

UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
DI PADOVA

# UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

**Evoluzione cosmologica dell’entropia gravitazionale in  
presenza di strutture su grande scala**

**Relatore**

**Prof. Sabino Matarrese**

**Laureando**

**Daniele Defrancesco**

**Anno Accademico 2021/2022**

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione matematica</b>	<b>3</b>
1.1	Modellizzazione dell'universo . . . . .	3
1.2	Foliazione e tensori . . . . .	4
1.3	Media di grandezze fisiche . . . . .	5
1.4	Disomogeneità scalari . . . . .	6
1.5	Perturbazioni lineari e gauge . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Espressioni dell'entropia</b>	<b>9</b>
2.1	Entropia HBM . . . . .	9
2.2	Entropia CET . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Evoluzione dell'entropia</b>	<b>13</b>
3.1	Universo Einstein-de Sitter . . . . .	14
3.2	CDM e $\Lambda$ CDM . . . . .	16
3.2.1	Entropia gravitazionale HBM . . . . .	16
3.2.2	Entropia gravitazionale CET . . . . .	17
3.3	Congettura no-hair . . . . .	18
3.4	Conclusioni . . . . .	21
<b>4</b>	<b>Appendice</b>	<b>22</b>
4.1	Epoche dell'universo . . . . .	22

The law that entropy always increases holds, I think, the supreme position among the laws of Nature. If someone points out to you that your pet theory of the universe is in disagreement with Maxwell's equations – then so much the worse for Maxwell's equations. If it is found to be contradicted by observation – well, these experimentalists do bungle things sometimes. But if your theory is found to be against the second law of thermodynamics I can give you no hope; there is nothing for it but to collapse in deepest humiliation.

---

*The Nature of the Physical World*  
SIR ARTHUR STANLEY EDDINGTON

## Introduzione

Una delle domande chiave in cosmologia sta nel come definire l'entropia del campo gravitazionale: una definizione soddisfacente esiste nel caso di un buco nero stazionario ma un analogo cosmologico applicabile universalmente deve essere ancora trovato.

Questa lacuna è un problema importante in quanto, in presenza di un campo gravitazionale, la normale proposizione riguardo l'andamento della distribuzione di materia, che diviene asintoticamente costante è platealmente falsa. Al contrario, avviene la formazione spontanea di strutture quando l'attrazione gravitazionale domina la dinamica. Questo comportamento è cruciale nella nascita di strutture complesse nell'universo, tra cui la vita stessa.

La domanda nasce quindi spontanea: come può l'evoluzione di un sistema in presenza di interazioni gravitazionali essere compatibile con la seconda legge della termodinamica? L'unico modo per spiegare la presenza di strutture peculiari "poco probabili" nell'universo è che, se il secondo principio della termodinamica è valido in presenza della gravità, il campo gravitazionale debba farsi carico del "pegno" entropico creato dalle stesse. Quindi, debba intrinsecamente trasportare dell'entropia.

Negli anni 80 dello scorso secolo Roger Penrose postulò la cosiddetta *Ipotesi della curvatura di Weyl* basata sulla credenza che l'universo evolva a partire da uno stato quasi-FLRW a curvatura di Weyl ( $C_{\mu\nu\lambda\rho}C^{\mu\nu\lambda\rho}$ ) nulla, verso un universo freddo composto da una collezione di buchi neri nel quale tale curvatura è dominante. L'ipotesi, chiamata anche congettura di Penrose, mette in luce la possibile relazione tra curvatura di Weyl, freccia del tempo ed entropia. Nel corso dell'elaborato saranno quindi esposte due definizioni candidate per questa entropia gravitazionale, mettendo particolarmente l'accento sul loro rapporto con il tensore di Weyl e la sua curvatura.

Nel primo capitolo sono presentati tutti gli strumenti matematici necessari alla comprensione e trattazione del corpus dell'elaborato.

Il secondo capitolo è dedicato all'esposizione delle due definizioni candidate, ponendo particolare attenzione all'argomentazione fisica e logica ed alla derivazione della prima delle due. In entrambi i casi è stato sottolineato il rapporto tra le suddette e la congettura di Penrose.

Infine, nel terzo capitolo, sono presentati gli andamenti in funzione del tempo delle formule precedentemente discusse in tre contesti differenti, sempre in approssimazione di polvere. I tre modelli considerati sono: il caso relativamente semplice di un universo del tipo Einstein-de Sitter, il caso di un universo CDM e  $\Lambda$ CDM in un contesto di strutture su grande scala e, tramite una simulazione numerica, il caso di un universo CDM e  $\Lambda$ CDM non più in contesto di strutture su grande scala; in modo da mettere in luce l'apparente incompatibilità tra l'*ipotesi della curvatura di Weyl* e la congettura *no-hair*.

Nell'appendice sono esposte alcune delucidazioni inerenti alle diverse epoche durante le quali si presenta dominazione nell'espansione dell'universo da parte di una certa componente dello stesso rispetto alle altre. Esse necessarie per la completa comprensione delle argomentazioni del terzo capitolo.

# Capitolo 1

## Introduzione matematica

In questo capitolo saranno esposti tutti i concetti fisici e matematici necessari per la "costruzione" di una formula per l'entropia gravitazionale e per la valutazione della sua evoluzione in presenza di strutture su grande scala. In particolare, è necessario definire lo "spazio ambiente" su cui la trattazione poggia le sue fondamenta, nel nostro caso la metrica di Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW).

Una volta presentata la plancia sulla quale si sviluppano i fenomeni trattati, saranno presentati: i tensori in gioco, alcune precisazioni di natura matematica per il calcolo di medie di grandezze fisiche, un'importante caratteristica dell'evoluzione di queste grandezze medie, un'introduzione alla teoria delle perturbazioni lineari al primo ordine ed il problema della gauge in cosmologia.

Si noti che durante tutto l'elaborato verrà posto  $c = 1$  e sarà usata la convenzione *mostly positive*  $(-, +, +, +)$ .

### 1.1 Modellizzazione dell'universo

Secondo la teoria della relatività generale esiste un'intima connessione tra la distribuzione di energia, o meglio, della densità di energia, e la forma dello spaziotempo. «*Lo spaziotempo dice alla materia come muoversi; la materia dice allo spaziotempo come curvarsi.*» (John Archibald Wheeler). Questa relazione è elegantemente descritta da una singola equazione tensoriale, detta equazione di campo di Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi D}{c^4}T_{\mu\nu}.$$

Per quanto elegante questa raccolta di 16 equazioni differenziali non lineari possa essere, non presenta né un modello semplice dal punto di vista pratico, né fornisce un qualche indizio sull'effettiva curvatura e distribuzione di energia del nostro universo. In particolare, le poche soluzioni analitiche fanno uso di simmetrie che diminuiscono drasticamente i gradi di libertà della metrica finale, semplificandone di molto la forma.

Bisogna quindi partire da una base sperimentale per capire quale sia la reale distribuzione di energia nel nostro universo e sperare che essa sia abbastanza simmetrica da fornirci una semplice soluzione, anche approssimata, alle equazioni di Einstein. Fortunatamente le cose stanno proprio così; in prima approssimazione, sperimentalmente possibile sostenere la validità del cosiddetto principio cosmologico.

***Principio cosmologico:** osservando l'universo in un sistema di riferimento stazionario rispetto alla radiazione cosmica di fondo ed usando una scala di distanze abbastanza grande esso appare omogeneo e isotropo.*

Partendo da questa proposizione Aleksandr Aleksandrovič Fridman e Georges Lemaître trovarono, durante gli anni 20 dello scorso secolo in modo indipendente, una soluzione esatta alle equazioni di

campo di Einstein. Essa fu poi ulteriormente studiata dallo statunitense Howard Percy Robertson e dal britannico Arthur Geoffrey Walker negli anni '30. Tale metrica prende quindi il nome dai quattro fisici (FLRW per brevità). In un tale universo il tensore curvatura  $R_{\mu\nu\lambda\rho}$  deve essere costante in tutti i punti dello spazio ed uguale in tutte le sue componenti spaziali. Si può quindi, per facilità di visualizzazione, abbassare la dimensione lo spaziotempo e chiedersi quali siano le varietà immerse con curvatura costante ed isotropica.

Si può osservare che tutte e sole le geometrie "semplicemente connesse" che soddisfano questa richiesta sono quella sferica, piatta e iperbolica; moltiplicate per un opportuno fattore di scala dipendente dal tempo uguale per ogni direzione spaziale. La metrica di tali spazi in coordinate sferiche ridotte risulta quindi essere:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \frac{dr^2}{1 - k^2 r^2} + r^2 d\Omega^2 \quad \text{con} \quad k = \begin{cases} +1 \\ 0 \\ -1 \end{cases} \quad (1.1)$$

Questo tipo di universo presenta omogeneità e isotropicità su tutte le scale di grandezza. Tale fatto è però smentito da evidenze sperimentali anche utilizzando scale di distanze con una risoluzione dell'ordine di 100 Mpc ( $\simeq 300 \times 10^6$  anni luce). Un esempio di ciò sono le disomogeneità della radiazione cosmica di fondo che evidenziano la differenza tra l'universo reale e uno perfettamente aderente al principio cosmologico. Si considera quindi tale modello come un punto di partenza per la descrizione di un universo quasi-FLRW descritto da una versione perturbata della metrica.

