INDICE

SOMMARIO

In questa tesi viene trattata la teoria dei giochi non collaborativi, relazionata specialmente a problemi di economia.

Dopo aver enunciato i teoremi e le definizioni principali che permettono di comprendere la teoria, quali i concetti di razionalità, strategia, utilità e dominanza, e dopo aver illustrato i metodi intuitivi per rappresentare un gioco, si introduce il concetto di equilibrio e lo si tratta in maniera approfondita in tutte le sue sfumature.

Si analizzano nello specifico diversi tipi di equilibrio: Nash per strategie pure e miste, Cournot-Nash e Bayes-Nash, con introduzioni ed applicazioni a problemi di carattere differente; nello specifico vengono trattati il problema dei beni comuni, i giochi ripetuti, l'informazione completa e incompleta. Viene definito ed applicato a casi studio il meccanismo di induzione a ritroso.

INTRODUZIONE

La teoria dei giochi è un ramo della matematica applicato in varie materie, tra cui l'economia; in questo caso è uno strumento per studiare l'interazione strategica tra diversi agenti economici.

In questa trattazione viene analizzata solamente la teoria dei giochi non cooperativi, vale a dire che sono assenti eventuali accordi tra i giocatori, che scelgono le strategie da utilizzare in maniera simultanea o sequenziale.

Alcune applicazioni in materia economica della game theory sono, per esempio, i mercati oligopolistici (duopolio di Cournot, paragrafo 4.3), la regolamentazione dei monopoli, lo sfruttamento delle risorse limitate (problema dei beni comuni, capitolo 9), ma anche in problemi di contrattazione e nelle aste e la gestione delle scorte in un magazzino comune.

Tuttavia la teoria dei giochi trova applicazioni anche in materie completamente diverse, a partire dalle votazioni politiche (un problema base è descritto nel sottoparagrafo 2.3.2 e il concetto è ripreso nel sottoparagrafo 3.2.2), ma anche in biologia (il "problema del pollo" di 2.3.4 nasce inizialmente con il nome di "problema di Hawk-Dove" riferito appunto a falchi e colombe). Viene impiegata addirittura in medicina, per l'analisi del ruolo di determinati geni nelle malattie o per rilevare i fattori di rischio epidemici; in telecomunicazioni per gestire la banda di trasmissione, in informatica viene applicata nei protocolli peer-to-peer.

Uno dei due ruoli principali della teoria dei giochi sono quello "positivo", ovvero l'interpretazione di una situazione attuale; in particolare viene utilizzata per motivare la scelta di determinate strategie che hanno in seguito portato al profilo presente. L'altro ruolo a cui si fa riferimento è quello "prescrittivo", ovvero quali situazioni di equilibrio possono verificarsi dall'interazione tra i vari giocatori.

Cenni storici

Il primo predecessore della teoria dei giochi è stato l'analisi economica dei mercati competitivi, svolta dall'economista francese Augustin Cournot nel 1838 e ripresa in seguito dall'irlandese Francis Edgeworth; il lavoro è stato approfondito nei primi del '900 dal francese Bertrand e dal tedesco Stackelberg, che estese lo studio di Cournot alle decisioni sequenziali. Il modello introdotto da Cournot (trattato nei paragrafi 4.3 e 10.3) è tuttora utilizzato nell'analisi degli oligopoli.

Nel 1913 il matematico tedesco Ernst Zermelo, per mezzo del suo studio sul gioco degli scacchi, introdusse la tecnica dell'induzione a ritroso che viene definita ed applicata nel capitolo 7 e ripresa nel paragrafo 9.3.

Un ruolo determinante l'hanno avuto le pubblicazioni di John Von Neumann (1928) e il suo lavoro con Oskar Morgenstern, "Theory of Games & Economic Behavior" del 1944, in cui viene definito e formalizzato il concetto di gioco, vengono introdotti gli assiomi sull'utilità (paragrafo 1.2), viene curata la nozione di soluzione ottima ad un gioco a somma zero (capitolo 6) ed introdotta la teoria dei giochi cooperativi.

Il passo successivo è il concetto di soluzione e di equilibrio, sviluppato da John Nash nel 1950; il suo lavoro (discusso nel capitolo 4) trova applicazioni sia nei giochi a somma zero che nei giochi a somma non-zero. L'argomentazione di Nash e il suo contributo al precedente studio di Cournot gli sono valsi il Premio Nobel per l'Economia nel 1994, assieme a Reinhard Selten e John Harsanyi che generalizzarono l'idea di equilibrio di Nash ai giochi dinamici (paragrafo 9.3) e ai giochi ad informazione incompleta (capitolo 10).

CAPITOLO 1

Utilità

1.Giocatori

La teoria dei giochi è fondata sull'ipotesi che gli individui che interagiscono in un problema decisionale siano intelligenti e razionali.

Un individo è razionale se è in grado di ordinare le sue soggettive preferenze su un insieme di risultati, ovvero, date due opzioni a e b, il giocatore è sempre in grado di dire se per lui a è meglio di b ($a \succ b$), b è meglio di a ($b \succ a$), o se sono indifferenti ($a \sim b$). Queste preferenze devono soddisfare gli assiomi della razionalità di Von Neumann e Morgenstern (paragrafo 1.2)

Un individuo è razionale se può assegnare un valore di utilità ad ogni possibile risultato di una serie di decisioni presa dai vari giocatori, e se ha come obiettivo il massimizzare la propria utilità. Risulta necessario il concetto di "utilità attesa", che permette di associare un valore di utilità anche ad eventi aleatori di cui sia nota la distribuzione di probabilità.

Un individuo è intelligente se possiede la capacità di scegliere le azioni che permettono di massimizzare la propria utilità, ovvero se possiede la capacità di agire in modo razionale.

2.Assiomi

2.1.Decisione con certezza

Siano noti tre risultati, a, b e c, che rappresentino la totalità dei risultati possibili, la preferenza espressa dal giocatore deve:

- Soddisfare l'assioma di completezza, ovvero che o $a \succ b$, o $b \succ a$, oppure $a \sim b$; il giocatore quindi deve avere una preferenza tra i risultati
- Soddisfare l'assioma di transitività, ovvero che se $a \succ b$ e $b \succ c$, allora $a \succ c$

Sia nota una serie di risultati a_1, a_2, ... a_n e un valore b, se $a_i \succ b$ $\forall i$ e la serie converge ad a, allora $a \succ b$.

Un modo di assegnare delle utilità ai risultati è decidere un valore di origine e una scala; se un risultato è preferito ad un altro, allora la sua utilità dev'essere maggiore:

$a \succ b \Rightarrow u(a) > u(b)$. Tuttavia non è necessario che i valori di utilità seguano una scala, è sufficiente che essi seguano una funzione monotona crescente.

2.2.Decisione con incertezza

Se le alternative sono incerte, ovvero sono "lotterie", si ricorre al teorema di Von Neumann e Morgenstern sull'utilità attesa: la funzione di utilità di una lotteria può essere scritta come l'utilità attesa dei risultati che la compongono.

Supponendo una lotteria con n possibili risultati x_1 , x_2, ... x_n una lista di probabilità associate ad ogni risultato p_1, p_2, ... p_n il teorema asserisce che l'utilità della lotteria è uguale all'utilità attesa.

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \times u(x_i)$$

In aggiunta a completezza e transitività, il teorema di Von Neumann e Morgenstern richiede che la preferenza del giocatore soddisfi i seguenti assiomi:

- Monotonia: siano p e q probabilità e x_1 e x_2 i possibili risultati, $p \cdot u(x_1) + (1-p) \cdot u(x_2) \succ q \cdot u(x_1) + (1-q) \cdot u(x_2)$ se e solo se $p > q$
- Assioma di Archimede: per ogni risultato intermedio a ci deve essere una lotteria su x_1 e x_2 che sia indifferende ad a, ovvero che $u(a) \approx p \cdot u(x_1) + (1-p) \cdot u(x_2)$
- Sostituzionalità: per due lotterie A e B, con $A \approx B$, allora per tutte le lotterie C vale $pA + (1-p)C \approx pB + (1-p)C$
- Le lotterie composte sono equivalenti alle lotterie semplici con la stessa distribuzione di probabilità sui possibili risultati.

Il teorema conclude: sotto questi assiomi esiste una rappresentazione dell'utilità u su risultati certi, tale che la lotteria A è preferita alla lotteria B se e solo se l'utilità attesa della lotteria A è maggiore dell'utilità attesa della lotteria B.

CAPITOLO 2

Rappresentazione

1.Forma estesa

La forma estesa è una rappresentazione grafica delle regole. La forma grafica principale è l'"albero di gioco", costituito dalla radice e da rami ordinati.

Alla radice, il punto di partenza, uno dei giocatori fa la sua scelta; le scelte disponibili sono rappresentate dai rami. Al termine di un ramo, il grafico può terminare oppure si può dividere in ulteriori rami e dunque in una successiva scelta da parte del medesimo o di un altro giocatore.

Per rappresentare azioni simultanee dei giocatori, o quando le azioni vengono compiute successivamente ma senza conoscere la scelta dell'avversario, si racchiudono in un ovale i nodi decisionali interessati. L'insieme di questi nodi compongono un "information set". Tuttavia la forma estesa è utilizzata soprattutto per rappresentare giochi con decisioni sequenziali.

2.Forma strategica

Dati N giocatori, ogni giocatore i ha un insieme di possibili strategie $S^i = \{s_1^i, s_2^i, \dots s_{n_i}^i\}$.

Se ogni giocatore sceglie una strategia $s_k^i \in S^i$ si ottiene un profilo, ovvero una N-pla di strategie, a cui corrisponde un risultato. Ciascun giocatore ha delle preferenze sull'insieme dei risultati possibili, ovvero delle conseguenze dovute alle varie azioni compiute da tutti i giocatori; il fatto che l'interazione con gli altri giocatori non sia trascurabile è proprio ciò che distingue il gioco da un problema decisionale.

Un metodo alternativo per rappresentare le regole del gioco è la forma strategica, o forma normale. La rappresentazione in forma strategica consiste nella lista completa dei giocatori con le relative strategie disponibili e il payoff (utilità) che ogni azione comporta.

Ogni gioco a due giocatori può essere rappresentato in forma strategica con una tabella a doppia entrata, dove le righe rappresentano le strategie del primo giocatore e le colonne quelle del secondo; all'intersezione riga-colonna è presente la coppia dei payoff dei giocatori relativamente alle strategie scelte.

La forma strategica è utilizzata soprattutto per rappresentare giochi dove le decisioni sono simultanee.

3.Esempi

3.1.Dilemma del prigioniero

Giocatore 1/Giocatore 2	CONFESSARE	NON CONFESSARE
CONFESSARE	5,5	0,15
NON CONFESSARE	15,0	1,1

Due prigionieri sono in cella per essere sospettati di un crimine, vengono interrogati separatamente e avvisati che confessando entrambi rimarranno in prigione per 5 anni, se confessa solo uno dei due questo sarà libero, ma l'altro resterà in carcere 15 anni. Tuttavia se nessuno dei due confessasse, la pena sarebbe di un solo anno.

