

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA



DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE
CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA ELETTRONICA

Propagazione non lineare degli impulsi nelle fibre ottiche e simulazione con MATLAB

Relatore:

Prof. Santagiustina Marco

Laureando:
Vallar Enrico

Correlatore:

Prof. Galtarossa Andrea

Anno Accademico 2021-2022

Data di laurea: 23 Settembre 2022

Indice

1	Introduzione	1
2	Proprietà delle fibre ottiche	3
2.1	Attenuazione	3
2.1.1	Attenuazione intrinseca	3
2.1.2	Attenuazione estrinseca	4
2.2	Dispersione	4
2.2.1	Dispersione Modale	4
2.2.2	Dispersione Cromatica	5
2.2.3	Dispersione dei modi di polarizzazione	6
2.3	Non linearità della fibra	6
3	Propagazione degli impulsi nelle fibre ottiche	7
3.1	Propagazione guidata	7
3.2	Fibra a singolo modo	8
3.3	Propagazione non lineare dell'impulso: NLSE	9
3.4	Regimi di propagazione	12
3.5	Forme alternative della NLSE	13
3.5.1	Parametro N e ampiezza normalizzata	13
3.5.2	Parametro di dispersione del terzo ordine	13
3.5.3	Impulsi ultracorti	14
3.5.4	Attenuazione e normalizzazione	14
4	Realizzazione del programma	15
4.1	Split Step Fourier Method	15
4.1.1	Descrizione matematica del metodo	15
4.1.2	Accuratezza del metodo	16
4.1.3	Aumento dell'accuratezza	16
4.2	Implementazione dell'algoritmo con MATLAB	16
4.2.1	Le classi <i>Fiber</i> e <i>Pulse</i>	17
4.2.2	Il metodo <i>SSFM</i>	19
4.3	Descrizione del programma <i>PulseEvolution</i>	20
4.3.1	MATLAB AppDesigner	21
4.3.2	Installazione	21
4.3.3	Guida all'uso di <i>PulseEvolution</i>	21
5	Simulazioni	27
5.1	GVD - Dispersione della velocità di gruppo	27
5.1.1	Compressione degli impulsi	27
5.2	SPM - Self-Phase Modulation	29
5.2.1	Sfasamento non lineare	29
5.2.2	Evoluzione dello spettro tramite <i>PulseEvolution</i>	30
5.3	Solitoni ottici in regime di dispersione anomalo	31
5.3.1	Descrizione teorica dei solitoni ottici	31
5.3.2	Simulazione dei solitoni con <i>PulseEvolution</i>	32

5.3.3	Radiazione indotta dalla TOD nei solitoni	38
6	Conclusioni	41
A	Codice del programma	43

Capitolo 1

Introduzione

Le fibre ottiche sono guide d'onda dielettriche utilizzate nel settore delle telecomunicazioni per trasmettere informazione sotto forma di impulsi luminosi ad alta frequenza. Sono solitamente realizzate a partire da silice opportunamente drogata, anche se ne esistono diverse varianti. Rispetto ai cavi coassiali, consentono al segnale di propagarsi con un'attenuazione inferiore e, così, permettono la semplificazione dell'infrastruttura che richiede meno amplificatori e la disponibilità di una banda più larga.

A causa della loro struttura e delle proprietà fisiche del dielettrico, vi sono, tuttavia, degli effetti di dispersione, modale e cromatica, che causano una dilatazione temporale del segnale, e di non linearità, che ne modifica le componenti spettrali. Questi fenomeni vengono descritti dall'equazione di Schrödinger non lineare (NLSE), un'equazione differenziale che governa l'evoluzione del campo elettromagnetico lungo la fibra ottica:

$$i\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{i\alpha}{2}A - \frac{\beta_2}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial T^2} + \gamma|A|^2A = 0, \quad (1.1)$$

dove $A := A(z, T)$ è una funzione che descrive l'andamento della forma dell'impulso lungo la sezione longitudinale, α è l'attenuazione, β_2 il parametro di dispersione e γ tiene conto della non linearità.

L'evoluzione della forma dell'impulso lungo la direzione di propagazione può, dunque, portare a fenomeni di interferenza intersimbolica che richiedono la diminuzione della velocità di trasmissione.

Per ottenere un sistema di comunicazione ottimale risulta utile simulare la propagazione del segnale nella fibra ottica. Si realizza, dunque, un'applicazione MATLAB che permette di risolvere la NLSE (e la sua versione più generalizzata) con il metodo numerico dell'evoluzione passo-passo in trasformata di Fourier. Il programma permette di configurare manualmente alcuni dei parametri fisici della fibra simulata e del suo input; visualizza, poi, l'andamento dell'intensità del segnale in funzione della distanza. Inoltre, dispone di una semplice interfaccia grafica.

I capitoli di questa tesi si basano principalmente su quanto esposto nel testo *Nonlinear Fiber Optics* di Govind P. Agrawal [2].

Capitolo 2

Proprietà delle fibre ottiche

Le fibre ottiche di silice permettono di trasmettere segnali a grandi distanza grazie alla bassa attenuazione in alcune finestre dello spettro elettromagnetico. Allo stesso tempo, consentono un'elevata velocità di trasmissione, limitata, però, da fenomeni di dispersione che possono causare interferenza intersimbolica. Si descrivono ora questi fenomeni. Successivamente, invece, verranno trattate le caratteristiche di non linearità.

2.1 Attenuazione

Si considera una fibra priva di giunzioni, non eccessivamente piegata e senza particolari difetti. Durante la trasmissione di un segnale risultano esserci delle perdite per cui la potenza trasmessa è

$$P_T = P_0 \exp(-\alpha L). \quad (2.1)$$

La costante di attenuazione, che dipende dalle caratteristiche fisiche della fibra, è α (Np/m) e può anche essere espressa in [dB/km] usando la formula

$$\alpha_{dB} \cong (10 \log_{10} e) \alpha \approx 4.34 \alpha; \quad (2.2)$$

nel seguito del capitolo l'attenuazione sarà sempre espressa in [dB/km].

2.1.1 Attenuazione intrinseca

Nelle fibre pure è possibile identificare, innanzitutto [6], un'attenuazione intrinseca e non eliminabile dovuta a tre meccanismi dipendenti dalla lunghezza d'onda.

- La **risonanza nell'UV** è causata dalle transizioni elettroniche degli atomi della silice, possibili grazie all'energia della radiazione ad una frequenza tale che $\lambda = 0.1 \mu m$. La coda del profilo di assorbimento, anche detto *Urbach edge*, è osservabile nel vicino infrarosso solo in presenza di opportune quantità di droganti che ne spostano il picco: nel caso delle fibre *step-index* a singolo modo è comunque trascurabile per lunghezze d'onda $\lambda > 1.3 \mu m$. Sperimentalmente, per una fibra drogata con GeO_2 si è trovata la seguente formula:

$$\alpha_{UV} = \left(\frac{1.542g}{46.6g + 60} \right) \exp \left(\frac{4.63}{\lambda} \right) \quad (2.3)$$

dove $g \approx 0.02$ per fibre singolo modo.

- Le molecole di silice e dei droganti possono **transitare da un modo vibrazionale ad un altro** assorbendo energia dalle radiazioni tra $7 \mu m$ e $11 \mu m$. A causa dell'anarmonicità delle vibrazioni, vi sono dei picchi di assorbimento ad armoniche superiori, nell'IR; questi profili si estendono fino al vicino infrarosso. Anche in questo caso una formula ottenuta sperimentalmente permette di calcolare l'attenuazione spettrale:

$$\alpha_{IR} = A \exp(-a_{IR}/\lambda) \quad (2.4)$$

con $A = 7.81 \times 10^{11} dB/km$ e $a_{IR} = 48.48 \mu m$ per fibre $GeO_2 - SiO_2$.

- La **diffusione di Rayleigh** è il fenomeno che consiste nell'assorbimento di una frazione della radiazione guidata da parte dei doppietti elettronici che la riemettono in tutte le direzioni. Infatti, poiché la fibra è realizzata con un materiale amorfo, durante la fabbricazione si ottengono delle fluttuazioni di densità che causano variazioni locali dell'indice di rifrazione. La perdita per diffusione dipende dalla frequenza secondo la relazione

$$\alpha_R = C_R/\lambda^4, \quad (2.5)$$

con C_R costante dipendente da parametri realizzativi.

Valutando la somma di questi contributi, si può osservare come l'assorbimento intrinseco sia minimo per $\lambda = 1.55\mu\text{m}$; le frequenze vicine ad essa fanno parte della "terza finestra" dello spettro.

2.1.2 Attenuazione estrinseca

Le impurità presenti causano l'**attenuazione estrinseca**. Lo ione ossidrilico OH^- presenta una frequenza di risonanza fondamentale a $2.75\mu\text{m}$, ma, poiché i diversi modi vibrazionali sono anarmonici, vi sono dei picchi d'assorbimento anche a $1.38\mu\text{m}$, $1.24\mu\text{m}$ e $0.95\mu\text{m}$. Essendo fondamentale per la trasmissione dei segnali avere l'attenuazione α minore possibile, si sceglie spesso di utilizzare la frequenza corrispondente a $\lambda_0 = 1.55\mu\text{m}$ nel caso in cui vi siano poche impurità (meno di 0.01 ppm ioni OH). Tutti i risultati successivi terranno conto di questa scelta se non diversamente specificato.

Altre perdite si possono verificare a causa del piegamento della fibra o dalla realizzazione di giunzioni. L'immagine seguente mostra l'attenuazione spettrale di una fibra $\text{GeO}_2 - \text{SiO}_2$:

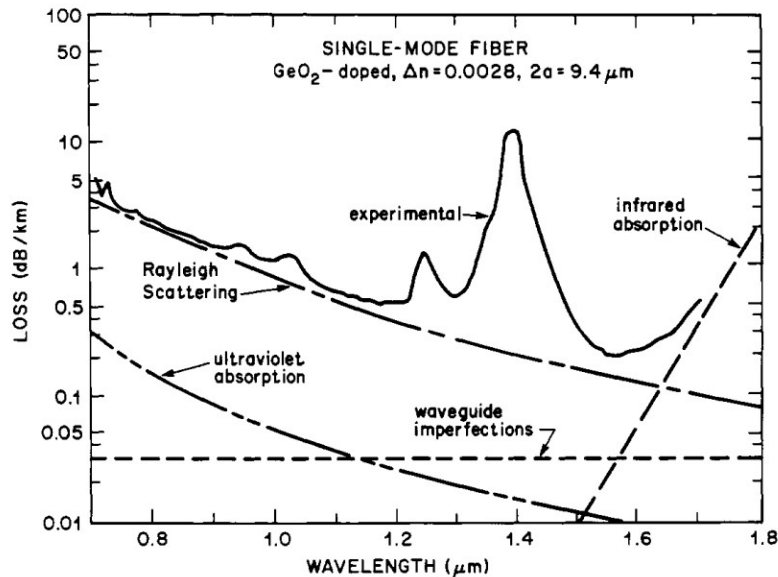


Figura 2.1: Attenuazione spettrale di una fibra $\text{GeO}_2 - \text{SiO}_2$, [9].

2.2 Dispersione

Il fenomeno della dispersione modifica il profilo temporale dell'impulso che si propaga nella fibra ottica, allargandolo man mano che procede lungo la direzione longitudinale z della fibra. Si descrivono di seguito le tre tipologie di dispersione.

2.2.1 Dispersione Modale

La propagazione del campo elettromagnetico ad una data frequenza ω è governata dall'equazione di Helmholtz:

$$\nabla^2 \tilde{\mathbf{E}} + n^2(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} \tilde{\mathbf{E}} = 0 \quad (2.6)$$

A partire da essa è possibile ricavare i modi di propagazione guidata del campo elettromagnetico per la frequenza analizzata. Ad ognuno di essi corrisponde una diversa costante di propagazione β che rappresenta lo sfasamento per unità di lunghezza nella direzione z della fibra. Nel caso in cui ω permetta la propagazione di più modi, allora, dopo una certa distanza, vi saranno dei ritardi intermodali che causano la dilatazione temporale dell'impulso trasmesso. Per evitare questo effetto è necessario utilizzare fibre a singolo modo che entro una frequenza di taglio corrispondente a λ_c permettono il solo modo fondamentale HE_{11} . Questi aspetti verranno approfonditi nel capitolo 3.

2.2.2 Dispersione Cromatica

Si assuma di utilizzare una fibra a singolo modo dove la dispersione modale è assente. L'indice di rifrazione n di un dielettrico varia con la frequenza del campo elettromagnetico che lo attraversa. L'**equazione di Sellmeier** permette di approssimarne la funzione analitica tramite dei parametri ricavati sperimentalmente:

$$n^2(\omega) = 1 + \sum_{j=1}^m \frac{B_j \omega_j^2}{\omega_j^2 - \omega^2}, \quad (2.7)$$

dove ω_j è la pulsazione di risonanza di ordine j per le transizioni elettroniche, mentre B_j è il parametro ricavato tramite fitting sperimentale. Per la fibra di silicio si ottiene un valore di circa $n = 1.445$ per $\lambda = 1.5\mu m$.

Per poter trasmettere informazione è necessario modulare un segnale a frequenza fissa ω_0 . L'impulso è, dunque, formato da diverse componenti spettrali nell'intervallo $\Delta\omega$ centrato in ω_0 . Per ognuna è possibile definire una costante di propagazione $\beta \equiv \frac{\omega n}{c}$. A causa della dipendenza dell'indice di rifrazione dalla frequenza, esse si propagano a velocità diverse causando l'**allargamento dell'impulso** per dispersione cromatica. È possibile valutare questo effetto espandendo in serie di Taylor la costante di propagazione del modo:

$$\beta(\omega) = \beta_0 + \beta_1(\omega - \omega_1) + \frac{1}{2}\beta_2(\omega - \omega_1)^2 + \frac{1}{6}\beta_3(\omega - \omega_1)^3 + \dots, \quad (2.8)$$

dove si è definito $\beta_m = \left(\frac{d^m \beta}{d\omega^m} \right)_{\omega=\omega_0}$ con $(m = 0, 1, 2, \dots)$.

Si definiscono le seguenti relazioni:

$$\beta_1 = \frac{1}{v_g} = \frac{1}{c} \left(n + \omega \frac{dn}{d\omega} \right) \quad (2.9)$$

$$\beta_2 = \frac{1}{c} \left(2 \frac{dn}{d\omega} + \omega \frac{d^2 n}{d\omega^2} \right). \quad (2.10)$$

L'involuppo si muove alla velocità di gruppo v_g , mentre β_2 è il parametro che rappresenta la dispersione della velocità di gruppo (GVD); quest'ultimo si annulla in $\lambda_D = 1.31\mu m$ per le fibre di silice in cui sono stati considerati i contributi dei processi che la rendono una guida d'onda. Quando l'impulso è molto corto o $\beta_2 = 0$ è necessario includere β_3 , il parametro di *third order dispersion* (TOD) per poter valutare correttamente la dispersione. È inoltre possibile realizzare fibre *dispersion-shifted* con $\lambda_D = 1.55\mu m$.

Per valutare la dispersione è spesso utilizzato il parametro D , così definito:

$$D = \frac{d\beta_1}{d\lambda} = -\frac{2\pi c}{\lambda^2} \beta_2 = -\frac{\lambda}{c} \frac{d^2 n}{d\lambda^2}, \quad (2.11)$$

dove c è la velocità della luce nel vuoto.

Alcuni effetti non lineari dipendono dall'interazione tra due diversi impulsi e, se hanno frequenze diverse e vengono trasmessi contemporaneamente, smettono di interagire dopo una *distanza di walk-off* L_w , quando l'impulso più veloce supera completamente il secondo. In questo caso si considera il parametro di *walk-off*:

$$d_{12} = \beta_1(\lambda_1) - \beta_1(\lambda_2) \quad (2.12)$$

Se gli impulsi hanno la stessa larghezza iniziale T_0 si ottiene:

$$L_w = T_0 / |d_{12}|. \quad (2.13)$$

2.2.3 Dispersione dei modi di polarizzazione

La dispersione dei modi di polarizzazione, o PMD, è un ulteriore meccanismo di dispersione causato dall'imperfetta simmetria cilindrica del nucleo. Considerando i modi LP (linearmente polarizzati) si avranno due costanti di propagazione diverse, β_x e β_y , a seconda della polarizzazione del campo elettromagnetico. Si definisce il seguente parametro di **birifrangenza modale**:

$$B_m = \frac{|\beta_x - \beta_y|}{k_0} = |n_x - n_y|. \quad (2.14)$$

Se un impulso presenta entrambe le componenti di polarizzazione allora le loro velocità di gruppo sono diverse. L'allargamento temporale alla fine di un tratto L , in assenza di accoppiamento, può essere ricavato a partire dal ritardo tra le componenti:

$$\Delta T = \left| \frac{L}{v_{gx}} - \frac{L}{v_{gy}} \right| = L|\beta_{1x} - \beta_{1y}|. \quad (2.15)$$

In realtà, B_m non è costante nella fibra a causa delle fluttuazioni della forma del nucleo, quindi, ΔT viene più accuratamente descritto in maniera statistica.

Nel seguito, **la PMD verrà trascurata**.

2.3 Non linearità della fibra

La fibra ottica è un mezzo dielettrico e, in quanto tale, se attraversato da un campo elettrico, le molecole vengono polarizzate. Bisogna dunque considerare la polarizzazione \mathbf{P} non lineare con \mathbf{E} ; vale, infatti, la seguente formula [5]:

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0(\chi^{(1)} \cdot \mathbf{E} + \chi^{(2)}:\mathbf{E}\mathbf{E} + \chi^{(3)};\mathbf{E}\mathbf{E}\mathbf{E}\dots). \quad (2.16)$$

Nelle fibre di silice il tensore suscettibilità del terzo ordine $\chi^{(3)}$ è il maggior responsabile degli effetti non lineari, mentre si può considerare nullo $\chi^{(2)}$. Quest'ultimo infatti è non-nullo solo nei materiali le cui molecole non sono centro-simmetriche; SiO_2 è una molecola centro-simmetrica. $\chi^{(3)}$ risulta responsabile della **rifrazione non lineare**, ovvero, della dipendenza dell'indice di rifrazione dall'intensità del campo elettrico che attraversa il mezzo.

In una delle prime approssimazioni, si può definire l'indice di rifrazione di una fibra ottica tramite la seguente equazione:

$$\tilde{n}(\omega, |E|^2) = n(\omega) + n_2|E|^2, \quad (2.17)$$

dove $n(\omega)$ è la componente lineare determinata dall'equazione di Sellmeier (2.7), mentre il coefficiente non lineare dell'indice di rifrazione n_2 dipende da $\chi^{(3)}$ tramite la relazione (valida per un campo elettrico polarizzato lungo \hat{x}):

$$n_2 = \frac{3}{8n} \text{Re}(\chi_{xxxx}^{(3)}). \quad (2.18)$$

I due effetti più rilevanti sono quelli di *self-phase modulation* e di *cross-phase modulation*. Come verrà discusso in seguito, la non linearità modifica la frequenza delle componenti spettrali che compongono l'impulso modificandone la forma.