## 1.2 Foliatura e tensori

In cosmologia la distribuzione di materia ed energia permette una scelta fisicamente motivata di un campo di 4-velocità preferenziale dell'osservatore. Per esempio, si potrebbe usare il sistema di riferimento in quiete rispetto alla CMB nel quale svanisce il dipolo della radiazione, oppure il campo di velocità nel quale la densità del momento totale si annulla in tutte le sue componenti. Questa decisione corrisponde alla scelta di una famiglia di linee di universo, tramite la quale è possibile effettuare una divisione dello spaziotempo in ipersuperfici parametrizzate da un campo scalare (per esempio il tempo proprio di ogni linea) in modo da foliare lo spazio tempo in configurazione 1+3 dimensionale.

Durante tutta la trattazione sarà considerata una foliazione dello spaziotempo in ipersuperfici di tipo spazio, perpendicolari alla quadrivelocità di un osservatore in moto solidale con le particelle del fluido [6]. Questo ci permetterà di definire un sistema di coordinate comoventi  $(s, y^i)$ . Dopo aver effettuato una divisione del tipo 3+1 del nostro spaziotempo, possiamo proiettare tutti i tensori sull'ipersuperficie indotta dalla foliazione usando il proiettore, che altri non è che il tensore metrico ristretto alla stessa [5]:

$$h_{ab} = g_{ab} + u_a u_b \quad \text{con} \quad h^a_b h^b_c = h^a_c, \quad h^a_a = 3, \quad h^a_b u^b = 0 \quad (1.2)$$

A questo punto siamo in grado di definire il *vettore connettore* tra due particelle di fluido per "piccoli spostamenti":

$$\beta^\mu = \left( \frac{\partial x^\mu}{\partial y^i} \right)_{s=const} \delta y^i \quad (1.3)$$

Esso non è in generale perpendicolare alle linee di fluido considerate; può quindi rappresentare una traslazione sia spaziale che temporale. Inoltre, come accennato nella sua definizione, rappresenta un'approssimazione per piccole variazioni di linea rispetto alla curvatura della varietà, in modo da approssimare bene la distanza lungo la curva appartenente all'ipersuperficie.

Per ovviare al primo problema, si considera la proiezione sulla foliazione del vettore connessione. Tale proiezione è definita come il *vettore posizione relativa*.

È ora possibile definire la velocità relativa tra due particelle come la proiezione ortogonale su  $u^a$  della derivata temporale del vettore posizione relativa, definita come:

$$v^a = v^{\langle a \rangle} = h^a{}_b u^d \nabla_d (h^b{}_c \beta^c) = V^a{}_b \beta^{\langle b \rangle} = \dot{\beta}^{\langle a \rangle} \quad (1.4)$$

$$\text{con } \beta^{\langle b \rangle} = h^b{}_c \beta^c, \quad V_{ab} := h_a{}^c h_b{}^d \nabla_d u_c \quad (1.5)$$

si è poi in grado di dividere  $V_{ab}$  nelle sue componenti simmetriche ed anti-simmetriche:

$$V_{ab} = V_{(ab)} + V_{[ab]} = \Theta_{ab} + \omega_{ab}, \quad (1.6)$$

dove  $\Theta_{ab}$  è detto tensore di espansione e  $\omega_{ab}$  tensore di vorticità. È poi possibile prendere la proiezione simmetrica senza traccia (PSTF) di  $\Theta_{ab}$ ,  $\sigma_{ab}$  detto tensore di taglio, e la sua traccia,  $\Theta$ , detto scalare d'espansione volumetrica.

$$\Theta_{ab} = \Theta_{(ab)} + \frac{1}{3} \Theta^c{}_c h_{ab} \equiv \sigma_{ab} + \frac{1}{3} \Theta h_{ab} \quad (1.7)$$

Questa collezione di tensori permette la trattazione fluidodinamica delle particelle, dividendo il moto in: componente rotazionale, di espansione volumetrica e distorsione. Notiamo infine, che per costruzione della foliazione come ortogonale al flusso delle particelle di fluido, la componente antisimmetrica di  $V_{ab}$ , ossia  $\omega_{ab}$ , deve per forza svanire.

$$\omega_{ab} = 0. \quad (1.8)$$

Si assume che questa sia una buona approssimazione in quanto la vorticità tende a zero con l'espandersi dell'universo.

### 1.3 Media di grandezze fisiche

La trattazione della formula dell'entropia a partire dalla divergenza di Kullerback-Leibler si basa fondamentalmente sulla non commutabilità tra l'operazione di media ed evoluzione temporale di un campo scalare (nel nostro caso della densità di energia). È intuitivo pensare che, mentre un universo con densità costante, pari alla media della densità d'energia effettuata su un certo dominio, evolva tramite una pura espansione, un universo perturbato evolva in maniera differente e presenti una media della densità di energia differente dall'evoluzione del primo.

Questa discrepanza dipende dal modo in cui andiamo ad effettuare la media, in particolare dal tipo di dominio che prendiamo in considerazione. Generalmente in cosmologia il dominio sul quale vengono mediate le osservabili è il cono di luce passato. Ma, poiché nel nostro caso l'obbiettivo è la determinazione dell'entropia all'interno di un'ipersuperficie a redshift costante, esso non sembra essere soddisfacente. Sarà quindi presa in considerazione una procedura di media su di un dominio differente: le ipersuperfici comoventi della foliazione esposta nella sezione precedente. La media su tali ipersuperfici risulta essere un classico primo momento integrato su una varietà con elemento di volume derivante dalla metrica della stessa [6]:

$$\langle A(\eta, \mathbf{x}) \rangle_D = \frac{1}{V_D} \int_D \sqrt{|h|} A(\eta, \mathbf{x}) d^3 \mathbf{x} \quad (1.9)$$

dove  $|h|$  è il determinante della metrica indotta dalla foliazione sull'ipersuperficie ( $h_{ab}$ ) e  $V_D$  è il volume del dominio di integrazione che soddisfa  $\langle 1 \rangle_D = 1$ . Da notare che questo tipo di media può essere generalmente espanso in serie attorno alla media euclidea  $\langle \dots \rangle$ .

## 1.4 Disomogeneità scalari

Oltre alla classica trattazione statistica dell'entropia come volume dello spazio delle fasi occupato da una data configurazione macroscopica, essa può essere anche generalmente interpretata come una misura dell'informazione contenuta nel sistema. In particolare, partendo dalla divergenza di Kullerback-Leibler di due densità di probabilità  $p$  e  $q$  [7]

$$D_{KL}\{p||q\} := \sum_i p_i \ln \frac{p_i}{q_i}, \quad (1.10)$$

è possibile definire un analogo funzionale che quantifichi la differenza tra il reale campo di densità e la sua media, effettuata su di un dominio  $D$  di volume  $V_D$ , ed ipotizzare una connessione con questa grandezza e l'entropia gravitazionale.

$$\frac{S_D\{\rho||\langle\rho\rangle_D\}}{V_D} := \frac{1}{M_{Pl}} \left\langle \rho \ln \frac{\rho}{\langle\rho\rangle_D} \right\rangle_D \quad (1.11)$$

con  $M_{Pl}^{-2} = 8\pi G$ . Questo tentativo di formulazione dell'entropia gravitazionale non deve essere inteso come assiomatico ed è derivabile a partire dalla non commutabilità tra la media di un campo scalare e la sua evoluzione temporale. Nel nostro caso specifico è possibile osservare che, in generale, la media dell'evoluzione temporale di una distribuzione di massa differisce dall'evoluzione della media della stessa.

$$\langle \dot{\rho} \rangle_D - \dot{\langle \rho \rangle}_D \neq 0 \quad (1.12)$$

Scrivendo: l'equazione di continuità  $\nabla_a T^{ab} = 0$  nel semplice caso di un fluido irrotazionale  $\omega_{ab} = 0$  e a pressione nulla  $p = T_{ii} = 0$  e la regola per la commutazione dell'evoluzione temporale con la media su un campo scalare [2] in un universo FLRW usando i tensori sopra descritti, si trova che

$$\langle \dot{A} \rangle_D - \dot{\langle A \rangle}_D = \langle A\Theta \rangle_D - \langle A \rangle_D \langle \Theta \rangle_D \quad (1.13)$$

$$\Rightarrow \langle \dot{\rho} \rangle_D - \dot{\langle \rho \rangle}_D = \langle \rho\Theta \rangle_D - \langle \rho \rangle_D \langle \Theta \rangle_D = \langle \delta\rho \delta\Theta \rangle_D. \quad (1.14)$$

Dove  $\delta A = A - \langle A \rangle$ . È possibile avanzare l'ipotesi che, la differenza tra l'evoluzione del campo mediato, anche detto di *background*, della densità di energia e l'evoluzione del campo originale successivamente mediato (1.12) possa essere la causa della produzione di entropia del campo gravitazionale libero. Cercando un funzionale che operi in maniera analoga è interessante osservare che la risposta sia proprio la divergenza di Kullerback-Leibler (1.11).