La rappresentazione precedente mette in evidenza gli anni di carcere, ma questi non possono essere considerati utilità in quanto al crescere della pena la situazione è meno preferibile; riorganizzando la tabella si ottiene la seguente rappresentazione strategica:

Giocatore 1/Giocatore 2	CONFESSARE (c)	NON CONFESSARE (n)
CONFESSARE (c)	0,0	7,-2
NON CONFESSARE (n)	-2,7	5,5

3.2.Votazioni

Con questo esempio la teoria dei giochi riesce ad illustrare il possibile vantaggio apportato da un voto strategico rispetto al voto secondo la propria preferenza. Si supponga la presenza di due liste, A e B, e tre elettori. Per prima cosa si vota tra A e B, dopodiché si vota la propria preferenza tra la lista vincente e lo status quo N; in ogni votazione passa la lista che ottiene più voti a favore. I tre elettori hanno le seguenti gerarchie di preferenza:

$1 \rightarrow A \succ N \succ B$; $\qquad 2 \rightarrow B \succ A \succ N$; $\qquad 3 \rightarrow N \succ A \succ B$

Si nota che, votando in maniera veritiera, A vincerebbe contro B e poi contro N; tuttavia il terzo elettore preferirebbe lo status quo e, semplicemente votando B al primo turno, farebbe rimanere in vigore la lista N. Ma se il secondo elettore prevedesse questa mossa, anch'egli potrebbe cambiare il suo primo voto in A, preferendola allo status quo.

C’è un metodo più sistematico di procedere con il ragionamento: l’analisi strategica. Per prima cosa si noti che, nella seconda sessione di voto, tutti gli elettori votano in maniera veritiera per massimizzare la propria utilità; dunque se il primo round viene vinto da A allora questo vincerà anche il secondo, se invece passasse B allora N rimarrebbe in vigore. Quindi votando tra A e B nella prima sessione, in realtà gli elettori stanno votando tra A e N; ciò comporta che gli elettori 1 e 2 voteranno A al primo ballottaggio e che A vincerà l’elezione.

3.3. Battaglia dei sessi

Marito e moglie hanno deciso di trascorrere la serata assieme: lui preferisce andare a vedere la partita, invece lei vuole andare a teatro; tuttavia entrambi preferiscono uscire assieme piuttosto che restare soli. Qui di seguito è riportata la rappresentazione strategica:

Lui/Lei	PARTITA (p)	TEATRO (t)
PARTITA (p)	3,1	0,0
TEATRO (t)	0,0	1,3

Questo gioco è spesso utilizzato per rappresentare un problema di coordinamento. Diversamente dal dilemma del prigioniero, dove i due giocatori potrebbero trovare una soluzione se solo potessero parlarsi e decidere di non confessare, qui non esiste una soluzione vantaggiosa per entrambi; tuttavia (p, p) e (t,t) sono ambedue soluzioni ragionevoli.

3.4. Gioco del “pollo”

Due contendenti si scontrano in una situazione conflittuale (per esempio una gara, oppure due animali che si contendono una preda). In quest’ultimo caso i due predatori possono essere aggressivi (a) o meno (comportamento del pollo - p). Se uno dei due è aggressivo e l’altro è pollo, il primo ha la meglio e ottiene la preda; se entrambi si comportano da pollo, possono spartirsi la preda; se invece adottano un comportamento aggressivo, rimarranno feriti.

Giocatore 1/Giocatore 2	AGGRESSIVO (a)	POLLO (p)
AGGRESSIVO (a)	-1,-1	10,0
POLLO (p)	0,10	5,5

CAPITOLO 3
Dominanza

1.Soluzione per strategia dominante

Partendo dalle ipotesi di razionalità e intelligenza dei giocatori, la soluzione di un gioco è la descrizione dei risultati che possono emergere.

Dato un gioco in forma strategica, dove un giocatore i ha due strategie s_k^i e s_h^i, sia s_{-i} un array contenente le strategie degli altri $N-1$ giocatori:

Una strategia s_k^i domina strettamente tutte le altre strategie del giocatore i se il payoff di s_k^i è strettamente maggiore del payoff di ogni altra strategia, indipendentemente dalla strategia scelta dagli altri giocatori. Indicando con π il payoff, calcolato per mezzo della funzione di utilità di Von Neumann e Morgenstern:

$$\pi_i(s_k^i, s_{-i}) > \pi_i(s_h^i, s_{-i}) \,,\ \forall s_h, s_{-i}$$

Una strategia s_k^i domina debolmente una strategia s_h^i se il suo payoff è almeno uguale al payoff della seconda contro qualsiasi strategia degli altri giocatori, e contro qualcuna è strettamente maggiore.

$$\pi_i(s_k^i, s_{-i}) \geq \pi_i(s_h^i, s_{-i}) \,,\ \forall s_{-i} \ \text{ e } \ \pi_i(s_k^i, \hat{s}_{-i}) > \pi_i(s_h^i, \hat{s}_{-i}) \text{, per qualche } \hat{s}_{-i}$$

Una strategia che domina, strettamente o debolmente, tutte le altre strategie si dice strettamente o debolmente dominante; se una strategia non è dominata da nessun’altra si dice “nondominata”. Se esiste, ci può essere al massimo una strategia strettamente dominante, mentre possono esistere più strategie debolmente dominanti. Se ogni giocatore ha una strategia dominante, allora il gioco ha una soluzione dominante.

2.Eliminazione iterata delle strategie dominate

2.1.Definizione e procedimento

Nel caso non fosse presente alcuna strategia dominante, risulta irrazionale per un giocatore ricorrere ad una strategia dominata; infatti il giocatore otterrebbe un payoff maggiore utilizzando una qualsiasi strategia che la domini strettamente. Questa logica si applica in una sorta di reazione a catena, infatti in un qualsiasi gioco dove i decisori sono razionali ed intelligenti, un giocatore sa che un altro non ricorrerà ad una strategia dominata e dunque non deve preoccuparsi di come le sue strategie possano rispondere se contrapposte ad una strategia dominata dell'avversario. Di conseguenza alcune strategie che dominerebbero delle strategie dominate dell'avversario si rivelano inutili, e dunque il contendente a sua volta sa che non dovrà preoccuparsi di queste ultime, e così via.

Il procedimento descritto si chiama "eliminazione iterata delle strategie dominate" (IEDS – Iterated Elimination of Dominated Strategies); se ricorrendo a questo svolgimento si giunge ad una singola coppia di strategie, queste sono la soluzione del gioco.

L'eliminazione iterata si può applicare a strategie sia strettamente che debolmente dominate, tuttavia il profilo che consegue alla IEDS relativa alle dominanza debole può dipendere dall'ordine in cui sono eliminate le strategie.

2.2.Esempio: Votazioni

Con riferimento all'esempio del sottoparagrafo 2.3.2, si denoti ogni strategia come composta da tre componenti: per esempio AAN significa $A \succ B$ al primo turno di votazioni, $A \succ N$ e $N \succ B$ al secondo. Per quanto concerne l'utilità, si supponga che se viene votata la lista preferita si abbia un payoff di 1, un payoff di 0 per la seconda scelta, altrimenti il giocatore avrà un'utilità pari a -1.

Si ricordi che, nel secondo turno di voto, votare in maniera veritiera è una strategia dominante, di conseguenza AAN domina ANN e ANB per il primo elettore, inoltre BAN domina BNN e BNB; XAB domina XNB, XNN e XAN per il secondo giocatore, dove X può essere A o B; per quanto riguarda il terzo, una votazione del tipo XNN domina le altre. Dopo aver eliminato le strategie dominate, la situazione si può rappresentare in forma strategica come segue:

1 / 2	AAB	BAB		1 / 2	AAB	BAB
AAN	1,0,0	1,0,0		AAN	1,0,0	0,-1,1
BAN	1,0,0	0,-1,1		BAN	0,-1,1	0,-1,1

$s^3 = (ANN)$ $s^3 = (BNN)$

Si evince che AAN domina BAN per il giocatore 1, così come AAB domina BAB per il secondo elettore e BNN domina ANN per il terzo. La soluzione per eliminazione iterata delle strategie dominate è quindi (AAN, AAB, BNN), che comporta una vittoria di A in entrambi i turni.

CAPITOLO 4

Equilibrio di Nash

1.Definizione

Per quanto concerne la teoria dei giochi non cooperativi, il concetto di soluzione più importante è l'"equilibrio di Nash"; esso consiste in una situazione stazionaria, nella quale nessun giocatore ha interessi nel cambiare la propria strategia.

Data una strategia $s \in S$ e una N-pla di strategie $s_1, s_{2,} ... s_N$, un profilo S è un equilibrio di Nash se $\pi^i(\bar{s}^i, \bar{s}_{-i}) \geq \pi^i(s^i, \bar{s}_{-i}) \quad \forall i, s^i \in S^i$, dove $\bar{s}_{-i}$ rappresenta le strategie degli altri $N-1$ giocatori.

Quindi se $\bar{s}$ è un equilibrio di Nash, ogni giocatore i preferisce l'azione $\bar{s}^i$, ipotizzando che gli altri $N-1$ giocatori giochino $\bar{s}^j$; dunque nessun giocatore ha motivo di cambiare profilo rispetto all'equilibrio.

Il concetto di equilibrio di Nash si può esprimere anche in un altro modo, ricorrendo alla nozione di "miglior risposta" (best response): una strategia $\bar{s}^i$ è una miglior risposta contro un array di strategie $\bar{s}_{-i}$ se $\pi^i(\bar{s}^i, \bar{s}_{-i}) \geq \pi^i(s^i, \bar{s}_{-i}) \quad \forall s^i$

L'equilibrio di Nash è quindi un profilo $\bar{s}$ tale che $\bar{s}^i \in B_i(s_{-i})$, dove $B_i(s_{-i})$ è l'insieme delle migliori risposte che il giocatore i può utilizzare contro la strategia s_{-i} scelta dagli altri giocatori.

La seguente proposizione generalizza la relazione tra equilibrio di Nash e eliminazione iterata delle strategie dominate: in un qualsiasi gioco dove esiste una soluzione IEDS, questo profilo sarà anche un equilibrio di Nash; tuttavia non tutti gli equilibri di Nash sono anche soluzioni ottenibili per mezzo dell'eliminazione iterata.

2.Esempi

<u>2.1.Dilemma del prigioniero</u>

Con riferimento alla rappresentazione strategica persente nel sottoparagrafo 2.3.1, è noto che "confessare" è una strategia dominante; ciò equivale a dire che la miglior risposta a qualsiasi strategia dell'avversario è "confessare". Dunque l'unico equilibrio di

Nash del dilemma del prigioniero è (confessare,confessare) che corrisponde appunto alla soluzione per mezzo della strategia dominante.

2.2.Battaglia dei sessi

Con riferimento alla rappresentazione strategica presente nel sottoparagrafo 2.3.3, la miglior risposta del marito ad una moglie che gioca la strategia "partita" è giocare anch'egli "partita"; quindi $B^1(p) = p$ e analogamente $B^1(t) = t$. Per quanto concerne la moglie valgono $B^2(p) = p$ e $B^2(t) = t$.

(p, p) risulta quindi un equilibrio di Nash in quanto $p = B^1(p)$ e $p = B^2(p)$; analogamente anche (t,t) è un equilibrio di Nash.

2.3.Gioco del "pollo"

1 / 2	a	p
a	x, x	10,0
p	0,10	5,5

Si consideri il problema del "pollo" del sottoparagrafo 2.3.4, dove l'utilità di (a,a) assume un valore x. Si supponga che $x < 0$, ovvero che sia dannoso giocare aggressivo se anche l'avversario utilizza la medesima strategia: sono presenti due equilibri di Nash, (a, p) e (p,a).

D'altro canto se $x > 0$, l'unico equilibrio di Nash per i contendenti è di giocare a per via del maggiore payoff.

3.Applicazione: Duopolio di Cournot

3.1.Struttura

Due aziende competono sul mercato per la vendita di due prodotti indistinguibili dal punto di vista del consumatore, quindi le due società hanno la medesima curva di domanda $Q = a + bP$, dove $a > 0$, $b > 0$ e $Q = Q_1 + Q_2$ è la quantità prodotta congiuntamente dai due giocatori. Il prezzo risulta quindi $P = \frac{a-Q}{b}$, che permette di semplificare l'espressione della domanda inversa, ponendo $\alpha = \frac{a}{b}$ e $\beta = \frac{1}{b}$, in $P = \alpha - \beta Q$.