Capitolo 3

Propagazione degli impulsi nelle fibre ottiche

3.1 Propagazione guidata

Si consideri una guida d'onda il cui asse longitudinale è orientato lungo la direzione z . Il campo elettromagnetico $\tilde{\mathbf{E}}(x, y, z) = \tilde{\mathbf{E}}_0(x, y) \exp(-j\beta z)$ viene confinato in una porzione del piano xy . β è la costante di propagazione e determina lo sfasamento per unità di lunghezza del campo lungo z ; in maniera analoga, β_ϕ e β_ρ sono le costanti di propagazione lungo ϕ e ρ . Se $\mathbf{k}_1 = n_1 \mathbf{k}_0$ è il vettore d'onda (che in ottica geometrica descrive la direzione dei raggi) allora le costanti di propagazione nelle diverse direzioni sono legate dalla seguente relazione:

$$\beta_\rho^2 + \beta_\phi^2 + \beta^2 = n_1^2 k_0^2. \quad (3.1)$$

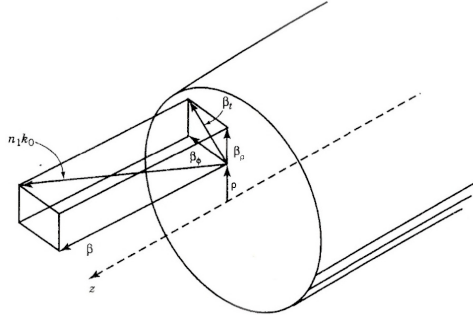


Figura 3.1: Decomposizione del vettore d'onda nelle diverse componenti all'interno del nucleo della fibra. Ad ogni componente è associata la corrispondente costante di propagazione [6].

Partendo dalle equazioni di Maxwell applicate alla fibra di silice dove la densità di corrente, la densità di carica e la polarizzazione magnetica sono nulle, si ricava la seguente equazione:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}. \quad (3.2)$$

Si considera ora il vettore polarizzazione costituito dalla parte lineare $\mathbf{P}_L(\mathbf{r}, t)$ a cui si somma la parte non lineare $\mathbf{P}_{NL}(\mathbf{r}, t)$. Per poter risolvere l'equazione è necessario fare una prima approssimazione, considerando $\mathbf{P}_{NL}(\mathbf{r}, t)$ una **piccola perturbazione della parte lineare**.

Considerando nulla la parte non lineare, è possibile riscrivere l'equazione (3.2), ora lineare in \mathbf{E} , nel dominio della frequenza. Si ottiene l'equazione di Helmholtz:

$$\nabla^2 \tilde{\mathbf{E}} + \varepsilon(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = 0, \quad (3.3)$$

dove si è usata l'uguaglianza $\varepsilon(\omega) = 1 + \tilde{\chi}^{(1)}(\omega)$ che definisce la costante dielettrica. È possibile considerare nulla l'attenuazione per le frequenze solitamente utilizzate per le telecomunicazioni e, dunque, si approssima $\varepsilon(\omega) = n(\omega)^2$. Si riscrive l'equazione di Helmholtz in un sistema di riferimento cilindrico:

$$\frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{E}}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{\mathbf{E}}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{E}}}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{E}}}{\partial z^2} + n^2 k_0^2 \tilde{\mathbf{E}} = 0. \quad (3.4)$$

Nella formula precedente $k_0 = \omega/c$, mentre $\tilde{\mathbf{E}}$ è la trasformata di Fourier del campo elettrico. Poiché il campo elettromagnetico deve soddisfare le equazioni di Maxwell, solo una componente di ognuno dei due campi è indipendente dalle altre e può essere scelta a piacimento. Sia m un intero positivo; la soluzione dell'equazione della componente lungo l'asse longitudinale z è del tipo:

$$\tilde{E}_z(\mathbf{r}, \omega) = A(\omega) F(\rho) e^{im\phi} e^{i\beta z}. \quad (3.5)$$

Si determina ora $F(\rho)$, che descrive la distribuzione della potenza ottica lungo la sezione trasversale della fibra. Dalle equazioni precedenti appare essere la soluzione dell'equazione differenziale di Bessel:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \rho} + (n^2 k_0^2 - \beta^2 - \frac{m^2}{\rho^2}) F = 0 \quad (3.6)$$

e assume forme diverse a seconda che la si calcoli nel nucleo o nel mantello. La costante di propagazione β si trova imponendo la condizione di continuità all'interfaccia di $F(\rho)$ e risolvendo l'equazione degli autovalori. β può essere anche degenerare di grado n e il suo valore dipende dall'intero m : si avranno, dunque, diverse soluzioni β_{mn} che determinano i **diversi modi di propagazione** del campo elettromagnetico nella fibra e, di conseguenza, le $F(\rho)$ corrispondenti.

3.2 Fibra a singolo modo

Ad una data frequenza solo alcuni modi vengono trasmessi. Per evitare il fenomeno della dispersione modale, si desidera la sola propagazione di quello fondamentale HE_{11} . Per questo motivo è necessario trovare la frequenza di *cut-off* corrispondente a λ_c tale che la propagazione degli altri modi avvenga solo per frequenze maggiori. In una fibra a singolo modo è perciò possibile trasmettere solo impulsi con frequenza minore di quella di *cut-off* e $\lambda > \lambda_c$. Essendo λ_c dipendente dai parametri realizzativi della fibra (il raggio del nucleo a , e gli indici di rifrazione n_1 e n_c) si utilizza un **parametro normalizzato**:

$$V = k_0 a (n_1^2 - n_c^2)^{1/2}. \quad (3.7)$$

Nelle fibre a singolo modo *step-index* si ha $V_c \approx 2.405$ e, ricordando che $k_0 = 2 * \pi / \lambda_D$, conoscendo le caratteristiche fisiche della fibra ottica è possibile ricavare dall'equazione precedente il valore di λ_c . Gli standard per le fibre ottiche a singolo modo in commercio prevedono che il raggio del nucleo sia di $a = 4 \mu\text{m}$ e tipicamente la differenza tra i due indici di rifrazione è $n_1 - n_c \approx 0.005$; ciò significa che il funzionamento a singolo modo si ottiene solo per $\lambda > \lambda_c = 1.2 \mu\text{m}$. La lunghezza d'onda per cui si ha minor assorbimento rientra ottimamente in questo intervallo. Il modo supportato viene chiamato HE_{11} o **modo fondamentale**

Il campo elettrico che corrisponde ad HE_{11} è prevalentemente polarizzato lungo y o lungo x (si assume, per semplicità, che la fibra abbia una costante di propagazione degenerare lungo i due assi), mentre le altre componenti sono trascurabili. Dunque, si fa coincidere HE_{11} al modo polarizzato linearmente LP_{01} descritto da:

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = \hat{x} A(\omega) F(x, y) e^{i\beta(\omega)z}. \quad (3.8)$$

Malgrado l'andamento esatto di $F(x, y)$ sia determinabile solamente risolvendo l'equazione differenziale del secondo ordine, si può notare che per valori di $V \approx 2$ sia ben approssimabile da

$$F(x, y) \approx \exp[-(x^2 + y^2)/w^2], \quad (3.9)$$

che descrive una distribuzione Gaussiana. Il parametro w è calcolabile con la formula

$$w/a \approx 0.65 + 1.619V^{-3/2} + 2.879V^{-6}, \quad (3.10)$$

ma, nel caso in cui $V \approx 2.4$ allora $w \approx a$.

3.3 Propagazione non lineare dell'impulso: NLSE

Considerando il modo LP_{01} e partendo dall'equazione (3.2) si ottiene l'equazione:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu_o \frac{\partial^2 \mathbf{P}_L}{\partial t^2} + \mu_o \frac{\partial^2 \mathbf{P}_{NL}}{\partial t^2} \quad (3.11)$$

dove si è suddiviso il vettore polarizzazione in parte lineare e non lineare. Inoltre, è possibile espandere (3.8) ed entrambe le parti di $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$ in serie di Fourier:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \hat{x} [E(\mathbf{r}, t) \exp(-i\omega_0 t) + c.c.] \quad (3.12)$$

$$\mathbf{P}_L(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \hat{x} [P_L(\mathbf{r}, t) \exp(-i\omega_0 t) + c.c.] \quad (3.13)$$

$$\mathbf{P}_{NL}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \hat{x} [P_{NL}(\mathbf{r}, t) \exp(-i\omega_0 t) + c.c.] \quad (3.14)$$

Per studiare la propagazione non lineare di un segnale si considerano inizialmente le seguenti ipotesi d'approssimazione:

- P_{NL} è una perturbazione di P_L : infatti, dipende dalle variazioni dell'indice di rifrazione che sono $< 10^{-6}$.
- La fibra ottica mantiene la polarizzazione del campo elettrico che la attraversa. Nella realtà solo le fibre a mantenimento di polarizzazione lo permettono.
- L'impulso è quasi monocromatico, con $\Delta\omega/\omega_0 \ll 1$, e, quindi, ha durata di almeno 0.1 ps.
- La risposta non lineare è istantanea, pertanto la dipendenza temporale di $\chi^{(3)}$ è rappresentata dal prodotto $\delta(t - t_1)\delta(t - t_2)\delta(t - t_3)$.

È pertanto possibile approssimare $P_{NL} \approx \varepsilon_0 \varepsilon_{NL} E(\mathbf{r}, t)$, dove il contributo non lineare è:

$$\varepsilon_{NL} = \frac{3}{4} \chi_{xxxx}^{(3)} |E(\mathbf{r}, t)|^2. \quad (3.15)$$

Definendo $\varepsilon(\omega) = 1 + \tilde{\chi}_{xx}^{(1)}(\omega) + \varepsilon_{NL}$ si ritrova l'equazione di Helmholtz:

$$\nabla^2 \tilde{E} + \varepsilon(\omega) k_0^2 \tilde{E} = 0. \quad (3.16)$$

Vale, inoltre, la seguente relazione:

$$\varepsilon(\omega) = \left(\tilde{n} + \frac{i\tilde{\alpha}}{2k_0} \right)^2 \quad (3.17)$$

dove si definiscono l'indice di rifrazione non lineare n_2 e il coefficiente di assorbimento di due fotoni α_2 come

$$n_2 = \frac{3}{8n} \text{Re} \left(\chi_{xxxx}^{(3)} \right) \quad (3.18)$$

$$\alpha_2 = \frac{3\omega_0}{4nc} \text{Im} \left(\chi_{xxxx}^{(3)} \right). \quad (3.19)$$

Nelle fibre di silice α_2 è trascurabile.

La seguente equazione, che descrive le componenti di un segnale modulato, soddisfa l'equazione (3.16):

$$\tilde{E}(\mathbf{r}, \omega - \omega_0) = \int_{-\infty}^{\infty} E(\mathbf{r}, t) \exp[i(\omega - \omega_0)t] dt \quad (3.20)$$

La soluzione dell'equazione di Helmholtz si può scrivere anche nel modo seguente:

$$\tilde{E}(\mathbf{r}, \omega - \omega_0) = F(x, y) \tilde{A}(z, \omega - \omega_0) \exp(i\beta_0 z) \quad (3.21)$$

A partire da (3.16) si trovano, dunque, le seguenti equazioni:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + [\varepsilon(\omega)k_0^2 - \tilde{\beta}^2]F = 0, \quad (3.22)$$

$$2i\beta_0 \frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} + (\tilde{\beta}^2 - \beta_0^2)\tilde{A} = 0, \quad (3.23)$$

dove nell'ultima equazione è stato trascurato il termine dato dalla derivata seconda della funzione $A(z, t)$ che varia lentamente lungo z per l'ipotesi di impulso quasi monocromatico fatta inizialmente.

Si approssima il valore della costante dielettrica con

$$\varepsilon = (n + \Delta n)^2 \approx n^2 + 2n\Delta n, \quad (3.24)$$

dove si è considerata la perturbazione

$$\Delta n = n_2 |E|^2 + \frac{i\tilde{\alpha}}{2k_0}. \quad (3.25)$$

A questo punto, si trascura inizialmente la perturbazione Δn e si ricava la distribuzione trasversale $F(x, y)$ corrispondente, in questo caso, a quella di HE_{11} precedentemente calcolata. La perturbazione non modifica $F(x, y)$, ma ne influenza l'autovalore corrispondente che diventa:

$$\tilde{\beta}(\omega) = \beta(\omega) + \Delta\beta(\omega), \quad (3.26)$$

dove il termine dovuto a Δn è:

$$\Delta\beta(\omega) = \frac{\omega^2 n(\omega)}{c^2 \beta(\omega)} \frac{\iint_{-\infty}^{\infty} \Delta n(\omega) |F(x, y)|^2 dx dy}{\iint_{-\infty}^{\infty} |F(x, y)|^2 dx dy}. \quad (3.27)$$

L'involuppo dell'impulso è, dunque, descritto da $A(z, t)$ di cui $\tilde{A}(z, \omega - \omega_0)$ è la trasformata. Con l'approssimazione $\tilde{\beta}^2 - \beta_0^2 \approx 2\beta_0(\tilde{\beta} - \beta_0)$, si trova che \tilde{A} deve soddisfare:

$$\frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} = i[\beta(\omega) + \Delta\beta(\omega) - \beta_0]\tilde{A}. \quad (3.28)$$

Risolvendo per parti la precedente equazione differenziale, è possibile osservare che con la propagazione lungo l'asse longitudinale della fibra si ha uno sfasamento delle diverse componenti spettrali proporzionale alla frequenza ω e, a causa del termine $\Delta\beta$, all'intensità del campo.

Per poter trovare $A(\omega, t)$ è ora necessario antitrasformare il risultato precedente, ma per poter fare questo, è necessario innanzitutto espandere in serie di Taylor $\beta(\omega)$ e $\Delta\beta(\omega)$ attorno alla frequenza della portante ω_0 . Per $\beta(\omega)$, ad esempio, si ottiene:

$$\beta(\omega) = \beta_0 + (\omega - \omega_0)\beta_1 + \frac{1}{2}(\omega - \omega_0)^2\beta_2 + \frac{1}{6}(\omega - \omega_0)^3\beta_3 + \dots \quad (3.29)$$

Si definisce $\beta_m = \left(\frac{d^m \beta}{d\omega^m}\right)_{\omega=\omega_0}$ ($m = 0, 1, 2, 3, \dots$). Per ipotesi, lo spettro dell'impulso è molto stretto e, dunque, i termini di grado superiore a β_2 possono essere ignorati (se $\beta_2 = 0$ si include anche β_3). Per lo stesso motivo risulta $\Delta\beta(\omega) = \Delta\beta_0$. È ora possibile antitrasformare \tilde{A} ottenendo, dopo alcuni passaggi, la seguente equazione differenziale:

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = i\Delta\beta_0 A. \quad (3.30)$$

Si ricordano ora le equazioni (3.25), (3.27) e $k_0 = \omega_0/c$ che permettono di riscrivere $\Delta\beta_0$ come:

$$\Delta\beta = \frac{\omega_0}{c} \left(n_2 |E|^2 + \frac{i\alpha}{2k_0} \right). \quad (3.31)$$

Inserendo questa formula nella precedente si ricava:

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \frac{\alpha}{2} A = i\gamma(\omega_0) |A|^2 A, \quad (3.32)$$

dove è ben distinguibile la parte non lineare dipendente dall'intensità. Si riconoscono i parametri che governano l'attenuazione e la dispersione cromatica, entrambi effetti discussi precedentemente; il parametro nonlineare γ , che qui governa l'effetto di *self-phase modulation*, è così definito:

$$\gamma(\omega_0) = \frac{n_2(\omega_0)\omega_0}{cA_{eff}} \quad (3.33)$$

con A_{eff} l'area efficace di modo utile a valutare l'intensità ottica esclusivamente tramite $|A|^2$. Si ha, infatti:

$$A_{eff} = \frac{\left(\iint_{-\infty}^{\infty} (\omega) |F(x, y)|^2 dx dy\right)^2}{\iint_{-\infty}^{\infty} |F(x, y)|^4 dx dy} \approx \pi w^2. \quad (3.34)$$

Si ricorda che l'equazione (3.32) è stata ottenuta a partire da alcune ipotesi semplificative. Per una trattazione più generale è necessario assumere che la suscettibilità del terzo ordine sia del tipo

$$\chi^{(3)}(t - t_1, t - t_2, t - t_3) = \chi^{(3)} R(t - t_1) \delta(t - t_2) \delta(t - t_3) \quad (3.35)$$

ovvero, che gli effetti non lineari non siano istantanei; $R(t)$ rappresenta la risposta non lineare normalizzata tale che $\int_{-\infty}^{\infty} R(t) dt = 1$.

Con una trattazione analoga a quanto fatto in precedenza si trova l'equazione di validità più generale:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{1}{2} \left(\alpha(\omega_0) + i\alpha_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) A + \beta_1 \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \frac{\beta_3}{6} \frac{\partial^3 A}{\partial t^3} = \\ = i \left(\gamma(\omega_0) + i\gamma_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(A(z, t) \int_0^{\infty} R(t') |A(z, t - t')|^2 dt' \right). \end{aligned}$$

Per ricavare l'equazione precedente sono state effettuate la seguente espansione in serie di Taylor:

$$\gamma(\omega) = \gamma_0 + \gamma_1(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}\gamma_2(\omega - \omega_0)^2 + \dots + \frac{1}{m!} \left(\frac{\partial^m \gamma(\omega)}{\partial \omega^m} \right)_{\omega=\omega_0} (\omega - \omega_0)^m + \dots \quad (3.36)$$

$$\alpha(\omega) = \alpha_0 + \alpha_1(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}\alpha_2(\omega - \omega_0)^2 + \dots + \frac{1}{m!} \left(\frac{\partial^m \alpha(\omega)}{\partial \omega^m} \right)_{\omega=\omega_0} (\omega - \omega_0)^m + \dots \quad (3.37)$$

Si calcola anche il rapporto γ_1/γ_0 :

$$\frac{\gamma_1(\omega_0)}{\gamma_0} = \frac{1}{\omega_0} + \frac{1}{n_2} \left(\frac{dn_2}{d\omega} \right)_{\omega=\omega_0} - \frac{1}{A_{eff}} \left(\frac{dA_{eff}}{d\omega} \right)_{\omega=\omega_0} \quad (3.38)$$

Gli ultimi due termini diventano significanti solo per impulsi con uno spettro molto esteso; se $\Delta\omega < 20$ THz è possibile approssimare

$$\gamma_1 \approx \gamma_0/\omega_0, \quad (3.39)$$

formula che, nel rispetto dell'ipotesi, permette di semplificare i calcoli presenti nella 3.3.

