

Università degli Studi di Padova  
Dipartimento di Scienze Statistiche  
Corso di Laurea Triennale in  
Statistica per l'Economia e l'Impresa



RELAZIONE FINALE

**Fondi comuni d'investimento a gestione attiva ed ETF: un raffronto  
tramite il modello di Markowitz**

Relatore Prof. Massimiliano Caporin  
Dipartimento di Scienze Statistiche

Laureando: Nicolò Badiello  
Matricola N 2003274

Anno Accademico 2022/2023



# INDICE

<b>INTRODUZIONE</b> .....	p. 4
<b>CAPITOLO 1: Fondi comuni d'investimento e teoria di Markowitz</b> .....	p. 6
1.1: Definizione e caratteristiche dei fondi comuni d'investimento.....	p. 6
1.2: Classificazione dei fondi comuni d'investimento.....	p. 7
1.3: ETF: descrizione e differenze con i fondi a gestione attiva.....	p. 8
1.4: Teoria di Markowitz.....	p. 12
1.5: Frontiera efficiente con soli titoli rischiosi.....	p. 13
1.6: Frontiera efficiente in presenza del titolo privo di rischio.....	p. 16
<b>CAPITOLO 2: Frontiera efficiente e portafogli particolari</b> .....	p. 18
2.1: Costruzione della frontiera efficiente.....	p. 19
2.2: Costruzione di portafogli particolari.....	p. 22
2.2.1: Portafoglio a varianza minima globale.....	p. 22
2.2.2: Portafoglio long-only.....	p. 24
2.2.3: Portafoglio con vincolo sui pesi.....	p. 25
2.2.4: Portafoglio long-only con vincolo di volatilità.....	p. 26
2.2.5: Portafoglio long-only con vincolo di turnover.....	p. 26
<b>CAPITOLO 3: Collocazione di fondi ed ETF sulle frontiere efficienti</b> .....	p. 28
3.1: Portafoglio long-only.....	p. 28
3.2: Portafoglio con vincolo sui pesi.....	p. 29
3.3: Portafoglio long-only con vincolo di turnover.....	p. 30
3.4: Inferenza sull'Indice di Sharpe.....	p. 30
<b>CONCLUSIONI</b> .....	p. 32
<b>BIBLIOGRAFIA</b> .....	p. 33

## INTRODUZIONE

L'idea che sta alla base di questo elaborato è valutare se investire attraverso una gestione attiva basata sul modello di Markowitz possa risultare più o meno efficiente della classica gestione attiva (fondi comuni d'investimento/Sicav) o della gestione passiva (ETF).

Un'importante differenza distingue gli ETF dai fondi comuni d'investimento. I primi hanno l'obiettivo di replicare passivamente l'andamento di un particolare indice di mercato tramite l'acquisto dei titoli che lo compongono, mentre i secondi dipendono soprattutto dall'abilità del gestore in quanto hanno come scopo primario quello di "battere" il mercato cercando di ottenere rendimenti superiori rispetto a quello del benchmark di riferimento. Entrambi gli strumenti offrono all'investitore un elevato grado di diversificazione. Essa è una tecnica di investimento che ha come vantaggio quello di limitare il rischio specifico d'investimento costruendo portafogli nei quali le attività al loro interno devono avere una bassa correlazione. Legato strettamente al concetto della diversificazione è la teoria di Markowitz.

Egli nel 1952 ha introdotto un nuovo modo di pensare gli investimenti sviluppando un modello di ottimizzazione di un portafoglio d'investimento. Quest'ultimo si basa sul criterio media-varianza, infatti mira a massimizzare il valore atteso, e quindi il rendimento, minimizzando la varianza e quindi il rischio. La teoria si fonda essenzialmente su 5 principi: gli investitori vogliono massimizzare la ricchezza e minimizzare il rischio, il periodo di investimento è unico, il mercato è perfettamente concorrenziale, imposte e costi di transazione sono nulli e le attività perfettamente divisibili e la scelta è guidata da valore atteso e deviazione standard. Risolvendo il problema di ottimo si ottiene l'insieme dei portafogli ammissibili, la frontiera efficiente. Essa è uguale per ogni investitore, quello che varia però è l'avversione al rischio del singolo individuo che permette di individuare il portafoglio migliore per ognuno. Con avversione al rischio si intende "la caratteristica di un agente di preferire un evento certo piuttosto che uno aleatorio".

L'indice benchmark utilizzato nelle analisi è l'Euro Stoxx 600 e i suoi 19 supersectors. Di essi ho estrapolato le serie storiche dei prezzi di chiusura settimanali. Successivamente ho calcolato i relativi rendimenti e ho costruito, inizialmente, la frontiera efficiente non vincolata collocandoci il portafoglio a varianza minima globale. In seguito ho replicato l'analisi anche su varie frontiere efficienti vincolate imponendo limiti su pesi, volatilità e turnover per avere portafogli meno estremi e più acquistabili da un investitore. Nelle frontiere efficienti vincolate ho calcolato per

ogni vincolo il portafoglio a varianza minima globale e il portafoglio di tangenza di riferimento e li ho utilizzati per confrontarli con l'indice, con ETF che replicano l'Euro Stoxx 600, l'Euro Stoxx 50 e l'MSCI Europe e due fondi comuni d'investimento a gestione attiva che usano come benchmark principale dichiarato l'Euro Stoxx 600 e l'MSCI Europe.

## **CAPITOLO 1: Fondi comuni d'investimento e teoria di Markowitz**

Nel capitolo 1 vedremo cenni di teoria su fondi comuni d'investimento con particolare attenzione al confronto con gli ETF e sul modello di Markowitz.

### **1.1 Definizione e caratteristiche dei fondi comuni d'investimento**

Secondo la definizione posta dal Testo unico della finanza un fondo comune di investimento “è un patrimonio autonomo, suddiviso in quote di pertinenza di una pluralità di partecipanti, che viene gestito in monte, ossia collettivamente e nello stesso modo per tutti i partecipanti, e che può essere raccolto mediante una o più emissioni di quote”. Quindi il sottoscrittore investe indirettamente nel fondo acquistando un certo numero di quote legato all'importo versato e in questo modo accetta i rischi e i rendimenti correlati. Il loro obiettivo finale è battere il cosiddetto benchmark di riferimento per fare profitti. Esso è un indice o una composizione di indici di riferimento con il quale vengono confrontate le performance di uno strumento finanziario. I fondi sono gestiti dalle società di gestione del risparmio (Sgr) nell'interesse dei partecipanti ma in autonomia da essi svolgendo i compiti che normalmente dovrebbero spettare all'investitore, esse sono sottoposte al controllo di Banca d'Italia e Consob. Il fondo viene depositato presso la cosiddetta banca depositaria, che svolge la funzione di custodia, verifica e controllo di esso. Il valore di partecipazione al fondo può variare quotidianamente e si calcola come il rapporto tra il Net Asset Value (NAV) e il numero di quote in circolazione, dove il NAV è il valore corrente delle attività che lo compongono. I risparmiatori che si affidano alle SGR possono usufruire di un documento fornito dalla Consob, diviso in due parti: la prima è il cosiddetto KID che contiene una descrizione del fondo di riferimento riferendosi ai compiti del gestore, alle decisioni su investimenti, costi, livelli di rischio e benchmark di riferimento; la seconda è il Prospetto Informativo che mostra informazioni generali come la guida per la sottoscrizione e il rimborso di un fondo e i risultati storici delle sue performance.

I fondi comuni d'investimento sono cresciuti rapidamente negli ultimi decenni per diversi motivi: l'aumento del numero di investitori, l'aumento della liquidità disponibile, la riduzione dei rendimenti offerti dai titoli di stato, in particolare in Italia, forniscono un'intermediazione importante, offrono vantaggi su costi, aspetti legali e competenza professionale, ma soprattutto permettono la diversificazione. Essa è una tecnica che limita il rischio specifico, ossia quel rischio legato a una singola impresa, a un singolo mercato o a un singolo settore e consiste,

appunto, nel diversificare le opportunità di investimento per trovare quella combinazione che minimizza il rischio mantenendo un certo rendimento.

## 1.2 Classificazione dei fondi comuni d'investimento

I fondi comuni possono essere classificati in diverse tipologie in base a particolari caratteristiche.

Se consideriamo la modalità di partecipazione essi si distinguono in:

- *Fondi aperti*: caratterizzati dal diritto del risparmiatore di uscita e ingresso in qualsiasi momento e per questo il patrimonio varia in base alle nuove sottoscrizioni e riscatti.
- *Fondi chiusi*: nei quali le quote sottoscritte sono fisse e non si accettano versamenti aggiuntivi e il riscatto può avvenire solamente in un momento stabilito in precedenza.

In base alle politiche di investimento si suddividono in:

- *Fondi azionari*: investono prevalentemente in azioni e consentono di approfittare di elevati rendimenti però con alto rischio associato.
- *Fondi obbligazionari*: investono in titoli obbligazionari a medio-lungo termine.
- *Fondi bilanciati*: investono sia in titoli azionari che obbligazionari con lo scopo di trovare il giusto compromesso tra rischio e rendimento.
- *Fondi di liquidità*: non investono nel mercato azionario ma in obbligazioni a breve termine (massimo 6 mesi) come BOT e liquidità; sono caratterizzati da un livello di rischio ridotto e dal fatto che i titoli su cui operano devono presentare un rating non inferiore ad A2 o A.
- *Fondi flessibili*: investono senza alcuna restrizione in azioni, obbligazioni, liquidità e in qualsiasi mercato a seconda delle aspettative e delle possibilità del mercato finanziario.

Considerando la forma giuridica si classificano in:

- *Fondi armonizzati*: rientrano nell'ambito di applicazione delle direttive comunitarie e possono essere commercializzati nel territorio dell'Unione Europea e sono i più diffusi in Italia
- *Fondi non armonizzati*: sono caratterizzati da una maggior libertà d'investimento, infatti non aderiscono alla normativa europea ma sono legati solamente al regolamento della banca che li ha istituiti.

Riguardo la distribuzione degli utili si dividono in:

- *Fondi ad accumulazione*: gli utili ottenuti non vengono ripartiti tra i partecipanti ma vengono reinvestiti nel fondo oppure servono per incrementare le quote del fondo.
- *Fondi a distribuzione*: i dividendi vengono distribuiti come fossero delle cedole totalmente o parzialmente in intervalli di tempo prestabiliti.

Per gli effettivi investimenti si distinguono in:

- *Fondi mobiliari*: investono in beni mobiliari cioè trasferibili, ossia beni che successivamente alla loro emissione possono circolare nel mercato secondario, come azioni oppure obbligazioni.
- *Fondi immobiliari*: investono almeno due terzi del loro capitale in beni immobili e hanno durata di medio-lungo periodo, sono caratterizzati da una minor liquidità rispetto ai precedenti.
- *Fondi speculativi*: sono fondi particolari che hanno lo scopo di raggiungere un rendimento anche in situazioni particolari come per esempio quando i mercati finanziari sono in perdita, per fare ciò attuano strategie peculiari come leva finanziaria, vendite allo scoperto o investimenti su titoli derivati. Essi rientrano nel gruppo dei fondi non armonizzati.

