



UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
DI PADOVA



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE

CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN  
INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE

## Modello e controllo della dinamica di volo di un convertiplano

*Relatrice:*  
PROF.SSA MARIA ELENA VALCHER

*Laureando:*  
MARCO ZANOVELLO  
1216486

Anno Accademico 2023/2024

19 Luglio 2024



# Indice

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introduzione</b>                                   | <b>1</b>  |
| 1.1      | Evoluzione del convertiplano . . . . .                | 1         |
| 1.1.1    | Cenni storici . . . . .                               | 1         |
| 1.1.2    | La tecnologia attuale . . . . .                       | 2         |
| 1.1.3    | Sviluppi futuri . . . . .                             | 3         |
| 1.2      | Obiettivo . . . . .                                   | 3         |
| <b>2</b> | <b>Modello del convertiplano</b>                      | <b>5</b>  |
| 2.1      | Modello non lineare . . . . .                         | 5         |
| 2.2      | Punti di equilibrio e linearizzazione . . . . .       | 7         |
| 2.3      | Funzione di trasferimento . . . . .                   | 9         |
| <b>3</b> | <b>Controllo</b>                                      | <b>13</b> |
| 3.1      | Controllo della posizione $z$ . . . . .               | 13        |
| 3.2      | Controllo della posizione angolare $\theta$ . . . . . | 20        |
| 3.3      | Analisi dei sistemi in catena chiusa . . . . .        | 25        |
| 3.3.1    | Analisi di $W_1(s)$ . . . . .                         | 25        |
| 3.3.2    | Analisi di $W_2(s)$ . . . . .                         | 27        |
| <b>4</b> | <b>Conclusioni</b>                                    | <b>29</b> |



# 1 Introduzione

Il convertiplano è un velivolo che riesce a combinare la peculiarità dell'elicottero di elevarsi e discendere verticalmente con le capacità di un tradizionale aereo in termini di autonomia e velocità durante il volo orizzontale. Tale tipologia di velivolo infatti dispone generalmente di propulsori posizionati sulle ali in grado di ruotare di 90 gradi in modo da avere una spinta verticale iniziale per il decollo, per poi gradualmente posizionarsi in modo da dare spinta in direzione orizzontale.



Figura 1: Convertiplano AW609 Leonardo

## 1.1 Evoluzione del convertiplano

### 1.1.1 Cenni storici

Uno dei primissimi brevetti di un convertiplano venne presentato nel settembre del 1930 da George Lehberger con il titolo *"Flying Machine"*. In questo brevetto fu introdotto il concetto di velivolo a rotore inclinabile, che prevedeva un propulsore ad elica in grado di inclinare il proprio asse dalla posizione verticale a quella orizzontale.

I primi sviluppi del convertiplano però risalgono agli anni '40 e '50 del Novecento con l'avvio di un programma congiunto tra U.S. Army e U.S. Air Force chiamato *"Convertiplane Program"*. Tra i progetti presentati, quelli ritenuti più interessanti furono:

- XV-1: un elicottero composito dotato di ali fisse. Esso presentava un'elica installata sulla parte superiore e un'altra elica sulla parte posteriore della fusoliera.
- XV-2: un aereo con un rotore pieghevole che si ritraeva nella fusoliera e due eliche per la propulsione orizzontale.
- XV-3: un velivolo con due rotori inclinabili posizionati alle estremità delle ali.

Fu l'ultimo ad essere infine ritenuto maggiormente interessante in quanto, nonostante i problemi tecnici di instabilità del rotore che causarono anche incidenti, dimostrò che la strada del convertiplano era percorribile e i relativi problemi risolvibili in futuro.

Nel 1972 la Bell Helicopter Textron, grazie ai fondi della NASA e dell' U.S. Army, iniziò lo sviluppo dell'XV-15. Esso portò ad un notevole progresso tecnologico rispetto al predecessore in quanto invece di posizionare i rotori nella fusoliera essi furono posti alle estremità delle ali su gondole girevoli, direttamente accoppiate ai motori. Fin da subito gli XV-15 dimostrarono ottima maneggevolezza e in generale buone qualità di volo. La cosa più interessante è che tuttora sono utilizzati come piattaforme sperimentali.

Successivamente, grazie ad un collaborazione tra la Bell Helicopter e la Boeing Helicopter, nel 1981 iniziò lo sviluppo di un nuovo progetto, il V-22 Osprey, un convertiplano pensato ed ideato principalmente per scopi militari.



Figura 2: XV-3 U.S. Army (sinistra); XV-15 Bell (destra)

### 1.1.2 La tecnologia attuale

Le tecnologie attuali sono notevolmente avanzate in quasi tutti gli ambiti ma il concetto proposto dalla Bell con il modello XV15 resta alla base anche dei convertiplani di più recente produzione. Il V-22 Osprey resta tuttora in utilizzo e commercio soprattutto per scopi nel settore della difesa. Da esso deriva il più recente e aggiornato Bell-Boeing 609, presentato nel 1996, un convertiplano leggero pensato però per uso civile. Tale mezzo presenta due gondole rotanti, in grado di eccedere leggermente i 90 gradi, dove sono installati rotori e motori. Tali migliorie permettono una velocità di volo orizzontale circa doppia rispetto ad un normale elicottero, consentendo di ospitare addirittura fino a nove persone nella cabina pressurizzata. Oltre all'uso civile tale mezzo può essere adatto per scopi di ricerca e soccorso, di sorveglianza marittima o destinato alle forze dell'ordine. Nel 2011 la compagnia Augusta Westland assume completamente il controllo del progetto e lo rinomina AW609. Con la fusione del 2016 con la società italiana Leonardo, il modello AW609 resta in progetto sotto la divisione della Leonardo Helicopters. Nel 2020, durante l'Expo di Dubai, la compagnia Leonardo annuncia la volontà di entrare nel mercato degli elicotteri per VIP

con il marchio Augusta, presentando l'AW609 come uno dei mezzi più idonei a questo scopo.

### 1.1.3 Sviluppi futuri

Nonostante la lunga storia, ormai quasi centenaria, lo sviluppo e l'innovazione del convertiplano non sembrano intenzionati ad arrestarsi. Sempre più attenzione viene posta all'impatto ambientale ed alla sostenibilità dei velivoli in generale ma anche del convertiplano stesso come si può apprendere dai recenti progetti europei ERICA (*Enhanced Rotorcraft Innovative Concept Achievement*) e NICETRIP (*Novel Innovative Competitive Effective Tiltrotor Integrated Project*). L'obiettivo di tali progetti è quello di porre l'attenzione sull'ottimizzazione delle dinamiche di volo e sull'efficienza dei propulsori, per cercare di riuscire a rispettare le indicazioni dell'Unione Europea di abbattere drasticamente le emissioni di CO<sub>2</sub>. Non si esclude che in un futuro non molto remoto si possa pensare di realizzare convertiplani con propulsione ad emissioni zero utilizzando, ad esempio, motori elettrici.

## 1.2 Obiettivo

L'obiettivo di questo lavoro di tesi è quello di andare ad analizzare e controllare la dinamica di volo di un convertiplano. Per ottenere ciò si partirà da un modello, opportunamente idealizzato di convertiplano, a partire da due equazioni che ne regolano la dinamica, una che tiene conto della forza impressa sulla componente verticale e un'altra che tiene invece conto della forza sulla componente angolare. Si andrà poi a linearizzare il sistema di equazioni del modello nell'intorno di un punto di equilibrio e successivamente a ricavare la funzione di trasferimento che descrive la dinamica del sistema. Successivamente, grazie alle nozioni apprese nel corso di Controlli Automatici, si procederà allo studio della stabilità del sistema ed infine alla sintesi di controllori che permettano al sistema di restare all'interno di margini forniti.

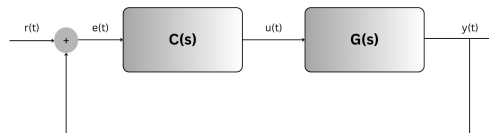


Figura 3: Schema di controllo in retroazione





## 2 Modello del convertiplano

### 2.1 Modello non lineare

Per prima cosa si consideri la rappresentazione grafica del sistema meccanico in Figura 4 che, seppur opportunamente semplificato, rappresenta la dinamica trasversale di volo di un generico convertiplano.