La risposta non lineare $R(t)$ utilizzata nell'espressione di $\chi^{(3)}$ include i contributi degli elettroni e dei nuclei di ogni atomo: per i primi il contributo è pressoché istantaneo, mentre per i secondi dipende dalla funzione della risposta di Raman $h_R(t)$ tramite la formula

$$R(t) = (1 - f_R)\delta(t - t_e) + f_R h_R(t). \quad (3.40)$$

Esistono alcune stime analitiche della funzione $h_R(t)$ ed è praticamente nulla per $t > 1$ ps, mentre è determinante per l'evoluzione degli impulsi ultracorti. Per il proseguimento dei calcoli, risulta utile anche un' altra approssimazione, valida per la lenta variazione dell'involuppo dell'impulso A :

$$|A(z, t - t')|^2 \approx |A(z, t)|^2 - t' \frac{\partial |A(z, t)|^2}{\partial t}. \quad (3.41)$$

Si definisce poi l'istante in cui avviene la risposta non lineare come:

$$T_R \equiv \int_0^{\infty} t R(t) dt \approx f_r \int_0^{\infty} t h_R(t) dt = f_R \frac{d(\text{Im} \tilde{h}_R)}{d(\Delta\omega)}. \quad (3.42)$$

Si definisce anche la *finestra di ritardo* T , un riferimento temporale che si sposta alla velocità v_g :

$$T = t - z/v_g \equiv t - \beta_1 z. \quad (3.43)$$

Allora è possibile usare i risultati precedenti per riscrivere l'equazione (3.3) ottenendo quella che viene chiamata *Extended Non Linear Schrödinger Equation* (Extended NLSE):

$$\boxed{\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\alpha}{2}A + \frac{i\beta_2}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial T^2} - \frac{\beta_3}{6}\frac{\partial^3 A}{\partial T^3} = i\gamma \left(|A|^2 A + \frac{i}{\omega_0} \frac{\partial}{\partial T} (|A|^2 A) - T_R A \frac{\partial |A|^2}{\partial T} \right)}, \quad (3.44)$$

dove si trascura un termine che include T_R/ω_0 .

Se l'impulso è sufficientemente lungo anche gli ultimi due termini al secondo membro sono trascurabili (si è ricavato sperimentalmente $T_R = 3$ fs per $\lambda = 1.55 \mu\text{m}$), così come β_3 . Inoltre nella terza finestra dello spettro d'assorbimento l'attenuazione α è molto piccola per cui può essere trascurata. Si trova la NLS:

$$\boxed{i \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{i\alpha}{2}A - \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} + \gamma |A|^2 A = 0}. \quad (3.45)$$

3.4 Regimi di propagazione

L'evoluzione degli impulsi che si propagano nelle fibre ottiche non dipende soltanto dalle caratteristiche del mezzo, ma anche da quelle dell'impulso stesso. La larghezza iniziale T_0 e la potenza di picco P_0 risultano determinanti per stabilire il regime di propagazione.

Dato un impulso, se $\tau = T/T_0$ è una finestra temporale normalizzata rispetto alla sua larghezza iniziale T_0 e $U(z, \tau)$ è l'ampiezza normalizzata, allora, è possibile rappresentarlo tramite l'equazione

$$A(z, \tau) = \sqrt{P_0} \exp(-\alpha z/2) U(z, \tau). \quad (3.46)$$

Questo significa che è possibile riscrivere la NLSE (3.45) tenendo in considerazione le quantità appena introdotte. Svolgendo i calcoli si trova

$$i \left(-\frac{\alpha}{2} U + \frac{\partial U}{\partial z} \right) = -i \frac{\alpha}{2} U + \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} \frac{1}{T_0^2} - \gamma P_0 \exp(-\alpha z) |U|^2 U, \quad (3.47)$$

dove si è semplificato dividendo entrambi i membri per $\sqrt{P_0} \exp(-\alpha z/2)$. Si nota che è possibile effettuare un'ulteriore semplificazione cancellando due termini uguali, ottenendo:

$$i \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} \frac{1}{T_0^2} - \gamma P_0 \exp(-\alpha z) |U|^2 U. \quad (3.48)$$

Si definiscono ora la lunghezza di dispersione

$$L_D := \frac{T_0^2}{|\beta_2|} \quad (3.49)$$

e la lunghezza di nonlinearità

$$L_{NL} := \frac{1}{\gamma P_0}. \quad (3.50)$$

Usando le definizioni precedenti e l'equazione (3.48) si ottiene infine:

$$\boxed{i \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\text{sgn}(\beta_2)}{2L_D} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - \frac{\exp(\alpha z)}{L_{NL}} |U|^2 U}. \quad (3.51)$$

Il confronto tra la lunghezza del collegamento in fibra L , L_{NL} e L_D permette di stabilire il regime di propagazione:

- Se $L \ll L_D$ e $L \ll L_{NL}$ né gli effetti di dispersione né quelli di nonlinearità sono rilevanti e l'impulso mantiene la sua forma.

- Se $L \ll L_{NL}$ e $L \sim L_D$ il regime è di tipo dispersivo. In questo caso l'effetto di GVD è quello dominante e si ottiene quando $L_D/L_{NL} \ll 1$.
- Se $L \ll L_D$ e $L \sim L_{NL}$ il regime è di tipo nonlineare. In questo caso si ottiene $L_D/L_{NL} \gg 1$ e gli effetti nonlineari sono quelli dominanti.
- Se $L \sim L_D \sim L_{NL}$ vanno tenuti in considerazione entrambi gli effetti.

Come si è visto, il rapporto L_D/L_{NL} permette di discriminare tra i diversi regimi. Usando le definizioni si osserva che

$$\frac{L_D}{L_{NL}} = \frac{\gamma P_0 T_0^2}{|\beta_2|} \quad (3.52)$$

e, dunque, sia le caratteristiche della fibra che quelle dell'impulso incidente sono determinanti per il tipo di evoluzione di quest'ultimo.

3.5 Forme alternative della NLSE

3.5.1 Parametro N e ampiezza normalizzata

Si è visto nel paragrafo precedente che la NLSE può essere espressa nella forma (3.51) dove viene considerata l'ampiezza normalizzata $U(z, \tau)$. A partire da quest'ultima equazione è possibile giungere ad un'ulteriore elaborazione. Si considerino i seguenti parametri:

- ξ distanza normalizzata rispetto alla lunghezza di dispersione L_D

$$\xi := z/L_D. \quad (3.53)$$

- La finestra temporale normalizzata (già descritta in precedenza) $\tau := T/T_0$.
- Il parametro N definito come

$$N^2 = \frac{L_D}{L_{NL}} := \frac{\gamma P_0 T_0^2}{|\beta_2|}. \quad (3.54)$$

Usando i parametri sopra definiti si ottiene l'equazione:

$$\boxed{i \frac{\partial U}{\partial \xi} = \text{sgn}(\beta_2) \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - N^2 e^{-\alpha z} |U|^2 U}. \quad (3.55)$$

3.5.2 Parametro di dispersione del terzo ordine

Nel caso in cui $\beta_2 = 0$ l'evoluzione dell'impulso deve tenere in considerazione il parametro di dispersione del terzo ordine β_3 . Partendo dalla ENLSE (3.44) si impone $\beta_2 = 0$ e si ignorano i termini non lineari di ordine elevato. Con passaggi analoghi a quelli descritti in precedenza si trova l'equazione:

$$\boxed{i \frac{\partial U}{\partial \xi'} = \text{sgn}(\beta_3) \frac{i}{6} \frac{\partial^3 U}{\partial \tau^3} - \bar{N}^2 e^{-\alpha z} |U|^2 U}, \quad (3.56)$$

dove si è tenuto conto dei seguenti parametri:

- $L'_D := T_0^3 / |\beta_3|$,
- $\xi' := z/L'_D$,
- $\bar{N}^2 := \frac{L'_D}{L_{NL}} = \frac{\gamma P_0 T_0^3}{|\beta_3|}$.

3.5.3 Impulsi ultracorti

Quando si vuole studiare la propagazione di un impulso ultracorto la NLSE equation non è più sufficiente a descriverne l'evoluzione. Dunque, è necessario prendere in considerazione la più completa ENLSE (3.44) nella sua completezza.

Utilizzando i parametri normalizzati descritti nelle sezioni immediatamente precedenti, l'equazione che si trova è

$$\boxed{\frac{\partial U}{\partial z} + i \frac{\text{sgn}(\beta_2)}{2L_D} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - \frac{\text{sgn}(\beta_3)}{6L'_D} \frac{\partial^3 U}{\partial \tau^3} = i \frac{e^{-\alpha z}}{L_{NL}} \left(|U|^2 U + is \frac{\partial}{\partial \tau} (|U|^2 U) - \tau_R U \frac{\partial |U|^2}{\partial \tau} \right)}. \quad (3.57)$$

Nell'equazione precedente sono state usate le lunghezze L_D , L'_D e L_{NL} precedentemente definite e i parametri

$$s = \frac{1}{\omega_0 T_0}, \quad (3.58)$$

che governa gli effetti di *self steepening*, e

$$\tau_R = \frac{T_R}{T_0}, \quad (3.59)$$

che governa gli effetti dovuti alla diffusione di Raman (non verranno trattati in questa tesi, si veda [2]).

3.5.4 Attenuazione e normalizzazione

Le diverse forme della NLSE descritte in precedenza sono utili per comprendere e analizzare meglio alcuni degli effetti osservati nella propagazione degli impulsi (in particolare la SPM); tuttavia, quando si vuole risolvere l'equazione con metodi numerici, vi è una forma più conveniente:

$$\boxed{\frac{\partial U}{\partial z} + i \frac{\text{sgn}(\beta_2)}{2L_D} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - \frac{\text{sgn}(\beta_3)}{6L'_D} \frac{\partial^3 U}{\partial \tau^3} + \frac{\alpha}{2} = \frac{i}{L_{NL}} \left(|U|^2 U + is \frac{\partial}{\partial \tau} (|U|^2 U) - \tau_R U \frac{\partial |U|^2}{\partial \tau} \right)}, \quad (3.60)$$

dove, a differenza dei casi precedenti, si è scelto $U = A\sqrt{P_0}$. Si osserva che ora l'attenuazione non è utilizzata nella parte nonlineare: in questo modo, i calcoli descritti nella sezione (4.1) risultano più semplici.

Capitolo 4

Realizzazione del programma

Si vuole realizzare un programma che permetta di simulare l'evoluzione di un impulso mentre si propaga lungo una fibra ottica di silice risolvendo la NLSE. Esso deve consentire la simulazione di diversi input, come gli impulsi super-Gaussiani e quelli a secante iperbolica; inoltre, devono essere note le caratteristiche della fibra ottiche in esame, prestando particolare attenzione ai parametri presenti nella NLSE. Si sceglie di scrivere il programma tramite App Designer di MATLAB, poiché permette di implementare facilmente una semplice interfaccia grafica (GUI).

Di seguito si discuterà di come si risolve la NLSE con metodi numerici e degli elementi che costituiscono il programma.

4.1 Split Step Fourier Method

4.1.1 Descrizione matematica del metodo

La NLSE è un'equazione differenziale non lineare la cui soluzione analitica è possibile solo per alcuni tipi di impulsi, ma, nei casi più generali, è possibile risolverla attraverso metodi numerici che vengono suddivisi in due categorie principali. Fanno parte della prima categoria i metodi alle differenze finite, mentre nella seconda ricadono i metodi pseudospettrali che, facendo uso della FFT [7], sono i più veloci. Quest'ultima categoria comprende quello chiamato *split-step Fourier Method* (SSFM).

Considerando la NLSE (3.45) o la ENLSE (3.44), è possibile distinguere la parte lineare, che governa la dispersione dell'impulso, da quella nonlineare. A tal fine, si utilizzano rispettivamente gli operatori

$$\hat{D} = -\frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2}{\partial T^2} + \frac{\beta_3}{6} \frac{\partial^3}{\partial T^3} - \frac{\alpha}{2} \quad (4.1)$$

e

$$\hat{N} = i\gamma \left(|A|^2 + \frac{i}{\omega_0 A} \frac{\partial}{\partial T} (|A|^2) - T_R \frac{\partial |A|^2}{\partial T} \right), \quad (4.2)$$

ottenendo la formula generale:

$$\frac{\partial A}{\partial z} = (\hat{D} + \hat{N})A. \quad (4.3)$$

Malgrado gli effetti di dispersione e di nonlinearità agiscano contemporaneamente sull'impulso, se si considera un tratto di fibra sufficientemente corto, si possono assumere indipendenti l'uno dall'altro. Allora, per ottenere la combinazione dei due effetti si può pensare che l'impulso percorra due volte lo stesso tratto di lunghezza h : la prima volta il segmento di fibra è solo nonlineare, la seconda è solo dispersivo.

Al primo passaggio, quando $\hat{D} = 0$ la soluzione formale di (4.3) è

$$A_1(z+h, t) = \exp(h\hat{N})A(z, t); \quad (4.4)$$

mentre, dopo il secondo passaggio, considerando $\hat{N} = 0$ la soluzione formale risulta

$$A_2(z + h, t) = \exp(h\hat{D}) \exp(h\hat{N}) A(z, t). \quad (4.5)$$

Quest'ultima equazione approssima la soluzione reale $A(z + h, t)$ in cui entrambi gli effetti agiscono contemporaneamente - si ricorda che, perché questo avvenga, h deve essere sufficientemente piccolo.

La soluzione del passo lineare può essere risolta efficacemente nel dominio della frequenza, facendo uso della *Fast Fourier Transform* FFT. Infatti, detto $\hat{D}(-i\omega)$ l'operatore che rappresenta \hat{D} in frequenza ottenuto sostituendo $\frac{\partial}{\partial T}$ con $-i\omega$, vale la formula:

$$\exp(h\hat{D})B(z, T) = F_T^{-1} \left\{ \exp[h\hat{D}(-i\omega)] F_T \{B(z, T)\} \right\}, \quad (4.6)$$

dove $F_T\{\cdot\}$ rappresenta la trasformata di Fourier e $F_T^{-1}\{\cdot\}$ l'operazione inversa. Fissato ω , $\hat{D}(-i\omega)$ diviene un numero complesso e la formula precedente risulta veloce da calcolare.

Il processo (4.5) si ripete iterativamente finché l'impulso non percorre l'intera fibra formata da N segmenti di lunghezza h .

4.1.2 Accuratezza del metodo

Si vuole confrontare il risultato approssimato ottenuto in precedenza con quello esatto, ovvero con:

$$A(z + h, T) = \exp[h(\hat{D} + \hat{N})] A(z, T), \quad (4.7)$$

dove si è assunto \hat{N} indipendente da z .

Si verifica inizialmente che \hat{N} e \hat{D} non commutano tra loro; infatti, tramite semplici passaggi algebrici si verifica che il commutatore $[\hat{N}, \hat{D}] = \hat{N}\hat{D} - \hat{D}\hat{N} \neq 0$.

La formula di Baker-Hausdorff permette di calcolare il prodotto degli esponenziali di due operatori in questo modo:

$$\exp(\hat{a}) \exp(\hat{b}) = \exp\left(\hat{a} + \hat{b} + \frac{1}{2}[\hat{a}, \hat{b}] + \frac{1}{12}[\hat{a} - \hat{b}, [\hat{a}, \hat{b}]] + \dots\right). \quad (4.8)$$

Dunque, si nota che l'uguaglianza $\exp(\hat{a}) \exp(\hat{b}) = \exp(\hat{a} + \hat{b})$ vale solamente per operatori commutabili.

Se $\hat{a} = h\hat{D}$ e $\hat{b} = h\hat{N}$ si trova che il termine d'errore dipende principalmente da $\frac{1}{2}h^2[\hat{D}, \hat{N}]$: per questo motivo l'errore aumenta al crescere della lunghezza h del segmento considerato.

4.1.3 Aumento dell'accuratezza

Si vuole aumentare l'accuratezza dello SSFM. Per raggiungere questo scopo è necessario trovare una formulazione che, in un segmento di fibra di lunghezza h , permetta di considerare indipendenti gli effetti di dispersione e di nonlinearietà, ma che, al tempo stesso, permetta di eliminare il termine di errore al secondo ordine ottenuto applicando la formula di Baker-Hausdorff.

Una formulazione con queste caratteristiche è la seguente:

$$A(z + h, T) \approx \exp\left(\frac{h}{2}\hat{N}\right) \exp(h\hat{D}) \exp\left(\frac{h}{2}\hat{N}\right) A(z, T). \quad (4.9)$$

Si può dimostrare applicando due volte la formula di Baker-Hausdorff che il termine di errore dominante è del terzo ordine rispetto alla dimensione del passo h . Procedendo in maniera iterativa per M passi, la formula che meglio descrive l'algoritmo da implementare è data da:

$$\boxed{A(L, T) \approx e^{-\frac{1}{2}h\hat{N}} \left(\prod_{m=1}^M e^{h\hat{N}} e^{h\hat{D}} \right) e^{\frac{1}{2}h\hat{N}} A(0, T)}. \quad (4.10)$$

4.2 Implementazione dell'algoritmo con MATLAB

In questa sezione verrà presentato l'algoritmo che permette di risolvere la NLSE attraverso lo *split step Fourier Method* realizzato come funzione di MATLAB.

Si sceglie di utilizzare il paradigma OOP (*object-oriented programming*). Infatti, le classi di MATLAB costituiscono un metodo efficace per immagazzinare ed elaborare i dati all'interno di un programma realizzato con App Designer. Verranno di seguito presentate le classi utilizzate.

4.2.1 Le classi *Fiber* e *Pulse*

La classe *Fiber* permette di rappresentare le fibre ottiche di silice. La tabella seguente elenca le proprietà e i metodi propri degli oggetti di questa classe.

Proprietà	Descrizione
lambda	È la lunghezza d'onda che viene utilizzata (nm)
length	Lunghezza della fibra (km)
n1	indice di rifrazione del nucleo
n2	Indice di rifrazione del mantello
a	Raggio del nucleo (μm)
b	Raggio del mantello (μm)
beta2	Parametro di GVD (ps^2/km)
beta3	Parametro di TOD (ps^3/km)
gamma	Coefficiente di nonlinearietà (W^{-1}/km)
alpha	Coefficiente di attenuazione (dB/km)
Costruttore	Descrizione
Fiber()	Restituisce un oggetto con proprietà preimpostate
Metodi	Descrizione
get_k0(fiber)	Restituisce il valore di $k_0 = 2\pi/\lambda(\text{nm}^{-1})$
get_D(fiber)	Restituisce il parametro di dispersione $D = -(2\pi c/\lambda^2)\beta_2$ ($\text{ps}/\text{nm} - \text{km}$)
getDelta(fiber)	Restituisce la differenza d'indice relativa $\Delta = (n_1 - n_c)/n_1$

Tabella 4.1: Classe *Fiber*

È possibile accedere alle proprietà pubbliche di un oggetto (ed eventualmente modificarle) usando la sintassi [obj].[proprietà].