Si supponga che la funzione di costo sia uguale per le due aziende e che il costo di produzione unitario sia costante (funzione di costo marginale costante, costo di produzione cQ_i, $c > 0$).

Ciascuna delle due società deve ipotizzare la produzione dell'altra e decidere di conseguenza la quantità da produrre.

3.2.Equilibrio di Cournot-Nash

Si analizzi inizialmente il punto di vista del giocatore 1: se chiedesse all'avversario il valore di Q_2' che sta per produrre, per massimizzare il proprio profitto dovrebbe risolvere $\max_{Q_1} [\alpha - \beta(Q_1 + Q_2')]Q_1 + cQ_1$.

Ponendo la derivata uguale a zero, si ottiene $\alpha - \beta Q_2' - c = 2\beta \overline{Q_1} \Rightarrow \overline{Q_1} = \frac{\alpha - \beta Q_2' - c}{2\beta}$; questo valore corrisponde alla miglior risposta per l'azienda 1 ad una strategia dell'avversario di produrre Q_2'. L'equazione permette di trovare una funzione di best response per una qualsiasi quantità Q_2 ipotizzata dalla prima azienda:

$$B^1(Q_2) = \begin{cases} Q_2 \leq \frac{\alpha - c}{\beta} \Rightarrow \frac{\alpha - \beta Q_2 - c}{2\beta} \\ Q_2 > \frac{\alpha - c}{\beta} \Rightarrow 0 \end{cases}$$

Trattandosi di un gioco simmetrico vale $B^2(Q_1) = \begin{cases} Q_1 \leq \frac{\alpha - c}{\beta} \Rightarrow \frac{\alpha - \beta Q_1 - c}{2\beta} \\ Q_1 > \frac{\alpha - c}{\beta} \Rightarrow 0 \end{cases}$

Mettendo a sistema le due best responses, si avrà una sola coppia di valori $(\overline{Q_1}, \overline{Q_2})$ per cui $B^1(\overline{Q_2}) = \overline{Q_1}$ e $B^2(\overline{Q_1}) = \overline{Q_2}$; questo profilo è l'equilibrio di Cournot-Nash, il quale implica $\overline{Q}_1 = \overline{Q}_2 = \frac{\alpha - c}{3\beta}$, $P = \frac{\alpha + 2c}{3}$ e un profitto per società pari a $\pi^i = \frac{(\alpha - c)^2}{9\beta}$

3.3.Cartello

Si supponga che le due aziende cooperino per mezzo di un accordo di cartello, ovvero che coordino le proprie decisioni in modo da massimizzare il profitto complessivo, cioè la somma dei profitti delle due aziende $\max_{Q_1,Q_2} [\alpha - \beta(Q_1 + Q_2)](Q_1 + Q_2) + c(Q_1 + Q_2)$.

Mentre nel problema di best response la singola società calcola il proprio profitto solamente sulla base della propria produttività, in questo caso il payoff finale dipende dalla produzione di entrambe. Derivando l'equazione precedente e ponendo Q_1' e Q_2' quantità prodotte dalle singole aziende nella soluzione di cartello, il seguente sistema va risolto

$\begin{cases} \alpha - 2\beta Q_1' - c = 2\beta Q_2' \\ \alpha - 2\beta Q_2' - c = 2\beta Q_1' \end{cases}$, intuitivamente si ottengono la quantità prodotta da ciascuna azienda $Q_1' = Q_2' \frac{\alpha - c}{4\beta}$, il prezzo $P = \frac{\alpha + c}{2}$ e il profitto per società pari a $\pi^i = \frac{(\alpha - c)^2}{8\beta}$.

Si evince che operando come cartello, le due aziende producono una quantità minore rispetto all'equilibrio di Nash ma hanno maggior profitto, perché in situazione di equilibrio producono più del necessario.

CAPITOLO 5

Strategie miste

1.Definizione

Non sempre esiste una soluzione costituita da strategie pure. Si supponga che un giocatore faccia una congettura sulla probabilità con cui il suo avversario giocherà le sue strategie; ovvero si supponga che assegni una probabilita p_j all'evento "il giocatore 2 sceglie la strategia t_j". Se il giocatore 1 gioca s_k^i, la sua utilità attesa sarà

$E\pi^1(s_k^i) = \sum_{j=1}^{m} p_j \pi^1(s_k^i, t_j)$, dove $E\pi$ rappresenta l'utilità attesa (expected utility).

Un giocatore, in quanto razionale, cerca di massimizzare l'utilità attesa, ovvero sceglie s_k tale che $E\pi(s_k) = \max_{i \in S} E\pi(s_k^i)$.

È necessario estendere la definizione di dominanza anche per le strategie miste: una strategia $s_k^i \in S^i$ si dice strettamente dominata se non esiste un array di probabilità, corrispondente alle scelte degli altri decisori, che massimizzi l'utilità attesa del giocatore i.

Va esteso anche il concetto di strategia: Sia S^i l'insieme delle strategie del giocatore, si definisce strategia mista per i una distribuzione di probabilità su tale insieme. Una strategia mista è dunque un array di probabilità $(p_1^i, p_2^i, ... p_{n_i}^i)$ sulle strategie che il giocatore può utilizzare.

Quindi la strategia mista si può interpretare come la frequenza con cui il giocatore utilizza le varie strategie pure. In definitiva una strategia s_k è dominata se, indipendentemente dalla strategia mista giocata dall'avversario, s_k non massimizza la sua utilità attesa.

2.Esempio: Battaglia dei sessi

Con riferimento alla rappresentazione in forma strategica presete nel sottoparagrafo 2.3.3, si consideri la situazione in cui il marito gioca p con probabilità $q = \frac{2}{3}$, mentre la moglie gioca la strategia pura p. Di conseguenza la probabilità che entrambi vadano alla partita è appunto q, mentre la probabilità che il marito vada da solo a teatro è $1-q=\frac{1}{3}$; queste due probabilità vanno moltiplicate per i rispettivi payoff così da ottenere l'utilità attesa:

$E\pi^1(q,p)=\frac{2}{3}\times 3+\frac{1}{3}\times 0=2$; se invece la moglie giocasse la strategia pura t, si avrebbe $E\pi^1(q,t)=\frac{2}{3}\times 0+\frac{1}{3}\times 1=\frac{1}{3}$.

Se anche la moglie giocasse una strategia mista, per esempio che scelga t con probabilità $\varphi=\frac{1}{2}$, la probabilità che entrambi vadano a vedere la partità è $\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$.

L'utilità attesa per il marito è quindi $E\pi^1(q,\varphi)=\frac{1}{3}\times 3+\frac{1}{6}\times 0+\frac{1}{3}\times 0+\frac{1}{6}\times 1=\frac{7}{6}$.

3.Conseguenze

L'utilità attesa di una strategia mista è semplicemente la media pesata dei payoffs delle strategie pure. Nel caso in cui le utilità di ogni singola strategia pura siano differenti, allora mantenendo solo le strategie pure con utilità maggiore aumenterà il valore della media pesata, ovvero aumenterà l'utilità attesa. Dunque, se s'^i e s''^i implicano un payoff maggiore contro $\bar{s}_{-i}$, allora una strategia mista composta solamente da queste due strategie implicherà un'utilità attesa maggiore di una strategia mista composta dall'array $\bar{s}_{-i}$.

Una strategia mista $(p_1^i, p_2^i, ... p_{n_i}^i)$ rappresenta una miglior risposta contro $\bar{s}_{-i}$ se e solo se ognuna delle singole strategie che la compongono è essa stessa una miglior risposta a $\bar{s}_{-i}$. In questo caso una qualsiasi strategia mista composta dal suddetto array costituirebbe una best response.

4.Dominanza

<u>4.1.Strategie miste possono dominare strategie pure</u>

1 / 2	a	b	c	d
α	1,0	4,2	2,4	3,1
β	2,4	2,0	2,2	2,1
γ	4,2	1,4	2,0	3,1

Riferendosi all'esempio, si consideri la strategia mista in cui il primo giocatore giochi α e γ con probabilità ½; giocando questa strategia, avrà un payoff maggiore o uguale a 2 (nel caso in cui il giocatore 2 utilizzi c). Inoltre se l'avversario gioca a o b, allora la strategia mista avrà un payoff di 2,5 o di 3 nel caso venga giocata d. D'altra parte, se il giocatore 1 giocasse la strategia pura β, otterrebbe sempre un'utilità pari a 2; dunque la strategia mista domina la strategia pura in quanto permette un payoff maggiore.

Per quanto concerne il giocatore 2 , è abbastanza immediato notare che la strategia mista composta da a, b e c con uguale probabilità, domina la strategia pura d.

Un primo motivo per giocare una strategia mista invece di una pura è quindi che la prima può dominare la seconda, anche se quest'ultima fosse nondominata dalle altre strategie pure.

Inoltre il peggiore payoff ottenibile con una strategia mista può essere migliore della peggior utilità di una strategia pura.

4.2.Strategie miste e IEDS

È necessario introdurre due concetti:

- Se c'è una strategia pura che domina tutte le altre, questa dominerà anche qualsiasi strategia mista
- Se non c'è nessuna strategia dominante tra le strategie pure, non ce ne sarà una nemmeno tra le strategie miste

Applicando il processo di eliminazione iterata delle strategie dominate all'esempio precedente, sappiamo che le strategie β e d sono dominate da strategie miste.

1 / 2	a	b	c
α	1,0	4,2	2,4
γ	4,2	1,4	2,0

Ora a risulta dominata da b e la sua rimozione comporta la dominazione di γ per il giocatore 1. Di conseguenza il giocatore 2 elimina b e la soluzione IEDS che si ottiene è (α,c).

In ogni caso, quando un gioco ha una soluzione IEDS tra le strategie pure, questa sarà lo stesso profilo che si otterrebbe per mezzo di una IEDS tra le strategie miste.

5.Equilibrio di Nash

5.1.Vantaggi

Non sempre esiste un equilibrio di Nash tra le strategie pure, come nell'esempio di testa o croce:

1 / 2	TESTA	CROCE
TESTA	1,-1	-1,1
CROCE	-1,1	1,-1

In questo gioco i due giocatori lanciano una moneta, se escono due teste o due croci ("matching pennies") allora il giocatore 2 cede un'unità di payoff al giocatore 1 (es.: 1€), altrimenti 1 la cederà a 2.

Si supponga ora che il giocatore utilizzi una strategia mista (t,c) dove gioca t con probabilità p e c con probabilità $1-p$; si ha che

$$E\pi(t) = p(-1)+(1-p)1 = 1-2p\ ,\ E\pi(c) = p(1)+(1-p)(-1) = 2p-1$$

Con p =½ entrambe le strategie hanno lo stesso payoff, quindi se il giocatore 1 utilizza $(t,\frac{1}{2})$ miglior risposta che il suo avversario può dare è giocare a sua volta $(t,\frac{1}{2})$; questa strategia mista è dunque un equilibrio di Nash.

Ecco che un altro svantaggio del limitarsi a giocare strategie pure è la possibilità di non trovare un equilibrio di Nash.

5.2.Condizioni di esistenza

Gli equilibri di Nash sono matematicamente definibili come punti fissi delle funzioni di best response; questi punti esistono solo in alcune tipologie di funzione.

Sia S un insieme, per avere un punto fisso è necessario che siano soddisfatte le seguenti condizioni:

- S è convesso e compatto
- La funzione di best response b è continua

Siano soddisfatte le suddette condizioni, data b funzione di best response, $\bar{s} \in S$, $b : S \mapsto S$. Esiste allora un punto fisso di b, ovvero $\exists \bar{s}$ tale che $b(\bar{s}) = \bar{s}$.

