Università degli Studi di Padova

Dipartimento di Matematica

Corso di Laurea in Matematica

Il grafo di generazione delle potenze del gruppo alterno di grado 5

Relatore: Prof. Andrea Lucchini
Laureando: Niero Giovanni
Numero di matricola: 1144900
Data sessione di Laurea: 20 Aprile 2018

Indice

Introduzione

Dato un gruppo finito 2-generato G, possiamo associarci un grafo i cui vertici corrispondono agli elementi del gruppo e tale che due vertici sono connessi da un arco se e solo se i corrispondenti elementi di G generano G. Chiamiamo questo grafo il **grafo di generazione** del gruppo G e lo denotiamo con $\Gamma(G)$.

Il **clique number** associato al grafo Γ è invece definito come l'ordine del più grande sottografo completo e lo denotiamo con $\omega(\Gamma)$.

L'importanza di queste definizioni deriva dal fatto che molti risultati interessanti sulla generazione di gruppi semplici finiti possono essere enunciati efficacemente come proprietà del grafo di generazione. Ad esempio in [5] Guralnick e Kantor hanno dimostrato che se S è un gruppo semplice non abeliano, preso x in S con $x \neq 1$, esiste y in S tale che $S = \langle x, y \rangle$, quindi nessun vertice di $\Gamma(S)$ è isolato, esclusa l'identità.

Successivamente Breuer, Guralnick e Kantor in [4] hanno provato che se x e y sono due elementi non identici e distinti di S allora esiste z tale che $S = \langle x, z \rangle = \langle y, z \rangle$, e perciò, detto S^* l'insieme degli elementi di S esclusa l'identità, $\Gamma(S^*)$ ha diametro 2.

Nel 1995, i due matematici Liebeck e Shalev, dimostrano uno dei risultati più importanti riguardanti il grafo di generazione: il limite del clique number del grafo di generazione di un gruppo semplice non abeliano S tende ad infinito con l'ordine di S [[2],corollario 1.7]. Liebeck e Shalev innanzitutto dimostrano in [[2], teorema 1.6] che, detta $P(S)$ la probabilità che una coppia di elementi scelti in modo casuale generi S ed E l'insieme degli archi di $\Gamma(S)$,

$$\frac{|E|}{\binom{|S|}{2}} = P(S) \geq 1 - \frac{1}{c \cdot m(S)} \tag{1}$$

dove $m(S)$ denota il minimo indice di un sottogruppo proprio di S e la costante c può essere scelta arbitrariamente vicino ad 1 se $|S|$ è sufficientemente grande. Dunque $P(S)$ tende ad 1 se $|S|$ tende ad infinito. Questo implica, per il teorema di Turan [3], che $\Gamma(S)$ contiene un sottografo completo con almeno $[c \cdot m(S)]$ vertici. Il teorema di Turan infatti afferma che, dato un grafo Γ e detto r un intero tale che $\omega(\Gamma) < r$, $|E| \leq \frac{r-1}{r} \cdot \frac{|V|^2}{2}$, dove V è l'insieme dei vertici di Γ. Nel caso del grafo di generazione di S dunque, $|E| \leq \frac{r-1}{r} \cdot \frac{|S|^2}{2}$.

Ma (1) implica che $|E| \geq \frac{c \cdot m(S)-1}{c \cdot m(S)} \cdot \frac{|S||S-1|}{2}$.

Perciò il grafo $\Gamma(S)$ deve contenere un sottografo completo con almeno $[c \cdot m(S)]$ vertici.

Il valore di $\omega(\Gamma(S))$ è stato studiato per molte classi di gruppi semplici ed in generale è molto più grande di $m(S)$. Per esempio, in [10], Blackburn dimostra che $\omega(\Gamma(Alt(n))) = 2^{n-2}$ per $n \equiv 2 \pmod 4$ e sufficientemente grande.

Contrariamente al caso dei gruppi semplici, la conoscenza del generating graph per gruppi finiti arbitrari è ancora limitata, anche se è comunque facile dimostrare che le proprietà evidenziate prima nel caso di gruppi semplici non restano confermate per gruppi qualsiasi. Ci sono in genere molti vertici isolati anche se si congettura che il sottografo $\Gamma^*(G)$, ottenuto rimuovendo i vertici isolati, sia connesso. E' noto inoltre che $\Gamma^*(G)$ è connesso e con diametro al più 4 se G è risolubile; mentre, senza l'ipotesi di risolubilità, si possono costruire esempi con diametro arbitrariamente grande.

Siamo interessati a mettere a tema del nostro lavoro proprio il generating graph di gruppi 2-generati arbitrari. Come punto di partenza scegliamo il prodotto diretto di gruppi semplici.

Dato un gruppo semplice S, esiste un massimo $n = \delta(S)$ per il quale S^n è 2-generato. Si osservi che $\delta(S)$ è ben definito, poichè ogni gruppo semplice finito è due generato, ed è pari al numero di coppie di generatori di S diviso l'ordine di $Aut(S)$.

Si noti ora che, dato un gruppo $G = S_1^{n_1} \times \dots S_t^{n_t}$ con $S_1, \dots, S_t$ semplici a due a due non isomorfi, tali che $S_i^{n_i}$ è 2-generato per ogni i, $\omega(\Gamma(G)) = \min_i(\omega(\Gamma(S_i^{n_i})))$. Infatti, se abbiamo che $S_i^{n_i} = \langle x_i, y_i \rangle$, per ogni i, allora la coppia di elementi $(x_1, \dots, x_t)$ e $(y_1, \dots, y_t)$ genera G. Se inoltre si considera una n-cricca di $\Gamma(G)$ formata dagli elementi $(x_{1,1}, \dots, x_{1,t})$, $\dots$,$(x_{n,1}, \dots, x_{n,t})$, si ha che ad essa corrisponde una n-cricca della stessa dimensione per $S_i^{n_i}$, per ogni i, formata dagli elementi $x_{1,i}, \dots x_{n,i}$. La dimensione della massima cricca costruibile per G sarà dunque pari al minimo tra i clique number di $S_i^{n_i}$.

Perciò, per studiare il grafo di generazione di un prodotto diretto di gruppi semplici, è sufficiente concentrarsi sulle potenze S^n con $n \leq \delta(S)$.

Lo studio però del grafo di generazione di S^n con $n \leq \delta(S)$ è complesso e non si hanno molti risultati a riguardo. Ad esempio non si sa ancora se sia vero oppure no che $\omega(\Gamma(S^{\delta(S)}))$ tenda ancora all'infinito al crescere di $|S|$.

La complessità del problema giustifica l'attenzione al caso particolare di $S = A_5$.

In questo caso $\delta = 19$ e $\omega(Alt(5)) = 8$. Ci siamo domandati: come si comporta $\omega(\Gamma(Alt(5)^n))$ con $n \leq 19$?

In [1] i matematici Andrea Lucchini e Eleonora Crestani, inizialmente notano che, per un qualsiasi gruppo G 2-generato, $\omega(G) \geq 3$. Infatti se si considerano gli elementi $x, y \in G$ tali che $\langle x, y \rangle = G$, certamente x, y, xy a due a due generano G. Successivamente, allo scopo di rispondere alla domanda se esistessero o meno gruppi semplici non abeliani S tali che $\omega(S^{\delta(S)}) > 3$, dimostrano che $\omega(\Gamma(Alt(5)^{19})) = 4$, esponendo due 4-cricche per $Alt(5)^{19}$. Quindi $\omega(Alt(5)) = 8$ e $\omega(\Gamma(Alt(5)^{19})) = 4$. Come decresce il clique number all'aumentare delle potenze di $Alt(5)$ e per quali ragioni?

Dare una risposta esaustiva a questa domanda si è rivelato particolarmente complesso. Abbiamo trovato alcuni clique number per alcune potenze, mentre per altre abbiamo dato delle stime elencando i ragionamenti e i tentativi fatti.

Dimostrare che $\omega(\Gamma(Alt(5))^n) \geq t$ significa costruire una matrice di dimensione $t \times n$, in cui le entrate sono elementi di $Alt(5)$ che soddisfano le seguenti proprietà:

- due qualsiasi entrate distinte di una stessa riga generano $Alt(5)$;

- considerate due colonne della matrice $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$, si ha che le coppie (x_i, y_i) e (x_j, y_j) non sono $Sym(5)$-coniugate, per ogni $1 \leq i < j \leq n$.

Vorremmo quindi, fissato n, costruire la matrice di dimensioni massime possibili, poichè il numero di colonne di tale matrice è il clique number cercato. Chiamiamo questa matrice **matrice di generazione** di $Alt(5)^n$.

Un passo intermedio per la costruzione della matrice di generazione, che si rende necessario per il numero troppo elevato di elementi di $Alt(5)^n$, è la costruzione della cosidetta **matrice degli ordini**, una matrice le cui entrate sono gli ordini degli elementi della matrice che vorremmo costruire.

Considerazioni di tipo combinatorico impongono restrizioni sulla matrice degli ordini, che permettono di ottenere delle limitazioni superiori a $\omega(\Gamma(Alt(5))^n)$. E' molto difficile però verificare se è possibile realizzare la matrice di generazione a partire dalla matrice degli ordini, ossia se esistono elementi di $Alt(5)$ con ordine imposto dalla matrice degli ordini che soddisfino le proprietà elencate in precedenza.

Computazionalmente non è possibile verificare tutte le possibilità, pur utilizzando le limitazioni imposte dalla matrice degli ordini. Abbiamo cercato di sfruttare le potenzialità del calcolatore utilizzando GAP (Groups, Algorithms, Programming), un sistema per l'algebra computazionale discreta che contiene un linguaggio di programmazione.

Abbiamo scritto numerosi programmi in linguaggio GAP, cercando di ottimizzare al meglio il programma, e abbiamo ottenuto i seguenti risultati:

n	Clique number
1,2,3,4	8
5,6	7 o 8
7,8	7
9, 10, 11, 12, 13	6 o 7
14	5, 6 o 7
15	5 o 6
16	5
17	4 o 5
18, 19	4

Capitolo 1

Clique Number di $Alt(5)^{19}$

1.1 Generatori di Alt(5)

Definizione 1. *Dato un gruppo finito G, si definisce* ***grafo di generazione*** *del gruppo G il grafo $\Gamma(G)$ costruito ponendo come vertici gli elementi del gruppo e unendo due vertici con un arco se e solo se i due elementi associati generano tutto il gruppo.*

Definizione 2. *Dato un grafo Γ, si definisce* ***clique number*** *di Γ l'ordine del più grande sottografo completo. Lo denotiamo con $\omega(\Gamma)$.*

Osservazione 1. Tutti i gruppi semplici finiti possono essere generati da due elementi.

Nel nostro lavoro saremo particolarmente interessati ad un particolare gruppo, che ora dimostriamo essere semplice: il gruppo alterno su 5 elementi, che denotiamo con $Alt(5)$. Proviamo in realtà più in generale, che il gruppo alterno su n elementi è un gruppo semplice, per ogni $n \geq 5$.

Innanzitutto dimostriamo il seguente lemma.

Lemma 1. *$Alt(n)$ è generato da 3-cicli, per ogni $n \geq 5$.*

Dimostrazione. Ogni elemento di $Alt(n)$ si può scrivere come prodotto di un numero pari di trasposizioni. Due trasposizioni giustapposte possono avere un elemento comune oppure non averlo, possono dunque essere del tipo

$$\alpha := (1,2)(2,3), \tag{1.1}$$

oppure

$$\alpha := (1,2)(3,4). \tag{1.2}$$

Se il prodotto è del tipo (1.1), allora si può riscrivere come $\alpha = (1,2,3)$, se invece è del tipo (1.2), sarà uguale al prodotto di 3 - cicli $\alpha = (1,3,2)(1,3,4)$.

Poichè ogni elemento di Alt(n) è, per definizione, il prodotto di un numero pari di trasposizioni, ogni elemento può anche essere scritto come prodotto di 3-cicli. □

Teorema 1. *$Alt(n)$ è un gruppo semplice, per ogni $n \geq 5$.*

Dimostrazione. Per dimostrare il teorema usufruiamo di due ulteriori lemmi:

Lemma 2. *Sia N un sottogruppo normale di $Alt(n)$ ($n \geq 5$). Se N contiene un ciclo di lunghezza 3, allora contiene tutti i cicli di lunghezza 3 e perciò è uguale ad $Alt(n)$.*

Dimostrazione. Sia γ un ciclo di lunghezza 3 in N e sia σ un secondo ciclo di lunghezza 3 in $Alt(n)$. Certamente $\sigma = g\gamma g^{-1}$ per qualche $g \in Sym(n)$. Se $g \in Alt(n)$, la dimostrazione è conclusa. Altrimenti, dal momento che $n \geq 5$, esiste una trasposizione $t \in S_n$ disgiunta da σ. Allora $tg \in Alt(n)$ e

$$\sigma = t\sigma t^{-1} = tg\gamma g^{-1}t^{-1}$$

. Quindi $\sigma \in N$.

Per il lemma 1, possiamo concludere che N è uguale ad $Alt(5)$. □

Il prossimo lemma completa la dimostrazione del teorema:

Lemma 3. *Tutti i sottogruppi normali N di $Alt(n)$, con $n \geq 5$, $N \neq 1$, contengono un ciclo di lunghezza 3.*

Dimostrazione. Consideriamo $\alpha \in N$, $\alpha \neq 1$, elemento con il massimo numero di punti fissi tra gli elementi non banali di N. Dimostriamo che α è un 3 - ciclo.

Se per assurdo α non fosse un 3 - ciclo, allora potrebbe essere scritto come prodotto di cicli disgiunti in una delle due forme:

$$\alpha = (1, 2, 3 \dots) \dots \tag{1.3}$$

$$\alpha = (1, 2)(3, 4) \dots . \tag{1.4}$$

Nel primo caso, α muove altri due numeri, possiamo assumere siano 4 e 5, poichè α non può essere nè $(1, 2, 3)$ nè $(1, 2, 3, k)$ dovendo essere una permutazione pari.

Siano $\beta := (3, 4, 5)$ e $\alpha_1 := \beta\alpha\beta^{-1} \in N$. Se α è della forma (1.3) allora $\alpha_1 = (1, 2, 4, \dots) \dots$, se invece α è del tipo (1.4), $\alpha_1 = (1, 2)(4, 5) \dots$. In entrambi i casi $\alpha_1 \neq \alpha$ (poichè agisce diversamente sul 2) e quindi $\alpha_2 := \alpha_1\alpha^{-1} \neq 1$, inoltre $\alpha_2 \in N$ essendo prodotto di due elementi di N.

Tutti i numeri > 5 sono fissati da β e se sono fissati anche da α allora sono fissati da $\alpha_2 = \beta\alpha\beta^{-1}\alpha^{-1}$.

D'altra parte, se α è come in (1.3) allora $\alpha_2(2) = 2$. In questo caso α_2 ha più punti fissi di α, il che è assurdo per come abbiamo definito α. Se α è della forma (1.4), $\alpha_2(2) = 2$ e $\alpha_2(1) = 1$, che è di nuovo una contraddizione. Dunque α deve essere un 3 - ciclo. □

□

Lemma 4. *Il gruppo degli automorfismi di $Alt(5)$ è isomorfo al gruppo simmetrico su cinque elementi.*

Dimostrazione. Dimostrazione in [[8], Theorem 5.7]. □

Osservazione 2. Diamo una descrizione dei sottogruppi di $Alt(5)$ nella seguente tabella:

	Descrizione	Ordine	Numero	Note
Triv	$()$	1	1	
	$\langle(1,2)(3,4)\rangle$	2	15	
V_4	{(),(1,2)(3,4),(1,3)(2,4),(1,4)(2,3)}	4	5	2-Sylow
Z_5	$\langle(1,2,3,4,5)\rangle$	5	6	5-Sylow
A_3	$\langle(1,2,3)\rangle$	3	10	3-Sylow
S_3	$\langle(1,2,3),(1,2)(4,5)\rangle$	6	10	Max
A_4	$\langle(1,2,3),(1,2)(3,4)\rangle$	12	5	Max
D_{10}	$\langle(1,2,3,4,5),(2,5)(3,4)\rangle$	10	6	Max
A_5	$\langle(1,2,3,4,5),(1,2,3)\rangle$	60	1	

Proposizione 1. *Presi due interi positivi r e s, diciamo che un elemento* $(x,y) \in (Alt(5))^2$ *è del tipo* (r,s) *se x ha ordine r e y ha ordine s. Sym(5) agisce per coniugio sull'insieme delle coppie* (x,y) *che generano Alt(5) ed esistono esattamente 19 orbite. Perciò, un insieme di rappresentanti delle orbite è formato da* 19 *elementi:*

- *quattro del tipo* $(5,5)$,
- *quattro del tipo* $(5,3)$,
- *quattro del tipo* $(3,5)$,
- *due del tipo* $(5,2)$,
- *due del tipo* $(2,5)$,
- *una del tipo* $(2,3)$,
- *una del tipo* $(3,2)$,
- *una del tipo* $(3,3)$.

Dimostrazione. Vogliamo contare le coppie (x,y) che generano $Alt(5)$ a meno di coniugio con elementi di $Sym(5)$. L'elemento x può avere ordine 2, 3 o 5. Supponiamo che x abbia ordine 2. Poichè stiamo cercando le coppie di generatori a meno di coniugio e tutti gli elementi di $Alt(5)$ di ordine 2 fanno parte della stessa classe di coniugio, possiamo supporre che $x = (1,2)(3,4)$. Cerchiamo gli y che generano con x. Sono gli elementi che non stanno in nessun massimale di $Alt(5)$ contenente x. Come visto nella tabella precedente, i sottogruppi massimali di $Alt(5)$ sono i sottogruppi isomorfi a D_{10}, A_4 ed S_3. Per questa ragione dobbiamo escludere:

- 8 elementi di ordine 5, ossia gli otto elementi che assieme ad x generano un sottogruppo isomorfo al gruppo diedrale. L'elemento x infatti è contenuto in 2 gruppi diedrale ognuno dei quali può essere generato da 4 diversi elementi di ordine 5;
- 12 elementi di ordine 3, cioè gli 8 che generano assieme ad x un sottogruppo isomorfo al gruppo $Alt(4)$ e i 4 che generano con x il sottogruppo isomorfo ad $Sym(3)$;
- tutti gli elementi di ordine 2, poichè il gruppo generato da 2 elementi di ordine 2 è sempre un gruppo diedrale.

Rimangono dunque 16 coppie del tipo $(2,5)$ e 8 del tipo $(2,3)$. Queste coppie sono coniugate se e solo se lo sono tramite un elemento del centralizzante di x

in $Sym(5)$. Dal momento che il centralizzante ha ordine 8, a meno di coniugio, ci sono 2 coppie di tipo $(2, 5)$ e una di tipo $(2, 3)$. Per simmetria abbiamo 2 coppie del tipo $(5, 2)$ e una del tipo $(3, 2)$.