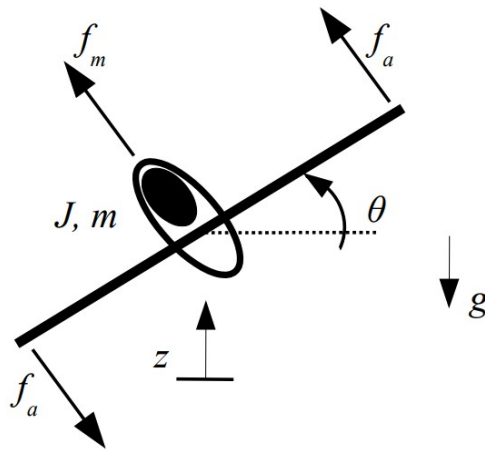


Figura 4: Schema del sistema meccanico

Di seguito sono riportate tutte le grandezze fisiche necessarie a descrivere la dinamica di volo rappresentata:

- $f_m$  è la forza motrice associata alla spinta verticale
- $f_a$  è la forza motrice associata alla spinta angolare
- $J$  è l'inerzia del velivolo
- $m$  è la massa del velivolo
- $z$  è la posizione del velivolo rispetto ad un riferimento verticale
- $g$  è l'accelerazione gravitazionale
- $\theta$  è il valore della posizione angolare
- $l$  è la lunghezza dell'ala
- $b, \beta$  sono i coefficienti di attrito viscoso equivalenti, dovuti alla resistenza dell'aria

Successivamente si considerino le due equazioni che descrivono il modello della dinamica di volo del velivolo:

$$\begin{cases} \ddot{z} + b\dot{z} = f_m \cos(\theta) - mg \\ J\ddot{\theta} + \beta\dot{\theta} = 2lf_a \end{cases} \quad (2.1)$$

In particolare, la prima equazione deriva dall'applicazione della seconda legge della dinamica lungo la componente verticale del moto, ossia lungo l'asse  $z$ . Secondo tale principio il prodotto dell'accelerazione per la massa del corpo stesso è pari alla risultante delle forze agenti su un corpo, pari alla somma vettoriale di tutte le forze ad esso applicate. Nel caso del convertiplano le forze applicate al velivolo sono le seguenti: la forza  $f_m$ , moltiplicata per il coseno della posizione angolare  $\theta$ , rappresenta la proiezione verticale della forza di spinta, la forza peso, rappresentata dal termine  $mg$ , e la forza di attrito viscoso dell'aria, data dal termine  $b$  moltiplicato per la velocità  $\dot{z}$ .

La seconda equazione deriva dall'applicazione della seconda legge cardinale della meccanica e descrive il moto rotatorio del convertiplano attorno al suo asse. Nel caso analizzato la posizione angolare  $\theta$  corrisponde dunque all'inclinazione del velivolo rispetto alla fusoliera. Pertanto si ha che il momento angolare risultante, dato dalla accelerazione angolare  $\ddot{\theta}$  moltiplicata per il momento di inerzia  $J$ , deve essere uguale alla somma di tutti momenti meccanici agenti alle estremità delle ali del velivolo. In particolare, i momenti agenti sono: il momento meccanico rappresentato dalla forza  $f_a$  moltiplicata per il braccio  $l$ , moltiplicato per due in quanto la forza agisce su entrambe le ali; il momento dovuto all'attrito con l'aria, dato dal termine  $\beta$  moltiplicato per la velocità angolare  $\dot{\theta}$ .

Ora risulta conveniente riportarci in forma di stato assumendo come variabili di stato, ingressi ed uscite del sistema le seguenti:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \\ \theta \\ \dot{z} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad \text{Variabili di stato}$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_m \\ f_a \end{bmatrix} \quad \text{Ingressi del sistema}$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \\ \theta \end{bmatrix} \quad \text{Uscite del sistema}$$

Dalla definizione del vettore  $\mathbf{x}$  risulta evidente che  $\dot{x}_1 = \dot{z} = x_3$  e  $\dot{x}_2 = \dot{\theta} = x_4$ . Pertanto, utilizzando quest'ultima relazione e sostituendo le grandezze definite sopra nel sistema di equazioni (2.1), si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 = x_4 \\ \dot{x}_3 = -\frac{b}{m}x_3 + \frac{u_1}{m} \cos x_2 - g \\ \dot{x}_4 = -\frac{\beta}{J}x_4 + \frac{2l}{J}u_2 \end{cases} \quad (2.2)$$

Il precedente sistema di equazioni si può riscrivere in forma generica come segue:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$$

Inoltre, si assume di poter misurare la quota  $z$  e l'angolo  $\theta$ . Allora si sceglie come mappa di uscita, che restituisce i valori delle uscite  $y_1, y_2$  all'istante  $t$  in funzione dei valori delle variabili di stato e di ingresso nel medesimo istante, la seguente:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \\ \theta \end{bmatrix}$$

## 2.2 Punti di equilibrio e linearizzazione

Per prima cosa è necessario stabilire quali siano i punti di equilibrio ad ingresso costante del nostro sistema.

Diciamo che  $\mathbf{x}_e$  è uno stato di equilibrio in corrispondenza all'ingresso costante  $\mathbf{u}(t) = \bar{\mathbf{u}}$  se qualora il sistema parta dalla condizione iniziale  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_e$  e ad esso venga applicato l'ingresso costante  $\mathbf{u}(t) = \bar{\mathbf{u}}, \forall t \geq 0$ , allora il sistema rimane indefinitamente nello stato  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_e, \forall t \geq 0$ .

Nel nostro caso gli ingressi  $\mathbf{u}(t)$ , assunti costanti  $\forall t \geq 0$ , si possono riscrivere:

$$\bar{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{f}_m \\ \bar{f}_a \end{bmatrix}$$

Inoltre, condizione necessaria e sufficiente affinché  $\mathbf{x}_e$  sia stato di equilibrio in corrispondenza all'ingresso costante  $\bar{\mathbf{u}}$ , è che venga soddisfatta la relazione  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_e, \bar{\mathbf{u}}) = \mathbf{0}$  che equivale ad annullare le derivate  $\ddot{z} = \dot{z} = 0$  e  $\ddot{\theta} = \dot{\theta} = 0$ .

Dal momento che abbiamo definito il vettore  $\mathbf{x}$  come vettore delle variabili di stato, si impone  $\dot{\mathbf{x}} = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$  e  $\bar{\mathbf{u}} = [\bar{f}_m \ \bar{f}_a]^T$  nell'equazione (2.2), e si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{cases} 0 = x_{3,e} \\ 0 = x_{4,e} \\ 0 = \frac{-b}{m}x_{3,e} + \frac{\bar{f}_m}{m} \cos(x_{2,e}) - g \\ 0 = \frac{-\beta}{J}x_{4,e} + \frac{2l}{J}\bar{f}_a \end{cases}$$

che, a seguito dello svolgimento dei calcoli, diventa il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \frac{\bar{f}_m}{m} \cos x_{2,e} = g \\ \frac{2l}{J} \bar{f}_a = 0 \end{cases}$$

A questo punto, per ulteriore semplicità, si assume che, nel punto di equilibrio, la posizione angolare del convertiplano sia nulla. Risulta quindi  $\theta = x_{2,e} = 0$ , in questo modo si ottiene  $\cos(x_{2,e}) = 1$  e dunque il sistema si riduce a:

$$\begin{cases} \bar{f}_m = mg \\ \bar{f}_a = 0 \end{cases}$$

Dunque, lo stato di equilibrio trovato è quello per il quale il convertiplano ha inclinazione nulla, per il vincolo su  $x_{2,e}$ , e l'unica forza in gioco è quella data

dalla forza motrice che spinge il velivolo verso l'alto contrastando l'azione della forza peso  $f_p = mg$ . Riscrivendo lo stato di equilibrio in forma vettoriale si ottiene:

$$\mathbf{x}_e = \begin{bmatrix} x_{1,e} \\ x_{2,e} \\ x_{3,e} \\ x_{4,e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1,e} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

in cui il termine  $x_{1,e}$  rappresenta una quota  $z$  arbitraria alla quale si trova il convertiplano all'equilibrio.