Nel caso in cui un giocatore abbia diverse best responses possibili, l'equilibrio è possibile nei punti fissi di funzioni dette "multivalore" definite come segue: una funzione $f(s)$ è una funzione multivalore convessa se per qualche $s \in S$ variabile indipendente, si ha un insieme di variabili dipendenti $f(s)$.

Sia S un insieme convesso e compatto e f un funzione multivalore convessa e continua con dominio in S; esiste allora un punto disso di f ovvero $\exists \bar{s}$ tale che $\bar{s} \in f(\bar{s})$.

Questi due lemmi danno validità al teorema di Nash, il cui enunciato è il seguente:

Supposto un gioco con un numero limitato di strategie per ogni giocatore, esiste almeno un equilibrio di Nash.

La dimostrazione è abbastanza intuitiva: considerando le strategie miste di un giocatore, queste sono caratterizzate da una probabilità $p \in [0,1]$ che è appunto un insieme convesso e compatto. Inoltre la funzione di best response è una funzione multivalore convessa: infatti, date due best responses, ogni insieme convesso che abbia queste come estremi è a sua volta una best response; inoltre la singola funzione di best response è un particolare tipo di funzione multivalore convessa, caratterizzata da un solo valore. Di conseguenza esistono punti fissi della funzione e, infine, esistono equilibri di Nash.

CAPITOLO 6
Giochi a somma zero

1.Definizione

Un gioco a somma zero è un gioco strettamente competitivo in cui sono presenti solo due giocatori; un risultato positivo per un giocatore ne implica necessariamente uno negativo per l'altro. Date due strategie a e b, si ha che $a \succ_1 b$ se e solo se $a \prec_2 b$; si parla di giochi "a somma zero" perché la somma delle utilità dei due giocatori dà appunto zero, in quanto si può assumere che $\pi^1(a) = -\pi^2(a)$, ovvero che la somma "vinta" da un giocatore sia stata "persa" dall'altro. In relatà non è necessario che la somma dia zero, è sufficiente che sia una costante; in questo caso si parla di giochi "a somma costante", ma sono immediatamente riconducibili a giochi a somma zero semplicemente sottraendo la costante da tutti i payoffs.

In questa tipologia di giochi, la rappresentazione in forma strategica viene semplificata e per ogni coppia di azioni (s^1, s^2) viene indicata l'utilità di uno solo dei due giocatori, essendo l'altra il suo opposto.

2.Maxmin

2.1.Definizione

Se un giocatore adotta un atteggiamento di tipo pessimistico, egli suppone che giocando una strategia $s^1 \in S^1$ l'avversario utilizzi sempre la best response $s^2 = B(s^1)$, ovvero l'azione più dannosa per il primo e quindi più vantaggiosa per il secondo.

$$\pi^1(s^1, B(s^1)) = \min_{s^2 \in S^2} \pi^1(s^1, s^2)$$

Risulta quindi conveniente giocare la strategia che massimizzi il peggior payoff possibile, ovvero scegliere l'azione $\tilde{s}$ tale che $\min_{s^2 \in S^2} \pi^1(\tilde{s}^1, s^2) = \max_{s^1 \in S^1} \{\min_{s^2 \in S^2} \pi^1(s^1, s^2)\}$.

Essendo la strategia $\tilde{s}^1$ quella in grado di massimizzare il minimo risultato garantito, prende il nome di "maximinimizer" per il giocatore 1; un discorso analogo vale per $\tilde{s}^2$ maximinimzer per il giocatore 2.

Dal fatto che il gioco è a somma zero, e quindi $\pi^2(s^1,s^2) = -\pi^1(s^1,s^2)$, vale il seguente lemma: dato un gioco a somma zero dove S^1 e S^2 sono i set di azioni disponibili ai due giocatori, si ha

$$\max_{s^2 \in S^2} \min_{s^1 \in S^1} \pi^2(s^1,s^2) = -\min_{s^2 \in S^2} \max_{s^1 \in S^1} \pi^1(s^1,s^2)$$

e massimo a sinistra e minimo a destra si ottengono per lo stesso $\tilde{s}^2$.

2.2.Equilibrio di Nash

In questo paragrafo vengono enunciate le condizioni necessarie per cui un gioco a somma zero ammetta un equilibrio di Nash.

Dato un gioco a somma zero, se $(\tilde{s}^1\tilde{s}^2)$ è un equilibrio di Nash, allora $\tilde{s}^1$ è maximinimizer per il giocatore 1 e $\tilde{s}^2$ lo è per suo avversario; si ha $\max_{s^1} \min_{s^2} \pi^1(s^1,s^2) = \min_{s^2} \max_{s^1} \pi^1(s^1,s^2) = \pi^1(\tilde{s}^1,\tilde{s}^2)$. Dunque se esistono più equilibri di Nash, questi avranno tutti lo stesso payoff.

Se, in un gioco a somma zero che ammette equilibri di Nash, $\tilde{s}^1$ e $\tilde{s}^2$ sono maximinimizer rispettivamente per il giocatore 1 e per il giocatore 2, allora $(\tilde{s}^1,\tilde{s}^2)$ è un equilibrio di Nash.

2.3.Strategie miste

Si consideri l'esempio "testa o croce": è intuitivo evincere che, per il giocatore 1, l'utilità di maxmin tra le strategie pure vale -1, ovvero nei profili (t,c) e (c,t).

Si supponga ora che il giocatore 1 utilizzi strategie miste, si indichi con p la probabilità con cui egli gioca t. Se il suo avversario gioca t, l'utilità attesa vale $E\pi^1 = 2p-1$; altrimenti $E\pi^1 = 1-2p$,

L'utilità di maxmin per la strategia mista è quindi 0 nel punto $p = \frac{1}{2}$ ed è maggiore dell'utilità di maxmin per la strategia pura.

3.Minmax

3.1.Definizione

Invece di giocare per guardarsi dall'ottenere i peggiori payoff, il giocatore può giocare in maniera più ottimista cercando di predire le strategie avversarie e utilizzando le rispettive best responses. Questo concetto viene detto "minmax" e corrisponde al peggior payoff tra le best responses: sia $E\pi^1(s^1, p)$ l'utilità attesa del giocatore che utilizza la strategia pura s^1 contro una strategia mista p, in "testa o croce" (sottoparagrafo 5.5.1).

È intuitivo dire che, nel caso il giocatore 2 utilizzi una strategia pura, l'utilità del minmax per il giocatore 1 sarebbe 1; se l'avversario invece gioca una strategia mista, per esempio gioca t con probabilità p, allora $E\pi^1(t) = 2p - 1$ e $E\pi^1(c) = 1 - 2p$. Il massimo di queste utilità attese si ha per $p = \frac{1}{2}$, che comprta un payoff pari a 0.

3.2.Generalizzazione

L'utilità di minmax di un giocatore è maggiore o uguale della propria utilità di maxmin, sia per le strategie pure che per le strategie miste: $\pi^i(\min\max) \geq \pi^i(\max\min)$.

L'utilità di minmax di un giocatore è l'inverso dell'utilità di maxmin dell'avversario: $\pi^i(\min\max) = -\pi^j(\max\min)$.

CAPITOLO 7

Induzione a ritroso

1.Forma estesa

Richiamando la forma estesa ad albero per rappresentare un gioco, i rami e i nodi devono rispettare tre condizioni di esistenza:

- Il punto di partenza deve essere unico
- Non devono essere presenti cicli
- Più rami non possono convergere allo stesso nodo.

Si introduce il concetto di “predecessore”: i predecessori di un nodo sono quei nodi che, seguendo una sequenza di rami, permettono di raggiungere il nodo in oggetto. Questo comporta alcune restrizioni che permettano di garantire le condizioni di esistenza precedenti:

- Un nodo non può essere il predecessore di sé stesso
- Il predecessore del predecessore è a sua volta un predecessore
- I predecessori si possono ordinare: se due nodi a e b sono entrambi predecessori di un terzo nodo, o a è predecessore di b o viceversa
- Deve esserci un predecessore comune, se tra due nodi a e b nessuno è predecessore dell’altro, allora è presente un terzo nodo predecessore di entrambi.

Si definisce “gioco ad informazione perfetta” un gioco dove non sono presenti information sets, quindi senza decisioni simultanee.

2.Induzione a ritroso (backward induction)

Si supponga un gioco all’ultimo nodo decisionale, la scelta fatta dal giocatore termina il gioco; l’unica scelta ragionevole è quella di massimizzare l’utilità.

Si supponga ora di essere al penultimo nodo decisionale. Il decisore è a conoscenza dell’esatta conseguenza della sua scelta, in quanto sa quale sarà la scelta successiva (ovvero l’ultimo nodo decisionale).

Mediante lo stesso procedimento, al terzultimo nodo decisionale, il giocatore sa qual è la miglior scelta perché è a conoscenza delle scelte successive che gli permettano di massimizzare il payoff. Questo procedimento è appunto l’induzione a ritroso, un processo che funziona finché c’è un ultimo nodo decisionale da cui partire.

L'induzione a ritroso in forma estensiva è quindi analoga alla soluzione per eliminazione iterata delle strategie dominate nella forma strategica; prendere la miglior decisione all'ultimo nodo di una rappresentazione estesa significa eliminare le strategie che non comportano il payoff migliore, ovvero operare secondo il processo di IEDS (descritto nel paragrafo 3.2).

Al penultimo nodo decisionale, è nota la miglior decisione possibile in quanto si conoscono le scelte che si farebbero all'ultimo nodo; dunque vengono eliminate tutte le strategie che non comportino la miglior decisione al penultimo nodo, e così via.

3.Esempio applicativo: corsa al brevetto

3.1.Descrizione del problema

In questo paragrafo viene applicata la teoria dei giochi in un problema di ricerca e sviluppo, nello specifico la "corsa al brevetto". Per semplificare l'analisi si supponga che ci siano due giocatori (azienda 1 e azienda 2, tuttavia il problema si può applicare ad n aziende), i quali possono avanzare con lo sviluppo del prodotto di 1 periodo (al costo di 2mln), di 2 periodi (7mln) o di 3 periodi (15mln). Alla prima azienda che completa lo sviluppo, viene assegnato un brevetto del valore di 20mln.

Si assume inoltre che le due aziende facciano revisioni periodiche sull'avanzamento del progetto, dopo le quali viene decisa la strategia da intraprendere; in questo modo si ha un gioco ad informazione perfetta, che può essere rappresentato sia in forma estesa che su un piano cartesiano.

Si denoti con a il numero di periodi rimanenti prima che l'azienda A completi lo sviluppo del prodotto, analogamente si indichi con b i periodi mancanti al completamento del progetto da parte dell'azienda B. Il gioco viene risolto per mezzo dell'induzione a ritroso, la quale permette di dimostrare che è sempre presente una miglior decisione che l'azienda può prendere in un determinato periodo.

3.2.Passo I, ultimo stadio

In un primo momento si supponga che la situazione sia $(1,b)$ e che sia il turno di A: ovviamente la miglior strategia adottabile è quella di raggiungere il brevetto di 20mln spendendo i 2mln necessari per la ricerca e lo sviluppo; analogamente se la situazione iniziale fosse $(a,1)$ la soluzione sarebbe speculare.

Si supponga ora di trovarsi nella situazione (2,1) o (3,1) e che sia il turno di A che può quindi completare lo sviluppo in una sola mossa ottenendo un payoff rispettivamente di

13mln o 5mln. Se A non completasse il progetto, questo verrebbe portato a termine da B al turno successivo e quindi A avrebbe un payoff minore o uguale a zero. La miglior strategia da adottare per A è dunque quella di portare a termine il progetto investendo i 7mln o 15mln necessari per raggiungere il brevetto. Chiaramente si procede in maniera analoga se la situazione fosse (1,2) o (1,3); lo stesso ragionamento è valido per le situazioni (3,2) e (2,3). Per quanto concerne (1,1), (2,2) e (3,3), la prima azienda a decidere avrà come miglior strategia quella di portare a termine lo sviluppo del prodotto e quindi ottenere il brevetto.