La classe *Pulse* permette di rappresentare gli impulsi che si propagano lungo la fibra ottica. Considero inizialmente due tipi di impulsi, quelli super-Gaussiani e quelli a secante iperbolica. Ogni impulso può subire una modulazione iniziale in frequenza (*chirped pulse*): in questo caso, lo spettro occupa una banda più ampia e la frequenza istantanea varia tra la testa e la coda. L'ampiezza normalizzata dell'impulso è definita come $U(z, \tau) = A(z, \tau) / (\sqrt{P_0} \exp[-\alpha z/2])$.

Gli impulsi super-Gaussiani sono definiti dalla seguente formula:

$$U(0, T) = \exp \left[\frac{-1 + iC}{2} \left(\frac{T}{T_0} \right)^{2m} \right], \quad (4.11)$$

dove C è il parametro di *chirp* e m regola la pendenza della curva super-Gaussiana. T_0 è la semi-larghezza iniziale ad intensità $1/e$ rispetto al picco. Gli impulsi a secante iperbolica sono definiti dalla formula:

$$U(0, T) = \text{sech} \left(\frac{T}{T_0} \right) \exp \left(-\frac{iCT^2}{2T_0^2} \right). \quad (4.12)$$

La tabella seguente riporta proprietà e metodi appartenenti alla classe *Pulse*:

Proprietà	Descrizione
nt	Numero di punti usati per la rappresentazione
P0	Potenza di picco iniziale
T0	Semi-larghezza temporale iniziale ad intensità 1/e
tau	Asse temporale normalizzata rispetto a T0
dtau	Unità dell'asse temporale, $d\tau = 2 * T_{max}/nt$
Tmax	Larghezza della finestra temporale di visualizzazione, espressa in unità di dtau
omega	Asse delle pulsazioni usata all'interno dello SSFM
type	Tipo di impulso. 'g' → impulso super-gaussiano; 's' → impulso a secante iperbolica
C	Parametro di chirp
m	Parametro di pendenza
U0	Ampiezza normalizzata iniziale
U0_spectrum	Potenza spettrale iniziale
z	Posizione corrente dell'impulso
Uz	Ampiezza normalizzata dell'impulso a distanza z
Uz_spectrum	Potenza spettrale dell'impulso in z
Costruttore	Descrizione
Pulse()	Crea un oggetto con proprietà predefinite
Metodi	Descrizione
generateInputPulse(pulse)	Restituisce il vettore U0 che rappresenta la forma dell'impulso da trasmettere.
generateSpectrum(pulse)	Restituisce il vettore Uz_spectrum che rappresenta la potenza spettrale dell'impulso.
plotPulsePower(p,ax1, ax2,c, l)	Rappresenta rispettivamente sugli assi ax1 e ax2 la potenza normalizzata dell'impulso p e la sua potenza spettrale. - c è il colore del grafico - l è la legenda
plotPulseModPhase(p,ax1, ax2,c, l)	Rappresenta rispettivamente sugli assi ax1 e ax2 il modulo dell'impulso normalizzato p e la sua fase. - c è il colore del grafico - l è la legenda
getFreqChirp(p)	Restituisce un vettore che rappresenta la variazione della frequenza istantanea dell'impulso p.
getL_D(pulse,fiber)	Restituisce la lunghezza di dispersione in km.
getL_DT(pulse,fiber)	Restituisce la lunghezza di dispersione in km L'_D dovuta alla TOD.
getL_NL(pulse,fiber)	Restituisce la lunghezza di nonlinearietà in km.
getN(pulse,fiber)	Restituisce il valore del parametro N, definito da (3.54).
getNT(pulse,fiber)	Restituisce il valore del parametro N', definito al paragrafo 3.5.2.
SSFM(pulse,fiber,z,c)	Risolve la NLSE con lo SSFM. -z è la distanza fino a cui si vuole propagare il segnale. -c è un parametro di controllo. Viene analizzato in seguito.

Tabella 4.2: Classe Pulse

4.2.2 Il metodo SSFM

La funzione che permette di calcolare l'evoluzione dell'impulso è SSFM(pulse,fiber,z,c). È basata su quanto esposto nella sezione 4.1. La variante della NLSE considerata è (3.60), dove sono stati ignorati gli effetti di nonlinearità di ordine superiore al primo:

$$\frac{\partial U'}{\partial z} = -i \frac{\text{sgn}(\beta_2)}{2L_D} \frac{\partial^2 U'}{\partial \tau^2} + \frac{\text{sgn}(\beta_3)}{6L_D'} \frac{\partial^3 U'}{\partial \tau^3} - \frac{\alpha}{2} + i \frac{N^2}{L_D} |U'|^2 U'. \quad (4.13)$$

Gli operatori usati nella soluzione sono quindi:

$$\hat{D}(-i\omega) = i \frac{\text{sgn}(\beta_2)}{2L_D} \omega^2 + i \frac{\text{sgn}(\beta_3)}{6L_D'} \omega^3 - \frac{\alpha}{2} \quad \text{e} \quad \hat{N} = i \frac{N^2}{L_D} |U'|^2. \quad (4.14)$$

Nelle equazioni precedenti si è scelto $U'(z, \tau) = A(z, \tau)/\sqrt{P_0}$. Tuttavia, per un'analisi più efficace della forma dell'impulso, si vuole trovare l'ampiezza normalizzata U tale che valga $A(z, \tau) = \sqrt{P_0} \exp(-\alpha z/2) U(z, \tau)$. Per fare questo, uno degli ultimi passaggi dell'algoritmo consiste nel calcolare $U(L, \tau) = U'(L, \tau)/\exp(-\alpha L/2)$, dove L è la distanza di propagazione.

Di seguito si riporta il codice commentato:

```

1  %Implementazione dell'algoritmo split step fourier method
2  %permette il calcolo della dispersione al terzo ordine
3  function [Uz,powUz_spectrum] = SSFM(p,f,L,c)
4      %>> Input:
5      %- p : impulso propagato
6      %- f : fibra simulata
7      %- L : distanza di propagazione (km)
8      %- c : comando "TOD_on"/"TOD_off"
9      %       per abilitare la simulazione della dispersione
10     %       con effetti del terzo ordine
11     %>> Output:
12     %- Uz       : Nuova forma dell'impulso dopo la propagazione
13     %- powUz_spec : Potenza spettrale dopo la propagazione
14
15     if(L>f.length)
16         error('Hai superato la lunghezza della fibra');
17     end
18
19
20     %definisco il parametro LD
21     L_D = getL_D(p,f); %L_D Lunghezza di dispersione
22     L_DT = getL_DT(p,f); %L_D' Lunghezza di dispersione
23     %       dovuta a beta3 (TOD par.)
24     L_NL = getL_NL(p,f); %L_NL Lunghezza di nonlinearita'
25
26     %definisco il parametro N
27     N = getN(p,f); %N^2 = L_D/L_NL
28     NT= getNT(p,f); %N^2 = L_D'/L_NL da usare se beta2 = 0;
29
30     %ottengo l'attenuazione in (Np/km)
31     alpha_Np = f.alpha/4.34;
32
33     %definisco il numero di passi
34     if L_NL < 1
35         step_num = round(40*L/L_NL);
36     else
37         step_num = round(40*L);
38     end
39
40     %limite inferiore
41     if step_num < 40
42         step_num = 40;
43     end
44
45     %limite superiore
46     if step_num > 20000
47         step_num = 20000;

```

```

48 end
49
50 %calcolo la lunghezza di un passo (km)
51 deltaz = L/step_num;
52
53
54 %_____
55 %_____dispersione_____
56
57 %effetto di beta2 (Group Velocity Dispersion)
58 GVD = 0.5/L_D*1i*sign(f.beta2)*p.omega.^2*deltaz;
59 %effetto di beta3 (Third Order Dispersion)
60 TOD = 1/(6*L_DT)*1i*sign(f.beta3)*p.omega.^3*deltaz;
61 %attenuazione
62 ATT = alpha_Np/2*deltaz;
63
64 if strcmp(c, "TOD_on")
65     %abilito gli effetti di TOD
66     dispersion = exp(GVD + TOD - ATT);
67 else
68     %disabilito gli effetti di TOD
69     dispersion = exp(GVD - ATT);
70 end
71
72 %_____
73 %_____nonlinearita'_____
74 if f.beta2==0 && f.beta3 == 0
75     %Caso limite, N = inf
76     hhz = 1i/L_NL*deltaz;
77 elseif f.beta2 == 0
78     %solo TOD : si usano i parametri N' e L_D'
79     hhz = 1i*NT^2/L_DT*deltaz;
80 else
81     %si usano i parametri N e L_D
82     hhz = 1i*N^2/L_D*deltaz;
83 end
84
85 %_____
86 %_____LOOP PRINCIPALE_____
87
88 % Schema: 1/2 N -> D -> 1/2 N
89
90 temp = p.U0.*exp(-abs(p.U0).^2.*hhz/2); %1/2 passo iniziale
91
92 for n=1 : step_num
93     f_temp = ifft(temp).*dispersion; %dispersione
94     p.Uz = fft(f_temp);
95     temp=p.Uz.*exp(abs(p.Uz).^2.*hhz); %nonlinearita'
96 end
97
98 %Risultato
99 p.Uz = temp.*exp(abs(p.Uz).^2.*hhz/2); %1/2 passo finale
100 p.Uz = p.Uz/exp(-alpha_Np*L/2); %normalizzo considerando l'attenuazione
101 p.Uz_spectrum = p.generateSpectrum(); %potenza spettrale dell'impulso
102 p.z = L; %distanza raggiunta
103 %output
104 Uz = p.Uz; %ampiezza normalizzata
105 powUz_spectrum = p.Uz_spectrum; %potenza spettrale
106 end

```

4.3 Descrizione del programma *PulseEvolution*

In questa sezione verrà presentato il programma completo, a cui è stato dato nome *PulseEvolution*. Lo scopo dell'applicazione è permettere all'utente di simulare e analizzare la propagazione degli impulsi nelle fibre ottiche in un ambiente integrato e semplice da utilizzare.

4.3.1 MATLAB AppDesigner

Come si è detto in precedenza, *PulseEvolution* è stato realizzato tramite MATLAB AppDesigner: questo ambiente di sviluppo permette di realizzare un'interfaccia utente trascinando gli elementi di visualizzazione all'interno di un area di lavoro e il codice che determina layout e design dell'applicazione viene generato automaticamente. In seguito, se ne codifica il comportamento. La figura sottostante mostra AppDesigner.

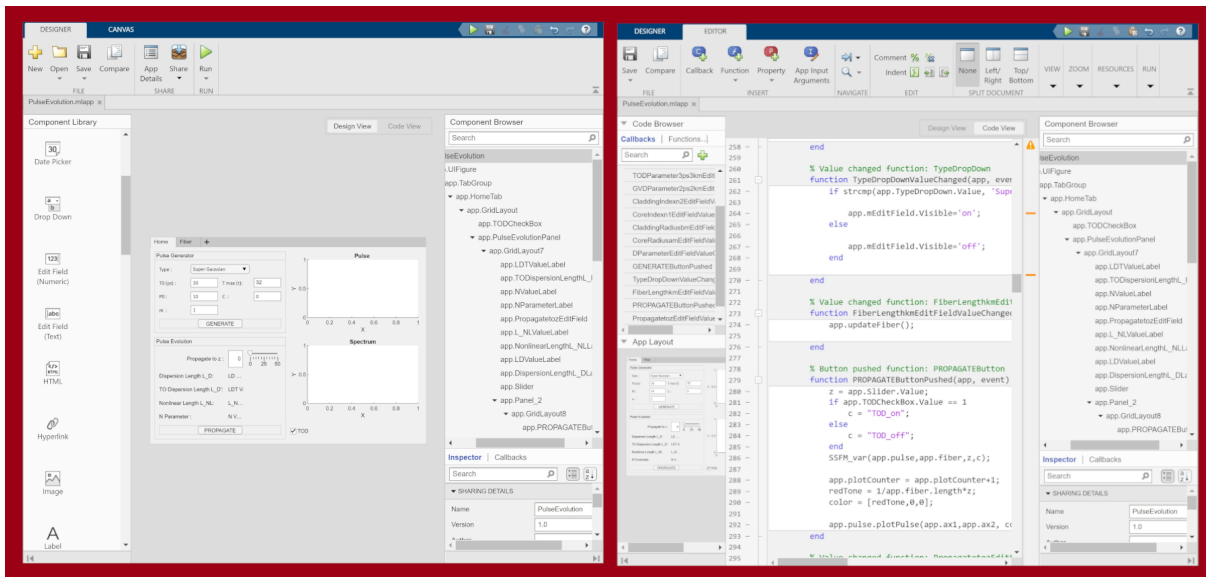


Figura 4.1: A sinistra un dettaglio della *Design View* che permette di realizzare l'interfaccia grafica. A destra un dettaglio della *Code View* che permette di scrivere il codice che determina il funzionamento dell'applicazione.

Ogni applicazione realizzata tramite AppDesigner è caratterizzata da alcune *proprietà*, ovvero degli oggetti che ne determinano lo stato di funzionamento e che possono essere modificati dai metodi a seguito dei comandi dell'utente. Le proprietà fondamentali di *PulseEvolution* sono:

- *pulse*. È l'ultimo impulso generato ed è quello normalmente considerato dalle funzioni del programma nello studio della propagazione. Nel seguito ci si riferirà ad esso come "impulso attivo". È un oggetto della classe *Pulse* (4.2.1).
- *fiber*. È un oggetto della classe *Fiber* (4.2.1) che rappresenta la fibra in cui viene simulata la propagazione degli impulsi.
- *pulse_1*, *pulse_2* e *pulse_3*. Sono degli impulsi salvati in memoria. Possono essere modificati o impostati come impulso attivo. Inoltre, è possibile confrontarne l'evoluzione.

4.3.2 Installazione

È possibile installare l'applicazione tramite l'*Add On Explorer* di MATLAB all'url <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/117440-pulseevolution>. MATLAB deve essere installato sul PC.

4.3.3 Guida all'uso di *PulseEvolution*

Il programma è suddiviso in cinque pagine principali: *Home*, *Fiber*, *Analysis*, *Solitons* e *Guide*.

Home

Nella pagina principale, *Home*, è possibile definire le proprietà dell'impulso attivo per poi generarlo. In particolare, all'interno del pannello *Pulse Generator* si scelgono la tipologia di impulso (super-Gaussiano

o a secante iperbolica), la larghezza iniziale T_0 , la dimensione della finestra espressa in $T_{MAX} = T/T_0$, la potenza di picco iniziale P_0 , il parametro di *chirp* C e quello di pendenza m (solo se super-gaussiani). Il pulsante **GENERATE** permette di visualizzare la potenza e la potenza spettrale dell'impulso negli assi cartesiani; inoltre, porta all'aggiornamento e alla visualizzazione delle lunghezze di dispersione L_D e L'_D , della lunghezza di non linearità L_{NL} e del parametro N nel pannello *Pulse Evolution*. Tramite i pulsanti "Save as..." è possibile salvare in memoria l'impulso attivo come *pulse_1*, *pulse_2* o *pulse_3*; in maniera opposta, i pulsanti "Load..." permettono di utilizzare uno degli impulsi salvati in memoria come impulso attivo. L'immagine seguente mostra questa pagina.

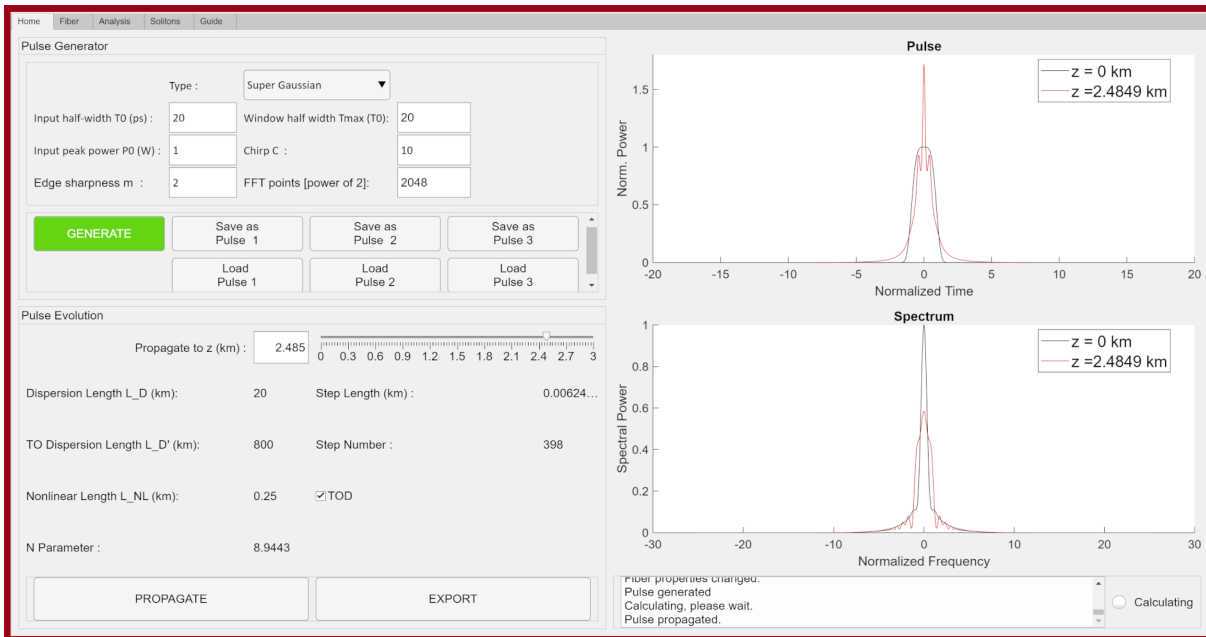


Figura 4.2: *Home page*. Qui l'utente può generare un impulso e simularne la propagazione lungo una fibra.

Con riferimento alla figura precedente, si osservi ora il pannello *Pulse Evolution*. In questa porzione dell'applicazione è possibile scegliere, attraverso uno *slider* o tramite una casella di input, la distanza a cui far propagare l'impulso, che non deve superare la lunghezza della fibra. Alcuni parametri utili vengono visualizzati sullo schermo: si tratta delle lunghezze di dispersione, di quella di non linearità, del parametro N , della dimensione di ogni singolo passo e del numero di passi totali che effettua l'algoritmo dello SSFM. Inoltre, tramite l'apposita casella si sceglie se abilitare o disabilitare la dispersione del terzo ordine (TOD), senza modificare il valore di β_{t3} . Premendo il tasto **PROPAGATE** i grafici sulla destra dello schermo si aggiorneranno, rappresentando l'impulso evoluto. Il colore del grafico tende al rosso chiaro man mano che l'impulso si avvicina alla fine della fibra: tale scelta permette di distinguere i diversi grafici. Per resettare tutto e propagare un nuovo impulso è sufficiente premere nuovamente il pulsante **GENERATE**. Il tasto **EXPORT** permette di salvare le proprietà interne dell'applicazione, ovvero la fibra *fiber* e gli impulsi *pulse*, *pulse_1*, *pulse_2*, *pulse_3*, in un file di tipo ".mat"; in questo modo possono essere utilizzate anche fuori dal programma.