Supponiamo ora che x abbia ordine 5. Se y ha ordine 5 allora genera $Alt(5)$ se e solo se $y \notin \langle x \rangle$. Ci sono quindi 20 coppie del tipo $(5, 5)$. Ci sono inoltre 20 coppie del tipo $(5, 3)$ poichè tutti gli elementi di ordine 3 generano $Alt(5)$ assieme ad un elemento di ordine 5. Il centralizzante di un elemento di ordine 5 coincide con il sottogruppo generato da esso, perciò ha ordine 5. Dunque si hanno 4 coppie del tipo $(5, 5)$ e 4 del tipo $(5, 3)$. Per simmetria ci sono 4 coppie del tipo $(3, 5)$.

Supponiamo infine che x abbia ordine 3 e y abbia ordine 3. Si può supporre che $x = (1, 2, 3)$, allora y deve appartenere all'insieme

$$\{(1, 4, 5), (1, 5, 4), (2, 4, 5), (2, 5, 4), (3, 4, 5), (3, 5, 4)\}.$$

Dato che il centralizzante di un elemento di ordine 3 ha ordine 6, abbiamo un'unica coppia del tipo $(3, 3)$. □

Proposizione 2. *Il clique number del grafo di generazione di $Alt(5)$ è 8.*

Dimostrazione. Cerchiamo un insieme di ordine massimo di elementi di $Alt(5)$ che a due a due lo generano. Se consideriamo solo gli elementi di ordine 5, abbiamo 6 elementi che a due a due generano $Alt(5)$, ognuno facente parte di un diverso gruppo ciclico di ordine 5.

Si vede facilmente inoltre, che gli elementi di ordine 3 potranno essere al massimo 2, non è possibile infatti trovare 3 elementi di ordine 3 che a due a due generino l'intero gruppo.

Infine, non essendo possibile generare $Alt(5)$ con 2 elementi di ordine 2, potrà esserci solo un elemento di tale ordine nell'insieme di generatori che cerchiamo.

Tutti gli elementi di ordine 3 generano con quelli di ordine 5, dunque si trova facilmente un insieme da 8 elementi. Un esempio è il seguente:

$$(1, 2, 3), (3, 4, 5), (1, 2, 3, 4, 5), (1, 2, 3, 5, 4), (1, 2, 4, 3, 5), (1, 2, 4, 5, 3)$$
$$(1, 2, 5, 3, 4), (1, 2, 5, 4, 3).$$

Possiamo ora aggiungere un elemento di ordine 2 all'insieme. Ci sono però all'interno dell'insieme 2 elementi di ordine 5 che assieme al nuovo elemento di ordine 2 generano un sottogruppo isomorfo al gruppo diedrale. Se aggiungessimo dunque un elemento di ordine 2 saremmo costretti a rimuovere 2 elementi di ordine 5. Possiamo quindi concludere che l'insieme che cerchiamo ha 8 elementi.

Il clique number del grafo di generazione di $Alt(5)$ è perciò 8. □

1.2 Clique number del grafo di generazione di $Alt(5)^{19}$

Proposizione 3. *Sia $G := S_1 \times \cdots \times S_t$ con $S_1, \ldots, S_t$ gruppi semplici non abeliani, tutti isomorfi ad uno stesso insieme che chiamiamo S. Se M è un sottogruppo massimale di G, allora si verifica uno dei seguenti casi:*

1. *esiste i compreso tra 1 e t e K sottogruppo massimale di S tale che M consiste di tutte le t-uple che hanno al posto i-esimo un elemento di K;*

2. *esistono i, j e $a \in Aut(S)$ tale che M consiste di tutte le t-uple in cui l'entrata j-esima è l'immagine tramite a dell'entrata i-esima.*

Dimostrazione. Dimostrazione in [9]. □

Corollario 1. Siano $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$ due elementi di $Alt(5)^n$. Si ha che $\langle x, y \rangle = Alt(5)^n$ se e solo se valgono le seguenti proprietà:

1. $\langle x_i, y_i \rangle = Alt(5)$, per ogni $i \in 1, \ldots, n$;

2. la coppia (x_i, y_i) non è coniugata tramite un elemento di $Sym(5)$ alla coppia (x_j, y_j), per ogni $i \neq j$.

Dimostrazione. Affinchè $\langle x, y \rangle = Alt(5)^n$, è necessario che $\langle x, y \rangle$ non sia contenuto in nessun sottogruppo massimale di $Alt(5)^n$.

Per la proposizione 3, questo significa che:

1. $\langle x_i, y_i \rangle = Alt(5)$, per ogni $i \in 1, \ldots, n$;

2. la coppia (x_i, y_i) non è coniugata tramite un elemento di $Sym(5)$ alla coppia (x_j, y_j), per ogni $i \neq j$.

Viceversa, se valgono le due proprietà, allora $\langle x, y \rangle$ non è contenuto in nessun sottogruppo massimale di $Alt(5)^n$ e perciò $\langle x, y \rangle = Alt(5)^n$. □

Corollario 2. Sia S un gruppo semplice. Definiamo $\delta(S)$ il massimo esponente r tale che S^r rimanga 2 generato. Allora, detta $\delta := \delta(Alt(5))$, δ è 19.

Dimostrazione. Sia $G := Alt(5)^\delta$ e siano $x := (x_1, \ldots, x_\delta)$ e $y := (y_1, \ldots, y_\delta)$ due elementi di G. Abbiamo che $\langle (x, y) \rangle = G$ se $\langle x, y \rangle$ non è contenuto in nessun sottogruppo massimale.

Per il corollario 1 abbiamo le seguenti regole:

1. $\langle x_i, y_i \rangle = Alt(5)$, per ogni $i \in 1, \ldots, \delta$;

2. la coppia (x_i, y_i) non è coniugata tramite un elemento di $Sym(5)$ a nessuna coppia (x_j, y_j) con $i \neq j$, $i, j \in \{1, \ldots, \delta\}$.

Dunque, per la proposizione 1 possiamo concludere che $\delta = 19$, essendo formato da 19 elementi l'insieme dei rappresentanti per l'orbita di coniugio dell'azione di $Sym(5)$ nell'insieme delle coppie di generatori di $Alt(5)$. □

Osservazione 3. $\omega(\Gamma(Alt(5)^{19})) \geq 3$. Infatti se abbiamo che la coppia (x, y) genera $Alt(5)^{19}$, allora certamente anche (x, xy) e (y, xy) generano il gruppo.

Lemma 5. *$\omega(\Gamma(Alt(5)^{19})) \leq 4$.*

Dimostrazione. Per assurdo assumiamo che $\omega(\Gamma(Alt(5)^{19})) > 4$. Allora esistono cinque elementi:

$$y_1 = (x_{1,1}, \ldots, x_{19,1}),\ y_2 = (x_{1,2}, \ldots, x_{19,2}),\ y_3 = (x_{1,3}, \ldots, x_{19,3}),$$
$$y_4 = (x_{1,4}, \ldots, x_{19,4}),\ y_5 = (x_{1,5}, \ldots, x_{19,5})$$

che a due a due generano $Alt(5)^{19}$. Consideriamo la matrice $X = (x_{ij})$ con 19 righe e 5 colonne. Questa matrice ha le seguenti proprietà (dovute al corollario 1):

1. i cinque elementi in ogni riga di X generano a due a due $Alt(5)$ (in particolare questo implica che ogni riga contiene al massimo due elementi di ordine 3);

2. ogni coppia di colonne della matrice deve generare tutto $Alt(5)^{19}$, deve perciò essere formata da un insieme di rappresentanti delle orbite dell'azione di coniugio di $Sym(5)$ nell'insieme delle coppie di generatori di $Alt(5)$.

Dalla seconda regole, assieme alla proposizione 1, segue che ogni colonna contiene sei elementi di ordine 3 e quindi la matrice contiene un totale di 30 elementi di ordine 3.

D'altra parte, ogni riga contiene al massimo 2 elementi di ordine 3 e ci sono al massimo $10 = \binom{5}{2}$ righe contenenti esattamente 2 elementi di ordine 3. Se ce ne fossero più di 10 infatti, ci sarebbe certamente un minore 2×2 con tutte le entrate di ordine 3 e ciò sarebbe in contraddizione con la seconda regola. Questo implica che ci sono al massimo 29 elementi di ordine 3 in X, che è in contraddizione con il conto precedente. $\square$

Rimane dunque da decidere se $\omega(\Gamma(Alt(5)^{19}))$ è 3 oppure 4.

Se $\omega(\Gamma(Alt(5)^{19})) = 4$, allora ci sono 4 elementi $y_1 = (x_{1,1}, \ldots, x_{19,1})$, $y_2 = (x_{1,2}, \ldots, x_{19,2})$, $y_3 = (x_{1,3}, \ldots, x_{19,3})$, $y_4 = (x_{1,4}, \ldots, x_{19,4})$ che a due a due generano $Alt(5)$. Consideriamo la matrice $X = (x_{ij})$ con 19 righe e 4 colonne. La matrice X ha le seguenti proprietà:

1. i quattro elementi di ogni riga a due a due generano $Alt(5)$;

2. se $1 \le i_1 \le i_2 \le 19$ e $1 \le j_1 \le j_2 \le 4$, allora le coppie $(x_{i_1 j_1}, x_{i_1 j_2})$ e $(x_{i_2 j_1}, x_{i_2 j_2})$ non sono $Sym(5)$-coniugate.

1.2.1 La matrice degli ordini

Definizione 3. *Data una matrice M composta da elementi di $Alt(5)$, con n righe e le cui colonne sono elementi di $Alt(5)^n$ che lo generano a 2 a 2, definiamo* ***matrice degli ordini*** *associata ad M la matrice che ha come entrate gli ordini degli elementi di M.*

Per verificare se la matrice X precedentemente definita effettivamente esiste, dobbiamo inanzitutto verificare che esiste una matrice degli ordini associata plausibile, ossia non in contraddizione con la proposizione 1.

Quindi, prese 2 colonne della matrice degli ordini, dovremmo avere 4 coppie del tipo $(5,5)$, 4 coppie del tipo $(5,3)$, 4 del tipo $(3,5)$, 2 del tipo $(5,2)$, 2 del tipo $(2,5)$, una $(2,3)$, una $(3,2)$ e una $(3,3)$. Inoltre ogni riga della matrice degli ordini potrà avere al massimo un 2 e al massimo due 3, in accordo con la prima delle 2 regole date dalla proposizione 3.

Proposizione 4. *Esistono, a meno di riordinamenti di righe e colonne, solo* 2 *possibili matrici degli ordini associate ad* X *e sono le seguenti:*

$$Y_1 = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 & 2 \\ 5 & 5 & 3 & 2 \\ 5 & 5 & 3 & 3 \\ 5 & 5 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 5 & 3 \\ 5 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & 3 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 5 & 5 \\ 5 & 2 & 5 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 5 & 3 \\ 3 & 5 & 5 & 5 \\ 3 & 3 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & 5 & 5 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 5 \end{bmatrix} \qquad Y_2 = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 3 & 2 \\ 5 & 5 & 3 & 3 \\ 5 & 5 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 5 & 3 \\ 5 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & 3 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 5 & 2 \\ 5 & 2 & 5 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 5 & 3 \\ 3 & 5 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & 5 & 5 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

Dimostrazione. Mostriamo come si costruisce la prima delle 2 matrici.

Supponiamo ci sia almeno una riga con un solo 5, quindi del tipo $(3\ \ 3\ \ 2\ \ 5)$.

Consideriamo innanzitutto solamente i 5. In ogni colonna ci dovranno essere necessariamente dieci 5 e, prese due colonne, ci dovranno essere esattamente 4 coppie del tipo $(5,5)$.

Possiamo quindi partire da una matrice come la seguente:

$$
\begin{bmatrix}
5 & & B & \\
5 & & B & \\
5 & & B & \\
5 & & B & \\
5 & & B & \\
5 & & B & \\
5 & 5 & V & \\
5 & 5 & V & \\
5 & 5 & V & \\
5 & 5 & V & \\
 & 5 & B & \\
 & 5 & B & \\
 & 5 & B & \\
 & 5 & B & \\
 & 5 & B & \\
 & 5 & B & \\
 & & R & \\
 & & R & \\
3 & 3 & 2 & 5
\end{bmatrix}
$$

Inseriamo i dieci 5 della terza colonna. Denotiamo con x il numero di 5 da inserire al posto delle "V". Dato che le coppie $(5,5)$ tra la prima e la terza colonna e tra la seconda e la terza devono essere 4, i 5 nella colonna saranno al più: $x + 2(4 - x) + 2$. D'altra parte dovranno essere 10, perciò necessariamente $x = 0$.

La situazione è dunque la seguente:

$$
\begin{bmatrix}
5 & & & G \\
5 & & & G \\
5 & & 5 & G \\
5 & & 5 & G \\
5 & & 5 & G \\
5 & & 5 & G \\
5 & 5 & & V \\
5 & 5 & & V \\
5 & 5 & & V \\
5 & 5 & & V \\
 & 5 & 5 & B \\
 & 5 & 5 & B \\
 & 5 & 5 & B \\
 & 5 & 5 & B \\
 & 5 & & B \\
 & 5 & & B \\
 & & 5 & R \\
 & & 5 & R \\
3 & 3 & 2 & 5
\end{bmatrix}
$$

Dobbiamo sostituire esattamente una "V" con un 5 nella quarta colonna. Se sostituissimo 2 "V" si avrebbe una contraddizione perché si potrebbero al più inserire nove 5 nella colonna (2 al posto di "G", 2 al posto di "V", 2 al posto di "B", 2 al posto di "R", più uno già inserito nell'ultima riga), per non eccedere il numero di coppie del tipo (5,5) in ogni coppia di colonne.

Se non sostituissimo nessuna "V" dovremmo sostituire 4 "G", 4 "B" e un "R" con un 5 per arrivare al totale di dieci 5 nella colonna. Ma allora, considerando la terza e la quarta colonna, avremmo almeno 5 coppie del tipo $(5,5)$, minimo 2 tra le prime 6 righe, minimo due tra l'undicesima e la sedicesima riga e una tra la diciasettessima e la diciotessima, il che è assurdo.

Necessariamente quindi abbiamo:

$$\begin{bmatrix}
5 & & & 5 \\
5 & & & 5 \\
5 & & 5 & 5 \\
5 & & 5 & \\
5 & & 5 & \\
5 & & 5 & \\
5 & 5 & & 5 \\
5 & 5 & & \\
5 & 5 & & \\
5 & 5 & & \\
 & 5 & 5 & \\
 & 5 & 5 & \\
 & 5 & 5 & \\
 & 5 & 5 & 5 \\
 & 5 & & 5 \\
 & 5 & & 5 \\
 & & 5 & 5 \\
 & & 5 & 5 \\
3 & 3 & 2 & 5
\end{bmatrix}$$

Abbiamo inserito tutti i 5. A questo punto possiamo completare la matrice inserendo tre 2 e sei 3 in ogni colonna tenendo conto del fatto che per ogni coppia di colonne dovranno esserci una coppia $(3,3)$, una $(3,2)$ e una $(2,3)$. Abbiamo quindi costruito la matrice Y_1.

Per costruire tale matrice abbiamo utilizzato l'ipotesi che ci fosse una riga con un solo 5. Ipotizzando invece che in tutte le righe ci siano almeno due 5 e facendo ragionamenti simili ai precedenti, si costruisce facilmente la matrice Y_2.

□

1.2.2 Le soluzioni

Dopo aver notato che è possibile costruire una matrice degli ordini con 4 colonne e 19 righe, verifichiamo se effettivamente esistono matrici X_1 e X_2 le cui entrate sono elementi di $Alt(5)$ che soddisfano alle due condizioni descritte nella proposizione 3 e i cui ordini sono quelli dati dalle matrici Y_1 e Y_2.

Trovare tali soluzioni è tutt'altro che banale: la difficoltà è dovuta al grande numero di elementi di $Alt(5)$ e alla dimensione della matrice.

Le prime due colonne sono semplici da trovare ed essenzialmente univocamente determinate: devono contenere le entrate di una coppia di generatori di $Alt(5)^{19}$. Rimangono però 38 entrate da determinare; usando le informazioni degli ordini degli elementi, ci sono $24^{20} \cdot 20^{12} \cdot 15^{6}$ possibili scelte, troppe anche per un calcolatore.

Il metodo utilizzato per trovare le matrici è stato quello di considerare una soluzione parziale in cui tutte le entrate eccetto 9 nell'ultima colonna sono fissate, dopo di che controllare con l'uso del computer se esiste una scelta per le rimanenti 9 entrate che dia una soluzione.