Per quanto riguarda la struttura delle commissioni si classificano in:

- *Fondi con commissione d'entrata*: detti anche "Load Funds", sono caratterizzati da commissioni che i sottoscrittori pagano agli intermediari finanziari per la loro attività e vengono detratte dal valore di riscatto delle quote; se esse sono addebitate all'acquisto sono commissioni d'ingresso (front-end load), se addebitate al riscatto sono commissioni d'uscita (deferred-load).
- *Fondi senza commissione d'entrata*: chiamati "No-Load Funds", essi possono essere acquistati dagli investitori senza l'intervento di nessun intermediario finanziario.

### **1.3 ETF: descrizione e differenze con i fondi a gestione attiva**

Gli ETF, "Exchange Traded Funds" sono fondi comuni d'investimento particolari, detti a gestione passiva, che hanno l'unico scopo di replicare l'andamento dell'indice di riferimento tramite l'acquisto dei titoli che lo compongono; quindi il rendimento dell'ETF dipende solamente dall'andamento delle performance di questi titoli e non dall'abilità d'investimento del gestore. Anche per tale motivo questi presentano costi più bassi rispetto a un fondo d'investimento normale, sono quotati e negoziati in Borsa e perciò gli investitori possono comprare le quote all'interno del mercato secondario senza il bisogno di un qualsiasi intermediario. In Italia il



mercato regolamentato dedicato a questi fondi si chiama ETFplus. Questi fondi fanno parte di una categoria più ampia, gli ETP, "Exchange Traded Products", che oltre, appunto, agli ETF contengono al loro interno gli ETC e gli ETN; questi due si distinguono dai primi in quanto non sono fondi ma attività finanziarie quotate in borsa. In particolare gli ETC sono strumenti finanziari che investono in materie prime fisiche o derivati di esse, mentre gli ETN hanno come sottostante tutti quei prodotti che, appunto, non siano materie prime.

Gli ETF possono anche essere gestiti attivamente (un esempio sono gli ETF LifeStrategy di Vanguard), quando è la società stessa ad emetterli. Essi hanno un costo più elevato rispetto ai classici ETF, è ovviamente da valutare se questa spesa garantisce un rendimento adatto.

Questi fondi hanno due modalità per replicare l'indice, si parla di replica fisica e replica sintetica. La prima consiste semplicemente nell'acquistare i titoli che compongono l'indice seguendo il peso che hanno nel benchmark, se vengono comprate tutte le azioni contenute nel benchmark si parla di replica fisica completa. Questa tecnica viene usata soprattutto quando i titoli da acquistare non sono troppi e hanno una forte liquidità, garantisce trasparenza e sicurezza, però presenta costi più elevati, in particolare quella completa. La replica sintetica consiste in un accordo tra gestore dell'ETF e intermediario tramite contratti derivati, nello specifico swap, con l'obiettivo di ricevere il rendimento del benchmark di riferimento in cambio di una commissione. Essi presentano costi inferiori, sono coperti dall'accordo di garanzia e proteggono da eventuali scostamenti dell'indice perché lo replicano fedelmente, ma sono soggetti al rischio di controparte.

Esistono vari tipi di ETF:

- *ETF obbligazionari*: vengono utilizzati per garantire un profitto continuativo ai sottoscrittori, possono includere obbligazioni statali e locali, societarie e titoli di stato. Essi non hanno una scadenza, a differenza dei titoli nei quali investono.
- *ETF azionari*: comprendono un insieme di azioni su una singola industria o su un singolo settore. L'obiettivo di fondo è ottenere una diversificazione su tale settore con performance elevate e potenziali di crescita. Essi hanno commissioni molto basse e non obbligano gli investitori a essere proprietari dei titoli, a differenza dei fondi comuni azionari.
- *ETF di settore/industria*: essi si concentrano esclusivamente su una singola impresa o su un singolo settore; lo scopo consiste nel cercare un'esposizione al rialzo di tale industria o settore lavorando sulle performance delle società che operano in quel contesto

- *ETF sulle materie prime*: investono, ovviamente, in materie prime; il beneficio maggiore che portano è l'opportunità di diversificare il portafoglio svolgendo il ruolo di "cuscinetto" in caso di flessioni di altri mercati come quello azionario o obbligazionario.
- *ETF valutarie*: questi ETF tracciano le coppie di valute, una nazionale e l'altra estera. Essi sono utilizzati per speculare sui prezzi delle valute considerando fenomeni politici ed economici che caratterizzano un paese, per diversificare il portafoglio oppure per coprirsi dall'inflazione.
- *ETF inversi*: utili perché guadagnano vendendo azioni allo scoperto cercando di guadagnare su futuri ribassi per poi ricomprarla a un prezzo inferiore. Per fare ciò questi ETF utilizzano i derivati. Essi aumentano di valore proporzionalmente alla diminuzione del mercato.
- *ETF con leva finanziaria*: essi restituiscono alcuni multipli sul rendimento degli investimenti in atto. Per esempio se un'azione cresce dell'1%, un ETF con leva 2x garantirà all'investitore un profitto del 2%, viceversa se tale azione diminuisce dell'1%, questo ETF perderebbe il 2%. Essi utilizzano derivati come contratti future o come opzioni.

Ci sono alcuni criteri utili per cercare e scegliere il miglior ETF, i quali:

- **Volume**: è utile per confrontare la "popolarità" di vari fondi, maggiore è il volume degli scambi e maggiore è la facilità di negoziazione in quel fondo.
- **Spesa**: minore è l'indice di spesa e minore è l'importo da pagare per costi amministrativi; nonostante ciò che si possa pensare, a volte gli ETF più costosi hanno prestazioni talmente elevate da compensare le commissioni e garantire anche dei profitti.
- **Performance**: le performance passate non sono garanzie di profitti futuri, ma possono comunque essere utilizzate come termine di confronto tra ETF.
- **Partecipazione**: anch'essa utile agli investitori per confrontare le diverse partecipazioni dei vari investimenti su ogni ETF.
- **Commissioni**: simile alla spesa, alcuni ETF possono essere scambiati senza commissione alcuna, tuttavia anche in questo caso è necessario valutare se ne vale davvero la pena effettuare questo investimento a livello di performance e profitti.

Investire su ETF può garantire diversi vantaggi come:

- Semplicità: sono strumenti molto semplici in quanto hanno una gestione passiva con lo scopo di replicare l'indice di riferimento; perciò è immediata l'esposizione al mercato anche grazie alla negoziazione in tempo reale in Borsa che permette di vendere/acquistare gli ETF direttamente dalla propria banca o dal proprio intermediario.
- Trasparenza: gli investitori che decidono di acquistare questi fondi sono perfettamente a conoscenza del rapporto rischio-rendimento che c'è sotto al loro investimento essendo l'indice noto nel mercato e aggiornato in tempo reale.
- Flessibilità: questi fondi non scadono e sono quotati in Borsa, quindi è l'investitore stesso che può decidere il proprio orizzonte temporale e la quantità di denaro da immettere.
- Costi: hanno costi molto più bassi rispetto alla gestione attiva in quanti essi replicano un indice e quindi per comprare il paniere di titoli legato a quell'indice gli investitori devono compiere una sola transazione e ciò porta a un numero di commissioni decisamente minore rispetto che comprarli singolarmente. Questa economicità garantisce l'entrata in mercati altrimenti difficilmente raggiungibili.
- Abbattimento del rischio: per legge il patrimonio degli ETF è di proprietà dei possessori delle quote, questo porta al beneficio che anche nel caso di insolvenza delle società che gestiscono il fondo tale patrimonio non subirebbe perdite.

Nonostante la primaria fonte di guadagno che deriva dall'investire in ETF sia data dalla variazione dei prezzi dell'indice di riferimento, gli investitori possono ottenere profitti anche dalle società che pagano i dividendi. Essi sono una parte degli utili che le società possono distribuire ai fondi, i quali decidono se pagare gli investitori oppure tenerli e investirli nuovamente. In quest'ambito distinguiamo gli ETF ad accumulazione e a distribuzione. I primi sono caratterizzati da dividendi che vengono reinvestiti dal gestore del fondo senza costi aggiuntivi, gli altri li distribuiscono agli investitori come flussi di cassa.

Dal punto di vista fiscale gli ETF sono più efficienti dei normali fondi comuni in quanto gli acquisti e le vendite avvengono sotto forma di scambio, quindi sono limitati anche i debiti fiscali che i possessori del fondo devono pagare.

Quindi, le principali differenze tra normali fondi comuni ed ETF sono le seguenti:

- ETF: sono fondi indicizzati che seguono un paniere di titoli legati all'indice di riferimento, i prezzi possono essere scambiati in perdita o a premio rispetto al NAV, sono negoziati nei mercati a qualsiasi orario di mercato aperto, alcuni ETF non

applicano commissioni e sono generalmente più economici, diversificano il rischio controllando varie società in un settore in unico fondo, sono i più efficienti dal punto di vista fiscale.

- Fondi comuni d'investimento: gli investimenti avvengono in vari strumenti finanziari come azioni, obbligazioni e altri titoli per ottenere un rendimento favorevole, i prezzi vengono scambiati al valore del NAV, possono essere riscattati solo alla fine della giornata di negoziazione, anch'essi possono in alcuni casi non applicare costi di commissione ma in linea di massima risultano più costosi, diversificano costruendo un portafoglio il più vario possibile, offrono vantaggi fiscali solamente quando riconsegnano capitale o contengono alcune tipologie particolari di obbligazioni.

## 1.4 Teoria di Markowitz

Harry Markowitz è stato un importantissimo economista statunitense vincitore nel 1990 del premio Nobel per l'economia. Egli è considerato il padre della cosiddetta "moderna teoria di portafoglio" che ha cambiato il mondo degli investimenti. Il suo primo articolo pubblicato risale al 1952 con "Portfolio Selection" poi ampliato con il libro "Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments". Prima di Markowitz gli investimenti erano mirati a comprare semplicemente gli strumenti finanziari che garantivano le migliori prospettive in ambito di performance e rendimento, egli rivoluzionò quest'idea introducendo un fattore che si rivelerà fondamentale: la correlazione tra i titoli. Essa è una misura statistica che indica quanto i rendimenti di due asset finanziari si muovono insieme nel tempo, assume valori compresi tra -1 (correlazione negativa perfetta, ossia i due titoli si muovono insieme ma in direzioni opposte) e +1 (correlazione positiva perfetta, cioè i due titoli si muovono insieme e nella stessa direzione). La sua teoria si basa sull'approccio media-varianza delle attività sottostanti, ossia a parità di rendimento investo sugli strumenti che mi garantiscono il rischio minore e viceversa a parità di rischio investo sugli strumenti che mi garantiscono un rendimento maggiore. Lo scopo ultimo sarà perciò creare una frontiera di portafogli efficienti ("portafogli ammissibili per i quali non esistono altri portafogli che garantiscono stesso rendimento con rischio inferiore e garantiscono rendimento maggiore con lo stesso rischio"), detta appunto Frontiera Efficiente, tale da minimizzare il rischio e massimizzare il rendimento complessivo. In quest'ambito risulta fondamentale il concetto introdotto precedentemente della diversificazione, in quanto ti permette di limitare il rischio specifico e, ad essa, è legata la correlazione tra i titoli perché se tale correlazione è minore di +1 la diversificazione ha effetto con un massimo nel caso di titoli perfettamente correlati negativamente. Usando le sue parole: "Per ridurre il rischio è necessario

evitare un portafoglio i cui titoli siano tutti altamente correlati tra loro. Cento titoli i cui rendimenti aumentano e diminuiscono quasi all'unisono offrono poca protezione rispetto al rendimento incerto di un singolo titolo”.