Si conclude dunque che in una situazione (a,b), dove $a \leq 3$ e $b \leq 3$, l'azienda che decide per prima completerà il progetto in un solo turno. Quest'area rappresentata su un piano cartesiano viene denominata "Trigger Zone I".

3.3.Passo II, penultimo stadio

Ora che è noto cosa succede all'ultimo stadio del gioco, per induzione è possibile studiare il penultimo stadio. Si supponga che la situazione sia (4,3): l'azienda A può avanzare lo sviluppo fino a (3,3), (2,3) o (1,3) ma sa che B finirà il progetto al turno seguente. La strategia migliore che A può adottare è quella di abbandonare la gara; in questo modo B non avrà rivali nella corsa al brevetto e sceglierà la soluzione più economica per portare a termine il prodotto, ovvero investirà 2mln in ogni periodo e otterrà un'utilità finale di 14mln. È evidente che lo stesso principio vale per le situazioni (4,1), (4,2), (5,1), (5,2) e (5,3).

In definitiva in una situazione del tipo (a,b) con $a > 3$ e $b \leq 3$, la strategia migliore per A è quella di abbandonare la corsa al brevetto e per B è di sviluppare per un periodo alla volta. Quest'area rappresentata su un piano cartesiano viene denominata "Zona di sicurezza I per B". Essendo questo un gioco simmetrico, esiste una "Zona di sicurezza I per A" in un profilo (a,b) con $a \leq 3$ e $b > 3$.

3.4.Passo III, induzione a ritroso

Si supponga di essere in una situazione (4,4) e che sia il turno di A: questa può entrare nella propria zona di sicurezza al costo di 2mln e di conseguenza B abbandonerebbe, permettendo ad A di terminare il progetto in 3 ulteriori periodi al costo di 6mln, implicando un payoff complessivo di 12mln. Più in generale risulta vantaggioso per A raggiungere la propria zona di sicurezza purché il costo complessivo per raggiungerle e poi portare a termine lo sviluppo un periodo alla volta, non superi il valore del brevetto; essendo un gioco simmetrico si applica un ragionamento analogo per l'azienda B.

Ciò risulta vantaggioso anche partendo da una situazione iniziale di (4,5),(5,4) o (5,5); è quindi presente una seconda Trigger Zone tra (3,3) e (5,5), dove il primo a giocare fa in modo di entrare nella rispettiva zona di sicurezza. È presente inoltre un'altra coppia di zone di sicurezza per $3 \leq a \leq 5$ e $b > 5$, simmetricamente anche per $3 \leq b \leq 5$ e $a > 5$; analogamente se un'azienda si trova nella propria seconda zona di sicurezza, l'altra abbandonerà la corsa al brevetto.

Ricapitolando, se A si trova in una qualsiasi zona di sicurezza di B, la miglior soluzione che può adottare è di abbandonare la corsa al brevetto e l'azienda B completerà lo sviluppo un periodo alla volta, minimizzando le spese. Se la situzione è in una qualsiasi Trigger Zone, ciascuna azienda investe il possibile per portarsi nella propria zona di sicurezza.

3.4.Generalizzazioni

I costi irrecuperabili, ovvero quelli già sostenuti per raggiungere una situazione (a,b), sono totalmente irrilevanti nella conclusione del gioco a partire da (a,b); indipendentemente dalla spesa già sostenuta dall'azienda, questà è disponbile ad investire ulteriormente una cifra minore o uguale del costo del brevetto pur di assicurarselo.

Se i costi per la ricerca e lo sviluppo fossero diversi tra A e B, cambiano solamente forma e dimensione delle Trigger Zone e delle zone di sicurezza, che diventano specifiche dell'azienda. Inoltre all'aumentare del valore del brevetto e al diminuire dei costi di ricerca e sviluppo, aumentano le dimensioni delle Trigger Zones.

Se una delle due aziende preferisse i profitti immediati agli introiti futuri, essa sceglierebbe sviluppi rapidi (e più costosi) anche se non si trovasse in zone di competizione; in aggiunta il comportamento può anche dipendere dal fattore di sconto (paragrafo 8.2).

CAPITOLO 8
Giochi ripetuti

1.Numero finito di ripetizioni

Si definisce “subgame” una parte dell’intero gioco che si possa considerare essa stessa un gioco a sé, contenente tutte le conseguenze future e tutte le informazioni necessarie per essere giocato.

Un gioco ripetuto è un gioco in cui lo stesso subgame viene eseguito più volte, la parte ripetuta prende il nome di “stage game” e il payoff è la somma dei payoffs di ogni stage game.

La differenza fondamentale nella ripetizione finita di uno stage game, a seconda che esso abbia uno o più equilibri di Nash, sta nella soluzione. Nel caso in cui l’equilibrio sia unico, ci sarà un solo equilibrio possibile nel subgame, ovvero giocare l’equilibrio di Nash ripetutamente e indipendentemente dal numero di iterazioni.

Se sono presenti più equilibri di Nash, si presenta la possbilità di raggiungere l’equilibrio di Nash migliore (e quindi un maggiore payoff futuro) rispetto a un comportamento opportunista tenuto agli stadi iniziali del gioco che potrebbe comportare un peggior equilibrio futuro.

2.Numero infinito di ripetizioni

Un payoff immediato ha un valore maggiore di un payoff futuro, a parità di utilità; in particolare si introduce il concetto di sconto δ (discount factor), considerato come fattore per portare un payoff futuro al suo valore attuale. In particolare il payoff tra due stages viene scontato di δ^2, tra tre stages di δ^3 e così via:

$\pi_0^i + \delta\pi_1^i + \delta^2\pi_2^i + ... + \delta^T\pi_T^i$, ovvero $\sum_{t=0}^{T} \delta^t \pi_t^i$, dove t indica il numero di iterazione.

Questa sommatoria non può divergere a $\pm\infty$ e, se i payoff sono costanti in ogni t, $\pi^i = \dfrac{\pi_t^i}{1-\delta}$.

3.Trigger strategies

3.1.Grim trigger

Se nel dilemma del prigioniero entrambi i giocatori continuano a giocare (n,n), ma nel momento in cui uno dei due confessa essi giocano (c,c) da quel momento in avanti, si è adottata una strategia chiamata “grim trigger”. Consiste nel passaggio ad una fase di “punizione eterna” qualora uno dei giocatori cerchi di massimizzare il proprio profitto giocando c contro n.

Fintanto che il profilo è (n,n), il payoff è pari a $\pi^i = \frac{5}{1-\delta}$, ovvero conviene continuare a giocare in questo modo finché $\frac{5}{1-\delta} > 7$, ovvero finché $\delta > \frac{2}{7}$.

Nel momento in cui un giocatore cerchi di aumentare la propria utilità giocando c, scatta il “grim trigger” e si entra nella fase di punizione dove entrambi avranno un payoff di 0, ovvero un guadagno mancato pari a $\frac{5\delta}{1-\delta}$; si dice quindi che il “grim trigger” è un deterrente efficace se lo sconto è alto.

3.2.Forgiving trigger

Se nel dilemma del prigioniero entrambi i giocatori continuano a giocare (n,n), ma nel momento in cui uno dei due confessa essi giocano (c,c) per i successivi τ turni per poi ritornare a (n,n) fino a che uno dei due giocatori torna a confessare, comportando altri τ turni di forgiving trigger.

Giocando c invece di n, il giocatore ha un payoff di 7, seguito da τ stages con payoff 0 e, una volta tornati al profilo (n,n), una serie infinita di payoff 5. Quindi il payoff complessivo vale $\pi^i = 7 + \delta^{\tau+1}\sum_{t=0}^{+\infty} 5\delta^t = 7 + \frac{5\delta^{\tau+1}}{1-\delta}$ mentre rimanendo nella strategia (n,n) si avrebbe un continuo payoff di 5 in ogni stage, ovvero $\pi^i = \frac{5}{1-\delta}$

In questo caso il trigger è un deterrente credibile se $\frac{5}{1-\delta} > 7 + \frac{5\delta^{\tau+1}}{1-\delta}$, vale a dire se

$$\frac{5(1-\delta^{\tau+1})}{1-\delta} > 7$$

Se δ tende a 1, dal teorema di de l'Hôpital, la parte a sinistra della disuguaglianza tende a $5(\tau+1)$; questo significa che per δ vicino a 1, anche un forgiving trigger di un solo stage è sufficiente.

4.Folk Theorem

Il folk theorem tratta un risultato generale riguardo l'equilibrio dei subgame nei giochi con ripetizioni infinite; risulta necessario introdurre il concetto di ciclo comportamentale come ciclo di strategie utilizzate. Facendo riferimento all'esempio del Dilemma del Prigioniero, il ciclo conportamentale è definibile come τ_1 stages in cui viene giocato (c,c), τ_2 stages con profilo (c,n), τ_3 con (n,c) e τ_4 con (n,n); al termine di queste quattro tipologie di stage, il ciclo si ripete (si noti che i τ_i valgono zero se il profilo non viene utilizzato). Si dice che un ciclo comportamentale è "individualmente razionale" se ogni giocatore ottiene un'utilità positiva mediante il ciclo.

Equilibrio comportamentale: si consideri ogni ciclo comportamentale individualmente razionale; questo ciclo è ottenibile giocando l'equilibrio del subgame ogniqualvolta il valore dello sconto δ tenda a 1.

Strategia di equilibrio: una strategia che costituisce un equilibrio è il grim trigger. Si inizi con il ciclo comportamentale; nel momento in cui uno dei due giocatori devii dalla routine, allora si giochi (c,c) in tutti i periodi successivi.

CAPITOLO 9

I beni comuni

1.Definizione

Una risorsa di proprietà comune, come le acque internazionali o l'ambiente stesso, per essere definita tale deve soddisfare dei criteri: dev'essere accessibile da tutti, è impossibile (ambiente) o non desiderabile (parchi naturali) restringere l'accesso; è un bene esauribile, ovvero tanti più utenti la utilizzano e tanto più intensamente la sfruttano, meno ne sarà disponibile in futuro. Nel caso ci fosse sovrasfruttamento, in futuro ci si troverebbe in una situazione di "tragedia dei beni comuni".

Si introduca questo semplice esempio: due giocatori possono estrarre una quantità negativa c_1 o c_2 da una risorsa comune di grandezza $g \geq 0$, con $c_1 + c_2 \leq g$. Partendo dal semplice caso in cui vi siano solo due periodi, dopo il primo le risorse rimanenti saranno $g-(c_1+c_2)$; non essendoci periodi successivi al secondo i due giocatori estraggono tutto il rimanente, ottenendo $\frac{g-(c_1+c_2)}{2}$ ognuno.

