Università degli Studi di Padova

Dipartimento di Matematica “Tullio Levi-Civita”

Corso di Laurea Triennale in Matematica

Diverse teorie degli insiemi

Relatore:
Prof.ssa Cinzia Bonotto

Laureando: Luigi Steccanella

Matricola: 1217312

Anno Accademico 2021/2022

16 dicembre 2022

Indice

Capitolo 1

Introduzione

Questa tesi costituisce un piccolo studio sulla teoria degli insiemi, da un duplice punto di vista: matematico ed epistemologico.

Tutta la trattazione, eccetto il capitolo 3, è basata sui libri *Foundations of set theory* di A. A. Fraenkel, Y. Bar-Hillel e A. Levy e *Questioni di filosofia della matematica* di E. Casari.[1]

Lo sviluppo matematico consiste nel dimostrare teoremi per conoscere nuove verità, e creare modelli per poter descrivere idee sempre più complesse; in questo senso, si può studiare la teoria degli insiemi allo stesso modo di tutte le altre branche della matematica.

D'altra parte, questa teoria suscita delle riflessioni e dei problemi che vanno al di là della semplice matematica.

In primo luogo, già fin dai suoi primi sviluppi ci si è resi conto che quella degli insiemi è una teoria sufficientemente potente e astratta da poter racchiudere dentro di sé tutta la matematica conosciuta: per questo motivo, si dice che è una *teoria fondazionale*.

Un'altra particolarità, tuttavia, la rende ancora più interessante, ed è quella sulla quale più si concentrerà questo lavoro: la teoria degli insiemi è un esempio in cui l'intuizione naturale fallisce. Ovvero: la teoria dimostra che il concetto di "insieme" che nasce spontaneo nella mente di noi esseri umani è, semplicemente, sbagliato. Come se non bastasse, mentre gli errori del ragionamento umano sono un'esperienza quotidiana, che ormai abbiamo imparato a correggere e gestire, nel caso della teoria degli insiemi accade che nessuna delle molte soluzioni trovate risulta del tutto soddisfacente, malgrado funzionino perfettamente dal punto di vista matematico. Questa è la ragione per cui non esiste *una sola*, ma *diverse teorie degli insiemi*.

In questa tesi presenterò prima di tutto una descrizione del problema, la pietra su cui inciampa la teoria degli insiemi, e una riflessione sul processo di sviluppo del pensiero matematico.

Seguirà la definizione di un formalismo, detto dei *linguaggi formali*, in grado di rappresentare adeguatamente i concetti astratti che vogliamo descrivere e studiare. Accennerò brevemente a come è possibile utilizzare gli insiemi per riprodurre tutta la matematica. Questi capitoli sono una necessaria preparazione al successivo.

Infine descriverò in dettaglio alcune delle tante teorie che sono nate nel tentativo di aggiustare quella originaria, cercando di accompagnare ciascuna con un'interpretazione che

[1] Sono [6] e [3].

ne spieghi il significato. Questa indagine si estenderà in ampiezza più che in profondità: l'obiettivo è quello di fornire una panoramica delle molte scelte possibili e delle loro conseguenze, piuttosto che analizzare nello specifico i meccanismi interni di poche teorie.

Nello scrivere questa tesi ho cercato di renderla semplice e chiara, e al contempo approfondita e precisa, in modo che i principianti della materia possano comprendere, anche se non i tecnicismi, il senso dei ragionamenti, mentre i già esperti trovino gli argomenti interessanti e utili. Spero di essere riuscito nell'intento.

Capitolo 2

Il problema

Il modo più semplice per comprendere le stranezze della teoria degli insiemi è ripercorrerne la nascita e le principali tappe dello sviluppo. Così faremo anche noi, ma preferendo un ordine logico piuttosto che storico. Fingiamo, quindi, di dover ricostruire daccapo tutta la teoria.

2.1 Cos'è un insieme

Per elaborare una teoria matematica, è necessario innanzitutto che sia ben chiaro il concetto che si vuole studiare. Che cosa si intende, dunque, per "insieme"?

Le idee di fondo sono due:

- Un insieme è "una cosa che può contenere altre cose". Le cose contenute dentro un insieme vengono chiamate *elementi*.
- Il concetto di insieme deve essere più generale e astratto possibile. Questo principio serve a renderlo utilizzabile nelle più varie circostanze in ogni branca della matematica; è la base che rende fondazionale la teoria degli insiemi.

La generalità del concetto di insieme si applica secondo due diverse sfumature: all'insieme stesso, e agli elementi in esso contenuti.

Per quanto riguarda gli elementi, si vuole che godano della massima libertà; perciò, non si impone nessun tipo di restrizione alla loro natura né alla loro varietà.

Esisteranno, quindi:

- insiemi contenenti oggetti matematici di qualunque sorta: insiemi di numeri, insiemi di funzioni, insiemi di grafi, e così via;
- insiemi di insiemi, insiemi di insiemi di insiemi, eccetera;
- insiemi contenenti cose che non sono oggetti matematici: per esempio, l'insieme delle persone componenti la mia famiglia, l'insieme delle parole sul dizionario, l'insieme di tutti i concetti mai pensati da un essere umano;
- insiemi globali, come quelli sopra citati, ma anche insiemi più piccoli, contenenti solo alcuni particolari elementi, scelti secondo una regola logica oppure in maniera arbitraria: per esempio, l'insieme dei soli numeri primi; l'insieme dei numeri 1, 2, 3 e 8; l'insieme delle parole "casa", "cassapanca" e "zebra";

- insiemi omogenei, come i precedenti, ma anche altri eterogenei, contenenti oggetti di tipo diverso fra loro: un insieme contenente tutti i numeri naturali e il pianeta Terra; un insieme contenente tutto ciò che mi piace e quindi, fra l'altro, il gelato, la musica, correre, il numero 3, il cielo stellato;
- insiemi contenenti poche o molte cose, insiemi infiniti, insiemi con un solo elemento, insiemi totalmente vuoti;
- molti altri.

L'altro aspetto della generalità riguarda gli insiemi in quanto tali, a prescindere dagli elementi. Stavolta questa generalità non consiste nel considerare diverse tipologie e varietà di insiemi, come è stato fatto per gli elementi, ma, al contrario, si tratta di imporre che un insieme debba sempre avere la struttura più semplice possibile. Infatti, in questo modo, per un oggetto matematico qualsiasi è più facile essere dichiarato un insieme, perché non deve avere nulla più che lo stretto necessario. Ogni oggetto matematico che assomigli a un insieme, ma abbia qualcosa in più, non è direttamente un insieme, ma lo diventa se gli si toglie ogni caratteristica aggiuntiva.

Si richiede quindi che un insieme non fornisca alcuna informazione oltre al semplice fatto di contenere o non contenere gli elementi.

Questo vincolo apparentemente innocuo ha delle notevoli conseguenze.

Un insieme non può contenere elementi ripetuti, perché ciò implicherebbe che l'insieme sappia dire non soltanto se contiene o meno un dato oggetto, ma anche quante volte lo contiene.

Allo stesso modo, gli elementi di un insieme sono disordinati, perché, se fossero ordinati, disporremmo dell'ulteriore informazione sulla loro posizione.

Quindi, per esempio, l'insieme contenente le lettere 'a', 'b' e 'c' corrisponde perfettamente all'insieme delle lettere 'c', 'a' e 'b', ed entrambi corrispondono a quello che contiene 'a', 'a', 'b', 'a', 'c', 'b' e ancora 'a'.

Un'altra conseguenza, tuttavia, racchiude entrambe le precedenti: è il fatto che ogni insieme sia *completamente* determinato dai suoi elementi, noto come *principio di estensionalità* e che si può equivalentemente enunciare così: "due insiemi sono uguali se e solo se hanno gli stessi elementi".

A priori, infatti, potrebbero esistere due insiemi che contengono esattamente gli stessi elementi, ma che vengono considerati diversi per un certo motivo. Ma, allora, la caratteristica che li distingue sarebbe un'informazione ulteriore agli elementi contenuti! Pertanto tale informazione va eliminata, e di conseguenza i due insiemi risultano perfettamente identici, ovvero sono lo stesso insieme.

Il viceversa, ossia che se due insiemi sono uguali allora hanno gli stessi elementi, è una semplice conseguenza delle proprietà fondamentali dell'uguaglianza. Perciò il principio di estensionalità si enuncia così: "se due insiemi contengono gli stessi elementi, allora sono uguali".

Per esempio, consideriamo l'insieme delle persone della mia famiglia e quello delle persone con cui vivo: contengono gli stessi elementi, quindi, anche se sono costruiti a partire da concetti diversi, sono lo stesso insieme.

Per riassumere, il concetto di insieme è definito dai seguenti principi:

- Un insieme è una cosa che contiene cose.
- Un insieme può contenere qualsiasi cosa.
- Un insieme non dà altre informazioni se non quella di contenere o non contenere gli elementi.

2.2 Il paradosso di Russell

Chiarito che cosa si intende con la parola "insieme", vedremo ora che questa idea, tanto curata, in realtà non può funzionare.

Abbiamo assunto che non ci siano limiti sugli elementi che un insieme può contenere. Dunque, data una qualsiasi caratteristica, esiste sempre l'insieme di tutte e sole le cose che possiedono tale caratteristica: questo fatto si chiama *principio di comprensione*. Per esempio, esistono l'insieme di tutte le cose bianche, l'insieme di tutte le cose capaci di pensare, l'insieme di tutte le cose che sono insiemi.

Consideriamo la caratteristica "non contenere sé stesso". Esistono insiemi che contengono loro stessi? Basandoci su quello che è stato detto finora, non lo sappiamo. Ad ogni modo, però, esiste l'insieme di tutte le cose che non contengono loro stesse: chiamiamo X tale insieme.

E ora, poniamoci la fatidica domanda: X contiene sé stesso oppure no?
Se X non contiene sé stesso, allora, per definizione, visto che X è l'insieme di tutte le cose che non contengono loro stesse, X deve contenere X, cioè sé stesso.
Viceversa, se X contiene sé stesso, allora non ha motivo di stare dentro X, che è l'insieme di tutte le cose che *non* contengono loro stesse; dunque, X non contiene sé stesso.

A questo punto, è evidente che siamo giunti a una situazione di completa assurdità: la dichiarazione "X contiene X" è vera se e solo se è vero il suo contrario.
Ciascuno dei passaggi eseguiti fin qui sembra perfettamente valido e giustificato, perciò la contraddizione deve essere nascosta da qualche parte all'interno dei principi da cui siamo partiti: l'idea di insieme non ha funzionato.
Questa dimostrazione si chiama *paradosso di Russell*.

Dove sia l'errore fra le assunzioni iniziali non è per nulla chiaro. Il sospetto è che il principio "un insieme può contenere qualsiasi cosa" sia troppo permissivo, ma i modi per limitarlo sono molti, e non pare che ce ne sia uno migliore di altri. D'altra parte, si può anche decidere di lasciare intatto questo principio e agire in altre direzioni.
Ecco alcune delle molte idee proposte da diversi matematici:

- Un insieme non può mai contenere sé stesso.
- Un insieme non può essere troppo grande.
- Accettiamo solo gli insiemi minimamente indispensabili per la matematica; tutti gli altri non esistono.
- Un insieme è solo un artificio linguistico, un modo di dire in una volta sola ciò che vale per ciascun elemento.

- Esistono due tipi di insiemi: con alcuni si possono fare più cose, con altri meno.
- Il problema non sta nella teoria degli insiemi, ma nella logica che usiamo per dedurre le conclusioni.
- Non serve che la teoria degli insiemi rispecchi un'intuizione, basta che funzioni da un punto di vista tecnico.

2.3 Paradossi e antinomie

Prima di proseguire, approfondiamo brevemente il concetto di *paradosso* e la sua distinzione da quello di *antinomia*.

Un paradosso è una deduzione logicamente valida che porta a un risultato in contraddizione con l'intuizione comune. In altre parole, è un ragionamento valido la cui conclusione appare strana.

Un'antinomia, invece, è una deduzione logicamente valida che porta a una contraddizione logica. Ovvero, è un ragionamento che conduce a una negazione delle regole stesse del ragionamento.

Secondo queste definizioni, il paradosso di Russell non è veramente un paradosso, ma una ben più insidiosa antinomia. Si chiama comunque così per motivi storici.

Quando si incontra un paradosso, bisogna decidere se sono più importanti le premesse da cui si era partiti oppure l'intuizione naturale contraddetta dal paradosso. Nel primo caso, si accetta la stranezza del risultato; nel secondo, bisogna rinunciare a qualcuna delle premesse e assumere al suo posto, come nuovo principio, quella verità intuitiva in conflitto col paradosso.

Se ci si imbatte in un'antinomia, invece, la faccenda è più seria, perché in gioco non c'è soltanto una conclusione strana, ma le regole stesse del ragionamento. Dunque, o si rinuncia a qualcuna delle premesse, o si rinuncia alla logica.

2.4 Altri paradossi della teoria degli insiemi

Il paradosso di Russell non è l'unico risultato che fa traballare la teoria degli insiemi: ce ne sono molti altri, alcuni dei quali prevedono di avere già sviluppato nozioni più avanzate.

L'antinomia di Cantor

Il teorema di Cantor dimostra che l'insieme delle parti di un insieme è sempre strettamente più grande dell'insieme di partenza. Se si applica il teorema all'insieme di tutti gli insiemi, si ottiene l'esistenza di un insieme più grande dell'insieme universale, che è per definizione il più grande di tutti, assurdo.

L'antinomia di Burali - Forti

Per ogni ordinale esiste sempre il suo successore. Se un insieme di ordinali ha la proprietà che, per ogni ordinale che contiene, contiene anche tutti i suoi precedenti, allora è esso stesso un ordinale.

Noti questi due risultati, poniamo l'attenzione sull'insieme di tutti gli ordinali. Poiché contiene tutti gli ordinali precedenti ad ogni ordinale, è anch'esso un ordinale, e dunque esiste il suo successore. Ma allora l'insieme di tutti gli ordinali non conteneva il proprio successore e quindi non conteneva tutti gli ordinali, assurdo.

Capitolo 3

Riflessioni filosofiche sulla matematica

La matematica è risaputamente una disciplina estremamente precisa, rigorosa e oggettiva. La conoscenza del paradosso di Russell conduce a porsi una domanda: *Come è possibile che la matematica abbia sbagliato?* Nel tentativo di rispondere è nata una mia idea personale, che racconto in questo capitolo, e che ha ampliato l'interrogativo fino a chiedersi: *Che cos'è la matematica, e in che cosa consiste il suo sviluppo?*

3.1 Il valore del rigore formale

La matematica nasce inizialmente come intuizione naturale, cioè come un gruppo di idee che sorgono spontanee nella mente di chiunque. Per esempio, fin da bambini impariamo i concetti di numero, addizione e sottrazione. In questa matematica, tutto è legato all'intuizione e a brevi ragionamenti istintivi; a guidare c'è la regola "è così perché si vede".

Ben presto impariamo che tutto questo non è assolutamente sufficiente.

L'intuizione umana presenta notevoli limiti, che sperimentiamo tutti i giorni.

Innanzitutto, è soggettiva: ciascuno di noi ragiona in modo diverso, e quindi lo stesso pensiero può risultare chiaro a qualcuno ed oscuro a qualcun altro; inoltre, spesso, i pensieri compaiono nella testa senza l'utilizzo di alcun linguaggio, e così risulta difficile anche solo trasmettere un concetto a parole.

In secondo luogo, è fallace: la mente può sbagliare. A volte si tratta di errori di distrazione, che si correggono semplicemente riguardando una seconda volta il percorso già fatto. Altre volte gli errori sono sistematici, e a quel punto si può solo prenderne coscienza e procedere con cautela. Un esempio sono le illusioni ottiche: pur sapendo che ciò che si vede è falso, l'occhio continua a mostrare l'illusione.

Infine, l'intuizione è limitata nel senso stretto del termine: non può raggiungere tutto, esistono verità che non riusciamo a cogliere.

Raggiunta la consapevolezza di quanto sia fragile l'intuizione naturale, nasce il desiderio di superare i suoi limiti. Si impara allora a *formalizzare il pensiero*, e questo mezzo si rivela incredibilmente potente ed efficace. Solitamente le informazioni più semplici si comunicano tramite il linguaggio comune, e quelle più complesse attraverso immagini o metafore evocative; la formalizzazione consiste invece nell'esprimere i concetti, fin nel più piccolo dettaglio, attraverso un linguaggio preciso e non ambiguo, secondo delle regole ben definite, come se si volesse spiegarli a qualcuno incapace del minimo ragionamento. Formalizzare un pensiero, in un certo senso, è come tradurlo in un'altra lingua in cui non esistono sfumature di significato né sottintesi.

In questo modo si risolve il problema della comunicazione. Infatti, specificare un ragionamento in ogni dettaglio permette a chiunque di comprenderlo e verificarne la correttezza passo per passo, anche se non riesce a coglierne il significato globale.

Così, anche se non l'intuizione da cui è nato un pensiero, è comunque possibile trasmettere il risultato a cui si è arrivati e la strada che conduce ad esso. Di quelli che ascolteranno o leggeranno il ragionamento formalizzato, alcuni riusciranno a concepire un'idea intuitiva equivalente a quella di partenza, mentre altri no, a seconda delle capacità e predisposizioni di ciascuno; ma tutti saranno in grado di comprendere il ragionamento formalizzato.

Si risolve inoltre anche la questione degli errori sistematici, perché i ragionamenti formalizzati si sviluppano secondo poche e semplici regole, la cui verità non viene messa in dubbio; gli unici errori possibili, allora, sono solo sviste, facilmente eliminabili da chiunque ripercorra il ragionamento.

Nell'improbabile eventualità in cui si riveli inadatta qualcuna delle regole di base, basterà eliminarla e, se necessario, sostituirla con un'altra; allora, tutti i ragionamenti formalizzati secondo le vecchie regole andranno riformulati nelle nuove, ma il procedimento della formalizzazione, in astratto, resterà sempre valido.

Infine, la formalizzazione del pensiero permette anche di oltrepassare la limitatezza dell'intuizione naturale. Pure la formalizzazione ha possibilità limitate, come ogni attività umana, ma attraverso di essa si raggiungono pensieri più lontani. Infatti, se la verità della matematica non è più fondata sull'evidenza ("è vero perché si vede"), ma sulla dimostrazione ("è vero perché posso dedurlo tramite un ragionamento formalizzato"), allora si può continuare a ottenere risultati anche quando gli argomenti diventano tanto complessi da non riuscire a capirli. Non sarà chiaro il loro significato, ma saranno sempre verità, perché ricavate attraverso un ragionamento che rispetta passo per passo alcune regole di cui ci fidiamo ciecamente.

3.2 Il valore dell'intuizione

Arrivati a questo punto, molti decidono di identificare la matematica con il processo di formalizzazione. Vista la solidità dei ragionamenti formalizzati, e credendo nella loro universalità, cioè che per ogni ragionamento esista una formalizzazione in grado di codificarlo, non ha senso accettare pensieri non formalizzati. Così, per molti, la matematica consiste esattamente di tutte e sole le verità che possono essere codificate e dimostrate in linguaggio matematico. Più precisamente, *la matematica* è il processo umano di formalizzazione dei pensieri, e *i suoi risultati* sono l'insieme di ciò che è dimostrabile.