La teoria di Markowitz si basa su questi 5 assunti fondamentali:

- Gli investitori vogliono massimizzare la ricchezza finale e sono avversi al rischio.
- Il periodo di investimento è unico.
- Le imposte e i costi di transazioni sono nulli e le attività sono perfettamente divisibili.
- Gli unici parametri che guidano la scelta sono valore atteso e deviazione standard.
- Il mercato è perfettamente concorrenziale.

## 1.5 Frontiera Efficiente con soli titoli rischiosi

In un portafoglio composto da N attività rischiose le espressioni di rendimento e varianza sono le seguenti:

$$\mu_p = \sum_{i=1}^n \mu_i \omega_i$$

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \omega_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \omega_i \omega_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}$$

dove  $\omega_i$  è la quantità di ricchezza investita nel titolo i-esimo e  $\rho_{ij}$  è il coefficiente che determina la correlazione tra il titolo i-esimo e il titolo j-esimo.

A livello analitico quindi l'obiettivo è determinare la Frontiera Efficiente tramite la risoluzione del problema di ottimo dell'agente, ossia massimizzare la sua funzione di utilità:  $E[U(W_1)] = E[r_p] - \eta V[r_p]$  con  $\eta$  coefficiente di avversione al rischio. La soluzione ottima dipende dal valore che assume  $\eta$  e tutte le possibili soluzioni costituiscono, appunto, l'insieme dei portafogli efficienti.

Un portafoglio efficiente si ottiene risolvendo:

$$\min_{\omega} \omega' \Sigma \omega$$

sotto vincoli

$$\mu_p = \omega' r \quad \text{e} \quad \omega' 1_n = 1$$

dove  $\omega' \Sigma \omega = \sigma_p^2$  è la varianza del portafoglio.

Il primo vincolo seleziona un rendimento obiettivo da ottenere, mentre il secondo è il vincolo di ammissibilità del portafoglio. Il portafoglio risultante è efficiente perché non esiste un altro portafoglio che genera rendimento  $\mu_p$  con un rischio minore.

Lo stesso problema può essere risolto fissando il rischio, quindi:

$$\begin{aligned} & \max_{\omega} \omega' r \\ & \text{sotto vincoli} \\ & \sigma^2_p = \omega' \Sigma \omega \text{ e } \omega' 1_n = 1 \end{aligned}$$

La soluzione ottima si ottiene tramite il sistema di Lagrange:

$$\min_{\omega} L(\omega) = \frac{1}{2} \omega' \Sigma \omega - \lambda_1 (\omega' 1_n - 1) - \lambda_2 (\omega' r - \mu_p)$$

Si impongono le condizioni del primo ordine:

$$\frac{\partial L}{\partial \omega} = \Sigma \omega - \lambda_1 1_n - \lambda_2 r = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = \omega' 1_n - 1 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = \omega' r - \mu_p = 0$$

E si definiscono i seguenti scalari:  $A = r' \Sigma^{-1} r$   $B = 1'_n \Sigma^{-1} r$   $C = 1'_n \Sigma^{-1} 1_n$  e la quantità  $\Delta = AC - B^2$ .

Si ottiene che la soluzione ottima del problema di minimizzazione del rischio, quindi della varianza è  $\omega^* = (A \Sigma^{-1} 1_n - B \Sigma^{-1} r) * \left(\frac{1}{\Delta}\right) + (C \Sigma^{-1} r - B \Sigma^{-1} 1_n) \left(\frac{\mu_p}{\Delta}\right)$ , vettore ottimo dei pesi.

Sostituendo tale vettore nella formula della varianza otteniamo che la frontiera efficiente risulta essere:  $\sigma^2_p = \frac{C}{\Delta} \mu_p^2 - \frac{2B}{\Delta} \mu_p + \frac{A}{\Delta}$ . Essa nel piano  $(\sigma_p, \mu_p)$  è una parabola ma normalmente è rappresentata nello spazio  $(\sigma_p, \mu_p)$  dove corrisponde a un ramo di iperbole equilatera con vertice nel punto  $\left(\frac{1}{\sqrt{C}}, \frac{B}{C}\right)$  e asintoti  $\mu_p = \frac{B}{C} \pm \sigma_p \sqrt{\frac{\Delta}{C}}$  e i portafogli efficienti si trovano nella porzione superiore di questo ramo. Come abbiamo detto, nel problema di ottimo i portafogli della frontiera efficiente devono soddisfare due vincoli: ammissibilità (somma dei pesi pari a 1) e rendimento obiettivo (rendimento deve essere quello fissato con  $\mu$ ).

Nell'analisi della frontiera efficiente assumono importanza due portafogli particolari: il portafoglio a varianza minima globale e il portafoglio di massimo trade-off. Il primo è situato sul vertice dell'iperbole e ha pesi, rendimento e varianza pari a

$\omega^*_{V} = (\Sigma^{-1}1_n) / (1'_n \Sigma^{-1}1_n)$ ,  $r_V = (r' \Sigma^{-1}1_n) / (1'_n \Sigma^{-1}1_n) = \frac{B}{C}$ ,  $\sigma_V = \frac{1}{\sqrt{C}}$ , ottenuti come soluzione al problema di ottimo

$$\min_{\omega} \omega' \Sigma \omega$$

sotto vincolo

$$\omega' 1_n = 1.$$

Invece quello di massimo trade-off sta all'incrocio tra la curva e la retta passante per l'origine e ha pesi, rendimenti e varianza pari a

$$\omega^*_{T} = (\Sigma^{-1}r) / (1'_n \Sigma^{-1}r), \quad r_T = (r' \Sigma^{-1}r) / (1'_n \Sigma^{-1}r) = \frac{A}{B}, \quad \sigma_T = \frac{\sqrt{A}}{|B|}.$$

Il portafoglio ottimo è quindi una combinazione lineare del portafoglio a varianza minima globale e di massimo trade-off e per il "Teorema di Separazione" o "Teorema dei due fondi" che dice che "l'intera frontiera efficiente può essere disegnata a partire da due punti noti" possiamo ottenere i pesi di un qualsiasi portafoglio da questi due particolari portafogli che quindi permettono di ricavare l'intera frontiera.

Dal punto di vista di un agente caratterizzato da funzione di utilità media-varianza

$U = \mu_p - \frac{\gamma}{2} \sigma_p^2$  con  $\mu_p = \omega' r$  e  $\sigma_p^2 = \omega' \Sigma \omega$  e  $\gamma$  è il coefficiente di avversione al rischio, la composizione ottimale del portafoglio dell'agente si ottiene risolvendo

$$\max_{\omega} U = \omega' r - \frac{\gamma}{2} \omega' \Sigma \omega$$

sotto vincolo

$$\omega' 1_n = 1$$

e tramite Lagrange si arriva a  $\omega = \frac{B}{\gamma} \omega^*_{T} - \frac{B-\gamma}{\gamma} \omega^*_{V}$ , ossia una combinazione del portafoglio a varianza minima globale e di massimo trade-off. Per  $\gamma \rightarrow \infty$  la soluzione ottima converge verso  $\omega^*_{V}$ ; per  $\gamma \rightarrow 0$  la soluzione ottima corrisponde ad un portafoglio estremo posizione lunga su  $\omega^*_{T}$  e corta su  $\omega^*_{V}$ . La scelta perciò dipende dall'agente e dalla sua avversione al rischio e si trova nel punto di tangenza tra frontiera e curve di indifferenza.

## 1.6 Frontiera Efficiente in presenza del titolo privo di rischio

Se nel portafoglio è presente anche un'attività priva di rischio, il problema di ottimo diventa

$$\min_{\omega} \omega' \Sigma \omega$$

sotto vincolo

$$\mu_p = \omega' r + (1 - \omega' 1_n) r_f$$

Esso si risolve come nel caso precedente, quindi con Lagrange, e otteniamo:

$$\omega = \Sigma^{-1} (r - 1_n r_f) * (\mu_p - r_f) / (A - 2B r_f + C r_f^2)$$

$$\sigma_p^2 = (\mu_p - r_f)^2 / (A - 2B r_f + C r_f^2)$$

e nel piano  $(\sigma_p, \mu_p)$  è una retta  $\mu_p = r_f + \sigma_p \sqrt{(A - 2B r_f + C r_f^2)}$

Se  $\mu_p = r_f$  il portafoglio è composto solamente dall'attività priva di rischio, spostandomi verso destra investirò sempre di più nei titoli rischiosi fino ad arrivare al punto  $\omega' 1_n = 1$  che rappresenta il portafoglio composto interamente da titoli rischiosi. Tale portafoglio avrà vettore dei pesi pari a  $\omega^* = \Sigma^{-1} (r - 1_n r_f) / 1_n' \Sigma^{-1} (r - 1_n r_f) = \omega^*_T$ . Ma è efficiente? Certamente lo è in presenza dell'attività priva di rischio perché considerando la relazione  $\mu_p = (A - B r_f) / (B - C r_f)$ , esso sarà uguale a  $r' \omega^*_T$ , e quindi è un portafoglio ottimo per questo rendimento obiettivo. Nell'altro caso sostituendo  $\mu_p$  al vettore dei pesi ottimi di un portafoglio in assenza del titolo privo di rischio trovato nel precedentemente otteniamo:

$$\omega^* = (AC - B^2) * \Sigma^{-1} (\mu - 1 r_f) / (AC - B^2)(B - C r_f) = \Sigma^{-1} (r - 1_n r_f) / 1_n' \Sigma^{-1} (r - 1_n r_f).$$

Quindi abbiamo ritrovato i pesi  $\omega^*_T$  partendo dall'assenza del tasso privo di rischio; quindi esso è un portafoglio efficiente sia in presenza che in assenza dell'attività priva di rischio e, poiché è unico, è anche il portafoglio di tangenza tra le due frontiere efficienti.