Ora, al fine di linearizzare il modello nell'intorno del punto di equilibrio ricavato, si indichi:

- con  $\Delta \mathbf{x}(t)$  lo scostamento dello stato all'istante  $t$  dal valore all'equilibrio  $\mathbf{x}_e$ , cioè  $\Delta \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_e$ . Con il punto di equilibrio  $\mathbf{x}_e$  trovato risulta:

$$\Delta \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_{1,e} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_{1,e} \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

- con  $\Delta \mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(t) - \bar{\mathbf{u}}$  lo scostamento dell'ingresso all'istante  $t$  dall'ingresso costante  $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$ . Con i valori di riferimento  $\bar{\mathbf{u}}$  trovati in precedenza risulta:

$$\Delta \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} mg \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 - mg \\ u_2 \end{bmatrix}$$

- con  $\Delta \mathbf{y}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_e$  lo scostamento dell'uscita all'istante  $t$  dal valore corrispondente alle condizioni di equilibrio. Il valore all'equilibrio è  $\mathbf{y}_e = \mathbf{h}(\mathbf{x}_e, \bar{\mathbf{u}})$  e si ottiene dunque:

$$\Delta \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_{1,e} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 - x_{1,e} \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Successivamente si va a valutare l'equazione di aggiornamento dello stato del sistema, nell'intorno del punto di equilibrio  $\mathbf{x}_e$  e in corrispondenza dell'ingresso costante  $\bar{\mathbf{u}}$ , che si rappresenta sviluppando la funzione  $\mathbf{f}$  tramite formula di Taylor arrestata al primo termine. Si ottiene dunque la seguente equazione:

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta \mathbf{x}}{dx} &= \frac{d(\mathbf{x}_e + \Delta \mathbf{x})}{dx} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_e + \Delta \mathbf{x}, \Delta \mathbf{u}) = \\ &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_e, \bar{\mathbf{u}}) + \left[ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_e \\ \mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}}} \Delta \mathbf{x} + \left[ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right]_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_e \\ \mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}}} \Delta \mathbf{u} + \epsilon = \\ &= \left[ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_e \\ \mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}}} \Delta \mathbf{x} + \left[ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right]_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_e \\ \mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}}} \Delta \mathbf{u} + \epsilon \end{aligned}$$

dove il termine  $\epsilon$  è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a  $(\|\Delta\mathbf{x}(t)\|^2 + \|\Delta\mathbf{u}(t)\|^2)^{\frac{1}{2}}$ , che può essere trascurato nell'intorno dello stato di equilibrio. Si ottiene quindi la forma lineare approssimata del modello

$$\Delta\dot{\mathbf{x}} = F\Delta\mathbf{x} + G\Delta\mathbf{u}$$

nella quale matrice costante  $F$  è trovata come Jacobiana della funzione  $\mathbf{f}$  rispetto a  $\mathbf{x}$ , valutata per  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_e$  e  $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$ , ossia:

$$\begin{aligned} F = \left[ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_e \\ \mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}}} &= \left[ \begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{array} \right]_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_e \\ \mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\bar{f}_m}{m} \sin(x_{2,\epsilon}) & -\frac{b}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\beta}{J} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{b}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\beta}{J} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Analogamente la matrice  $G$  è calcolata come Jacobiana della funzione  $\mathbf{f}$  rispetto a  $\mathbf{u}$ , valutata per  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_e$  e  $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$ :

$$G = \left[ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right]_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_e \\ \mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}}} = \left[ \begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u_n} \end{array} \right]_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_e \\ \mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{\cos(x_{2,\epsilon})}{m} & 0 \\ 0 & \frac{2l}{J} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & \frac{2l}{J} \end{bmatrix}$$

Infine, per quanto riguarda l'uscita del sistema, la mappa  $\mathbf{h}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$  definita in precedenza è già lineare e si può scrivere nella forma

$$\Delta\mathbf{y} = H\Delta\mathbf{x} + D\Delta\mathbf{u}$$

in cui  $\Delta\mathbf{y}$  e  $\Delta\mathbf{x}$  sono quelli calcolati in precedenza, e la matrice  $H$  rappresenta la relazione lineare tra loro, ossia:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matrice  $D$  risulta invece nulla in quanto non vi è dipendenza diretta dell'uscita  $\mathbf{y}(t)$  dall'ingresso  $\mathbf{u}(t)$ .

### 2.3 Funzione di trasferimento

Il modello approssimato, ottenuto tramite linearizzazione, è il seguente:

$$\begin{cases} \Delta\dot{\mathbf{x}} = F\Delta\mathbf{x} + G\Delta\mathbf{u} \\ \Delta\mathbf{y} = H\Delta\mathbf{x} \end{cases} \quad (2.3)$$

che, con i valori trovati in precedenza, risulta:

$$\begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{z} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{b}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\beta}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z - x_{1,e} \\ \theta \\ \dot{z} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & \frac{2l}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 - mg \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} z - x_{1,e} \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z - x_{1,e} \\ \theta \\ \dot{z} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

Successivamente si va ad applicare la trasformata di Laplace al modello di stato nell'equazione (2.3) e si ottiene:

$$\begin{cases} sX(s) = FX(s) + GU(s) \\ Y(s) = HX(s) \end{cases} \quad \begin{cases} X(s) = (sI - F)^{-1}G \cdot U(s) \\ Y(s) = HX(s) \end{cases}$$

Riscrivendo le due equazioni in funzione dell'uscita  $Y(s)$  si ricava:

$$Y(s) = H(sI - F)^{-1}G \cdot U(s).$$

Dunque la matrice di trasferimento risulta:

$$W(s) = H(sI - F)^{-1}G$$

Per prima cosa si calcola la matrice  $(sI - F)^{-1}$  come:

$$(sI - F)^{-1} = \left( \begin{bmatrix} s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{b}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\beta}{J} \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 & \frac{m}{s(b+sm)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} & 0 & \frac{J}{s(\beta+Js)} \\ 0 & 0 & \frac{m}{(b+sm)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{J}{(\beta+Js)} \end{bmatrix}$$

Successivamente troviamo la matrice di trasferimento  $W(s)$  come:

$$\begin{aligned} W(s) &= H(sI - F)^{-1}G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 & \frac{m}{s(b+sm)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} & 0 & \frac{J}{s(\beta+Js)} \\ 0 & 0 & \frac{m}{(b+sm)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{J}{(\beta+Js)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & \frac{2l}{J} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 & \frac{m}{s(b+sm)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} & 0 & \frac{J}{s(\beta+Js)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & \frac{2l}{J} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s(b+ms)} & 0 \\ 0 & \frac{2l}{s(\beta+Js)} \end{bmatrix} \quad (2.4) \end{aligned}$$

Come si può vedere la matrice  $W(s)$  appena calcolata presenta due soli elementi non nulli:

$$G_1(s) = \frac{1}{s(b + ms)} \quad G_2(s) = \frac{2l}{s(\beta + Js)} \quad (2.5)$$

Ricordando la relazione  $Y(s) = W(s) \cdot U(s)$  si deduce che la  $G_1(s)$  descrive la relazione tra il primo ingresso  $f_m$  e l'uscita  $y_1 = z$ , mentre la funzione  $G_2(s)$  lega il secondo ingresso  $f_a$  all'uscita  $y_2 = \theta$ .

Ora si considerino come valori dei parametri fisici i seguenti:

- $J = 5000 \text{ Kg m}^2$
- $m = 2000 \text{ Kg}$
- $b = 150 \text{ N } \frac{\text{s}}{\text{m}}$
- $\beta = 15 \text{ N m } \frac{\text{s}}{\text{rad}}$
- $g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
- $l = 10 \text{ m}$

Sostituendo tali valori nelle due funzioni in (2.5), si ottengono le seguenti funzioni:

$$G_1(s) = \frac{1}{s(150 + 2000s)}$$

$$G_2(s) = \frac{20}{s(15 + 5000s)}$$

Ora, per completezza, si osservi il comportamento delle funzioni di trasferimento appena ricavate tracciando i rispettivi diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi:

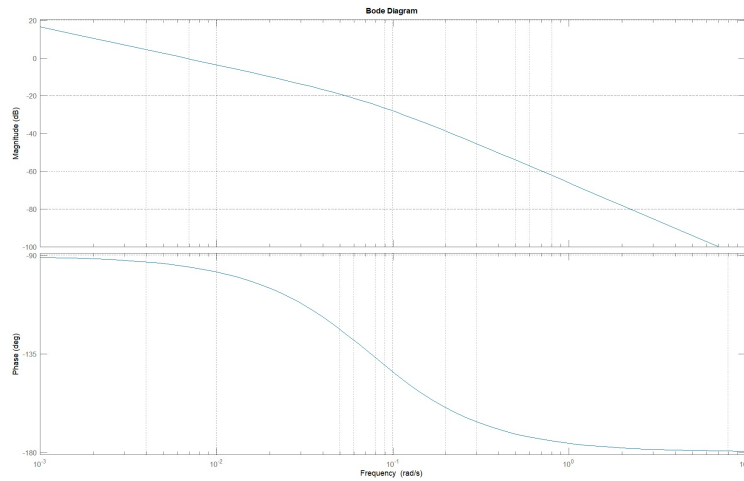


Figura 5: Diagramma di Bode della funzione  $G_1(s)$

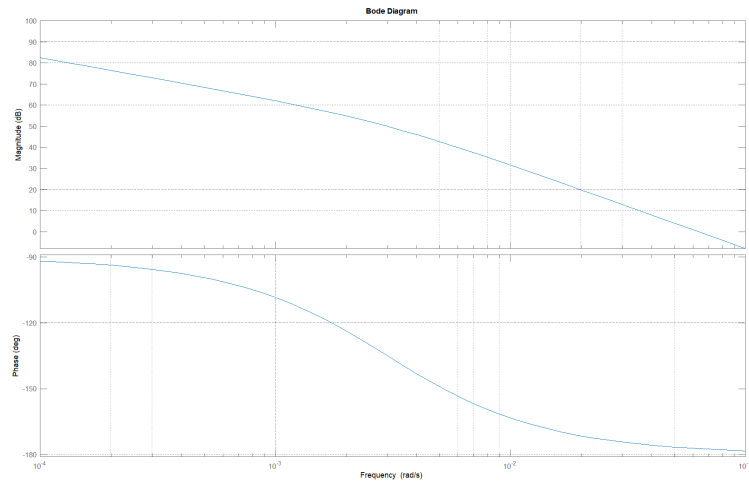


Figura 6: Diagramma di Bode della funzione  $G_2(s)$



### 3 Controllo

In questo capitolo si procederà con la sintesi di controllori che assicurino il rispetto di determinate specifiche durante le varie fasi di volo del convertiplano.