In definitiva, le soluzioni esistono e sono le seguenti:

$$X_1 = \begin{bmatrix}
(1,2,3,4,5) & (1,3,4,2,5) & (1,5,3,2,4) & (1,5,2,3,4) \\
(1,2,3,4,5) & (1,4,5,3,2) & (3,5,4) & (1,3)(2,5) \\
(1,2,3,4,5) & (1,5,2,4,3) & (1,4,2) & (2,3,5) \\
(1,2,3,4,5) & (1,2,3,5,4) & (1,3)(2,5) & (2,4,3) \\
(1,2,3,4,5) & (3,4,5) & (1,2,4,3,5) & (1,4,2) \\
(1,2,3,4,5) & (2,5,3) & (1,5)(3,4) & (1,2,4,5,3) \\
(1,2,3,4,5) & (3,5,4) & (1,2,5) & (1,5,3,2,4) \\
(1,2,3,4,5) & (2,3,5) & (1,3,4,2,5) & (1,2)(4,5) \\
(1,2,3,4,5) & (1,3)(2,4) & (1,4,5,3,2) & (1,2,5) \\
(1,2,3,4,5) & (2,3)(4,5) & (1,3,5) & (1,5,3,4,2) \\
(1,2,3) & (1,5,4,3,2) & (3,5,4) & (1,3,5,4,2) \\
(1,2,3) & (1,3,5,2,4) & (1,4)(2,5) & (1,4,3,2,5) \\
(1,2,3) & (1,2,3,5,4) & (1,3,2,5,4) & (1,5,4) \\
(1,2,3) & (1,4,2,5,3) & (1,5,3,4,2) & (2,4)(3,5) \\
(1,2,3) & (3,4,5) & (1,2,4,5,3) & (1,2,3,5,4) \\
(1,2,3) & (2,4)(3,5) & (1,4,2,5,3) & (1,2,4,3,5) \\
(1,2)(3,4) & (1,3,5,2,4) & (1,4,5,2,3) & (1,5,3) \\
(1,2)(3,4) & (1,2,3,4,5) & (1,3,5) & (1,3,4,5,2) \\
(1,2)(3,4) & (2,3,5) & (1,3,4,5,2) & (1,3,5,2,4)
\end{bmatrix}$$

$$X_2 = \begin{bmatrix}
(1,2,3,4,5) & (1,3,4,2,5) & (1,4,5,2,3) & (1,3)(2,5) \\
(1,2,3,4,5) & (1,5,2,4,3) & (1,2,5) & (2,3)(4,5) \\
(1,2,3,4,5) & (1,4,5,3,2) & (2,4,5) & (1,3,5) \\
(1,2,3,4,5) & (1,2,3,5,4) & (1,5)(3,4) & (1,2,3) \\
(1,2,3,4,5) & (3,4,5) & (1,3,4,5,2) & (1,4,2) \\
(1,2,3,4,5) & (2,5,3) & (1,3)(2,4) & (1,2,5,3,4) \\
(1,2,3,4,5) & (3,5,4) & (1,4,2) & (1,5,3,2,4) \\
(1,2,3,4,5) & (2,3,5) & (1,3,5,4,2) & (1,3,4,5,2) \\
(1,2,3,4,5) & (1,3)(2,4) & (1,5,4,2,3) & (1,5,4) \\
(1,2,3,4,5) & (2,3)(4,5) & (1,5,2) & (1,5,4,2,3) \\
(1,2,3) & (1,5,4,3,2) & (1,5,4) & (1,3,4,2,5) \\
(1,2,3) & (1,3,5,2,4) & (1,4)(2,5) & (1,5,2,3,4) \\
(1,2,3) & (1,2,3,5,4) & (1,5,3,2,4) & (1,4,5) \\
(1,2,3) & (1,4,2,5,3) & (1,2,4,5,3) & (1,4,5,2,3) \\
(1,2,3) & (3,4,5) & (1,2,4,3,5) & (1,4)(2,5) \\
(1,2,3) & (2,4)(3,5) & (1,5,4,3,2) & (1,3,4,5,2) \\
(1,2)(3,4) & (1,3,5,2,4) & (1,3,4,5,2) & (1,5,4) \\
(1,2)(3,4) & (1,2,3,4,5) & (2,5,4) & (1,2,5,4,3) \\
(1,2)(3,4) & (2,3,5) & (1,3,2,4,5) & (1,4,2,5,3)
\end{bmatrix}$$

Capitolo 2

Ricerca delle 8-cricche

Nel precedente capitolo abbiamo stabilito che il clique number del grafo di generazione di $Alt(5)$ è 8, mentre quello del grafo di generazione di $Alt(5)^{19}$ è 4. Ci domandiamo ora cosa succede per le altre potenze di $Alt(5)$.

Definizione 4. *Consideriamo il gruppo $Alt(5)^n$. Definiamo* ***matrice di generazione*** *associata ad $Alt(5)^n$ la matrice le cui colonne sono elementi di $Alt(5)^n$ che lo generano a 2 a 2 e la cui dimensione è massima. Il numero di colonne di tale matrice è esattamente il clique number di $Alt(5)^n$.*

Il nostro scopo è quello di costruire le matrici di generazione per ogni n ed il metodo che utilizzeremo sarà il seguente: innanzitutto costruiamo matrici degli ordini, con un numero di colonne fissato, di dimensione massima utilizzando le regole date dalla proposizione 1 e lo studio degli ordini delle coppie di generatori di $Alt(5)$ che è presente nella dimostrazione della proposizione stessa. La proposizione 1 ci permette di dire che in ogni coppia di colonne ci potranno essere al massimo 4 coppie del tipo (5,5), 4 del tipo (5,3), 4 del tipo (3,5), 2 del tipo (5,2), 2 del tipo (2,5), una del tipo (3,3), una del tipo (3,2) e una del tipo (2,3). Lo studio degli ordini delle coppie di generatori di $Alt(5)$ ci permette di stabilire che in ogni riga ci potranno essere al massimo sei 5, al massimo due 3 e al massimo un 2. Inoltre, per considerazioni già fatte in precedenza, se in una riga abbiamo un 2, possiamo avere al massimo quattro 5.

Successivamente cerchiamo di sostituire ai numeri interi della matrice degli ordini gli elementi di $Alt(5)$ aventi quell'ordine, costruendo in tal modo la matrice di generazione.

La costruzione della matrice degli ordini ci permette di dare una prima stima dei clique numbers. Se infatti vogliamo stabilire il clique number di $Alt(5)^n$ e la matrice degli ordini con n righe può avere al massimo m colonne, sappiamo per certo che il clique number dovrà essere minore o uguale ad m.

2.1 Matrici degli ordini con 8 colonne

Vogliamo costruire la matrice degli ordini di dimensione massima avente 8 colonne.

In questo caso gli ordini degli elementi dovranno essere 3 oppure 5. Se infatti vogliamo trovare otto elementi di $Alt(5)$ che lo generano a 2 a 2, dovranno essere forzatamente sei elementi di ordine 5 (ognuno appartenente ad un 5-Sylow diverso) e 2 elementi di ordine 3.

Se si considera un generico elemento di ordine 2, esso puo' generare l'intero gruppo $Alt(5)$ solo assieme ad elementi di ordine 5 appartenenti a 4 dei 6 5-Sylow (con gli altri elementi di ordine 5 genera un sottogruppo diedrale). Si avra' quindi in tal caso un massimo di 7 elementi che a 2 a 2 generano l'intero gruppo. Riassumendo, abbiamo la seguente proposizione:

Proposizione 5 (Proprietà di una matrice degli ordini con 8 colonne)**.** *Sia $Y = (y_{ij})_{i,j}$ una matrice degli ordini avente 8 colonne e n righe. Allora solo due valori sono possibili per le sue entrate: 3 oppure 5. Inoltre, valgono le seguenti proprietà:*

1. *ogni riga della matrice degli ordini è composta da sei 5 e da due 3;*

2. *per ogni coppia di colonne $y_i = (y_{1i}, \dots, y_{ni})$ e $y_j = (y_{1j}, \dots, y_{nj})$, se si considerano le coppie di elementi corrispondenti nelle due colonne, ci potranno essere al più: 4 coppie del tipo (5,5), 4 coppie del tipo (5,3), 4 coppie del tipo (3,5) e 1 coppia del tipo (3,3).*

Teorema 2. *Una matrice degli ordini con 8 colonne può avere al massimo 6 righe.*

Dimostrazione. Utilizzando la proposizione 5 si riesce facilmente a scrivere una matrice degli ordini come la seguente:

$$\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 3 & 3 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 3 & 3 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 3 & 3 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 3 & 3 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 3 & 3 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 3 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

La precedente matrice ha 6 righe, le colonne dunque corrispondono agli ordini degli 8 elementi di $Alt(5)^6$ che generano a 2 a 2 l'intero gruppo.

Perciò il numero di righe massimo è maggiore o uguale a 6. Dimostriamo che non si puo' generare una matrice degli ordini con 7 righe e 8 colonne.

Vediamo tutti i possibili modi di costruire una matrice degli ordini con 6 righe e 8 colonne.

Come abbiamo già notato, ogni riga dovrà contenere sei 5 e due 3, dunque i 3 dovranno essere 12 nell'intera matrice. Studiamo come possono essere disposti i 3.

Innanzitutto notiamo che non potrà esserci una colonna senza nessun 3. Banalmente non ce ne possono essere 2 (in tal caso avremmo nelle 2 colonne 6 coppie (5,5), in contraddizione con le regole di costruzione). Se ce ne fosse una senza 3 ed una con un solo 3 si avrebbero nelle 2 colonne 5 coppie (5,5), che è nuovamente una contraddizione. Perciò, se per assurdo ci fosse una colonna senza 3, necessariamente le 7 colonne con dei 3 presenti dovranno contenerne almeno 2. In tal caso ci sarebbero quattordici 3 nella matrice, il che è impossibile.

Le colonne con un ed un solo 3 presente dovranno essere 4, 5, oppure 6. Se fossero meno di 4, considerando che non ci possono essere colonne senza 3, notiamo facilmente che si eccederebbe il numero di 3. Notiamo inoltre che nelle colonne con un solo 3 non ci possono essere due 3 allineati sulla stessa riga. In tal caso infatti si avrebbero nelle 2 colonne 5 coppie (5,5). Per questo motivo al massimo si avranno 6 colonne con un solo 3.

E' facile notare che, considerando solo le colonne con un solo 3, riordinando le righe e le colonne si arrivera' in uno dei seguenti casi a seconda del numero di colonne:

$$\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 & 3 \\ 5 & 5 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 & 3 \\ 5 & 5 & 5 & 3 & 5 \\ 5 & 5 & 3 & 5 & 5 \\ 5 & 3 & 5 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 3 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 3 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 3 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 3 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 3 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

I casi possibili sono quindi 3:

1. 4 colonne con un 3, 4 colonne con due 3;

2. 6 colonne con un 3, 2 colonne con tre 3;

3. 5 colonne con un 3, 2 colonne con due 3, 1 colonna con tre 3.

In ognuno dei 3 casi, ancora considerando solo le colonne con un solo 3, si nota che non è possibile aggiungere una settima riga. Infatti, se si considerano 4 delle colonne con un solo 3, selezionando 2 di esse casualmente si avranno 4 coppie (5,5). Perciò, comunque si distribuissero i 3 della settima riga, risulterebbe che in 2 delle quattro colonne considerate sopra ci sarebbero 5 coppie (5,5).

La matrice degli ordini con otto colonne quindi dovrà avere al più 6 righe.

□

2.1.1 Costruzione delle possibili matrici degli ordini

Come si può dedurre dal fatto che ci sono 3 casi possibili di distribuzione dei 3 sulle colonne, lo schema per la matrice con 8 colonne e 6 righe non è unica.

Caso 1: 4 colonne con due 3 e 4 colonne con un 3.

Consideriamo separatamente le quattro colonne con due 3 e le quattro colonne con un 3. Permutiamo le colonne in modo tale che le prime quattro colonne della matrice siano le quattro colonne con due 3.

Innanzitto osserviamo che, se si considerano solo le prime quattro colonne, non può esserci nessuna riga fatta solo di 5. Se così fosse, possiamo assumere che la prima riga sia composta di soli 5. Ma allora i due 3 della prima riga dovranno essere tutti nelle ultime quattro colonne, senza perdere di generalità possiamo porli nelle ultime due colonne. Siccome le ultime quattro colonne hanno tutte un solo 3, le ultime due colonne dovranno avere cinque coppie del tipo (5,5), il che è assurdo.

Perciò, tornando a considerare solo le prime quattro colonne, avremo quattro righe con un solo 3 e due righe con due 3, dato che i 3 dovranno essere otto in totale e non possono esserci righe con più di due 3.

Le ultime quattro colonne dovranno essere, a meno di permutazioni di righe, forzatamente del seguente tipo

$$\left|\begin{array}{cccc} 3 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 3 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 3 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 3 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{array}\right|$$

non potendo esserci due 3 sovrapposti e dovendo avere due righe composte solamente da 5.

Per quanto riguarda le prime quattro colonne ci sono due casi possibili:

1. ci sono due righe uguali;

2. non ci sono righe uguali.

Non è possibile che ci siano tre righe uguali altrimenti dovremmo avere tre 3 nella stessa colonna, il che è assurdo.

Fissate le ultime quattro colonne, abbiamo che certamente il blocco 4 X 6 formato dalle prime quattro colonne deve avere le prime quattro righe con un solo 3 e le ultime due con due 3.

Nel primo caso le due righe uguale dovranno essere tra le prime quattro righe (quelle con un solo 3), altrimenti si verrebbe a formare un blocco 2 X 2 composto di soli 3, il che è impossibile. Possiamo supporre che le prime due righe siano uguali, quindi del tipo:

$$\left|\begin{array}{cccc} 3 & 5 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & & & \\ 5 & & & \\ 5 & & & \\ 5 & & & \end{array}\right|$$

Infatti possiamo permutare a piacimento le prime quattro righe: nel caso in cui scombinassimo l'ordine delle ultime quattro colonne, lo ristabiliremmo attraverso permutazioni di colonne.

Nel blocco formato dalle prime quattro colonne la terza e la quarta riga, che contengono solo un 3, non potranno avere il 3 sovrapposto. In tal caso infatti, la situazione che si verrebbe a creare sarebbe la seguente:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 3 & 5 & 5 \\ 5 & 3 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & & \\ 5 & 5 & & \end{vmatrix}$$

e le quattro entrate rimanenti devono essere tutti dei 3, il che è assurdo.

Dunque, a meno di permutazioni della prima, della seconda e della quarta colonna, le prime quattro righe saranno le seguenti:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 3 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 3 & 5 \\ 5 & & & \\ 5 & & & \end{vmatrix}$$

Ma allora, le ultime due entrate della quarta colonna dovranno essere due 3:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 3 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 3 & 5 \\ 5 & & & 3 \\ 5 & & & 3 \end{vmatrix}$$

Infine, a meno di permutazioni delle ultime 2 righe, posso concludere che le prime quattro colonne saranno:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 3 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 5 & 3 \\ 5 & 5 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

Nel secondo caso tutte le righe devono essere differenti. In questo caso, le quattro righe con un solo 3 dovranno essere del tipo:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 3 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 3 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

a meno di permutazioni di righe. Le rimanenti due righe quindi, a meno di permutazioni di colonne, saranno:

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

Quindi sintetizzando i due casi possibili sono:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 5 & 5 & 3 & 5 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 5 & 5 & 5 & 3 & 5 & 5 \\ 5 & 3 & 5 & 5 & 5 & 5 & 3 & 5 \\ 5 & 5 & 3 & 5 & 5 & 5 & 5 & 3 \\ 5 & 5 & 3 & 3 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 3 & 5 & 3 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 3 & 5 & 5 & 5 & 3 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 3 & 5 & 5 & 5 & 3 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 3 & 5 & 5 & 5 & 3 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 3 & 5 & 5 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 3 & 3 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

Caso 2: 6 colonne con un 3, 2 colonne con tre 3

In questo caso riordiniamo le colonne in modo da avere le prime due colonne con tre 3. Come nel caso precedente, dal momento che le sei rimanenti colonne possono avere solo un 3, nelle prime due colonne non può esserci una coppia (5,5). Se così fosse, nella matrice composta dalle rimanenti sei colonne dovrebbe esserci una riga con due tre e quindi due colonne con cinque coppie del tipo (5,5), che è impossibile.

Perciò, l'unica possibilità è la seguente:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 5 \\ 3 & 5 \\ 5 & 3 \\ 5 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$$

Le ultime sei colonne dovranno essere, a meno di permutazioni:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 3 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 3 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 3 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 3 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

e quindi l'intera matrice sarà:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 3 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 5 & 3 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 5 & 5 & 3 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 3 & 5 & 5 & 5 & 3 & 5 & 5 \\ 5 & 3 & 5 & 5 & 5 & 5 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

Caso 3: 5 colonne con un 3, 2 colonne con due 3, 1 colonna con tre 3

Poniamo come prima colonna quella con tre 3. Riordiniamo inoltre le righe in maniera tale che la prima colonna sia $\begin{vmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{vmatrix}$. Poniamo come seconda e terza colonna le due colonne con due 3.

Si hanno due possibilità: o una delle due colonne con due 3 ha un 3 in una delle prime tre entrate, oppure no. Notiamo che, se si considerano solo le prime tre colonne della matrice, non può esserci più di una riga con due 3, poichè ci sono 5 colonne con un solo 3 , dunque una sola riga non ha un 3 nelle ultime cinque entrate (gli ha quindi entrambi nelle prime tre).

Nel primo caso, riordiniamo le righe in modo che la seconda colonna sia $\begin{vmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ 3 \end{vmatrix}$.
La terza colonna, utilizzando l'osservazione precedente (non ci può essere più di una coppia di 3 allineati nelle prime tre colonne), è fissata. Possiamo infine riordinare le ultime cinque colonne in modo che risulti:

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 5 & 3 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 5 & 5 & 3 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 3 & 5 & 5 & 3 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 3 & 5 & 5 & 5 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

Nel secondo caso invece, riordiniamo le righe in modo che la seconda colonna sia $\begin{vmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 3 \\ 3 \\ 5 \end{vmatrix}$. A meno di scambiare la quarta e la quinta riga inoltre (cosa che possiamo fare senza modificare le prime due colonne) e riordinando le ultime cinque colonne, si ha la matrice:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 5 & 3 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 5 & 5 & 3 & 5 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 5 & 5 & 5 & 3 & 5 & 5 \\ 5 & 3 & 3 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 3 & 5 & 5 & 5 & 5 & 3 & 5 \\ 5 & 5 & 3 & 5 & 5 & 5 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

Ci sono quindi, in totale, cinque possibili matrici degli ordini con 8 colonne e 6 righe.

2.2 Potenze con clique number 8

Abbiamo visto che le matrici degli ordini con 8 colonne possono avere al massimo 6 righe. Questa informazione ci permette di dire che il clique number di $Alt(5)^n$ per $2 \leq n \leq 6$ potrebbe essere 8, mentre il clique number di $Alt(5)^m$, per m maggiore o uguale a 7, deve essere minore o uguale a 7.

Iniziamo ora a sostituire valori di $Alt(5)$ ai valori numerici delle entrate delle matrici degli ordini per poter stabilire i clique number per $2 \leq n \leq 6$.

Sostituiamo ad ogni colonna della matrice degli ordini elementi di $Alt(5)^n$, scritti in verticale come n-upla: ogni entrata della n-upla è un elemento di $Alt(5)$. Si procede nella sostituzione dall'alto verso il basso e da sinistra verso destra: si devono quindi trovare elementi di $Alt(5)^n$ che lo generano assieme alle colonne precedenti della matrice.

In questo modo si cerca di formare nuove matrici di dimensione massima con elementi di $Alt(5)$ per ogni entrata invece di numeri interi e aventi come colonne elementi di $Alt(5)^n$ che a due a due generano $Alt(5)^n$: cerchiamo dunque le **matrici di generazione** associate ad $Alt(5)^n$. Non è detto che queste matrici abbiano lo stesso numero di colonne della matrice degli ordini, infatti non sempre si riescono a trovare gli elementi di $Alt(5)$ da sostituire. Per alcuni n, la sostituzione potrebbe essere incompleta, cioè potrebbero non esserci 8 elementi di $Alt(5)^n$ che a 2 a 2 lo genenerano: il clique number in tal caso è minore di 8.

Per fare le sostituzioni ci siamo serviti del programma GAP (Groups, Algorithms, Programming), un sistema per l'algebra discreta computazionale, che contiene al suo interno un linguaggio di programmazione [7], [6].