Fiber

La pagina *Fiber* consente di configurare i parametri della fibra ottica di silice nella quale si vuole simulare la propagazione degli impulsi; essa è rappresentata da *fiber*. Una serie di caselle di input permettono di gestirne tutte proprietà; inoltre, altri parametri, calcolati a partire da quelli inseriti, vengono visualizzati sullo schermo. Questa pagina viene mostrata nell'immagine seguente.

Figura 4.3: Pagina di configurazione dei parametri della fibra da simulare. La modifica di una delle caselle di input causa l'aggiornamento delle proprietà di *fiber*.

Analysis

Una terza pagina del programma, *Analysis*, mostrata nell'immagine (4.4) successiva, permette di osservare alcuni grafici utili. Due di essi rappresentano la potenza dell'impulso e la corrispondente potenza spettrale, altri due grafici mostrano il modulo e la fase dell'impulso. Da quest'ultima è possibile ricavare la modulazione in frequenza $\delta\omega T_0$, anch'essa rappresentata in un grafico. Tramite lo *slider* all'interno del pannello *Propagate active pulse* è possibile scegliere la distanza (in km) a cui propagare l'impulso; un click sul pulsante "Propagate" porta all'aggiornamento dei grafici. Un'ulteriore sezione, detta *Full Evolution*, permette di osservare l'evoluzione della potenza dell'impulso in diversi tratti della fibra tramite un grafico a cascata e l'andamento del fattore di allargamento in relazione alla distanza. Il fattore di allargamento temporale (broadening factor) è così calcolato:

$$\text{B.Factor} = \frac{\sigma}{\sigma_0} = \frac{[\langle T^2 \rangle - \langle T \rangle^2]^{1/2}}{[\langle T_0^2 \rangle - \langle T_0 \rangle^2]^{1/2}}. \quad (4.15)$$

Per visualizzare i due grafici sopracitati occorre cliccare il pulsante "Calculate".

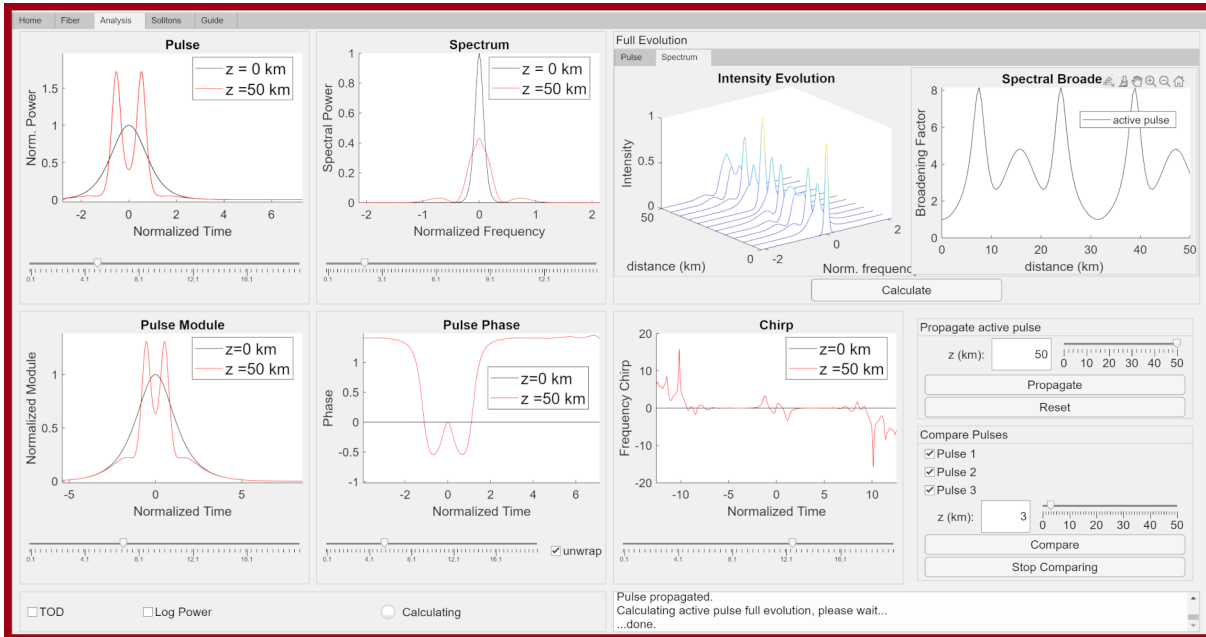


Figura 4.4: Pagina di analisi dell'evoluzione dell'impulso.

Nella stessa pagina è anche possibile confrontare l'evoluzione di *pulse 1*, *pulse 2* e *pulse 3* (si ricorda che è possibile configurarli nella pagina *Home*). Per fare questo è necessario utilizzare i comandi del pannello *Compare Pulses*: una volta selezionati gli impulsi da confrontare, si sceglie la distanza di propagazione desiderata e cliccando il pulsante "Compare" tutti i grafici vengono aggiornati - eccetto quello a cascata - normalizzando *pulse 2* e *pulse 3* rispetto a *pulse 1*. L'immagine seguente mostra tre impulsi a secante iperbolica con diverse potenze di picco P_0 tali da ottenere solitoni ottici (descritti in seguito) di diverso ordine N .

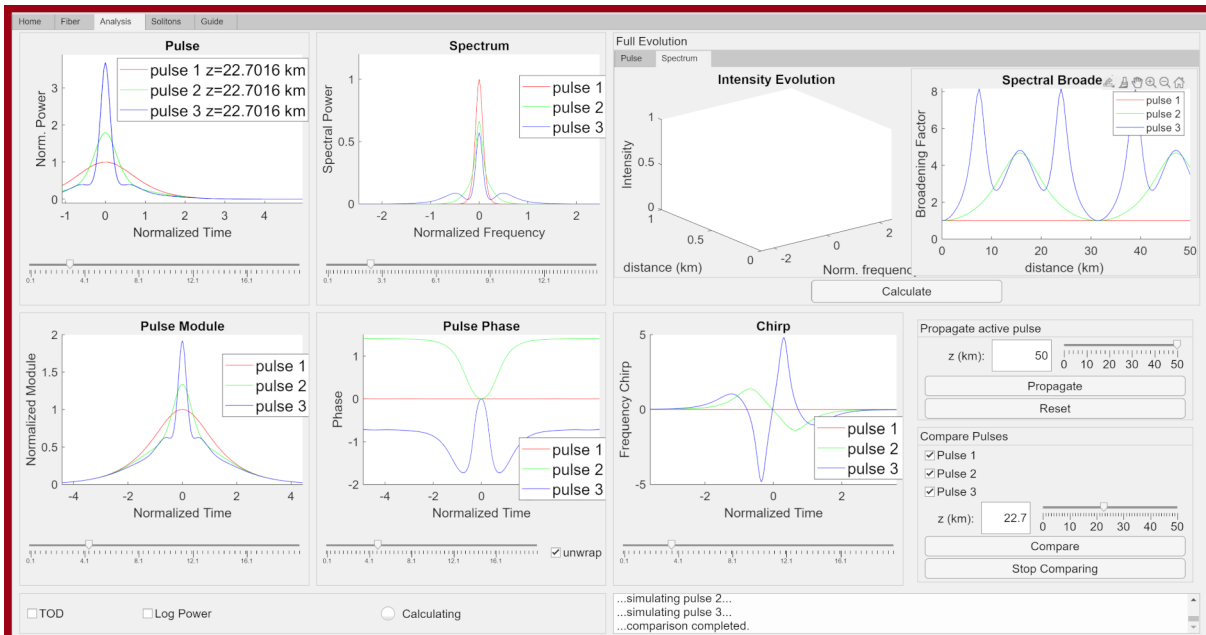


Figura 4.5: Confronto tra tre solitoni ottici.

Si osservi, infine, la presenza di alcuni elementi utili:

- Nella parte bassa dello schermo, due caselle di controllo permettono di abilitare la TOD e di rappresentare la potenza in scala logaritmica.
- Sotto ad alcuni grafici è presente uno *slider* che permette di regolare i limiti dell'asse delle ascisse.
- Una casella di testo, presente anche in altre pagine, contiene degli avvisi destinati all'utente e si aggiorna ad ogni azione.
- Una segnale giallo si accende per tutta la durata delle operazioni di calcolo.

Solitons

La quarta pagina, *Solitons*, permette di scegliere a piacimento il parametro N , che, nel caso sia intero, rappresenta l'ordine del solitone. A prescindere dalla descrizione dei solitoni, di cui si parlerà nel seguito (sezione 5.3.2), N è definito da (3.54). L'utente viene lasciato libero di modificare a piacimento i parametri γ e β_2 della fibra da simulare, che agiscono da variabili completamente indipendenti; una variazione di N , P_0 o T_0 , invece, produrrà un cambiamento in una delle altre quantità in modo che l'equazione (3.54) rimanga valida. In particolare, modificando N o T_0 il programma calcolerà il valore corrispondente di P_0 , mentre una variazione di P_0 porta ad un nuovo valore di T_0 . Un impulso a secante iperbolica con le proprietà calcolate viene generato automaticamente. Tramite il pannello "Soliton Evolution" è possibile simulare e osservare l'evoluzione del solitone. La pagina *Home* permette di continuare a modificare le caratteristiche dell'impulso, di caricarlo in memoria o di esportarne i dati corrispondenti.

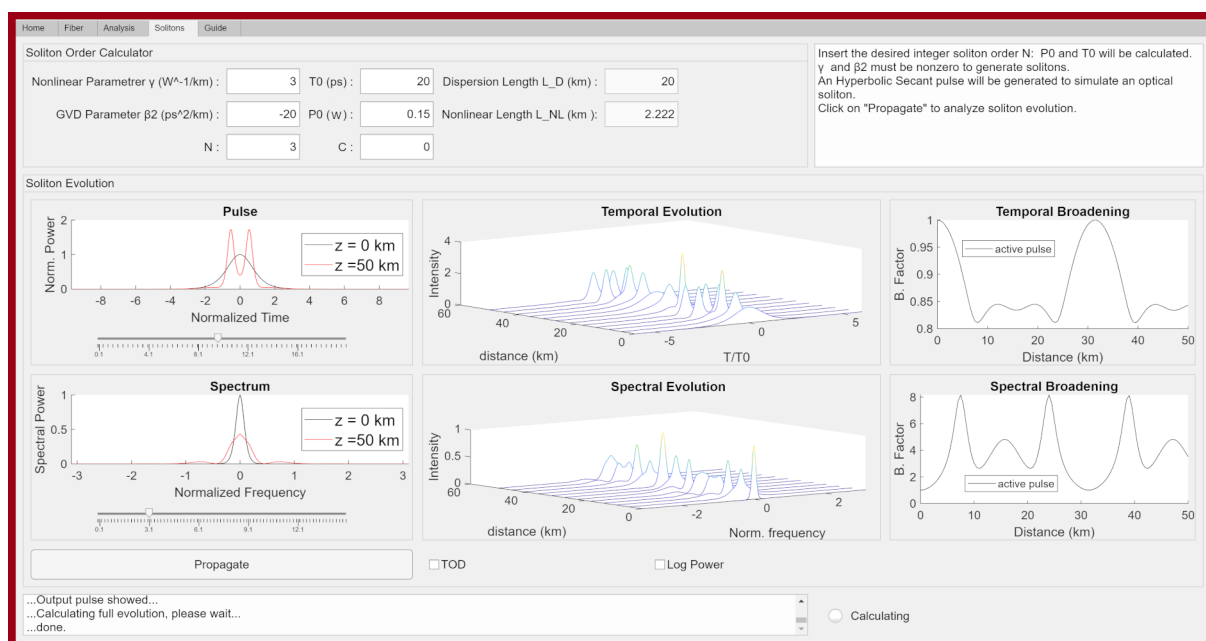


Figura 4.6: Qui è possibile scegliere il parametro N . Un impulso con le caratteristiche necessarie per la propagazione di un solitone viene poi generato automaticamente. In questo caso si è scelto di simulare un solitone del terzo ordine.

Guide

L'ultima pagina del programma, riportata di seguito, racchiude una breve guida all'utilizzo dell'applicazione stessa e alcune informazioni sulla sua realizzazione.

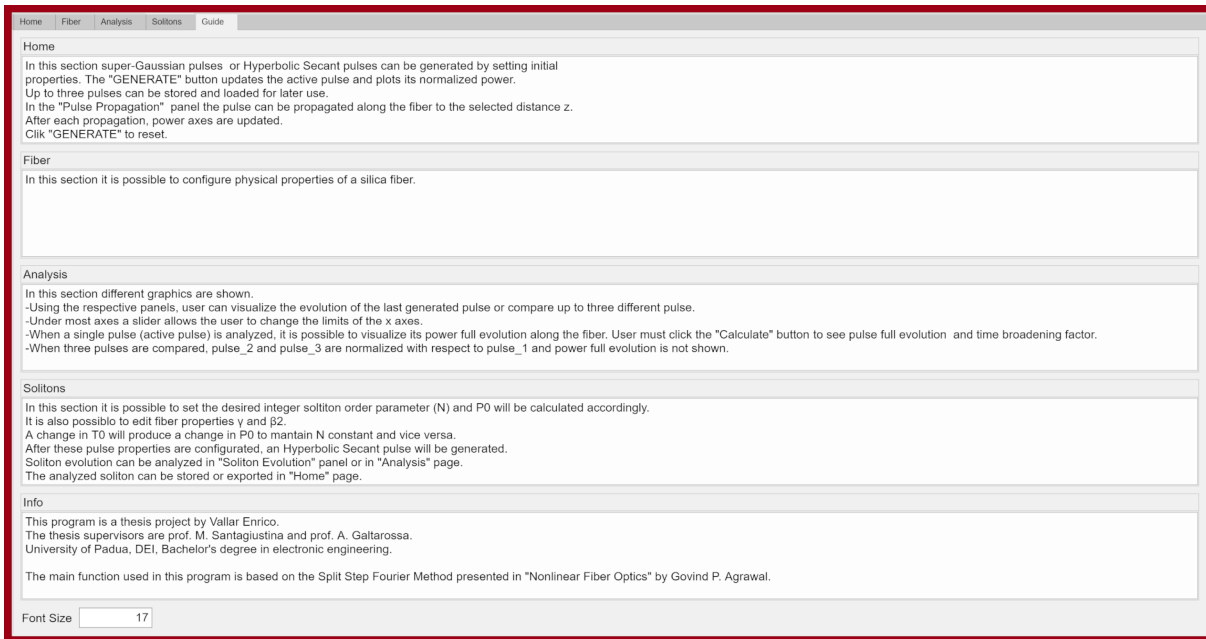


Figura 4.7: Breve guida all'uso.

In questa sezione è anche possibile regolare la dimensione dei caratteri usati nel programma, inserendo il valore desiderato nell'apposita casella di input.

Capitolo 5

Simulazioni

In questo capitolo si utilizzerà il programma *PulseEvolution* per simulare la propagazione degli impulsi nelle fibre ottiche di silice. Quando possibile, gli esiti delle simulazioni verranno confrontati con le previsioni analitiche oppure con dei risultati sperimentali.

5.1 GVD - Dispersione della velocità di gruppo

In questa sezione si ignoreranno gli effetti non lineari per osservare quelli dovuti alla dispersione. Le cause della GVD sono state descritte nel capitolo (2.2).

5.1.1 Compressione degli impulsi

Si vuole esaminare l'evoluzione del fattore di allargamento di un *chirp*, ovvero di un impulso la cui frequenza istantanea varia nel tempo. Alcuni esperimenti, come [4], hanno dimostrato che è possibile comprimere un *chirp* propagandolo all'interno di una fibra ottica; in questa sezione si presterà particolare attenzione a questo fenomeno.

Vediamo inizialmente come calcolare analiticamente il fattore di allargamento T_z/T_0 . La forma dell'impulso incidente è del tipo

$$U(0, T) = \exp \left[-\frac{1 + iC}{2} \frac{T^2}{T_0^2} \right]. \quad (5.1)$$

La sua trasformata di Fourier è descritta dall'equazione:

$$\tilde{U}(0, \omega) = \left(\frac{2\pi T_0^2}{1 + iC} \right)^{1/2} \exp \left[-\frac{\omega^2 T_0^2}{2(1 + iC)} \right], \quad (5.2)$$

da cui segue la formula

$$\Delta\omega = (1 + C^2)^{1/2}/T_0, \quad (5.3)$$

che permette di calcolare il parametro di *chirp* C conoscendo la larghezza spettrale dell'impulso. La frequenza istantanea di un *chirp* Gaussiano varia linearmente, come si verifica calcolando $\delta\omega(T) = -\frac{\partial\phi}{\partial T}$, con ϕ fase dell'impulso. Nel caso aumenti da testa a coda si parla di *up-chirp* con $C > 0$, altrimenti di *down-chirp* con $C < 0$. L'immagine seguente compara tre impulsi con diversi valori di C .

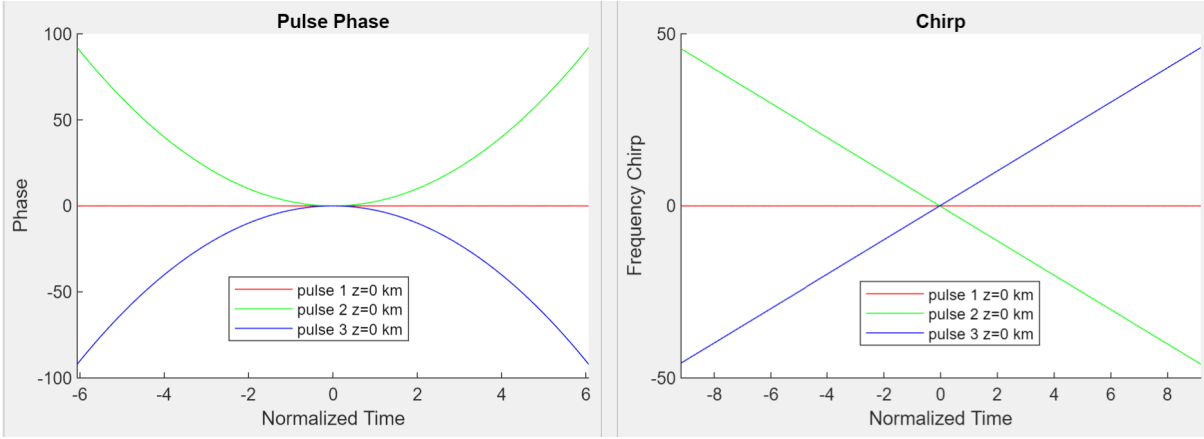


Figura 5.1: Confronto tra chirp Gaussiani. Per *pulse 1* $C = 0$, per *pulse 2* $C = -5$ e per *pulse 3* $C = 5$.

