formula per il 4-momento elettromagnetico totale per un moto qualsiasi. Si nota facilmente che per $s < \hat{s}$ ritroviamo il caso del moto uniforme $\widetilde{P}^{\mu}_{em} = 0$, poiché vale $\omega(s) = F^{\mu\nu}_{est}(y(s)) = 0$. Se teniamo conto dell'equazione (1.6), otteniamo il risultato finale che è in accordo con la conservazione del 4-momento totale del sistema. Infatti, il 4-momento totale del campo elettromagnetico sommato con quello della particella risulta

$$\widetilde{P}^{\mu}_{em} + p^\mu = cost. \tag{4.87}$$

4.4 Unicità del tensore elettromagnetico rinormalizzato

Termini finiti e unicità. Al termine di un processo di rinormalizzazione come quello che abbiamo seguito per giungere al tensore $\widetilde{T}^{\mu\nu}_{em}$, viene naturale da chiedersi se il risultato ottenuto sia unico. Nel nostro caso, come in generale, questa non è una domanda banale. Infatti il controtermine che abbiamo determinato nel Capitolo 3 rappresenta la parte divergente di un tensore $T^{\mu\nu}_{em_\varepsilon}$ e, in quanto tale, è definito a meno di termini che rimangono *finiti* nel limite $\varepsilon \to 0$. Considerando in generale anche la presenza di campi esterni, si potrebbe dubitare del fatto che $\widetilde{\mathcal{T}}^{\mu\nu}_{em}$ sia l'unico tensore elettromagnetico totale rinormalizzato che si può ottenere.

Questi termini finiti devono però anche soddisfare le richieste che abbiamo fatto e in particolare dovranno avere supporto sulla linea di universo della particella, essere simmetrici in μ e ν, a traccia nulla e trasformare come un tensore sotto trasformazioni di Poincarè. Tenendo conto di queste considerazioni, si veda [6] per approfondimenti, si trova che la forma più generale del controtermine risulta essere

$$\widehat{T}'^{\mu\nu}_{em_\varepsilon} = \widehat{T}^{\mu\nu}_{em_\varepsilon} + \widehat{T}^{\mu\nu}_{em_{finito}}, \tag{4.88}$$

con

$$\widehat{T}^{\mu\nu}_{em_{finito}} = \frac{e^2}{6\pi}\int \big(a(u^\mu\omega^\nu + u^\nu\omega^\mu) + b(u^\mu\partial^\nu + u^\nu\partial^\mu)\big)\delta^4(x-y(s))\,ds, \tag{4.89}$$

dove le costanti a e b sono adimensionali ed è stato estratto il fattore $\frac{e^2}{6\pi}$ per facilitare il conto che segue. Utilizzando questo controtermine $\widehat{T}'^{\mu\nu}_{em_\varepsilon}$ e sostituendolo al precedente nel processo di rinormalizzazione, si veda (3.1), si può definire un opportuno $\widetilde{T}'^{\mu\nu}_{em}$ e un tensore totale $\widetilde{T}'^{\mu\nu} = \widetilde{T}'^{\mu\nu}_{em} + T^{\mu\nu}_p$.

Per calcolarne la 4-divergenza bisogna prima calcolare quella del nuovo controtermine, che risulta

$$\partial_\mu\widehat{T}^{\mu\nu}_{em_{finito}} = \frac{e^2}{6\pi}\int \big(a(u^\mu\omega^\nu + u^\nu\omega^\mu) + b(u^\mu\partial^\nu + u^\nu\partial^\mu)\big)\partial_\mu\delta^4(x-y(s))\,ds. \tag{4.90}$$

Su alcuni termini possiamo agire integrando per parti e togliendo la derivata dalla delta

$$\int u^\mu\omega^\nu\partial_\mu\delta^4(x-y(s))\,ds = \int \omega^\nu\frac{dy^\mu}{ds}\partial_\mu\delta^4(x-y(s))\,ds = -\int \omega^\nu\frac{d\delta^4(x-y(s))}{ds}\,ds = \int \frac{d\omega^\nu}{ds}\delta^4(x-y(s))\,ds. \tag{4.91}$$

$$\int u^\mu\partial^\nu\partial_\mu\delta^4(x-y(s))\,ds = \partial^\nu\int \frac{dy^\mu}{ds}\partial_\mu\delta^4(x-y(s))\,ds = -\partial^\nu\int \frac{d\delta^4(x-y(s))}{ds}\,ds = 0. \tag{4.92}$$