In particolare, si andrà prima a progettare un controllore che agisce sulla posizione verticale del velivolo, ossia su  $z$ . Successivamente si procederà alla sintesi di un controllore che agisca sulla posizione angolare del velivolo, ossia su  $\theta$ .

#### 3.1 Controllo della posizione $z$

Il primo controllore da progettare sarà quello che regola la salita verticale del velivolo. In particolare, dal momento che il valore di  $z$  all'equilibrio trovato era arbitrario, si impone  $\bar{z} = 0$  ed, inoltre, si assume che sul sistema agisca la sola forza di spinta verticale  $f_m$ .

Le specifiche da rispettare, durante l'elevazione verticale del convertiplano, sono le seguenti:

- venga raggiunta la quota di 0.5m, raggiungendo al massimo un valore pari a 0.55 m;
- si porti ad almeno il 95% della quota di regime, senza più uscirne, in un tempo inferiore ad 1s.

Come detto in precedenza, sul sistema agisce la sola forza  $f_m$ , dunque si prende in considerazione unicamente la seguente funzione di trasferimento:

$$G_1(s) = \frac{1}{s(b + ms)} = \frac{1}{s(150 + 2000s)}. \quad (3.1)$$

Innanzitutto, dalla funzione di trasferimento si nota che il sistema presenta un polo semplice nell'origine, dunque il sistema da esso ottenuto per retroazione unitaria negativa è un sistema di tipo 1. Si deduce quindi che il sistema in catena chiusa a regime si porta alla quota senza errore e dunque non si dovranno apportare modifiche al tipo del sistema tramite l'azione di controllo.

La specifica sul tempo equivale a imporre che il tempo di assestamento al 5% non superi 1s, ossia:  $t_{a,5\%} = 1s$ .

D'altro canto, la specifica sulla massima quota raggiungibile (ossia 0.05 m sopra la quota di regime) equivale a dire che la massima sovraelongazione percentuale sia al massimo il 10%, che si indica con  $S \leq 10\%$ .

Dal punto di vista del controllo, risulta più conveniente convertire i vincoli espressi nel dominio del tempo in vincoli nel dominio della frequenza. Pertanto, si procede con una breve spiegazione su come effettuare questa conversione.

Per prima cosa si prenda in considerazione la funzione di trasferimento di un sistema del secondo ordine, con due poli complessi coniugati  $p = \alpha + j\beta$ , del tipo:

$$G(s) = \frac{1}{1 + 2\delta \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}},$$

in cui  $\omega_n = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$  è detta *pulsazione naturale* e  $\delta = -\frac{\alpha}{\omega_n}$  è detto *coefficiente di smorzamento*. In particolare si trova che  $\beta = \omega_n \sqrt{1 - \delta^2}$  e che per avere poli complessi coniugati si deve avere  $-1 < \delta < 1$ . Per lo studio della risposta al gradino si valuta solo il caso stabile, ossia quando si hanno poli a parte reale negativa, che corrisponde ai valori  $0 < \delta < 1$ .

Applicando l'ingresso  $U(s) = 1/s$  alla funzione di trasferimento e antitrasformando si ottiene facilmente la risposta al gradino per il sistema di secondo ordine:

$$y(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s(1 + 2\delta \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2})} \right\} = (1 - Ae^{-\delta\omega_n t} \sin(\beta t + \phi))H(t)$$

dove  $A = \frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}}$  e  $\phi = \arctan(\frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}) = \arccos(\delta)$ . Invece,  $H(t)$  è la funzione gradino (o di Heaviside) definita come segue:

$$H(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

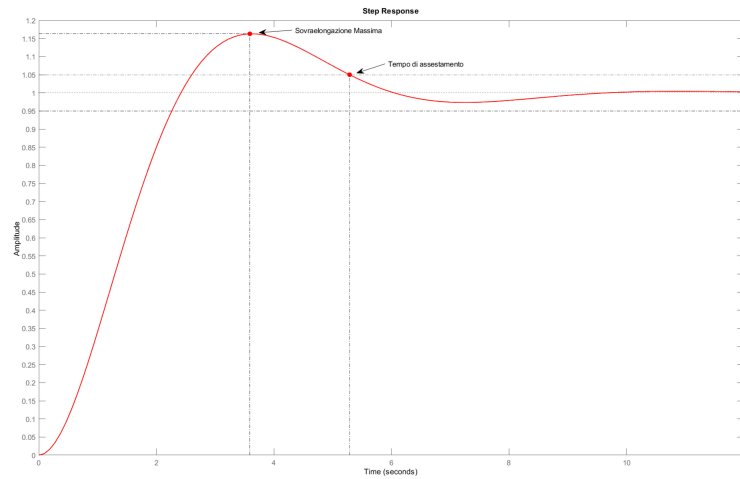


Figura 7: Risposta al gradino di un sistema del secondo ordine

In Figura 7, che rappresenta una generica risposta al gradino di un sistema del secondo ordine, risulta evidente che il valore di regime viene superato nelle prima fasi della risposta. Questo fenomeno è rappresentato dal termine di sovravelongazione massima che indichiamo con il simbolo  $S$ . Il valore di  $S$  è dato dalla differenza tra il valore massimo raggiunto ( $y_{max}$ ) e il valore di regime raggiunto ( $\bar{y}$ ), normalizzata rispetto alla differenza tra valore iniziale ( $y_0$ ) e valore a regime. Risulta quindi:

$$S = \frac{|y_{max} - \bar{y}|}{|\bar{y} - y_0|} \cdot 100\%$$

Si può poi ricavare la relazione che lega la massima sovraelongazione  $S$  e il coefficiente di smorzamento  $\delta$  imponendo:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= -Ae^{-\delta\omega_n t} \beta \cos(\beta t + \phi) + A\delta\omega_n e^{-\delta\omega_n t} \sin(\beta t + \phi) \\ &\Leftrightarrow \delta\omega_n \sin(\beta t + \phi) - \omega_n \sqrt{1 - \delta^2} \cos(\beta t + \phi) = 0 \\ &\Leftrightarrow \tan(\beta t + \phi) = \frac{\sqrt{1 - \delta^2}}{\delta} \end{aligned}$$

Dato che  $\phi = \arctan \frac{\sqrt{1 - \delta^2}}{\delta}$  si deve avere  $\beta t = k\pi$  con  $k = 0, 1, \dots$  allora si ottiene, per gli istanti di massimo o minimo, la seguente espressione:

$$t_k = \frac{k\pi}{\beta} = \frac{k\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \delta^2}}$$

Sostituendo  $t_k$  nell'equazione di risposta al gradino si ottiene:

$$y(t_k) = 1 - \frac{e^{-\frac{k\pi\delta}{\sqrt{1 - \delta^2}}}}{\sqrt{1 - \delta^2}} \sin k\pi + \phi = 1 - (-1)^k e^{-\frac{k\pi\delta}{\sqrt{1 - \delta^2}}}$$

Dalla espressioni precedenti si ricava  $T_m = \frac{1}{\omega_n \sqrt{1 - \delta^2}}$  e inoltre:

$$S = y_{t_1} - 1 = e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1 - \delta^2}}} \cdot 100\% \quad (3.2)$$

Pertanto la massima sovraelongazione avviene tanto prima quanto maggiore è la pulsazione naturale e tanto più tardi quanto maggiore è lo smorzamento. Invece il picco di sovraelongazione è funzione solo dello smorzamento della coppia di poli del sistema e decresce rapidamente con esso.