La formula seguente [10] permette di calcolare il fattore di allargamento per *chirp* Gaussiani:

$$\frac{T_z}{T_0} = \left[\left(1 + \frac{C\beta_2 z}{T_0^2} \right)^2 + \left(\frac{\beta_2 z}{T_0^2} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (5.4)$$

che, come si vede, dipende anche dal prodotto $C\beta_2$.

- Se $C = 0$, l'impulso non è un *chirp* e si allarga in maniera monotona.
- Se $C\beta_2 > 0$ si osserva che l'impulso si allarga in maniera monotona e più velocemente rispetto al caso in cui $C = 0$.
- Se $C\beta_2 < 0$ l'impulso si comprime monotonamente fino a raggiungere una larghezza minima T_z^{min} , per poi tornare ad espandersi.

L'effetto ottenuto in quest'ultimo caso si spiega tramite la variazione di frequenza istantanea indotta dalla dispersione e opposta rispetto a quella iniziale. Si nota, infatti, che il parametro C varia durante la propagazione secondo la relazione:

$$C(z) = C + (1 + C^2) (\beta_2 z / T_0^2) = C + \text{sgn}(\beta_2) (1 + C^2) (z / L_D). \quad (5.5)$$

Tramite l'equazione precedente, se $C\beta_2 < 0$, è possibile osservare che il parametro $C(z)$ si annulla alla distanza

$$\xi_{min} = \frac{z_{min}}{L_D} = -\frac{\text{sgn}(C)}{\text{sgn}(\beta_2)} \frac{|C|}{1 + C^2} = \frac{|C|}{1 + C^2}, \quad (5.6)$$

quando la variazione di frequenza istantanea causata dalla dispersione compensa totalmente il *chirp* iniziale. Attraverso la formula (5.4) si calcola T_z^{min}

$$T_z^{min} = \frac{T_0}{(1 + C^2)^{1/2}}. \quad (5.7)$$

Il grafico seguente, ottenuto con *PulseEvolution*(4.3), consente di osservare i fenomeni appena descritti.

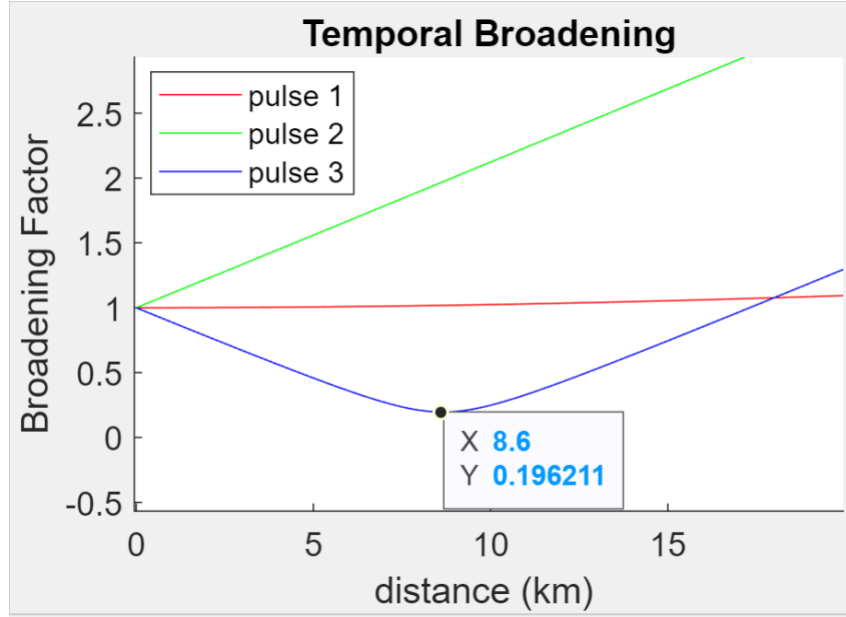


Figura 5.2: Confronto tra i fattori di allargamento relativi a *pulse 1* ($C = 0$), *pulse 2* ($\beta_2 C > 0$) e *pulse 3* ($\beta_2 C < 0$).

La fibra usata nella simulazione (5.2) realizzata con *PulseEvolution* è caratterizzata da $\beta_2 = -20 \text{ ps}^2/\text{km}$, $\gamma = 0$ e $L = 20 \text{ km}$. Gli impulsi *pulse 1*, *pulse 2* e *pulse 3* usati nel confronto hanno tutti una larghezza $T_0 = 30 \text{ ps}$, ma il parametro di chirp vale rispettivamente $C = 0$, $C = -5$ e $C = 5$, come nell'immagine (5.1).

Dal grafico ottenuto tramite la simulazione si nota che né *pulse 1* né *pulse 2* vengono compressi in accordo con la previsione teorica: infatti, per entrambi gli impulsi si ha $C\beta_2 \geq 0$. Si osserva anche che *pulse 2* si allarga più velocemente di *pulse 1* che non è un *chirp*. L'unico impulso che si comprime risulta essere *pulse 3* per il quale i risultati della simulazione pongono $z_{min,s} = 8.6 \text{ km}$ e $T_z^{min,s}/T_0 = 0.196211$. Usando le formule (5.6) e (5.7) si trova $z_{min,a} = 8.65 \text{ km}$ e $T_z^{min,a}/T_0 \approx 0.196116$. Dunque, i risultati della simulazione concordano con elevata precisione con le previsioni analitiche.

5.2 SPM - Self-Phase Modulation

5.2.1 Sfasamento non lineare

Si analizza inizialmente l'evoluzione dell'impulso nel caso limite in cui $\beta_2 = 0$ e $\beta_3 = 0$. In questo caso non è possibile utilizzare il parametro N per normalizzare la NLSE, ma, in modo analogo a quanto fatto nella sezione (3.5.1), è possibile riscrivere l'equazione (3.45) come:

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{ie^{-\alpha z}}{L_{NL}} |U|^2 U, \quad (5.8)$$

dove L_{NL} è la lunghezza di non linearità già definita in precedenza. Scrivendo l'ampiezza normalizzata dell'impulso incidente nella forma modulo-fase $U = V \exp\{i\phi_{NL}\}$, l'equazione precedente diventa:

$$\frac{\partial V}{\partial z} e^{i\phi_{NL}} + i \frac{\partial \phi_{NL}}{\partial z} V e^{i\phi_{NL}} = \frac{ie^{-\alpha z}}{L_{NL}} |V|^2 V e^{i\phi_{NL}}. \quad (5.9)$$

Separando parte reale e parte immaginaria, infine, si ottengono le equazioni:

$$\frac{\partial V}{\partial z} = 0 \quad e \quad \frac{\partial \phi_{NL}}{\partial z} = \frac{e^{-\alpha z}}{L_{NL}} |V|^2. \quad (5.10)$$

La prima equazione implica che il modulo non cambia lungo la propagazione, mentre dalla seconda è possibile ricavare lo sfasamento nonlineare dopo un tratto di fibra lungo L :

$$\phi(L, T) = |V|^2 \frac{1 - e^{-\alpha L}}{\alpha L_{NL}} = |U(0, T)|^2 \frac{L_{eff}}{L_{NL}}, \quad (5.11)$$

dove nell'ultimo passaggio è stata definita la lunghezza efficace $L_{eff} = (1 - e^{-\alpha L})/\alpha$.

Risulta così possibile trovare l'ampiezza normalizzata dell'impulso alla fine del collegamento:

$$U(L, T) = U(0, T) \exp[i\phi_{NL}(L, T)]. \quad (5.12)$$

Dall'equazione (5.11) si osserva che lo sfasamento massimo avviene per $T = 0$ e vale $\phi_{max} = L_{eff}/L_{NL}$. Derivando la (5.11) è possibile determinare il *chirping* della frequenza:

$$\delta\omega(T) = - \left(\frac{L_{eff}}{L_{NL}} \right) \frac{\partial}{\partial T} |U(0, T)|^2, \quad (5.13)$$

il cui modulo aumenta all'aumentare della distanza di propagazione. Quest'ultimo risultato indica che mentre l'impulso avanza lungo la fibra, nuove componenti spettrali vengono generate.

5.2.2 Evoluzione dello spettro tramite *PulseEvolution*

Si vuole utilizzare il programma *PulseEvolution* per simulare l'allargamento spettrale di un impulso gaussiano.

Le proprietà della fibra usata nella simulazione a $\lambda_0 = 1.55 \mu\text{m}$ sono $\alpha = 0.2 \text{ dB/km}$, $\gamma = 2$ e $L = 100 \text{ km}$. L'impulso di input simulato è di tipo gaussiano con picco di potenza $P_0 = 10 \text{ mW}$ e larghezza temporale iniziale $T_0 = 20 \text{ ps}$. L'immagine seguente mostra l'esito della simulazione.

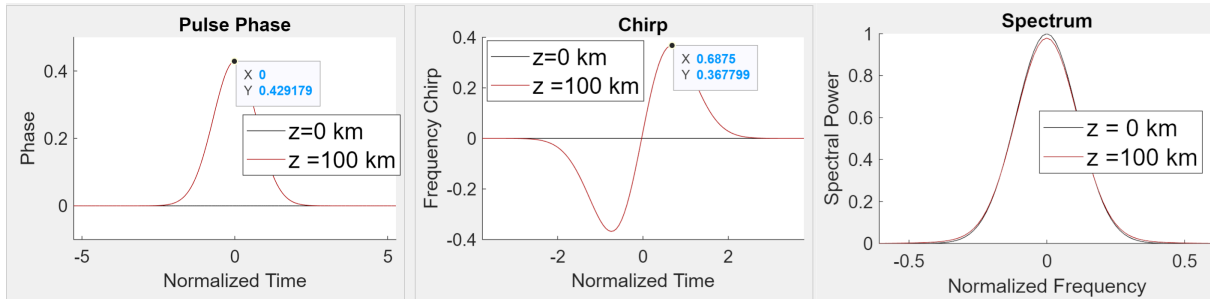


Figura 5.3: Sfasamento, *frequency chirp* e potenza spettrale dell'impulso.

Si osserva che la fase dell'impulso raggiunge il valore massimo in $T/T_0 = 0$ come previsto analiticamente. Essendo note l'attenuazione e la lunghezza della fibra, si calcola il valore della lunghezza efficace che risulta essere $L_{eff} \approx 21.48 \text{ km}$; allora, la previsione analitica sullo sfasamento massimo risulta $\phi_{max} = L_{eff}/L_{NL} \approx 0.4296$, risultato che combacia con quello della simulazione. Osservando il *chirping* della frequenza si nota che assume un valore negativo verso la testa (*red-shift*) e positivo verso la coda (*blue-shift*); inoltre, la parte centrale dell'impulso presenta un *up-chirp* lineare. Infine, per quanto riguarda lo spettro si osserva che non viene allargato di molto. Si prova ora ad aumentare la potenza dell'impulso incidente. Si sceglie di confrontare *pulse 1* ($P_0 = 0.01 \text{ W}$), *pulse 2* ($P_0 = 0.2 \text{ W}$) e *pulse 3* ($P_0 = 0.26 \text{ W}$). Di seguito si riportano i grafici ottenuti:

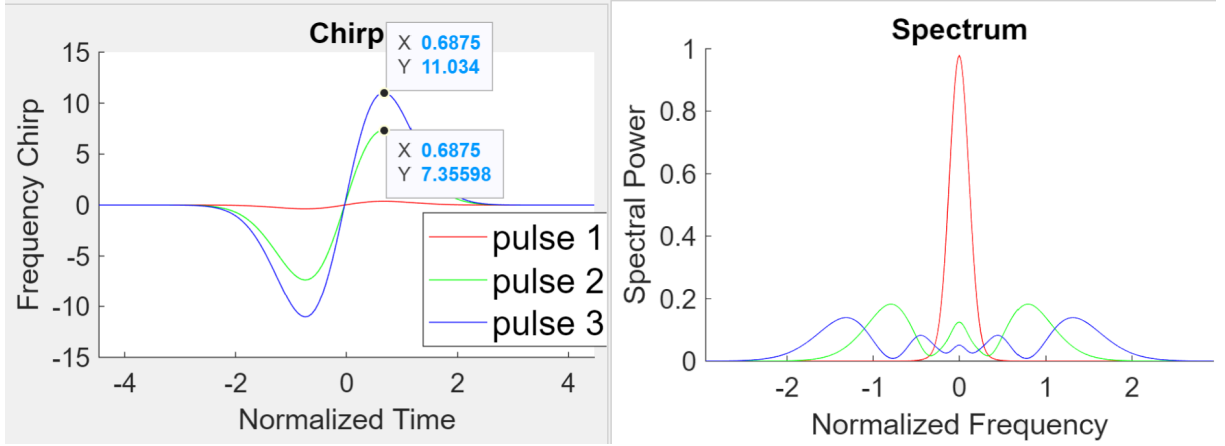


Figura 5.4: Potenza spettrale e *chirping* della frequenza degli impulsi *pulse 1*, *pulse 2* e *pulse 3* a confronto. Normalizzazione rispetto ai parametri P_0 e T_0 di *pulse 1*.

Osservando la figura precedente si nota immediatamente l'allargamento spettrale di *pulse 2* e *pulse 3*: in particolare, la potenza spettrale di questi due impulsi risulta ora piccata, con 3 picchi per *pulse 2* e 5 per *pulse 3*. Non è possibile stabilire immediatamente il valore di ϕ_{max} per *pulse 2* e *pulse 3*, poiché se $|\phi_{max}| > \pi$ *PulseEvolution* non è in grado di rappresentarne contemporaneamente l'andamento e il valore reale, che rimane comunque ignoto. Tuttavia è possibile usare la formula:

$$\delta\omega_{max}T_0 = 0.86\phi_{max}, \quad (5.14)$$

ricavata derivando e massimizzando (5.13) nel caso di un impulso gaussiano con $C = 0$.

Usando la formula (5.14) e i valori dei grafici in figura (5.4) si trova $\phi_{max,2} \approx 8.56$ e $\phi_{max,3} \approx 12.82$. È ora possibile ricavare il numero di picchi M dello spettro usando la relazione [8]:

$$\phi_{max} \approx \left(M - \frac{1}{2}\right) \pi. \quad (5.15)$$

Si calcolano $M_2 = [\phi_{max,2}/\pi + 1/2] = [3.22] = 3$ e $M_3 = [4.58] = 5$, risultati concordi con quanto osservato nella figura (5.4).

5.3 Solitoni ottici in regime di dispersione anomalo

5.3.1 Descrizione teorica dei solitoni ottici

Se $\beta_2 < 0$ si dice che gli impulsi si propagano in regime di dispersione della velocità di gruppo anomalo. In questo caso la NLSE (3.45) presenta come soluzioni degli impulsi che non cambiano lungo la fibra o la cui propagazione è periodica. Questi impulsi vengono chiamati solitoni ottici.

Zakharov e Shabat hanno dimostrato [15] che è possibile trovare le soluzioni solitoniche della NLSE usando l'*inverse scattering method* descritto in [1]. Il metodo consiste nel trovare l'evoluzione lineare dei dati di diffrazione ottenuti da un potenziale iniziale, per poi utilizzarla per ricostruire il potenziale evoluto.

Partendo dalla versione normalizzata della NLSE (3.51) in regime di GVD anomalo (e considerando l'attenuazione nulla per semplicità) si scrive:

$$i \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + |u|^2 u = 0, \quad (5.16)$$

dove si è definito $u := NU = \sqrt{\gamma L_D} A$, che corrisponde al potenziale iniziale.

L'evoluzione dei dati di diffusione si ottiene ora risolvendo le equazioni [12]

$$i \frac{\partial v_1}{\partial \tau} + uv_2 = \zeta v_1 \quad e \quad (5.17)$$

$$i\frac{\partial v_2}{\partial \tau} + u^* v_2 = -\zeta v_2, \quad (5.18)$$

dove v_1 e v_2 sono le ampiezze delle onde diffuse dal potenziale $u(\xi, \tau)$ e $\pm\zeta$ sono gli autovalori complessi corrispondenti. Le onde diffuse dal potenziale incidente sono calcolate a partire dagli $[N] = \sqrt{L_D/L_{NL}}$ poli ζ_j dalla funzione che descrive il coefficiente di riflessione $r(\zeta)$. I poli possono essere espressi nella forma $\zeta_j = (\delta_j + i\eta_j)/2$.

Una volta evoluti i dati di scattering è necessario ricostruire $u(\xi, \tau)$. Quando N assume un valore intero, esso corrisponde all'ordine solitonico; se $N = 1$ vi è un unico autovalore ζ_1 e si trova una soluzione analitica di (5.16):

$$u(\xi, \tau) = \eta \operatorname{sech}(\eta\tau) \exp(i\eta^2\xi/2), \quad (5.19)$$

dove il parametro η determina l'ampiezza e la larghezza dei solitoni.

I solitoni di ordine superiore al primo possono assumere diverse forme ottenute con l'*inverse scattering method*, ma un sottogruppo di questi, simmetrici rispetto a $\tau = 0$, può essere rappresentato all'inizio della propagazione dalla formula:

$$u(0, \tau) = N \operatorname{sech}(\tau), \quad (5.20)$$

con N intero.

Risulta, dunque, che la forma dell'impulso di input necessaria per la propagazione di un solitone deve essere a secante iperbolica:

$$U(0, \tau) = \operatorname{sech}(\tau). \quad (5.21)$$

L'evoluzione caratteristica dei solitoni, invariante per quello fondamentale e periodica per quelli di ordine superiore, può essere spigata dall'interazione degli effetti di dispersione (GVD) e di nonlinearietà (SPM).

5.3.2 Simulazione dei solitoni con *PulseEvolution*

Dalla condizione necessaria per la generazione di un solitone che impone $N = \sqrt{\frac{\gamma P_0 T_0^2}{|\beta_2|}}$ intero, risulta un vincolo su P_0 a seconda della scelta di T_0 (o viceversa) e delle caratteristiche della fibra. *PulseEvolution*, nella sezione *soliton*, calcola automaticamente il valore del picco di potenza iniziale P_0 (o della larghezza iniziale T_0) a seconda dell'ordine solitonico N desiderato. Successivamente, è sufficiente recarsi alla pagina *Home* e generare un impulso a secante iperbolica.

Si propone di riprodurre e simulare la propagazione dei solitoni osservati nell'esperimento [11] di Mollenauer, Stolen e Gordon.

La lunghezza d'onda del laser utilizzato è $\lambda = 1.55$ nm. La fibra utilizzata ha le seguenti caratteristiche:

- Lunghezza $L = 700$ m
- $\beta_2 = -20$ ps²/km
- $\gamma = 1.3$ W⁻¹/km

L'impulso ha una durata temporale larghezza fissa $T_0 = 4$ ps, mentre il picco di potenza iniziale P_0 è variabile. L'impulso non è un *chirp*, ovvero $C = 0$.