$$\begin{aligned} M_{Pl} \dot{S}_D\{\rho||\langle\rho\rangle_D\} &= \frac{d}{dt} V_D \left\langle \left( \rho \ln \frac{\rho}{\langle\rho\rangle_D} \right) \right\rangle_D = \frac{d}{dt} \int_D \rho \ln \frac{\rho}{\langle\rho\rangle_D} \sqrt{h} d^3\mathbf{x} \\ &= \int_D \dot{\rho} \ln \frac{\rho}{\langle\rho\rangle_D} \sqrt{h} d^3\mathbf{x} + \int_D \rho \frac{\langle\dot{\rho}\rangle_D}{\rho} \frac{1}{\langle\rho\rangle_D} \dot{\rho} \sqrt{h} d^3\mathbf{x} - \int_D \rho \frac{\langle\dot{\rho}\rangle_D}{\rho} \frac{\rho}{\langle\rho\rangle_D^2} \langle\dot{\rho}\rangle_D \sqrt{h} d^3\mathbf{x} + \int_D \rho \ln \frac{\rho}{\langle\rho\rangle_D} \left( \frac{d\sqrt{h}}{dt} \right) d^3\mathbf{x} \\ &\stackrel{(a)}{=} \int_D (-\Theta\rho) \ln \frac{\rho}{\langle\rho\rangle_D} \sqrt{h} d^3\mathbf{x} + \int_D \rho \frac{\langle\dot{\rho}\rangle_D}{\rho} \frac{1}{\langle\rho\rangle_D} \dot{\rho} \sqrt{h} d^3\mathbf{x} - \int_D \rho \frac{\langle\dot{\rho}\rangle_D}{\rho} \frac{\rho}{\langle\rho\rangle_D^2} \langle\dot{\rho}\rangle_D \sqrt{h} d^3\mathbf{x} + \int_D \rho \ln \frac{\rho}{\langle\rho\rangle_D} \Theta \sqrt{h} d^3\mathbf{x} \\ &= \int_D \dot{\rho} \sqrt{h} d^3\mathbf{x} - \frac{\langle\dot{\rho}\rangle_D}{\langle\rho\rangle_D} \int_D \rho \sqrt{h} d^3\mathbf{x} = V_D \left( \langle\dot{\rho}\rangle_D - \dot{\langle\rho\rangle}_D \right) \\ &\langle\dot{\rho}\rangle_D - \dot{\langle\rho\rangle}_D = -\frac{\dot{L}}{V_D} = -\frac{M_{Pl} \dot{S}_D\{\rho||\langle\rho\rangle_D\}}{V_D} \end{aligned} \quad (1.15)$$

Dove in (a) è stata usata l'equazione di continuità per un fluido a pressione nulla ( $\dot{\rho} + \theta\rho = 0$ ) ed il fatto che l'unico contributo all'espansione volumetrica nel nostro caso sia espresso dallo scalare d'espansione ( $\frac{d}{dt}\sqrt{h}d^3\mathbf{x} = \Theta\sqrt{h}d^3\mathbf{x}$ ).

## 1.5 Perturbazioni lineari e gauge

Nello scrivere la più generica perturbazione del tensore metrico della metrica FLRW in tempo conforme tenendo conto della della foliazione 3+1 introdotta precedentemente, è possibile scrivere: [5]

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu} \quad \text{con} \quad \bar{g}_{\mu\nu} = a^2 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \gamma_{ij} \end{pmatrix} \quad (1.16)$$

dove  $\gamma_{ij}$  è il tensore metrico dell'ipersuperficie di curvatura costante  $R$  e  $\delta g_{\mu\nu}$  è la perturbazione al primo ordine della metrica. Senza perdita di generalità tale perturbazione può essere scomposta in termini di tipo scalare, vettoriale o tensoriale.

Nella fattispecie, i termini scalari, così chiamati poiché emergenti da quantità scalari, eventualmente combinate a delle quantità di *background* come il tensore  $\gamma_{ij}$ , o dalle loro derivate, agiscono come:

$$\delta g_{00} = -2a^2\phi, \quad \delta g_{0i} = a^2 B_{|i}, \quad \delta g_{ij} = -2a^2(\psi\gamma_{ij} - E_{|ij}), \quad (1.17)$$

dove si denota con una barra verticale la derivata covariante in direzione  $x_i$ . Perturbazioni di tipo vettoriale devono essere costruite a partire da quantità 3-vettoriali e non essere ridondanti rispetto le perturbazioni di componente scalare. Nello specifico, devono essere costruiti a partire da vettori solenoidali ( $\nabla v = 0$ ), poiché il caso di vettori irrotazionali o longitudinali è già coperto da  $B_{|i}$  ( $B_{|ij} = 0$ ), e non devono possedere parte scalare. La più generale componente vettoriale della perturbazione alla metrica risulta quindi essere:

$$\delta g_{0i} = -a^2 S_i, \quad \delta g_{ij} = 2a^2 F_{(i|j)}. \quad (1.18)$$

Allo stesso modo i termini tensoriali non devono essere ottenibili da applicazioni di operazioni differenziali a vettori e scalari. Devono quindi essere simmetrici e a traccia e divergenza nulla.

$$\delta g_{ij} = 2a^2 h_{ij} \quad \text{con} \quad h_{[ij]} = 0 = \gamma^{ij} h_{ij} = \gamma^{jk} h_{ij|k} = 0. \quad (1.19)$$

A questo punto è possibile scrivere la generica perturbazione lineare delle componenti non nulle del tensore metrico come:

$$\delta g_{\mu\nu} = a^2 \begin{pmatrix} -2\phi & B_{|i} - S_i \\ B_{|i} - S_i & 2E_{|ij} - 2\psi\gamma_{ij} + 2F_{i|j} + h_{ij} \end{pmatrix}. \quad (1.20)$$

Nel definire una perturbazione abbiamo la possibilità di scegliere implicitamente una gauge, tale gauge è la mappa che associa punti dello spaziotempo FLRW di background a punti dello spaziotempo perturbato fisicamente rilevante. La scelta di questa mappa punto a punto tra le due varietà è non unica e non banale, poiché i tensori definiti sullo spaziotempo perturbato possono in generale risentire della scelta di gauge. L'unico caso in cui la perturbazione di un tensore è indipendente dalla scelta di gauge è nel caso di scalari costanti nello spazio non perturbato o tensori che svaniscono nello stesso. Fortunatamente grazie alle simmetrie del modello FLRW usato in background, ogni tensore che descrive una disomogeneità o anisotropia spaziale svanisce in tale contesto, non presentando quindi una dipendenza dalla scelta di gauge. Da questo momento in poi sarà adottata la cosiddetta *gauge sincrona* la quale annulla le perturbazioni delle componenti temporali della metrica ( $B = S_i = 0$ ). Inoltre saranno trascurate perturbazioni tensoriali e vettoriali ( $S_i = F_i = h_{ij} = 0$ ).

$$\Rightarrow ds^2 = a^2 \{-d\eta^2 + [(1 - 2\phi)\gamma_{ij} + E_{|ij}]dx^i dx^j\} \quad (1.21)$$

È infine introdotta una quantità gauge-indipendente che sarà in seguito usata nella generalizzazione del capo gravitazionale: il potenziale di Bardeen.

$$\Phi = \phi - H\sigma - \sigma' \quad \text{con} \quad \sigma = E' - B \quad (1.22)$$

Dove il "primo" denota la derivata rispetto al tempo conforme  $\eta$ .

## Capitolo 2

# Espressioni dell'entropia

### 2.1 Entropia HBM

Come visto nel capitolo precedente, è possibile definire una ragionevole formula per l'entropia a partire dalla divergenza di Kullback-Leibler. I principali contributori allo sviluppo di tale proposta sono Hosoya, Buchert e Morita e, per tale motivo, ci si riferirà alla stessa con l'acronimo HBM.

Sarebbe ottimale scrivere questa definizione usando quantità gauge-invarianti e verificare la validità della congettura di Penrose, secondo la quale l'entropia del campo gravitazionale debba dipendere dallo scalare invariante ottenuto dalla contrazione del tensore di Weyl.

Sviluppando il campo di densità di materia in maniera perturbativa fino al secondo ordine [7]

$$\rho = \rho^{(0)} + \rho^{(1)} + \rho^{(2)} \quad (2.1)$$

è possibile scrivere la divergenza di Kullback-Leibner al secondo ordine come:

$$\begin{aligned} \frac{M_{Pl} S_D}{V_D} &= \left\langle \rho \ln \frac{\rho}{\langle \rho \rangle_D} \right\rangle_D \simeq \left\langle (\rho^{(0)} + \rho^{(1)} + \rho^{(2)}) \ln \frac{\rho^{(0)} + \rho^{(1)} + \rho^{(2)}}{\rho^{(0)} + \langle \rho^{(1)} \rangle_D + \langle \rho^{(2)} \rangle_D} \right\rangle_D \\ &= \left\langle C \ln \frac{C}{\langle C \rangle_D} \right\rangle_D \quad \text{con } C = \rho^{(0)} + \rho^{(1)} + \rho^{(2)} \\ &= \left\langle C (\ln C - \ln \langle C \rangle_D) \right\rangle_D = \left\langle C \left[ \ln \left( \frac{\rho^{(0)}}{\rho^{(0)}} C \right) - \ln \left( \frac{\rho^{(0)}}{\rho^{(0)}} \langle C \rangle_D \right) \right] \right\rangle_D \\ &= \left\langle C \left[ \ln \left( 1 + \frac{\rho^{(1)} + \rho^{(2)}}{\rho^{(0)}} \right) - \ln \left( 1 + \frac{\langle \rho^{(1)} \rangle_D + \langle \rho^{(2)} \rangle_D}{\rho^{(0)}} \right) + \ln \rho^{(0)} - \ln \rho^{(0)} \right] \right\rangle_D \\ &\stackrel{(a)}{\simeq} \left\langle C \left[ \left( \frac{\rho^{(1)} + \rho^{(2)}}{\rho^{(0)}} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\rho^{(1)} + \rho^{(2)}}{\rho^{(0)}} \right)^2 - \left( \frac{\langle \rho^{(1)} \rangle_D + \langle \rho^{(2)} \rangle_D}{\rho^{(0)}} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\langle \rho^{(1)} \rangle_D + \langle \rho^{(2)} \rangle_D}{\rho^{(0)}} \right)^2 \right] \right\rangle_D \\ &\stackrel{(b)}{\simeq} \left\langle (\rho^{(0)} + \rho^{(1)}) \left( \frac{\rho^{(1)}}{\rho^{(0)}} \right) \right\rangle_D + \left\langle \rho^{(0)} \left( \frac{\rho^{(2)}}{\rho^{(0)}} \right) \right\rangle_D - \frac{1}{2} \left\langle \rho^{(0)} \left( \frac{\rho^{(1)}}{\rho^{(0)}} \right)^2 \right\rangle_D + \\ &\quad - \langle (\rho^{(0)} + \rho^{(1)}) \rangle_D \left( \frac{\langle \rho^{(1)} \rangle_D}{\rho^{(0)}} \right) - \langle \rho^{(0)} \rangle_D \left( \frac{\langle \rho^{(2)} \rangle_D}{\rho^{(0)}} \right) + \frac{1}{2} \rho^{(0)} \frac{\langle \rho^{(1)} \rangle_D^2}{(\rho^{(0)})^2} \\ &= \langle \rho^{(1)} \rangle_D + \frac{\langle (\rho^{(1)})^2 \rangle_D}{\rho^{(0)}} + \langle \rho^{(2)} \rangle_D - \frac{1}{2} \frac{\langle (\rho^{(1)})^2 \rangle_D}{\rho^{(0)}} - \langle \rho^{(1)} \rangle_D - \frac{\langle \rho^{(1)} \rangle_D^2}{\rho^{(0)}} - \langle \rho^{(2)} \rangle_D + \frac{1}{2} \frac{\langle \rho^{(1)} \rangle_D^2}{\rho^{(0)}} \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\langle (\rho^{(1)})^2 \rangle_D - \langle \rho^{(1)} \rangle_D^2}{\rho^{(0)}} \right] \simeq \frac{1}{2} \left[ \frac{\langle (\rho^{(1)})^2 \rangle - \langle \rho^{(1)} \rangle^2}{\rho^{(0)}} \right]. \quad (2.2) \end{aligned}$$