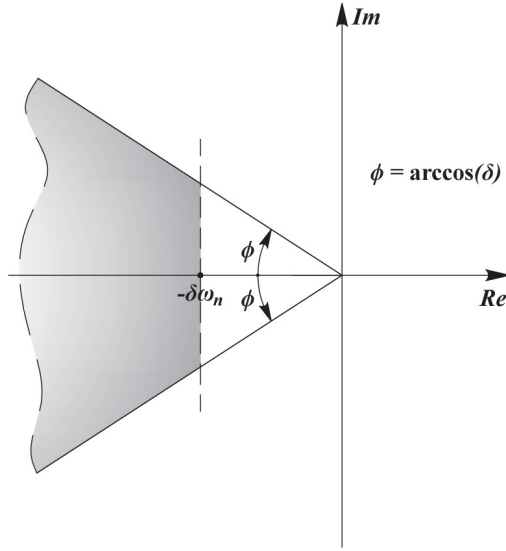


Figura 8:

Per fare in modo che la sovraelongazione non superi mai un valore massimo  $S_{max}$ , il sistema deve avere smorzamento maggiore o uguale di un valore  $\delta_{min}$  ricavabile dall'equazione sopra. Inoltre i poli del sistema devono appartenere ad un settore conico con asse la semiretta reale negativa e semiapertura  $\phi_{max} = \arccos(\delta_{min})$ , come raffigurato in Figura 8.

Affinché il sistema sia sufficientemente rapido nella risposta al gradino, si impone invece che il tempo di assestamento sia sufficientemente piccolo. In particolare il tempo di assestamento  $t_{a,p\%}$  al  $p\%$  è definito come il valore più piccolo per il quale vale:

$$|1 - y(t)| = |Ae^{-\delta\omega_n t} \sin(\beta t + \phi)| \leq \frac{p}{100}, \quad \forall t \geq t_{a,p\%}.$$

Risulta difficile valutare esplicitamente la relazione tra  $t$ ,  $\delta$  e  $\omega_n$  a causa del termine sinusoidale, pertanto si può dare un'approssimazione per eccesso assegnando a  $|\sin(\beta t + \phi)|$  il suo valore massimo nel periodo. Essendo  $A = 1/\sqrt{1 - \delta^2} > 0$ , per  $0 < \delta < 1$  si può riscrivere:

$$e^{-\delta\omega_n t} \leq \frac{p}{100A},$$

ed applicando il logaritmo naturale ad entrambi i membri si ottiene

$$\delta\omega_n t \geq -\ln \frac{p}{100} + \ln(A)$$

da cui si ricava

$$t_{a,p\%} \approx \frac{4.6 - \ln(p) - \frac{1}{2} \ln(1 - \delta^2)}{\delta\omega_n}.$$

E per smorzamenti  $\delta$  sufficiente piccoli (per valori di  $\delta < 0.8$  circa) la relazione può essere ulteriormente approssimata come:

$$t_{a,p\%} \approx \frac{4.6 - \ln(p)}{\delta\omega_n}. \quad (3.3)$$

Concludendo, si nota che, nel caso di sistemi di secondo ordine con due poli complessi coniugati, il tempo di assestamento è legato alla parte reale dei poli e la sovraelongazione allo smorzamento.

Ora, grazie a questa cenno teorico, si possono ricavare i parametri di *margin* di fase e *pulsazione di attraversamento* per la sintesi del controllore. In particolare si può sfruttare la trattazione precedente in quanto il sistema in catena chiusa che si otterrà è approssimabile alla funzione di trasferimento del secondo ordine analizzata.

Innanzitutto si riprende l'equazione (3.2) e, imponendo il vincolo che  $S \leq 10\%$ , si ottiene:

$$S = e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}} \leq 0.1$$

Andiamo a ricavare  $\delta$ :

$$\begin{aligned} e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}} &\leq 0.1 \\ \Leftrightarrow -\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}} &\leq \ln 0.1 \\ \Leftrightarrow \pi\delta &\geq -\ln 0.1 \sqrt{1-\delta^2} \\ \Leftrightarrow (\pi\delta)^2 &\geq (\ln 0.1)^2 (1-\delta^2) \\ \Leftrightarrow \delta^2 &\geq \frac{(\ln 0.1)^2}{\pi^2 + (\ln 0.1)^2} \approx 0.3495 \\ \Leftrightarrow \delta &\approx 0.5912 \end{aligned}$$

Ora si procede a ricavare il margine di fase tramite la relazione che lo lega allo smorzamento  $\delta$  calcolato qui sopra, in particolare si ha:

$$\delta = \sin\left(\frac{m_\phi}{2}\right).$$

La relazione però si basa su ipotesi semplificative che, nella pratica non vengono verificate precisamente. Pertanto, sotto l'ipotesi che si voglia trovare un margine di fase inferiore ai 1.3 radianti (ossia  $75^\circ$ ), si può usare la seguente relazione che ne approssima il valore:

$$\delta = \frac{m_\phi}{2} \frac{\pi}{180} \approx \frac{m_\phi}{100}$$

dove il margine di fase è espresso in gradi. Dunque si ricava il margine di fase come:

$$m_\phi \approx 100\delta \approx 59.12^\circ \approx 60^\circ.$$

Ora sfruttando la relazione (3.3) relativa al tempo di assestamento

$$t_{a,p\%} \approx \frac{4.6 - \ln(p)}{\delta\omega_n}$$

e imponendo come valore di  $p = 5\%$  e il valore di  $t_{a,5\%} = 1s$ , si ricava:

$$\omega_n \approx \frac{3}{\delta t_{a,5\%}} = 5.0744 \text{ rad/s}$$

Grazie ai valori trovati relativi a *margin di fase* e *pulsazione di attraversamento*, si può procedere alla sintesi del controllore. Rispettando infatti questi parametri si dovrebbe rientrare, come sarà verificato in seguito, nei limiti imposti sui parametri *tempo di assestamento* e *sovraelongazione massima*. In particolare si devono rispettare:

$$\begin{cases} \omega_a^* \geq 5.07 \text{ rad/s} \\ m_\phi^* \geq 60^\circ \end{cases}$$

Per prima cosa si riprenda la funzione di trasferimento (3.1) e il relativo diagramma di Bode in Figura 5 del paragrafo 2.3. Si osservi come la pulsazione di attraversamento sia pari a  $\omega_a = 0.00664 \text{ rad/s}$ , mentre la richiesta è che sia superiore a  $\omega_a^* = 5.07 \text{ rad/s}$ . Inoltre si osserva come il margine di fase, in corrispondenza della pulsazione di attraversamento desiderata  $m_\phi(\omega_a^*)$  sia quasi nullo, dunque un valore inferiore alle specifiche richieste. Pertanto, al fine di rientrare nei vincoli appena trovati, si procede alla sintesi di un compensatore  $C_1(s)$ . In particolare si nota che il caso affrontato è un caso noto di azione correttiva nella sintesi per tentativi, ossia:

$$\begin{cases} \omega_a < \omega_a^* \\ m_\phi(\omega_a^*) < m_\phi^* \end{cases}$$

dunque si andrà a realizzare una rete anticipatrice del tipo:

$$C_{ant}(s) = \frac{1 + \alpha s}{1 + \alpha T s} \quad T > 0, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Si procede a calcolare il modulo in corrispondenza della pulsazione di attraversamento desiderata  $\omega_a^* = 5.07 \text{ rad/s}$ , ossia:

$$\begin{aligned} |G_1(j\omega_a^*)| &= \left| \frac{1}{j\omega_a^* 2000} \frac{1}{\frac{150}{2000} + j\omega_a^*} \right| = \frac{1}{\omega_a^* 2000} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{150}{2000}\right)^2 + (\omega_a^*)^2}} = \\ &= 1.9449 \times 10^{-5} \approx -94.22 \text{ dB} \end{aligned}$$

Al fine di trovare dei valori accettabili per  $\alpha$  e  $T$  si sfruttano le seguenti formule, derivabili analiticamente:

$$\alpha = \frac{M \cos(\phi) - 1}{M(M - \cos(\phi))} \quad \text{e} \quad T = \frac{M - \cos(\phi)}{m_\phi(\omega_a)^* \sin(\phi)} \quad (3.4)$$

In particolare usiamo come valore di  $M$  il seguente:

$$M := \frac{1}{|G_1(j\omega_a^*)|} = \frac{1}{1.9449 \times 10^{-5}} = 51417$$

Invece per quanto riguarda l'incremento di fase  $\phi$ , si prende un valore maggiore di  $m_\phi^* - m_\phi(\omega_a^*)$  e pertanto si può prendere come riferimento un  $\phi \approx 75^\circ$ . Per poter utilizzare le formule seguenti è necessario che siano rispettati i seguenti vincoli:  $M > 1$  e  $\phi > 0$ . Inoltre deve anche essere rispettato  $M > \frac{1}{\cos(\phi)}$ , in modo tale che il parametro  $\alpha$  risulti positivo.