Variando P_0 tra 0.3 W e 25 W, si è osservata l'intensità dell'impulso alla fine del collegamento ottenendo i risultati mostrati di seguito:

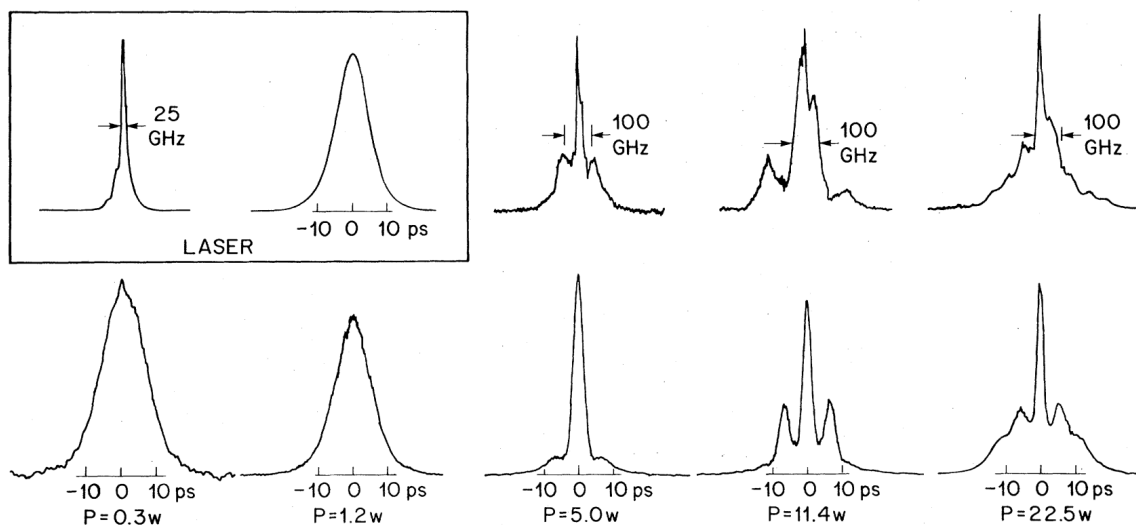


Figura 5.5: Profili che descrivono la potenza dell'impulso, osservati sperimentalmente in [11]. Nel riquadro vi è l'input, nella seconda riga l'intensità temporale e nella prima alcune intensità spettrali.

Si vuole utilizzare *PulseEvolution* per cercare una corrispondenza tra gli esiti sperimentali e quelli della simulazione. Ad esempio si sceglie di confrontare gli impulsi con $P_0 = 1.2 \text{ W}$, $P_0 = 5 \text{ W}$ e $P_0 = 11.4 \text{ W}$ salvandoli rispettivamente nella memoria del programma in *pulse 1*, *pulse 2* e *pulse 3*. Attraverso la pagina *Analysis* si confrontano i tre impulsi, propagandoli a 700 m:

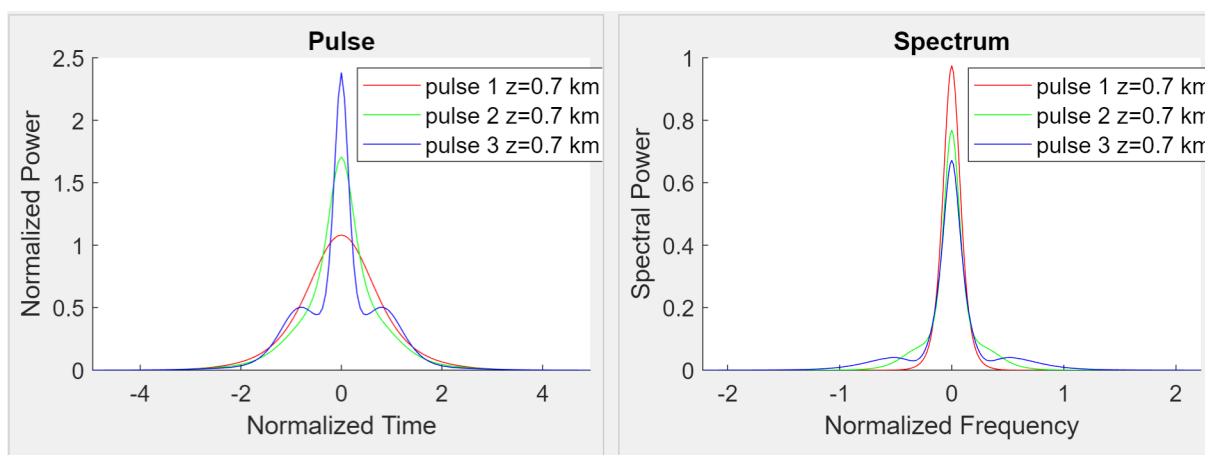


Figura 5.6: Forme degli impulsi simulati dopo aver percorso 0.7 km. La normalizzazione avviene rispetto alla larghezza temporale T_0 e al picco di potenza iniziale P_0 di *pulse 1*.

Risulta evidente che *pulse 1* mantiene una forma molto simile a quella iniziale in entrambe i casi. *Pulse 2* invece ha una forma più simile a quella di partenza nella simulazione effettuata. Per quanto riguarda *pulse 3*, invece, si osserva che in entrambi i casi si stanno formando due picchi secondari a 700 m.

Le figure seguenti mostrano l'evoluzione completa dei tre impulsi e riportano i corrispondenti valori di N:

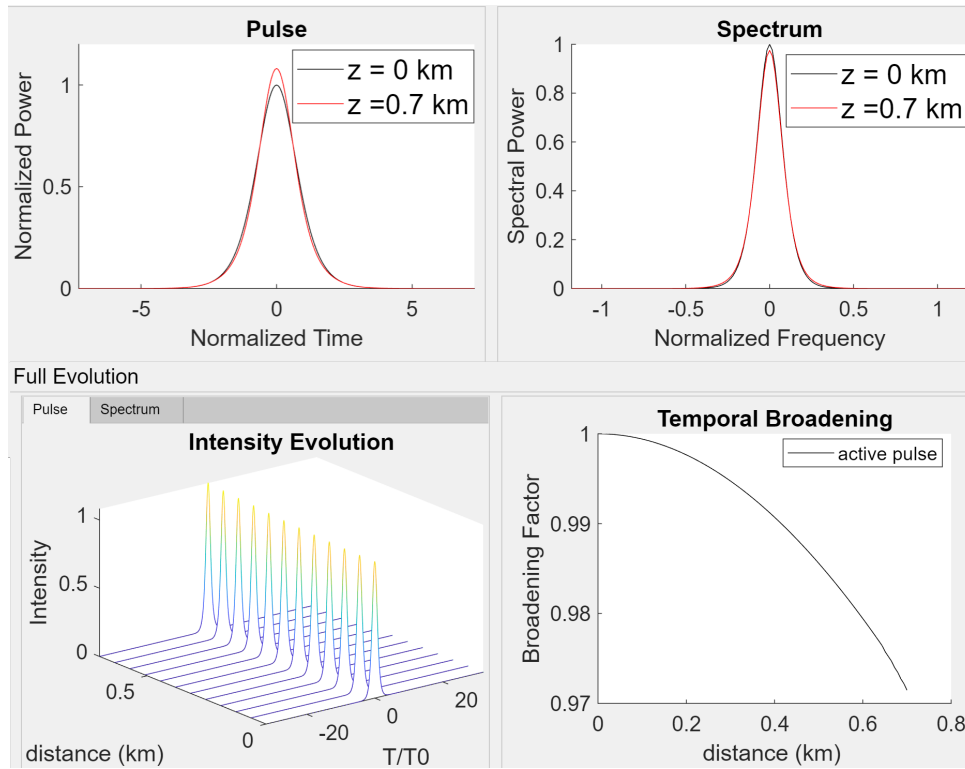


Figura 5.7: *Pulse 1*, $P_0 = 1.2$ W, $N = 1.1171$. Si osserva che la forma dell'impulso non si modifica molto lungo la fibra.

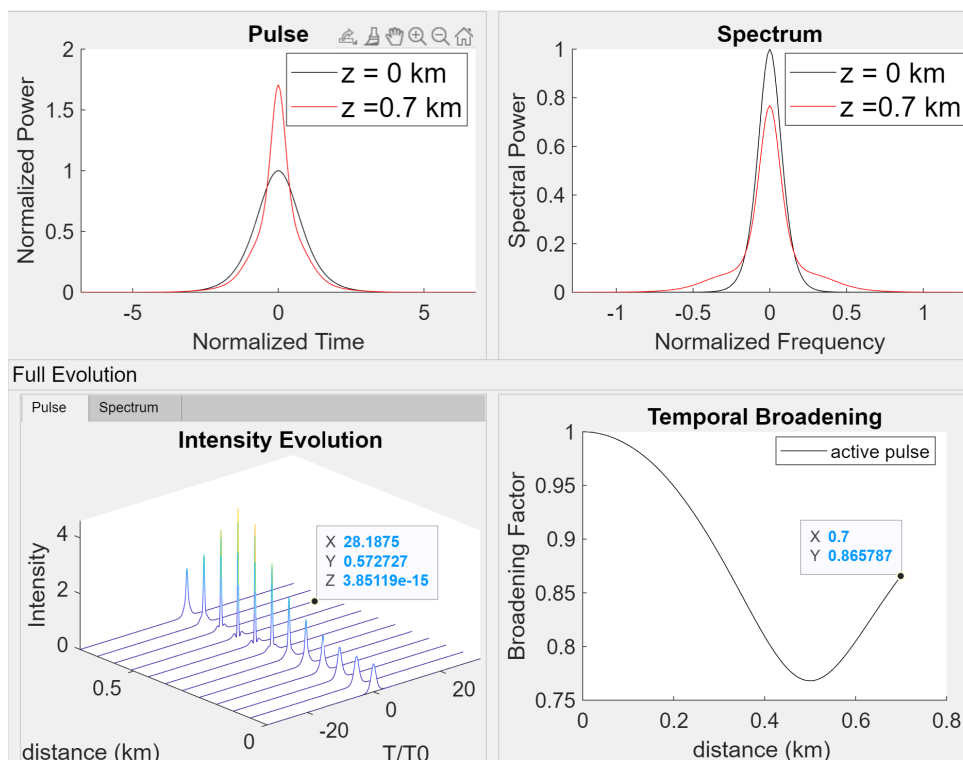


Figura 5.8: *Pulse 2*, $P_0 = 5.0$ W, $N = 2.2804$. Si osserva che la forma dell'impulso varia lungo la fibra. A 700 m l'impulso risulta compresso, così come avviene nell'esperimento di Stolen. Quando $z \approx 600$ m si nota che la forma dell'impulso è simile a quella ottenuta a fine collegamento nell'apparato sperimentale. Questa differenza di posizione può essere motivata dalle incertezze sperimentali.

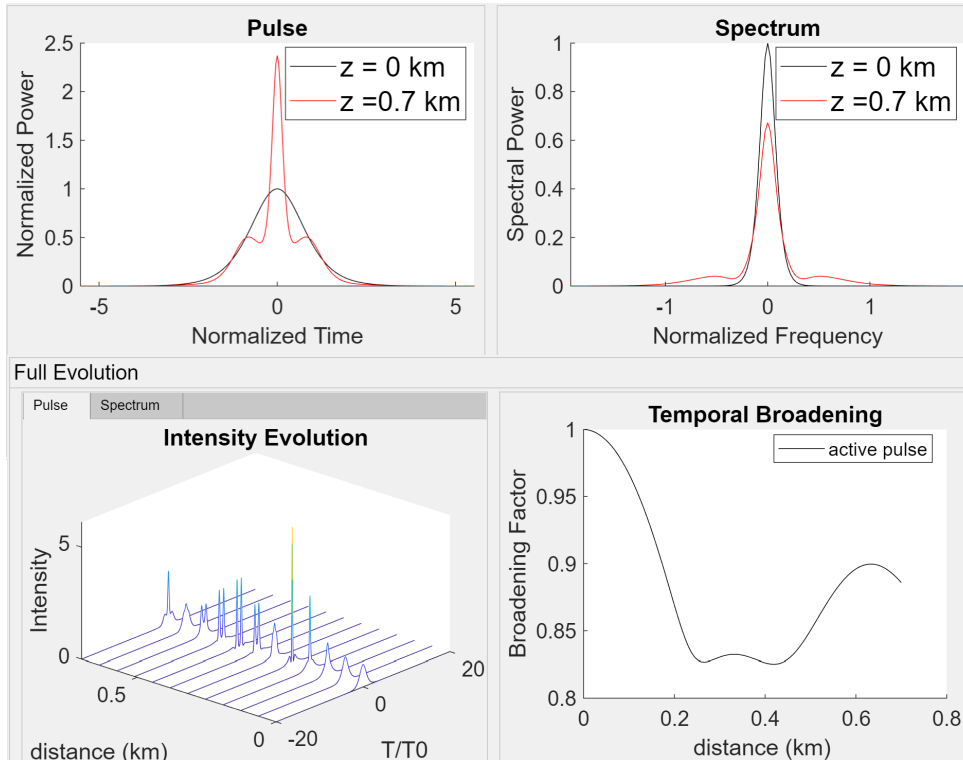


Figura 5.9: *Pulse 3*, $P_0 = 11.4$ W, $N = 3.4433$. Anche in questo caso si osserva che la forma dell'impulso cambia durante la propagazione nella fibra, raggiungendo, come si è visto, una forma simile a quella sperimentale a 700 m.

Il calcolo dei diversi valori di N permette di comprendere meglio i risultati ottenuti dalla simulazione: essi sono tutti molto vicini a numeri interi e, dunque, gli impulsi analizzati tendono a esibire un'evoluzione simile a quella dei solitoni. Il primo impulso, ad esempio, avendo $N = 1$ somiglia al solitone fondamentale e per questo la sua forma non cambia molto durante la propagazione. Gli altri impulsi, invece, sono simili ai solitoni di secondo e terzo ordine e, per questo motivo, tendono a ripristinare periodicamente la forma iniziale dopo aver percorso una certa distanza: l'evoluzione periodica è una delle proprietà dei solitoni di ordine superiore.

Si simulano ora i solitoni di primo, secondo e terzo ordine che meglio approssimano gli impulsi sperimentali. Usando la pagina *Solitons* di *PulseEvolution* si trovano i seguenti valori di P_0 per le diverse scelte di N :

- Se $N = 1$ allora $P_0 \approx 0.96$ W.
- Se $N = 2$ allora $P_0 \approx 3.85$ W.
- Se $N = 3$ allora $P_0 \approx 8.65$ W.

Le figure seguenti mostrano l'evoluzione dei solitoni lungo la fibra.

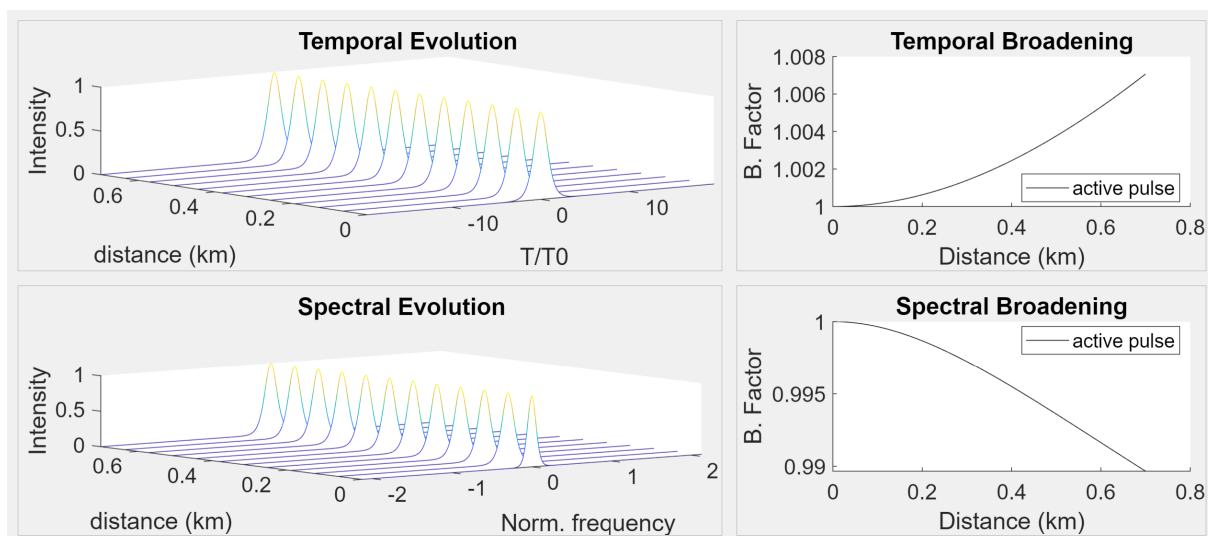


Figura 5.10: Solitone del primo ordine. L'impulso si allarga leggermente a causa della rappresentazione finita di P_0 nel programma che produce $L_D \neq L_{NL}$.

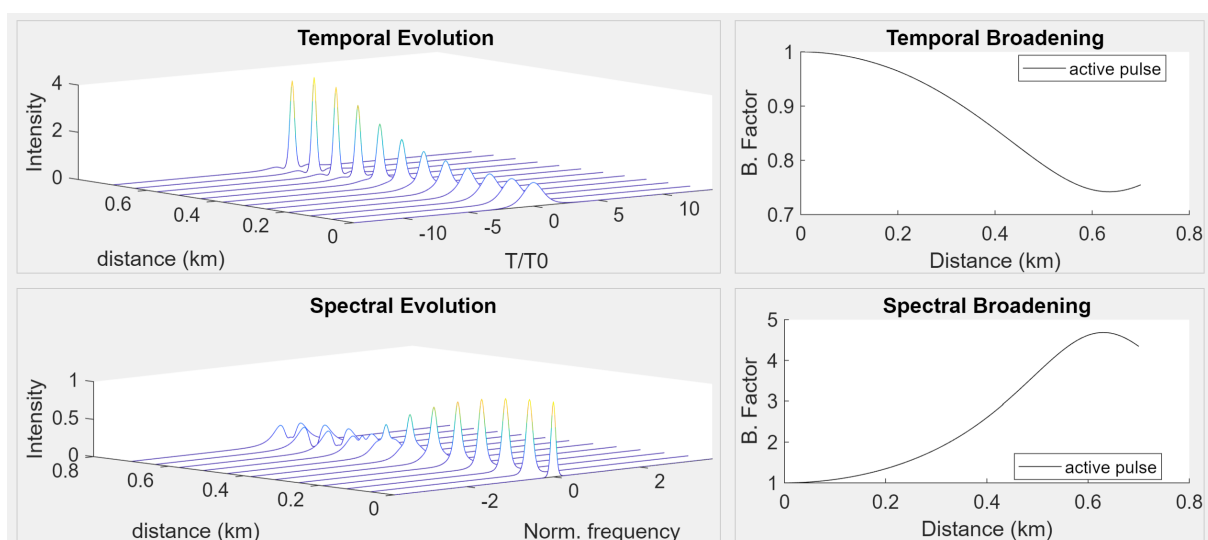


Figura 5.11: Solitone del secondo ordine. Si osserva che l'impulso prima si comprime e poi comincia a riallargarsi. Un'analisi in una fibra più lunga potrebbe rivelare la rigenerazione del segnale.