In effetti, le cose stanno così: un risultato è vero in matematica se e solo se è possibile dimostrarlo. Però non va dimenticato che il punto di partenza non è la formalizzazione, ma l'idea che viene formalizzata, e che esiste a priori di ogni formalizzazione, nella mente della persona che l'ha concepita. Sono le idee a dare il via al processo di formalizzazione, e sono sempre le idee ciò che viene formalizzato. Senza l'intuizione la matematica sarebbe come una macchina perfetta senza nessuno che la faccia partire, o una strada senza nessuno che la percorra.

Dunque, mentre i risultati devono restare "tutto e solo ciò che è dimostrabile", la matematica, in un senso più ampio, è composta di due aspetti ugualmente importanti: la capacità di intuizione umana, e il processo di formalizzazione di tali intuizioni. Il ruolo dell'intuizione è quello di motivare e direzionare lo sviluppo, attraverso idee, congetture e domande; il compito della formalizzazione è stabilizzare i risultati ottenuti e coprire i vuoti di ciò che l'intuizione non riesce a raggiungere.

3.3 La duplicazione dei concetti

Ogni idea intuitiva, per essere utilizzata in matematica, *deve* venire formalizzata. Altrimenti, infatti, soffre di tutti i difetti legati all'intuizione umana descritti in precedenza; in particolare, non si può essere certi della sua correttezza. Il contenuto di un'idea, ad ogni modo, esiste ugualmente, sia essa formalizzata o meno.

D'altra parte, ogni concetto formalizzato *può* essere arricchito di un'interpretazione intuitiva, ma non ne ha bisogno. L'intuizione gioca infatti un ruolo essenziale all'inizio, fornendo un'idea che possa essere formalizzata, ma, a posteriori della formalizzazione, non è più necessaria. L'interpretazione è il processo inverso della formalizzazione, grazie al quale rielaboriamo un ragionamento formalizzato producendoci un'intuizione del suo significato.

I concetti formali, dunque, possono esistere da soli, senza una controparte intuitiva; viceversa, le idee intuitive sono indipendenti dall'esistenza di una loro formalizzazione. Due concetti, uno intuitivo e uno formale, che siano vicendevolmente l'interpretazione e la codifica dell'altro, in un certo senso, si equivalgono; d'altra parte, il fatto che la formalizzazione non sia un passaggio diretto, ma una specie di traduzione, significa che i due concetti, seppur vicini, sono in qualche modo distinti.

Quando un'intuizione viene formalizzata, accade che si trovano a coesistere due concetti diversi: quello intuitivo, da cui si era partiti, e quello formalizzato. Il desiderio è che questi due concetti coincidano quanto più possibile, in modo che, nei ragionamenti successivi, ciò che viene formalizzato sia espressione esatta e precisa di ciò che abbiamo in mente. Purtroppo, non sempre questo desiderio si realizza.

Un esempio può spiegare come l'idea intuitiva e quella formale siano effettivamente due concetti diversi.

Decidiamo che, per definizione, un oggetto matematico di tipo "scatola-grande" sia un insieme contenente due elementi: uno di questi è un altro insieme, chiamato "scatola-2", contenente due elementi qualsiasi; l'altro elemento della scatola-grande è un altro insieme ancora, detto "scatola-1", con un solo elemento, che deve essere uguale a uno dei due contenuti dentro la scatola-2.

Il concetto di scatola-grande è una costruzione matematica come tante altre; può essere usata per definire nuove strutture ancora più complesse, oppure potrebbe risultare un utile punto di appoggio in certe dimostrazioni.

Assume però tutto un altro aspetto se, insieme alla definizione formale di scatola-grande, viene fornita anche la sua interpretazione classica, e cioè quella di *coppia ordinata*.

Una coppia ordinata è un insieme di due elementi in cui si distingue quale è il primo e quale il secondo. Per motivi più articolati, che in sostanza si riconducono all'evitare definizioni circolari, il concetto di coppia ordinata non si può definire formalmente tramite la semplice descrizione appena fatta, ma deve essere modellizzato attraverso il concetto di scatola-grande.

La scatola-grande descrive bene la coppia ordinata: infatti, come già detto, una coppia ordinata è un insieme di due elementi in cui si distinguono il primo e il secondo; la scatola-grande, in fin dei conti, non è altro che questo: una scatola-2, che è l'insieme dei due elementi della coppia, e una scatola-1, che è l'elemento della scatola-2 che sta al primo posto. Il concetto formale di scatola-grande, dunque, è una formalizzazione dell'idea intuitiva di coppia ordinata.

Anche se i due concetti si equivalgono dal punto di vista logico, perché esprimono esattamente le stesse cose, tuttavia non coincidono, perché è ben diverso immaginarsi una coppia ordinata o una scatola-grande.

A volte il processo di formalizzazione scorre perfettamente liscio. Per esempio, la definizione di numero primo è "un numero che non ha nessun divisore eccetto 1 e sé stesso". L'idea è esattamente la stessa intuitivamente e formalmente: c'è coincidenza fra i due concetti.

Molti discorsi si chiariscono attraverso la metafora della formalizzazione come traduzione da una lingua a un'altra.

Casi come quello dei numeri primi corrispondono a quando esiste la traduzione esatta di una parola.

L'esempio precedente, in cui la scatola-grande è in pratica una costruzione artificiale per descrivere la coppia ordinata usando il concetto di insieme, corrisponde a quando non esiste la traduzione precisa di una parola, e si è costretti a esprimerla usando un'intera frase. La frase trovata, comunque, ricalca perfettamente il significato della parola originaria.

Altre volte, mancando una traduzione esatta, si sceglie la parola o la frase che più le si avvicina; ma queste espressioni, nella nuova lingua, hanno una sfumatura di significato che inizialmente non c'era.

Così si vengono a creare due concetti che oltre a non coincidere, nel senso che vengono immaginati in due modi diversi, non sono neanche equivalenti dal punto di vista logico, nel senso che conducono a conseguenze diverse.

Quest'ultimo è il caso che si è verificato nella teoria degli insiemi. Nella sezione 2.1 abbiamo formalizzato il concetto di insieme, e la traduzione dal linguaggio del pensiero a quello matematico appariva molto precisa. Tuttavia, si è rivelato che la stessa parola ha sfumature diverse nelle due lingue: mentre nel pensiero si sviluppa in maniera ingenua e semplice, inserita nella macchina dei ragionamenti formali sprigiona una potenza distruttiva che genera il paradosso di Russell.

3.4 Conclusioni

In sintesi:

- In matematica, intuizione e rigore formale sono ugualmente importanti. La formalità è irrinunciabile per dare correttezza e oggettività; senza intuizione, invece, i formalismi non andrebbero da nessuna parte.
- Lo sviluppo di nuova matematica consiste nel formalizzare nuove intuizioni.
- L'atto di formalizzare un'intuizione provoca una scissione in due concetti: quello intuitivo originario e quello formalizzato. Questi due concetti a volte si somigliano di più e altre meno.
- La teoria degli insiemi non ha funzionato perché il concetto formalizzato è risultato tragicamente diverso da quello che si era immaginato.

Capitolo 4

Il metodo assiomatico

4.1 I linguaggi formali

Il linguaggio naturale che parliamo tutti i giorni è inadatto a descrivere il pensiero matematico. Il suo difetto principale è quello di essere ambiguo e vago: la stessa parola può avere significati diversi e, anche quando ne ha uno solo, questo non è completamente definito: basti pensare a quanti sensi figurati può avere una parola qualunque. In matematica, invece, c'è bisogno che tutto sia assolutamente preciso, per evitare ogni possibilità di errore. Per dirlo con una metafora, il significato di una parola in linguaggio naturale è una nuvola, mentre in linguaggio matematico deve essere un punto.

Definizione. Un *linguaggio formale* è composto di:

- un insieme di *simboli*;
- un insieme di espressioni dette *termini*;
- un insieme di espressioni dette *formule*.

Per *espressione* si intende una qualunque sequenza finita di simboli.

Gli insiemi di simboli, termini e formule possono essere definiti attraverso un elenco, oppure tramite una regola generale, purché sia abbastanza semplice da poter essere verificata da un algoritmo in un numero finito di passi.

4.1.1 Simboli

I simboli rappresentano sia le "lettere" che le "parole" del linguaggio: le lettere, perché sono l'unità minima di scrittura; le parole, perché sono l'unità minima di significato. In questo senso, i simboli di un linguaggio formale si comportano come gli ideogrammi cinesi: ogni simbolo è dotato di un significato e ogni significato è indicato attraverso un unico simbolo.

I simboli vanno considerati unità indivisibili indipendentemente dal loro aspetto grafico; per esempio, A' non si spezza in A e $'$, né x_1 in x e $_1$.

In astratto tutti i simboli sono dello stesso genere. A seconda del significato che si attribuisce a ciascuno di essi, però, solitamente vengono suddivisi in diverse famiglie: *variabili*, *costanti* e *funzioni*, *predicati*, simboli logici e simboli ausiliari.

Ogni costante indica un particolare soggetto. Per esempio, si può decidere che S indichi Socrate, P Platone, c_0 il numero 0, X l'insieme di tutti gli insiemi che non contengono loro stessi.

Le funzioni associano ad alcuni soggetti un nuovo soggetto. Ad esempio, possiamo indicare con σ la funzione "successore di un numero naturale" e con g quella che associa a due persone il più giovane fra i due. Allora varranno $\sigma(c_0) = 1$ e $g(S, P) = P$.

Le costanti si possono considerare come un tipo particolare di funzioni che dipendono, anziché da uno o più parametri come gli esempi sopra, da zero, e quindi risultano sempre uguali, costanti appunto.

Le variabili sono soggetti indefiniti. Si utilizzano per indicare verità generali che riguardano qualsiasi soggetto, o in ogni altra situazione in cui non si voglia o non si possa specificare ciò di cui si sta parlando. Per esempio, se x, y e z sono variabili, per dire che, se due cose sono entrambe uguali a una terza, allora sono anche uguali fra di loro, si scrive: "se $x = z$ e $y = z$, allora $x = y$".

I predicati associano ad alcuni soggetti un valore di verità. Per esempio, definendo il predicato N come $N(x) :=$ "x è un numero", vale che $N(c_0)$ è vero e $N(S)$ è falso. Un predicato molto importante è l'uguaglianza, che richiede due parametri; per esempio, $c_0 = 0$ è vero e $S = P$ è falso.

I simboli logici si dividono in ulteriori sottocategorie.

I *connettivi* sono l'equivalente delle funzioni applicate ai valori di verità anziché ai soggetti: un connettivo associa ad alcuni valori di verità un nuovo valore di verità. Per esempio, i simboli '$\wedge$' e '$\rightarrow$' indicano rispettivamente la congiunzione e l'implicazione logica, ossia, in italiano, la parola "e" e la costruzione "se ... allora ...". La formalizzazione completa di "se $x = z$ e $y = z$, allora $x = y$" è quindi $(x = z) \wedge (y = z) \rightarrow (x = y)$.

Come nel caso delle funzioni, ci sono anche connettivi senza parametri, che vengono chiamati *costanti di verità*: la costante-vero $\mathbf{T}$ e la costante-falso $\mathbf{F}$.

Un'altra famiglia di simboli logici è quella dei *quantificatori*; verranno chiariti fra poco, dopo aver spiegato il concetto di formula.

Infine, alcuni simboli ausiliari possono servire semplicemente come punti di appoggio per gli altri simboli. Quelli più usati sono le parentesi, '(' e ')', per indicare, all'interno di un'espressione lunga, che un certo simbolo agisce solo su una parte di essa.

4.1.2 Termini e formule

Oltre ai diversi generi di simboli, un linguaggio formale definisce, fra tutte le espressioni possibili, quali corrispondono a termini e quali a formule.

I termini indicano dei soggetti, mentre le formule indicano dei valori di verità. Entrambi, eventualmente, possono dipendere da una o più variabili; se un'espressione dipende da una variabile, si dice che tale variabile è *libera* nell'espressione.

Per esempio, come già sappiamo, S e P sono delle costanti e g una funzione; $g(S, P)$ non è né l'una né l'altra, ma indica comunque un soggetto, perciò la si classifica come termine. L'espressione $g(P, x)$, ossia "il più giovane fra Platone e x" è un termine dipendente dalla variabile x, perciò x è libera in $g(P, x)$. L'espressione $(x = z) \wedge (y = z) \rightarrow (x = y)$ è una formula con tre variabili libere: x, y e z.

Possiamo ora tornare ai quantificatori. Un quantificatore lega una variabile e una formula ottenendo una nuova formula. I simboli '$\forall$' e '$\exists$' rappresentano ciò che in lingua naturale si esprime con le frasi "per tutti vale che ..." o "esiste uno tale che ..."; vengono perciò chiamati rispettivamente *quantificatore universale* e *quantificatore esistenziale*. Per esempio: $\forall x(N(x))$ significa "tutti sono numeri"; $\exists y(g(S, y))$ vuol dire "esiste qualcuno più giovane di Socrate".

Quando una variabile compare in un'espressione riferita a un quantificatore, l'espressione non dipende più da tale variabile. Per esempio, $x = 0$ dipende da x, perché il valore di verità della formula varia a seconda del soggetto rappresentato da x; ma $\exists x(x = 0)$, che significa "esiste qualcosa uguale a 0", è semplicemente vera. Perciò, se una variabile è riferita a un quantificatore, si dice che è *legata* o *quantificata* nella formula, e non conta come variabile libera.

In alcuni casi può accadere che la stessa variabile compaia sia libera sia legata nella stessa formula, come in $x = 0 \wedge \exists x(N(x))$, "$x$ è uguale a 0 ed esiste un numero".

Non tutte le sequenze di simboli sono termini o formule: alcune espressioni possono essere del tutto prive di significato. Per esempio, l'espressione "$\sigma(S)PP \to P$", che in italiano assomiglierebbe a "se il numero naturale successivo a Socrate, Platone, Platone, allora Platone", solitamente non è considerata né termine né formula.

Ma è importante notare che la definizione di linguaggio formale è puramente astratta e non dipende in alcun modo dall'interpretazione che hanno i simboli in linguaggio naturale; anzi, può anche non esserci alcuna interpretazione. Perciò è perfettamente lecito, per esempio, inventare un linguaggio formale in cui $\sigma(S)PP \to P$ sia una formula.

4.1.3 Le definizioni

Una definizione è la creazione di un nuovo concetto attraverso la combinazione di concetti preesistenti. Per esempio, "nipote" è definito come "figlio del figlio".

Trasponendo la stessa procedura in un linguaggio formale, definire un nuovo concetto significa introdurre un nuovo simbolo e associargli come significato un'intera espressione di simboli fondamentali o già definiti.

C'è una grande differenza fra ciò che accade nella mente e nel linguaggio. A livello intuitivo, un concetto definito è un nuovo concetto a tutti gli effetti. A livello formale, invece, un simbolo definito è soltanto *un'abbreviazione* per una sequenza di altri simboli. Non introduce nuovi significati; permette soltanto di scrivere più agevolmente espressioni lunghe e di far assomigliare un po' di più le formule a quello che c'è nel nostro pensiero.

Un caso particolare di definizione è quando ci si riferisce all'*unico* concetto con una determinata proprietà. Per esempio, "figlio" è generalmente un concetto ambiguo, perché uno stesso genitore può avere molti figli; ma se si ha l'informazione che un particolare genitore, che chiameremo G, ha un unico figlio, allora "figlio di G" è un concetto ben determinato.

Per poter dare definizioni di questo tipo è però necessario aver prima dimostrato l'esistenza e unicità del concetto che si va a definire.

Chiameremo *primitivi* i simboli fondamentali di un linguaggio formale e *definiti* i simboli introdotti a posteriori attraverso definizioni. Chiameremo infine *simboli del linguaggio* quelli appartenenti a una o all'altra delle due categorie.

4.1.4 La specializzazione delle variabili

A volte i soggetti descritti da un linguaggio sono divisi in diverse categorie. Per esempio, supponiamo che il linguaggio descriva le relazioni di parentela fra persone; ogni persona può essere uomo o donna. In queste situazioni spesso risulta comodo avere a disposizione delle variabili riguardanti solamente l'una o l'altra categoria. Per esempio, si può convenire che le variabili a, b e c rappresentino solo donne, le variabili l, m e n solo uomini e x, y e z restino variabili generiche che possano indicare entrambi.

In un contesto più generale, è ammesso che le categorie scelte si possano sovrapporre e che ci siano soggetti non appartenenti a nessuna categoria.

Le variabili riservate a una particolare categoria sono dette *variabili specializzate.*

Una variabile specializzata modifica il significato delle espressioni in cui viene inserita, ma non è un simbolo definito, perché si comporta diversamente a seconda del modo in cui compare nell'espressione.

In un termine una variabile specializzata è del tutto equivalente a una variabile generica. Per esempio, se $P(x)$ è la funzione "il padre di x", allora il termine $P(l)$ indica comunque "il padre di l"; il fatto che l sia un maschio è ininfluente.

Diversamente accade se una variabile specializzata è inserita in una formula. La diversità dei significati si ramifica ulteriormente distinguendo i casi in cui la variabile sia libera o quantificata. Supponiamo di avere a disposizione dei predicati che distinguano le categorie: $U(x)$ significa "x è un uomo" e $D(x)$ "x è una donna".

Una variabile specializzata che compare libera in una formula aggiunge una nuova condizione alla formula. Per esempio, se $G(x)$ significa "x è un genitore", allora $G(a)$ significa "a è un genitore ed è una donna", ovvero "a è una madre". In questo caso, la formula $G(a)$ si può esprimere nel linguaggio primitivo come $G(x) \wedge D(x)$.

Se invece la variabile specializzata è quantificata, il risultato è la limitazione dei soggetti su cui verificare la condizione. Per esempio, se $F(x)$ significa "x è un figlio", la formula $\forall x F(x)$ ha il significato generale "ogni persona è un figlio", mentre $\forall l F(l)$ si limita a indicare "ogni maschio è un figlio". Anche in questo caso, lo stesso concetto si può esprimere nel linguaggio primitivo: $\forall l F(l)$ equivale a $\forall x(U(x) \to F(x))$.

In generale, se si introducono dei nuovi predicati corrispondenti alle categorie di soggetti da distinguere, come U e D negli esempi sopra, i concetti indicati dalle variabili specializzate si possono ugualmente esprimere senza di esse. Pertanto la specializzazione delle variabili è una procedura lecita che non modifica la struttura profonda del linguaggio formale.

4.2 Un linguaggio formale per la teoria degli insiemi

Dopo aver definito in generale cos'è un linguaggio formale, si può definire in particolare ogni singolo nuovo linguaggio.

Nello specifico, ne serve uno per formalizzare i concetti della teoria degli insiemi; lo introdurremo come estensione di un linguaggio più generale per la logica classica.