Svolgendo i calcoli con i valori ricavati sopra si trova:

$$\alpha = 0.000005 \quad \text{e} \quad T = 10499$$

Dunque il compensatore trovato risulta essere

$$C_1(s) = C_{ant}(s) = \frac{1 + Ts}{1 + \alpha Ts} = \frac{1 + 10499s}{1 + 0.052s}$$

il cui diagramma di Bode è il seguente:

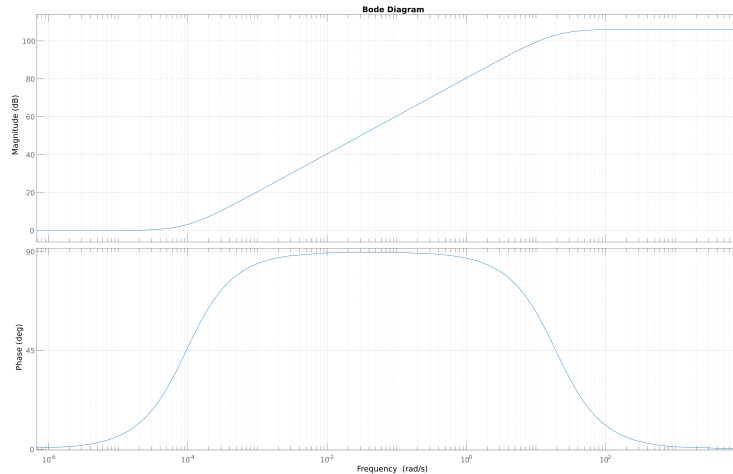


Figura 9: Diagramma di Bode del compensatore  $C_1(s)$

Ora si calcola la funzione di trasferimento del sistema in catena aperta e si ottiene:

$$\tilde{G}_1(s) = C_1(s)G_1(s) = \frac{10499s + 1}{104s^3 + 2008s^2 + 150s}$$

e si traccia il corrispondente diagramma di Bode:

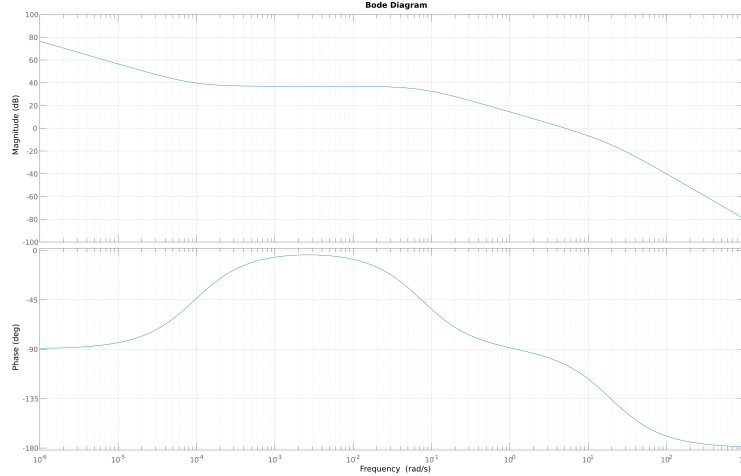


Figura 10: Diagramma di Bode di  $\tilde{G}_1(s) = C_1(s)G_1(s)$

Analizzando il diagramma di Bode di  $\tilde{G}_1(s)$  si può osservare che il margine di fase è  $m_\phi \approx 76^\circ$  e la pulsazione di attraversamento è  $\omega_a \approx 5.08 \text{ rad/s}$ . Pertanto, le specifiche imposte in catena aperta sono rispettate. Successivamente, verificheremo che anche le specifiche temporali del sistema in catena chiusa siano soddisfatte, per confermare l'efficacia del controllore.

### 3.2 Controllo della posizione angolare $\theta$

In questa parte della tesi andremo a progettare un controllore per garantire il rispetto di determinate specifiche sull'inclinazione del convertiplano. In particolare si andrà a considerare come uscita la posizione angolare  $\theta$  e come ingresso la sola forza di spinta angolare, che era stata indicata con  $f_a$ . Inoltre si assume che allo stato di equilibrio l'angolo di inclinazione sia nullo, risulta infatti  $\bar{\theta} = 0$ .

Si impone che il velivolo rispetti le seguenti specifiche:

- venga raggiunto un angolo di inclinazione pari a  $20^\circ$  e non venga superato il valore di  $22^\circ$ ;
- si raggiunga almeno il 95% del valore di regime, senza più uscirne, entro un tempo massimo di 3 secondi.

La funzione di trasferimento considerata in questo caso è rappresentata dal termine:

$$G_2(s) = \frac{2l}{s(\beta + Js)} = \frac{20}{s(15 + 5000s)}. \quad (3.5)$$



Anche in questo caso il sistema retroazionato si porta al valore di regime senza errori, in quanto è presente un polo dell'origine e dunque il sistema in catena chiusa è di tipo 1. Pertanto non sarà necessario incrementare il tipo del sistema. Per quanto riguarda le specifiche, il vincolo che l'angolo non superi i  $22^\circ$  equivale a imporre che non si superi di più del 10% il valore a regime, ossia che la *sovraelongazione percentuale massima* sia  $S \leq 10\%$ . Mentre la specifica che richiede di raggiungere e mantenere l'inclinazione in un intorno del valore di regime con tolleranza del 5%, in un tempo inferiore ai 3s, equivale ad imporre che il *tempo di assestamento al 5%* sia  $t_{a,5\%} < 3s$ .

Ora, riprendendo la teoria trattata nel paragrafo precedente, procederemo a convertire i parametri temporali del sistema retroazionato nei corrispondenti parametri in frequenza per il sistema in catena aperta. Anche in questo caso la funzione di trasferimento in catena chiusa può essere approssimata ad un sistema con funzione di trasferimento di secondo ordine. In particolare dalla formula (3.2) si trova:

$$S = e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}} \leq 0.1$$

Si procede dunque a ricavare  $\delta$ :

$$\begin{aligned} e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}} &\leq 0.1 \\ \Leftrightarrow -\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}} &\leq \ln 0.1 \\ \Leftrightarrow \pi\delta &\geq -\ln 0.1 \sqrt{1-\delta^2} \\ \Leftrightarrow (\pi\delta)^2 &\geq (\ln 0.1)^2 (1-\delta^2) \\ \Leftrightarrow \delta^2 &\geq \frac{(\ln 0.1)^2}{\pi^2 + (\ln 0.1)^2} \approx 0.3495 \\ \Leftrightarrow \delta &\approx 0.5912 \end{aligned}$$

Ora si procede a ricavare il margine di fase tramite la relazione che lo lega allo smorzamento  $\delta$  appena calcolato:

$$\delta = \sin\left(\frac{m_\phi}{2}\right)$$

Come visto nel paragrafo precedente, la relazione si basa su ipotesi semplificative che nella pratica non vengono verificate precisamente. Pertanto, sotto l'ipotesi che si voglia trovare un margine di fase inferiore ai 1.3 radianti (ossia  $75^\circ$ ), si può usare la seguente relazione che ne approssima il valore:

$$\delta = \frac{m_\phi}{2} \frac{\pi}{180} \approx \frac{m_\phi}{100}$$

e si ottiene dunque:

$$m_\phi \approx 100\delta \approx 59.12^\circ \approx 60^\circ$$

Sfruttando invece la relazione (3.3) relativa al tempo di assestamento:

$$t_{a,p\%} \approx \frac{4.6 - \ln(p)}{\delta\omega_n}$$

ed imponendo i vincoli sopra, ossia  $p = 5\%$  e  $t_{a,5\%} = 3s$  si trova:

$$\omega_T \approx \frac{3}{\delta t_{a,5\%}} = 1.6915 \text{ rad/s}$$

Ora è possibile procedere alla sintesi del controllore, in modo che i vincoli trovati relativi a *margin di fase* e *pulsazione di attraversamento* per il sistema in catena aperta  $C_2(s)G_2(s)$  siano rispettati. Rispettando questi parametri si dovrebbe rientrare nei limiti imposti per il *tempo di assestamento* e la *sovraelongazione massima*, come sarà verificato in seguito.

In particolare, dunque, si dovrà imporre:

$$\begin{cases} \omega_a^* \geq 1.69 \text{ rad/s} \\ m_\phi^* \geq 60^\circ \end{cases}$$

Ricordando il diagramma di Bode della funzione di trasferimento (3.5), rappresentato in Figura 6 nel paragrafo 2.3, si può notare che la pulsazione di attraversamento è pari a  $\omega_a = 0.0632 \text{ rad/s}$ , inferiore dunque a quella desiderata.

Mentre, per quanto concerne il margine di fase in corrispondenza della pulsazione di attraversamento desiderata, si trova  $m_\phi(\omega_a^*) = 0.1016^\circ$ , quasi nullo, e pertanto un valore inferiore rispetto a quello desiderato (almeno  $60^\circ$ ).