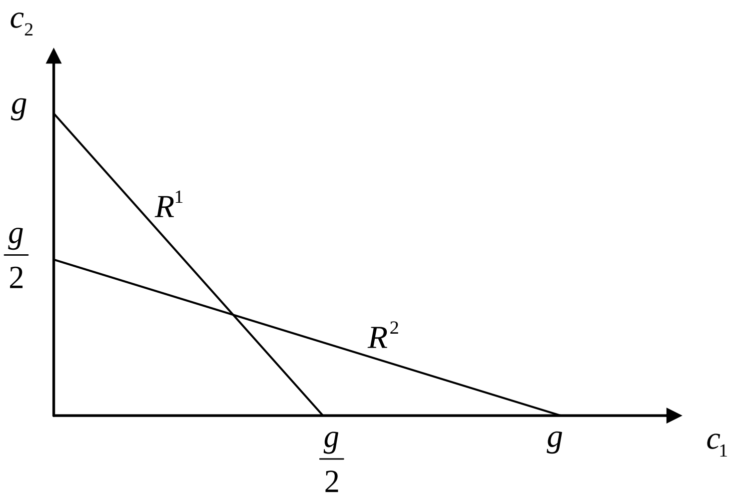
Si supponga ora che l'utilità del giocatore 1 sia $\log c_1$ (valido per qualsiasi funzione concava). Per determinare quanto estrarre nel secondo periodo deve ipotizzare il valore di c_2, nonché risolvere il seguente problema di best response

$\max_{c_1} \log c_1 + \log \frac{g-(c_1+\tilde{c}_2)}{2}$, dove $\tilde{c}_2$ è il valore ipotizzato dal giocatore 1 riguardante l'estrazione effettuata nel primo periodo dall'altro giocatore. La reazione del giocatore 1 si ricava ponendo la derivata uguale a zero, ovvero

$$\frac{1}{c_1} = \frac{1}{g-(c_1+\tilde{c}_2)} \Rightarrow c_1 = g(c_1+\tilde{c}_2) \Rightarrow R^1(c_2) = \frac{g-c_2}{2}$$

Analogamente $R^2(c_1) = \frac{g-c_1}{2}$.

Le due best responses sono mostrate in figura, l'equilibrio di Nash si ha nella situazione in cui $R^1(\bar{c}_2) = \bar{c}_2$ e $R^2(\bar{c}_1) = \bar{c}_1$. Sostituendo nelle funzioni di reazione appena calcolate si ha che $\bar{c}_1 = \bar{c}_2 = \frac{g}{3}$. Dunque nel primo periodo ogni giocatore estrae $\frac{g}{3}$ lasciando altri $\frac{g}{3}$ disponibili, che vengono poi divisi nel secondo periodo; il payoff di ciascun giocatore sarà quindi $\log\frac{g}{3}+\log\frac{g}{6}$.



2.Ottimo sociale

Per verificare se queste strategie costituiscono o meno una tragedia dei beni comuni, è necessario ricavare l'ottimo sociale. Si definisce ottimo sociale l'insieme di profili che massimizzano l'utilità aggregata, ovvero i valori $\hat{c}_1$ e $\hat{c}_2$ che massimizzano la somma delle utilità dei due giocatori e quindi risolvono

$\max_{c_1,c_2} \log c_1 + \log c_2 + 2\log\frac{g-(c_1+c_2)}{2}$, che risolta dà $\hat{c}_1 = \hat{c}_2 = \frac{g}{4}$.

Si nota che, in contrasto con l'equilibrio di Nash, vengono utilizzate meno risorse nel primo periodo; nel caso precedente c'è quindi sovrasfruttamento e dunque una tragedia dei beni comuni. Questo succede perchè se un giocatore evita di estrarre un'unità nel primo periodo, solo metà gli sarà disponibile nel secondo periodo in quanto l'altra metà viene estratta dal secondo giocatore; il primo e di conseguenza il secondo tenderano ad eccedere nell'estrazione, cosa che non succede in situazione di ottimo sociale perché si tiene conto dell'utilità congiunta dei due giocatori: un'unità non estratta nel periodo 1 resta interamente disponibile nel secondo periodo.

Al crescere del numero di giocatori, il problema della tragedia dei beni comuni peggiora; questo perché se un giocatore evita di estrarre un'unità, nel periodo successivo solo solo una minima frazione gli sarà disponibile rendendo ancora meno appetibile l'opzione di consumare meno. Se il giocatore supponesse che il resto della popolazione, composta da N decisori, consumi $\tilde{c}$ nel primo periodo, allora il suo ottimo si avrà per

$$\max \log c_1 + \log \frac{g - \left[c_1 + (N-1)\tilde{c}\right]}{N} \Rightarrow \frac{1}{c_1} = \frac{1}{g - \left[c_1 + (N-1)\tilde{c}\right]} \Rightarrow c_1 = c_2 = ... = c_N = \frac{g}{N+1}$$

è il consumo di ogni singolo giocatore all'equilibrio. Il consumo totale in condizioni di equilibrio di Nash è dunque $\frac{N}{N+1}g$, nel secondo periodo rimane quindi disponibile $\frac{g}{N+1}$. Al crescere di N, una quantità sempre più piccola di risorse raggiunge il secondo periodo, accentuando maggiormente la tragedia dei beni comuni.

3.Giochi ripetuti

I giochi ripetuti nell'ambito del problema dei beni comuni vengono detti anche giochi dinamici, in quanto cambiano sia le strategie dei giocatori che l'ambiente, che consiste nel problema alla base del gioco. Questo può cambiare di periodo in periodo, e quindi condizionare i payoffs dello stage game, sia per le azioni compiute dai giocatori che per agenti esterni.

In un qualsiasi periodo t l'ambiente ha dimensione g_t ed è accessibile ad ogni giocatore i; l'estrazione del singolo giocatore è $c_i^t \geq 0$ e chiaramente vale il limite $c_1^t + c_2^t \leq g_t$. La quantità non estratta $x_t = g_t - (c_1^t + c_2^t)$ è l'investimento che può creare crescita futura, vale $x_t \geq 0$. Nel caso di risorse esauribili senza possibilità di crescita $g_{t+1} = x_t$, per fonti rinnovabili invece $g_{t+1} > x_t$.

Si supponga che le funzioni di utilità siano logaritmiche ($\pi^i = \log c_i$), quindi il payoff continua ad aumentare ma in misura sempre minore; si supponga ancora che la risorsa rinnovabile si rigeneri secondo la funzione concava $g_{t+1} = 10\sqrt{x_t}$.

3.1.Ottimo sociale

Per trovare l'ottimo sociale di questo problema, è necessario risolvere:

$$\max_{c_1+c_2 \leq g} \log c_1 + \log c_2 = \max_{c_1} \log c_1 + \log(g - c_1) \Rightarrow \frac{1}{c_1} = \frac{1}{g - c_1} \Rightarrow c_1 = c_2 = \frac{g}{2}$$

Questo implica un payoff di $\pi_1^i = \log\frac{g}{2} = \log g - \log 2$. Procedendo per induzione a ritroso, a due periodi dalla fine è necessario risolvere:

$$\max_{c_1+c_2\le g} \log c_1 + \log c_2 + 2\delta\log(10\sqrt{g-c_1-c_2}) = \max_{c_1+c_2\le g} \log c_1 + \log c_2 + \delta\log(g-c_1-c_2)$$ in cui sono state soppresse le costanti log10 e log2 in quanto non influenzano la scelta. Il risultato è massimizzato per $\frac{1}{c_1} = \frac{1}{c_2} = \frac{\delta}{g-c_1-c_2} \Rightarrow c_i = \frac{\frac{g}{2}}{1+\frac{\delta}{2}} \Rightarrow \pi_2^i = \left(1+\frac{\delta}{2}\right)\log g + k$,

dove k è una costante che può essere soppressa.

Se torniamo un periodo indietro sempre per mezzo dell'induzione a ritroso:

$$\max_{c_1+c_2\le g} \log c_1 + \log c_2 + \delta\left(1+\frac{\delta}{2}\right)\log(g-c_1-c_2) \Rightarrow \frac{1}{c_1} = \frac{1}{c_2} = \frac{\delta\left(1+\frac{\delta}{2}\right)}{g-c_1-c_2} \Rightarrow c_i = \frac{\frac{g}{2}}{1+\frac{\delta}{2}+\frac{\delta^2}{4}}$$

$\Rightarrow \pi_3^i = \left(1+\frac{\delta}{2}+\frac{\delta^2}{4}\right)\log g + k$, dove k è nuovamente una costante che può essere soppressa.

È possibile congetturare che, nel periodo t, $c_i = \frac{\frac{g}{2}}{1+\frac{\delta}{2}+\frac{\delta^2}{4}+\ldots+\left(\frac{\delta}{2}\right)^{t-1}}$; la serie al denominatore tende a $\frac{1}{1-\frac{\delta}{2}}$ quindi si può asserire che $c_i(g) = \frac{1-\frac{\delta}{2}}{2}g$ e che quindi la frazione investita per ottimizzare vale $x(g) = \frac{\delta}{2}g$.

3.2.Equilibrio

Come l'ottimo sociale anche l'equilibrio si risolve per mezzo dell'induzione a ritroso. Supponendo che nell'ultimo periodo le risorse siano g , entrambi i giocatori estrarranno

$\frac{g}{2}$ con un utilità pari a $\pi_1^i = \log\frac{g}{2} = \log g - \log 2$. Nel periodo precedente il giocatore 1 deve risolvere il seguente problema di best response:

$\max_{c_1 \le (1-\varphi)g} \log c_1 + \delta\pi_1^1\left(10\sqrt{g - c_1 - \varphi g}\right)$, dove φ è la frazione che ci si aspetta che il giocatore 2 estragga nel primo periodo. Il problema si può riscrivere come segue:

$\max_{c_1 \le (1-\varphi)g} \log c_1 + \frac{\delta}{2}\log[(1-\varphi)g - c_1] \Rightarrow \frac{1}{c_1} = \frac{\frac{\delta}{2}}{(1-\varphi)g - c_1} \Rightarrow \left(1+\frac{\delta}{2}\right)c_1 = (1-\varphi)g$, da cui si ricava la best response $B^1(\varphi) = \frac{1-\varphi}{1+\frac{\delta}{2}}g$.

Essendo il gioco simmetrico, anche l'equilibrio deve esserlo; ogni giocatore sceglie la quantità da estrarre, la quale deve essere uguale a quella scelta dall'avversario ed essere anche la miglior risposta: $B^i(\varphi) = \varphi \Rightarrow c_i = \frac{1}{2+\frac{\delta}{2}}g$.

L'utilità in equilibrio del periodo precedente è dunque pari a $\left(1+\frac{\delta}{2}\right)\log g + k$.

Procedendo per induzione, a tre periodi dal termine, il problema da risolvere è: $\max_{c_1 \le (1-\varphi)g} \log c_1 + \frac{\delta}{2}\left(1+\frac{\delta}{2}\right)\log[(1-\varphi)g - c_1] \Rightarrow \frac{1}{c_1} = \frac{\frac{\delta}{2}\left(1+\frac{\delta}{2}\right)}{(1-\varphi)g - c_1} \Rightarrow \left(1+\frac{\delta}{2}+\frac{\delta^2}{4}\right)c_1 = (1-\varphi)g$

da cui si ricava la best response $B^i(\varphi) = \frac{1-\varphi}{1+\frac{\delta}{2}+\frac{\delta^2}{4}}g$ e dunque la quantità estratta all'equilibrio è pari a $c_i = \frac{1}{2+\frac{\delta}{2}+\frac{\delta^2}{4}}g$.

Per induzione si può congetturare che in un periodo t, l'estrazione è pari a $\frac{g}{2+\frac{\delta}{2}+\frac{\delta^2}{4}+...+\left(\frac{\delta}{2}\right)^{t-1}}$. La serie al denominatore tende a $\frac{1}{1-\frac{\delta}{2}}$ quindi si può asserire che la funzione di estrazione per mantenere l'equilibrio è $\bar{c}_i = \frac{1-\frac{\delta}{2}}{2-\frac{\delta}{2}} g$.

CAPITOLO 10
Giochi ad informazione incompleta

1.Definizione ed esempi

In molte situazioni, un giocatore non è a conoscenza dei payoffs (e quindi delle preferenze) degli altri decisori. Alcune applicazioni possono essere le contrattazioni, le aste e la competizione aziendale.