Definizione. Il linguaggio formale $\mathcal{LC}$ (Linguaggio per la logica Classica) è composto da:

- Simboli:

- Le variabili sono le lettere dell'alfabeto latino minuscolo: a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z, e le stesse lettere con a pedice un qualsiasi altro simbolo.
- Non ci sono costanti né funzioni.
- L'unico predicato è l'uguaglianza $=$.
- I simboli logici sono:
  Connettivi:
    * congiunzione "... e ...": $\wedge$
    * disgiunzione "... o ..." $\vee$
    * negazione "non ...": $\neg$
    * implicazione "se ... allora ...": $\rightarrow$

  Costanti di verità:
    * vero: **T**
    * falso: **F**

  Quantificatori:
    * universale "per tutti vale che ...": $\forall$
    * esistenziale "esiste uno tale che ...": $\exists$
- I simboli ausiliari sono le parentesi (e).

- Termini: ogni variabile è un termine.
- Formule:
  - Se τ e σ sono termini, allora $\tau = \sigma$ è una formula.
  - **T** e **F** sono formule.
  - Se φ è una formula, allora lo è anche $\neg(\varphi)$; se φ e ψ sono formule, allora lo sono anche $(\varphi) \wedge (\psi)$, $(\varphi) \vee (\psi)$, $(\varphi) \rightarrow (\psi)$.
  - Se ξ è una variabile e φ è una formula, allora $\forall\xi(\varphi)$ e $\exists\xi(\varphi)$ sono formule.
- Simboli definiti:
  - Doppia implicazione "... se e solo se ...": $\leftrightarrow$
    Se φ e ψ sono formule, allora $\varphi \leftrightarrow \psi$ è un'abbreviazione di $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$.

Per limitare il numero di parentesi, si usa la convenzione che $\forall$, $\exists$ e $\neg$ hanno la precedenza su $\wedge$, che a sua volta ce l'ha su $\vee$, che a sua volta viene prima di $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$.

Le formule che contengono connettivi sono dette *formule composte*, quelle che non ne hanno sono dette *formule atomiche*.

Definizione. Il linguaggio formale $\mathcal{LI}$ (Linguaggio per gli Insiemi) è un'estensione di $\mathcal{LC}$ ottenuta nel seguente modo:

- Si aggiunge il simbolo $\in$ per il predicato di appartenenza.
- Se τ e σ sono termini, allora sono formule anche $\tau \in \sigma$ e tutte quelle che si ottengono a partire da essa attraverso le regole di formazione delle formule già espresse in $\mathcal{LC}$.

Infine, una serie di simboli definiti indicano le costruzioni più ricorrenti nella teoria degli insiemi.

- Inclusione: $\subseteq$
  Un sottoinsieme è un insieme contenuto dentro un altro insieme; ossia, ogni elemento che appartiene al sottoinsieme appartiene anche all'altro insieme. Perciò, se x e y sono insiemi, allora $x \subseteq y$ è un'abbreviazione di $\forall u(u \in x \to u \in y)$.

- Inclusione stretta: $\subset$
  Un sottoinsieme proprio è un sottoinsieme che non coincide con l'insieme stesso. Perciò, se x e y sono insiemi, allora $x \subset y$ è un'abbreviazione di $x \subseteq y \land x \neq y$.

- Unione binaria: $\cup$
  L'unione di due insiemi è l'insieme degli elementi che appartengono ad almeno uno dei due. Perciò, se x e y sono insiemi, allora $x \cup y$ indica l'unico insieme tale che $\forall u(u \in x \cup y \leftrightarrow u \in x \lor u \in y)$.

- Intersezione: $\cap$
  L'intersezione di due insiemi è l'insieme degli elementi che appartengono sia all'uno che all'altro. Perciò, se x e y sono insiemi, allora $x \cap y$ indica l'unico insieme tale che $\forall u(u \in x \cap y \leftrightarrow u \in x \land u \in y)$.

- Insieme vuoto: $\varnothing$
  Il simbolo $\varnothing$ indica l'unico insieme x tale che $\nexists y(y \in x)$.

- Insieme definito per elenco: $\{\dots\}$
  Data una sequenza finita di insiemi $x_1, \dots, x_n$, l'espressione $\{x_1, \dots, x_n\}$ indica l'unico insieme contenente tutti e soli gli elementi $x_1, \dots, x_n$.

- Insieme definito per caratteristica, detto *astrattore*: $\{\dots \mid \dots\}$
  Se $\varphi(x)$ è una formula dipendente dalla variabile x, l'espressione $\{x \mid \varphi(x)\}$ indica l'unico insieme contenente tutti e soli gli elementi che verificano la proprietà φ.

- Unione di un insieme: $\bigcup$
  L'unione di un insieme x è l'insieme degli elementi contenuti in almeno uno degli insiemi contenuti dentro x. Quindi $\bigcup x$ indica l'unico insieme tale che $\forall u(u \in \bigcup x \leftrightarrow \exists t(t \in x \land u \in t))$.

- Insieme delle parti: $\mathcal{P}$
  L'insieme delle parti, o insieme potenza, di un insieme x è l'insieme dei sottoinsiemi di x. Quindi $\mathcal{P}(x)$ indica l'unico insieme tale che $\forall u(u \in \mathcal{P}(x) \leftrightarrow u \subseteq x)$.

È importante ricordare che, fra i simboli appena definiti, tutti quelli della forma "l'unico insieme tale che ..." assumono significato solo dopo averne dimostrato esistenza e unicità. Tutte le teorie degli insiemi che prenderemo in considerazione potranno farlo, con l'unica eccezione dell'insieme definito per caratteristica. Lo stesso simbolo, comunque, verrà utilizzato con altre sfumature di significato.

4.3 Il metalinguaggio

Per definire i linguaggi formali $\mathcal{LC}$ e $\mathcal{LI}$ è stato necessario usare simboli come φ, ξ, τ e altri simili. Questi simboli si comportano come delle variabili, perché rappresentano entità indefinite e si presuppone che vadano sostituiti con altre più concrete. Tuttavia, non sono variabili, perché non fanno parte dei simboli del linguaggio: sono perciò chiamati *metavariabili*. In un certo senso, una metavariabile è una variabile di un livello superiore.

Riprendendo le idee sviluppate nel capitolo 3, la faccenda si articola così: variabili e metavariabili sono un unico concetto a livello intuitivo, cioè "cose indefinite che possono essere sostituite con altre cose"; la differenza sta nel fatto che le variabili sono un concetto formalizzato, mentre le metavariabili non lo sono e non possono esserlo, perché servono proprio nel momento in cui si definisce un linguaggio formale, e dunque prima di aver operato la formalizzazione.

In questa tesi le metavariabili sono rappresentate dalle lettere greche minuscole: α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ, ι, κ, λ, μ, ν, ξ, o, π, ρ, σ, τ, υ, φ, χ, ψ, ω, e dalle stesse con a pedice un simbolo qualsiasi.

Il *metalinguaggio* è il linguaggio naturale che viene usato per definire un linguaggio formale.

Per aumentare la precisione con cui si definiscono i linguaggi formali, spesso si usano nel metalinguaggio alcune costruzioni analoghe a quelle interne al linguaggio formale stesso: per esempio, le metavariabili. Queste costruzioni non possono tuttavia venire considerate formalizzazioni perché, appunto, fanno parte del metalinguaggio e non del linguaggio formale.

Qui di seguito sono riportate alcune notazioni comuni del metalinguaggio.

Utilizziamo il simbolo '$\equiv$' per indicare la corrispondenza fra una metavariabile (o una combinazione di metavariabili) e un'espressione del linguaggio, in modo da non confonderlo con '$=$' che è un simbolo interno al linguaggio.

Definizione. Se φ rappresenta una formula e x una variabile di un linguaggio formale $\mathcal{L}$, con l'espressione del metalinguaggio $\varphi(x)$ si indica la stessa formula φ specificando che la variabile x è libera in φ.

La formula $\varphi(x)$ può comunque contenere altre variabili libere non specificate.

Per esempio, potrebbe essere $\varphi(x) \equiv$ "$x = y$", ma non $\varphi(x) \equiv$ "$\exists x(x = 0)$".

Definizione. Se φ rappresenta una formula, ξ una variabile libera in φ e τ un termine di un linguaggio formale $\mathcal{L}$, l'espressione del metalinguaggio $\varphi[\xi \mapsto \tau]$ indica l'unica formula di $\mathcal{L}$ che si ottiene da φ sostituendo il termine τ al posto di ogni ricorrenza libera della variabile ξ, purché τ non contenga variabili libere che diventino legate in $\varphi[\xi \mapsto \tau]$.

Per esempio, se $\varphi \equiv$ "$(x = y) \to (x = z)$", $\xi \equiv$ "x" e $\tau \equiv$ "y", allora $\varphi[\xi \mapsto \tau] \equiv$ "$(y = y) \to (y = z)$".

Definizione. Se φ è una formula qualsiasi di un linguaggio formale $\mathcal{L}$, con l'espressione del metalinguaggio $(\forall)\varphi$ si indica l'unica formula di $\mathcal{L}$ che si ottiene da φ racchiudendola fra parentesi e anteponendo ad essa l'espressione $\forall\xi$ per ogni variabile ξ libera in φ, in ordine di comparsa; la formula $(\forall)\varphi$ è detta *chiusura universale* di φ.

Per esempio, se $\varphi \equiv$ "$\forall x(a = x) \to a = y$", allora $(\forall)\varphi \equiv$ "$\forall a \forall y(\forall x(a = x) \to a = y)$".

La ultime due definizioni assumono significato solo se si dimostra che, alle condizioni richieste, $\varphi[\xi \mapsto \tau]$ e $(\forall)\varphi$ risultano sempre essere formule del linguaggio. Ciò vale in $\mathcal{LI}$.

Per essere più precisi, nelle definizioni precedenti i simboli di metavariabili sono stati usati come "meta-metavariabili": infatti si sottintende che, per esempio, la definizione di $\varphi[\xi \mapsto \tau]$, valga anche per $\psi[\xi \mapsto \sigma]$, $\alpha[\beta \mapsto \gamma]$ e così via; allo stesso modo, il simbolo di variabile x viene usato nella definizione di $\varphi(x)$ come una metavariabile.

È prassi comune evitare di introdurre troppi livelli di metalinguaggio, per mantenere una maggior chiarezza.

4.4 I sistemi formali

Un linguaggio formale permette di esprimere e comunicare i concetti matematici con la dovuta precisione, ma non è in grado di codificare i ragionamenti e stabilire la verità di un enunciato. Per questo motivo i linguaggi si estendono a *sistemi formali.*

Definizione. Un *sistema formale* è composto di:

- un linguaggio formale;
- un insieme di formule del linguaggio, dette *assiomi*;
- un insieme di *regole di inferenza.*

Per brevità, simboli, espressioni, termini e formule *del linguaggio di un sistema* si dicono semplicemente *del sistema.*

Gli assiomi e le regole di inferenza di un sistema formale possono essere definiti attraverso un elenco oppure una regola generale abbastanza semplice che li renda riconoscibili da un algoritmo.

Un assioma che utilizza metavariabili è noto come *schema di assiomi.* Di fatto, uno schema di assiomi corrisponde a una quantità infinita di assiomi ordinari: tutti quelli ottenibili sostituendo opportune espressioni al posto delle metavariabili.

Gli assiomi di un sistema formale rappresentano le verità indubitabili su cui esso si basa. Sono fatti che, semplicemente, si accettano per veri.

Le regole di inferenza, invece, rappresentano i ragionamenti, ossia i criteri secondo cui si può stabilire la verità di una formula, detta *conclusione*, a partire dalla verità di altre, dette *premesse*. In pratica, descrivono il modo in cui si trasmette la verità.

Analogamente a come le costanti di un linguaggio si possono interpretare come funzioni senza argomenti, e le costanti di verità come connettivi senza parametri, così gli assiomi di un sistema formale corrispondono a regole di inferenza con zero premesse.

Come i simboli di un linguaggio sono le unità minime di significato, allo stesso modo le regole di inferenza sono le unità minime di ragionamento. Concatenando ragionamenti minimi uno dopo l'altro, si costituiscono ragionamenti complessi verificabili in ogni passaggio: le dimostrazioni.

Definizione. Dati un sistema formale $\mathcal{S}$, un insieme I di formule di $\mathcal{S}$, dette *ipotesi*, e una formula ω di $\mathcal{S}$, detta *conclusione*, una *dimostrazione formale* di ω a partire dalle ipotesi I è una sequenza finita di formule di $\mathcal{S}$ tali che ciascuna formula φ verifica almeno una delle seguenti proprietà:

- φ è un'ipotesi in I; oppure
- φ è un assioma di $\mathcal{S}$; oppure
- φ è conclusione di una regola di inferenza di $\mathcal{S}$, usando come premesse alcune formule precedenti a φ nella dimostrazione.

4.4.1 Le proprietà logiche dei sistemi formali

I sistemi formali nascono come linguaggi all'interno dei quali sviluppare la matematica. Tuttavia, entro certi limiti, si possono trattare anch'essi come oggetti matematici e studiarne le proprietà. Qui di seguito sono accennate alcune delle più importanti.

Un sistema formale si dice *incoerente* se al suo interno è possibile dimostrare qualunque formula.

Questa definizione discende dal fatto che, in logica classica, a partire da una contraddizione si può dedurre ogni cosa. In generale non si sarebbe potuto definire "un sistema è incoerente se dimostra il falso", perché non tutti i sistemi formali hanno espressioni che rappresentano la falsità.

Un sistema formale che non è incoerente si dice *coerente*.

Un assioma, rispetto a un sistema formale, si dice:

- *compatibile* se, aggiungendolo, il nuovo sistema così ottenuto risulta coerente;
- *deducibile* se è possibile dimostrarlo a partire dagli altri assiomi;
- *indipendente* se è compatibile ma non deducibile.

Un sistema formale si dice *completo* se al suo interno è possibile dimostrare o confutare ogni formula. Viceversa, si dice *incompleto* se esiste una formula che non si può dimostrare né confutare.

Due sistemi formali si dicono *equivalenti* se esiste una corrispondenza biunivoca tra le formule dei due linguaggi e ogni formula è dimostrabile in un sistema se e solo se la formula corrispondente è dimostrabile nell'altro sistema.

Secondo i teoremi di incompletezza di Gödel, ogni sistema formale contenente i numeri naturali non può dimostrare la propria coerenza.

Così, per quanto possiamo affaticarci a cercare il sistema formale perfetto, non avremo mai la certezza che al suo interno non si nasconda, da qualche parte, un paradosso fino ad allora rimasto celato.

Quello che è possibile dimostrare, invece, è la *coerenza relativa* fra due sistemi, ossia il fatto che, se il primo è coerente, allora lo deve essere per forza anche il secondo.

Solitamente, nello studio della logica, si parte quindi da un sistema formale sufficientemente piccolo e affidabile (anche se, per i teoremi di Gödel, non potrà mai essere affidabile del tutto), e si relativizza ad esso la coerenza di altri sistemi più complessi.

4.5 Un sistema formale per la logica classica e l'uguaglianza

Definizione. Il sistema formale $\mathcal{SC}$ (Sistema per la logica Classica) è costituito da:

- Il linguaggio formale $\mathcal{LC}$;
- Assiomi:
  Se ξ è una variabile, τ e σ sono termini e φ, ψ e χ sono formule, allora le seguenti formule sono assiomi:
  - $\mathbf{T}$
  - $\mathbf{F} \leftrightarrow \neg\mathbf{T}$
  - $\varphi \to (\psi \to \varphi)$
  - $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\varphi \to \chi))$
  - $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi)$
  - $\neg\neg\varphi \to \varphi$
  - $\varphi \to (\psi \to \varphi \wedge \psi)$
  - $(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$
  - $(\varphi \wedge \psi) \to \psi$
  - $\varphi \to (\varphi \vee \psi)$
  - $\psi \to (\varphi \vee \psi)$
  - $(\varphi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \vee \psi \to \chi))$
  - $\forall\xi(\varphi) \to \varphi[\xi \mapsto \tau]$
  - $\varphi[\xi \mapsto \tau] \to \exists\xi(\varphi)$
  - $\forall x(x = x)$
  - $(\tau = \sigma) \to (\varphi[\xi \mapsto \tau] \to \varphi[\xi \mapsto \sigma])$
- Regole di inferenza: Se φ e ψ sono formule qualunque, ξ è una variabile, e χ è una formula in cui ξ non compare libera, allora:
  - da φ e $\varphi \to \psi$ si deduce ψ
  - da $\chi \to \varphi$ si deduce $\chi \to \forall\xi(\varphi)$
  - da $\varphi \to \chi$ si deduce $\exists\xi(\varphi) \to \chi$

A meno che non sia specificato altrimenti, tutti i sistemi formali trattati nel prossimo capitolo saranno intesi come estensioni di questo sistema $\mathcal{SC}$. Perciò, anziché ripetere per esteso tutta la struttura del sistema formale, verranno dati di volta in volta solamente i nuovi assiomi, che regoleranno la teoria degli insiemi.

4.6 Il significato del metodo assiomatico

I sistemi formali presentati in questa tesi, e tutti quelli solitamente utilizzati, rispecchiano un effettivo significato: le regole di inferenza sono quelle che usiamo tutti i giorni senza pensarci, ogni simbolo ha un significato e ogni formula può essere tradotta in linguaggio naturale.

Tuttavia, nulla vieta di inventare un nuovo sistema formale assolutamente privo di ogni senso, scegliendo delle regole qualsiasi per la formazione di termini e formule, alcune formule qualunque come assiomi e delle regole di inferenza altrettanto arbitrarie.

Il metodo assiomatico permette dunque ai matematici di svincolarsi completamente dalle interpretazioni. All'interno di un sistema formale, infatti, le formule, che rappresentano le informazioni, sono trattate come mere sequenze di simboli; il fatto che abbiano un significato è del tutto ininfluente: è sufficiente conoscere come manipolarle secondo le regole del sistema. Allo stesso modo, le regole di inferenza, che rappresentano il ragionamento, non sono altro che dei meccanismi per trasferire una certa proprietà da una formula all'altra; il fatto che questa proprietà venga chiamata "verità" non ha alcuna importanza.

Quando si dice che una formula è "vera" in un sistema formale, si intende solamente dire che è una sequenza di simboli ottenibile a partire da altre sequenze di simboli attraverso alcune regole prefissate. Che tale formula sia effettivamente "vera" nel senso più reale e concreto del termine è una faccenda del tutto indipendente.

L'ininfluenza delle interpretazioni implica che l'importante in un sistema formale è solamente *come si comportano* le cose, ossia che proprietà hanno e come si relazionano le une con le altre. Se due concetti sono totalmente diversi, ma si comportano allo stesso modo secondo uno schema astratto, allora sono equivalenti dal punto di vista formale.

Nel capitolo 3 è stato ampiamente argomentato il valore dell'intuizione in matematica. Il metodo assiomatico, anche se sembra drasticamente in antitesi a questa linea di pensiero, in realtà si concilia alla perfezione con essa. Infatti la potenza del metodo assiomatico non sta nell'eliminazione di ogni interpretazione, ma nel funzionare a prescindere da esse.