Abbiamo scritto vari programmi con il linguaggio GAP che ci hanno permesso di ottenere alcuni risultati.

Dal momento che il numero delle possibili scelte di elementi di $Alt(5)$ da sostituire nella matrice degli ordini di $Alt(5)^n$, è enorme anche per n piccoli, non è possibile chiedere al computer di verificare tutti i casi: c'è bisogno di una strategia.

Un possibile metodo è quello di completare a mano le prime colonne e chiedere al programma che controlli se esistono altri elementi di $Alt(5)^n$ che lo generino assieme agli elementi scelti. Per $n \geq 4$, pur completando alcune colonne manualmente, le scelte possibili di elementi di $Alt(5)^n$ che il programma dovrebbe controllare sono troppe, è necessario quindi usufruire di alcuni limitazioni che riducano il numero delle possibili scelte.

Innanzitutto, gli elementi di $Alt(5)^n$ che generano il gruppo sono scelti in maniera tale da rispettare la matrice degli ordini: se, per esempio per $n = 3$, la matrice degli ordini ha una colonna del tipo $\begin{vmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \end{vmatrix}$, il corrispondente elemento di $Alt(5)^3$ deve essere il prodotto di un elemento di ordine 3, un elemento di ordine 5 ed un altro elemento di ordine 5, come ad esempio l'elemento

$$\begin{vmatrix} (1,2,3) \\ (1,2,3,4,5) \\ (1,2,3,4,5) \end{vmatrix}.$$

Oltre alla limitazione data dal'ordine, ci sono altre proprietà utilizzabili per restringere il campo dei possibili elementi di $Alt(5)^n$ in modo tale da ridurre i calcoli del computer.

La proprietà che usiamo maggiormente è che due elementi di $Alt(5)$ di ordine cinque lo generano se e solo se appartengono a due 5-Sylow diversi. Sappiamo che, come abbiamo visto nel primo capitolo, se due elementi di $Alt(5)^n$ generano il gruppo allora, detti $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$ i due elementi, necessariamente (x_i, y_i) generano $Alt(5)$ per ogni $1 \leq i \leq n$. Dunque, per ogni entrata di ordine 5, possiamo escludere dalle possibili scelte gli elementi di $Alt(5)$ che appartengono a 5-Sylow a cui già appartengono elementi che precedono l'entrata scelta nella medesima riga.

2.2.1 Potenze minori o uguali a 4

Grazie all'uso di un programma scritto in linguaggio GAP e alle considerazioni precedenti si può creare la seguente matrice di generazione per $Alt(5)^4$:

$$\begin{vmatrix} (1,2,3,4,5) & (1,2,3,5,4) & (1,2,4,3,5) & (1,2,4,5,3) & (1,2,5,3,4) & (1,2,5,4,3) & (1,2,3) & (3,4,5) \\ (1,2,3,4,5) & (1,3,4,2,5) & (1,4,5,2,3) & (1,4,3,2,5) & (1,2,3) & (3,4,5) & (1,2,5,3,4) & (1,2,5,4,3) \\ (1,2,3,4,5) & (1,5,2,4,3) & (3,4,5) & (1,2,3) & (1,3,4,5,2) & (1,2,4,3,5) & (1,3,5,4,2) & (1,2,5,3,4) \\ (1,2,3) & (3,4,5) & (1,2,3,4,5) & (1,2,4,5,3) & (1,2,3,5,4) & (1,4,3,5,2) & (1,4,5,2,3) & (1,4,2,3,5) \end{vmatrix}$$

Possiamo dunque concludere che il clique number di $Alt(5)^4$ è 8, abbiamo infatti trovato 8 elementi di $Alt(5)^4$ che lo generano a 2 a 2.

Togliendo rispettivamente l'ultima e le ultime due righe della matrice, si ottengono le matrici di generazione di $Alt(5)^3$ e di $Alt(5)^2$.

2.2.2 Caso n = 5

Grazie all'uso dei programmi si può facilmente trovare sette elementi che a 2 a 2 generano $Alt(5)^5$:

$$\begin{vmatrix} (1,2,3,4,5) & (1,2,3,5,4) & (1,2,4,3,5) & (1,2,4,5,3) & (1,2,5,3,4) & (1,2,5,4,3) & (1,2,3) \\ (1,2,3,4,5) & (1,3,4,2,5) & (1,4,5,2,3) & (1,4,3,2,5) & (1,2,3) & (3,4,5) & (1,2,5,3,4) \\ (1,2,3,4,5) & (1,5,2,4,3) & (1,2,3) & (1,4,5) & (1,3,2,4,5) & (1,2,4,3,5) & (1,3,4,5,2) \\ (1,2,3) & (3,4,5) & (1,2,3,5,4) & (1,2,4,3,5) & (1,2,5,3,4) & (1,3,5,4,2) & (1,2,5,4,3) \\ (1,2,3,4,5) & (1,4,5,3,2) & (1,3,2,5,4) & (1,3,2) & (2,4,5) & (1,4,2,3,5) & (1,5,4,2,3) \end{vmatrix}$$

Sappiamo quindi che il clique number di $Alt(5)^5$ è maggiore o uguale a sette: dunque potrebbe essere 7 oppure 8.

Innanzitutto diamo una definizione utile a semplificare il linguaggio:

Definizione 5. *Dati m elementi di* $Alt(5)^n$ *che generano a due a due* $Alt(5)^n$*, si definisce* ***m-cricca*** *l'insieme formato dagli m elementi.*

Abbiamo cercato a lungo di trovare gli otto elementi di $Alt(5)^5$ che potessero formare una 8-cricca. Abbiamo tentato di completare alcune matrici in cui la maggior parte delle colonne venivano trovate a mano, in altri tentativi invece abbiamo provato a scrivere unicamente le prime due colonne e chiedere al computer di trovare tutte le restanti: tutti i tentativi sono ugualmente falliti.

Elenchiamo di seguito alcuni dei numerosissimi tentativi:

Tentativo 1

Come primo tentativo abbiamo tentato di trovare un'ottavo elemento di $Alt(5)^5$ che formasse una 8-cricca assieme alla 7-cricca mostrata precedentemente. Abbiamo considerato di una certa utilità mostrare per quale ragione è impossibile trovare l'ottavo elemento.

Se volessimo aggiungere un'ottava colonna alla matrice formata dalla 7-cricca, gli ordini dei suoi elementi dovrebbero necessariamente essere (3 5 5 5 5) come si evince dalla prima proprietà della proposizione 5.

Il primo elemento dell'ottava colonna, di ordine 3, può essere scelto arbitrariamente in maniera tale che generi $Alt(5)$ assieme ad (1,2,3). Infatti la sua scelta non può incidere sull'esistenza o meno della 8-cricca: un elemento di ordine 3 non può essere coniugato ad un elemento di ordine 5.

Nella scelta del secondo elemento, che è di ordine 5, dobbiamo tener conto degli elementi di ordine 5 presenti nella stessa riga: il nuovo elemento scelto deve appartenere ad un diverso 5-Sylow rispetto ai 5 elementi precedenti di ordine 5. Le scelte possibili per il secondo elemento della colonna sono quindi: (1,2,5,4,3), (1,5,3,2,4), (1,4,2,3,5) e (1,3,4,5,2). Mostriamo come si procede per una delle quattro scelte possibili, negli altri tre casi il procedimento e il risultato sono i medesimi.

Sia la seconda entrata dell'ottava colonna (1,2,5,4,3). Nella terza entrata, l'elemento che vogliamo aggiungere deve avere, come detto, ordine 5. Deve inoltre appartenere ad un 5-Sylow a cui non appartengono gli elementi precedenti della stessa riga: deve dunque essere uno tra (1,2,4,5,3), (1,4,3,2,5), (1,5,2,3,4) e (1,3,5,4,2).

Tenendo presente ora la seconda regola del corollario 1, possiamo eliminare alcuni dei quattro elementi possibili. Si considerino $x = (x_1, \ldots, x_7)$, gli elementi della seconda riga, e $y = (y_1, \ldots, y_7)$ gli elementi della terza riga. Se chiamo t uno dei possibili 4 elementi per completare la terza entrata dell'ottava colonna, dobbiamo avere necessariamente che le coppie $(x_i, (1,2,5,4,3))$ e (y_i, t) non siano coniugate per ogni i. In questo modo, si eliminano gli elementi $t_1 = (1,4,3,2,5)$ e $t_2 = (1,3,5,4,2)$. In entrambi i casi infatti, esiste una scelta di x_i e di y_i tale che $(x_i, (1,2,5,4,3))$ e (y_i, t_j) sono coniugati, per $j \in \{1,2\}$.

Rimangono quindi, per la terza entrata dell'ottava colonna, 2 scelte possibili: (1,2,4,5,3) e (1,5,2,3,4).

Sia che si faccia una scelta, sia che si faccia l'altra, utlizzando i ragionamenti usati per individuare le possibilità per la terza entrata, si nota che non esiste nessuna scelta possibile per la quarta entrata dell'ottava colonna.

Non è possibile dunque ottenere una 8-cricca a partire dalla 7-cricca trovata.

Tentativo 2.1

Siamo partiti da questa matrice degli ordini:

$$\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 3 & 3 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 3 & 3 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 3 & 3 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 3 & 3 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 3 & 3 & 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

e abbiamo cercato di sostituire tutte le entrate con elementi di $Alt(5)$ dell'ordine indicato.

Abbiamo preso i sei seguenti elementi di $Alt(5)^5$ che sapevamo essere una 6-cricca:

$$\begin{vmatrix} (1,2,3,4,5) & (1,2,4,3,5) & (1,2,4,5,3) & (1,2,3,5,4) & (1,2,5,3,4) & (1,2,5,4,3) \\ (1,2,3,4,5) & (1,2,4,5,3) & (1,2,3,5,4) & (1,2,5,4,3) & (1,2,3) & (1,5,4) \\ (1,2,3,4,5) & (1,4,3,5,2) & (1,2,3) & (1,4,5) & (1,2,4,3,5) & (1,5,2,3,4) \\ (1,2,3) & (3,5,4) & (1,2,3,4,5) & (1,2,3,5,4) & (1,2,4,3,5) & (1,3,5,4,2) \\ (1,2,3,4,5) & (1,5,3,4,2) & (1,2,5,4,3) & (1,2,4) & (1,3,5) & (1,3,4,2,5) \end{vmatrix}$$

In seguito, abbiamo scritto un programma in linguaggio GAP che verificasse l'esistenza di 2 ulteriori elementi di $Alt(5)^5$ che formassero una 8-cricca assieme ai 6 elementi elencati. Per limitare il numero di scelte da provare per il programma, abbiamo fissato l'ordine di ogni elemento della matrice utilizzando la matrice degli ordini e abbiamo scelto i valori di ordine 3 in modo che assieme generassero $Alt(5)$, infatti questa scelta non è in alcun modo limitante. Abbiamo scelto come prima entrata della settima colonna l'elemento (1,2,3), mentre la scelta per la prima entrata dell'ottava colonna è stata (3,4,5).

Inoltre, per ogni riga, i due elementi di ordine 5 sono stati scelti tra quelli non appartenenti ai 5-Sylow a cui appartiene già un elemento precedente della stessa riga (una condizione necessaria perché gli elementi scelti possano generare $Alt(5)$ assieme agli altri elementi di ordine 5 della stessa riga). Perciò, per ognuno degli otto elementi di ordine 5, le scelte possibili sono 8. Grazie a queste limitazioni, il programma ha potuto provare tutte le possibili scelte per le due colonne rimanenti e verificare che nessuna delle scelte è adeguata.

Le parti essenziali del programma sono la creazione di sei liste, ognuna corrispondente ad un 5-Sylow di $Alt(5)$ e i *cicli* for annidati, uno per ognuna delle 8 entrate mancanti della matrice (mostro solo i 4 *cicli* for per generare l'ultima colonna):

Listing 2.1: Programma GAP, creazione 5-Sylow

```
A:=[(1,2,4,3,5), (1,4,5,2,3), (1,3,2,5,4), (1,5,3,4,2)];
B:=[(1,2,4,5,3), (1,4,3,2,5), (1,5,2,3,4), (1,3,5,4,2)];
C:=[(1,2,3,4,5), (1,3,5,2,4), (1,4,2,5,3), (1,5,4,3,2)];
D:=[(1,2,3,5,4), (1,3,4,2,5), (1,5,2,4,3), (1,4,5,3,2)];
E:=[(1,2,5,3,4), (1,5,4,2,3), (1,3,2,4,5), (1,4,3,5,2)];
F:=[(1,2,5,4,3), (1,5,3,2,4), (1,4,2,3,5), (1,3,4,5,2)];
```

Listing 2.2: Programma GAP, *cicli* for annidati per l'ultima colonna

```
G:=DirectProduct(AlternatingGroup(5), AlternatingGroup(5),
AlternatingGroup(5),AlternatingGroup(5),AlternatingGroup(5));

a:=(1,2,3,4,5)(1,2,3,4,5)(1,2,3,4,5)(1,2,3)(1,2,3,4,5);
b:=(1,2,4,3,5)(1,2,4,5,3)(1,4,3,5,2)(3,5,4)(1,5,3,4,2);
c:=(1,2,4,5,3)(1,2,3,5,4)(1,2,3)(1,2,3,4,5)(1,2,5,4,3);
d:=(1,2,3,5,4)(1,2,5,4,3)(1,4,5)(1,2,3,5,4)(1,2,4);
e:=(1,2,5,3,4)(12,3)(1,2,4,3,5)(1,2,4,3,5)(1,3,5);
f:=(1,2,5,4,3)(1,5,4)(1,5,2,3,4)(1,3,5,4,2)(1,3,4,2,5);

for x2 in Union(A, E) do
        for x3 in Union(D, F) do
                for x4 in Union(E, F) do
                        for x5 in Union(B, E) do
                                h:=(3,4,5)*x2*x3*x4*x5;
                                if  Group(a,h)=G
and Group(b,h)=G and Group(c,h)=G and Group(d,h)=G
and Group(e,h)=G and Group(f,h)=G and Group(g,h)=G then
                                        Print(h);
                                fi;
                        od;
                od;
        od;
od;
```

Abbiamo quindi provato numerose scelte diverse per le prime sei colonne, sempre mantenendo la matrice degli ordini invariata. Tutte le scelte hanno ugualmente fallito. Tra di esse documentiamo la seguente:

$$\begin{vmatrix}
(1,2,3,4,5) & (1,2,4,3,5) & (1,2,3,5,4) & (1,2,4,5,3) & (1,2,5,4,3) & (1,5,4,2,3) \\
(1,2,3,4,5) & (1,2,4,5,3) & (1,2,5,4,3) & (1,2,3,5,4) & (1,2,4) & (1,5,3) \\
(1,2,3,4,5) & (1,4,3,5,2) & (2,4,3) & (1,4,5) & (1,2,4,5,3) & (1,2,4,3,5) \\
(1,2,3) & (3,5,4) & (1,2,4,3,5) & (1,2,4,5,3) & (1,2,3,4,5) & (1,5,2,4,3) \\
(1,2,3,4,5) & (1,5,3,4,2) & (1,4,2,3,5) & (2,4,3) & (1,5,4) & (1,5,2,4,3)
\end{vmatrix}$$

Tentativo 2.2

Abbbiamo tentato di cambiare radicalmente la matrice degli ordini, utilizzando la seguente:

$$\begin{vmatrix}
3 & 5 & 3 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\
3 & 5 & 5 & 3 & 5 & 5 & 5 & 5 \\
3 & 5 & 5 & 5 & 3 & 5 & 5 & 5 \\
5 & 3 & 5 & 5 & 5 & 3 & 5 & 5 \\
5 & 3 & 5 & 5 & 5 & 5 & 3 & 5
\end{vmatrix}$$

Abbiamo trovato una soluzione parziale composta dalla seguente 6-cricca:

$$\begin{vmatrix}
(1,2,3) & (1,2,3,4,5) & (3,4,5) & (1,2,3,5,4) & (1,3,2,4,5) & (1,5,2,3,4) \\
(1,2,3) & (1,3,5,4,2) & (1,2,3,4,5) & (3,4,5) & (1,4,3,5,2) & (1,4,5,2,3) \\
(1,2,3) & (1,2,5,3,4) & (1,3,2,5,4) & (1,4,3,2,5) & (3,4,5) & (1,3,5,2,4) \\
(1,2,3,4,5) & (3,5,4) & (1,2,3,5,4) & (1,3,4,5,2) & (1,2,4,5,3) & (1,2,3) \\
(1,2,3,4,5) & (2,3,4) & (1,3,5,4,2) & (1,3,4,2,5) & (1,3,2,5,4) & (1,2,5,4,3)
\end{vmatrix}$$

Non esiste nessuna coppia di elementi di $Alt(5)^5$ che completi la 6-cricca ad una 8-cricca.

Utilizzando la stessa matrice degli ordini abbiamo fatto ulteriori tentativi che elenchiamo di seguito:

$$\begin{vmatrix}
(1,2,3) & (1,2,3,4,5) & (3,4,5) & (1,2,3,5,4) & (1,2,4,5,3) & (1,5,3,2,4) \\
(1,2,3) & (1,3,5,4,2) & (1,2,3,4,5) & (3,4,5) & (1,2,5,3,4) & (1,4,5,3,2) \\
(1,2,3) & (1,2,5,3,4) & (1,3,5,2,4) & (1,4,5,3,2) & (3,4,5) & (1,2,5,4,3) \\
(1,2,3,4,5) & (3,5,4) & (1,3,4,5,2) & (1,3,4,2,5) & (1,3,2,5,4) & (1,2,3) \\
(1,2,3,4,5) & (2,3,4) & (1,3,4,2,5) & (1,5,2,3,4) & (1,3,2,4,5) & (1,5,3,4,2)
\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}
(1,2,3) & (1,2,3,4,5) & (3,4,5) & (1,2,5,4,3) & (1,2,3,5,4) & (1,5,2,3,4) \\
(1,2,3) & (1,3,5,4,2) & (1,4,3,5,2) & (3,4,5) & (1,2,4,3,5) & (1,5,4,3,2) \\
(1,2,3) & (1,2,5,3,4) & (1,2,5,4,3) & (1,3,2,5,4) & (3,4,5) & (1,3,5,2,4) \\
(1,2,3,4,5) & (3,5,4) & (1,3,4,2,5) & (1,4,5,2,3) & (1,2,5,4,3) & (1,2,3) \\
(1,2,3,4,5) & (2,3,4) & (1,3,2,4,5) & (1,2,4,3,5) & (1,3,4,5,2) & (1,3,4,2,5)
\end{vmatrix}$$

In entrambi i casi non esistono completamenti possibili.