1.1.Dilemma del prigioniero (1)

Si supponga che il giocatore 1 confessi a prescindere dalla strategia giocata dal suo avversario, tuttavia la preferenza del giocatore 2 è sconosciuta al primo: può essere "aggressivo" o "pollo", dove un comportamento aggressivo implica preferenze analoghe al giocatore 1 mentre un pollo predilige non confessare.

1 / 2	c	n		1 / 2	c	n
c	0,0	7,-2		c	0,-2	7,0
n	-2,7	5,5		n	-2,5	5,7

Giocatore 2 "aggressivo" Giocatore 2 "pollo"

Il giocatore 1 utilizza c in ogni caso (c domina n indipendentemente dalla tipologia di avvesario); un giocatore 2 aggressivo ha a sua volta una strategia dominante, c, così come un "pollo" ha come strategia dominante n.

1.2.Dilemma del prigioniero (2)

Si supponga ora che anche la scelta del giocatore 1 dipenda dal comportamento adottato dal suo avversario: il risultato è nuovamente rappresentato in due tabelle e solamente il giocatore 2 è a conoscenza di quale sia quella corretta.

1 / 2	c	n		1 / 2	c	n
c	0,0	7,-2		c	-2,-2	5,0
n	-2,7	5,5		n	0,5	7,7

Giocatore 2 "aggressivo" Giocatore 2 "pollo"

La strategia del giocatore 2 non cambia rispetto all'esempio precedente: un giocatore 2 aggressivo ha una strategia dominante, c, mentre un "pollo" ha come strategia dominante n. Il giocatore 1, non conoscendo il comportamento adottato dal suo avversario, non sa se si deve confrontare con c o n; se crede si tratti del primo tipo gli sarebbe più vantaggioso confessare, altrimenti dovrebbe giocare n.

Si supponga che vi sia una probabilità q che l'avversario sia aggressivo, di conseguenza egli sarà "pollo" con probabilità $(1-q)$. Se il giocatore 1 giocasse c otterrebbe un'utilità di $q\times 0+(1-q)\times 5=5-5q$, mentre non confessando avrebbe un payoff di $q\times(-2)+(1-q)\times 7=7-9q$. Risolvendo la disequazione, il giocatore 1 otterrà maggior vantaggio nel confessare solamente se la probabilità che il suo avversario sia aggressivo è $q>\frac{1}{2}$.

2.Equilibrio di Bayes-Nash

2.1.Definizione

L'economista John Harsanyi propose una generalizzazione dell'equilibrio di Nash in modo da adattarlo anche per i giochi ad informazione incompleta. Per prima cosa è necessario trasformare il gioco ad informazione completa in un gioco ad informazione parziale, per esempio per mezzo di un fattore "natura" che fissi la tipologia di giocatore; in seguito si utilizza l'equilibrio di Nash per i giochi ad informazione parziale, che in quest'ambito viene detto "equilibrio di Bayes-Nash".

2.2.Esempio: Battaglia dei sessi

2.2.1.Problema

Si supponga che la moglie possa essere "aggressiva" o "pollo", ovvero può decidere di uscire da sola o con il marito. Questa situazione si traduce nella seguente rappresentazione in forma strategica:

Lui/Lei	p	t		Lui/Lei	p	t
p	3,0	0,1		p	3,1	0,0
t	0,3	1,0		t	0,0	1,3

Giocatore 2 "aggressivo" (A) Giocatore 2 "pollo" (B)

Per risolvere l'equilibrio di Bayes-Nash è necessario trasformare il problema in un gioco ad informazione parziale, si assume quindi che:

- La moglie conosca la propria tipologia

- Il marito non conosce la tipologia della moglie, ma ipotizza che ci sia una probabilità q che sia aggressiva (di conseguenza c'è una probabilità $1-q$ che sia "pollo").
- La moglie conosce il valore di q.

Lui può giocare una strategia pura (p o t) oppure una strategia mista, ovvero p con probabilità λ; la moglie gioca una coppia di strategie, una per tipologia, che può dunque essere (p,p), (p,t), (t,p), (t,t), oppure una coppia di strategie miste (φ_1,φ_2) dove φ_i è la probabilità che giochi p.

2.2.2.Equilibrio tra le strategie pure

È un equilibrio di Bayes-Nash del gioco, una tripla $(\lambda,\varphi_1,\varphi_2)$ in cui ogni tipo di giocatore utilizza una best response; φ_i massimizza l'utilità della moglie di tipo i se il marito gioca p con probabilità λ; λ massimizza l'utilità attesa del marito che ipotizza di trovare, con probabilita q, una moglie che giochi p con probabilità φ_1.

Si supponga che il marito giochi sicuramente p, ovvero che $\lambda=1$. Come miglior risposta una moglie aggressiva gioca t e una moglie "pollo" gioca p ($\varphi_1=0,\varphi_2=1$). Si deduce che $E\pi^1(p)=3q$ e $E\pi^1(t)=1-q$; dunque p è una best response se $3q>1-q\Rightarrow q>\frac{1}{4}$ e (p,t,p) è un equilibrio di Bayes-Nash. Analogamente (t,p,t) è un equilibrio di Bayes-Nash se $3(1-q)<q\Rightarrow q>\frac{3}{4}$.

2.2.3.Equilibrio tra le strategie miste

Si supponga che il marito sappia che la moglie è aggressiva ($q=0$). In questo caso non c'è un equilibrio di Nash tra le strategie pure, ma è presente tra le strategie miste: per esempio se $\lambda=\frac{3}{4}$ allora la moglie è indifferente tra il giocare P o T; allo stesso modo il marito è indifferente se $\varphi_1=\frac{1}{4}$. $\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4},0\right)$ è quindi un equilibrio di Bayes-Nash.

Si supponga ora R>0, si ha che $\pi_A^2(p)=3(1-\lambda)$ e $\pi_B^2(t)=\lambda$; la moglie ricorrerà alle strategie miste se e solo se è indifferente tra scegliere p o t, ovvero se e solo se

$3(1-\lambda)=\lambda \Rightarrow \lambda=\frac{3}{4}$. Per quanto concerne una moglie "pollo", con un procedimento analogo si ottengono inversi risultati ma comunque la scelta risulta indifferente per $\lambda=\frac{3}{4}$.

Per ricavare la miglior risposta del marito,si valuti la sua utilità attesa nel giocare p contro la coppia di strategie (φ_1,φ_2). Essa è $\pi^1(p)=3\varphi_1 q+3\varphi_2(1-q)$, mentre giocando t è $\pi^1(t)=q(1-\varphi_1)+(1-q)(1-\varphi_2)$. Dunque $p \approx t$ se

$$3\varphi_1 q+3\varphi_2(1-q)=q(1-\varphi_1)+(1-q)(1-\varphi_2) \Rightarrow q(4\varphi_1-1)=(1-q)(1-4\varphi_2).$$

Quindi, indipendentemente dal valore di q, è sempre presente un equilibrio di Bayes-Nash tra le strategie miste; in particolare $\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$, ma anche $\lambda=\frac{3}{4}$ e (φ_1,φ_2) che soddisfino l'equazione precedente.

3.Applicazione: Duopolio di Cournot

Con riferimento al paragrafo 4.3, si supponga costante la funzione di costo marginale dell'azienda 1 (e noto il costo marginale c_1) e questa non sia a conoscenza dei costi dell'azienda 2, che comunque ha costi marginali costanti pari a $c+\sigma$, dove $\sigma \in [-\sigma_{\max},\sigma_{\max}]$ secondo una distribuzione di probabilità nota ad entrambe le società, sia $c-\sigma_{\max} \geq 0$. Dunque in media l'azienda 2 ha gli stessi costi dell'azienda 1 a differenza di uno scostamento σ noto solamente alla prima.

Di conseguenza la quantità che 1 dovrà produrre in situazione di equilibrio di Bayes-Nash è un singolo valore $\overline{Q_1}$, mentre per quanto riguarda 2 sarà una lista di valori, uno per ogni $c+\sigma$.

Iniziando dall'azienda 2, si supponga che questa ipotizzi la quantità prodotta dall'altra con un valore Q_1'; ciò implica $P=\alpha-\beta(Q_1'+Q_2)$ e quindi $\pi^2=[\alpha-\beta(Q_1'+Q_2)]Q_2$. Essendo i costi totali pari a $(c+\sigma)Q_2$, per massimizzare il profitto si deve risolvere:

$\max\limits_{Q_2\geq 0}[\alpha-\beta(Q_1'+Q_2)]Q_2-(c+\sigma)Q_2$. Ponendo la derivata uguale a zero si ottiene:

$\alpha - \beta Q_1' - c - \sigma = 2\beta Q_2 \Rightarrow Q_2 = \dfrac{\alpha - \beta Q_1' - c - \sigma}{2\beta} = B^2(Q_1')$. In generale vale:

$$\begin{cases} Q_1 \le \dfrac{\alpha - c - \sigma}{\beta} \Rightarrow Q_2 = \dfrac{\alpha - \beta Q_1 - c - \sigma}{2\beta} \\ Q_1 > \dfrac{\alpha - c - \sigma}{\beta} \Rightarrow Q_2 = 0 \end{cases}$$

La società 1 deve ipotizzare una quantità $EQ_2(\sigma)$, funzione quindi del tipo di avversario; la massimizzazione dell'utilità attesa è quindi:

$\max_{Q_1>0} \left[\alpha - \beta \left| Q_1 + EQ_2(\sigma) \right| \right] Q_1 - cQ_1$, ponendo la derivata uguale a zero e ripetendo il procedimento precedente, si ottiene

$$\begin{cases} Q_2 \le \dfrac{\alpha - c}{\beta} \Rightarrow Q_1 = \dfrac{\alpha - \beta Q_2 - c}{2\beta} \\ Q_2 > \dfrac{\alpha - c}{\beta} \Rightarrow Q_1 = 0 \end{cases}$$

, che corrisponde a $B^1(EQ_2(\sigma))$

Ad ogni equilibrio di Bayes-Nash $(\overline{Q}_1, E\overline{Q}_2(\sigma))$, l'ipotesi coincide con la miglior risposta; in altre parole $EB_\sigma^2(\overline{Q}_1) = \overline{Q}_2$ e $B^1(E\overline{Q}_2(\sigma)) = \overline{Q}_1$.

È ora possibile ricavare le quantità prodotte all'equilibrio: $\overline{Q}_1 = \overline{Q}_2(0) = \dfrac{\alpha - c}{3\beta}$ e $\overline{Q}_2(\sigma) = \dfrac{2\alpha - 2c - 3\sigma}{6\beta}$. Questo permette di calcolare il prezzo all'equilibrio, pari a $\overline{P}(\sigma) = \alpha - \beta(\overline{Q}_1 + \overline{Q}_2(\sigma)) = \alpha - \beta(\overline{Q}_1 + \overline{Q}_2) + \dfrac{\sigma}{2}$.

Infine si possono scrivere le utilità, e quindi i profitti, all'equilibrio come segue:

$\pi^1(\sigma) = \left(\overline{P} - c + \dfrac{\sigma}{2}\right)\overline{Q}_1$ e $\pi^2(\sigma) = \left(\overline{P} - c - \dfrac{\sigma}{2}\right)\left(\overline{Q}_2 - \dfrac{\sigma}{2\beta}\right)$

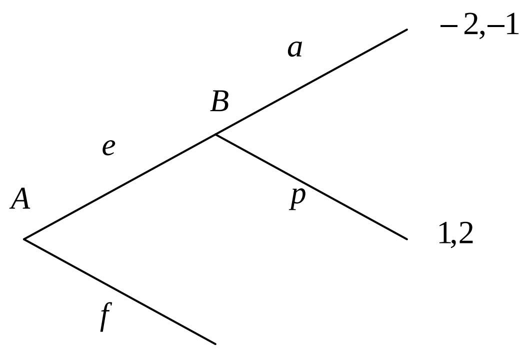
CAPITOLO 11

Esempio applicativo: Ingresso di un'azienda in un mercato monopolostico

1.Esempio I

Si supponga inizialmente che un'azienda (A) debba decidere se entrare o meno in un mercato controllato da un'azienda rivale (B). Chiaramente questa decisione dipende dai profitti che il nuovo mercato porterebbe, e da come B reagirebbe all'ingresso di A nel mercato da lei dominato.