In questo modo è stato realizzato quel procedimento di sviluppo descritto sempre nel capitolo 3: l'intuizione fornisce un'idea, uno stimolo, una direzione di ricerca, ma non è in grado di portarli avanti senza il rischio di cadere in gravi errori; allora viene tradotta in linguaggio formale e affida alle regole meccaniche del sistema il compito di dimostrare o confutare le conclusioni desiderate.

Capitolo 5

Insiemi: una teoria fondazionale

5.1 La gerarchia dei concetti

In matematica è prassi comune utilizzare concetti semplici per costruirne altri più complessi. Per esempio, le frazioni sono rapporti tra due numeri naturali, lo spazio cartesiano è determinato da diverse copie della retta reale perpendicolari fra loro, la scatola-grande definita nella sezione 3.3 è una combinazione particolare di piccoli insiemi.

A volte può capitare che sia possibile costruire, a partire da alcuni oggetti elementari, dei nuovi oggetti complessi, che si comportano esattamente alla stessa maniera di altri oggetti elementari. È come utilizzare dei mattoncini per costruire un modellino di un mattoncino di tipo diverso.

Se accade così, è facile immaginare che i mattoncini del primo tipo siano "più piccoli" dei mattoncini del secondo tipo. Volendo andare alla ricerca delle regole fondamentali che governano la matematica, per eliminare il superfluo si scartano tutti i mattoncini grandi e si tengono solo quelli piccoli.

In seguito, basterà definire delle regole canoniche per ricostruire i mattoncini grandi a partire da quelli piccoli; allora sarà come avere a disposizione i loro modellini già pronti, e si potrà ricominciare ad usare questi modellini come se fossero oggetti elementari, senza preoccuparsi di come sono composti. Così, nella matematica si opera alla stessa maniera, sia usando mattoncini di due tipi diversi, sia utilizzando un solo tipo di mattoncini e dei modellini pronti.

Il guadagno di tutto questo sta nella semplicità dei fondamenti, perché gli assiomi dovranno descrivere un solo tipo di oggetto fondamentale anziché due.

Gli insiemi si sono rivelati dei mattoncini estremamente piccoli, in grado di modellizzare ogni altro oggetto elementare della matematica. Si tratta dunque di una *teoria fondazionale*, perché è possibile fondare tutta la matematica sulla teoria degli insiemi.

In questo capitolo vedremo alcune delle più comuni costruzioni.

In questo contesto, quando si parla di "teoria degli insiemi" non ci si riferisce a una sua particolare assiomatizzazione, ma alle proprietà più semplici e generali che si presuppone siano condivise da ogni variante della teoria.

Dunque, un criterio importante per stabilire il valore di una particolare teoria degli insiemi sarà la possibilità di ripetere all'interno di essa le costruzioni che seguono.

5.2 Costruzioni canoniche fondate sulla teoria degli insiemi

5.2.1 Coppie ordinate

Una coppia ordinata è un insieme di due elementi in cui si distingue un ordine, ossia quale degli elementi è il primo e quale il secondo.

Come spiegato nell'esempio della scatola-grande nella sezione 3.3, una coppia ordinata si modellizza nella teoria degli insiemi dando separatamente due informazioni: l'insieme dei due elementi che la costituiscono e l'insieme del primo elemento; queste due informazioni sono poi riunite all'interno di un unico insieme.

Definizione. Dati due elementi qualsiasi a e b, la *coppia ordinata* (a, b) è l'insieme $\{\{a, b\}, \{a\}\}$.

5.2.2 Relazioni

Una relazione rispecchia all'interno della matematica il concetto logico di predicato. In pratica, una relazione (binaria) è una proprietà che può essere vera o falsa rispetto a due soggetti. Per esempio, sono relazioni l'uguaglianza $=$, l'ordine dei numeri naturali $\leq$, la similitudine tra figure geometriche.

Una relazione può essere modellizzata semplicemente fornendo l'elenco di tutte le coppie di oggetti che la rendono vera.

Definizione. Una *relazione* $\sim$ è un insieme di coppie ordinate.

Se due oggetti a e b sono in relazione $\sim$ fra loro, si usa la notazione $a \sim b$ come abbreviazione di $(a, b) \in \sim$.

Data una relazione, si possono considerare l'insieme degli oggetti che stanno al primo posto nelle coppie e l'insieme degli oggetti che stanno al secondo posto. Siccome tali insiemi vengono usati molto spesso, gli si dà dei nomi particolari.

Definizione. Il *dominio* di una relazione $\sim$ è l'insieme $\textsc{dom}(\sim) = \{x \mid \exists y((x, y) \in \sim)\}$.

L'*immagine* di una relazione $\sim$ è l'insieme $\textsc{imm}(\sim) = \{y \mid \exists x((x, y) \in \sim)\}$.

5.2.3 Funzioni

Una funzione è una regola che associa a ciascun oggetto di un certo insieme un unico nuovo oggetto; l'insieme degli elementi a cui si può applicare una funzione si chiama dominio della funzione.

Le funzioni possono essere interpretate come semplici associazioni, oppure come vere e proprie trasformazioni.

Per rappresentare una funzione si utilizza l'insieme delle coppie in cui il primo elemento sta nel dominio e il secondo è l'oggetto a cui la funzione associa il primo.

Poiché le funzioni sono un insieme di coppie, in particolare sono delle relazioni, e quindi ereditano i concetti di dominio e immagine già definiti per le relazioni. Il dominio di una funzione intesa come tale e il dominio di una funzione interpretata come relazione coincidono, ed è per questo che hanno lo stesso nome.

Definizione. Una *funzione* f è una relazione con la proprietà, detta *univocità*, che

$$\forall x\ \forall y_1 \forall y_2((x, y_1) \in f \wedge (x, y_2) \in f \to y_1 = y_2).$$

Se l'oggetto x appartiene al dominio della funzione f, si usa la notazione $f(x)$ per indicare l'unico oggetto y tale che $(x, y) \in f$.

5.2.4 Predicati per verificare la natura di un oggetto matematico

Nel linguaggio formale è possibile esprimere delle formule che verifichino se un dato insieme è una coppia ordinata, o una relazione, o una funzione. Usiamo i simboli COP, REL e FUN per indicare rispettivamente tali formule composte. Nel linguaggio formale, ciascuno di COP, REL e FUN conta come un unico simbolo definito, anche se è formato da più lettere.

Definizione.

$$\begin{array}{lll} \text{COP}(x) & := & \text{“}\exists a \exists b\ x = (a, b)\text{”} \\ \text{REL}(x) & := & \text{“}\forall u(u \in x \to \text{COP}(u))\text{”} \\ \text{FUN}(x) & := & \text{“}\text{REL}(x) \wedge \forall a \forall b_1 \forall b_2((a, b_1) \in x \wedge (a, b_2) \in x \to b_1 = b_2)\text{”} \end{array}$$

5.2.5 Numeri naturali

I numeri naturali sono caratterizzati da poche proprietà, i cosiddetti *assiomi di Peano*:

- esiste un numero iniziale 0;
- esiste sempre un successore, e due numeri diversi hanno successori diversi;
- oltre a 0 e ai numeri raggiungibili tramite successore, nient'altro è un numero naturale.

Per creare un modello dei numeri naturali basta trovare una raccolta di insiemi che rispettino le stesse proprietà.

Scegliamo come elemento iniziale l'insieme vuoto $\varnothing$, e come operazione di successore l'aggiunta di un elemento all'insieme. Per assicurarci che il nuovo aggiunto sia diverso da tutti i precedenti, scegliamo di aggiungere come elemento l'insieme stesso di cui si sta calcolando il successore.

Definizione. Il *successore di un insieme* x è l'insieme $x \cup \{x\}$.

Definizione. L'*insieme dei numeri naturali* n è il più piccolo insieme che contiene l'insieme vuoto $\varnothing$ e il successore di ogni proprio elemento. Ossia, n è l'unico insieme tale che

$$\forall x(x \in n \leftrightarrow \forall m((\varnothing \in m \wedge \forall y(y \in m \to y \cup \{y\} \in m)) \to x \in m)).$$

5.2.6 Altre costruzioni

Altre costruzioni canoniche fondate sugli insiemi sono gli *ordinali* e i *cardinali*.

Gli ordinali sono un'estensione dei numeri naturali che prosegue oltre l'infinito. I cardinali rappresentano ogni possibile "grandezza" di un insieme, finita o infinita; ogni cardinale è il più piccolo ordinale con una certa grandezza.

5.3 La scomparsa degli individui

Un *individuo* è un oggetto matematico che non può contenerne altri. In un certo senso, quindi, è il contrario del concetto di insieme, che è qualcosa che può contenere dell'altro.

Solitamente la teoria degli insiemi si applica a una certa totalità di individui. Per esempio, se si studiano i numeri naturali o i numeri reali o le funzioni, tali oggetti vengono trattati come individui e in aggiunta si considerano insiemi di numeri naturali o reali o di funzioni. In questo modo, si ottiene una teoria con due tipi di entità: gli individui e gli insiemi. Poiché a un insieme è consentito contenere qualunque cosa e non solo individui, si possono poi costruire anche insiemi di insiemi di numeri e via dicendo.

Il fatto che la teoria degli insiemi sia fondazionale significa che deve, da sola, ricostruire tutto il resto. In tale contesto dunque gli individui non hanno motivo di esistere, perché non sono insiemi! Saranno gli insiemi a dover modellizzare i numeri o le funzioni, e in seguito si potrà decidere di dimenticarne la struttura di modelli e trattarli come individui, ma, in principio, anche gli individui devono essere insiemi.

Perciò è prassi comune, nella formalizzazione di teorie degli insiemi, eliminare totalmente l'esistenza degli individui ottenendo così una matematica in cui esistono solamente insiemi. Saranno gli insiemi stessi a costituire gli elementi di altri insiemi.

L'unica alternativa alla scomparsa degli individui è la loro totale scaratterizzazione: si assume per ipotesi l'esistenza di una certa quantità di individui, ma li si tratta tutti come insignificanti ed equivalenti granelli di polvere. Il loro unico scopo è fornire materiale che possa essere contenuto negli insiemi.

Capitolo 6

Diverse teorie degli insiemi

In questo capitolo verranno presentate molte proposte di correzioni alla teoria degli insiemi. Nella ricerca di una soluzione definitiva, c'è bisogno di criteri per stabilire la preferenza di una possibilità rispetto alle altre. I vari sistemi formali saranno perciò valutati in base alle seguenti caratteristiche, in ordine decrescente di importanza:

- Coerenza. I nuovi sistemi formali non devono in alcun modo autocontraddirsi. È proprio l'incoerenza ciò che ha costretto ad abbandonare l'iniziale e semplice teoria intuitiva degli insiemi.

- Fondazionalità. Questa qualità è molto importante, perché permette di dare solide basi a tutta la matematica. Rinunciare alla fondazionalità sarebbe un prezzo molto alto.

- Intuibilità. Ci sono diversi modi per costruire una teoria degli insiemi che rispetta i due vincoli precedenti, ma molti di essi ottengono questo risultato al costo di avere degli assiomi privi di significato per l'intuizione umana, utili solo a rendere tutto corretto da un punto di vista tecnico. Credendo nel principio che scopo della matematica sia esprimere ciò che i matematici hanno in testa, e non solo far funzionare le cose, i sistemi con un basso grado di intuibilità saranno giudicati interessanti, ma insoddisfacenti.

- Facilità di lavoro. Un sistema formale fondazionale deve servire come punto di partenza per costruire molte nuove cose. Perciò un fattore importante sarà la facilità e agilità con cui gli assiomi possono venire combinati assieme e produrre i risultati desiderati.

6.1 La teoria ingenua degli insiemi: l'utopia irrealizzabile

La teoria ingenua degli insiemi è quella che non tiene conto del paradosso di Russell e delle altre antinomie. Abbiamo già dimostrato che è contraddittoria, ma formalizzarla permetterà un utile confronto con le teorie successive.

Nel primo capitolo avevamo riassunto nei seguenti punti le caratteristiche fondamentali di un insieme:

- è una cosa che contiene cose;
- può contenere qualsiasi cosa;
- non dà altre informazioni se non quella di contenere o non contenere gli elementi.

Il primo punto dice *che cosa è* un insieme e non *quali sono le sue caratteristiche* o *come si comporta*. Perciò non si tratta della descrizione di un assioma, ma piuttosto di un'interpretazione del concetto di insieme; dunque in un sistema formale non avrebbe alcun ruolo e perciò verrà semplicemente omesso.

Nella sezione 2.1 abbiamo già osservato che il terzo punto è equivalente al principio di estensionalità (se due insiemi hanno gli stessi elementi, allora sono uguali), e che il secondo punto corrisponde al principio di comprensione (data una qualsiasi proprietà, esiste l'insieme contenente tutto e solamente ciò che rispetta tale proprietà).

Definizione: Assiomi della teoria ingenua degli insiemi

I. Estensionalità:
$$\forall x \forall y\ (\forall u(u \in x \leftrightarrow u \in y) \rightarrow x = y)$$

II. Comprensione:
Se $\varphi(x)$ è una formula qualsiasi che non contiene libera la variabile y, allora il seguente è un assioma:
$$(\forall)\ \exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow \varphi(x))$$

Il fatto che la formula $\varphi(x)$ non debba contenere la variabile y libera serve a impedire definizioni circolari, in cui per definire l'insieme y si utilizza y stesso.

Una condizione analoga vale anche per tutti gli schemi di comprensione dei sistemi formali descritti in questo capitolo, ma, per brevità, non verrà ricordata.

Quello di estensionalità è un assioma *di struttura*, perché descrive come sono fatti gli insiemi: nulla più che un ammasso disordinato di elementi non ripetuti, come spiegato nella sezione 2.1.

Il principio di comprensione, invece, è un assioma *di esistenza*, perché postula l'esistenza di un insieme con determinate caratteristiche (gli elementi rispettano la proprietà φ).

La teoria ingenua è una sorta di utopia della teoria degli insiemi: è intuitiva perché costruita proprio a partire dall'idea naturale di insieme, potente perché permette di ricostruire tutta la matematica, semplice perché l'assioma di comprensione si applica facilmente in ogni circostanza. Tuttavia resta irrealizzabile perché autocontraddittoria.

6.1.1 Le colpe della comprensione

Evidentemente gli assiomi della teoria ingenua non sono adatti a descrivere una teoria matematica, perché a partire da essi è possibile, tramite passaggi leciti, giungere a una contraddizione.

Indagando più in dettaglio pare che i problemi nascano dall'assioma di comprensione: tutti i paradossi conosciuti si basano sull'esistenza di insiemi eccezionali, e non sull'uguaglianza o diversità di insiemi con gli stessi elementi. In particolare, l'assioma di comprensione si rivela essere troppo potente, nel senso che assicura l'esistenza di troppi insiemi, compresi quelli che non dovrebbero esistere.

Per esempio, senza partire da alcun assioma, il paradosso di Russell si può rileggere come dimostrazione per assurdo che l'insieme degli insiemi che non contengono sé stessi non può esistere. L'inesistenza di tale insieme non induce nessuna contraddizione logica. L'antinomia nasce per il conflitto tra questo risultato e l'assioma di comprensione che ne postula invece l'esistenza.

Perciò siamo costretti ad eliminare l'assioma di comprensione e a sostituirlo con qualcos'altro. Tuttavia non si vuole stravolgere del tutto l'idea che ne sta alla base, sia perché si spera di mantenere almeno un po' di intuibilità, sia perché l'applicazione dell'assioma ai casi semplici non sembra portare ad alcun problema: i paradossi compaiono soltanto quando li si cerca appositamente.

Quasi tutti i successivi sistemi formali, quindi, si basano su varianti più deboli dell'assioma di comprensione. La diversità fra i diversi sistemi deriva dai differenti modi in cui lo si può indebolire.

6.2 Il sistema di Zermelo-Fraenkel con scelta (ZFC): il minimo indispensabile

L'obiettivo è trovare un modo per limitare l'assioma di comprensione senza compromettere del tutto le costruzioni che siamo abituati a poter fare nella teoria ingenua.

L'idea che sta alla base del sistema di Zermelo-Fraenkel[1] è quella di "prendere soltanto il minimo indispensabile". Non sapendo quale dettaglio dell'assioma di comprensione sia l'artefice delle contraddizioni della teoria ingenua, anziché considerare una possibilità piuttosto che un'altra, semplicemente ci limitiamo a considerare solo gli insiemi strettamente necessari a ripetere le costruzioni della sezione 5.2. Il vastissimo assioma di comprensione viene perciò spezzettato in tanti piccoli casi particolari.

Più in dettaglio, l'assioma di comprensione si sostituisce con:

- Un assioma delle coppie che, dati due insiemi a e b , assicura l'esistenza dell'insieme contenente solo a e b.

  Scegliendo $b = a$, l'insieme coppia così ottenuto conterrà un solo elemento: a.

  Combinando l'assioma delle coppie con quello dell'unione, sarà possibile costruire insiemi contenenti una qualsiasi quantità finita di elementi.

- Un assioma di unione che, dato un insieme di insiemi, postula l'esistenza dell'insieme unione, ossia l'insieme di tutti gli elementi che stanno in almeno uno degli insiemi interni.

- Un assioma della potenza per cui, dato un insieme, esiste sempre l'insieme delle parti, ovvero quello dei suoi sottoinsiemi.

- Un assioma dei sottoinsiemi che, dato un insieme e una qualsiasi proprietà φ, garantisce l'esistenza del sottoinsieme formato solo dagli elementi per cui vale φ.

  La formulazione di questo assioma è quella che più assomiglia allo schema di comprensione. La differenza sta nel fatto che, mentre lo schema di comprensione agiva

[1] Il sistema è sviluppato in molte opere; si vedano in particolare [33] e [5].

sulla totalità di tutti gli insiemi, l'assioma dei sottoinsiemi si limita agli elementi che fanno già parte di un dato insieme.

Questo assioma è noto anche col nome di *separazione* perché separa gli elementi che verificano φ da tutti gli altri.

- Un assioma di rimpiazzamento che, dati un insieme e una regola univoca per trasformare alcuni elementi in altri, assicura l'esistenza dell'insieme ottenuto dal primo applicando la regola.

I precedenti assiomi non sono del tutto indipendenti gli uni dagli altri: quello dei sottoinsiemi è già conseguenza del rimpiazzamento. Dati un insieme x e una formula φ, basta infatti utilizzare la funzione il cui dominio sono solo gli elementi di x per cui vale φ, e che li lascia invariati: la trasformazione di x tramite tale funzione è esattamente il sottoinsieme formato da tutti e soli gli elementi di x per cui vale φ.

Anche se può venire ricavato dagli altri, l'assioma dei sottoinsiemi solitamente viene comunque assunto, per tradizione e per la sua naturalezza.

Gli assiomi come i precedenti sono detti *di costruzione* perché permettono di ottenere l'esistenza di nuovi insiemi basandosi su altri già dati.