Dove, in (a) si è espanso  $\ln(1+x)$  al secondo ordine in serie di Taylor ed in (b) sono stati scartati tutti i termini di ordine maggiore al secondo. Come è possibile osservare, essa dipende solo dalla

perturbazione della densità al primo ordine, nonostante lo sviluppo della densità di energia proposto sia al secondo. Nell'ultima uguaglianza si è passati da una media della tipologia precedentemente esposta, ad una di tipo euclideo; ossia senza il contributo di  $\sqrt{h}$ . Questa operazione è lecita poiché la differenza tra le due è di termini del primo ordine o minori e tale equazione risulta indipendente dalla forma del campo considerato.

In un universo  $\Lambda$ CDM la perturbazione al primo ordine della densità di energia è data dall'equazione di Poisson [8]

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{x}) := 4\pi G a^2(t) \rho^{(1)}(t, \mathbf{x}), \quad (2.3)$$

dove il potenziale di Bardeen ( $\Phi = -\frac{H}{2}E' - \frac{E''}{2}$  in gauge sincrona) generalizza la nozione di campo gravitazionale in maniera gauge-invariante.

Dalla regola per la commutazione tra l'evoluzione temporale e la media della densità di energia, è possibile definire un fattore di scala efficace  $(a_D(t))/(a_D(t_0)) := (V_D(t))/(V_D(t_0)) \propto a(t)$ , che sarà usato in un secondo momento.

$$\begin{aligned} \langle \dot{\rho} \rangle_D - \langle \dot{\rho} \rangle_D &= \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{V_D} \int_D \rho \sqrt{h} d^3 \mathbf{x} V_D \right] - \frac{1}{V_D} \int_D \frac{d\rho}{dt} \sqrt{h} d^3 \mathbf{x} \\ &= \frac{1}{V_D} \int_D \dot{\rho} \sqrt{h} d^3 \mathbf{x} - \frac{\dot{V}_D}{V_D^2} \int_D \rho \sqrt{h} d^3 \mathbf{x} + \frac{1}{V_D} \int_{V_D} \rho \frac{\dot{h}}{2\sqrt{h}} d^3 \mathbf{x} - \frac{1}{V_D} \int_D \dot{\rho} \sqrt{h} d^3 \mathbf{x} \\ &= \frac{1}{V_D} \int_{V_D} \rho \frac{\dot{h}}{2\sqrt{h}} d^3 \mathbf{x} - \frac{\dot{V}_D}{V_D^2} \int_D \rho \sqrt{h} d^3 \mathbf{x} = \langle \rho \Theta \rangle_D - \langle \rho \rangle_D \langle \Theta \rangle_D \\ &\Rightarrow \langle \Theta \rangle_D = \frac{\dot{V}_D}{V_D} = 3 \frac{\dot{a}_D}{a_D} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Dalla (2.3) e dalla prima equazione di Friedmann, ponendo il parametro  $k = 0$ , (3.2) si ottiene:

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho^{(0)}(t) = 3M_{Pl}^2 H^2 \\ \rho^{(1)}(t, \mathbf{x}) = \frac{2M_{Pl}^2}{a^2} \nabla^2 \Phi(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (2.5)$$

La formula dello sviluppo al secondo ordine dell'entropia risulta quindi essere:

$$\begin{aligned} \frac{S_{KL,D}}{V_D} &= -\frac{1}{2M_{Pl}} \left[ \frac{\langle (\rho^{(1)})^2 \rangle_D - \langle \rho^{(1)} \rangle_D^2}{\rho^{(0)}} \right] \\ &= \frac{2}{3} \frac{M_{Pl}}{H^2 a^4} \left[ \langle (\nabla^2 \Phi)^2 \rangle_D - \langle \nabla^2 \Phi \rangle_D^2 \right]. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Per verificare la congettura di Penrose si considera la forma della curvatura di Weyl  $C_{\mu\nu\lambda\rho} C^{\mu\nu\lambda\rho}$  nel caso di stress anisotropo nullo. In questo caso, lo scalare prende una forma dipendente del potenziale di Bardeen.

$$\begin{aligned}
C_{\mu\nu\lambda\rho}C^{\mu\nu\lambda\rho} &= \frac{8}{a^4}D_{ij}\Phi D^{ij}\Phi \\
&= \frac{8}{a^4}\left[\left(\partial_i\partial_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\nabla^2\right)\Phi\left(\partial^i\partial^j - \frac{1}{3}\delta^{ij}\nabla^2\right)\Phi\right] \\
&= \frac{8}{a^4}\left[\partial_i\partial_j\Phi\partial^i\partial^j\Phi - \frac{1}{3}\delta_{ij}\nabla^2\Phi\partial^i\partial^j\Phi - \frac{1}{3}\partial_i\partial_j\Phi\delta^{ij}\nabla^2\Phi + \frac{1}{9}\delta_{ij}\delta^{ij}(\nabla^2\Phi)^2\right] \\
&= \frac{8}{a^4}\left[\partial_i\partial_j\Phi\partial^i\partial^j\Phi - \frac{2}{3}(\nabla^2\Phi)^2 + \frac{3}{9}(\nabla^a\Phi)^2\right] \\
&= \frac{8}{a^4}\left[\partial_i\partial_j\Phi\partial^i\partial^j\Phi - \frac{1}{3}(\nabla^2\Phi)^2\right] \tag{2.7}
\end{aligned}$$

$$\text{con } D_{ij}\Phi = \Phi_{|ij} = (\partial_i\partial_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\nabla^2)\Phi.$$

Come è possibile notare, si è in grado di riscrivere la formula dell'entropia in funzione della curvatura di Weyl più un termine residuo:

$$\begin{aligned}
\frac{S_{KL,D}}{V_D} &= \frac{2}{3}\frac{M_{Pl}}{H^2a^4}\left[\langle(\nabla^2\Phi)^2\rangle_D - \langle\nabla^2\Phi\rangle_D^2\right] \\
&= \frac{M_{Pl}}{H^2a^4}\left[\left(\langle(\nabla^2\Phi)^2\rangle_D - \frac{2}{3}\langle\nabla^2\Phi\rangle_D^2 - \langle\partial_i\partial_j\Phi\partial^i\partial^j\Phi\rangle_D\right) + \left(\langle\partial_i\partial_j\Phi\partial^i\partial^j\Phi\rangle_D - \frac{1}{3}\langle(\nabla^2\Phi)^2\rangle_D\right)\right] \\
&= \frac{M_{Pl}}{H^2a^4}\left[\frac{a^4}{8}\langle C_{\mu\nu\lambda\rho}C^{\mu\nu\lambda\rho}\rangle_D + \left(\langle(\nabla^2\Phi)^2\rangle_D - \frac{2}{3}\langle\nabla^2\Phi\rangle_D^2 - \langle\partial_i\partial_j\Phi\partial^i\partial^j\Phi\rangle_D\right)\right]. \tag{2.8}
\end{aligned}$$

Andando a considerare la forma del termine residuo, esso si può ricondurre alla cosiddetta *backreaction cinematica* definita come:

$$\mathcal{Q}_D \equiv \frac{2}{3}(\langle\Theta^2\rangle_D - \langle\Theta\rangle_D^2) - 2\langle\sigma^2\rangle_D, \tag{2.9}$$

nel modello CDM. Evidentemente, questa grandezza, è ottenibile al secondo ordine perturbativo usando solo perturbazioni dello scalare di taglio e di espansione al primo ordine, come sopra presentate. Da calcoli perturbativi [7] si ottiene:

$$\mathcal{Q}_D = \frac{4}{9a^2H^2}\left(\langle(\nabla^2\Phi)^2\rangle_D - \frac{2}{3}\langle\nabla^2\Phi\rangle_D^2 - \langle\partial_i\partial_j\Phi\partial^i\partial^j\Phi\rangle_D\right) \tag{2.10}$$

al secondo ordine. È quindi possibile scrivere:

$$\begin{aligned}
\frac{S_{KL,D}}{V_D} &= \frac{M_{Pl}}{H^2a^4}\left[\frac{a^4}{8}\langle C_{\mu\nu\lambda\rho}C^{\mu\nu\lambda\rho}\rangle_D + \left(\langle(\nabla^2\Phi)^2\rangle_D - \frac{2}{3}\langle\nabla^2\Phi\rangle_D^2 - \langle\partial_i\partial_j\Phi\partial^i\partial^j\Phi\rangle_D\right)\right] \\
&= \frac{9}{4}\frac{M_{Pl}}{a^2}\left[\frac{a^2}{18H^2}\langle C_{\mu\nu\lambda\rho}C^{\mu\nu\lambda\rho}\rangle_D + \mathcal{Q}_D\right]. \tag{2.11}
\end{aligned}$$

L'entropia così definita risulta essere una quantità derivante dalla media di scalari e gauge-invariante.