Inoltre abbiamo  $\mu_T = (A - B r_f) / (B - C r_f)$ , e  $\sigma_T^2 = (A - 2B r_f + C r_f^2) / (B - C r_f)^2$ , rispettivamente rendimento e varianza del portafoglio di tangenza. In presenza dell'attività priva di rischio il portafoglio a varianza minima globale è quello che investe tutto in quest'attività e quindi ha varianza nulla. Dal rapporto tra extra-rendimento e deviazione standard otteniamo l'Indice di Sharpe del portafoglio che corrisponde alla pendenza della frontiera efficiente ed è

$$(\mu_T - r_f) / \sigma_T = \text{sgn}(B - C r_f) \sqrt{(A - 2B r_f + C r_f^2)}.$$



Dal punto di vista dell'agente con funzione di utilità media-varianza  $U = \mu_p - \frac{\gamma}{2} \sigma_p^2$  dove

$\mu_p = ((1 - \omega'1_n) r_f + \omega'r)$  e  $\sigma_p^2 = \omega'\Sigma\omega$ , la composizione ottima del portafoglio si ottiene risolvendo

$$\max_{\omega} U = (1 - \omega'1_n) r_f + \omega'r - \frac{\gamma}{2} \sigma_p^2$$

e con Lagrange si arriva a  $\omega^* = \Sigma^{-1} (r - 1_n r_f) / (\gamma) = (B - Cr_f) \omega^*_T / (\gamma)$  quindi la somma investita nei titoli rischiosi è proporzionale al portafoglio di tangenza. Il portafoglio ottimo è una combinazione, appunto, del portafoglio di tangenza e dell'attività priva di rischio (quindi portafoglio a varianza minima globale). Per  $\gamma \rightarrow \infty$  la soluzione ottima converge verso  $\omega^*1_n=0$ , quindi si investe tutto nell'attività priva di rischio, per  $\gamma \rightarrow 0$  la soluzione ottima corrisponde ad un portafoglio estremo con posizione lunga su  $\omega^*_T$  e corta sull'attività priva di rischio.

Questi problemi di ottimo hanno un limite, cioè che non considerando vincoli sui pesi possono portare a portafogli estremi e difficilmente raggiungibili. Considerando il seguente problema

$$\min_{\omega} \omega'\Sigma\omega$$

$$\mu_p = \omega'r$$

$$\omega'1_n = 1$$

$$\omega_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$$

si evitano questi portafogli estremi aggiungendo il vincolo di positività sui pesi. Chiaramente questo è solo uno dei possibili esempi di vincoli che possono essere imposti sui pesi.

La Frontiera efficiente in presenza di vincoli si posiziona più a destra e risulta più stretta rispetto alla frontiera non vincolata in quanto il paniere di portafogli ammissibili è ovviamente meno ampio.

## **Capitolo 2: Frontiera efficiente e portafogli particolari**

I dati utilizzati per la costruzione dei seguenti portafogli sono stati estrapolati da Refinitiv, fornitore globale americano-britannico di dati e infrastrutture del mercato finanziario, e riguardano le serie storiche dei prezzi dell'indice Euro Stoxx 600, di un ETF che lo replica e dei suoi 19 supersectors:

- Automobiles & Parts
- Banks
- Basic Resources
- Chemicals
- Construction & Materials
- Financial Services
- Food & Beverage
- Health Care
- Industrial Goods & Services
- Insurance
- Media
- Oil & Gas
- Personal & Household Goods
- Real Estate
- Retail
- Technology
- Telecommunications
- Travel & Leisure
- Utilities.

Inoltre sono stati utili le serie storiche dei prezzi riguardo ETF che replicano gli indici Euro Stoxx 50 e MSCI Europe e fondi comuni d'investimento a gestione attiva che utilizzano Euro Stoxx 600 e MSCI Europe come benchmark di riferimento. La ricerca degli ETF è stata condotta sul sito JustETF selezionando quello a maggiore AUM (Asset Under Management). Per i fondi ho utilizzato la piattaforma Quantalys ricercando quelli con il miglior rating che avessero nel benchmark gli indici oggetto di analisi.

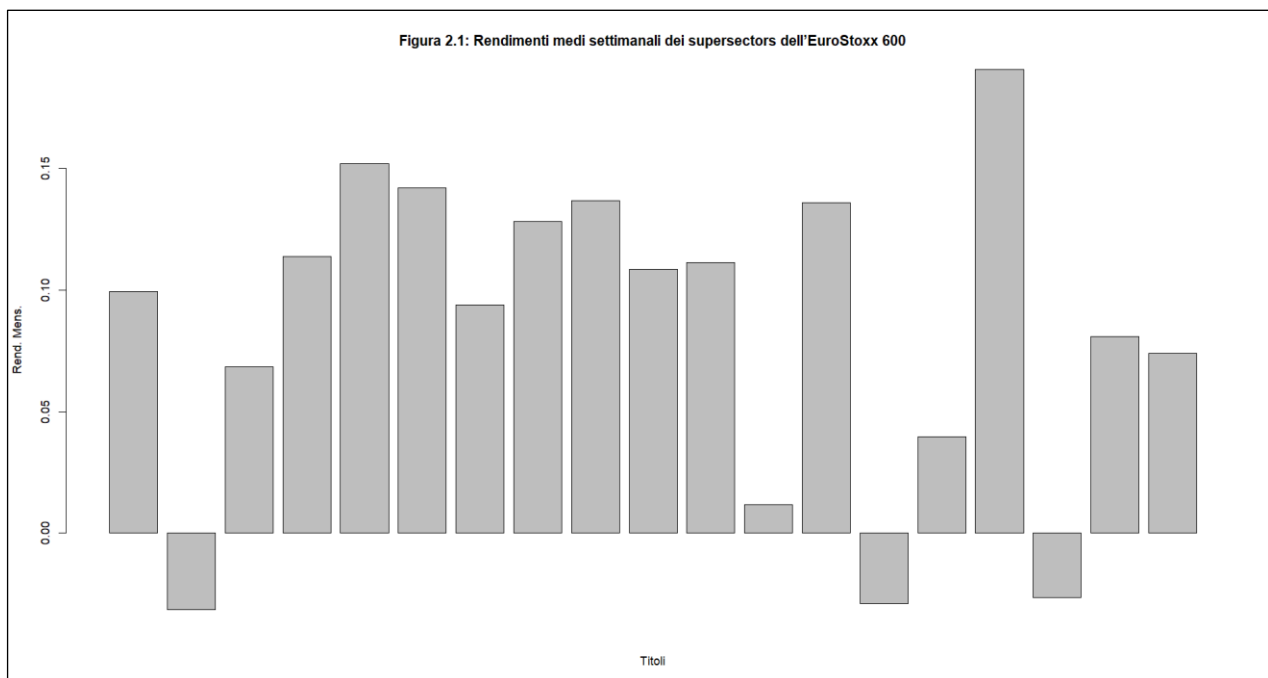
I dati in questione riguardano i prezzi di chiusura settimanali nel periodo 01/05/2013-01/05/2023.

L'Euro Stoxx 600 è un indice azionario che comprende le 600 principali capitalizzazioni di mercato europee, precisamente in 17 paesi; coprono circa il 90% della capitalizzazione totale del mercato europeo azionario. L'Euro Stoxx 50 comprende le 50 maggiori società per capitalizzazione di mercato azionario europeo, mentre l'MSCI Europe è un indice azionario europeo che include le performance di un paniere di azioni ad alta capitalizzazione di 15 mercati nazionali.

Le implementazioni dei codici con relativi output e grafici per le analisi necessarie ai fini del lavoro sono state realizzate con "RStudio".

## 2.1 Costruzione della frontiera efficiente

Dopo aver caricato i dati su "RStudio" ho trovato i logaritmi dei prezzi per poi farne la differenza prima e ottenere i rendimenti con relativa media e varianza.

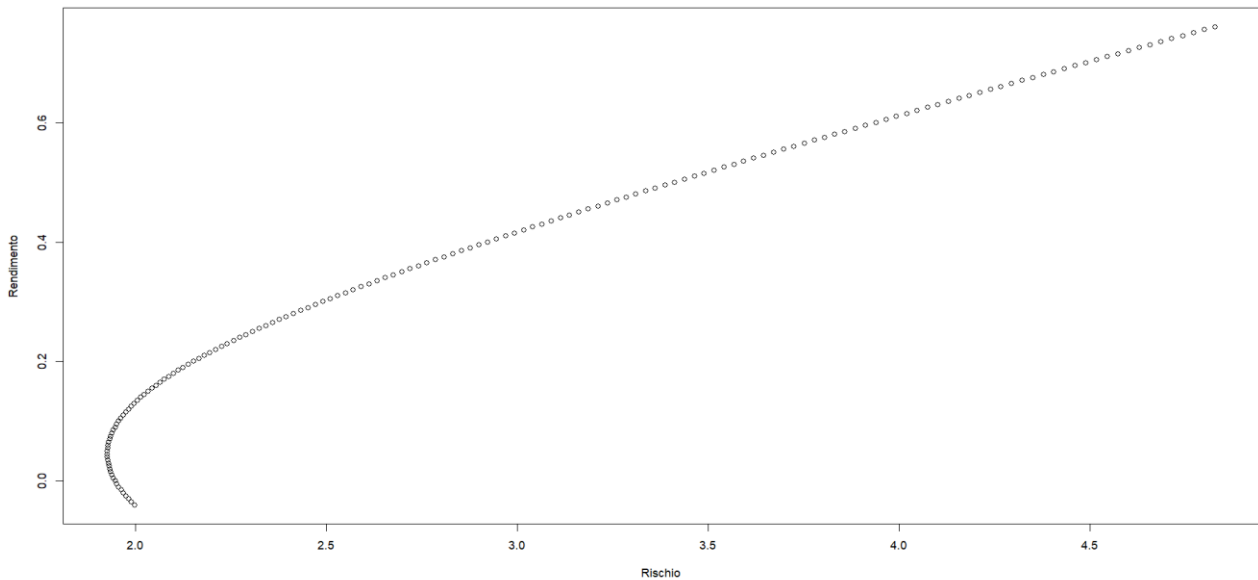


In ordine da sinistra a destra: "Automobiles & Parts", "Banks", "Basic Resources", "Chemicals", "Construction & Materials", "Financial Services", "Food & Beverage", "Health Care", "Industrial Goods & Services", "Insurance", "Media", "Oil & Gas", "Personal & Household Goods", "Real Estate", "Retail", "Technology", "Telecommunications", "Travel & Leisure", "Utilities". Notiamo che

i rendimenti medi settimanali dei supersectors sono tutti positivi ad eccezione di quelli riguardanti “Banks”, “Real Estate” e “Telecommunications”.