Pertanto, al fine di rispettare entrambi i vincoli, si procede con la sintesi per tentativi di un compensatore  $C_2(s)$ . In particolare il caso trovato è il medesimo di quello al paragrafo precedente, ossia:

$$\begin{cases} \omega_a < \omega_a^* \\ m_\phi(\omega_a^*) < m_\phi^* \end{cases}$$

dunque, anche in questo caso, è necessario progettare una rete anticipatrice del tipo:

$$C_{ant}(s) = \frac{1 + \alpha s}{1 + \alpha T s} \quad T > 0, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Per prima cosa si procede a calcolare il valore del modulo in corrispondenza della pulsazione di attraversamento desiderata ( $\omega_a^* = 1.69 \text{ rad/s}$ ):

$$\begin{aligned} |G_2(j\omega_a^*)| &= \left| \frac{20}{j\omega_a^* 5000} \frac{1}{\frac{15}{5000} + j\omega_a^*} \right| = \left| \frac{1}{j\omega_a^* 250} \frac{1}{\frac{15}{5000} + j\omega_a^*} \right| = \\ &= \frac{1}{\omega_a^* 5000} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{15}{5000}\right)^2 + (\omega_a^*)^2}} = 0.0014 \times 10^{-5} \approx -57 \text{ dB} \end{aligned}$$

Dunque si trova:

$$M = \frac{1}{|G_1(j\omega_a^*)|} = 714,3$$

Invece, per quanto riguarda il margine di fase, si calcola il valore di  $\phi$  ossia:

$$\phi = m_\phi^* - m_\phi(\omega_a)^* \approx 60^\circ$$

Anche in questo caso si può imporre un valore  $\phi = 75^\circ$  in modo da rientrare nelle specifiche.

Ora, sfruttando le formule (3.4), si trovano i valori di  $\alpha$  e di  $T$ , sempre ricordando che sono valide solamente se vengono rispettati i vincoli  $M > 1$ ,  $\phi > 0$  e  $M > \frac{1}{\cos \phi}$ .

Svolgendo i calcoli si trova:

$$\alpha = \frac{M \cos(\phi) - 1}{M(M - \cos(\phi))} \approx 3.6 \cdot 10^{-4}$$

$$T = \frac{M - \cos(\phi)}{m_\phi(\omega_a)^* \sin(\phi)} = 437$$

Dunque sostituendo nella precedente espressione di  $C_{ant}(s)$ , si trova il compensatore:

$$C_2(s) = \frac{1 + 437s}{1 + 0,157s}$$

Ora si calcola la funzione di trasferimento del sistema in catena aperta:

$$\tilde{G}_2(s) = C_2(s)G_2(s) = \frac{8740s + 20}{785s^3 + 5002s^2 + 15s}$$

Si osservino ora i rispettivi diagrammi di Bode delle funzioni appena ricavate:

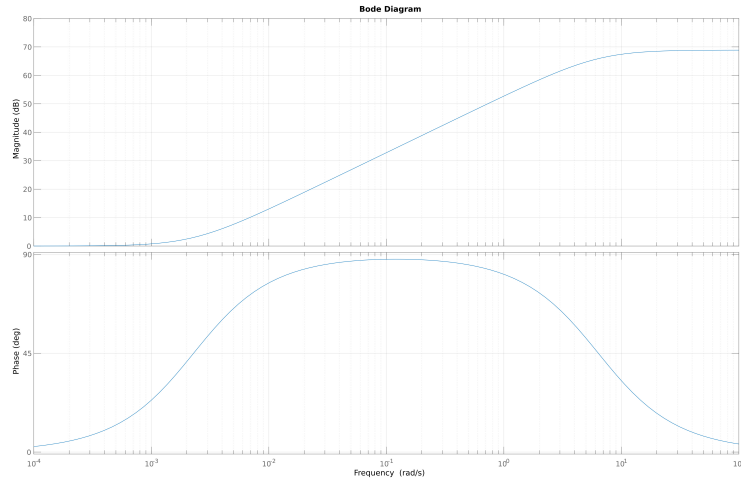


Figura 11: Diagramma di Bode di  $C_2(s)$

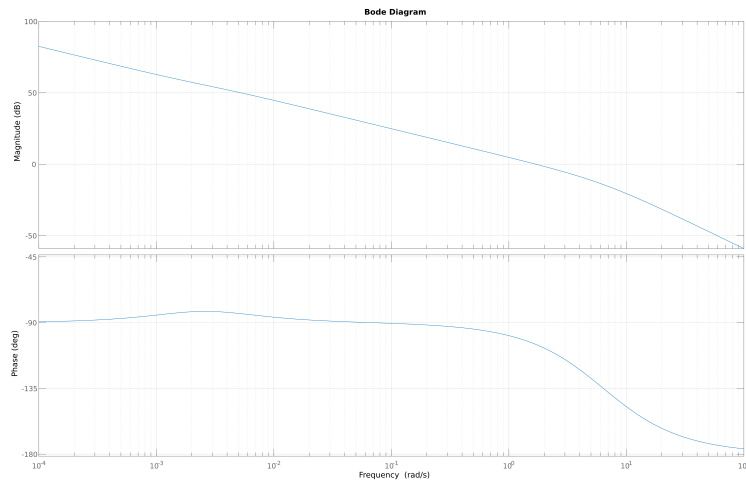


Figura 12: Diagramma di Bode di  $\tilde{G}_2(s) = C_2(s)G_2(s)$

Si può osservare che, nel diagramma di Bode della funzione di trasferimento  $\tilde{G}_2(s)$ , la nuova pulsazione di attraversamento è pari a  $\omega_a = 1.69$  rad/s e margine di fase pari a  $m_\phi \approx 75.2^\circ$ . Dunque le specifiche richieste per il sistema in catena aperta sono state rispettate, si andrà a verificare in seguito che siano rispettati

di conseguenza anche i vincoli nel tempo per la funzione di trasferimento del sistema in catena chiusa.

### 3.3 Analisi dei sistemi in catena chiusa

Dopo aver sintetizzato i due controllori nel paragrafo precedente e aver verificato che i vincoli in frequenza per i sistemi in catena aperta sono rispettati, si procede a verificare che il sistema in catena chiusa e la sua risposta al gradino garantisca il rientro anche nei parametri del tempo.

In particolare si andrà ad analizzare la funzione di trasferimento in catena chiusa data da:

$$W_i(s) = \frac{C_i(s)G_i(s)}{1 + C_i(s)G_i(s)} \quad i = 1, 2$$

Applicando ad essa un ingresso gradino  $U(s) = \frac{1}{s}$  e antitrasformando il risultato ottenuto, si trova la risposta al gradino del sistema nel dominio del tempo, del tipo:

$$y(t)_i = L^{-1} \left\{ \frac{C_i(s)G_i(s)}{1 + C_i(s)G_i(s)} \cdot U(s) \right\} \quad i = 1, 2$$

#### 3.3.1 Analisi di $W_1(s)$

Per prima cosa si procede ad analizzare la funzione di trasferimento in catena chiusa che regola la quota del convertiplano, quella ossia relativa alla funzione di trasferimento  $G_1(s)$  e il compensatore sintetizzato  $C_1(s)$ . Si trova la seguente funzione di trasferimento:

$$W_1(s) = \frac{C_1(s)G_1(s)}{1 + C_1(s)G_1(s)}$$

Inoltre, si osserva il relativo schema a blocchi del sistema in catena chiusa:

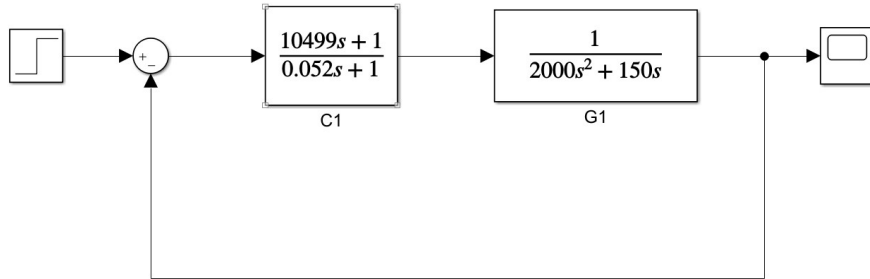


Figura 13: Schema a blocchi relativo a  $W_1(s)$

Il grafico della risposta al gradino del sistema in catena chiusa di Figura 13 risulta:

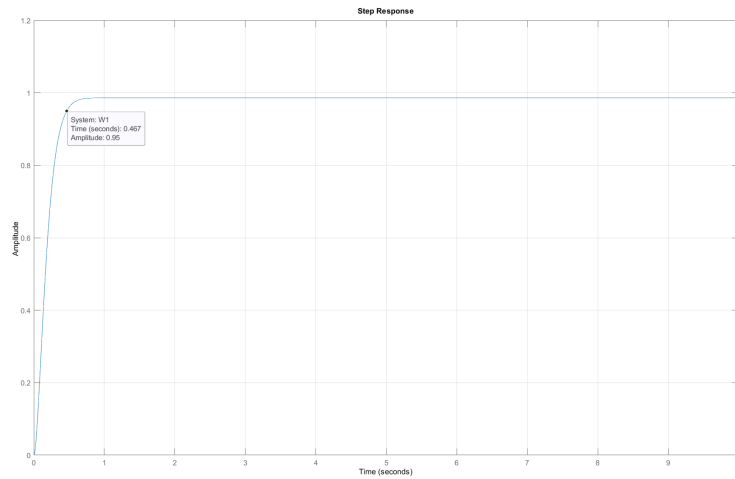


Figura 14: Risposta al gradino di  $W_1(s)$

Osservando la Figura 14 si nota che la sovralongazione risulta nulla in quanto non vi sono superamenti della quota nel transitorio. Inoltre risulta un tempo di assestamento al 5% pari a  $t_{a,5\%} = 0.467s$ , entro il limite prefissato di

1s. Dunque, per quanto riguarda l'elevazione verticale del velivolo, abbiamo il pieno rispetto anche dei vincoli nel tempo del sistema in retroazione.