## 2.2 Entropia CET

Una definizione alternativa dell'entropia gravitazionale sviluppata principalmente da Clifton Ellis e Tavakol (CET per brevità), la cui derivazione non sarà molto approfondita, può essere ricavata dal tensore di Bell-Robinson così definito: [3][8]

$$T_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{4} \left( C_{\alpha\mu\nu\beta} C^{\alpha\beta}_{\rho\sigma} + C^*_{\alpha\mu\nu\beta} C^{*\alpha\beta}_{\rho\sigma} \right), \quad (2.12)$$

dove  $C^*_{\mu\nu\lambda\rho}$  è il duale di Hodge del tensore di Weyl.

Imponendo le cinque condizioni:

- Non negatività
- Azzeramento solo nel caso  $C_{\mu\nu\lambda\rho} = 0$
- Necessità per la grandezza di misurare l'anisotropia locale del campo gravitazionale libero
- Riproduzione della formula dell'entropia di Bekenstein-Hawking nel caso di un buco nero
- Crescita monotonica al formarsi di strutture su grande scala

Si può ricavare una formula motivata per l'entropia gravitazionale. Nel caso di un universo FL perturbato con sezioni spaziali Euclidee questa prende la forma: [8]

$$S'_{G,D} = 4\pi M_{Pl}^2 \frac{a}{H} \int_D \frac{d}{d\eta} \left( a^3 \sqrt{\frac{W}{6}} \right) d^3 \mathbf{x}, \quad (2.13)$$

con  $W = T_{\mu\nu\rho\sigma} n^\mu n^\nu n^\rho n^\sigma$  detta densità di super-energia. Nel caso di osservatore in caduta libera nello spazio di background FLRW e con perturbazione della metrica al primo ordine, si ottiene:

$$W = \frac{1}{32} C_{\mu\nu\lambda\rho} C^{\mu\nu\lambda\rho} \quad (2.14)$$

$$\Rightarrow S'_{G,D} = 4\pi M_{Pl}^2 \frac{a}{H} \int_D \frac{d}{d\eta} \left( a^3 \sqrt{\frac{C_{\mu\nu\lambda\rho} C^{\mu\nu\lambda\rho}}{192}} \right) d^3 \mathbf{x}. \quad (2.15)$$

Anche in questo caso un modello di tipo FLRW non produce entropia. È quindi possibile affermare che un universo che genera entropia gravitazionale non possa appartenere ad una famiglia di modelli FLRW spazialmente omogenei ed isotropici.

## Capitolo 3

# Evoluzione dell'entropia

In questo capitolo sarà descritta l'evoluzione delle due formule precedentemente proposte in vari casi secondo gli articoli [7], [8] e [1].

Innanzitutto è possibile esporre qualche considerazione di carattere generale in merito alla formula derivata dalla divergenza di Kullerback-Leibler. Poiché, come visto prima, la derivata della formula dell'entropia in questo caso è riconducibile al "commutatore" tra l'evoluzione temporale e l'operazione di media sul campo densità di energia è possibile scrivere

$$\frac{M_{Pl}\dot{S}_D\{\rho|\langle\rho\rangle_D\}}{V_D} = \langle\dot{\rho}\rangle_D - \dot{\langle\rho\rangle}_D = \langle\rho\rangle_D\langle\Theta\rangle_D - \langle\rho\Theta\rangle_D = -\langle\delta\rho\delta\Theta\rangle_D \quad (3.1)$$

Dove  $\delta A = A - \langle A \rangle$ . È possibile notare che, nel caso di un modello quasi-FLRW, l'effetto dell'introduzione di perturbazioni nel campo di densità energetica è di andare a creare zone sovradense e minormente dense rispetto alla ipersuperficie di background. In questi due casi si trova che:

- Per volumi dell'ipersuperficie sovradensi  $\delta\rho > 0$  e  $\delta\Theta < 0$   
 $\Rightarrow -\langle\delta\rho\delta\Theta\rangle_D > 0 \Rightarrow \dot{S}_{KL,D} > 0$ .
- Per volumi dell'ipersuperficie minormente densi  $\delta\rho < 0$  e  $\delta\Theta > 0$   
 $\Rightarrow -\langle\delta\rho\delta\Theta\rangle_D > 0 \Rightarrow \dot{S}_{KL,D} > 0$ .

È quindi, in maniera del tutto generale, ragionevole aspettarsi una crescita monotonica dell'entropia gravitazionale in un contesto perturbato come quello precedentemente trattato. Al contrario, un universo puramente FLRW non presenta differenza tra evoluzione della media della densità di energia e media dell'evoluzione della stessa e, di conseguenza, non comporta un aumento di entropia gravitazionale.

Diviene ora interessante trattare l'andamento dell'evoluzione delle due forme proposte in contesti semplici ma di rilevanza fisica, in modo da verificare, tramite simulazioni numeriche o calcolo diretto, l'effettivo tasso di aumento dell'entropia gravitazionale all'interno di vari modelli di universo.

Verrà esposto l'andamento dell'entropia HBM nel caso del più semplice modello di Einstein-de Sitter dominato da polvere ( $k = 0$ ,  $\Lambda = 0$  e  $p = 0$ ), considerato un'ottima approssimazione dell'universo nell'era dominata da materia. L'ampliamento di tale scenario ad uno con costante cosmologica  $\Lambda$  non nulla non ne modifica l'andamento qualitativo durante tale periodo [7].

Successivamente saranno discussi i risultati esposti in [8] per ambedue le formule nel caso di un universo CDM e  $\Lambda$ CDM. Infine verrà approfondita l'apparente incompatibilità tra la cosiddetta "no-hair conjecture" e l'ipotesi dell'esistenza di un qualche tipo di un'entropia gravitazionale monotonicamente crescente [1].

### 3.1 Universo Einstein-de Sitter

Partendo dal semplice caso in cui l'universo sia descrivibile tramite l'approssimazione di polvere non relativistica ( $p = 0$ ) con costante di curvatura  $k$  e costante cosmologica  $\Lambda$  nulle, è possibile affrontare il problema in maniera analitica ricavando esattamente l'andamento dell'entropia gravitazionale HBM. Come affermato precedentemente, questo, relativamente semplice, modello è un'ottima approssimazione dell'universo durante l'era dominata dalla materia (vedasi l'appendice).

In questo caso le equazioni di Friedmann si semplificano particolarmente risultando:

$$\begin{cases} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho \\ \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\rho \\ \dot{\rho} = -3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)\rho \end{cases} \quad (3.2)$$

Considerando la prima e la terza equazione di Friedmann (3.2):

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\rho}}{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a} = 0 &\Rightarrow \frac{d}{dt} \ln(\rho a^3) = 0 \Rightarrow \rho a^3 = \text{const} \\ &\Rightarrow \rho(t) = \rho_0 \left(\frac{a(t)}{a_0}\right)^{-3} \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho = \frac{8\pi G}{3}\rho_0 \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3} &\Rightarrow \dot{a} \stackrel{(a)}{=} \sqrt{\frac{8\pi G}{3}\rho_0(a)^{-\frac{1}{2}}(a_0)^{\frac{3}{2}}} \\ &\Rightarrow \dot{a} \stackrel{(b)}{=} A(a)^{-\frac{1}{2}} \stackrel{(c)}{\Rightarrow} \frac{2}{3} \left[ (a)^{\frac{3}{2}} - (a_0)^{\frac{3}{2}} \right] = A(t - t_0) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Dove in (a) è stato preso il termine con il segno positivo in accordo con le misure sperimentali dell'espansione dell'universo, in (b) si è posto  $A = \sqrt{\frac{8\pi G}{3}\rho_0(a_0)^{\frac{3}{2}}}$  ed in (c) si è risolta l'equazione differenziale per separazione di variabili.

$$\Rightarrow (a)^{\frac{3}{2}} - (a_0)^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \underbrace{\sqrt{\frac{8\pi G}{3}\rho_0(a_0)^{\frac{3}{2}}}}_{H_0} (t - t_0)$$

poiché dalla prima equazione di Friedmann per il tempo presente  $H_0^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_0$ .

$$\Rightarrow (a)^{\frac{3}{2}} = (a_0)^{\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{3}{2}H_0(t - t_0)\right) \Rightarrow a(t) = a_0 \left(1 + \frac{3}{2}H_0(t - t_0)\right)^{\frac{2}{3}} \quad (3.5)$$

che accoppiata alla (3.3) ed alla prima delle (3.2) porta a:

$$\begin{cases} \rho(t) = \rho_0 \left(1 + \frac{3}{2}H_0(t - t_0)\right)^{-2} \\ H(t) = H_0 \left(1 + \frac{3}{2}H_0(t - t_0)\right)^{-1} \end{cases} \quad (3.6)$$