In particolare B può scegliere se giocare aggressivamente (a, per esempio investendo molto sulla pubblicità o sul miglioramento degli impianti di produzione) oppure mantenere la situazione corrente per evitare costi eccessivi (p, comportamento del "pollo"). A sua volta A può decidere se entrare (e) o rimanere fuori (f) dal mercato in oggetto.



Come esempio, si ipotizzino le seguenti utilità organizzate in forma strategica:

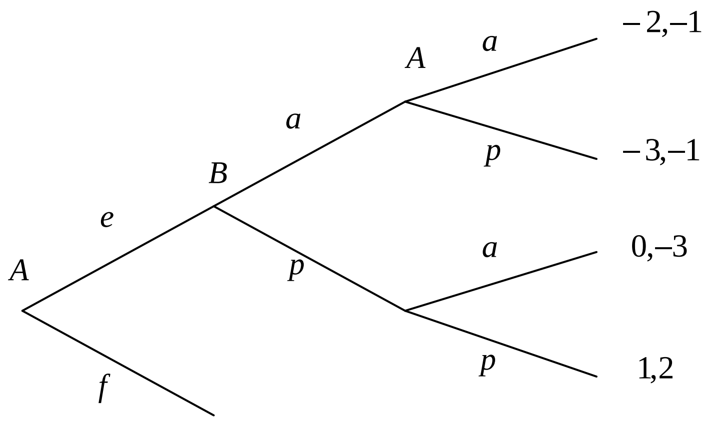
A/B	a	p
e	-2,-1	1,2
f	0,5	0,5

Intuitivamente si notano due equilibri di Nash: (e, p) e (f, a). Quest'ultimo profilo risulta però irragionevole in quanto B dovrebbe cercare di ostacolare A (adottando quindi un comportamento aggressivo) solamente nel caso in cui A entri nel mercato; tuttavia se A scegliesse la strategia e, B otterrebbe un payoff maggiore giocando p.

Si ha che $B^B(f) = a$, ma in realtà f è una strategia che non viene utilizzata in quanto A, prevedendo un atteggiamento aggressivo, deciderebbe di rimanere fuori dal mercato; inoltre A potrebbe non ritenere credibile una posizione a da parte di B, ed entrando nel mercato costringerebbe B a giocare p.

2.Esempio II

Si consideri ora una situazione iniziale leggermente più complessa, dove la società A può scegliere, nota la strategia giocata da B, se adottare a sua volta un comportamento aggressivo (a) o meno (p). Le rappresentazioni in forma estesa e strategica siano la seguenti:



A/B	a	p
eaa	-2,-1	0,-3
eap	-2,-1	1,2
epa	-3,1	0,-3
epp	-3,1	1,2
faa	0,5	0,5
fap	0,5	0,5
fpa	0,5	0,5
fpp	0,5	0,5

Dove, nelle strategie di A, il primo carattere rappresenta il suo ingresso o meno nel mercato, il secondo è la risposta ad un'avversario che gioca a, il terzo è quella ad una strategia p giocata da B.

Tutti i profili che coinvolgono l'utilizzo di f costituiscono un equilibrio di Nash; a questi si aggiungono (eap, p) e (epp, p). Per determinare quale profilo verrà scelto da A, e di conseguenza da B, si deve ricorrere alla logica di sequenzialità razionale, già vista nel caso precedente.

Nel caso in cui B giochi a, è più redditizio per A giocare a sua volta a; se invece B scegliesse una strategia p, A troverebbe più proficuo adottare una strategia p. Sapendo questo, B confronta i payoffs dei profili (a,a) e (p,p) e, dato che $\pi^B(a,a) = -1 < 2 = \pi^B(p,p)$, giocherà p.

Considerando lo stadio antecedente, A può decidere di entrare nel mercato (aspettandosi una risposta p da parte di B e quindi una sua successiva giocata di p), oppure può scegliere di rimanere fuori. Confrontando nuovamente le utilità si ha che $\pi^A(e, p) = 1 > \pi^A(f, p)$ e di conseguenza A entrerà nel mercato. L'unico equilibrio di Nash razionale risulta quindi (eap, p).

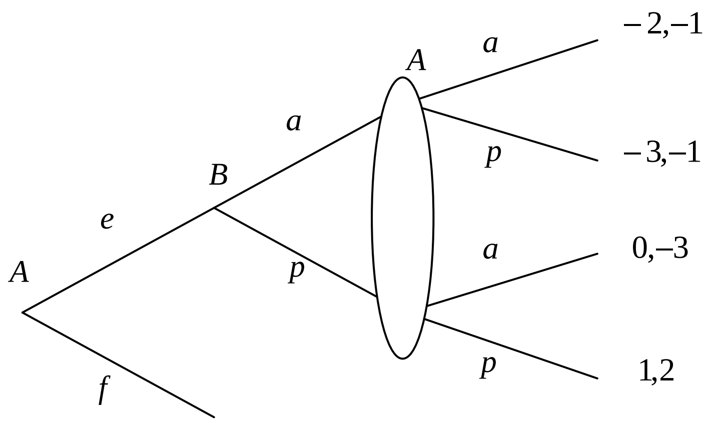
3.Generalizzazioni

Con riferimento all'esempio del paragrafo 1 si noti che, nel caso in cui B fosse obbligata a giocare a (per esempio perché ha già stipulato contratti pubblicitari), A soffrirebbe una perdita nel caso in cui entrasse nel mercato e sceglierà quindi di rimanere fuori. Questo comporta un payoff maggiore per B rispetto a quello che avrebbe ottenuto se avesse potuto scegliere tra a e p.

Con riferimento all'esempio del paragrafo 2 si ipotizzi che A, dopo essere entrata nel mercato, non abbia altra scelta che giocare a. Questo implicherebbe una scelta di a anche da parte di B in modo da massimizzare l'utilità (nel caso specifico, in modo da minimizzare la perdita); di conseguenza, al primo stadio, la miglior strategia per A è di rimanere fuori dal mercato. Qui un numero ridotto di strategie disponibili per A ha reso a una strategia credibile per B.

4.Esempio III

Si supponga ora che la scelta del comportamento da adottare, a o p, venga fatta contemporaneamente da A e B.



La rappresentazione in forma strategica è quindi la seguente:

A/B	a	p
ea	-2,-1	0,-3
ep	-3,1	1,2
fa	0,5	0,5
fp	0,5	0,5

I tre equilibri di Nash del gioco sono (ep, p), (fp, a) e (fa, a), dei quali viene ora valutata la razionalità e dunque la credibilità delle strategie giocate. Una previsione della scelta che sarà effettuata nel secondo stadio risulta credibile solo se questa costituisce una best response, ovvero nel caso in cui le due scelte costituiscano un equilibrio di Nash nella seconda parte del gioco.

Considerando il profilo (fp, a), p non risulta una best response contro a (e viceversa): se B sceglie un comportamento aggressivo, A minimizza le proprie perdite adottandolo a sua volta; analogamente la miglior risposta ad una strategia p è p. In conclusione (p, a) non costituisce un equilibrio di Nash del subgame, gli unici profili di equilibrio sono (a, a) e (p, p).

Il fatto che A entri o meno nel mercato è irrilevante ai fini dell'analisi di credibilità: la razionalità di un equilibrio di Nash va analizzata nell'ipotesi in cui A scelga di entrare nel mercato (o vi entri per errore), in particolare si deve valutare la credibilità dei comportamenti successivi a questa scelta. Se si considera per esempio (fa, a), il subgame non viene mai giocato; tuttavia il profilo (a, a) verrebbe realmente giocato se

A e B, per un motivo qualsiasi, si venissero a trovare nel subgame. Ciò implica che (a,a) è una continuazione credibile e che f è una scelta razionale per A.

Si noti che la valutazione della razionalità di un equilibrio viene fatta determinando la razionalità di un profilo che potrebbe non essere mai giocato. Questa logica è simile al procedimento applicato nell'induzione a ritroso, dove un solo ramo viene giocato ma, per stabilire quale esso sia, bisogna risalire fino alla radice, valutando tutti i rami presenti.

La differenza fondamentale tra un gioco ad informazione perfetta (Esempi I e II) ed uno ad informazione imperfetta (Esempio III) è che, nel primo, la credibilità di una strategia viene valutata massimizzando il payoff del singolo giocatore in quel determinato nodo decisionale. Nella seconda tipologia, due o più giocatori compiono scelte contemporanee; si valuta la credibilità della decisione collettiva e un modo per fare questo è determinare se l'insieme delle strategie costituisce o meno un equilibrio di Nash del gioco.

CONCLUSIONI

Nel presente elaborato si è affrontato in maniera generica l'ampio argomento della teoria di giochi, soffermandosi principalmente sulla non cooperazione tra i giocatori e su esempi applicativi relativi all'economia.

La teoria dei giochi è un modello matematico che permette di semplificare una situazione reale, consentendo un'analisi numerica che porta a decidere in maniera più consapevole il comportamento da adottare quando si è relazionati con altri decisori. In questa trattazione i modelli sono volutamente semplici, ma le generalizzazioni per adattarli a casi di interesse reale sono intuitive ed efficaci; la teoria dei giochi permette infatti di esaminare un numero potenzialmente infinito di vincoli e situazioni contemporaneamente.

In un'applicazione economica, la semplificazione può comunque suggerire al soggetto la direzione di nuove ricerche o sviluppi; per quanto concerne un'analisi storica, la tecnica dell'induzione a ritroso, ampiamente discussa nella presente stesura, consente di esaminare le situazioni economiche (e non solo) che hanno portato alla condizione attuale.

Viene discusso anche il problema dei beni comuni, in cui la teoria dei giochi ha un ruolo chiave sia in una situazione opportunistica che in una soluzione di cartello, offrendo spunti per la sua applicazione in problemi di sviluppo sostenibile che sono all'ordine del giorno.

BIBLIOGRAFIA

Von Neumann J., 1944, *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton, NJ: Princeton University Press.

Cournot A., 1838, *Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth*, Harvard, MA: Norwood Press.

Nash J., 1949, *Equilibrium Points in n-Person Games*, Princeton, NJ: Princeton University Press.

Nash J., 1951, “Non-Cooperative Games”, *The Annals of Mathematics*, vol.54, n.2, pp.286-295.

Nash J., 1950, “The Bargaining Problem”, *Econometrica*, vol.18, n.2, pp.155-162.

Harsanyi J., 1967, “Games with Incomplete Information Played by ‘Bayesian’ Players”, *Management Science*, vol.14, n.3, pp.159-182.

Fudenberg D., Maskin E., 1986, “The Folk Theorem in Repeated Games with Discounting or with Incomplete Information”, *Econometrica*, vol.54, n.3, pp.533-554.

Harris C., Vickers J., 1985, “Perfect Equilibrium in a Model of a Race”, *Review of Economic Studies*, vol.52, n.2, pp.193-209.

Dutta P., 1999, *Strategies and Games: Theory and Practice*, Cambridge, MA: MIT Press.

Church J., Ware R., 2000, *Industrial Organization: a Strategic Approach*, New York, NY: McGraw-Hill.

www.springerlink.com