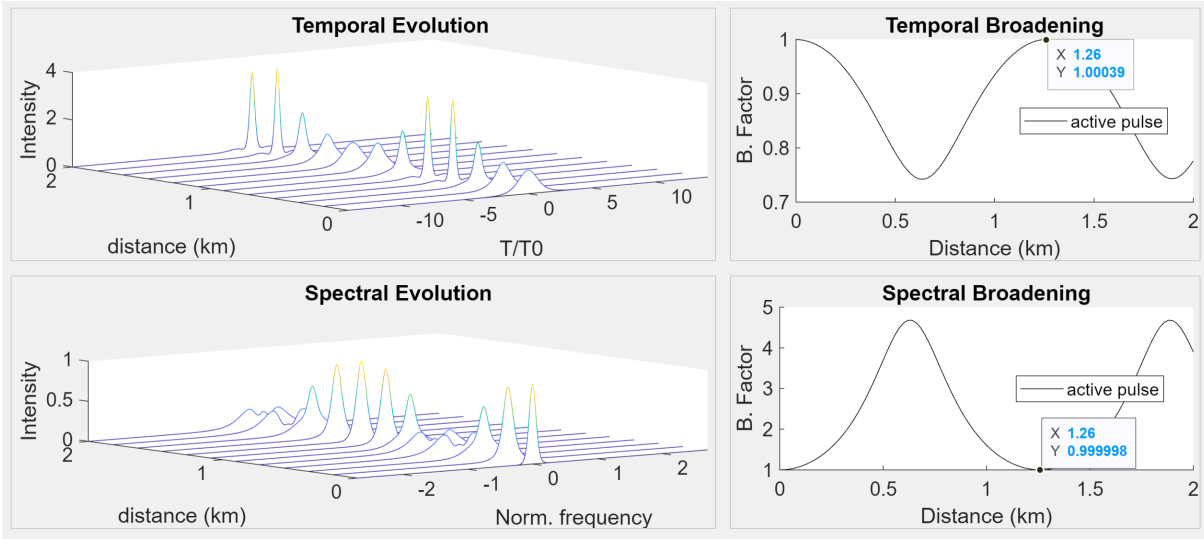


Figura 5.12: Simulazione della propagazione del solitone del secondo ordine in una fibra più lunga di quella utilizzata nell'esperimento in esame. Si osserva un'evoluzione periodica. È possibile calcolare analiticamente il periodo usando la formula $z_0 = \frac{\pi}{2} \frac{T_0^2}{|\beta_2|} \approx 1.257$ km, in accordo con il risultato della simulazione.

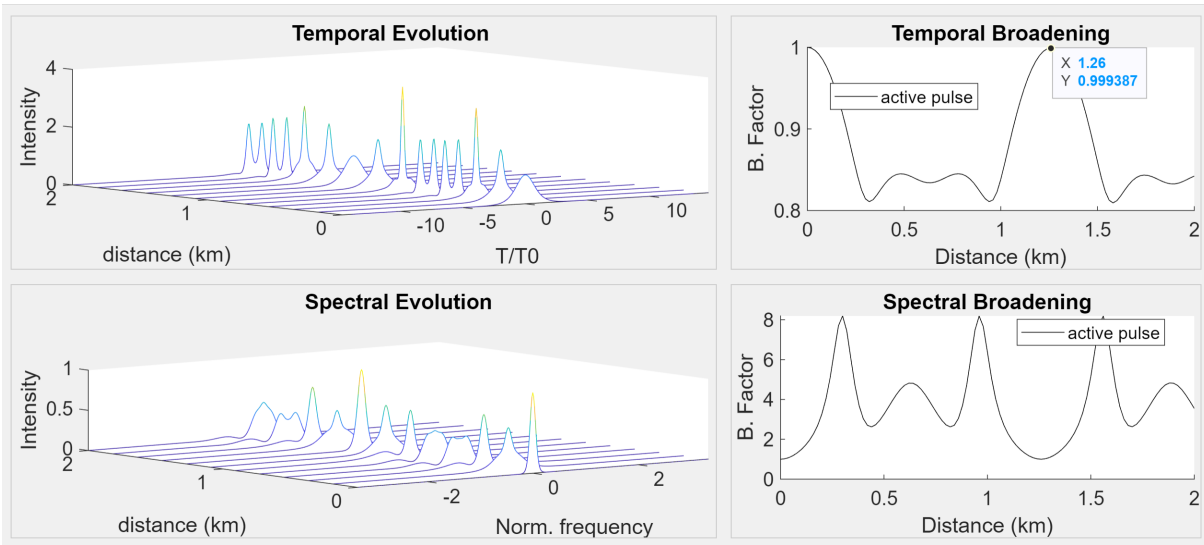


Figura 5.13: Simulazione dell'evoluzione del solitone di ordine 3 in una fibra più lunga di quella usata nell'esperimento. Si osserva un'evoluzione periodica. Il segnale viene rigenerato a $z_0 \approx 1.26$ km.

5.3.3 Radiazione indotta dalla TOD nei solitoni

In quest'ultima simulazione si vogliono studiare gli effetti della TOD nella propagazione di un solitone ultracorto. Si utilizza come riferimento l'articolo [14]. Secondo la notazione presentata in [2], la NLSE (3.57) utilizzata per studiare l'evoluzione dei solitoni in regime di GVD anomalo, ovvero considerando $u = NU$ e $\beta_2 < 0$ (e trascurando lo *scattering* di Raman), diventa:

$$i \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + |u|^2 u - i \delta_3 \frac{\partial^3 u}{\partial \tau^3} + i s |u|^2 \frac{\partial}{\partial u} = 0, \quad (5.22)$$

dove s governa gli effetti di *self-steeping* e δ_3 governa quelli di TOD ed è definito dalla formula

$$\delta_3 \equiv \frac{\beta_3}{6|\beta_2|T_0}. \quad (5.23)$$

Considerando gli effetti nonlineari di ordine superiore, l'equazione (5.19) che descrive la forma del solitone deve tenere conto di uno spostamento temporale p del picco, dipendente da s :

$$u(\xi, \tau) = \eta \operatorname{sech}(\eta(\tau - p)) \exp(i\eta^2 \xi / 2). \quad (5.24)$$

Poiché lo SSFM usato in *PulseEvolution* non tiene conto dell'effetto di *self-steeping*, per semplicità si impone $s = 0$ e, di conseguenza, p si annulla.

A causa della nonlinearietà e della TOD, è possibile osservare che parte dell'energia del solitone viene trasferita ad un'onda piana e, dunque, dissipata.

Questo fenomeno è particolarmente evidente nella propagazione degli impulsi ultracorti e quando $\beta_2 \approx 0$. Per questo motivo si sceglie di simulare tramite *PulseEvolution* un sistema con le caratteristiche seguenti:

- Parametro di GVD $\beta_2 = -1 \times 10^{-2} \text{ ps}^2/\text{km}$;
- Parametro di TOD $\beta_3 = -1.5 \times 10^{-4} \text{ ps}^3/\text{km}$;
- Parametro di nonlinearietà $\gamma = 1.3 \text{ W}^{-1}/\text{km}$;
- Lunghezza della fibra $L = 100 \text{ m}$;
- Larghezza iniziale dell'impulso $T_0 = 10 \text{ fs}$.

Tramite il pannello *Solitons* si imposta $N = 1$ per generare un solitone del primo ordine (risulta $P_0 \approx 77 \text{ W}$). Si calcola, utilizzando la definizione precedente, $\delta_3 = 0.25$. Si effettua una simulazione della sua evoluzione; la figura seguente ne mostra l'esito:

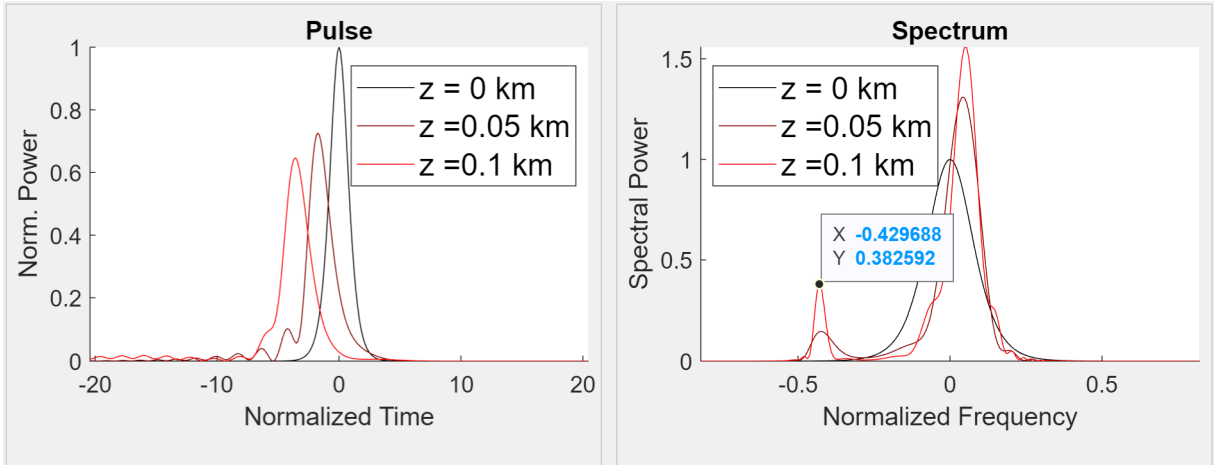


Figura 5.14: Evoluzione del solitone a 50 m e 100 m dall'inizio del collegamento. Si osserva la comparsa di un picco di potenza spettrale intorno a $(f - f_0)T_0 = -0.43$.

La comparsa del picco secondario nello spettro dell'impulso indica un trasferimento energetico dal solitone di primo ordine ad un'onda piana.

Il vettore d'onda del solitone è $k_{sol} = \eta^2/2$, mentre quello dell'onda piana, k_{lin} , si ottiene risolvendo al limite $u \rightarrow 0$ l'equazione (5.16). Dall'uguaglianza $k_{sol} = k_{lin}$, valutata per il solitone fondamentale con $\eta = 1$, risulta che la pulsazione di risonanza è data da [13]:

$$-\frac{1}{2}(\Delta\omega_r T_0)^2 + \delta_3(\Delta\omega_r T_0)^3 = \frac{1}{2}. \quad (5.25)$$

Il risultato della simulazione pone $\Delta\omega_r T_0 = 2\pi\Delta f_r T_0 = -2.70$; mentre la predizione teorica è $\Delta\omega_r T_0 = -2.36$. Sebbene i due risultati si discostino l'uno dall'altro, si può affermare che *PulseEvolution* è in grado di fornire una valida indicazione sulla frequenza di risonanza che porta alla dissipazione di energia. Tutta l'energia trasferita all'onda piana non può essere correttamente guidata all'interno della cavità. Nell'articolo [14] si propone di sfruttare i fenomeni nonlineari di ordine superiore per evitare questo fenomeno di risonanza. Tuttavia, tali effetti non possono essere simulati attraverso l'algoritmo SSFM (sez. 4.10) usato in questa trattazione.

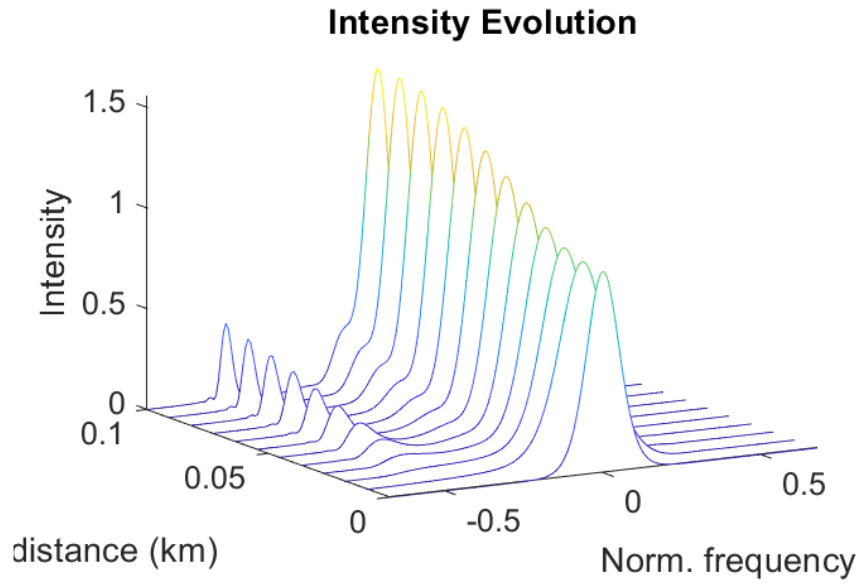


Figura 5.15: Evoluzione della potenza spettrale dell'impulso sopra descritto.

Capitolo 6

Conclusioni

Partendo dalle proprietà fisiche della fibra, si è visto come l'evoluzione degli impulsi che si propagano al suo interno sia governata dalla NLSE (3.45). Poiché questa equazione differenziale nonlineare può essere risolta analiticamente soltanto in alcuni casi particolari, è stato necessario trovare una soluzione numerica: usando lo SSFM si è giunti alla realizzazione dell'applicazione *PulseEvolution*.

L'applicazione è stata inizialmente testata in quattro situazioni particolari.

Nel primo caso sono stati osservati gli effetti dovuti alla sola GVD e in particolare si è descritto come è possibile prevedere analiticamente la compressione dell'impulso: i risultati teorici sono stati utili a confermare quelli della simulazione.

Poi, è stata presa in considerazione la sola SPM e, anche in questa situazione, gli esiti ottenuti con *PulseEvolution* sono stati corroborati dalle previsioni analitiche.

Durante la terza simulazione si è studiata la propagazione dei solitoni, possibile solo grazie all'interazione tra gli effetti di GVD e SPM. Dopo aver esaminato i grafici prodotti dal programma, si è dimostrato che anche l'evoluzione dei solitoni può essere correttamente simulata.

Infine, simulando la propagazione di un solitone ultracorto, si è osservato un fenomeno di radiazione energetica indotto dalla TOD e già previsto teoricamente. Nel grafico della potenza spettrale si è constatata la presenza di un picco secondario corrispondente alla frequenza di risonanza tra solitone e onda piana dissipativa. Il valore di ω_r è risultato molto vicino a quello calcolabile.

Le quattro casistiche presentate, pur nella loro relativa semplicità, hanno portato alla conclusione che *PulseEvolution* è un valido ausilio per lo studio della propagazione nonlineare degli impulsi nelle fibre ottiche. La correttezza dell'algoritmo dello SSFM, dimostrata a partire dalle previsioni teoriche per casi semplici, infatti, consente di sfruttare il programma anche nelle situazioni in cui la via della soluzione analitica non è percorribile.

In realtà, ci sono dei casi di studio per cui non è ancora possibile utilizzare *PulseEvolution*. Si pensi, ad esempio, all'interazione tra due impulsi, ai fenomeni di nonlinearietà di ordine superiore (come quello che avrebbe potuto evitare la dissipazione energetica nel caso esaminato della propagazione di un solitone ultracorto), oppure ai fenomeni di birifrangenza: in casi come questi, sarebbe necessario ampliare le funzionalità del programma o modificare l'algoritmo risolutivo utilizzato.

Lo studio della nonlinearietà delle fibre ottiche è fondamentale non solo per le telecomunicazioni, ma anche in molte aree della ricerca. Ad esempio, le fibre ad alta nonlinearietà possono essere usate come *cristalli fotonici* per la generazione di fotoni entangled nell'ambito delle comunicazioni quantistiche [3]. Visto il forte interessamento della ricerca, lo sviluppo di programmi come *PulseEvolution* sarà sempre più utile e necessario.

Appendice A

Codice del programma

I codici del programma e delle classi MATLAB realizzate sono consultabili su GitHub all'url:
<https://github.com/enricovallar/PulseEvolution>.

Bibliografia

- [1] M. A. Ablowitz and P. A. Clarkson. *Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering*. London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, 1991.
- [2] Govind Agrawal. *Nonlinear fiber optics*. Academic Press, London, England, sixth edition. edition, 2019.
- [3] Govind P. Agrawal. *Applications of nonlinear fiber optics*. Academic Press is an imprint of Elsevier, Amsterdam, Netherlands, third edition. edition, 2020.
- [4] Govind P. Agrawal and N. A. Olsson. Amplification and compression of weak picosecond optical pulses by using semiconductor-laser amplifiers. *Opt. Lett.*, 14(10):500–502, May 1989.
- [5] Robert W. Boyd. *Nonlinear optics*. Academic Press is an imprint of Elsevier, San Diego, fourth edition. edition, 2020 - 2020.
- [6] John A. Buck. *Fundamentals of optical fibers / John A. Buck*. Wiley series in pure and applied optics. John Wiley andSons, New York, c1995.
- [7] James W. Cooley and John W. Tukey. An algorithm for the machine calculation of complex fourier series. *Mathematics of Computation*, 19(90):297–301, 1965.
- [8] R. Cubeddu, R. Polloni, C. A. Sacchi, and O. Svelto. Self-phase modulation and "rocking" of molecules in trapped filaments of light with picosecond pulses. *Phys. Rev. A*, 2:1955–1963, Nov 1970.
- [9] Tingye Li. Structures, parameters, and transmission properties of optical fibers. *Proceedings of the IEEE*, 68(10):1175–1180, 1980.
- [10] D. Marcuse. Pulse distortion in single-mode fibers. 3: Chirped pulses. *Appl. Opt.*, 20(20):3573–3579, Oct 1981.
- [11] L. F. Mollenauer, R. H. Stolen, and J. P. Gordon. Experimental observation of picosecond pulse narrowing and solitons in optical fibers. *Phys. Rev. Lett.*, 45:1095–1098, Sep 1980.
- [12] P. Möbius. Hasegawa, a.; kodama, y.: Solitons in optical communications. oxford, clarendon press 1995. xiv, 320 pp., £ 60,00. isbn 0-19-856507-0 (oxford series in optical and imaging sciences 7). *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 77(7):502–502, 1997.
- [13] Marco Santagiustina. Third-order dispersion radiation in solid-state solitary lasers. *J. Opt. Soc. Am. B*, 14(6):1484–1495, Jun 1997.
- [14] Marco Santagiustina and Ewan M. Wright. Suppression of third-order dispersion radiation in solid-state soliton lasers. *Opt. Lett.*, 20(22):2267–2269, Nov 1995.
- [15] Aleksei Shabat and Vladimir Zakharov. Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media. *Sov. Phys. JETP*, 34(1):62, 1972.