Si ottiene così il risultato

$$\partial_\mu\widehat{T}^{\mu\nu}_{em_{finito}} = \frac{e^2}{6\pi}\int \Big(a\Big(\frac{d\omega^\nu}{ds} + u^\nu\omega^\mu\partial_\mu\Big) + bu^\nu\Box\Big)\delta^4(x-y(s))\,ds. \tag{4.93}$$

In presenza di campi esterni troviamo che il limite (4.32) diventa

$$S'\text{–}\lim_{\varepsilon\to 0}(\mathcal{T}^{\mu\nu}_{em_\varepsilon} - \widehat{T}'^{\mu\nu}_{em_\varepsilon}) = \widetilde{\mathcal{T}}'^{\mu\nu}_{em}. \tag{4.94}$$

Dove $\widetilde{\mathcal{T}}'^{\mu\nu}_{em}$ è semplicemente

$$\widetilde{\mathcal{T}}'^{\mu\nu}_{em} = \widetilde{\mathcal{T}}^{\mu\nu}_{em} - \widehat{T}^{\mu\nu}_{em_{finito}}, \tag{4.95}$$

perché $\widehat{T}^{\mu\nu}_{em_{finito}}$ non dipende da ε e può essere estratto dal limite (4.94). La 4-divergenza del tensore energia impulso totale rinormalizzato risulterebbe, mettendo insieme i termini e ricordando le equazioni (4.93) e (4.44),

$$\partial_\mu(\widetilde{\mathcal{T}}'^{\mu\nu}) = \partial_\mu(\widetilde{\mathcal{T}}'^{\mu\nu}_{em} + T^{\mu\nu}_p) = \int \Big(\frac{dp^\nu}{ds} - eF^{\nu\varrho}_{est}(y(s))u_\varrho - \frac{e^2}{6\pi}\Big((1+a)\frac{d\omega^\nu}{ds} + u^\nu(\omega^2 + a\omega^\mu\partial_\mu + b\Box)\Big)\Big)\delta^4(x-y(s))\,ds. \tag{4.96}$$

Si nota che le derivate contenute nei termini $au^\nu\omega^\mu\partial_\mu$ e $bu^\nu\Box$ agiscono direttamente sulla $\delta^4(x-y(s))$ e non c'è modo di rimuoverle integrando per parti. Segue che non esiste equazione del moto della particella che sia dipendente dalle variabili cinematiche o dalle loro derivate e che dia $\partial_\mu\widetilde{\mathcal{T}}'^{\mu\nu} = 0$. Poiché non si vuole abbandonare la richiesta che il tensore energia impulso totale $\widetilde{\mathcal{T}}'^{\mu\nu}$ sia conservato, l'unica soluzione è che valga $a = b = 0$ e l'equazione del moto sia quella di Lorentz-Dirac. Segue inevitabilmente che il tensore $\widetilde{\mathcal{T}}^{\mu\nu}_{em}$ che abbiamo trovato a seguito del processo di rinormalizzazione è *unico*.

Bibliografia

[1] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, John Wiley and Sons, (1999).

[2] A. Yaghjian, *Relativistic Dynamics of a Charged Sphere*, Springer, (1992).

[3] K. Lechner, P. A. Marchetti, *Variational principle and energy-momentum tensor for relativistic Electrodynamics of point charges*, Annals of Physics **322**, 1162, (2007).

[4] L. Landau, E. Lifsitz, *Fisica Teorica 2. Teoria dei campi*, Editori Riuniti, (2010).

[5] K. Lechner, *Classical Electrodynamics*, Springer International Publishing, (2008).

[6] E.G.P. Rowe, Phys. Rev. D **18**, 3639, (1978).

[7] E.G.P. Rowe, Phys. Rev. Lett. **53**, 1779, (1984).

[8] L. Martucci, R. Volpato, *Appunti di Istituzioni di Metodi Matematici per la Fisica*, (2019).

[9] C. Teitelboim, Phys. Rev. D **1**, 1572, (1970).

[10] P. A. M. Dirac, *Classical theory of radiating electrons*, Porc. R. Soc. Lond. **167**, 148, (1938).

[11] H. A. Lorentz, *La theorie electromagnetique de Maxwell et son application aux corps mouvants*, Archives Neerlandaises des Sciences Exactes et Naturelles **25**, pp 363-552, (1892).

[12] M. Abraham, *Theorie der Elektrizitat, Vol II: Elektromagnetische Theorie der Strahlung*, (Teubner, Leipzig 1905).