Esiste un istante  $t_{BB}$  per il quale la parentesi  $(1 + \frac{3}{2}H_0(t - t_0))$  si annulla. Per tale istante sia  $\rho(t)$  che  $H(t)$  sono singolari e vengono formalmente intesi come a valore infinito. Questo punto del tempo è definito come il momento in cui avviene la nascita dell'universo, ovvero il Bigbang. Riparametrizzando il tempo a partire da tale istante  $t_{BB}$  definito come

$$t_{BB} = t_0 - \frac{2}{3H_0} \quad (3.7)$$

si ottiene

$$t' = t - t_{BB} = t - t_0 + \frac{2}{3H_0} \Rightarrow a \propto t'^{\frac{2}{3}}. \quad (3.8)$$

Ponendo, con abuso di notazione,  $t' = t$  ed inserendo il risultato nella prima equazione di Friedmann:

$$\begin{cases} H(t) = \frac{1}{a} \frac{da}{dt} = \frac{2}{3} t^{-\frac{1}{3}} t^{-\frac{2}{3}} = \frac{2}{3t} \\ \rho(t) = \frac{3H^2}{8\pi G} = \frac{1}{6\pi G t^2} = \frac{4M_{Pl}^2}{3t^2} \\ a(t) = \underbrace{a_0}_1 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3}} \end{cases} \quad (3.9)$$

in cui si è posto il fattore di scala al tempo presente uguale a 1. Questo set di equazioni descrive l'andamento del fattore di Hubble, della densità di energia e del fattore di scala nel caso di uno spazio di Einstein-de Sitter in approssimazione di polvere non relativistica.

Nel caso dell'entropia gravitazionale HBM è possibile identificare  $\rho^{(0)}$  come la densità di energia dello spaziotempo di background, che altro non è che quella appena ricavata. Allo stesso tempo è possibile esprimere esplicitamente il parametro di scala  $a$  in (2.5) ed inserire i due risultati nella (2.6) ottenendo:

$$\begin{aligned} \frac{S_{HBM,D}}{V_D} &= \frac{1}{2M_{Pl}} \left[ \frac{\langle (\rho^{(1)})^2 \rangle - \langle \rho^{(1)} \rangle^2}{\rho^{(0)}} \right] \\ &= \frac{1}{2M_{Pl}} \frac{3t^2}{4M_{Pl}^2} 4M_{Pl}^4 \left(\frac{t_0}{t}\right)^{\frac{4}{3}} \left[ \langle (\nabla^2 \Phi)^2 \rangle - \langle \nabla^2 \Phi \rangle^2 \right] \\ &= \frac{3}{2} M_{Pl} t_0^{\frac{8}{3}} t^{-\frac{2}{3}} \left[ \langle (\nabla^2 \Phi)^2 \rangle - \langle \nabla^2 \Phi \rangle^2 \right] = \frac{3}{2} M_{Pl} t_0^{\frac{8}{3}} t^{-\frac{2}{3}} \text{var}(\nabla^2 \Phi). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Poiché  $V_D \propto a_D^3 \propto a^3 \propto t^2$  si trova che:

$$S_{HBM,D} \propto V_D t^{-\frac{2}{3}} \propto t^{\frac{4}{3}} \Rightarrow \dot{S}_{HBM,D} \propto t^{\frac{1}{3}} \quad \text{e} \quad \ddot{S}_{HBM,D} \propto t^{-\frac{2}{3}} \quad (3.11)$$

con sia  $\dot{S}_{HBM,D}$  che  $\ddot{S}_{HBM,D}$  maggiori di zero. Questo significa che, non solo in questo contesto l'entropia gravitazionale HBM aumenta, ma lo fa in maniera accelerata. Eseguendo tutti i conti in maniera esplicita, anche mettendo in luce il ruolo della curvatura di Weyl e della backreaction cinematica, il tutto risulta:

$$\begin{cases} \frac{S_{HBM,D}}{V_D} = \frac{3}{2} M_{Pl} t_0^{\frac{8}{3}} t^{-\frac{2}{3}} \text{var}(\nabla^2 \Phi) = \frac{9}{4} M_{Pl} \left( \frac{t^2}{8} \langle C_{\mu\nu\lambda\rho} C^{\mu\nu\lambda\rho} \rangle_D + \mathcal{Q}_D \right) \\ \frac{\dot{S}_{HBM,D}}{V_D} = 2 M_{Pl} t_0^{\frac{8}{3}} t^{-\frac{5}{3}} \text{var}(\nabla^2 \Phi) = 3 M_{Pl} \left( \frac{t}{8} \langle C_{\mu\nu\lambda\rho} C^{\mu\nu\lambda\rho} \rangle_D + \frac{\mathcal{Q}_D}{t} \right) \\ \frac{\ddot{S}_{HBM,D}}{V_D} = \frac{2}{3} M_{Pl} t_0^{\frac{8}{3}} t^{-\frac{8}{3}} \text{var}(\nabla^2 \Phi) = M_{Pl} \left( \frac{1}{8} \langle C_{\mu\nu\lambda\rho} C^{\mu\nu\lambda\rho} \rangle_D + \frac{\mathcal{Q}_D}{t^2} \right) \end{cases} \quad (3.12)$$

## 3.2 CDM e $\Lambda$ CDM

In questa sezione saranno esposti i risultati esposti in [8] per entrambe le formule proposte nei due casi separati di universo CDM e  $\Lambda$ CDM.

Nella descrizione qui adottata le perturbazioni sono campi stocastici, generalmente con una statistica iniziale di tipo Gaussiano. Lo stesso vale per le medie in un determinato dominio delle grandezze considerate. Tecnicamente l'unica cosa a cui si ha accesso dal punto di vista sperimentale è la distribuzione di tali medie sulle quali si può a sua volta effettuare una media per descriverne l'andamento complessivo.

Risulta quindi essenziale computare tale media dell'ensemble per effettuare una previsione attendibile dell'evoluzione di osservabili in funzione del tempo per strutture su grande scala. Per questo motivo in entrambi i casi il punto chiave della procedura sta nel calcolo della media dell'insieme statistico delle  $\langle C_{\mu\nu\lambda\rho} C^{\mu\nu\lambda\rho} \rangle_D$ , che chiameremo  $\overline{\langle C_{\mu\nu\lambda\rho} C^{\mu\nu\lambda\rho} \rangle_D}$ , tramite il quale si è in grado di ricavare l'effettivo valore da inserire nelle rispettive formule per l'entropia gravitazionale. I conti di cui verranno presentati i risultati considera un potenziale gravitazionale peculiare descritto da uno spettro di fluttuazioni lineare con una funzione di trasferimento, generalmente definita come

$$T(k) = \frac{\delta(k, z=0)}{\delta(k, z=\infty)} \frac{\delta(0, z=\infty)}{\delta(0, z=0)} \quad (3.13)$$

(dove con  $\delta$  si intende la perturbazione di numero d'onda  $k$  e redshift  $z$ ), esposta nel dettaglio in [4] e parametri cosmologici dati da PLANK [9]. Considerando l'espansione al primo termine nella serie di Fourier del potenziale gravitazionale nello spazio di Fourier, si ottiene:

$$\overline{\langle C_{\mu\nu\lambda\rho} C^{\mu\nu\lambda\rho} \rangle_D} = \frac{16}{3a^4} \int \frac{dk}{k} P_\Phi(\eta, k), \quad (3.14)$$

con  $P_\Phi(\eta, k)$  come spettro di potenza del campo gravitazionale, definito come

$$P_\Phi(\eta, k) = \frac{k^3}{2\pi^2} |\Phi_k|^2. \quad (3.15)$$

L'integrale così presentato con lo spettro di potenza esposto in [4] presenta una divergenza ultravioletta che nell'articolo [8] viene risolta considerando un cut-off ultravioletto  $k_{UV} = 0.1h\text{Mpc}^{-1}$  per regolarizzare la divergenza e rimanere in regime lineare.

### 3.2.1 Entropia gravitazionale HBM

Nel caso della formula proposta a partire dalla divergenza di Kullerback-Leibler si pone un ulteriore problema. La determinazione della curvatura di Weyl non è sufficiente per determinare il valore dell'entropia in quanto essa dipende anche dalla backreaction cinematica. Si può però dimostrare che, nello spazio di Fourier, dei vari termini in gioco nella formazione della backreaction cinematica  $\overline{\langle (\nabla^2 \Phi)^2 \rangle_D}$  e  $\overline{\langle \partial_i \partial_j \Phi \partial^i \partial^j \Phi \rangle_D}$  si elidono, mentre il contributo di  $\overline{\langle \nabla^2 \Phi \rangle_D^2}$  è trascurabile utilizzando una funzione finestra di raggio abbastanza grande ( $> 1\text{Mpc}$ ).

Sotto queste ipotesi è possibile ignorare, e verrà fatto in questa sezione da questo momento in poi, il contributo della backreaction cinematica nella formula HBM.