Tentativo 2.3

Abbiamo adottato un'ulteriore matrice degli ordini:

$$\begin{vmatrix}
3 & 5 & 3 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\
3 & 5 & 5 & 3 & 5 & 5 & 5 & 5 \\
3 & 5 & 5 & 5 & 3 & 5 & 5 & 5 \\
5 & 3 & 5 & 5 & 5 & 3 & 5 & 5 \\
5 & 5 & 3 & 5 & 5 & 5 & 3 & 5
\end{vmatrix}$$

cambiando ancora una volta la distribuzione dei 3 nelle colonne.
Il tentativo, con il medesimo risultato, è stato il seguente:

$$\begin{vmatrix} (1,2,3) & (1,2,3,4,5) & (3,4,5) & (1,2,3,5,4) & (1,2,4,3,5) & (1,2,5,4,3) \\ (1,2,3) & (1,4,3,5,2) & (1,2,3,4,5) & (3,4,5) & (1,3,5,4,2) & (1,5,3,2,4) \\ (1,2,3) & (1,4,5,3,2) & (1,3,2,4,5) & (1,4,2,5,3) & (3,4,5) & (1,3,4,5,2) \\ (1,2,3,4,5) & (1,2,3) & (1,4,5,2,3) & (1,5,2,3,4) & (1,5,2,4,3) & (3,4,5) \\ (1,2,3,4,5) & (1,4,5,2,3) & (2,5,3) & (1,5,3,2,4) & (1,3,4,2,5) & (1,5,4,2,3) \end{vmatrix}$$

Tentativo 3.1

Un altro tentativo fatto è stato quello di scegliere solamente le prime due colonne e le prime due righe, lasciando al programma il compito di riempire le restanti 18 entrate della matrice, provando tra tutte le possibilità. Lo schema di partenza da completare è dunque il seguente:

$$\begin{vmatrix} (1,2,3,4,5) & (1,2,3,5,4) & (1,2,4,3,5) & (1,2,4,5,3) & (1,2,5,3,4) & (1,2,5,4,3) & (1,2,3) & (3,4,5) \\ (1,2,3,4,5) & (1,3,4,2,5) & (1,4,5,2,3) & (1,4,3,2,5) & (1,2,3) & (3,4,5) & (1,2,5,3,4) & (1,2,5,4,3) \\ (1,2,3,4,5) & (1,5,2,4,3) & 3 & 3 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ (1,2,3) & (3,4,5) & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ (1,2,3,4,5) & (1,4,5,3,2) & 5 & 3 & 3 & 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

In questo caso, ancora più che nel precedente, è necessario ridurre il più possibile il numero di scelte. La sola riduzione data dalla matrice degli ordini infatti non basta: restano $20^4 \cdot 24^{14}$ possibilità per completare la matrice (abbiamo infatti quattro elementi di ordine 3 e quattordici elementi di ordine 5).

La riduzione, come nel primo tentativo, è data da una delle due condizioni necessarie affinchè due elementi di $Alt(5)^n$ formino una 2-cricca: se si considerano i due elementi $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$, se essi generano $Alt(5)^n$ allora le coppie (x_i, y_i) generano $Alt(5)$ per ogni i.

Nelle scelte degli elementi di ordine 5 quindi, per ogni riga, si devono togliere tutti gli elementi appartenenti ai 5-Sylow a cui appartegono elementi precedenti della medesima riga.

Perché la riduzione sia sostanziosa, non basta tener conto delle prime due colonne (già presenti inizialmente), ad ogni inserimento di una nuova colonna è necessario eliminare dalla lista delle possibilità gli elementi che possono essere estromessi grazie alle informazioni date dalla colonna inserita. Per fare ciò abbiamo implementato una funzione che abbiamo chiamato "Pulisci". Essa, data una lista L di elementi di ordine 5 ed un elemento x, toglie dalla lista tutti gli elementi di L che non generano $Alt(5)$ assieme ad x, ossia quelli appartenenti allo stesso 5-Sylow di x.

Listing 2.3: Programma GAP, funzione "Pulisci"

```
Pulisci:=function(L,x)
        local A, eliminare, j, K;
        A:=ShallowCopy(L);
        eliminare:=[];

        for i in A do
                if not Group(x,i)=AlternatingGroup(5) then
                        Add(eliminare,i);
                fi;
        od;
```

```
          K:=ShallowCopy(A);
          j:=0;
          for i in [1..Length(K)] do
                    if K[i] in eliminare then
                              Remove(A,i-j);
                              j:=j+1;
                    fi;
          od;

          return A;
end;
```

Il corpo centrale del programma, anche in questo caso, sono i *cicli* for annidati, uno per ogni entrata. Le entrate vengono riempite dall'alto verso il basso e da sinistra verso destra, si riempie quindi una colonna alla volta. Ad ogni colonna riempita si utilizza la funzione "Pulisci" per ridurre le dimensioni delle liste delle possibilità per gli elementi di ordine 5 della colonna successiva.

Un frammento della funzione a cui si chiede di restituire la matrice di generazione è il seguente:

Listing 2.4: Programma GAP, funzione "Pulisci"

```
soluzione:= function(a,b,G,L5_3,L5_5,L4_3,L4_5,L3_3,L3_5)

local c,d,e,f,g,h;
for x1 in L3 do
  for y1 in L5 do
          for z1 in L5 do
            c:=(1,2,4,3,5)*(1,4,5,2,3)*x1*y1*z1;
                    if Group(c,a)=G and Group(c,b)=G then
                      A3:=Pulisci(L3,x1,3);
                      A5:=Pulisci(L5,y1,4);
                      for x2 in A3 do
                              for y2 in A5 do
                                for z2 in L3 do
```

dove $L3$ e $L5$ sono le liste formate rispettivamente da tutti gli elementi di ordine 3 e da tutti gli elementi di ordine 5 di $Alt(5)$.

Nonostante il tentativo di ridurre al minimo i calcoli del programma, il numero delle scelte possibili per le 18 entrate mancanti è ancora troppo elevato: i tempi del programma sono troppo lunghi. La scelta di definire una funzione (che abbiamo chiamato "soluzione") nel programma scritto in linguaggio GAP è anch'essa dovuta ad una maggiore efficienza: in tal modo il programma finisce non appena si arriva ad una soluzione, senza la necessità di scorrere fino alla fine tutti i *cicli* for. Anche questo accorgimento non è bastato, abbiamo lasciato che il programma lavorasse per dieci giorni senza produrre alcun risultato e senza concludere.

Non avendo potuto provare tutti i casi possibili, non abbiamo potuto concludere con certezza l'inesistenza di una 8-cricca avendo fissato due colonne e due righe. E' però improbabile che tale soluzione esista.

Tentativo 3.2

Abbiamo fatto un altro tentativo cambiando leggermente la matrice degli ordini. Siamo partiti dalla seguente matrice degli ordini:

$$\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 3 & 3 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 3 & 3 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 3 & 3 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 3 & 3 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

la cui differenza con la precedente sta solo nell'ultima riga. Abbiamo quindi utilizzato due colonne di partenza solo leggermente diverse dalle precedenti:

$$\begin{vmatrix} (1,2,3,4,5) & (1,2,3,5,4) & (1,2,4,3,5) & (1,2,4,5,3) & (1,2,5,3,4) & (1,2,5,4,3) & (1,2,3) & (3,4,5) \\ (1,2,3,4,5) & (1,3,4,2,5) & (1,4,5,2,3) & (1,4,3,2,5) & (1,2,3) & (3,4,5) & (1,2,5,3,4) & (1,2,5,4,3) \\ (1,2,3,4,5) & (1,5,2,4,3) & 3 & 3 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ (1,2,3) & (3,4,5) & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ (1,2,3) & (1,4,5,3,2) & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

Anche questo tentativo non ha prodotto alcun risultato.

Conclusioni riguardo n = 5

I tentativi elencati non sono che una piccola parte dei tentativi totali, ma mostrano come strade diverse siano ugualmente fallite. Il numero di prove fatte ci ha portato a pensare che il clique number di $Alt(5)^5$ sia 7, anche se non possiamo provarlo con certezza: resta la possibilità, seppur remota, che esista una 8-cricca che non abbiamo trovato.

2.2.3 Caso n = 6

Il caso di $Alt(5)^6$ è la potenza maggiore per cui è ancora possibile avere una 8-cricca. Da $Alt(5)^7$ in poi infatti, la matrice degli ordini ha al massimo 7 colonne, perciò il clique number è minore o uguale a 7.

Anche nel caso di $Alt(5)^6$ si trova una 7-cricca utilizzando il metodo di completare con GAP delle cricche di dimensioni inferiori trovate manualmente.

La 7-cricca trovata è la seguente:

$$\begin{vmatrix} (1,2,3,4,5) & (1,2,3,5,4) & (1,2,4,3,5) & (1,2,4,5,3) & (1,2,5,3,4) & (1,2,5,4,3) & (1,2,3) \\ (1,2,3,4,5) & (1,3,4,2,5) & (1,4,5,2,3) & (1,4,3,2,5) & (1,2,3) & (3,4,5) & (1,2,5,3,4) \\ (1,2,3,4,5) & (1,5,2,4,3) & (1,2,3) & (1,4,5) & (1,3,2,4,5) & (1,2,4,3,5) & (1,3,4,5,2) \\ (1,2,3) & (3,4,5) & (1,2,3,5,4) & (1,2,4,3,5) & (1,2,5,3,4) & (1,3,5,4,2) & (1,2,5,4,3) \\ (1,2,3,4,5) & (1,4,5,3,2) & (1,3,2,5,4) & (1,3,2) & (2,4,5) & (1,4,2,3,5) & (1,5,4,2,3) \\ (1,2,3,4,5) & (2,4,5) & (1,5,3,4,2) & (1,3,2,4,5) & (1,2,5,4,3) & (1,5,3) & (1,2)(3,4) \end{vmatrix}$$

Possiamo anche in questo caso dire, quindi, che il clique number di $Alt(5)^6$ è 7 oppure 8. Non avendo trovato una 8-cricca per $Alt(5)^5$, non ne abbiamo trovata una nemmeno per $Alt(5)^6$.

Capitolo 3

Potenze successive

Vogliamo ora proseguire con le potenze successive di $Alt(5)$. Sappiamo, per quanto mostrato nel precedente capitolo, che $\omega(\Gamma(Alt(5)^n))$ è minore o uguale a 7 per $n \geq 7$: la matrice degli ordini con otto colonne può avere infatti al più sei righe.

Proseguiamo ora utilizzando lo stesso metodo: troviamo le dimensoni delle matrici degli ordini con meno di otto colonne e procediamo poi alla sostituzione con elementi di $Alt(5)$ utilizzando programmi scritti in linguaggio GAP.

3.1 Matrici degli ordini con meno di 8 colonne

3.1.1 Matrice degli ordini con 7 colonne

Se nel caso delle 8-cricche gli ordini degli elementi potevano essere o 5 o 3, in questo caso ci possono essere anche elementi di ordine 2. E' possibile fornare una 7-cricca di $Alt(5)$ utilizzando quattro elementi di ordine 5, due di ordine 3 e uno di ordine 2. Infatti, considerando 6 elementi di ordine 5 appartenenti a 6 5-Sylow differenti, un qualsiasi elemento di ordine 2 genera $Alt(5)$ con 4 dei 6 elementi di ordine 5, mentre genera due differenti sottogruppi diedrali con i rimanenti 2 elementi. Un esempio di una 7-cricca con un elemento di ordine 2 è il seguente:

$$\{(1,2,3,4,5),(1,5,3,2,4),(1,2,3,5,4),(1,2,4,3,5),(3,5,4),(1,4,2),(1,3)(2,5)\}$$

Alternativamente, una 7-cricca di $Alt(5)$ può essere formata da cinque elementi di ordine 5 (appartenenti a 5-Sylow differenti) e due elementi di ordine 3, oppure sei elementi di ordine 5 e uno di ordine 3.

Vogliamo trovare una matrice degli ordini con 7 colonne e numero massimo di righe. Le righe potranno essere composte da cinque 5 e due 3 oppure da quattro 5, due 3 e un 2 oppure da sei 5 e un 3.

Teorema 3. *Una matrice degli ordini con 7 colonne può al massimo 14 righe.*

Dimostrazione. Innanzitutto proviamo l'esistenza di una matrice con 7 colonne e 14 righe mostrandone un esempio:

$$\begin{vmatrix}
5 & 5 & 5 & 3 & 3 & 2 & 5 \\
5 & 5 & 2 & 5 & 3 & 5 & 3 \\
5 & 5 & 3 & 2 & 5 & 5 & 3 \\
5 & 5 & 2 & 3 & 5 & 3 & 5 \\
5 & 2 & 5 & 3 & 5 & 5 & 3 \\
5 & 3 & 5 & 5 & 2 & 5 & 3 \\
5 & 2 & 5 & 5 & 3 & 3 & 5 \\
5 & 3 & 3 & 5 & 5 & 2 & 5 \\
3 & 5 & 5 & 3 & 2 & 5 & 5 \\
3 & 5 & 5 & 5 & 5 & 3 & 2 \\
2 & 5 & 5 & 5 & 5 & 3 & 3 \\
2 & 5 & 3 & 5 & 3 & 5 & 5 \\
2 & 3 & 5 & 3 & 5 & 5 & 5 \\
3 & 3 & 2 & 5 & 5 & 5 & 5
\end{vmatrix}$$

Mostriamo quindi che non si può creare una matrice con 7 colonne e 15 righe.

In ogni riga ci sono almeno quattro 5. In totale quindi, in 14 righe, ci sono almeno cinquantasei 5. Quindi o esiste una colonna con almeno nove 5 oppure tutte e sette le colonne hanno otto 5.

Dimostriamo che non è possibile avere una colonna con nove 5.

Supponiamo per assurdo che ci sia. A meno di permutazioni di colonne possiamo supporre che sia la prima. Inoltre, a meno di permutazioni di righe possiamo supporre che le prime nove entrate della matrice siano dei 5. Consideriamo la sottomatrice composta dalle prime nove righe (di dimensione 9x7). Essendo che in ogni riga devono esserci almeno quattro 5 e che in ogni entrata della prima colonna della sottomatrice c'è un 5, nelle restanti sei colonne dovranno esserci almeno ventisette 5. Questo significa che in almeno una delle sei colonne ci devono essere almeno cinque 5. Chiamiamo $y = (y_1, \ldots, y_9)$ questa colonna e $x = (x_1, \ldots, x_9)$ la prima colonna della sottomatrice. Allora se si considerano le coppie (x_i, y_i) nelle due colonne, per $1 \leq i \leq 9$, almeno cinque saranno del tipo $(5, 5)$, il che è in contraddizione con la proposizione 1.

Perciò una matrice avente 7 colonne e 14 righe dovrà avere esattamente otto 5 su ogni colonna. Inoltre è impossibile costruire una matrice con 7 colonne e con più di otto 5 su una colonna.

Dall'impossibilità di avere una colonna con nove 5 e dal fatto che una matrice con 7 colonne e 14 righe deve avere otto 5 su ogni colonna deduciamo che non è possibile costruire una matrice con 7 colonne e 15 righe.

□

3.1.2 Matrice degli ordini con 6 colonne

In questo caso, vogliamo trovare gli ordini di 6-cricche di $Alt(5)$ non coniugate tra di loro da un elemento di $Sym(5)$. Le righe dovranno essere composte da almeno tre 5, poichè, come abbiamo già visto in precedenza, per ogni riga di una matrice degli ordini possono esserci al più un 2 e al massimo due 3.

Nel proseguio ci sarà utile la seguente definizione:

Definizione 6. *Data una coppia di colonne $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$ di una matrice degli ordini, essa, come abbiamo visto, può essere costituita da al massimo quattro coppie (5,5) e al massimo tre coppie che non presentano dei*

5 al loro interno. Definiamo **buco** *della coppia di colonne x, y la coppia (x_i, y_i) che non contiene nessun 5. Ogni coppia di colonne può avere al più 3 buchi.*

Teorema 4. *Una matrice degli ordini con 6 colonne ha al massimo 15 righe.*

Dimostrazione. Mostriamo innanzitutto che esiste una matrice degli ordini con 6 colonne e 15 righe, successivamente dimostreremo che non può esistere una matrice con 16 righe.

Una delle possibili matrici con 15 righe è la seguente:

$$\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 & 2 & 3 & 3 \\ 5 & 5 & 3 & 5 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 3 & 3 & 5 & 2 \\ 5 & 5 & 2 & 3 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 5 & 5 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 5 & 3 & 5 & 3 \\ 5 & 3 & 5 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & 2 & 3 & 5 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 5 & 5 & 3 \\ 5 & 3 & 3 & 2 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 3 & 5 & 5 & 5 \\ 3 & 3 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 5 & 3 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 5 & 5 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 5 & 5 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

Dimostriamo per prima cosa che se la matrice ammette una colonna con dieci 5, allora può avere al massimo 15 righe.

Consideriamo una colonna con dieci 5 e la poniamo come prima colonna della matrice, ordinando le entrate della colonna in maniera tale che le prime dieci entrate siamo 5. Consideriamo ora il blocco formato dalle prime dieci righe della matrice. Dal momento che la prima colonna del blocco è composta solo da 5, le altre cinque colonne possono avere al più quattro 5. In tutto quindi, i 5 del blocco saranno al massimo 30. Dal momento che in ogni riga ce ne sono almeno tre, le prime dieci righe dovranno contenere esattamente tre 5. Questo significa che esse saranno composte da altri tre elementi diversi da 5 (quindi o 2 o 3). Quindi per ognuna delle prime dieci righe si aggiunge un buco a tre coppie di colonne. Se per esempio la prima riga fosse (5 3 5 5 3 2), le coppie di colonne formate dalla seconda e dalla quinta, dalla seconda e dalla sesta e dalla quinta e dalla sesta avrebbero un buco. Andando avanti ad aggiungere righe si creano ulteriori buchi, tre per ogni riga.

Dopo dieci righe, i buchi formati sono 30. Dal momento che le coppie di colonne formate con la prima colonna sono senza buchi, tutti e 30 i buchi appartengono a coppie formate dalle ultime cinque colonne. Ma le coppie formate dalle ultime cinque colonne sono in tutto dieci: questo significa che ogni coppia dovrà avere tre buchi nel blocco considerato.

Allora, nelle successive righe, se si considerano le ultime cinque entrate, ci dovranno essere almeno quattro 5 (in maniera tale da non formare ulteriori buchi). Se si aggiungono cinque righe, si dovranno aggiungere, nelle ultime cinque colonne, venti 5. Quindi, nel blocco composto dalle ultime 5 colonne, in tutto ci sono quaranta 5, con dieci righe in cui ce ne sono due e cinque righe in cui ce ne sono quattro. Per ogni riga con due 5 si crea una coppia (5,5) su una coppia di colonne, mentre per ogni riga con quattro 5 si creano sei coppie (5,5) su sei coppie di colonne diverse. In tutto si formano quaranta coppie (5,5). Dal momento che le coppie di colonne tra le ultime cinque colonne sono dieci, ogni coppia di colonne deve contenere quattro coppie (5,5). Perciò, per ogni coppia di colonne formata dalle ultime cinque colonne, c'è il numero massimo di coppie (5,5): per questa ragione non è possibile aggiungere una sedicesima riga.