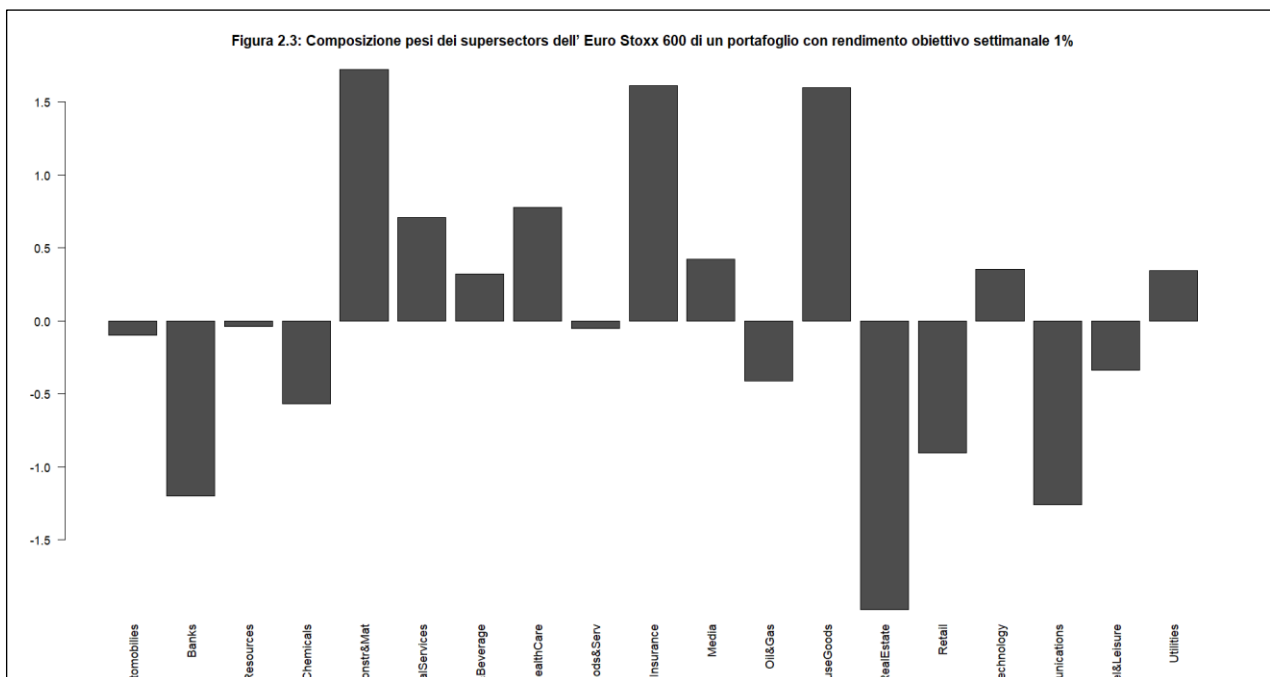
Successivamente ho calcolato gli scalari A, B, C e  $\Delta$ , necessari per costruire la frontiera efficiente.

Figura 2.2: Frontiera efficiente non vincolata dei supersectors dell'Euro Stoxx 600

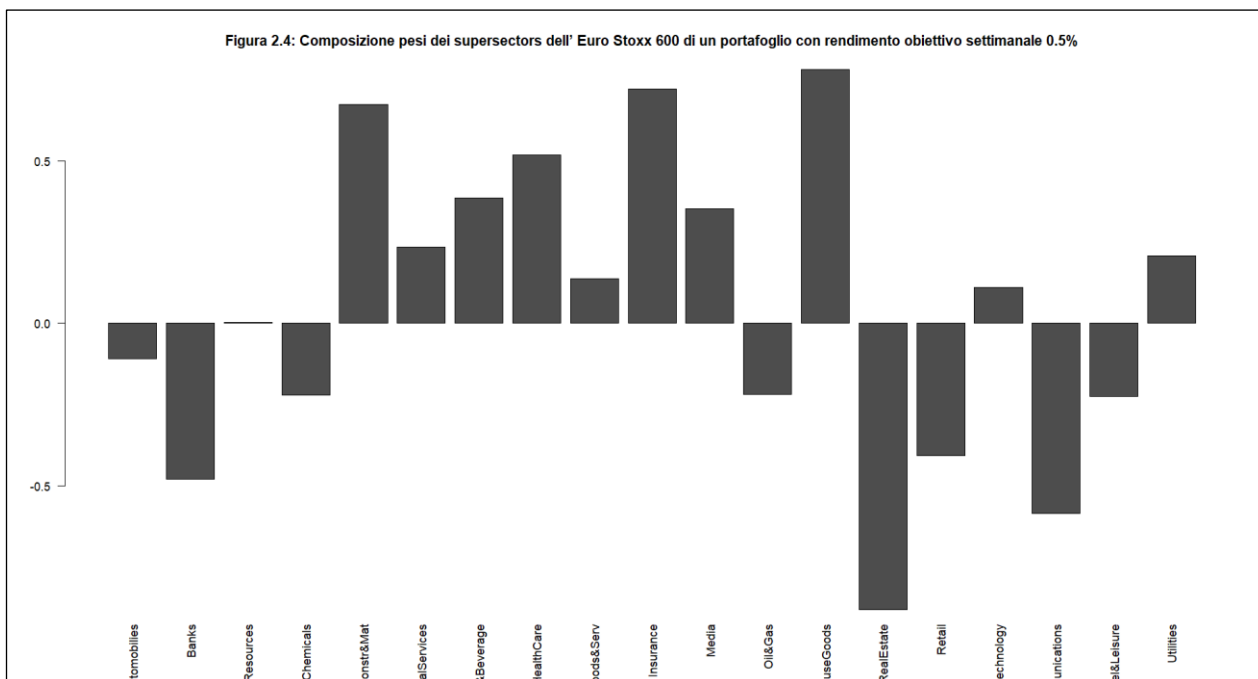


È interessante vedere come variano i pesi del portafoglio considerando rendimenti obiettivo differenti. Ponendo un rendimento obiettivo settimanale dell'1% la composizione dei pesi del portafoglio è la seguente:

Figura 2.3: Composizione pesi dei supersectors dell' Euro Stoxx 600 di un portafoglio con rendimento obiettivo settimanale 1%

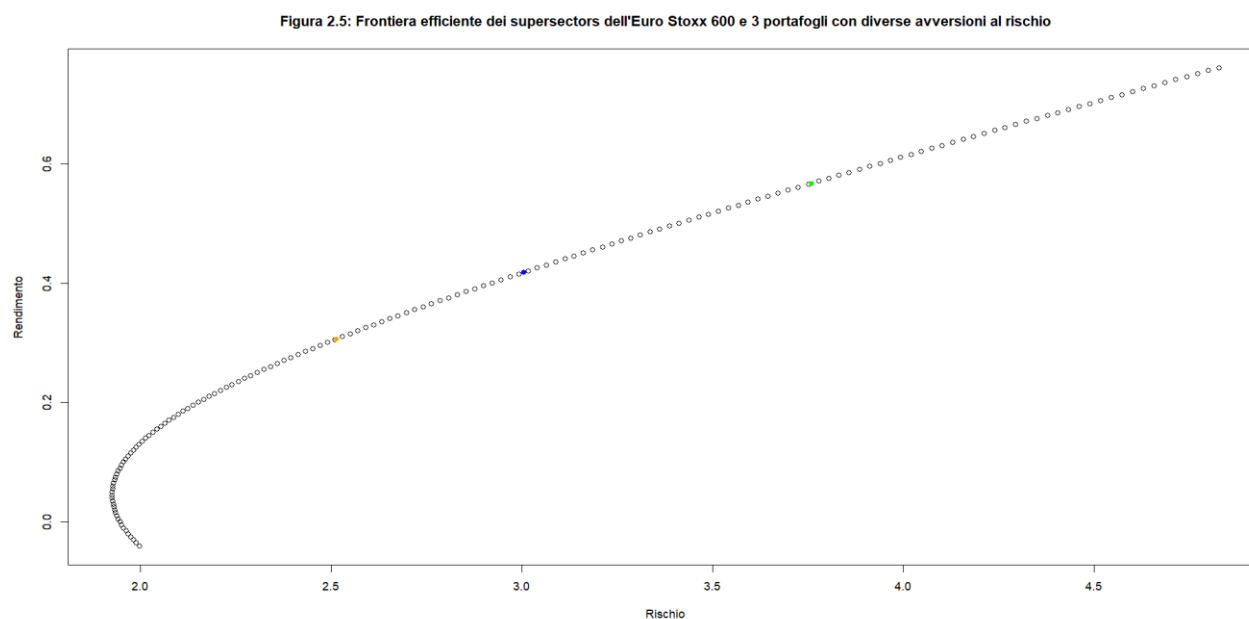


Invece con un rendimento obiettivo settimanale dello 0.5%:



È più varia la composizione dei pesi con rendimento obiettivo settimanale dell'1% perché per ottenere un rendimento maggiore anche il rischio deve essere maggiore.

Vediamo ora dove vanno a collocarsi tre portafogli differenti in base all'avversione al rischio dell'investitore e i rispettivi pesi dei supersectors in questi portafogli.



L'investitore del portafoglio arancione ha un'avversione al rischio pari a 0.1, quello del portafoglio blu dello 0.07 e quello verde dello 0.05. Chiaramente al diminuire dell'avversione al rischio il portafoglio si sposta sempre di più verso destra nella frontiera efficiente perché aumenta la volatilità in base alle preferenze dell'investitore.

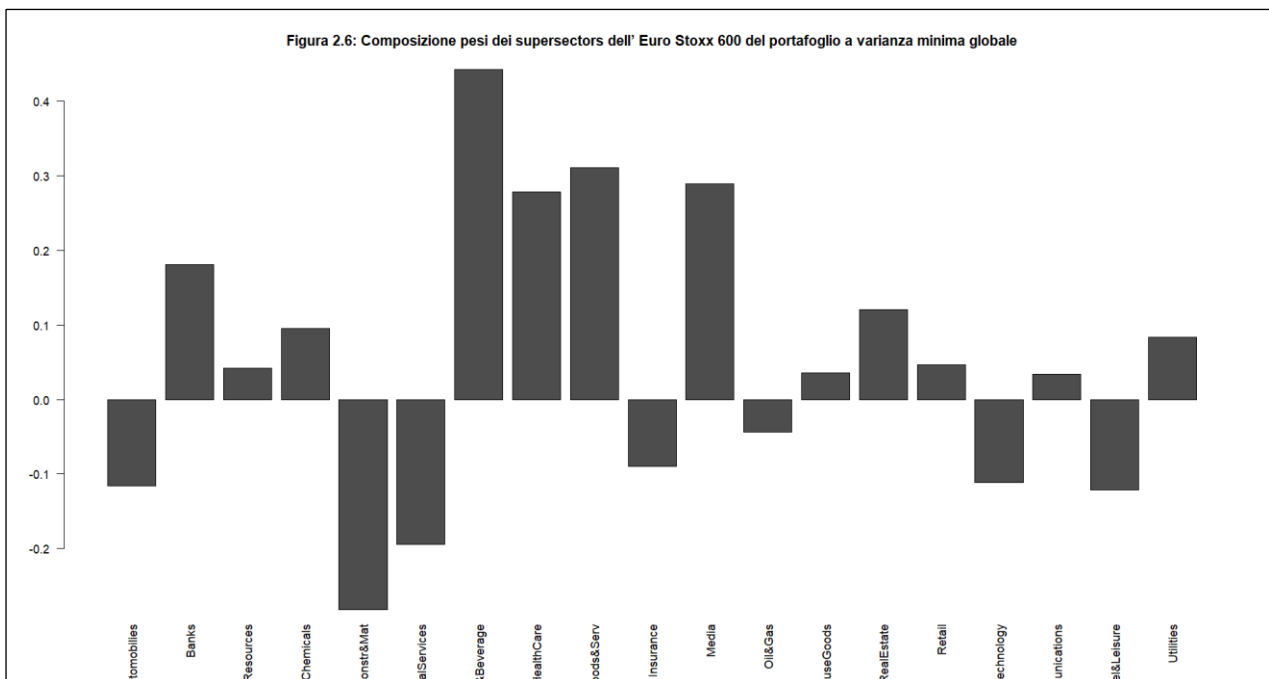
## 2.2: Costruzione di portafogli particolari

Per effettuare le analisi ho deciso di costruire portafogli particolari per trarre delle conclusioni più specifiche anche in presenza d'imposizione di vincoli.