Pertanto non sono sufficienti: occorre postulare l'esistenza di un insieme iniziale, a partire dal quale costruire tutti gli altri. La scelta più naturale è l'insieme vuoto. In questo modo, però, cominciando dall'insieme vuoto e applicando gli assiomi di costruzione, si riescono a ottenere soltanto insiemi finiti. Dunque non esisterebbe nemmeno l'insieme infinito dei numeri naturali.

Riprendendo la costruzione dei numeri naturali mostrata nella sezione 5.2, allora, si aggiunge un assioma di infinità che postula l'esistenza di tale insieme.

Così si risolvono contemporaneamente i problemi di avere un insieme di partenza e un insieme infinito. L'esistenza dell'insieme vuoto deriva dall'assioma dei sottoinsiemi, applicando a un insieme qualunque la condizione contraddittoria $\varphi \equiv$ "$x \neq x$".

Si aggiunge poi un assioma di scelta, grazie al quale, dato un insieme di insiemi non vuoti, esiste una funzione che associa a ciascuno degli insiemi interni uno dei suoi stessi elementi. Tale funzione si chiama *funzione di scelta* perché permette, appunto, di "scegliere" un elemento da ognuno degli insiemi interni. Combinando l'assioma di scelta con quello di rimpiazzamento, si ottiene che l'immagine della funzione di scelta è un nuovo insieme.

Questo assioma è stato ed è tuttora molto controverso fra i matematici, e non tutti lo accettano. Si distinguono quindi i sistemi ZFC e ZF, dove il secondo è ottenuto dal primo semplicemente rimuovendo l'assioma della scelta (*choice* in inglese).

Il motivo della disputa è che gli insiemi ottenuti in questo modo restano vaghi e indefiniti, perché l'assioma di scelta non permette di stabilire quali elementi contengano: dichiara soltanto l'esistenza di una funzione, senza dire come è fatta.

In matematica, a volte, l'assioma di scelta è usato all'interno di procedimenti lunghi e complessi per dimostrare l'esistenza di oggetti particolari. Tali oggetti non sono mai descrivibili, perché appunto ne viene assicurata l'esistenza ma non precisata la struttura.

Infine, il sistema ZF inserisce un nuovo assioma di struttura, detto di fondazione. La sua conseguenza immediata è impedire l'esistenza di insiemi che contengano loro stessi, o, più in generale, di catene ripiegate su sé stesse formate da insiemi contenuti uno dentro l'altro in cui l'ultimo a sua volta contiene il primo.

Lo scopo dell'assioma di fondazione, tuttavia, è più profondo. Permette infatti di costruire una gerarchia nell'universo di tutti gli insiemi, in cui ogni insieme si poggia sugli insiemi in esso contenuti. Alla base della gerarchia c'è l'unico insieme vuoto, e poi si susseguono strati su strati che si allargano sempre di più all'infinito. Senza assioma di fondazione questa gerarchia si ritorcerebbe su sé stessa infinite volte, in maniera terribilmente caotica.

Definizione: Assiomi di ZFC

I. Estensionalità:

$$\forall x \forall y\ (\forall u(u \in x \leftrightarrow u \in y) \rightarrow x = y)$$

II. Coppie:

$$\forall a \forall b \exists x\ \forall u(u \in x \leftrightarrow (u = a \vee u = b))$$

III. Unione:

$$\forall x \exists y\ \forall u(u \in y \leftrightarrow \exists t(t \in x \wedge u \in t))$$

IV. Potenza:

$$\forall x \exists y\ \forall u(u \in y \leftrightarrow u \subseteq x)$$

V. Sottoinsiemi:
Se $\varphi(u)$ è una formula qualsiasi, allora il seguente è un assioma:

$$(\forall)\ \forall x \exists y\ \forall u(u \in y \leftrightarrow u \in x \wedge \varphi(u))$$

VI. Rimpiazzamento:
Se F è un predicato univoco, allora il seguente è un assioma:

$$(\forall)\ \forall x \exists y\ \forall u(u \in y \leftrightarrow \exists t(t \in x \wedge F(t, u)))$$

VII. Infinità:

$$\exists n(\varnothing \in n \wedge \forall x(x \in n \rightarrow x \cup \{x\} \in n))$$

VIII. Fondazione:

$$\forall x(x \neq \varnothing \rightarrow \exists u(u \in x \wedge u \cap x = \varnothing))$$

IX. Scelta:

$$\forall x\ (\forall t(t \in x \rightarrow t \neq \varnothing) \rightarrow \exists f(\textsc{fun}(f) \wedge \textsc{dom}(f) = x \wedge \forall t(t \in x \rightarrow f(t) \in t)))$$

All'interno di ZFC non è possibile ripetere nessuno dei paradossi conosciuti. Il sistema permette inoltre di ricostruire tutte le strutture della sezione 5.2 e, di conseguenza, tutta la matematica, come da programma. È quindi un ottimo candidato come base per la teoria degli insiemi.

Per quanto riguarda l'intuibilità, a prima vista non è chiaro perché servano proprio questi assiomi di costruzione e non altri come, per esempio, uno per l'esistenza dei singoletti o un altro per l'intersezione di insiemi. Ciononostante, ogni assioma appare corretto con ogni evidenza, quindi, anche se l'intuizione fatica a capire la forma del sistema ZFC, facilmente ne riconosce la correttezza.

Infine, l'utilizzo degli assiomi nelle dimostrazioni e nelle definizioni risulta sufficientemente agevole.

Per i motivi sopra, e per il fatto che ZF codifica esattamente i minimi requisiti necessari a ricreare le strutture canoniche, i sistemi ZF e ZFC sono considerati come "punti di partenza affidabili" nel senso descritto nella sezione 4.4.1, cioè come riferimenti ai quali ricondurre la coerenza di altri sistemi formali.

Per la stessa ragione, ZF e ZFC sono i sistemi formali per la teoria degli insiemi universalmente riconosciuti e accettati.

Per contro, in ZFC mancano del tutto alcuni insiemi che si immaginano facilmente, come per esempio l'insieme universale di tutti gli insiemi. Se esistesse, per l'assioma dei sottoinsiemi dovrebbe esistere anche la sua restrizione ai soli elementi che rispettano una qualsiasi proprietà φ; scegliendo $\varphi(x) \equiv$ "$x \notin x$" si otterrebbe allora l'insieme di tutti gli insiemi che non contengono sé stessi, assurdo.

6.3 I sistemi di von Neumann - Bernays - Gödel (NBG): le classi come sovrastruttura ausiliaria

Le idee dei matematici von Neumann, Bernays e Gödel, che si sono influenzate a vicenda e che poi sono state a loro volta rielaborate e riorganizzate dalle generazioni successive, hanno dato origine a diversi sistemi formali che sono in realtà solo piccole varianti l'uno dell'altro, e che sono equivalenti dal punto di vista logico, ovvero permettono di dimostrare esattamente gli stessi risultati.

In questa sezione ci riferiremo a "il sistema NBG" quando discuteremo le idee centrali comuni a tutte le varianti; i singoli sistemi presi in considerazione saranno chiamati NBG1, NBG2 e NBG3.[2]

6.3.1 La teoria delle classi

La scelta di ZFC di limitarsi al minimo indispensabile ha condotto a tralasciare tutti gli insiemi "molto grandi", come l'insieme di tutti gli insiemi. Il sistema NBG nasce come estensione di ZFC capace di considerare anche insiemi di questo tipo, al costo di non poterli più chiamare "insiemi" al pari degli altri.

In generale, ogni teoria matematica tratta di oggetti matematici di uno stesso tipo. Per esempio, ci sono una teoria per i numeri naturali, un'altra per i reali, una per le funzioni, eccetera. All'interno di queste teorie è spesso utile poter raggruppare assieme diversi oggetti accomunati da una stessa caratteristica; ossia, data una formula φ, si considera la classe degli oggetti per cui vale φ. Fare ciò è sempre possibile e non conduce a contraddizioni. Questo concetto è chiamato *classe* per non confonderlo con quello di insieme sviluppato finora.

L'idea di classe viene formalizzata esattamente come gli insiemi della teoria ingenua: un assioma di estensionalità perché ogni classe sia una semplice raccolta di elementi, e un assioma di comprensione per garantirne l'esistenza in corrispondenza di ogni possibile caratteristica.

Ciò che distingue una classe da un insieme, e che la fa sfuggire ai paradossi della teoria ingenua, è che una classe può contenere soltanto oggetti matematici della teoria in questione, e dunque soltanto numeri naturali, o solo numeri reali, o funzioni, eccetera, mentre agli insiemi è consentito di contenersi l'un l'altro; accade quindi che si accumulano in molti

[2] I testi principali alla base di questi sistemi sono [2], [27] e [7].

strati: prima insiemi semplici, poi insiemi di insiemi, insiemi di insiemi di insiemi e così via. Gli insiemi, infatti, sono nati come generalizzazione del concetto di classe, che inizialmente si chiamava semplicemente insieme.

6.3.2 Il sistema NBG1

L'idea del sistema NBG1 è applicare la teoria delle classi alla teoria degli insiemi.

Ci saranno perciò due tipi di oggetti: gli insiemi, che si stratificano gli uni sugli altri all'infinito e che costituiscono il principale oggetto di studio, e le classi, che formano un unico strato più in alto di tutti gli insiemi e che servono solo per riunire diversi insiemi in un'unica entità.

In questo modo certe classi avranno esattamente gli stessi elementi di alcuni insiemi corrispondenti: per esempio, l'insieme vuoto e la classe vuota, o un insieme con un solo elemento e la classe contenente soltanto quello stesso elemento. L'ultima accortezza sarà quindi identificare questi oggetti di diversa natura ma con le stesse caratteristiche: alcune classi saranno insiemi.

Estendendo l'idea appena formulata, dato un qualsiasi insieme x, si può sempre costruire la formula $\varphi(u) \equiv$ "$u \in x$" e dunque la classe X corrispondente a φ. Per definizione, allora, l'insieme x e la classe X conterranno esattamente gli stessi elementi: infatti, se $u \in x$, allora vale $\varphi(u)$ e quindi $u \in X$; se invece $u \in X$, allora per definizione deve valere $\varphi(u)$ e perciò $u \in x$. Pertanto, ogni insieme x è anche una classe.

D'altra parte, l'insieme di tutti gli insiemi che non contengono sé stessi non può esistere, ma una classe corrispondente sì: perciò non tutte le classi sono insiemi.

Le classi che non sono insiemi sono dette *classi proprie*.

Per esprimere la diversità fra i concetti di classe e insieme, il linguaggio formale $\mathcal{LI}$ per gli insiemi viene esteso con nuovi simboli. Alle lettere dell'alfabeto latino minuscolo, già presenti in $\mathcal{LI}$ come variabili, si aggiungono quelle maiuscole; useremo le lettere minuscole come variabili specializzate per gli insiemi e le maiuscole per le classi.

Il simbolo di insieme definito per caratteristica $\{\dots \mid \dots\}$, che non ha significato nella teoria ZFC, in NBG1 viene utilizzato legittimamente per le classi.

L'assioma di comprensione per classi prevede l'esistenza di una classe corrispondente ad ogni formula *che non abbia quantificatori sulle classi*; per questo motivo si chiama *comprensione predicativa*.

Questa limitazione dipende dall'idea di classe da cui siamo partiti e che si vuole formalizzare: una classe è una sovrastruttura di una già ben determinata teoria matematica, quella degli insiemi in questo caso, e che raccoglie gli oggetti con una stessa proprietà. Poiché il linguaggio delle classi sugli insiemi è più ricco del linguaggio dei soli insiemi, ammettere anche formule con classi quantificate significherebbe costruire classi basate su caratteristiche estranee alla teoria degli insiemi.

È invece ammesso l'uso di classi non quantificate, perché ogni classe che compare non quantificata in una formula può sempre essere sostituita dalla condizione sulla quale essa stessa era definita, ottenendo così una nuova formula espressa nel linguaggio dei soli insiemi. Per esempio, se $A = \{x \mid \exists y(y \in x)\}$ e $\varphi(x) \equiv$ "$x \in A \to x = z$", allora $\varphi(x)$ equivale a "$\exists y(y \in x) \to x = z$".

Poiché la teoria NBG1 estende ZFC, gli assiomi di ZFC sono anche assiomi di NBG1.

Per ipotesi, per ogni formula φ riguardante gli insiemi, esiste una classe contenente tutti e soli gli insiemi che la verificano. Perciò, nella formulazione di NBG1, ogni assioma di ZFC che vale "data una qualsiasi formula φ" viene sostituito con uno equivalente che vale "per ogni classe", poiché, appunto, c'è corrispondenza esatta tra le formule di ZFC e le classi di NBG1.

L'introduzione delle classi permette di estendere i concetti di relazione e funzione descritti nella sezione 5.2: una *relazione fra classi* è una classe di coppie e una *funzione tra classi* è una relazione fra classi che rispetta l'univocità. Indichiamo REL e FUN i predicati analoghi di rel e fun adattati alle classi, e DOM e IMM il dominio e l'immagine di una relazione o funzione tra classi.

L'assioma di scelta viene esteso alle classi in modo che, data una classe di insiemi non vuoti, esista sempre una funzione che sceglie un unico elemento da ciascuno di tali insiemi. Questa proprietà deve valere per ogni classe, ma è sufficiente postularla una volta per tutte per la classe universale di tutti gli insiemi non vuoti. Il nuovo assioma, perciò, prende il nome di *scelta globale*.

Definizione: Assiomi di NBG1

I. Estensionalità per insiemi:
$$\forall x \forall y\ (\forall u(u \in x \leftrightarrow u \in y) \to x = y)$$

II. Coppie:
$$\forall a \forall b \exists x\ \forall u(u \in x \leftrightarrow (u = a \vee u = b))$$

III. Unione:
$$\forall x \exists y\ \forall u(u \in y \leftrightarrow \exists t(t \in x \wedge u \in t))$$

IV. Potenza:
$$\forall x \exists y\ \forall u(u \in y \leftrightarrow u \subseteq x)$$

V. Sottoinsiemi:
$$\forall A\ \forall x \exists y\ \forall u(u \in y \leftrightarrow u \in x \wedge u \in A)$$

VI. Rimpiazzamento:
$$\forall F(\textsc{Fun}(F) \to \forall x \exists y\ \forall u(u \in y \leftrightarrow \exists t(t \in x \wedge t \in \textsc{Dom}(F) \wedge F(t) = u)))$$

VII. Infinità:
$$\exists n(\varnothing \in n \wedge \forall x(x \in n \to x \cup \{x\} \in n))$$

VIII. Fondazione:
$$\forall x\ (x \neq \varnothing \to \exists u(u \in x \wedge u \cap x = \varnothing))$$

IX. Scelta globale:
$$\exists F\ \forall x\ (x \neq \varnothing \to (x \in \textsc{Dom}(F) \wedge F(x) \in x))$$

X. Estensionalità per classi:
$$\forall A \forall B\ (\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B) \to A = B)$$

XI. Schema di comprensione predicativa per classi:
Se $\varphi(x)$ è una formula senza quantificazioni sulle classi, allora il seguente è un assioma:
$$(\forall)\ \exists A\ \forall x(x \in A \leftrightarrow \varphi(x))$$

XII. Identificazione fra classi e insiemi:
$$\forall A \forall x\ (\forall u(u \in A \leftrightarrow u \in x) \to A = x)$$

6.3.3 Il sistema NBG2

Il sistema NBG1 si fonda sulla distinzione dei concetti di classe e insieme; solo a posteriori identifica come insiemi alcune classi. Tramite questa identificazione, si dimostra che ogni insieme è una classe, ma non tutte le classi sono insiemi. Il sistema NBG2 cambia punto di vista: esiste inizialmente un solo tipo di oggetti, le classi, alle quali è permesso anche di contenersi una dentro l'altra; a posteriori, attraverso una definizione, ad alcune classi viene dato il nome di insiemi. Infine, a queste particolari classi che sono insiemi, si attribuiscono le stesse proprietà degli insiemi di ZFC.

Definizione. Una classe è un *insieme* se e solo se esiste una classe che la contiene. In formula: X è un insieme $\Leftrightarrow \exists A(X \in A)$.

L'assioma di estensionalità per insiemi discende direttamente da quello per classi, dunque viene omesso nel sistema NBG2.

Tutti gli altri assiomi di NBG1 vengono mantenuti in NBG2, con l'accortezza che il significato di "insieme" è diverso nei due sistemi: da una parte si tratta di oggetti di diversa natura rispetto alle classi, dall'altra si tratta di classi per cui esiste un'altra classe che le contiene.

Per esempio, lo schema di comprensione per classi in NBG2 significa: data una qualsiasi formula φ, esiste la classe di tutte le classi che appartengono a una qualche classe e che verificano φ; l'assioma delle coppie vuol dire: date due classi che sono elementi di altre classi, esiste una classe che contiene solamente le prime due e che a sua volta appartiene ad un'altra classe.

In altre parole, in NBG1 le lettere minuscole e maiuscole sono entrambe variabili specializzate, per oggetti di natura diversa, mentre in NBG2 le lettere maiuscole sono variabili generiche e quelle minuscole sono specializzate per soggetti X che soddisfano la condizione $\exists A(X \in A)$.

Definizione: Assiomi di NBG2

I. Coppie:
$$\forall a \forall b \exists x\ \forall u(u \in x \leftrightarrow (u = a \vee u = b))$$

II. Unione:
$$\forall x \exists y\ \forall u(u \in y \leftrightarrow \exists t(t \in x \wedge u \in t))$$

III. Potenza:
$$\forall x \exists y\ \forall u(u \in y \leftrightarrow u \subseteq x)$$

IV. Sottoinsiemi:
$$\forall A\ \forall x \exists y\ \forall u(u \in y \leftrightarrow u \in x \wedge u \in A)$$

V. Rimpiazzamento:
$$\forall F(\textsc{Fun}(F) \to \forall x \exists y\ \forall u(u \in y \leftrightarrow \exists t(t \in x \wedge t \in \textsc{Dom}(F) \wedge F(t) = u)))$$

VI. Infinità:
$$\exists n(\varnothing \in n \wedge \forall x(x \in n \to x \cup \{x\} \in n))$$

VII. Fondazione:
$$\forall x\ (x \neq \varnothing \to \exists u(u \in x \wedge u \cap x = \varnothing))$$

VIII. Scelta globale:
$$\exists F\ \forall x\ (x \neq \varnothing \to (x \in \textsc{Dom}(F) \wedge F(x) \in x))$$

IX. Estensionalità per classi:
$$\forall A \forall B\ (\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B) \to A = B)$$

X. Schema di comprensione predicativa per classi:
Se $\varphi(x)$ è una formula senza quantificazioni sulle classi, allora il seguente è un assioma:
$$(\forall)\ \exists A\ \forall x(x \in A \leftrightarrow \varphi(x))$$

6.3.4 Il sistema NBG3

In NBG1 e NBG2 le classi proprie, cioè quelle che si rivelano non essere insiemi, sono tutte molto grandi, come la classe di tutti gli insiemi. L'idea di NBG3 è assumere questo fatto come ipotesi, anziché osservarlo come conseguenza degli altri assiomi.