Supponiamo perciò che il numero massimo di 5 per ogni colonna sia 9. Cerchiamo di costruire una matrice avente 16 righe.

Se tutte le colonne avessero al massimo otto 5, i 5 sarebbero al massimo 48. Dal momento che vorremmo formare una matrice di 16 righe, dovrebbero esserci tre 5 su ogni riga. Si genererebbero quindi 3 buchi su tre coppie di colonne per ogni riga. Le coppie di colonne in totale sono 15, le coppie di buchi invece sarebbero 48, più di tre per ogni coppia. E' assurdo. Per la stessa ragione, si giunge ad una contraddizione ponendo una sola colonna con nove 5. Ci sono quindi almeno due colonne con nove 5. Se ce ne fossero esattamente due, tutte le altre colonne dovrebbero avere otto cinque, per avere un numero sufficiente di 5 in totale.

Considero le due colonne con nove cinque e le pongo come prime due colonne della matrice. Mi domando quante coppie (5,5) ci sono tra queste due colonne.

Se ce ne fosse una, resterebbero otto 5 disaccoppiati (cioè il corrispondente elemento nella seconda colonna è diverso da 5) nella prima colonna e otto nella seconda. Vogliamo però costruire una matrice con 16 righe, mentre in tal caso ci sarebbero almeno 17 righe. Allora ce ne possono essere due, tre oppure 4. Se ce ne fossero due o tre ed esistesse una terza colonna con nove cinque nella matrice, è immediato verificare che tale colonna avrebbe quattro coppie (5,5) se accoppiata con la prima o con la seconda colonna. Quindi basterebbe riordinare le colonne per avere, come prime due, due colonne aventi quattro coppie (5,5).

Se invece tutte le altre colonne contenessero otto 5, allora il numero totale dei buchi della matrice sarebbe 44. Questo significa che ci debbono essere almeno due buchi in ogni coppia di colonne. Se le prime due colonne avessero meno di 4 coppie (5,5), allora avrebbero al massimo un buco, il che non è possibile.

Dunque, riordinando le righe, le prime due colonne sono disposte in questo modo:

$$\left|\begin{array}{cccccc}
5 & 5 & & & & \\
5 & 5 & & & & \\
5 & 5 & & & & \\
5 & 5 & & & & \\
5 & & & & & \\
5 & & & & & \\
5 & & & & & \\
5 & & & & & \\
5 & & & & & \\
 & 5 & & & & \\
 & 5 & & & & \\
 & 5 & & & & \\
 & 5 & & & & \\
 & 5 & & & & \\
 & 5 & & & & \\
 & & & & & \\
 & & & & &
\end{array}\right|$$

Vogliamo costruire le ulteriori 4 colonne. Consideriamo le prime quattro entrate delle colonne da aggiungere. Ordiniamo le colonne in base al numero di 5 nelle prime quattro entrate.

Non è possibile che una colonna abbia tre 5 nelle prime quattro entrate, altrimenti nelle successive otto potrebbe averne solo uno (per non eccedere il numero di (5,5) nell'accoppiata con la prima colonna) e questo significa che c'è un numero eccessivo di buchi tra di essa e la seconda colonna.

Consideriamo un vettore a quattro entrate in cui l'entrata i-esima rappresenta il numero di 5 nelle prime quattro entrate della colonna $(2 + i)$-esima della matrice. Il vettore (2,2,2,2) non è ammissibile, poichè altrimenti ogni colonna avrebbe due 5 tra la quinta e la nona entrata e quindi la matrice avrebbe tredici 5 tra la quinta e la nona riga. Ciò è in contraddizione con il fatto che in ogni riga debbano esserci almeno tre 5.

Per la stessa ragione non è ammissibile nemmeno il vettore (2,2,2,1).

Analizzando poi il numero di buchi e di coppie (5,5) tra le ultime quattro colonne, si escludono quasi tutte le possibilità tranne i vettori (2,2,1,1), (1,1,1,1) e (2,2,1,0).

Continuando a considerare solo i 5, gli schemi possibili con 16 righe sono i seguenti:

$$\left|\begin{array}{cccccc}
5 & 5 & 5 & & & \\
5 & 5 & 5 & 5 & & \\
5 & 5 & & 5 & & \\
5 & 5 & & & 5 & 5 \\
5 & & 5 & & 5 & \\
5 & & 5 & & & 5 \\
5 & & & 5 & 5 & \\
5 & & & 5 & & 5 \\
5 & & & & 5 & 5 \\
 & 5 & 5 & & & 5 \\
 & 5 & 5 & & 5 & \\
 & 5 & & 5 & & 5 \\
 & 5 & & 5 & 5 & \\
 & 5 & & & 5 & 5 \\
 & & 5 & 5 & 5 & \\
 & & 5 & 5 & & 5
\end{array}\right|$$

5	5	5		5	
5	5	5			
5	5		5		
5	5		5		5
5		5		5	
5		5			5
5			5	5	
5			5		5
5				5	5
	5	5			5
	5	5	5		
	5		5	5	
	5			5	5
	5			5	5
		5	5	5	
		5	5		5

5	5	5			
5	5		5		
5	5			5	
5	5				5
5		5		5	
5		5		5	5
5		5	5		
5			5	5	5
5			5		5
	5	5			5
	5	5	5	5	
	5	5	5		5
	5		5	5	
	5			5	5
			5	5	5
		5		5	5

5	5	5		5	
5	5	5			
5	5		5		
5	5		5		
5		5			5
5		5	5		5
5				5	5
5				5	5
5			5	5	
	5	5			5
	5		5	5	5
	5		5		5
	5			5	5
	5	5		5	
		5	5	5	
		5	5		5

5	5	5			
5	5	5	5		
5	5		5		
5	5			5	
5		5			5
5			5		5
5		5		5	5
5				5	5
5			5	5	
	5	5			5
	5		5	5	5
	5		5		5
	5			5	5
	5	5		5	
		5	5	5	
		5	5		5

Si può mostrare che questi sono gli unici schemi possibili a meno di permutazioni di righe e colonne.

Per ottenere una matrice degli ordini di 16 righe è necessario sostituire i 2 e i 3. In tutti e cinque i casi non esiste nessuna combinazione di 2 e di 3 tale che per ogni coppia di colonne ci sia al massimo una coppia (3,3), una coppia (3,2) e una coppia (2,3).

Quindi non è possibile costruire una matrice con 6 colonne, avente 16 righe. □

3.1.3 Matrice degli ordini con 5 colonne

Teorema 5. *Una matrice degli ordini con 5 colonne può avere al più 17 righe.*

Dimostrazione. Innanzitutto esponiamo una matrice degli ordini con 5 colonne e 17 righe:

$$\begin{vmatrix}
5 & 5 & 5 & 3 & 5 \\
5 & 5 & 5 & 3 & 2 \\
5 & 5 & 3 & 5 & 3 \\
5 & 5 & 3 & 5 & 2 \\
5 & 3 & 5 & 2 & 3 \\
5 & 2 & 5 & 5 & 3 \\
5 & 3 & 3 & 5 & 5 \\
5 & 3 & 2 & 3 & 5 \\
5 & 2 & 3 & 3 & 5 \\
2 & 5 & 5 & 3 & 3 \\
3 & 5 & 5 & 3 & 5 \\
3 & 5 & 2 & 5 & 3 \\
2 & 5 & 3 & 5 & 5 \\
3 & 5 & 3 & 2 & 5 \\
3 & 2 & 5 & 5 & 5 \\
2 & 3 & 5 & 5 & 5 \\
3 & 3 & 5 & 5 & 2
\end{vmatrix}$$

Questa matrice ha tutte le colonne con nove 5. Inoltre, se si considera una qualsiasi coppia di colonne, essa ha il numero massimo di buchi e il numero massimo di (5,5). Se si vuole formare una matrice con ogni colonna avente al massimo nove 5 e con 18 righe, allora deve avere almeno nove righe con solamente due 5. Le altre nove righe dovranno avere i restanti 5. Notiamo che per ridurre al minimo il numero di buchi è necessario che le restanti nove righe abbiamo tutte tre 5. Alternativamente, se ci fosse una riga con quattro 5, ci dovrebbe essere un'ulteriore riga con due 5. Due righe con tre cinque generano 2 buchi, mentre una riga con quattro 5 e una riga con due 5 generano in totale tre buchi. Anche ipotizzando di avere nove righe con tre 5, il numero di buchi risulta essere 36, che è maggiore del massimo consentito dal momento che le coppie di colonne sono dieci.

Allora consideriamo una matrice avente almeno una colonna con dieci 5.

Se le colonne con dieci 5 fossero al massimo due, avremmo al massimo quarantasette 5 in totale. Ciò significa che, minimizzando il numero di buchi, avremmo undici righe con tre 5 e sette righe con due 5. Quindi in tutto 32 buchi, il che è assurdo.

Se invece ci fossero almeno quarantotto 5, quindi almeno tre colonne con dieci 5, sarebbe eccessivo il numero di coppie (5,5). Infatti, se i 5 sono quarantotto, per minimizzare il numero di coppie (5,5) ci devono essere dodici righe con tre 5 e sei righe con due 5. In questo modo le coppie (5,5) risultano essere più dell'ammissibile: sono 42, quando il massimo è 40.

Non è quindi possibile costruire una matrice con 5 colonne e 18 righe.

□

3.2 Potenze con clique number minore di 8

Per ottenere i clique number dei grafi di generazione delle potenze di $Alt(5)$ maggiori di 7, è necessario procedere con la ricerca di elementi di $Alt(5)$ adeguati. Le informazioni date dalle matrici degli ordini sono usate in particolare per dare delle limitazioni ai clique number possibili. Siamo sicuri ad esempio che il grafo di generazione di $Alt(5)^{15}$ non può avere clique number 7, poichè la matrice degli ordini con 15 righe ha al più 6 colonne.

Dal momento che utilizziamo potenze di $Alt(5)$ molto alte, il numero di elementi di $Alt(5)^n$ sarà maggiormente elevato rispetto a quello del capitolo precedente. Per questo, ancora più che in precedenza, emerge la necessità di sfruttare al meglio le potenzialità del calcolatore. Le informazioni che siamo riusciti a ricavare sono state frutto di programmi il più possibile ottimizzati, sulla falsariga di quelli del precedente capitolo.

3.2.1 7-cricche

Procedendo similmente a quanto fatto nel **Tentativo 2.1** della sezione 2.2.2, abbiamo costruito delle liste per gli elementi di ordine 5 di $Alt(5)$, ognuna corrispondente ad un 5-Sylow. Abbiamo inoltre creato ulteriori liste per gli elementi di ordine 2 e quelli di ordine 3.

Siamo quindi partiti da alcune cricche di dimensione minore a 7 e abbiamo tentato di completarle con elementi dell'ordine corretto, utilizzando dei programmi in linguaggio GAP che prendevano gli elementi dalle liste costruite in precedenza.

Il corpo centrale dei programmi è costituito dai cicli for annidati, uno per ogni entrata della matrice di generazione che resta da completare, in modo del tutto simile a quello scritto per il Tentativo 2.1.

La matrice degli ordini con 7 colonne ha al massimo 14 righe. Ciò significa che $Alt(5)^n$ per $7 \leq n \leq 14$ può avere clique number 7, mentre certamente per $n \geq 14$ il clique number dev'essere minore di 7.

Grazie all'utilizzo del calcolatore, abbiamo ottenuto una $7-cricca$ per $Alt(5)^8$:

$$\left|\begin{array}{ccccccc}
(1,2,3,4,5) & (3,5,4) & (1,4,2) & (1,5,3,2,4) & (1,2,3,5,4) & (1,2,4,3,5) & (1,3)(2,5) \\
(1,2,3,4,5) & (2,3,5) & (1,3,5,4,2) & (1,3,4,5,2) & (1,3,4) & (1,2)(4,5) & (1,2,3,5,4) \\
(1,2,3,4,5) & (1,3)(2,4) & (1,5,4,2,3) & (1,5,4) & (1,4,3,2,5) & (2,3,5) & (1,4,5,3,2) \\
(1,2,3,4,5) & (2,3)(4,5) & (1,5,2) & (1,5,4,2,3) & (1,4,3) & (1,4,5,3,2) & (1,3,2,5,4) \\
(1,2,3) & (1,5,4,3,2) & (1,5,4) & (1,3,4,2,5) & (1,3,4,5,2) & (1,3,2,5,4) & (1,3,5,4,2) \\
(1,2,3) & (1,3,5,2,4) & (1,4)(2,5) & (1,5,2,3,4) & (3,5,4) & (1,2,5,3,4) & (1,4,5,2,3) \\
(1,2,3) & (1,2,3,5,4) & (1,5,3,2,4) & (1,4,5) & (1,4,3,2,5) & (1,5,3,4,2) & (1,2,5,3,4) \\
(1,2,3) & (1,4,2,5,3) & (1,2,4,5,3) & (1,4,5,2,3) & (1,2,5,3,4) & (3,4,5) & (1,4)(2,5)
\end{array}\right|$$

Ci siamo quindi messi alla ricerca di una $7-cricca$ di $Alt(5)^9$.

Immediatamente abbiamo constatato che non è possibile aggiungere un riga alla matrice di generazione trovata per $Alt(5)^8$: non si riesce quindi ad ottenere una $7-cricca$ di $Alt(5)^9$ semplicemente a partire da quella già trovata per $Alt(5)^8$.

Abbiamo fatto ulteriori tentativi senza però trovare una $7-cricca$. Documentiamo alcuni di questi tentativi allo scopo di mostrarne la filosofia.

Primo tentativo: 4-cricca da completare

Grazie alla conoscenza delle due $4-cricche$ di $Alt(5)^{19}$ esposte nel primo capitolo, abbiamo a disposizione un buon numero di $4-cricche$ diverse tra di loro.

Abbiamo quindi deciso di partire da alcune tra le possibili $4-cricche$ per provare a completarle ad una $7-cricca$.

Ad esempio siamo partiti dalla $4-cricca$ per $Alt(5)^9$ formata dalle prime 9 righe della prima delle due 4-cricche di $Alt(5)^{19}$ esposte nel primo capitolo (1.2.2).

Siamo quindi partita dalla $4-cricca$:

(1,2,3,4,5)	(1,3,4,5,2)	(1,5,3,2,4)	(1,5,2,3,4)
(1,2,3,4,5)	(1,4,5,3,2)	(3,5,4)	(1,3)(2,5)
(1,2,3,4,5)	(1,5,2,4,3)	(1,4,2)	(2,3,5)
(1,2,3,4,5)	(1,2,3,5,4)	(1,3)(2,5)	(2,4,3)
(1,2,3,4,5)	(3,4,5)	(1,2,4,3,5)	(1,4,2)
(1,2,3,4,5)	(2,5,3)	(1,5)(3,4)	(1,2,4,5,3)
(1,2,3,4,5)	(3,5,4)	(1,2,5)	(1,5,3,2,4)
(1,2,3,4,5)	(2,3,5)	(1,3,4,2,5)	(1,2)(4,5)
(1,2,3,4,5)	(1,3)(2,4)	(1,4,5,3,2)	(1,2,5)

Abbiamo aggiunto una colonna alla volta utilizzando le informazioni date dalle prime quattro colonne per ridurre il numero di possibilità. Ad esempio, il primo elemento della quinta colonna non può appartenere a nessuno dei 5-Sylow cui appartengono (1,2,3,4,5),(1,3,4,5,2),(1,5,3,2,4) o (1,5,2,3,4).

Così facendo siamo riusciti ad ottenere una quinta colonna, ma mai una sesta.

Abbiamo provato con 14 diverse possibilità per la quinta colonna, non riuscendo mai a proseguire con una sesta.

Ad esempio abbiamo ottenuto la seguente $5-cricca$:

(1,2,3,4,5)	(1,3,4,5,2)	(1,5,3,2,4)	(1,5,2,3,4)	(3,4,5)
(1,2,3,4,5)	(1,4,5,3,2)	(3,5,4)	(1,3)(2,5)	(1,2,4)
(1,2,3,4,5)	(1,5,2,4,3)	(1,4,2)	(2,3,5)	(1,2,4,3,5)
(1,2,3,4,5)	(1,2,3,5,4)	(1,3)(2,5)	(2,4,3)	(1,5,3,4,2)
(1,2,3,4,5)	(3,4,5)	(1,2,4,3,5)	(1,4,2)	(1,3)(2,5)
(1,2,3,4,5)	(2,5,3)	(1,5)(3,4)	(1,2,4,5,3)	(1,4,2)
(1,2,3,4,5)	(3,5,4)	(1,2,5)	(1,5,3,2,4)	(1,4,5,2,3)
(1,2,3,4,5)	(2,3,5)	(1,3,4,2,5)	(1,2)(4,5)	(1,3,5,4,2)
(1,2,3,4,5)	(1,3)(2,4)	(1,4,5,3,2)	(1,2,5)	(3,5,4)

la quale non si completa in alcun modo ad una $6-cricca$.

Abbiamo fatto ulteriori tentativi con differenti $4-cricche$. Ne riportiamo due esempi:

$$\begin{vmatrix}
(1,2,3,4,5) & (1,3,4,5,2) & (1,4,5,2,3) & (1,3)(2,5) \\
(1,2,3,4,5) & (1,5,2,4,3) & (1,2,5) & (2,3)(4,5) \\
(1,2,3,4,5) & (1,4,5,3,2) & (2,4,5) & (1,3,5) \\
(1,2,3,4,5) & (1,2,3,5,4) & (1,5)(3,4) & (1,2,3) \\
(1,2,3,4,5) & (3,4,5) & (1,3,4,5,2) & (1,4,2) \\
(1,2,3,4,5) & (2,5,3) & (1,3)(2,4) & (1,2,5,3,4) \\
(1,2,3,4,5) & (3,5,4) & (1,4,2) & (1,5,3,2,4) \\
(1,2,3,4,5) & (2,3,5) & (1,3,5,4,2) & (1,3,4,5,2) \\
(1,2,3,4,5) & (1,3)(2,4) & (1,5,4,2,3) & (1,5,4)
\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}
(1,2,3,4,5) & (2,3)(4,5) & (1,5,2) & (1,5,4,2,3) \\
(1,2,3) & (1,5,4,3,2) & (1,5,4) & (1,3,4,2,5) \\
(1,2,3) & (1,3,5,2,4) & (1,4)(2,5) & (1,5,2,3,4) \\
(1,2,3) & (1,2,3,5,4) & (1,5,3,2,4) & (1,4,5) \\
(1,2,3) & (1,4,2,5,3) & (1,2,4,5,3) & (1,4,5,2,3) \\
(1,2,3) & (3,4,5) & (1,2,4,3,5) & (1,4)(2,5) \\
(1,2,3) & (2,4)(3,5) & (1,5,4,3,2) & (1,3,4,5,2) \\
(1,2)(3,4) & (1,3,5,2,4) & (1,3,4,5,2) & (1,5,4) \\
(1,2)(3,4) & (1,2,3,4,5) & (2,5,4) & (1,2,5,4,3)
\end{vmatrix}$$

In entrambi i casi non si riesce ad aggiungere più di una colonna.