### 2.2.1 Portafoglio a varianza minima globale

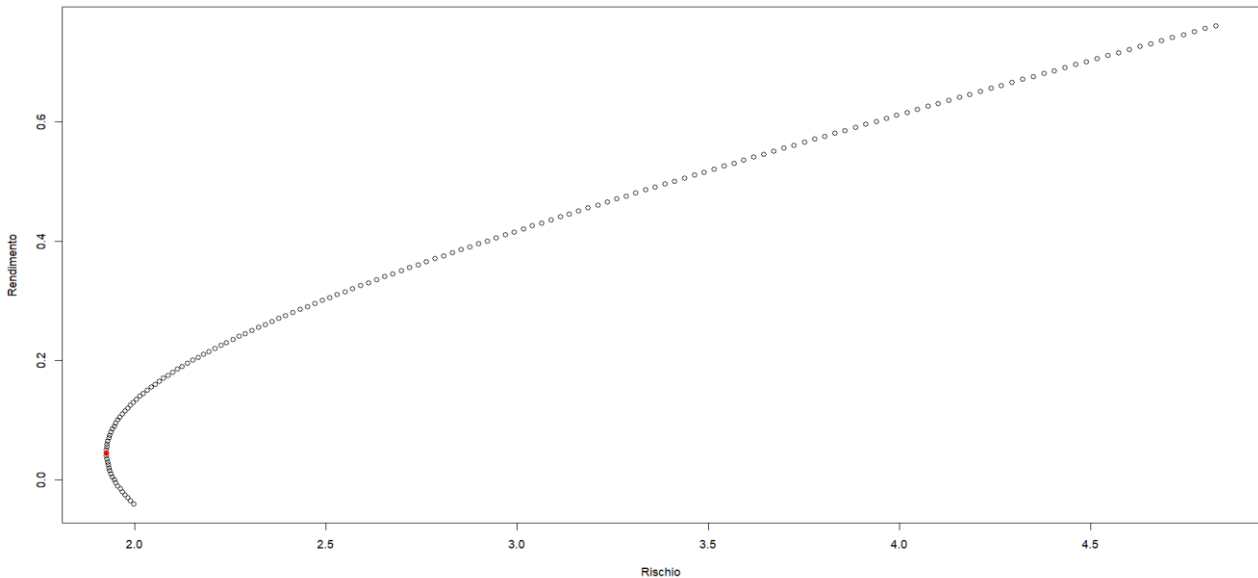
Inizio costruendo il portafoglio a varianza minima globale usando le formule descritte nel paragrafo 1.5. Esso ha rendimento settimanale pari a **0.04513021** e volatilità **1.925921**.

Nel seguente grafico sono indicati i pesi dei supersectors all'interno del portafoglio.



Si nota un'importante dimosogeneità nella distribuzione dei pesi dei supersectors con un'importante evidenza positiva di Food & Beverage e una negativa di Construction & Materials.

Figura 2.7: Frontiera efficiente dei supersectors dell'Euro Stoxx 600 e portafoglio a varianza minima globale



Esso è il portafoglio che offre la varianza minima possibile per un determinato insieme di asset e quindi, come ci si aspettava, si trova nel vertice dell'iperbole, rappresentato dal punto rosso nella figura 2.7.

Successivamente ho creato portafogli inserendo particolari vincoli:

- Pesi positivi (no short selling),
- vincoli con limiti inferiori e superiori di pesi,
- volatilità massima
- turnover (frequenza con cui gli investitori modificano il loro portafoglio)

Per ognuno di essi ho evidenziato in particolare il relativo portafoglio a varianza minima globale e portafoglio di tangenza

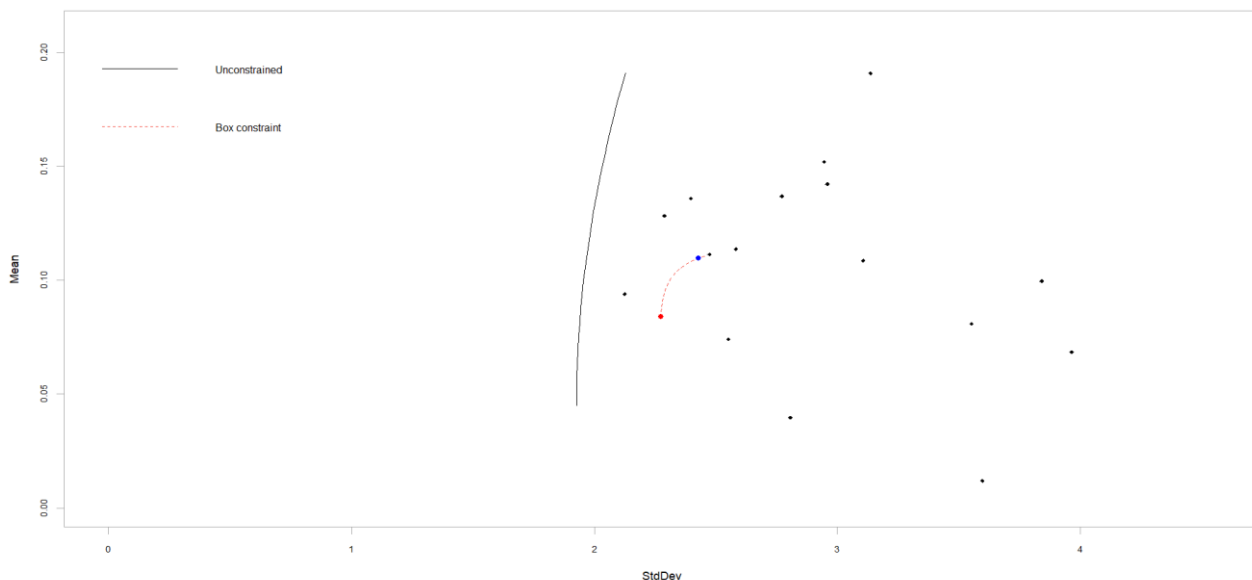




## 2.2.3 Portafoglio con vincolo sui pesi

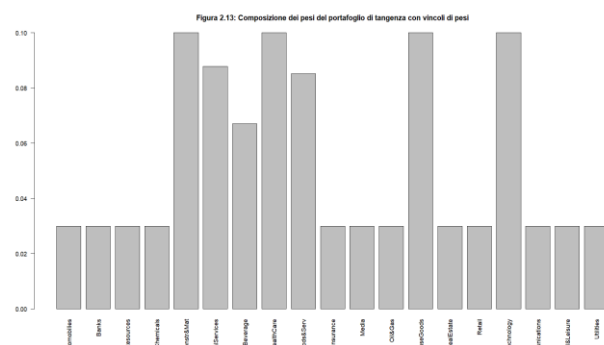
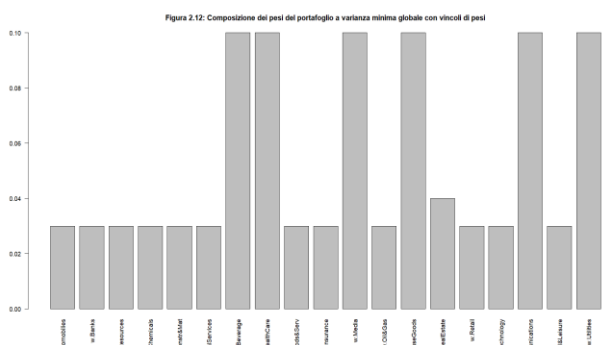
Per quanto riguarda invece vincoli su limiti inferiori e superiori ho imposto come peso minimo 3% e massimo 10%, per avere un portafoglio abbastanza omogeneo:

Figura 2.11: Confronto tra frontiera efficiente vincolata e non vincolata



Si nota facilmente, come ci si aspettava, che in questo caso la frontiera efficiente sia più a destra e molto più stretta rispetto a quella “long only”, questo perché il vincolo è decisamente più ristretto in quanto in precedenza avevo solamente imposto che i pesi fossero tutti maggiori o uguali allo 0%, mentre qui compresi tra 3% e 10%.

Il portafoglio a varianza minima globale e quello di tangenza sono collocati dove ci si aspettava e nei seguenti grafico possiamo vederne i pesi:



Essi hanno rendimento settimanale rispettivamente pari a **0.08391125** e **0.1097314** e volatilità **2.272683** e **2.429059**. E' interessante notare come per entrambi i portafogli la maggior parte dei supersectors ha pesi pari al 3% con aumento fino al 10% per quanto

riguarda Food & Beverage, Health Care, Media, Personal & Household Goods, Telecommunications e Utilities nel portafoglio a varianza minima globale e Construction & Materials, Financial Services, Health Care, Industrial Goods & Services, Personal & Household Goods e Technology nel portafoglio di tangenza.