Si introduce perciò un nuovo assioma, detto del *limite della dimensione*, secondo cui una classe è un insieme se e solo se non esiste una funzione che la trasforma nella classe universale di tutti gli insiemi.

Il filo logico è dunque il seguente: esiste un solo tipo di oggetti, le classi, alle quali è permesso di contenersi l'un l'altra; per definizione, una classe si chiama insieme se e solo se è contenuta dentro un'altra classe; per ipotesi, ciò accade se e solo se la classe è troppo piccola per essere trasformata nella classe universale; alle classi che sono insiemi si attribuiscono le proprietà degli insiemi di ZFC.

Nel realizzare quest'ultimo passo ci si rende conto che non tutti gli assiomi di ZFC sono ancora necessari. L'assioma del limite della dimensione, infatti, implica già la verità degli assiomi di unione, rimpiazzamento (e quindi anche sottoinsiemi) e scelta globale, che perciò non sono presenti nella formulazione di NBG3. Si può dimostrare che vale anche il viceversa, ossia che gli assiomi di unione, rimpiazzamento e scelta globale implicano il limite della dimensione.[3]

Definizione: Assiomi di NBG3

I. Coppie:

$$\forall a \forall b \exists x\ \forall u(u \in x \leftrightarrow (u = a \vee u = b))$$

II. Potenza:

$$\forall x \exists y\ \forall u(u \in y \leftrightarrow u \subseteq x)$$

III. Infinità:

$$\exists n(\varnothing \in n \wedge \forall x(x \in n \rightarrow x \cup \{x\} \in n))$$

IV. Fondazione:

$$\forall x\ (x \neq \varnothing \rightarrow \exists u(u \in x \wedge u \cap x = \varnothing))$$

V. Estensionalità per classi:

$$\forall A \forall B\ (\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B) \rightarrow A = B)$$

VI. Schema di comprensione predicativa per classi:
Se $\varphi(x)$ è una formula senza quantificazioni sulle classi, allora il seguente è un assioma:

$$(\forall)\ \exists A\ \forall x(x \in A \leftrightarrow \varphi(x))$$

VII. Limite della dimensione:

$$\forall A(\exists B(A \in B) \leftrightarrow \nexists F(\textsc{Fun}(F) \wedge \textsc{Dom}(F) = A \wedge \textsc{Imm}(F) = \{x \mid x = x\}))$$

6.3.5 Caratteristiche del sistema formale NBG

I sistemi formali NBG1, NBG2 e NBG3 sono tutti equivalenti.[4] A patto di prestare attenzione al diverso significato di "insieme" in NBG1 rispetto a NBG2 e NBG3, una formula è dimostrabile in uno dei tre sistemi se e solo se lo è anche negli altri due. Si possono quindi considerare questi tre diversi sistemi come espressioni di un unico sistema NBG.

Il linguaggio di NBG è più ricco di quello di ZFC: ogni formula di ZFC può essere espressa anche in NBG, ma esistono formule di NBG, con quantificatori sulle classi, non equivalenti ad alcuna di ZFC.[5]

Una formula di ZFC è dimostrabile in ZFC se e solo se lo è in NBG.[6] Questa verità discende in sostanza dal fatto che tutti gli assiomi di ZFC sono tali anche in NBG, mentre gli assiomi di NBG non presenti in ZFC, ossia quelli che riguardano le classi, non influiscono in alcun modo sul comportamento degli insiemi.

La conseguenza più importante è che il sistema NBG è coerente se e solo se lo è ZFC, e dunque NBG gode di un'ottima affidabilità.

La possibilità e la facilità di riprodurre le costruzioni canoniche in NBG discendono dalle stesse qualità di ZFC.

[3][6], pagg. 135-137, rimanda a [28].

[4]Ripercorrendo [6] alle pagg. 119-137, questo risultato si ottiene combinando quelli di [10] per NBG1 e NBG2 e [28] per NBG2 e NBG3.

[5]Secondo [6], una formula di questo tipo si può trovare in [10].

[6][6], pagg. 130-133, ne dà una dimostrazione informale e rimanda ad altri risultati più precisi.

Un limite del sistema NBG è che al suo interno non sempre vale il principio di induzione.[7] Il principio di induzione afferma che, se una proprietà φ vale per il numero 0 e ogni volta che vale per un numero naturale n vale anche per il successivo $n+1$, allora vale per tutti i numeri naturali. In NBG è possibile dimostrare tale principio solo per le formule senza quantificatori sulle classi.[8]

La validità degli assiomi di NBG è facilmente intuibile allo stesso modo di come lo è in ZFC. C'è però un fatto che stride con l'immaginazione, ed è la distinzione fra i concetti di classe e insieme. Se non per i motivi tecnici di evitare contraddizioni, non è chiaro perché debbano esistere contenitori di due nature diverse, né è chiaro il criterio che li distingue: una semplice classificazione in NBG1, l'appartenenza a un'altra classe in NBG2, l'essere sufficientemente piccoli in NBG3.

Un'altra notevole caratteristica del sistema NBG è che è *finitamente assiomatizzabile*, nel senso che è possibile fondarlo su un diverso ma equivalente sistema di assiomi che non comprenda nessuno schema.[9]

L'unico schema di assiomi di NBG è la comprensione per classi, che dipende da una formula φ. Poiché ogni formula può essere composta solo in un numero finito di modi a partire da formule più semplici, ed esiste solo un numero finito di formule atomiche, l'assiomatizzazione finita di NBG si basa sullo scomporre lo schema di comprensione in tanti piccoli assiomi che permettono la costruzione di classi corrispondenti alle formule atomiche e ai modi di combinare formule semplici in altre più complesse. A questi si devono poi aggiungere alcuni assiomi di natura tecnica tramite i quali, insieme agli altri, si possa ricostruire lo schema di comprensione, che in questo caso sarà un teorema anziché un assioma.

6.4 Il sistema di Quine - Morse (QM): le classi come sovrastruttura importante

La teoria QM[10] nasce come estensione del sistema NBG.

I punti chiave di NBG sono stati l'introduzione delle classi e la limitazione dell'assioma di comprensione al solo caso predicativo, per attenersi all'idea intuitiva di classe.

La novità del sistema QM è la generalizzazione della comprensione al caso impredicativo: si ammette cioè l'esistenza di classi corrispondenti a formule con quantificatori sulle classi. La giustificazione di questa decisione è il semplice fatto che limitare la comprensione al solo caso predicativo non è necessario, perché anche rimuovendo tale vincolo non si giunge ad alcun paradosso.

Un sistema di assiomi per QM si può ottenere da uno qualsiasi dei sistemi NBG sostituendo lo schema di comprensione predicativa con l'equivalente impredicativo. Ci appoggeremo a NBG2, perché è il sistema di mezzo che assomiglia un po' a NBG1, non esplicitando l'assioma di limite della dimensione, e un po' a NBG3, nella considerazione degli insiemi come classi contenute in altre classi.

---

[7] [6], pag. 139, rimanda a [15].

[8] [6], pag. 139, rimanda a [2], vol. 6.

[9] [6], pagg. 129-130, rimanda a [2].

[10] La teoria si è sviluppata attraverso i contributi di [17], [14] e altri.

Definizione. Una classe X è un insieme se e solo se esiste una classe che la contiene, ossia $\exists A(X \in A)$.

Definizione: Assiomi di QM

I. Coppie:
$$\forall a \forall b \exists x\ \forall u(u \in x \leftrightarrow (u = a \vee u = b))$$

II. Unione:
$$\forall x \exists y\ \forall u(u \in y \leftrightarrow \exists t(t \in x \wedge u \in t))$$

III. Potenza:
$$\forall x \exists y\ \forall u(u \in y \leftrightarrow u \subseteq x)$$

IV. Sottoinsiemi:
$$\forall A\ \forall x \exists y\ \forall u(u \in y \leftrightarrow u \in x \wedge u \in A)$$

V. Rimpiazzamento:
$$\forall F(\textsc{Fun}(F) \rightarrow \forall x \exists y\ \forall u(u \in y \leftrightarrow \exists t(t \in x \wedge t \in \textsc{Dom}(F) \wedge F(t) = u)))$$

VI. Infinità:
$$\exists n(\varnothing \in n \wedge \forall x(x \in n \rightarrow x \cup \{x\} \in n))$$

VII. Fondazione:
$$\forall x(x \neq \varnothing \rightarrow \exists u(u \in x \wedge u \cap x = \varnothing))$$

VIII. Scelta globale:
$$\exists F\ \forall x\ (x \neq \varnothing \rightarrow (x \in \textsc{Dom}(F) \wedge F(x) \in x))$$

IX. Estensionalità per classi:
$$\forall A \forall B\ (\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B) \rightarrow A = B)$$

X. Schema di comprensione impredicativa per classi:
Se $\varphi(x)$ è una formula qualsiasi, allora il seguente è un assioma:
$$(\forall)\ \exists A\ \forall x(x \in A \leftrightarrow \varphi(x))$$

Le classi del sistema QM sono molto più generali di quelle formalizzate in NBG. Le classi di NBG sono una sovrastruttura alla categoria degli insiemi, e permettono di raccogliere assieme quegli insiemi che condividono una caratteristica descrivibile dalla sola teoria degli insiemi. Alcune classi di QM, invece, raccolgono insiemi che condividono proprietà dipendenti dalla teoria stessa delle classi, che nel linguaggio degli insiemi non sono nemmeno esprimibili.

È come se un esploratore, volendo classificare tutti gli animali incontrati nei suoi viaggi, lo facesse non solo a seconda delle caratteristiche intrinseche degli animali come il fatto di essere volanti, terrestri, mammiferi o anfibi, ma basandosi anche su ciò che dipende da lui stesso, come gli animali che ha incontrato per primi o quelli che sono più grandi di lui.

Ricordiamo che ogni formula di ZFC è dimostrabile in ZFC se e solo se lo è in NBG; esistono formule di ZFC che sono dimostrabili in QM ma non in NBG.[11] Formule di questo tipo, tuttavia, riguardano pesantemente la struttura profonda delle classi, piuttosto che gli insiemi in quanto tali. Allo stesso modo, ogni verità dimostrabile in NBG è dimostrabile anche in QM ma, viceversa, esistono teoremi dimostrabili in QM che non lo sono in NBG.

[11] [6], pagg. 140-141, rimanda a [9].

Il sistema QM è coerente se lo è ZFC arricchito di un assioma che postuli l'esistenza di un cardinale inaccessibile, cioè un insieme talmente grande da non poter essere raggiunto in nessun modo tramite gli assiomi di costruzione.[12]

Essendo una sua estensione, QM può riprodurre ogni costruzione lecita in NBG. Inoltre, al contrario di NBG, nel sistema QM si può dimostrare il principio di induzione in tutta generalità.[13] Perciò QM può costituire un fondamento per tutte le branche della matematica.

D'altra parte, QM soffre degli stessi limiti intuitivi di NBG che riguardano la distinzione e natura dei concetti di classe e insieme. Non solo: ammettendo la comprensione impredicativa, la scelta di QM è proprio quella di estendere l'azione delle classi oltre l'immaginazione.

6.5 La gerarchia delle iperclassi

Le classi sono state introdotte in NBG per potersi riferire all'insieme di tutti gli insiemi e ad altre totalità simili, altrimenti proibite dal paradosso di Russell. Lo scopo, però, era studiare la teoria degli insiemi. Il sistema QM ha elevato le classi a strutture ricche di nuovi significati, anziché mere raccolte di insiemi. Il campo degli oggetti di studio, dunque, si è allargato dai soli insiemi alle classi.

A questo punto, allora, ritorna il problema originario: se le classi sono un oggetto di studio, si vorrebbe avere un modo per riferirsi alla totalità di tutte le classi, o di tutte le classi con una determinata caratteristica. Nel sistema QM ciò è impossibile, a meno che le classi non siano in realtà degli insiemi: una classe propria, infatti, è per definizione una classe che non è contenuta in nessun'altra, e dunque non esiste una classe contenente classi proprie. Assumere l'esistenza incondizionata di classi di classi riporterebbe al paradosso di Russell, riformulato sulle classi anziché sugli insiemi.

La soluzione appare semplice: basta ripetere gli assiomi di ZFC, che con ogni evidenza non sono contraddittori, applicandoli alle classi oltre che agli insiemi. In questo modo si possono costruire classi di classi, classi di classi di classi e via dicendo. Resta però ancora inaccessibile la classe di tutte le classi. È sufficiente allora introdurre una nuova categoria, le *iperclassi*, che sono oggetti capaci di contenere insiemi o classi, ma non altre iperclassi; esisterà quindi l'iperclasse di tutte le classi.

Se poi si volesse estendere ancora gli oggetti di studio e analizzare a fondo le iperclassi, sarà opportuno definire delle *iper-iperclassi* ...

È evidente che un processo del genere non può giungere a termine. In linea di principio si può continuare per questa strada definendo strati di iperclassi, ma non c'è nessun motivo per preferire fermarsi a un certo punto piuttosto che a un altro. Perciò, solitamente, non si incomincia nemmeno.

L'idea delle iperclassi e di una loro gerarchia è del tutto legittima, coerente[14] e facilmente intuibile; tuttavia, non conduce ad alcuna conclusione interessante che non fosse già accessibile senza l'utilizzo di iperclassi.

[12] [6], pag. 141, rimanda a [12].
[13] Si vedano [6], pag. 139, e gli ulteriori riferimenti indicati.
[14] Si veda [6], pagg. 141-142.

6.6 Il sistema di Quine (Q): le classi come sovrastruttura fantasma

Le classi sono state introdotte per poter maneggiare alcune totalità di insiemi che non possono essere racchiuse dentro un insieme. Il sistema NBG utilizza le classi come oggetti di appoggio per poter più agilmente studiare gli insiemi; QM tratta le classi dando ad esse una dignità pari a quella degli insiemi. La scelta su cui si basa il sistema Q[15] è al contrario considerare le classi come qualcosa di insignificante, in un certo senso meno esistente: le classi sono solo un artificio del linguaggio, dei simboli per abbreviare ciò che in realtà si può già esprimere tramite i soli insiemi.

Il sistema Q ha esattamente gli stessi assiomi di ZFC.

Rispetto a ZFC, viene esteso il linguaggio formale: si aggiungono le lettere maiuscole come variabili specializzate per le classi e si considerano le minuscole come specializzate per gli insiemi; infine, si aggiungono i simboli di astrattori per classi $\{\dots \mid \dots\}$.

In Q non sono ammesse quantificazioni sulle classi: non avrebbe senso, infatti, dire "per tutte le classi ..." o "esiste una classe ..." quando le classi, in pratica, non esistono. Perciò, anche se i sistemi Q e NBG utilizzano gli stessi simboli, poiché non hanno le stesse formule, i loro linguaggi sono differenti: per esempio, l'espressione $\exists A(x \in A \leftrightarrow x = x)$ è una formula in NBG ma non lo è in Q, perché Q non ammette quantificazioni sulle classi.

Ogni formula espressa nel linguaggio di Q è anche una formula di NBG. Tuttavia, la stessa formula ha dei significati radicalmente diversi nei due sistemi.

In NBG ogni variabile per classe o astrattore per classe si riferisce a una classe. In Q, invece, tutto ciò che allude a una classe è solo un modo diverso per esprimere una proprietà sugli elementi della classe.

Per esempio, l'appartenenza di un insieme a un astrattore di classe, descritta da formule come $y \in \{x \mid \varphi(x)\}$, in Q è per definizione solo un modo diverso per scrivere $\varphi(y)$. Allo stesso modo l'uguaglianza e l'appartenenza fra astrattori si riconducono, tramite l'estensionalità, al contenere gli stessi elementi e quindi al caso precedente. Infine, una formula contenente variabili per classi si interpreta come uno schema di formule in cui le variabili per classi possono essere sostituite da arbitrari astrattori e perciò, come sopra, ricondotte a semplici formule.

Chiaramente i sistemi Q e ZFC dimostrano esattamente gli stessi teoremi, con l'unica accortezza che le formule di Q con variabili per classi corrispondono in ZFC non a formule, ma a schemi di formule. Pertanto Q è coerente se e solo se lo è ZFC.

Analogamente, in Q si ripetono facilmente tutte le costruzioni canoniche della teoria degli insiemi.

L'intuibilità del sistema Q è terribilmente compromessa dall'ambiguità con cui è lecito dichiarare allo stesso tempo che le classi ci sono e non ci sono. Nel momento in cui un'entità ha un nome, infatti, è assolutamente naturale sottintendere la sua esistenza, se non a un livello materiale, almeno a uno concettuale.

Il sistema formale Q presuppone l'esistenza del concetto di classe a livello intuitivo, ma evita appositamente di includerla nel processo di formalizzazione. Così ci si ritrova a

[15] Il sistema è sviluppato in [20].

maneggiare delle entità che hanno una chiara interpretazione ma il cui significato non può mai essere esplicitato nel linguaggio formale.

Il sistema Q presenta una particolarità: esistono formule, con variabili libere per classi, che sono dimostrabili in Q ma non lo sono in NBG.[16]

Questa stranezza discende dal fatto che le classi libere sono interpretate in Q come schemi di formule per ZFC, mentre sono classi reali in NBG: accade allora, per alcune formule particolari, che ogni istanza dello schema sia dimostrabile in ZFC, ma che non lo sia la formula corrispondente in NBG, che racchiude tutto in una volta sola.

6.7 Il sistema di Ackermann (A): trasmissione degli insiemi attraverso le classi

Similmente alla maggior parte delle teorie che utilizzano le classi, nel sistema di Ackermann[17] esiste un solo tipo primitivo di oggetti, le classi appunto; a posteriori, ad alcune di esse viene dato il nome di insiemi.

In NBG2, NBG3 e QM la definizione di insieme è "una classe contenuta in un'altra classe"; in A, invece, non esiste una condizione esplicita per distinguere quali classi sono anche insiemi, ma solo un predicato $\mathcal{M}(X)$ (dal tedesco *Menge*, insieme) che significa "X è un insieme". Gli assiomi di A descriveranno quindi i modi in cui la proprietà $\mathcal{M}$ si trasferisce attraverso le classi.

Gli assiomi di A includono l'estensionalità e la comprensione per classi.

Gli altri assiomi definiscono i modi in cui il predicato $\mathcal{M}$ si trasmette da una classe all'altra. Le trasmissioni più semplici sono "dall'alto verso il basso": le sottoclassi di un insieme sono insiemi, e gli elementi di un insieme sono insiemi. C'è però anche un modo per trasmettere $\mathcal{M}$ nella direzione opposta: se tutti gli elementi di una classe sono insiemi, e la formula che definisce la classe è sufficientemente semplice, allora tale classe è un insieme.

Infine, un assioma di fondazione attribuisce agli insiemi la stessa struttura gerarchica che hanno in ZFC.

[16] [6], pag.148, rimanda a [12].
[17] Il sistema è sviluppato in [1].