Secondo tentativo: utilizzando 6-cricche

Altri tentativi sono stati eseguiti a partire da alcune $6-$*cricche*. Data la difficoltà ad arrivare anche ad ottenere una $6-$*cricca* a partire da una $4-$*cricca*, abbiamo deciso di provare a partire più a ridosso dell'obbiettivo.

Conosciamo però un numero ridotto di $6-$*cricche* di dimensione abbastanza alta. Ad ogni modo, siamo riusciti a trovare una $6-$*cricca* di $Alt(5)^{13}$ e per i nostri scopi abbiamo utilizzato nove righe di quella matrice di generazione, che successivamente presenteremo completa.

Mostriamo due delle $6-$*cricche* utilizzate. Nel primo dei due esempi abbiamo utlizzato le prime 6 righe della matrice di generazione di $Alt(5)^{13}$, nel secondo abbiamo invece abbiamo considerato le prime 5 righe e poi dalla decima alla tredicesima.

In entrambi i casi non si riesce ad aggiungere nessuna settima colonna, così come negli altri tentativi fatti e non riportati, partendo da differenti $6-$*cricche*.

I due esempi sono i seguenti:

$$\begin{vmatrix}
(1,2,3,4,5) & (3,5,4) & (1,4,2) & (1,5,3,2,4) & (1,2,3,5,4) & (1,2,4,3,5) \\
(1,2,3,4,5) & (2,3,5) & (1,3,5,4,2) & (1,3,4,5,2) & (1,2)(4,5) & (1,4,5,3,2) \\
(1,2,3,4,5) & (1,3)(2,4) & (1,5,4,2,3) & (1,5,4) & (2,3,5) & (1,3,5,4,2) \\
(1,2,3,4,5) & (2,3)(4,5) & (1,5,2) & (1,5,4,2,3) & (1,4,5,3,2) & (1,3,4) \\
(1,2,3) & (1,5,4,3,2) & (1,5,4) & (1,3,4,2,5) & (1,3,4,5,2) & (1,2,4,5,3) \\
(1,2,3) & (1,3,5,2,4) & (1,4)(2,5) & (1,5,2,3,4) & (3,4,5) & (1,2,5,3,4) \\
(1,2,3) & (1,2,3,5,4) & (1,5,3,2,4) & (1,4,5) & (1,2,3,4,5) & (1,3,5,4,2) \\
(1,2,3) & (1,4,2,5,3) & (1,2,4,5,3) & (1,4,5,2,3) & (1,5)(3,4) & (2,4,5) \\
(1,2,3) & (3,4,5) & (1,2,4,3,5) & (1,4)(2,5) & (1,4,3,5,2) & (1,3,5,2,4)
\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}
(1,2,3,4,5) & (3,5,4) & (1,4,2) & (1,5,3,2,4) & (1,2,3,5,4) & (1,2,4,3,5) \\
(1,2,3,4,5) & (2,3,5) & (1,3,5,4,2) & (1,3,4,5,2) & (1,2)(4,5) & (1,4,5,3,2) \\
(1,2,3,4,5) & (1,3)(2,4) & (1,5,4,2,3) & (1,5,4) & (2,3,5) & (1,3,5,4,2) \\
(1,2,3,4,5) & (2,3)(4,5) & (1,5,2) & (1,5,4,2,3) & (1,4,5,3,2) & (1,3,4) \\
(1,2,3) & (1,5,4,3,2) & (1,5,4) & (1,3,4,2,5) & (1,3,4,5,2) & (1,2,4,5,3) \\
(1,2,3,4,5) & (1,2,3) & (1,2,3,5,4) & (1,4,5,2,3) & (1,4,3,5,2) & (3,4,5) \\
(1,2,3,5,4) & (1,3,4,5,2) & (1,3,5,2,4) & (1,3)(2,5) & (1,4,2) & (3,4,5) \\
(1,3)(2,4) & (1,3,2,4,5) & (1,4,2,5,3) & (1,2,5) & (1,4,5,3,2) & (3,4,5) \\
(1,2,3,4,5) & (1,4,5,2,3) & (1,2,5) & (1,4,3) & (1,2,5,3,4) & (2,3)(4,5)
\end{vmatrix}$$

Terzo tentativo: riempimento per righe

Un'altra strada tentata è stata quella di utilizzare le informazioni sulle $7-$ *cricche* di dimensione inferiore. Abbiamo già affermato che è impossibile completare la $7-$ *cricca* di $Alt(5)^8$. Abbiamo quindi provato a partire da una $7-$ *cricca* di $Alt(5)^7$ per vedere se fosse possibile ottenere ciò che cerchiamo.

Abbiamo considerato le prime 7 righe della $7-$ *cricca* di $Alt(5)^8$:

$$\begin{vmatrix}
(1,2,3,4,5) & (3,5,4) & (1,4,2) & (1,5,3,2,4) & (1,2,3,5,4) & (1,2,4,3,5) & (1,3)(2,5) \\
(1,2,3,4,5) & (2,3,5) & (1,3,5,4,2) & (1,3,4,5,2) & (1,3,4) & (1,2)(4,5) & (1,2,3,5,4) \\
(1,2,3,4,5) & (1,3)(2,4) & (1,5,4,2,3) & (1,5,4) & (1,4,3,2,5) & (2,3,5) & (1,4,5,3,2) \\
(1,2,3,4,5) & (2,3)(4,5) & (1,5,2) & (1,5,4,2,3) & (1,4,3) & (1,4,5,3,2) & (1,3,2,5,4) \\
(1,2,3) & (1,5,4,3,2) & (1,5,4) & (1,3,4,2,5) & (1,3,4,5,2) & (1,3,2,5,4) & (1,3,5,4,2) \\
(1,2,3) & (1,3,5,2,4) & (1,4)(2,5) & (1,5,2,3,4) & (3,5,4) & (1,2,5,3,4) & (1,4,5,2,3) \\
(1,2,3) & (1,2,3,5,4) & (1,5,3,2,4) & (1,4,5) & (1,4,3,2,5) & (1,5,3,4,2) & (1,2,5,3,4)
\end{vmatrix}$$

e abbiamo cercato di completare le ultime due righe. Anche in questo caso non abbiamo raggiunto l'obbiettivo: il programma riesce a trovare l'ottava riga, ma non la nona.

3.2.2 6 cricche

Passando dalla ricerca di $7-$ *cricche* alla ricerca di $6-$ *cricche* si riesce ad aumentare considerevolmente di dimensione, come già accennato in precedenza.

Esponiamo sin da subito la $6-$ *cricca* di dimensione massima trovata:

$$\begin{vmatrix}
(1,2,3,4,5) & (3,5,4) & (1,4,2) & (1,5,3,2,4) & (1,2,3,5,4) & (1,2,4,3,5) \\
(1,2,3,4,5) & (2,3,5) & (1,3,5,4,2) & (1,3,4,5,2) & (1,2)(4,5) & (1,4,5,3,2) \\
(1,2,3,4,5) & (1,3)(2,4) & (1,5,4,2,3) & (1,5,4) & (2,3,5) & (1,3,5,4,2) \\
(1,2,3,4,5) & (2,3)(4,5) & (1,5,2) & (1,5,4,2,3) & (1,4,5,3,2) & (1,3,4) \\
(1,2,3) & (1,5,4,3,2) & (1,5,4) & (1,3,4,2,5) & (1,3,4,5,2) & (1,2,4,5,3) \\
(1,2,3) & (1,3,5,2,4) & (1,4)(2,5) & (1,5,2,3,4) & (3,4,5) & (1,2,5,3,4) \\
(1,2,3) & (1,2,3,5,4) & (1,5,3,2,4) & (1,4,5) & (1,2,3,4,5) & (1,3,5,4,2) \\
(1,2,3) & (1,4,2,5,3) & (1,2,4,5,3) & (1,4,5,2,3) & (1,5)(3,4) & (2,4,5) \\
(1,2,3) & (3,4,5) & (1,2,4,3,5) & (1,4)(2,5) & (1,4,3,5,2) & (1,3,5,2,4) \\
(1,2,3,4,5) & (1,2,3) & (1,2,3,5,4) & (1,4,5,2,3) & (1,4,3,5,2) & (3,4,5) \\
(1,2,3,5,4) & (1,3,4,5,2) & (1,3,5,2,4) & (1,3)(2,5) & (1,4,2) & (3,4,5) \\
(1,3)(2,4) & (1,3,2,4,5) & (1,4,2,5,3) & (1,2,5) & (1,4,5,3,2) & (3,4,5) \\
(1,2,3,4,5) & (1,4,5,2,3) & (1,2,5) & (1,4,3) & (1,2,5,3,4) & (2,3)(4,5)
\end{vmatrix}$$

Le colonne della matrice precedente sono 6 elementi di $Alt(5)^{13}$ che lo generano a due a due.

Come di consueto, abbiamo provato ad aumentare la dimensione di tale matrice aggiungendo una riga. Non siamo riusciti tuttavia ad ottenere una quattordicesima riga.

Abbiamo fatto ulteriori tentativi, per riuscire a trovare una $6-cricca$ di $Alt(5)^{14}$, ma non l'abbiamo trovata.

Dallo studio delle matrici degli ordini sappiamo che, dal punto di vista degli ordini, il gruppo di dimensione massima che può avere una $6-cricca$ è $Alt(5)^{15}$. Perciò gli unici dubbi rimasti in questo caso sono $Alt(5)^{14}$ e $Alt(5)^{15}$.

Tentativi

In questo caso, dovendo ottenere una $6-cricca$, abbiamo ritenuto vantaggioso partire da una $4-cricca$ in modo da essere adeguatamente vicini a ciò che cerchiamo, ma non escludere troppe possibilità. In molti casi infatti una $4-cricca$ si completa ad una $5-cricca$ in diversi modi.

In ogni tentativo, abbiamo considerato le $5-cricche$ ottenute a partire dalla $4-cricca$ scelta e abbiamo provato a completare ognuna di esse ad una $6-cricca$, senza mai avere fortuna.

Elenchiamo alcuni dei tentativi fatti, che dimostrano la difficoltà a trovare una $6-cricca$ di $Alt(5)^{14}$. I tentativi eseguiti non esauriscono certamente tutte le possibilità, abbiamo notato però che nei casi in cui abbiamo ottenuto una soluzione, sono bastati un numero di tentativi decisamente inferiore per ottenere il risultato.

Siamo partiti ad esempio dalla $4-cricca$ seguente:

$$\begin{vmatrix}
(1,2,3,4,5) & (3,5,4) & (1,4,2) & (1,5,3,2,4) \\
(1,2,3,4,5) & (2,3,5) & (1,3,5,4,2) & (1,3,4,5,2) \\
(1,2,3,4,5) & (1,3)(2,4) & (1,5,4,2,3) & (1,5,4) \\
(1,2,3,4,5) & (2,3)(4,5) & (1,5,2) & (1,5,4,2,3) \\
(1,2,3) & (1,5,4,3,2) & (1,5,4) & (1,3,4,2,5) \\
(1,2,3) & (1,3,5,2,4) & (1,4)(2,5) & (1,5,2,3,4) \\
(1,2,3) & (1,2,3,5,4) & (1,5,3,2,4) & (1,4,5) \\
(1,2,3) & (1,4,2,5,3) & (1,2,4,5,3) & (1,4,5,2,3) \\
(1,2,3) & (3,4,5) & (1,2,4,3,5) & (1,4)(2,5) \\
(1,2,3) & (2,4)(3,5) & (1,5,4,3,2) & (1,3,4,5,2) \\
(1,2)(3,4) & (1,3,5,2,4) & (1,3,4,5,2) & (1,5,4) \\
(1,2)(3,4) & (1,2,3,4,5) & (2,5,4) & (1,2,5,4,3) \\
(1,2,3,4,5) & (1,2,3,5,4) & (1,3,4,5,2) & (1,3)(2,5) \\
(1,2,3,5,4) & (1,2,3) & (1,3,5,2,4) & (1,2,5,4,3)
\end{vmatrix}$$

trovando diversi modi per completarla con una quinta colonna, ma nessun modo per aggiungere una ulteriore sesta colonna.

Altri esempi sono i seguenti:

$$\begin{vmatrix}
(1,5,3,2,4) & (1,5,2,3,4) & (1,2)(4,5) & (1,2,3,4,5) \\
(3,5,4) & (1,3)(2,5) & (1,3,2,5,4) & (1,2,3,4,5) \\
(1,4,2) & (2,3,5) & (1,4,3,5,2) & (1,2,5,4,3) \\
(1,3)(2,5) & (2,4,3) & (1,2,5,4,3) & (1,2,4,3,5) \\
(1,2,4,3,5) & (1,4,2) & (3,5,4) & (1,2,3,5,4) \\
(1,5)(3,4) & (1,2,4,5,3) & (1,3,5,2,4) & (2,3,5) \\
(1,2,5) & (1,5,3,2,4) & (1,4)(2,3) & (1,2,4,5,3) \\
(1,3,4,2,5) & (1,2)(4,5) & (1,3,5,2,4) & (2,4,3) \\
(1,4,5,3,2) & (1,2,5) & (1,4)(3,5) & (2,4,3) \\
(1,3,5) & (1,5,3,4,2) & (1,4,2) & (2,3)(4,5) \\
(3,5,4) & (1,3,5,4,2) & (1,3,4,5,2) & (1,2,3) \\
(1,4)(2,5) & (1,4,3,2,5) & (1,3,2) & (1,4,5,2,3) \\
(1,3,2,5,4) & (1,5,4) & (1,3,2,4,5) & (1,2)(3,4) \\
(1,5,3,4,2) & (2,4)(3,5) & (1,3,2) & (1,4,2,3,5)
\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}
(1,4,5,2,3) & (1,3,2,5) & (1,4,2) & (3,4,5) \\
(1,2,5) & (2,3,4,5) & (1,3,2,4,5) & (1,2,3,4,5) \\
(2,4,5) & (1,3,5) & (1,3,5,2,4) & (1,2)(3,4) \\
(1,5)(3,4) & (1,2,3) & (1,5,2,3,4) & (2,4,5) \\
(1,3,4,5,2) & (1,4,2) & (1,3,2,4,5) & (1,2,3,5,4) \\
(1,3)(2,4) & (1,2,5,3,4) & (1,4,5,3,2) & (1,2,3,4,5) \\
(1,4,2) & (1,5,3,2,4) & (2,5,3) & (1,2,3,4,5) \\
(1,3,5,4,2) & (1,4,3,5,2) & (1,4)(2,3) & (3,4,5) \\
(1,5,4,2,3) & (1,5,4) & (1,4,2,3,5) & (1,3,5,4,2) \\
(1,5,2) & (1,5,4,2,3) & (1,4,2,5,3) & (1,4,3) \\
(1,5,4) & (1,3,4,2,5) & (2,5)(3,4) & (1,3,2,4,5) \\
(1,4)(2,5) & (1,5,2,3,4) & (3,4,5) & (1,4,3,5,2) \\
(1,5,3,2,4) & (1,4,5) & (2,5,3) & (1,2,5,3,4) \\
(1,2,4,5,3) & (1,4,5,2,3) & (1,3,4,2,5) & (1,2,4)
\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}
(1,3,4,2,5) & (1,4,5,2,3) & (3,5,4) & (1,2,3) \\
(1,5,2,4,3) & (1,2,5) & (2,4,3) & (1,2,3,4,5) \\
(1,4,5,3,2) & (2,4,5) & (1,5,3,4,2) & (1,2)(3,5) \\
(1,2,3,5,4) & (1,5)(3,4) & (1,2,4,5,3) & (2,3,5) \\
(3,4,5) & (1,3,4,5,2) & (1,3,5,4,2) & (1,2,3) \\
(2,5,3) & (1,3)(2,4) & (1,3,4,2,5) & (1,2,3,4,5) \\
(3,5,4) & (1,4,2) & (1,4,3,5,2) & (1,2,3,4,5) \\
(2,3,5) & (1,3,5,4,2) & (1,3,4,5,2) & (1,3,5,2,4) \\
(1,3)(2,4) & (1,5,4,2,3) & (3,5,4) & (1,4,3,2,5) \\
(2,3)(4,5) & (1,5,2) & (1,5,4,2,3) & (1,4,5,2,3) \\
(1,5,4,3,2) & (1,5,4) & (1,4,3,2,5) & (2,5,3) \\
(1,3,5,2,4) & (1,4)(2,5) & (1,3,2) & (1,2,5,3,4) \\
(1,2,3,5,4) & (1,5,3,2,4) & (1,4,5) & (1,3)(2,5) \\
(1,4,2,5,3) & (1,2,4,5,3) & (1,5)(2,3) & (1,5,4,2,3)
\end{vmatrix}$$

Nessuno di essi ci ha permesso di conseguire l'obbiettivo.

Infine anche in questo caso abbiamo tentato di utilizzare le $6 - cricche$ di dimensioni inferiori cercando di aggiungere righe invece che colonne. Abbiamo considerato le prime 12 righe della matrice di generazione di $Alt(5)^{13}$ senza però riuscire ad aggiungere più di una riga.

3.2.3 5-cricche

Anche per quanto riguarda le $5-cricche$ abbiamo un buon numero di informazioni.

Considerando lo studio fatto sulle matrici degli ordini, possiamo constatare che la potenza massima di $Alt(5)$ che può avere una $5-cricca$ è $Alt(5)^{17}$.

Naturalmente, ciò non significa che il grafo di generazione di $Alt(5)^{17}$ abbia clique number 5, è necessario infatti procedere con la sostituzione di elementi di $Alt(5)$ per verificare l'esistenza della $5-cricca$ e poterla esporre.

Siamo però certi che il clique number di $Alt(5)^{16}$ è 5.