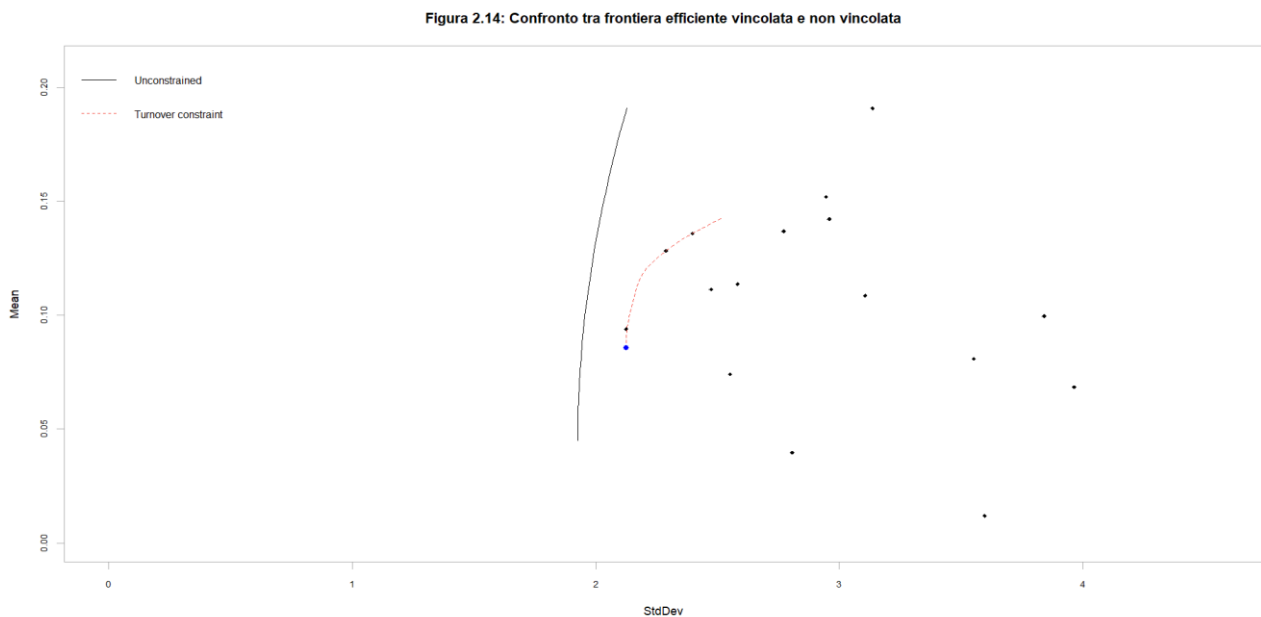
## 2.2.4 Portafoglio long-only con vincolo di volatilità

Se oltre al vincolo “long only” impongo quello di avere una volatilità massima del 10% in un investitore con avversione al rischio pari a 0.5 in una scala che va da 0 a 1, la frontiera efficiente risulta identica a quella con il solo vincolo di positività dei pesi.

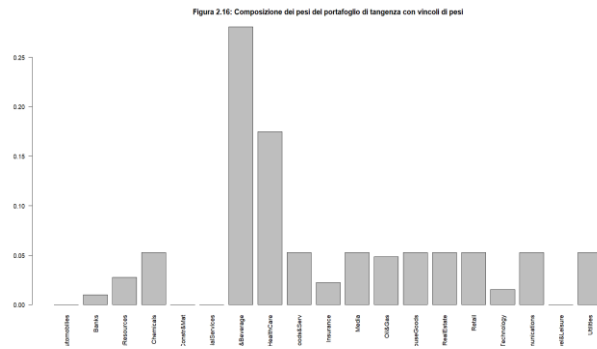
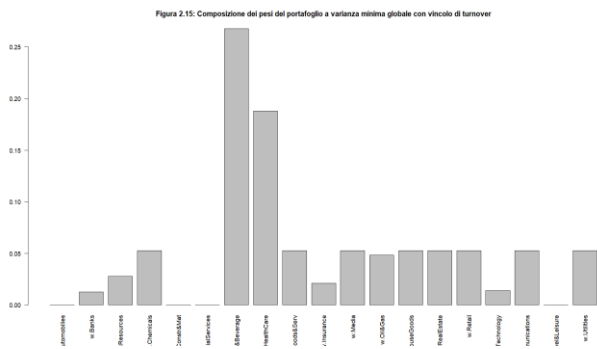
Anche i pesi dei due portafogli sono uguali a quello long-only e necessariamente anche rendimenti e volatilità, quindi le analisi saranno le medesime.

## 2.5.5 Portafoglio long-only con vincolo di turnover

L'ultimo portafoglio in questione è stato costruito con l'ausilio di due vincoli: il solito vincolo “long only” e uno più particolare che consiste nell'imporre il turnover settimanale massimo del 70%. La sua frontiera:



Anche in questo caso la frontiera risulta essere più stretta e più a destra a causa della specificità del vincolo inserito. Risulta interessante notare come con l'imposizione del turnover il portafoglio a varianza minima globale e quello di tangenza coincidano nella frontiera efficiente. Il rendimento settimanale risulta essere pari a **0.08551983** e la volatilità **2.124426**. I pesi di entrambi i portafogli sono riassunti nelle figure 2.15 e 2.16.



Questi due portafogli hanno distribuzione dei pesi molto simile, spiccano in modo evidente Food & Beverage e Health Care e sono molto vicini allo 0% i supersectors Automobiles & Parts, Construction & Materials, Financial Services, Travel & Leisure.

## CAPITOLO 3: Collocazione di fondi ed ETF sulle frontiere efficienti

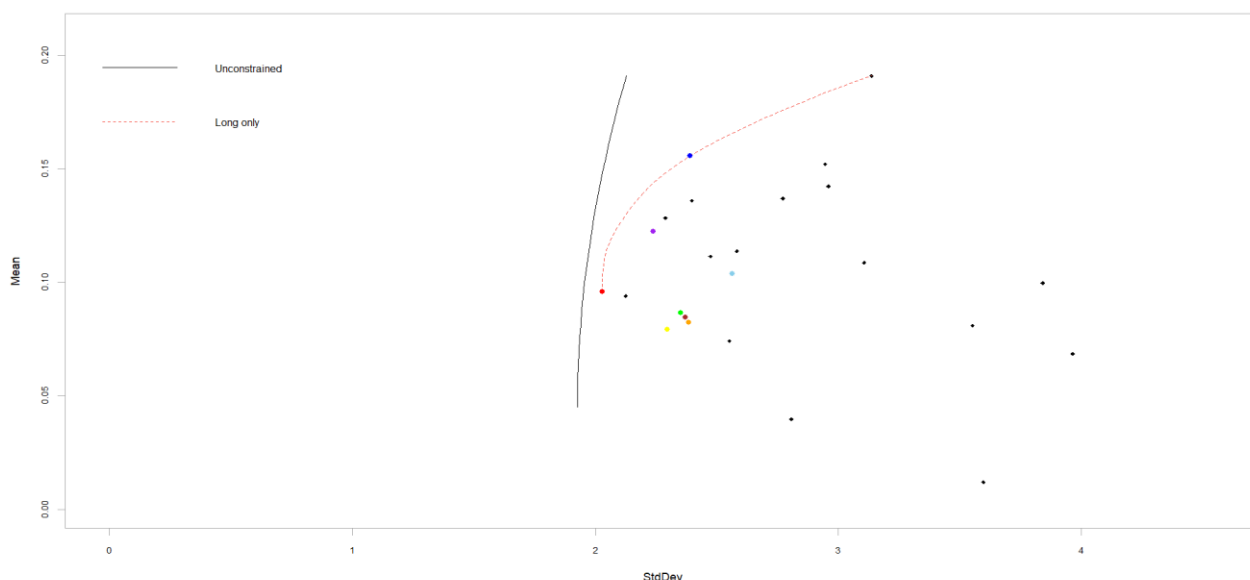
In questo capitolo faremo un raffronto dei risultati ottenuti precedentemente per giungere a delle conclusioni riguardo alla convenienza economica tra gestione attiva o passiva di un portafoglio.

Per le analisi ho confrontato i portafogli creati nel capitolo precedente con l'indice Euro Stoxx 600, con 3 ETF che replicano quest'ultimo, l'Euro Stoxx 50 e l'MSCI Europe e due fondi comuni d'investimento a gestione attiva che utilizzano come benchmark, appunto, l'Euro Stoxx 600 e l'MSCI Europe. Il fondo comune d'investimento che utilizza l'MSCI Europe è Anima Selezione Europa B con rating Quantalys 4 stelle, mentre quello dell'Euro Stoxx 600 è DNCA Invest Value Europe EUR con rating Quantalys 5 stelle.

In ogni figura rappresentante le frontiere efficienti ogni portafoglio è raffigurato da un punto colorato: come anticipato nel capitolo 2 il rosso e il blu rappresentano rispettivamente il portafoglio a varianza minima globale e di tangenza, il verde l'indice Euro Stoxx 600, in arancione l'ETF che lo replica, in giallo quello dell'Euro Stoxx 50, in marrone l'ETF che replica l'MSCI Europe, infine in viola e in azzurro i due fondi comuni d'investimento a gestione attiva.

### 3.1 Portafoglio long-only

Figura 3.1: Confronto tra frontiera efficiente vincolata e non vincolata



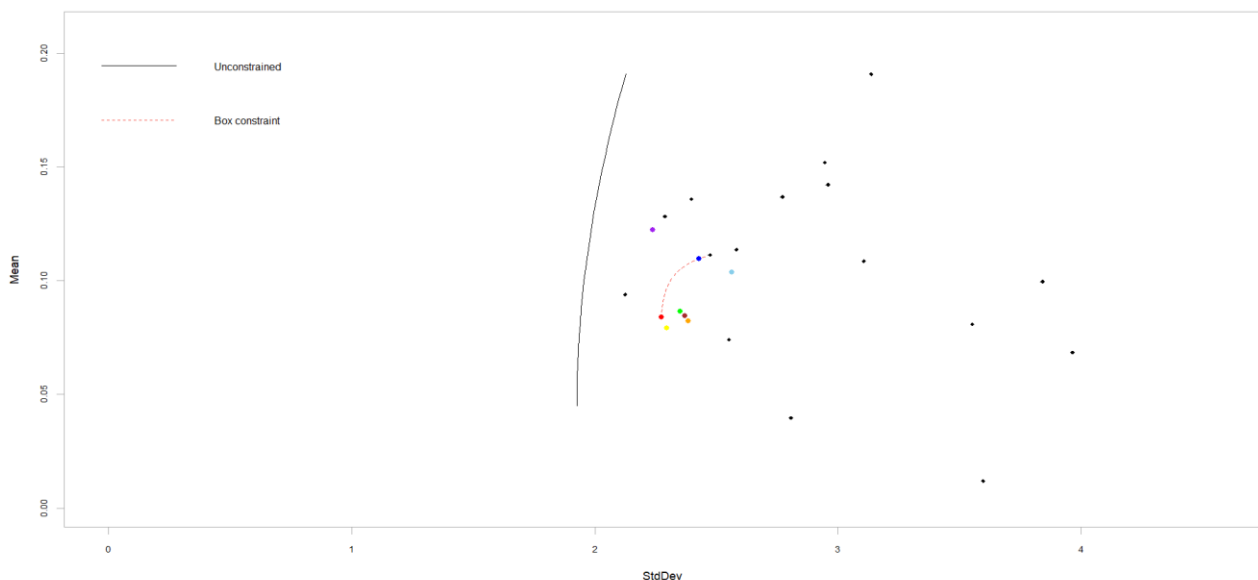
Nel caso di un portafoglio che ha come unico vincolo il "long only", vietando quindi la vendita allo scoperto, possiamo notare come ogni strumento finanziario oggetto dell'elaborato si trovi al di sotto della frontiera efficiente. La gestione attiva seguendo i principi di Markowitz risulta migliore rispetto all'acquisto di fondi comuni o di ETF. Per quanto riguarda gli ETF possiamo

notare che essi si trovano molto vicini tra loro, insieme all'indice Stoxx 600. Il motivo è che i tre indici utilizzati sono molto simili tra loro, in particolare lo Stoxx 600 e l'MSCI Europe. Lo Stoxx 50, avendo al suo interno i 50 titoli a più alta capitalizzazione in Europa, presenti anche in Stoxx 600 e MSCI Europe, li segue senza discostarsi troppo.