A causa della seconda operazione di media sull'ensemble che aggiunge un termine di volume ( $\propto a^3$ ) e dell'approssimazione di backreaction cinematica nulla la formula da computare risulta:

$$\frac{S_{HBM,D}}{V_D} \simeq \frac{1}{8} M_{Pl} \frac{a^3}{H^2} \overline{\langle C_{\mu\nu\lambda\rho} C^{\mu\nu\lambda\rho} \rangle_D} \quad (3.16)$$

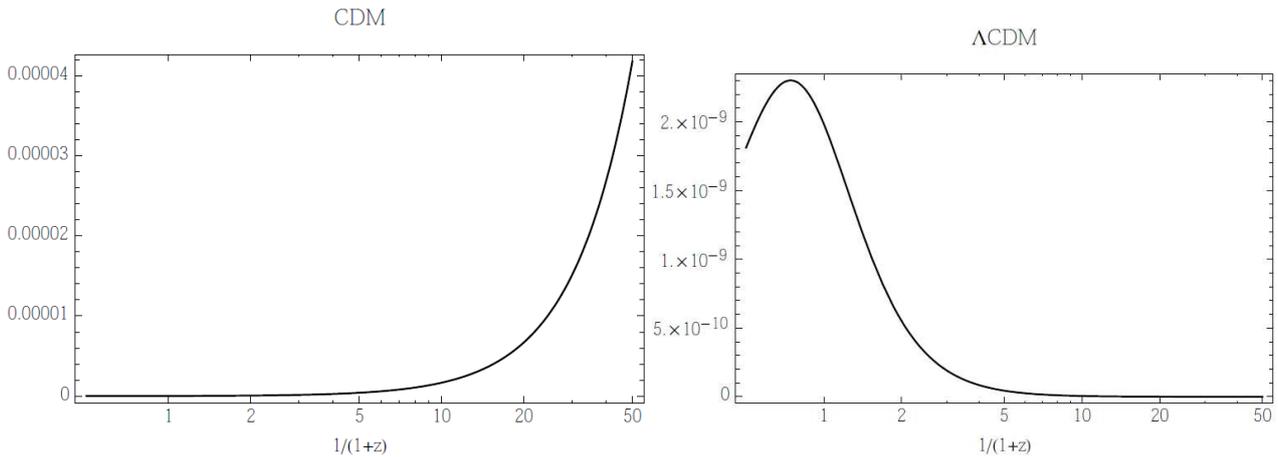


Figura 3.1: Evoluzione dell'entropia gravitazionale HBM per unità di volume comovente nel caso di un universo CDM (sinistra) e  $\Lambda$ CDM (destra), ponendo  $8\pi G = 1$  ed assumendo un cut-off ultravioletto  $k_{UV} = 0.1h\text{Mpc}^{-1}$ , come funzione di  $1/(1+z)$ .

Gli andamenti nel caso di universo CDM e  $\Lambda$ CDM sono riportati in Fig.3.1. Come ricavato precedentemente: l'entropia nel caso di un universo CDM nel quale non esiste un contributo legato alla costante cosmologica presenta un continuo ed accelerato aumento dell'entropia dovuto alla formazione sempre più presente di strutture complesse che accrescono la differenza tra lo spaziotempo di *background* e quello reale.

Al contrario, nel caso di un universo  $\Lambda$ CDM la presenza di una costante cosmologica, dominante per grandi tempi (vedasi l'appendice), fa tendere sia lo spazio di background che quello reale ad uno stato di spaziotempo alla de Sitter, in modo da appianare le differenze tra i due e portare l'entropia per unità di volume a zero. L'istante del cambio di trend nell'evoluzione dell'entropia si può ricondurre in prima approssimazione al momento nel quale la costante cosmologica inizia a dominare l'espansione cosmica.

### 3.2.2 Entropia gravitazionale CET

Nel caso dell'entropia CET la forma della formula varia leggermente considerando l'ulteriore media che comporta la scomparsa dell'integrale e, come prima, un termine di volume, questa volta assorbito dal lato sinistro dell'equazione:

$$\frac{S_{CET,D}}{V_D} = 4\pi M_{Pl}^2 \frac{a}{H} \frac{d}{d\eta} \left( a^3 \sqrt{\frac{\langle C_{\mu\nu\lambda\rho} C^{\mu\nu\lambda\rho} \rangle_D}{192}} \right). \quad (3.17)$$

Gli andamenti dell'entropia CET nei casi CDM ( $\Omega_{\Lambda 0} = 0$ ) e  $\Lambda$ CDM per diversi valori di  $\Omega_{\Lambda 0}$  sono riportati in Fig. 3.2 (sinistra) assieme al grafico della derivata rispetto a  $y = 1/(1+z)$  (destra).

In modo analogo a prima, nel caso di un universo CDM l'entropia aumenta indefinitamente nel tempo (seguendo una diversa legge di potenza rispetto al caso precedente), mentre, diversamente dal caso HBM, nello scenario  $\Lambda$ CDM essa presenta un asintoto orizzontale ad un valore dipendente dalla costante cosmologica. Questa relazione è messa in luce nella Fig. 3.3. Ad un valore maggiore di  $\Omega_{\Lambda 0}$  corrisponde un minor valore asintotico dell'entropia.

La spiegazione di questo fenomeno sta nella diversa forma della formula. Nel caso CET la suddetta tiene conto di tutta la storia dell'universo precedente al momento considerato grazie alla presenza della derivata temporale. In questo modo l'entropia è definita come un effetto integrato sulla storia cosmologica: aumenta durante la formazione di strutture su grande scala e smette di crescere al tendere dell'universo ad uno stato di de Sitter. Essa mantiene però la memoria della formazione delle strutture

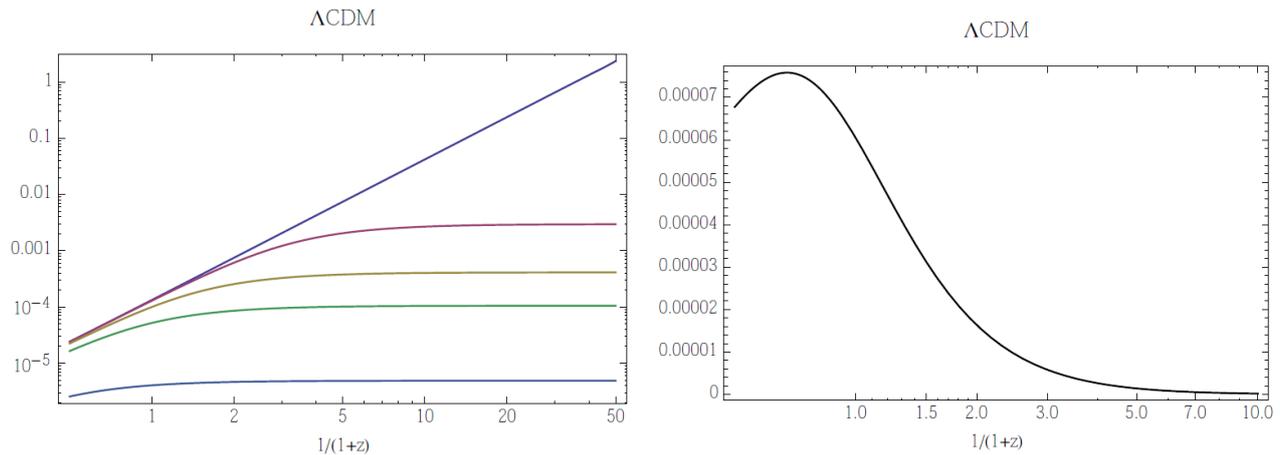


Figura 3.2: Evoluzione dell'entropia gravitazionale CET per unità di volume comovente nel caso di un universo  $\Lambda$ CDM per diversi valori di  $\Omega_{\Lambda 0}$  ( $= 0, 0.05, 0.35, 0.68$  (modello standard  $\Lambda$ CDM) e  $0.95$  dall'alto in basso) a sinistra e l'andamento della derivata dell'entropia rispetto a  $y = 1/(1+z)$  per unità di volume comovente a destra, ponendo  $8\pi G = 1$  ed assumendo un cut-off ultravioletto  $k_{UV} = 0.1h\text{Mpc}^{-1}$ .

anche in questo caso, racchiudendo sia l'informazione sullo stato attuale dell'universo, tramite la sua derivata, sia la storia passata dello stesso.

Questo concetto è chiaramente osservabile nella Figura 3.3 di destra nella quale si evince un andamento molto simile all'entropia gravitazionale HBM nel caso di universo  $\Lambda$ CDM. In questo caso è la derivata dell'entropia che subisce un cambio di trend a cui si può ricondurre in prima approssimazione il momento nel quale la costante cosmologica inizia a dominare l'espansione cosmica.

### 3.3 Congettura no-hair

Una volta studiato l'andamento generale dell'entropia e postulata la necessità che questa sia una quantità monotonicamente crescente è naturale valutare l'incompatibilità dei risultati ottenuti con le teorie preesistenti. Nello specifico, la cosiddetta congettura "no-hair" sembra essere un argomento inconciliabile con quanto appena trattato. Essa prevede l'appiattimento di caratteristiche peculiari in ambito cosmologico: sostiene che per tempi molto grandi l'universo non conservi tratti localmente caratterizzanti (i peli per l'appunto) ma solo una descrizione complessiva tramite pochi parametri. Questa affermazione sottolinea la tendenza dell'universo ad assumere uno stato di de Sitter completamente delineato solo e soltanto dalla costante cosmologica, dominante su tutti gli altri parametri caratterizzanti.