Definizione: Assiomi di A

I. Estensionalità per classi:
$$\forall A \forall B\ (\forall X(X \in A \leftrightarrow X \in B) \rightarrow A = B)$$

II. Comprensione per classi:
Se $\varphi(x)$ è una formula qualsiasi, allora il seguente è un assioma:
$$(\forall)\ \exists A\ \forall x(x \in A \leftrightarrow \varphi(x))$$

III. Sottoinsiemi:
$$\forall Y \forall x\ (Y \subseteq x \rightarrow \mathcal{M}(Y))$$

IV. Ereditarietà:
$$\forall Y \forall x\ (Y \in x \rightarrow \mathcal{M}(Y))$$

V. Comprensione per insiemi:
Se $\varphi(x)$ è una formula che non contiene il predicato $\mathcal{M}$ né variabili libere per classi, allora il seguente è un assioma:
$$(\forall)\ \forall X(\varphi(X) \rightarrow \mathcal{M}(X)) \rightarrow \exists a\ \forall X(X \in a \leftrightarrow \varphi(X))$$

VII. Fondazione:
$$\forall x\ (x \neq \varnothing \rightarrow \exists u(u \in x \wedge u \cap x = \varnothing))$$

Se, dallo schema di comprensione per classi, si rimuovesse anche solo una delle condizioni su φ di non contenere il predicato $\mathcal{M}$ né variabili libere per classi, allora si potrebbe dimostrare un principio di comprensione generale equivalente a quello della teoria ingenua, e da lì riprodurre il paradosso di Russell[18]. Tali condizioni sono perciò necessarie.

Una formula espressa nel linguaggio di ZFC è dimostrabile in A se e solo se lo è in ZFC.[19] Di conseguenza, il sistema A è coerente se e solo se lo è ZFC, e tutte le costruzioni ammissibili in ZFC sono riproducibili allo stesso modo in A.

Al contrario dei sistemi NBG e QM, in A è permesso che una classe contenga altre classi.
Questo fatto permette l'esistenza di classi particolari, molto vicine all'intuizione naturale, che però sono inaccessibili nei sistemi precedentemente descritti. Per esempio, indicata V la classe di tutti gli insiemi, si può dimostrare che in A esiste la classe $\{V\}$ contenente V come unico elemento; tuttavia, né V né $\{V\}$ sono insiemi.[20]
D'altra parte, il sistema A non sfugge alle criticità intuitive di tutte le teorie che distinguono insiemi e classi: non è chiaro perché siano concetti diversi, né quale sia il discriminante che li separa.

6.8 La teoria dei tipi semplici di Russell (T): l'omogeneità degli insiemi

6.8.1 Le teorie dei tipi

Tutte le teorie che abbiamo preso in considerazione finora, da ZFC in poi, discendono dalla cosiddetta *dottrina del limite della dimensione*, la linea di pensiero secondo cui i

[18] Se ne trova una spiegazione in [6], pagg. 149-150.
[19] Si veda [6], pagg. 151-153, che in particolare cita [11] e [21].
[20] [6], pag. 153, rimanda a [13].

problemi della teoria ingenua derivano dagli insiemi “troppo grandi”. A volte sono stati semplicemente rimossi tali insiemi, altre volte si è dato loro il diverso nome di classi; comunque, la soluzione è sempre stata attribuire agli insiemi propriamente detti il vincolo di essere “sufficientemente piccoli”.

Una linea di pensiero totalmente diversa dà origine alle *teorie dei tipi*. Secondo questa concezione, i mali discendono dall'idea che gli insiemi possano riunire oggetti di natura disomogenea: individui, insiemi semplici, insiemi di insiemi eccetera sono entità di natura radicalmente diversa e perciò non possono essere coinvolti in uno stesso insieme.

In questo modo cade la possibilità di usare arbitrariamente gli insiemi come elementi per costruire nuovi insiemi. La teoria dei tipi necessita quindi dell'esistenza di un'infinità di individui, ossia oggetti primitivi che non contengono nulla, per costituire il materiale che andrà a riempire gli insiemi.

Il *tipo* di un insieme è un numero. Tale numero lo colloca all'interno di una rigida gerarchia: agli individui viene assegnato il tipo 0; gli insiemi che contengono individui sono di tipo 1; gli insiemi che contengono insiemi di tipo 1 hanno il tipo 2; gli insiemi di insiemi di tipo 2 sono insiemi di tipo 3 e così via. Gli elementi di uno stesso insieme devono condividere tutti lo stesso tipo.

La teoria dei tipi semplici[21], in pratica, identifica il concetto di insieme con l'idea di classe descritta nella sezione 6.3.1, ossia un contenitore di oggetti fra loro omogenei, e, dopodiché, ripete all'infinito la creazione di classi di un nuovo tipo per contenere le classi del tipo precedente, in maniera simile alla gerarchia di iperclassi descritta nella sezione 6.5.

L'unica differenza fra la teoria dei tipi e un'infinità di iperclassi è che l'oggetto base su cui si fondano tutte le iperclassi sono gli insiemi di ZFC, mentre la teoria dei tipi si appoggia su un'infinità di elementi privi di struttura.

Insiemi di tipo diverso hanno una differente natura e non devono in alcun modo venire confusi. Per questo motivo il linguaggio si arricchisce di infinte nuove variabili: ogni simbolo di variabile avrà un indice i che ne segnala il tipo, e tutte le variabili con uno stesso indice i saranno specializzate a indicare solamente insiemi di tipo i.

L'indice di una variabile viene solitamente posto in alto a destra. Quindi, per esempio, x^0 è una variabile per individui, x^1 e y^1 per insiemi di tipo 1, x^3_1, x^3_2 e x^3_n sono variabili per insiemi di tipo 3.

Nella teoria dei tipi è replicabile la costruzione delle coppie ordinate, perché tutti gli insiemi coinvolti nella definizione sono omogenei rispetto al tipo degli elementi. Dati due insiemi di tipo i, dunque, si può costruire la loro coppia ordinata, che risulta essere un insieme di tipo $i + 2$. Allo stesso modo, si possono riprodurre le relazioni e le funzioni come insiemi di tipo $i + 3$.

6.8.2 Il sistema T

La teoria dei tipi semplici prevede un assioma di estensionalità e un assioma di comprensione, ripetuti per ogni possibile tipo di insiemi. Diventano perciò schemi di assiomi, in cui gli assiomi veri e propri si ottengono sostituendo ogni possibile valore al posto dell'indice

[21]La teoria dei tipi semplici è una semplificazione del sistema sviluppato in [31].

generico i. Allo stesso modo un altro schema ripete l'assioma di scelta per ogni tipo di insiemi. Per ultimo un assioma di infinità postula l'esistenza di infiniti individui.

Gli assiomi di infinità di ZFC, NBG e QM non sono ripetibili in T, perché utilizzano la funzione di successore $x \cup \{x\}$: il tipo di $\{x\}$ è chiaramente diverso da quello di x e dunque non può esistere l'insieme $x \cup \{x\}$, perché conterrebbe elementi di due tipi diversi.

L'assioma di infinità viene quindi riformulato in altri termini: assicura l'esistenza di una particolare relazione che collega infiniti individui uno dopo l'altro senza mai tornare su sé stessa.

Lo schema di scelta incontra un problema simile, perché nella teoria dei tipi la formalizzazione del concetto di funzione richiede che gli elementi del dominio e dell'immagine abbiano lo stesso tipo, mentre per la funzione di scelta questo non accade mai.

Dato quindi un insieme di insiemi non vuoti, l'assioma di scelta postula l'esistenza di un nuovo insieme, che chiameremo *insieme di scelta*, che interseca ciascuno degli insiemi interni in un unico elemento. L'idea della funzione di scelta può essere ricostruita associando a ciascuno degli insiemi interni l'unico elemento appartenente all'intersezione con l'insieme di scelta, che di conseguenza risulta essere l'insieme immagine della funzione di scelta.

Definizione: Assiomi della teoria dei tipi semplici

I. Estensionalità:
$$\forall x^{i+1} \forall y^{i+1} \; (\forall u^i (u^i \in x^{i+1} \leftrightarrow u^i \in y^{i+1}) \to x^{i+1} = y^{i+1})$$

II. Comprensione:
Se $\varphi(x^i)$ è una formula qualsiasi, allora il seguente è un assioma:
$$(\forall) \; \exists y^{i+1} \forall x^i (x^i \in y^{i+1} \leftrightarrow \varphi(x^i))$$

III. Infinità degli individui:
$$\begin{gathered} \exists y^3 (\forall x^0 ((x^0, x^0) \notin y^3) \wedge \\ \wedge \forall x_1^0 \forall x_2^0 \forall x_3^0 ((x_1^0, x_2^0) \in y^3 \wedge (x_2^0, x_3^0) \in y^3 \to (x_1^0, x_3^0) \in y^3) \wedge \\ \wedge \forall x_1^0 \exists x_2^0 ((x_1^0, x_2^0) \in y^3)) \end{gathered}$$

IV. Scelta:
$$\begin{gathered} \forall x^{i+2} (\forall t^{i+1} (t^{i+1} \in x^{i+2} \to t^{i+1} \neq \varnothing^{i+1}) \to \\ \to \exists y^{i+1} \forall t^{i+1} (t^{i+1} \in x^{i+2} \to \exists u^i (y^{i+1} \cap t^{i+1} = \{u^i\}))) \end{gathered}$$

Si può provare che, se ZFC è coerente, allora lo è anche T.[22]

Attraverso degli stratagemmi simili a quelli usati per l'assioma di infinità, è possibile ricostruire gran parte della matematica all'interno della teoria dei tipi semplici.[23]

Una pecca di T è che, come moltiplica all'infinito i tipi di insieme, allo stesso modo risultano moltiplicate all'infinito tutte le costruzioni canoniche basate sugli insiemi. Così, per esempio, non esiste un solo insieme vuoto, ma un insieme vuoto per ogni livello nella scala dei tipi; non un solo insieme di numeri naturali, ma infinite copie una per ciascun livello; non un insieme universale di tutti gli insiemi, ma solo degli insiemi quasi universali contenenti tutti gli insiemi di un determinato tipo.[24]

[22] Questo fatto è implicitamente accennato in [6], pag. 161.

[23] Secondo [6], pag. 159, il sistema T qui presentato è pressocché equivalente a una semplificazione del noto sistema PM sviluppato in [31].

[24] Si veda [6], pagg. 159-160.

La moltiplicazione delle strutture canoniche è un fatto strano all'intuizione, ma ciò che più appare fastidioso è l'eccessiva rigidità della gerarchia dei tipi: non esiste alcuna maniera per mettere assieme oggetti di tipo diverso. Molte costruzioni che si immaginano facilmente non sono riproducibili.

Per esempio, l'insieme coppia è definibile solo se i due elementi hanno lo stesso tipo; oppure, anche accettando l'infinità di copie delle strutture di base, non esiste un insieme di tutti gli insiemi vuoti, perché ciascuno ha un tipo differente dagli altri.

6.8.3 L'ambiguità di tipo

Il difetto che per primo salta all'occhio leggendo gli assiomi di T è che la notazione è parecchio ingombrante. In effetti, non è solo la notazione, ma è il sistema stesso che costringe a porre estrema attenzione al tipo di ogni singola variabile e di ogni singolo insieme.

Per rendere la teoria dei tipi più leggibile, la soluzione immediata è rimuovere tutti gli indici i dalle variabili, e assumere che sia possibile assegnare un tipo ad ogni variabile in modo che l'espressione risulti corretta reintroducendo gli indici dei tipi. Una formula che non indica i tipi e verifica tale proprietà si dice *stratificata.* Questo stratagemma di rendere impliciti gli indici di tipo si chiama *ambiguità di tipo.*

In questo modo, però, verrebbero automaticamente modificate le regole di formazione delle formule, con un risultato piuttosto strano. Per esempio, in generale, se φ e ψ sono formule, allora anche $\varphi \wedge \psi$ lo è. Ma, malgrado $x \in y$ e $y \in x$ siano formule stratificate, perché ciascuna assume significato assegnando un tipo alla variabile di sinistra e il tipo successivo a quella di destra, l'espressione $x \in y \wedge y \in x$ non è stratificata, perché x dovrebbe avere un tipo allo stesso tempo minore e maggiore di y.

6.9 I sistemi stratificati di Quine

6.9.1 Il sistema New Foundations (NF): la stratificazione astratta

La teoria dei tipi ha introdotto un nuovo concetto, quello di formula stratificata: in sostanza, si tratta delle formule del linguaggio standard che possono essere tradotte nel linguaggio dei tipi. Questo concetto è però nato solo come conseguenza di tutto l'apparato teorico dei tipi.

Il sistema NF[25] ignora totalmente il complesso apparato di T e mantiene soltanto l'idea delle formule stratificate, per ripartire dagli assiomi della teoria ingenua applicando la stratificazione come unico limite all'assioma di comprensione.

Definizione: Assiomi di NF

I. Estensionalità:
$$\forall x \forall y\ (\forall u(u \in x \leftrightarrow u \in y) \rightarrow x = y)$$

II. Comprensione stratificata:
Se $\varphi(x)$ è una formula stratificata, allora il seguente è un assioma:
$$\exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow \varphi(x))$$

[25] Il sistema è sviluppato in [18].

Il fatto che l'assioma di comprensione sia limitato alle sole formule stratificate non esclude che possa valere anche in altri casi. Per esempio, $x \in z \wedge w \in x$ è stratificata, dunque, in virtù della comprensione, vale che $\exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow (x \in z \wedge w \in x))$; a questo punto, poiché z e w sono variabili libere, è lecito sostituire w con un qualsiasi altro termine, compreso z stesso; si ottiene dunque che vale $\exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow (x \in z \wedge z \in x))$ anche se la formula $x \in z \wedge z \in x$ non è stratificata.[26]

Similmente a NBG, NF è finitamente assiomatizzabile, sostituendo lo schema di comprensione con una serie di assiomi che ricalcano la formazione di formule complesse a partire da altre più semplici.[27]

In NF si risolvono molti problemi di T: esistono un unico insieme vuoto, un unico insieme universale e un'unica copia dei numeri naturali[28]; le regole di formazione delle formule sono le solite e l'unica attenzione va posta al momento di usare l'assioma di comprensione.

Ci sono pochi risultati riguardanti la coerenza di NF; in particolare, non si riesce ad esprimerla facilmente in relazione a ZFC.[29] Ciononostante, non sembrano esserci motivi seri per dubitare che NF sia coerente.[30]

Il sistema NF presenta tuttavia numerosi effetti collaterali.

L'assioma della scelta è incompatibile con NF.[31] Il principio di induzione è dimostrabile solo per le formule stratificate.[32] Si può dimostrare che esiste un insieme y che non è in biiezione con l'insieme $\{\{x\} \mid x \in y\}$ dei suoi singoletti.[33] Esiste una proprietà che vale per qualche ordinale, ma non per un minimo ordinale: ovvero, gli ordinali non sono ben ordinati.[34]

Alcune di queste anomalie possono essere evitate, ma solo al costo di aggiungere numerosi e ingombranti nuovi assiomi.[35]

Il principio guida del sistema NF, ovvero la riduzione dell'assioma di comprensione al caso stratificato, non è motivata né sostenuta da alcuna interpretazione. L'unico fatto che la giustifica è che in NF non sono riproducibili i paradossi conosciuti.

Un così basso grado di intuibilità sarebbe perdonabile solo se NF risolvesse in maniera eccellente tutti gli altri problemi della teoria degli insiemi ma, come si è visto, anche la riproduzione della matematica classica è soggetta a serie difficoltà.

---

[26] Questo esempio è preso da [3], pagg. 101-102.

[27] [6], pag. 162, rimanda a [8].

[28] Si veda [6], pag. 162.

[29] Si confrontino [6], pag. 166, e [32].

[30] Sempre [6], pag. 166, e [32].

[31] [6], pag. 163, rimanda a [26].

[32] In [6] si vedano pag. 163, che rimanda in particolare a [23], e pag. 169, che rimanda a [19].

[33] Sempre [6], pag. 163.

[34] Si veda [6], pag. 163, che in particolare rimanda a [24].

[35] Vedasi [6], pagg. 163-166, che in particolare rimanda a [23].

6.9.2 Il sistema Mathematical Logic (ML): la stratificazione astratta e le classi

Il sistema ML[36] è una semplice estensione di NF che prende in considerazione anche le classi, intese nello stesso senso di NBG2; ovvero, ogni oggetto della teoria ML è una classe, e gli insiemi sono quelle particolari classi che sono anche elementi di qualche altra classe.

Definizione: Assiomi di ML

I. Estensionalità:

$$\forall X \forall Y\ (\forall u(u \in X \leftrightarrow u \in Y) \to X = Y)$$

II. Comprensione stratificata per insiemi:
Se $\varphi(x)$ è una formula stratificata, allora il seguente è un assioma:

$$\exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow \varphi(x))$$

II. Comprensione per classi:
Se $\varphi(x)$ è una formula qualsiasi, allora il seguente è un assioma:

$$\exists Y \forall x(x \in Y \leftrightarrow \varphi(x))$$

In ML il rapporto fra insiemi e classi è diverso rispetto a quello che accade in NBG, QM o A. In questi sistemi, infatti, le classi proprie erano gli "insiemi troppo grandi"; in ML, invece, la proprietà di essere una classe propria non dipende in alcun modo dalla sua dimensione. Per esempio, la classe universale è in realtà un insieme, perché definita dalla formula stratificata "$x = x$"; la classe degli insiemi che non contengono sé stessi, invece, è una classe propria, malgrado sia una sottoclasse dell'insieme universale.

Il rapporto fra NF e ML è lo stesso che intercorre tra ZFC e NBG: ML riprende esattamente gli stessi assiomi di NF riguardanti gli insiemi e ne aggiunge altri a proposito delle classi. Perciò, ogni formula espressa nel linguaggio di NF è dimostrabile in ML se e solo se lo è in NF, e ML è coerente se e solo se lo è NF[37].

Nel sistema ML vale in tutta generalità il principio di induzione.[38] Ristabilirlo è infatti lo scopo principale per cui nasce ML come estensione di NF, dove l'induzione è applicabile solo alle formule stratificate.

Ciononostante, anche ML ha notevoli svantaggi. In particolare, la classe dei numeri naturali non è un insieme[39]: un fatto gravissimo, se si pensa a quanto diffusamente si utilizzano i numeri naturali in ogni branca della matematica.

Anche questo problema può essere risolto, ma ancora una volta richiede l'integrazione di nuovi e innaturali assiomi nel sistema.[40]

Infine, ML non risolve in alcun modo le questioni legate alla scarsa intuibilità e alla mancanza di interpretazioni del sistema NF; anzi, aggiungendo le classi, le complica ulteriormente.

[36] Il sistema ML è sviluppato in [17].
[37] [6], pagg. 168-169, rimanda a [29].
[38] Vedasi [6], pagg. 169-170.
[39] [6], pagg. 169-171, rimanda a [22].
[40] Si veda [6], pagg. 170-171, che in particolare rimanda a [16].