### 3.3.2 Analisi di $W_2(s)$

Successivamente si analizza il sistema che regola la dinamica di inclinazione del velivolo dato dalla funzione di trasferimento  $G_2$  e il relativo compensatore sintetizzato  $C_2$ . Ora si procede con la verifica dei vincoli sul tempo; in particolare si trova la funzione di trasferimento in catena chiusa come:

$$W_2(s) = \frac{C_2(s)G_2(s)}{1 + C_2(s)G_2(s)}$$

Di seguito è riportato lo schema a blocchi che rappresenta il sistema retroazionato:

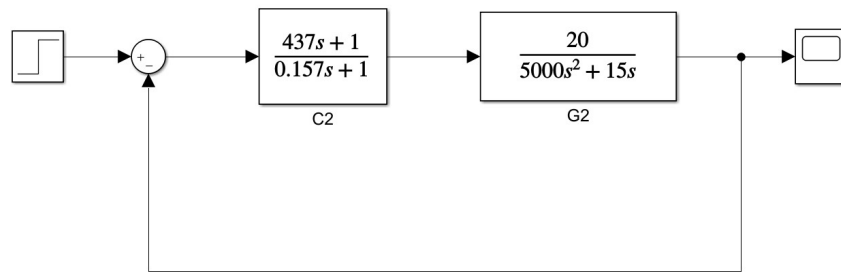


Figura 15: Schema a blocchi  $W_2(s)$

Ora si procede con l'analisi del grafico della relativa risposta al gradino della funzione di trasferimento appena trovata:

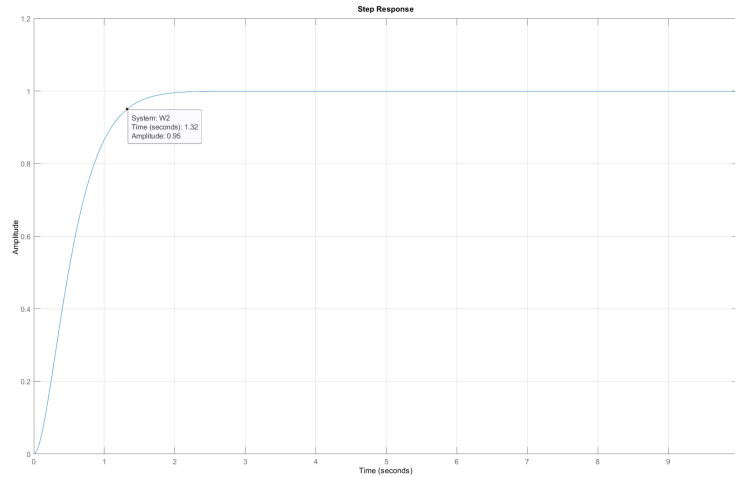


Figura 16: Risposta al gradino di  $W_2(s)$

Come si vede dal grafico in Figura 16, anche in questo caso la sovraelongazione massima è nulla, in quanto il sistema non supera mai la quota di regime prefissata. Inoltre il tempo di assestamento risulta in linea con i parametri che ci siamo prefissati, in particolare abbiamo  $t_{a,5\%} = 1.32s$ , ben inferiore al valore imposto. Pertanto si può concludere che anche il sistema che descrive l'angolazione del convertiplano, rappresentato dalla funzione  $W_2$ , rientra nei parametri prestabiliti, confermando l'efficacia della azione di controllo progettata in precedenza.



## 4 Conclusioni

Il lavoro svolto in questa tesi aveva come obiettivo quello di analizzare la dinamica di volo di un convertiplano, ricavare un modello lineare e progettare controllori che assicurassero il rispetto di specifici parametri di volo.

Inizialmente è stata presentata una breve introduzione sulla storia e sull'evoluzione di questo tipo di velivolo, permettendo una migliore comprensione del suo funzionamento e delle sue potenzialità. Successivamente ci si è concentrati sulla fisica del volo, in particolare sulle leggi della dinamica che regolano la salita in quota e l'inclinazione del mezzo rispetto all'orizzonte, ottenendo le equazioni del modello non lineare. Partendo dalle equazioni del modello, si è proceduto alla linearizzazione intorno a un punto di equilibrio, ottenendo le due equazioni di trasferimento che descrivono la dinamica di volo:  $G_1$  che ne descrive il moto di elevazione e  $G_2$  che ne descrive l'inclinazione.

Il passo successivo ha riguardato l'azione di controllo: sono stati fissati limiti da rispettare in termini di tempo di assestamento e sovraelongazione, e si è trattata la conversione dei vincoli dal dominio del tempo a quello della frequenza, ricavando le relazioni corrispondenti. Successivamente, attraverso la sintesi di controllori per tentativi, sono stati progettati due compensatori  $C_1$  e  $C_2$  ciascuno relativo alla propria funzione di trasferimento. L'analisi della catena aperta di entrambi i sistemi, mediante diagrammi di Bode, ha permesso di verificare che i vincoli in frequenza fossero rispettati. Infine, sono state analizzate le due funzioni di trasferimento per i sistemi in catena chiusa e a partire dal rispettivo grafico della risposta al gradino di ciascun sistema è stato verificato che entrambi i sistemi garantissero rispetto dei vincoli temporali inizialmente imposti.

In conclusione, la sintesi dei controllori ha prodotto buoni risultati, garantendo il rispetto dei vincoli temporali prefissati e assicurando buone prestazioni per entrambi i sistemi in catena chiusa. Alcune semplificazioni sono state necessarie, in particolare nell'analisi del modello e nei dati fisici del convertiplano. Un approfondimento ulteriore, con simulazioni più dettagliate, avrebbe probabilmente fornito dati più accurati, ma ciò esula dalle mie attuali competenze e possibilità.

Questo lavoro mi ha permesso di approfondire gli argomenti affrontati nel corso di Controlli Automatici e di Sistemi e Modelli, tramite una applicazione più pratica dei concetti studiati. Inoltre mi ha permesso di esplorare e approfondire il funzionamento dei convertiplani che, a mio avviso, avranno un ruolo significativo nella mobilità del futuro, grazie alle loro caratteristiche uniche.



## Riferimenti bibliografici

- [1] Maisel, Martin D.; Giulianetti, Demo J.; Dugan, Daniel C. *The History of the XV-15 Tilt Rotor Research Aircraft: From Concept to Flight*. The NASA History Series. Washington DC: Office of Policy and Plans, NASA. (2000)  
<https://www.nasa.gov/wp-content/uploads/2023/04/sp-4517.pdf>
- [2] *Leonardo lancia il brand Agusta come massima espressione di sofisticatezza e tecnologia nel settore elicotteristico VIP* (Roma, 02 ottobre 2021)  
<https://www.leonardo.com/it/press-release-detail/-/detail/02-10-2021-leonardo-launches-agusta-brand-as-the-height-of-sophistication-and-technology-for-the-vip-helicopter-sector?f=/home>
- [3] *Next Generation Civil Tiltrotor (NextGenCTR)* (Brussels, 23 March 2015)  
[https://ec.europa.eu/research/participants/data/ref/h2020/other/guide-appl/jti/h2020-guide-techprog-cleansky-ju\\_en.pdf](https://ec.europa.eu/research/participants/data/ref/h2020/other/guide-appl/jti/h2020-guide-techprog-cleansky-ju_en.pdf)
- [4] Mauro Bisiacco, Maria Elena Valcher - *Controlli Automatici* - Libreria Progetto (2015)
- [5] Antonio Bicchi - *Fondamenti di Automatica (I Parte)* - Versione del 24 Ottobre 2019
- [6] Mauro Bisiacco, Gianluigi Pillonetto - *Sistemi e Modelli* - Società Editrice Esculapio (2017)