Il fondo ANIMA, anche se sotto la frontiera efficiente, batte il benchmark di riferimento, mostrando a parità di rischio un rendimento di molto superiore. Il fondo DNCA ha invece un rendimento migliore rispetto al benchmark ma con una volatilità anch'essa maggiore.

### 3.2 Portafoglio con vincolo sui pesi

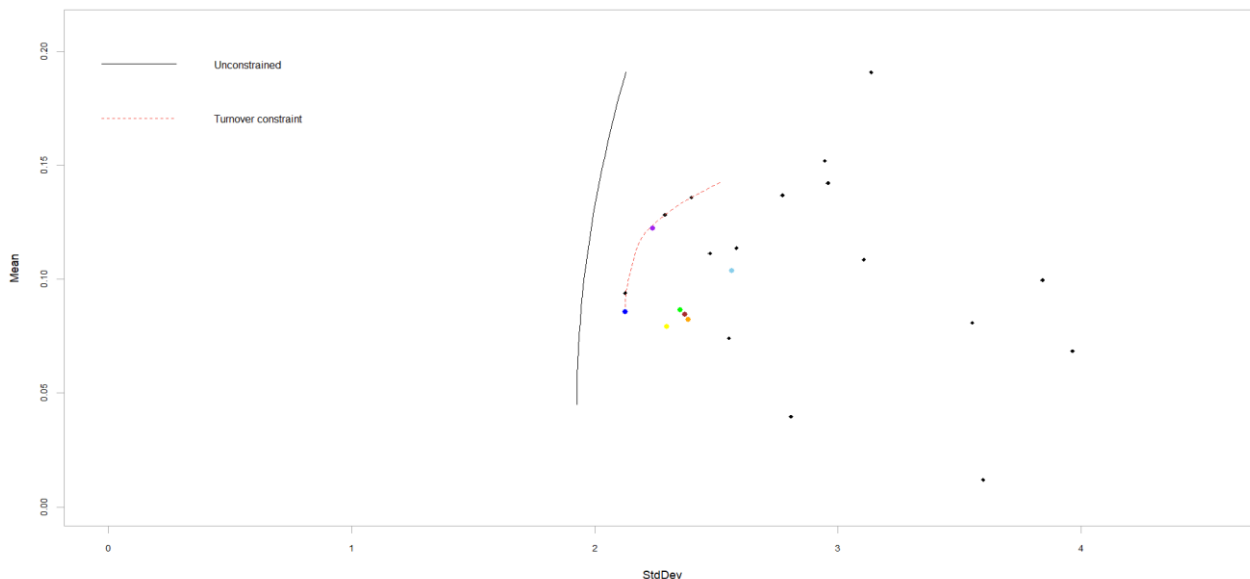
Figura 3.2: Confronto tra frontiera efficiente vincolata e non vincolata



Imponendo un vincolo relativo al peso che ogni supersector deve avere, come abbiamo visto precedentemente, i nostri strumenti finanziari si trovano al di sotto della frontiera efficiente ad eccezione del fondo ANIMA. Il fondo in questione si trova al di sopra delle FE, mostrando, rispetto ai portafogli creati con Markowitz, un maggior rendimento a parità di volatilità. In questo caso vediamo la mano del gestore, il quale, non avendo particolari vincoli a livello di pesi minimi o massimi da utilizzare, può sfruttare opportunità particolari di breve termine più efficacemente.

### 3.3 Portafoglio long-only con vincolo di turnover

Figura 3.3: Confronto tra frontiera efficiente vincolata e non vincolata



In quest'ultimo esempio, è stato inserito il vincolo di turnover massimo del 70% (significa che al massimo il 70% del portafoglio può essere movimentato durante un anno). Anche qui possiamo notare la mano del gestore attivo del fondo ANIMA, il quale si trova quasi sulla frontiera efficiente. Un gestore non ha questi particolari vincoli, e dunque grazie alle opportunità di breve periodo presenti sui mercati e a frequenti movimentazione, può aumentare la performance del proprio fondo.

Per concludere, possiamo notare come, l'utilizzo della teoria di Markowitz per la costruzione dei portafogli, sia migliore, in termini di rendimento e volatilità attesa, rispetto al benchmark di riferimento, lo Stoxx 600, e a benchmark simili come MSCI Europe e Stoxx 50.

### 3.4 Inferenza sull'Indice di Sharpe

L'ultima analisi di questo elaborato riguarda i raffronti tra gli indici di Sharpe dei portafogli vincolati e non vincolati con l'ETF che replica l'Euro Stoxx 600. Ho usato due test per fare inferenza:

- Il test di efficienza che consiste nel verificare l'efficienza di un singolo portafoglio. Si considerano gli indici di Sharpe massimi dei due portafogli:  $Sh_n^* = (\mu_{T,n}^* - r_f) / \sigma_{T,n}^*$  e  $Sh_{n1}^* = (\mu_{T,n1}^* - r_f) / \sigma_{T,n1}^*$ . La statistica test  $\xi_1 = T * \frac{Sh_n^2 - Sh_{(p)}^2}{1 + Sh_{(p)}^2} \sim X^2(n-1)$ . L'ipotesi nulla

è  $H_0: Sh_n = Sh(p)$ . Questo test è stato utilizzato per il confronto tra il portafoglio di tangenza non vincolato e l'ETF dell'Euro Stoxx 600 e dopo aver calcolato gli indici di Sharpe e la statistica test, risulta un p-value pari a 0.8368338. Questo valore porta a un netto non rifiuto dell'ipotesi nulla e ciò conferma l'efficienza del portafoglio di tangenza non vincolato e che le performance non peggiorano utilizzando la gestione attiva.

- Il test di uguaglianza tra due portafogli è stato utilizzato per il confronto tra i portafogli vincolati e l'ETF specificato. L'ipotesi nulla in questo caso è  $H_0: Sh_{p1} = Sh_{p2}$ , la statistica

test è  $\xi_2 = \frac{\sqrt{T}(Sh_{p1}^* - Sh_{p2}^*)}{\sqrt{a}} \sim N(0,1)$  con  $a = (2 - \rho_{12}) + \frac{Sh_{p1}^2}{2} + \frac{Sh_{p2}^2}{2} - Sh_{p1}Sh_{p2}\rho_{12}$  e

$$\rho_{12} = \frac{\omega_1' \Sigma \omega_2}{\sqrt{\omega_1' \Sigma \omega_1 \times \omega_2' \Sigma \omega_2}}$$

La statistica test con riferimento al portafoglio long only misura 1.628961 e porta al non rifiuto di  $H_0$  ossia che i due sono statisticamente equivalenti in termini di indice di Sharpe. Anche negli altri due casi, ossia con vincoli sui pesi e sul turnover è evidente il non rifiuto dell'ipotesi nulla con statistiche test dal valore rispettivamente di 1.477217 e 0.3111014, cioè la gestione attiva non porta a performance peggiori nemmeno nel caso di portafogli vincolati.

## CONCLUSIONI

Risultati alla mano, la costruzione di portafogli attraverso la teoria di Markowitz storicamente risulta la scelta più conveniente. In ogni tipologia di frontiera efficiente creata, i relativi portafogli risultano avere un rapporto rischio rendimento migliore rispetto al benchmark di riferimento. In questo contesto sono stati inseriti due fondi di investimento gestiti attivamente da un gestore; la loro selezione è stata basata sui criteri di: rating, AUM e storicità. Imponendo particolari vincoli restrittivi su pesi, volatilità e turnover si nota che il gestore ha la possibilità di performare meglio sia del benchmark sia della frontiera efficiente creata. Tale risultato dipende dall'abilità di quest'ultimo. Infatti si è visto come il fondo comune Anima Selezione Europa B sia risultato più conveniente dei portafogli della frontiera efficiente con vincoli inferiori e superiori sui pesi e circa uguale a quelli creati con vincolo di turnover.

Che spunti possono dare queste conclusioni a un investitore? Sicuramente l'acquisto di un ETF che replica passivamente il mercato può essere una scelta semplice e profittevole, si nota però che esistono strategie migliori. Una di queste è l'utilizzo di fondi comuni d'investimento a gestione attiva. In questo caso, però, l'universo di scelta è molto ampio e non tutti i fondi riescono a ottenere una performance pari o superiore a quella del benchmark. Dalla ricerca SPIVA, condotta dalla società di rating Standard & Poor's risulta che tenendo in considerazione gli anni dal 2012 al 2022 solamente il 10.3% dei fondi d'investimento ha sovraperformato il benchmark di riferimento (in questo caso l' S&P Europe 350). La difficoltà, quindi, di questa soluzione è rappresentata dalla corretta scelta del fondo. Infine si può utilizzare la teoria di Markowitz, la cui efficienza è stata dimostrata in questo elaborato. La difficoltà nell'utilizzare questa soluzione è legata all'attività di investimento nei singoli supersectors seguendo i pesi indicati da questa teoria. In questo caso possono essere utili gli ETF che vanno a replicare l'indice di riferimento del singolo supersector, in modo da creare un indice personalizzato seguendo il modello di Markowitz.



## BIBLIOGRAFIA

- Berk J., DeMarzo P., Finanza aziendale 1 Fondamenti, Pearson, Quarta edizione, 2018.
- Materiale didattico del corso di Economia dei Mercati Finanziari
- Materiale didattico del corso di Metodi Statistici per la Finanza
  
- Borsa italiana, Cos'è un ETF  
<https://www.borsaitaliana.it/etf/formazione/cosaeunetf/coseunetf.htm>
- Borsa italiana, ETC ed ETN  
<https://www.borsaitaliana.it/etc-etn/formazione/cosaeunetc.htm>
- Consob, I fondi comuni  
<https://www.consob.it/web/investor-education/i-fondi-comuni>
- Economia per tutti, Harry Markowitz, 29-06-2023  
<https://economiepertutti.bancaditalia.it/notizie/harry-markowitz-premio-nobel-per-l-economia-ci-ha-lasciato-la-scorsa-settimana/>
- Investopedia, Exchange-Traded Fund (ETF) Explanation With Pros and Cons, 22-06-2023  
<https://www.investopedia.com/terms/e/etf.asp>
- JustETF
- <https://www.justetf.com/it/find-etf.html>
- PortfolioAnalytics: Portfolio Analysis, Including Numerical Methods for Optimization of Portfolios, 1-05-2019  
[https://rdr.io/cran/PortfolioAnalytics/src/demo/demo\\_max\\_Sharpe.R](https://rdr.io/cran/PortfolioAnalytics/src/demo/demo_max_Sharpe.R)
- Quantalys
- <https://www.quantalys.it/>
- S&P Global  
<https://www.spglobal.com/spdji/en/research-insights/spiva/>