6.10 La teoria dei tipi ramificati di Russell (TR): una duplice gerarchia

Secondo la teoria dei tipi semplici, i tipi sono etichette che distinguono la complessità degli insiemi: gli insiemi di tipo 0 sono individui, quelli di tipo 1 sono insiemi ordinari, quelli di tipo 2 sono insiemi di insiemi e via dicendo: maggiore è il numero del tipo, maggiore è la complessità strutturale dell'insieme.

Un insieme potrebbe però essere semplice dal punto di vista della sua struttura, per esempio un insieme di individui, ma essere definito attraverso una formula complicatissima che coinvolge l'appartenenza dei suoi elementi ad insiemi più grandi.

Scopo della teoria dei tipi ramificati[41] è distinguere la *complessità strutturale* di un insieme dalla sua *complessità concettuale*. La prima riguarda la sua costituzione insiemistica, la seconda la formula che lo definisce.

La complessità strutturale viene indicata da un numero detto *tipo*, mentre la complessità concettuale da un numero detto *ordine*. Un insieme di oggetti di tipo i è un oggetto di tipo $i+1$; un insieme definito da una formula che si riferisce a una totalità di oggetti di ordine j è un oggetto di ordine $j+1$.

Per poter esprimere il concetto di ordine, si estende ulteriormente il linguaggio della teoria dei tipi, in modo che ogni variabile abbia due indici: uno riferito al tipo e l'altro all'ordine.

I due indici verranno posti in alto a destra in quest'ordine, separati da una virgola. Perciò, per esempio, $x^{i,j}$ è una variabile specializzata per gli insiemi di tipo i e ordine j.

L'esposizione del sistema TR è notevolmente complicata e perciò non sarà qui trattata in tutte le sue parti.

Gli assiomi comprendono opportune formulazioni dei principi di estensionalità e infinità degli individui. Lo schema di comprensione assume la seguente forma:

- Comprensione per tipi ramificati:
  Se $\varphi(x^{i,k})$ è una formula qualsiasi in cui j è il massimo ordine di una variabile legata di tipo $i+1$, allora il seguente è un assioma:
  $$(\forall)\ \exists y^{i+1,j+1} \forall x^{i,k} (x^{i,k} \in y^{i+1,j+1} \leftrightarrow \varphi(x^{i,k}))$$

Sotto alcune deboli ipotesi si può dimostrare che il sistema TR è coerente.[42]

Questa coerenza purtroppo giova a poco perché, al suo interno, può essere riformulata solo una parte della matematica classica.[43] Per esempio, l'estremo superiore o inferiore di un insieme di numeri reali non è un numero reale come gli altri perché, dovendosi riferire alla totalità dei numeri reali, ha ordine maggiore.

6.10.1 L'assioma di riducibilità

Per risolvere questo effetto indesiderato, inizialmente Russell stesso propose di aggiungere un *assioma di riducibilità* secondo cui, per ogni insieme di un certo tipo e ordine, esiste un altro insieme dello stesso tipo e di ordine 1 che contiene esattamente gli stessi elementi:

[41] La teoria è sviluppata in [25].
[42] [6], pag. 173-174, rimanda a diversi articoli fra cui [4].
[43] Si veda [6], pag. 174.

- Riducibilità:
$$\forall x^{i+1,j}\ \exists y^{i+1,1}\ \forall k \forall u^{i,k}(u^{i,k} \in x^{i+1,j} \leftrightarrow u^{i,k} \in y^{i+1,1})$$

L'insieme trovato tramite l'assioma di riducibilità contiene esattamente gli stessi elementi dell'insieme di partenza, quindi, per l'assioma di estensionalità, deve coincidere con esso, e dunque avere lo stesso ordine; pertanto, l'insieme di partenza aveva già ordine 1. Poiché l'assioma di riducibilità si può applicare a qualsiasi insieme, se ne conclude che tutti gli insiemi hanno ordine 1.

Il nuovo assioma si rivela pertanto un'arma a doppio taglio: o si rinuncia al principio di estensionalità, e quindi si accetta che esistano insiemi diversi con gli stessi elementi, oppure si rinuncia alla ramificazione dei tipi perché, se tutti gli insiemi hanno lo stesso ordine, allora è come se non ci fosse alcuna distinzione fra gli ordini.

La rinuncia all'estensionalità sarebbe un sacrificio molto grande, che genererebbe serie difficoltà sia per l'intuizione sia per la riformulazione della matematica classica. La teoria dei tipi ramificati, pur essendo un'idea interessante, costituisce un vicolo cieco nello sviluppo della teoria degli insiemi.

6.10.2 Le definizioni impredicative

L'idea di complessità concettuale di un insieme è strettamente correlata a quella di *definizione impredicativa*. Una definizione si dice impredicativa se fa riferimento a una totalità alla quale appartiene l'oggetto definito stesso.

La legittimità delle definizioni impredicative è spesso messa in discussione. In generale i parametri su cui si appoggia una definizione devono essere già ben definiti e precisi prima della definizione stessa, altrimenti l'oggetto definito eredita l'ambiguità e vaghezza dei parametri. Ma se uno dei parametri è una totalità che contiene l'oggetto che si va definendo, allora non è possibile che fosse già ben precisato, perché mancava appunto l'oggetto in via di definizione. In pratica, in una definizione impredicativa, l'oggetto da definire entra implicitamente in gioco per definire sé stesso.

D'altra parte, non è del tutto chiara nemmeno l'illegittimità di una definizione impredicativa. Il concetto non va infatti confuso con quello di *definizione circolare*. In una definizione circolare, l'oggetto che si sta definendo è un vero e proprio parametro della definizione stessa.

Questa situazione è inaccettabile dal punto di vista logico, perché genererebbe innumerevoli assurdità. Per esempio, si potrebbe definire l'insieme y degli elementi che non sono contenuti nell'insieme y: $y = \{x \mid x \notin y\}$, un'evidente autocontraddizione. Oppure, l'insieme z degli elementi contenuti in z: $z = \{x \mid x \in z\}$; ma qualsiasi insieme contiene esattamente i suoi stessi elementi, e dunque z può essere di tutto.

In una definizione impredicativa, invece, l'oggetto in via di definizione non è un parametro, ma soltanto un elemento appartenente a un parametro, e quindi non influisce in maniera esplicita.

La suddivisione degli insiemi in base al loro ordine rende impossibili le definizioni impredicative. Infatti, un insieme ha sempre ordine maggiore di tutti i parametri che rientrano nella sua definizione, e quindi non può comparire né essere contenuto in alcuno di essi.

Il prezzo da pagare è la teoria delle cardinalità superiori. Una definizione impredicativa infatti è alla base della dimostrazione di Cantor che l'insieme delle parti è sempre strettamente più grande dell'insieme di partenza. Escludere le definizioni impredicative chiude la strada al teorema di Cantor e dunque ogni infinito è numerabile.

6.11 Il sistema di Wang (Σ): ordini cumulativi transfiniti

Il sistema di Wang[44] nasce come evoluzione della teoria ramificata dei tipi. I cambiamenti operati sono tre.

Primo, si abbandonano i tipi, mantenendo solo gli ordini. La suddivisione degli insiemi per ordini e l'impossibilità di usare definizioni impredicative risultano sufficienti all'eliminazione dei paradossi della teoria ingenua, e quindi i tipi costituirebbero soltanto un'inutile complicazione.

Secondo, al concetto di *ordini esclusivi* si sostituisce quello degli *ordini cumulativi.* Nella teoria dei tipi ramificati ogni insieme appartiene ad un unico ordine, ogni strato è rigorosamente separato dagli altri, l'appartenenza a diversi ordini si esclude a vicenda. Nel sistema Σ, invece, ogni ordine contiene tutti gli ordini precedenti; un insieme di un dato ordine, perciò, appartiene anche alle totalità degli ordini maggiori. Per esempio, l'ordine cumulativo 0 coincide con l'esclusivo 0, l'ordine cumulativo 1 corrisponde agli ordini esclusivi 0 e 1, il cumulativo 2 corrisponde agli esclusivi 0, 1 e 2, eccetera.

Infine, si prendono in considerazione anche gli ordini che vanno al di là dell'infinito: sono i cosiddetti *ordini transfiniti.* Ci saranno quindi insiemi di ordine 1, 2, 3 e così via, dove ogni ordine contiene tutti i precedenti; al termine dei numeri naturali ci sarà un ordine ω che riunisce in sé tutti gli ordini finiti; poi ci saranno gli ordini $\omega + 1$, $\omega + 2$, $\ldots$, $\omega + \omega$ e avanti ancora.

Il sistema di Wang Σ è costituito come combinazione di una serie di sistemi parziali Σ_α. Per ogni ordinale α, il sistema parziale Σ_α formalizza la teoria degli insiemi alla maniera descritta sopra fino all'ordine α.

Il complesso Σ non è un vero e proprio sistema formale, ma in qualche modo un sistema di sistemi formali. Grazie a questa peculiarità riesce a sfuggire ai teoremi di incompletezza di Gödel e a dimostrare la propria stessa coerenza.

Secondo Wang, infatti, ogni sistema parziale Σ_α può essere dimostrato coerente all'interno di $\Sigma_{\alpha+2}$ e dunque Σ, che racchiude tutti i sistemi parziali, dimostra la propria coerenza all'interno di sé stesso.[45]

Nel sistema Σ si può ricostruire tutta la matematica, eccetto la teoria delle cardinalità superiori, che è una rinuncia necessaria se si vuole classificare gli insiemi in base al loro ordine, come descritto nella sezione 6.10.2.[46]

Il sistema di Wang ristabilisce molte costruzioni comuni proibite dalla teoria dei tipi.

---

[44] L'idea del sistema è tracciata in [30].

[45] Vedasi [6], pag. 177.

[46] Si veda [3], pagg. 161-165.

Per esempio, grazie alla cumulatività degli ordini, due insiemi qualsiasi sono sempre confrontabili, perché, anche se avessero ordine diverso, condividerebbero comunque l'ordine maggiore.

Inoltre, la transfinitezza degli ordini permette di operare anche con quantità infinite di insiemi di ordine qualsiasi: basta trovare un ordinale infinito che sia maggiore di tutti gli ordini e collocarsi nel sistema parziale riferito a tale ordinale.

Per esempio, l'ambiente più semplice in cui formalizzare i numeri reali è $\Sigma_{\omega+1}$: i numeri reali hanno ordine finito n ma vengono interpretati nell'ambiente di ordine ω; quando si calcola un estremo superiore o inferiore, riferendosi alla totalità dei numeri reali, si ottiene un numero reale di ordine $n+1$, ma questo nuovo numero può di nuovo essere interpretato nell'ambiente di ordine ω, esattamente come tutti gli altri.[47]

6.12 Cenni di logica intuizionista

La corrente intuizionista non è nata per correggere la teoria ingenua degli insiemi; si era già sviluppata come un'esigenza di cambiare profondamente e radicalmente i metodi generali della matematica.

I paradossi della teoria ingenua sono intesi semplicemente come uno dei tanti sintomi che segnalano la presenza di un male nascosto in profondità. Mettere una pezza sul sintomo, cercando un nuovo sistema coerente per studiare gli insiemi, non risolve il vero problema, che certamente, prima o poi, tornerà per un'altra strada. Viceversa, risolvere la questione alla radice purificherà automaticamente anche la teoria degli insiemi.

L'idea fondamentale del pensiero intuizionista è che ogni entità matematica deve essere *costruibile*, ossia ottenibile da altre attraverso un numero finito di passi espliciti.

Questo principio costringe a grandi rinunce, ma rende estremamente forte tutto ciò che rimane.

Per esempio, il principio del terzo escluso non vale in logica intuizionista. La frase "A o non A" non è sempre vera, perché viene considerata tale solo se si è certi di "A" oppure si è certi di "non A"; se non si conosce la verità di A, non è lecito dichiarare che vale "A o non A".

Di conseguenza gli enunciati intuizionisticamente veri forniscono molte più informazioni: per esempio, se si dichiara "A o B" si può essere certi che almeno uno fra A e B sia già stato rigorosamente dimostrato.

La teoria intuizionista riconduce gli insiemi a regole per produrre sequenze finite ma sempre estendibili di individui, e tali sequenze rappresentano gli elementi.[48] Tutte le successive costruzioni che riguardano gli insiemi devono assicurare che in ogni circostanza sia possibile risalire con esattezza a ciascun elemento degli insiemi.

La complicatezza della descrizione degli insiemi non è vista come una perdita di semplicità, ma come un guadagno di costruibilità, perché la teoria classica degli insiemi era sempre stata eccessivamente vaga.

---

[47] Confrontare [6], pag. 176.
[48] Si veda [3], pagg. 202-208.

Per esempio, l'assioma di scelta, che dichiara l'esistenza di una funzione senza specificare come è fatta, non è accettabile perché non costruttivo. Infiniti di cardinalità superiore al numerabile non hanno significato, dal momento che nemmeno il numerabile è costruttivamente raggiungibile.

Capitolo 7

Conclusioni

Questa tesi è stata un'osservazione di cosa accade all'interno della teoria degli insiemi. L'approccio è stato descrittivo più che dimostrativo, perché lo scopo non era giungere a un risultato, ma conoscere diverse possibilità e le loro conseguenze.

Parallelamente mi sono sforzato di dare un significato ad ogni cosa: interpretazioni per gli oggetti matematici e valori per la matematica come disciplina. La mia ricerca stessa di significati trova un senso se si riconosce il valore dell'intuibilità dei concetti matematici.

Ripercorro in sintesi i punti chiave dell'indagine epistemologica.

In matematica, l'intuizione e la formalità sono ugualmente importanti. L'intuizione sviluppa nuove idee e indirizza la ricerca; la formalità rende sicuri i ragionamenti e permette di andare dove l'intuizione non arriva.

La teoria degli insiemi, così come la si può immaginare la prima volta, si autocontraddice. Una spiegazione filosofica a come sia possibile un tale errore in matematica è la duplicazione dei concetti al momento della loro formalizzazione.

Ho infine descritto molte teorie degli insiemi, nate come tentativi di aggiustare quella originaria e ricche di idee variegate e interessanti.

Tutte si sono rivelate sufficientemente affidabili da poter essere considerate coerenti. Le costruzioni canoniche della matematica potevano quasi sempre essere riprodotte. Ma nessuna teoria ha potuto soddisfare appieno il desiderio che i concetti scritti sulla carta corrispondessero a quelli pensati nella testa.

Possiamo allora rinunciare alla speranza di trovare una perfetta coincidenza, consapevoli che i risultati finora raggiunti sono già buoni, oppure sfruttare questo desiderio inappagato come stimolo per continuare a cercare.

Bibliografia

[1] W. Ackermann. Zur Axiomatik der Mengenlehre. *Mathematische Annalen*, 131:336–345, 1956.

[2] P. Bernays. A system of axiomatic set theory. *Journal of Symbolic Logic*, 1937-1954. 2:65-77; 6:1-17; 7:65-89; 7:133-145; 8:89-106; 13:65-79; 19:81-96.

[3] Ettore Casari. *Questioni di filosofia della matematica.* Feltrinelli Editore Milano, 2 edition, 1972.

[4] F. B. Fitch. The consistency of the ramified Principia. *Journal of Symbolic Logic*, 3:140–149, 1938.

[5] A. A. Fraenkel. Zu den Grundlagen der Cantor-Zermeloschen Mengenlehre. *Mathematische Annalen*, 86:230–237, 1922.

[6] Abraham A. Fraenkel, Yehoshua Bar-Hillel, and Azriel Levy. *Foundations of set theory.* North-Holland Publishing Company, 2 edition, 1973.

[7] K. Gödel. The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis. *Annals of Mathematics Studies*, 1940.

[8] T. Hailperin. A set of axioms for logic. *Journal of Symbolic Logic*, 9:1–19, 1944.

[9] G Kreisel and A. Levy. Reflection principles and their use for establishing the complexity of axiomatic systems. *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 14:97–191, 1968.

[10] A. H. Kruse. A method of modelling the formalism of set theory in axiomatic set theory. *Journal of Symbolic Logic*, 28:20–34, 1963.

[11] A. Levy. On Ackermann's set theory. *Journal of Symbolic Logic*, 24:154–166, 1959.

[12] A. Levy. Axiom schemata of strong infinity in axiomatic set theory. *Pacific Journal of Mathematics*, 10:223–238, 1960.

[13] A. Levy and R. L. Vaught. Principles of partial reflection in the set theories of Zermelo and Ackermann. *Pacific Journal of Mathematics*, 11:1045–1062, 1961.

[14] A. P. Morse. *A theory of sets.* Academic Press, 1965.

[15] A. Mostowski. Some impredicative definitions in the axiomatic set theory. *Fundamenta Mathematicae*, 37:111–124, 1951. Corretto l'anno seguente nel vol. 38, pag. 238.

[16] S. Orey. Formal development of ordinal number theory. *Journal of Symbolic Logic*, 20:95–104, 1955. Si veda anche l'articolo "On the relative consistency of set theory" dello stesso autore, pubblicato l'anno seguente nel volume successivo alle pagg. 280-290.

[17] W. V. O. Quine. *Mathematical Logic. Revised edition.* Harvard University Press, 1951.

[18] W. V. O. Quine. *From a logical point of view.* Harvard University Press, 1953.

[19] W. V. O. Quine. On Frege's way out. *Mind*, 64:145–159, 1955.

[20] W. V. O. Quine. *Set theory and its logic.* Harvard University Press, 1963.

[21] W. N. Reinhardt. Ackermann's set theory equals ZF. *Annals of Mathematical Logic*, 2:189–249, 1970.

[22] J. B. Rosser. The axiom of infinity in Quine's New Foundations. *Journal of Symbolic Logic*, 17:241, 1952.

[23] J. B. Rosser. *Logic for mathematicians.* New York, 1953.

[24] J. B. Rosser and H. Wang. Non-standard models for formal logic. *Journal of Symbolic Logic*, 15:113–129, 1950. Vedere anche Errata Corrige dello stesso volume.

[25] B. Russell. Mathematical logic as based on the teory of types. *Americal Journal of Mathematics*, 30:22–262, 1908.

[26] E. Specker. The axiom of choice in Quine's New Foundations for mathematical logic. *Proceedings of the National Academy of Sciences (U.S.A.)*, 39:972–975, 1953.

[27] J. von Neumann. Eine Axiomatisierung der Mengenlehre. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle)*, 154:219–240, 1925. Vedere anche le correzioni nel volume seguente a pag. 128.

[28] J. von Neumann. Über eine Widerspruchsfreiheitsfrage in der axiomatischen Mengenlehre. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle)*, 160:227–241, 1929.

[29] H. Wang. A formal system of logic. *Journal of Symbolic Logic*, 15:25–32, 1950.

[30] H. Wang. The formalization of mathematics. *Journal of Symbolic Logic*, 19:241–266, 1954.

[31] A. N. Whitehead and B. Russell. *Principia Mathematica.* Cambridge University Press, 1910-1913.

[32] Wikipedia. New Foundations, 2022. Pagina visitata l'ultima volta il 5 dicembre 2022. `https://en.wikipedia.org/wiki/New_Foundations`.

[33] E. Zermelo. Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. *Mathematische Annalen*, 65:261–281, 1908.