Abbiamo infatti trovato la seguente $5-cricca$:

$$\left|\begin{array}{ccccc}
(1,2,3,4,5) & (3,5,4) & (1,4,2) & (1,5,3,2,4) & (1,2,3,5,4)\\
(1,2,3,4,5) & (2,3,5) & (1,3,5,4,2) & (1,3,4,5,2) & (1,2)(4,5)\\
(1,2,3,4,5) & (1,3)(2,4) & (1,5,4,2,3) & (1,5,4) & (2,3,5)\\
(1,2,3,4,5) & (2,3)(4,5) & (1,5,2) & (1,5,4,2,3) & (1,4,5,3,2)\\
(1,2,3) & (1,5,4,3,2) & (1,5,4) & (1,3,4,2,5) & (1,3,4,5,2)\\
(1,2,3) & (1,3,5,2,4) & (1,4)(2,5) & (1,5,2,3,4) & (3,4,5)\\
(1,2,3) & (1,2,3,5,4) & (1,5,3,2,4) & (1,4,5) & (1,2,3,4,5)\\
(1,2,3) & (1,4,2,5,3) & (1,2,4,5,3) & (1,4,5,2,3) & (1,5)(3,4)\\
(1,2,3) & (3,4,5) & (1,2,4,3,5) & (1,4)(2,5) & (1,4,3,5,2)\\
(1,2,3) & (2,4)(3,5) & (1,5,4,3,2) & (1,3,4,5,2) & (1,5,2,3,4)\\
(1,2)(3,4) & (1,3,5,2,4) & (1,3,4,5,2) & (1,5,4) & (1,3,2,4,5)\\
(1,2)(3,4) & (1,2,3,4,5) & (2,5,4) & (1,2,5,4,3) & (1,3,5)\\
(1,2,3,4,5) & (1,2,3,5,4) & (1,3,4,5,2) & (1,3)(2,5) & (3,4,5)\\
(1,2,3,5,4) & (1,2,3) & (1,3,5,2,4) & (1,2,5,4,3) & (3,4,5)\\
(1,2,3,4,5) & (1,2,3,5,4) & (1,2,5) & (1,4,3) & (2,3)(4,5)\\
(1,2,3,4,5) & (2,3,5) & (1,2)(4,5) & (1,3,4) & (1,2,3,4,5)
\end{array}\right|$$

C'è quindi solamente una potenza di $Alt(5)$ per la quale rimane il dubbio sull'esistenza di una $5-cricca$: $Alt(5)^{17}$.

Dal momento che il massimo numero di righe di una matrice degli ordini con 5 colonne è proprio 17, le possibili matrici degli ordini con 5 colonne e 17 righe sono in numero limitato.

In precedenza avevamo molta libertà sulla scelta degli ordini degli elementi da inserire, infatti, lavorando con potenze inferiori rispetto al limite dato dalla matrice degli ordini, potevamo essere certi che più o meno qualsiasi ordine che sceglievamo poteva andare bene. Bastava attenersi a qualche piccola regola data dalla proposizione 1 e da alcuni accorgimenti (ad esempio il fatto che nel caso della $7-cricca$ non è possibile avere una colonna con nove elementi di ordine 5) e si era sicuri di poter trovare una matrice degli ordini che si adeguava alla matrice di generazione scelta. Non ci eravamo perciò preoccupati di seguire una particolare matrice degli ordini.

Lavorando invece con una potenza di $Alt(5)$ pari al numero massimo di righe che può avere una matrice degli ordini con 5 colonne, è necessario seguire pedissequamente una matrice degli ordini. Non è detto infatti che seguire le piccole regole che seguivamo prima basti per non uscire dai binari dati dalla matrice degli ordini: si potrebbe utilizzare una soluzione parziale che certamente non è completabile ad una $5-cricca$ poiché gli ordini dei suoi elementi non sono compatibili con nessuna matrice degli ordini (ad esempio se si utilizzasse un elemento di $Alt(5)^{17}$ contenente 10 elementi di $Alt(5)$ di ordine 5).

Riscriviamo dunque la matrice degli ordini trovata in precedenza con 5 colonne e 17 righe poichè sarà la matrice che seguiremo per tutti i tentativi che esporremo:

$$\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 & 3 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 3 & 2 \\ 5 & 5 & 3 & 5 & 3 \\ 5 & 5 & 3 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 5 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 5 & 5 & 3 \\ 5 & 3 & 3 & 5 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 3 & 5 \\ 5 & 2 & 3 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 5 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 5 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 5 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 5 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 5 & 5 \\ 3 & 3 & 5 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

Il metodo utilizzato è stato quello di considerare due elementi di $Alt(5)^{17}$ che sapevamo generare il gruppo e aventi ordini compatibili con la matrice precedente.

Utilizzando i programmi scritti in linguaggio GAP abbiamo provato a costruire una matrice di generazione per $Alt(5)^{17}$ con 5 colonne aggiungendo solo elementi di $Alt(5)$ il cui ordine fosse compatibile con la matrice degli ordini. Questo controllo dell'ordine permette inoltre di ridurre considerevolmente il numero di elementi possibili per ogni entrata, ottimizzando il procedimento.

Ad esempio siamo partiti dalla seguente coppia di generatori:

$$\begin{vmatrix} (1,2,3,4,5) & (1,3,4,2,5) \\ (1,2,3,4,5) & (1,4,5,3,2) \\ (1,2,3,4,5) & (1,5,2,4,3) \\ (1,2,3,4,5) & (1,2,3,5,4) \\ (1,2,3,4,5) & (3,4,5) \\ (1,2,3,4,5) & (1,3)(2,4) \\ (1,2,3,4,5) & (2,5,3) \\ (1,2,3,4,5) & (3,5,4) \\ (1,2,3,4,5) & (2,3)(4,5) \\ (1,2)(3,4) & (1,3,5,2,4) \\ (1,2,3) & (1,5,4,3,2) \\ (1,2,3) & (1,3,5,2,4) \\ (1,2)(3,4) & (1,2,3,4,5) \\ (1,2,3) & (1,2,3,5,4) \\ (1,2,3) & (2,4)(3,5) \\ (1,2)(3,4) & (2,3,5) \\ (1,2,3) & (3,4,5) \end{vmatrix}$$

che hanno gli ordini corrispondenti alle prime due colonne della matrice degli ordini. Seguendo gli ordini delle successive colonne abbiamo provato ad ottenere una cricca più grande. Il tentativo però è fallito immediatamente.

Un altro tentativo è stato quello di partire con i seguenti due generatori:

$$\begin{vmatrix}
(1,2,3,4,5) & (1,5,3,2,4) \\
(1,2,3,4,5) & (1,3)(2,5) \\
(1,2,3,4,5) & (3,5,4) \\
(1,2,3,4,5) & (1,5)(3,4) \\
(1,2,3,4,5) & (1,4,2) \\
(1,2,3,4,5) & (1,2,5) \\
(1,2,3,4,5) & (1,2,4,3,5) \\
(1,2,3,4,5) & (1,3,4,2,5) \\
(1,2,3,4,5) & (1,4,5,3,2) \\
(1,2)(3,4) & (1,3,5) \\
(1,2,3) & (1,3,2,5,4) \\
(1,2,3) & (3,5,4) \\
(1,2)(3,4) & (1,4,5,2,3) \\
(1,2,3) & (1,5,3,4,2) \\
(1,2,3) & (1,2,4,5,3) \\
(1,2)(3,4) & (1,3,4,5,2) \\
(1,2,3) & (1,4)(2,5)
\end{vmatrix}$$

con ordini corrispondenti alla prima e alla quinta colonna della matrice degli ordini. In questo caso siamo riusciti ad ottenere una $4 - \mathit{cricca}$, ma non una $5 - \mathit{cricca}$. La $4 - \mathit{cricca}$ ottenuta è stata la seguente:

$$\begin{vmatrix}
(1,2,3,4,5) & (1,5,3,2,4) & (1,2,3,5,4) & (1,2,4,5,3) \\
(1,2,3,4,5) & (1,3)(2,5) & (1,2,5,4,3) & (1,2,3,5,4) \\
(1,2,3,4,5) & (3,5,4) & (1,2,3) & (1,2,5,4,3) \\
(1,2,3,4,5) & (1,5)(3,4) & (1,3,2) & (1,5,2,4,3) \\
(1,2,3,4,5) & (1,4,2) & (1,2,4,5,3) & (1,3,5) \\
(1,2,3,4,5) & (1,2,5) & (1,3,5,4,2) & (1,3)(2,4) \\
(1,2,3,4,5) & (1,2,4,3,5) & (1,2,4) & (1,5,3) \\
(1,2,3,4,5) & (1,3,4,2,5) & (1,2)(4,5) & (2,3,4) \\
(1,2,3,4,5) & (1,4,5,3,2) & (1,4,3) & (1,2)(4,5) \\
(1,2)(3,4) & (1,3,5) & (1,2,3,4,5) & (1,3,4,5,2) \\
(1,2,3) & (1,3,2,5,4) & (1,2,3,4,5) & (1,4,3,5,2) \\
(1,2,3) & (3,5,4) & (1,4)(2,5) & (1,4,5,2,3) \\
(1,2)(3,4) & (1,4,5,2,3) & (1,3,5) & (1,4,2,5,3) \\
(1,2,3) & (1,5,3,4,2) & (3,5,4) & (1,4,2,3,5) \\
(1,2,3) & (1,2,4,5,3) & (1,4,5,3,2) & (1,5)(3,4) \\
(1,2)(3,4) & (1,3,4,5,2) & (1,3,2,4,5) & (2,3,5) \\
(1,2,3) & (1,4)(2,5) & (1,2,4,3,5) & (3,5,4)
\end{vmatrix}$$

Tale $4 - \mathit{cricca}$ non è completabile con una $5 - \mathit{cricca}$.

Infine mostriamo un ultimo tentativo:

(1,3,4,2,5)	(1,4,5,2,3)
(1,2,3,5,4)	(1,5,3,2,4)
(3,4,5)	(1,3,4,5,2)
(2,3,5)	(1,3,5,4,2)
(1,5,2,4,3)	(1,2,5)
(1,2,3,5,4)	(1,5)(3,4)
(3,5,4)	(1,4,2)
(2,3)(4,5)	(1,5,2)
(2,5,3)	(1,3)(2,4)
(1,4,2,5,3)	(1,2,4,5,3)
(1,3,5,2,4)	(1,3,4,5,2)
(1,3)(2,4)	(1,5,4,2,3)
(3,4,5)	(1,2,4,3,5)
(2,3,5)	(1,3,2,4,5)
(1,3,5,2,4)	(1,4)(2,5)
(1,5,4,3,2)	(1,5,4)
(1,2,3,4,5)	(2,5,4)

Anche in questo caso si arriva a fornare una $4-cricca$, ma non una $5-cricca$.

3.3 Conclusioni

Pur non avendo ottenuto un'esaustiva descrizione dei clique number dei grafi di generazione di tutte le potenze di $Alt(5)$, siamo giunti a stabilire con certezza alcuni risultati e a proporre alcune congetture sui risultati mancanti.

Abbiamo esposto nella seguente tabella i risultati ottenuti per ogni n:

n	Clique number
1,2,3,4	8
5,6	7 o 8
7,8	7
9, 10, 11, 12, 13	6 o 7
14	5, 6 o 7
15	5 o 6
16	5
17	4 o 5
18, 19	4

Questa tabella è frutto del lavoro svolto dapprima sugli ordini degli elementi, costruendo matrici che abbiamo definito *matrici degli ordini*, e poi cercando gli elementi veri e propri tra tutti quelli di $Alt(5)^n$, per ogni $2 \leq n \leq 18$.

La costruzione delle matrici degli ordini si è basata su poche regole dalle quali derivano vincoli sulle righe e sulle colonne. Innanzitutto per ogni riga potevano esserci al più sei 5, due 3 e un 2. Inoltre, per ogni coppia di colonne ci potevano essere al massimo:

- quattro coppie $(5,5)$,
- quattro coppie $(5,3)$,
- quattro coppie $(3,5)$,
- due coppie $(5,2)$,
- due coppie $(2,5)$,
- una coppia $(2,3)$,
- una coppia $(3,2)$,
- una coppia $(3,3)$.

Lo scopo è stato quello di costruire la matrice degli ordini con un numero prefissato di colonne e con il maggior numero possibile di righe. Tuttavia, nel caso della matrice degli ordini con otto colonne, abbiamo proceduto anche alla catalogazione di tutte le possibili matrici degli ordini con il massimo numero di righe.

Il motivo principale che ci ha indotto alla costruzione delle matrici degli ordini è stato la necessità di dare delle prime limitazioni sui clique number per ogni n. Ad esempio, il fatto che la matrice degli ordini con otto colonne potesse avere al più sei righe, ha implicato che certamente il clique number di $Alt(5)^n$ è minore o uguale a sette per ogni $n \geq 7$.

Le matrici degli ordini sono state utilizzate anche per dare indicazioni sulla ricerca di elementi di $Alt(5)^n$. Seguire gli ordini indicati da una specifica matrice degli ordini ha aiutato talvolta a limitare la ricerca agli elementi con l'ordine corretto, permettendo così di rendere più efficiente la procedura.

Ad ogni numero prefissato di colonne della matrice degli ordini, siamo riusciti ad associare un numero massimo di righe possibili.

Abbiamo poi proseguito il lavoro cercando di formare *cricche* di dimensione massima utilizzando elementi di $Alt(5)^n$. Dato il numero eccessivamente elevato di elementi di $Alt(5)^n$, specialmente per n grande, abbiamo dovuto sfruttare le potenzialità del calcolatore. Abbiamo elaborato numerosi programmi in linguaggio GAP (Groups, Algorithms, Programming), specializzato per la teoria dei gruppi. Abbiamo cercato di ridurre il più possibile il numero degli elementi tra i quali cercare, essendo il numero totale troppo elevato anche per il calcolatore.

Il metodo è stato quello di trovare soluzioni parziali a mano e far completare dal calcolatore le entrate rimanenti della matrice di generazione che volevamo costruire.

Non siamo giunti ad una descrizione esaustiva perchè il numero delle possibilità è troppo alto per pensare di provare tutte le combinazioni esistenti, per quanto si elevi la potenza di calcolo.

Le incertezze riguardano in particolare $Alt(5)^5$, $Alt(5)^9$, $Alt(5)^{14}$ e $Alt(5)^{17}$.

Abbiamo eseguito però un numero tale di tentativi (in particolare per $Alt(5)^5$) da pensare che stessimo cercando qualcosa che non esiste.

Una strada per la prosecuzione del lavoro potrebbe essere quella di cercare ulteriori vincoli oltre a quelli già utilizzati che permettano di escludere alcune matrici degli ordini. Ad esempio, abbiamo costruito la matrice degli ordini di $Alt(5)^5$, ma se trovassimo ulteriori proprietà che dimostrino la non correttezza di tale matrice, potremmo concludere che il clique number di $Alt(5)^5$ deve essere 7.

Bibliografia

[1] Crestani, E. and Lucchini, A.: The non-isolated vertices in the generating graph of a direct powers of simple groups. J. Algebraic Combin. **37**, no. 2, 249-263 (2013).

[2] Martin W.Liebeck and Aner Shale: Simple Groups, Probabilistic Methods, and a Conjecture of Kantor and Lubotzky. J. Algebra **184**(1), 31-57 (1995).

[3] Turan, P.: An extremal problem in graph theory. Mat. Fiz. Lapok **48**, 436-452 (1941).

[4] Breuer, T., Guralnick, R.M., Kantor, W.M.: Probabilistic generation of finite simple groups. J.Algebra **320**(2), 443-494 (2008).

[5] Guralnick, R. M., Kantor, W.M.: Probabilistic generation of finite simple groups. J.ALgebra **234**(2), 743-792 (2000). Special issue in honor of Helmut Wielandt.

[6] Alexander Hulpke: Abstract Algebra in GAP. 2011.

[7] The GAP Group, *GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.8.10*; 2018, (`https://www.gap-system.org`).

[8] Passman, Donald S.: Permutation groups. Revised reprint of the 1968 original. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2012.

[9] Thévenaz, Jacques: Maximal subgroups of direct products. J. Algebra 198, no. 2, 352-361 (1997).

[10] Blackburn, S.R.: Sets of permutations that generate the symmetric group pairwise. J. Comb. Theory, Ser. A **113**(7), 1572-1581 (2006).

Ringraziamenti

Eppure siamo giunti alla fine! So che tu, lettore dei ringraziamenti, avrai prima letto tutta la tesi e ti sarai divertito infinitamente tra matrici e tentativi falliti ed immagino quanto ti sia addentrato in profondità tra le fondamentali questioni matematiche.

Seguendo la logica del ”teniamola aperta” di Luca Bonaldo ho deciso di non dare nessuna risposta alle domande poste nella tesi, così che tu possa meditarci e confrontarle con la tua esperenza (o no Andrea Rigo????).

Ed ora ho una lunga serie di persone da ringraziare, decisamente lunga, perchè, come si può intuire, da solo non sarei andato lontano.

Parto dalla mia famiglia. Bé, direi che nessuno mi ha perdonato e sostenuto tanto come voi: tra tasse pagate in ritardo e multe, mai mi avete fatto sentire in colpa ma sempre sostenuto! Delle volte mi sembrava di non meritarmelo, eppure, esattamente così come sono, mi avete sempre accolto (ogni tanto raccolto) e aiutato. Mery e Ele che siete sempre state così contente di vedermi arrivare a casa, mi avete sempre strappato un sorriso, per quanto fossi stanco. E il ”quando torni?” di quando partivo mi ha sempre fatto compagnia. Michi che ti raddolcisci appena si torna a Padova! Papà e mamma che non mi avete abbandonato un istante, per quanto antipatico fossi.

Murialdo. Sei anni di Murialdo si sentono, segnano, non solo (anche se soprattutto) nei kg che aumentano irrimediabilmente! Ringrazio i compagni di stanza che mi hanno voluto bene e sopportato (non deve essere facile quando sono stanco): Andrea, Giacomo, Forna, Piga, Andrea, Dani e Fra. Ringrazio anche gli altri Murialdini per la compagnia, per le grigliate(San Paci), per le cene (San Forna, San Giacomo Federici) e soprattutto per gli idementicabili, sentitissimi e preziosissimi calcetti!!! E poi per la Champions insieme (sempre grandi gioie, non ne va dritta una), per le birre, per i film, per il risiko! Insomma ringrazio PAci, Beppe Andreatta, Gigi Vianello, Paolo, Pietro, Rigo, Giac, Giac, Ric, Darione, Fabione, Maurone (vi ho messi vicini non a caso), Andrea, Dani, Manu, Simo, Pesche, Piga, Forna, Strobbe, Demis e tutti quelli che mi hanno fatto compagnia in questi anni. Last but not least: Gigi Danzo! Non me ne hai mai fatta passare una liscia e anche per questo ti ringrazio! Sei stato prezioso.

Matematici.