Un universo di questa tipologia non presenta produzione di entropia, come già visto nelle sezioni precedenti e come ipotizzato durante l'esposizione delle formule entropiche (un modello a la de Sitter è puramente FLRW). La proposizione è però rigorosamente dimostrabile solo nell'eventualità in cui la curvatura spaziale sia non-positiva (vedasi [1] per una dimostrazione euristica), nel cui caso:

$$\rho \rightarrow 0, \quad W_D = C_{\mu\nu\lambda\rho}C^{\mu\nu\lambda\rho} \rightarrow 0, \quad R \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \Theta \rightarrow \sqrt{3\Lambda}. \quad (3.18)$$

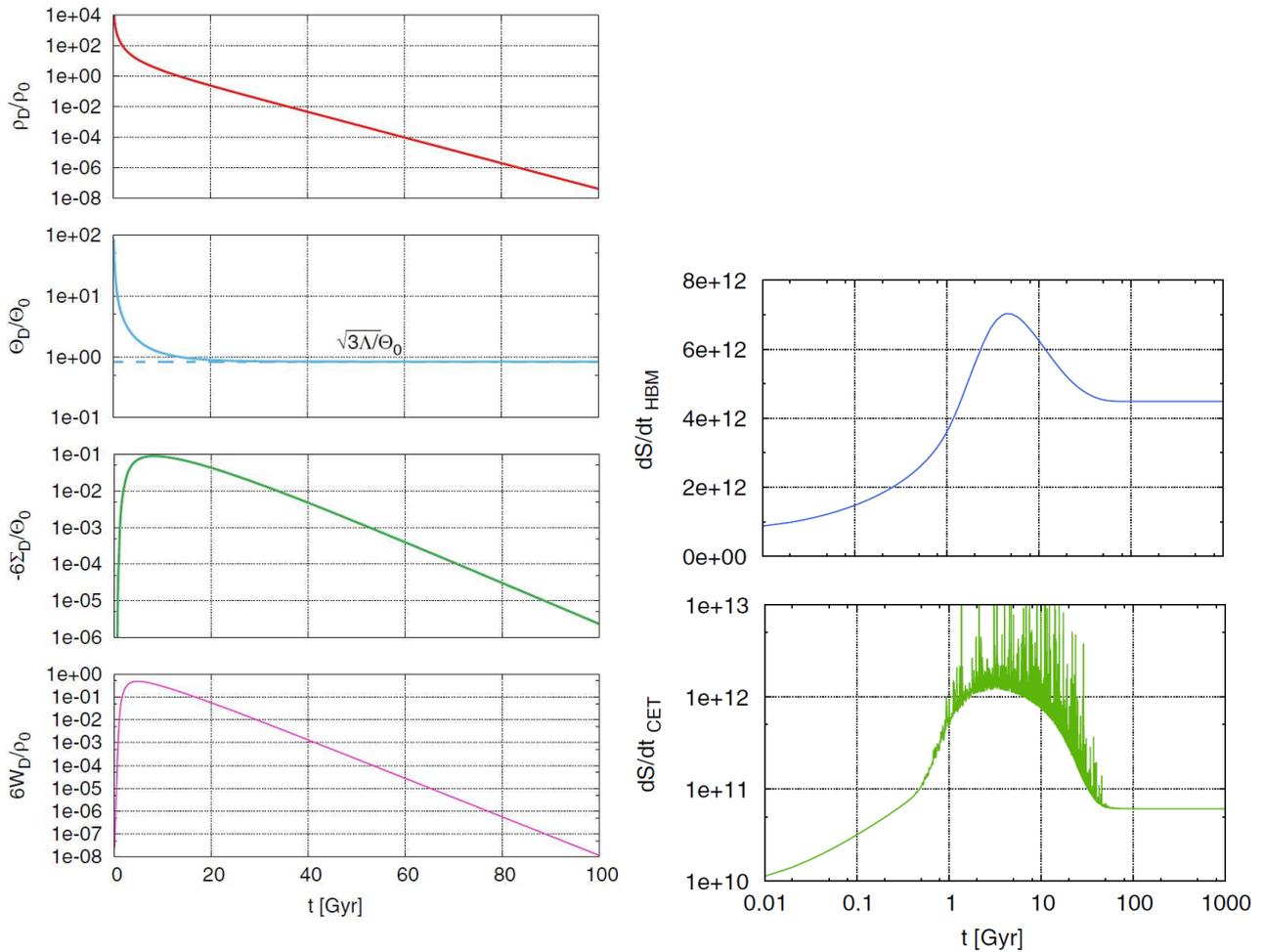


Figura 3.4: L'evoluzione delle medie nel volume totale del campo densità normalizzato dalla densità presente (primo in alto a sinistra), dello scalare di espansione normalizzato dall'espansione presente (secondo), dell'opposto dello scalare di taglio normalizzato da un sesto dell'espansione presente (terzo) e della curvatura di Weyl normalizzata da un sesto della densità presente (quarto). Tasso di cambiamento dell'entropia all'interno dell'intero dominio della simulazione Simsilun. In alto a destra: tasso di incremento dell'entropia gravitazionale HBM. In basso a destra: tasso di incremento dell'entropia gravitazionale CET.

Saranno qui esposti i risultati dell'articolo [1] nei quali, in maniera analoga a come fatto fino ora, vengono trascurati i possibili contributi all'entropia dati dalla presenza di onde gravitazionali, in un contesto irrotazionale di polvere con una costante cosmologica  $\Lambda$  non nulla.

L'obiettivo del capitolo è la determinazione dell'esistenza di un effettiva incompatibilità tra le due congetture tramite la simulazione numerica Simsilun. Essa, tramite il computo della densità energetica barionica  $\rho$ , dello scalare di espansione  $\Theta$ , dello scalare di taglio  $\sigma$  e della curvatura di Weyl  $C_{\mu\nu\lambda\rho}C^{\mu\nu\lambda\rho}$  su di un volume di  $256^3 = 16\,777\,216$  celle nell'arco di un tempo  $t = 1000\text{Gyr}$  (per chiarezza espositiva alcuni grafici presentati arrivano solo a  $100\text{Gyr}$ ), determinerà l'andamento delle due formule proposte dell'entropia come somma dei contributi di ogni cella. Altri parametri preimpostati sono  $\Omega_M = 0.25$ ,  $\Omega_\Lambda = 0.75$  e  $H_0 = 73.0\text{km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$ . Questo modello di background soddisfa globalmente tutti i requisiti per l'applicabilità della *no-hair conjecture*: una costante cosmologica positiva ed una curvatura spaziale non positiva. Dovrebbe quindi approssimare asintoticamente la soluzione de Sitter. I risultati della simulazione sono riportati in Figura 3.4. A sinistra è possibile riconoscere la tendenza asintotica nel complesso ad uno stato di de Sitter (qui la curvatura di Weyl è rappresentata come  $W$  e lo scalare di taglio come  $\Sigma$ ). Questo avviene prendendo come dati, non i singoli valori di cella delle osservabili  $O_j$ , ma la loro media su tutto il dominio ad un determinato tempo:  $O_D = \langle O \rangle_D = \frac{1}{V_D} \sum_j \delta v_j \rho_j$ .

Osservando i grafici di destra in Fig. 3.4 si può notare come questa volta il comportamento dell'entropia sia differente da quello visto nella sottosezione precedente. Anche nel caso HBM l'entropia non tende ad un valore nullo ma assume un andamento qualitativamente molto simile al caso CET. Entrambi i grafici presentano quindi un andamento riconducibile al caso CET esposto precedentemente ma con una sostanziale differenza: la derivata dell'entropia non va ad annullarsi a grandi tempi. Essa è dovuta alla natura più complessa della simulazione Simsilun rispetto al semplice calcolo della media dell'ensemble effettuata precedentemente. Anche se il comportamento generale del volume simulato è chiaramente asintoticamente tendente ad un modello di universo alla de Sitter, questo non vale per le singole celle di volume che possono essere rispettivamente o sovradense o minormente dense rispetto alla media.

Studiando l'evoluzione della creazione di entropia gravitazionale (CET in questo caso) in una tipica cella di volume sovradense (Fig. 3.5 in alto) e minormente denso (in basso) si può notare come la formazione di entropia in condizione di sovradensità aumenti fino alla formazione di un picco (gli stessi picchi che si possono osservare in Fig. 3.4 in basso a destra) in concomitanza con la virializzazione della zona sovradensa e come da quel momento in poi la produzione di entropia diventi costante. Questo scenario non è compatibile con la congettura *no-hair* in quanto la perturbazione di materia non viene diluita mediante l'azione della costante cosmologica anche per tempi molto grandi e non approssima mai uno stato a la de Sitter. In maniera opposta le zone minormente dense cessano la produzione entropia ed approssimano asintoticamente lo stato predetto dalla congettura.

La mancata adesione del caso sovradense all'andamento complessivo descritto dalla congettura non deve stupire, in quanto in tale zona le ipotesi per la sua applicazione non sono rispettate. Nel caso di una perturbazione che rende lo spazio sovradense la curvatura dello spaziotempo in tale regione risulta positiva non rispettando le ipotesi della congettura.

Rimane solo da capire il motivo per cui tale comportamento non incida sull'evoluzione media globale delle osservabili caratterizzanti la simulazione. Come discusso all'inizio del terzo capitolo: in zone minormente dense la varianza dello scalare di espansione  $\Theta$  è positiva, mentre in situazioni sovradense essa risulta negativa. Al netto di questo fatto è possibile intuire che le regioni di universo relativamente vuote si espandano a maggior velocità di quelle maggiormente dense. Questo le rende dominanti nel computo di medie volumetriche di grandezze, come lo sono le  $O_D$ . Al contrario, questo non intacca grandezze indipendenti dal volume considerato come l'entropia totale del sistema, la quale non è altro che la somma diretta delle sue parti.

In conclusione è possibile affermare che il volume della simulazione sia asintoticamente dominato dalle regioni minormente dense ma che la produzione di entropia gravitazionale sia asintoticamente dominata dalle zone sovradense. La motivazione per cui le regioni maggiormente dense virializzate producono entropia gravitazionale sta nel fatto esse hanno uno scalare di taglio non nullo (il che sta alla base della produzione dell'entropia CET [1]) e la densità di energia non approssima asintoticamente il limite di de Sitter che opera come spazio di background ( $\rho/\langle\rho\rangle_D \neq 1 \rightarrow \langle\dot{\rho}\rangle_D - \dot{\langle\rho\rangle}_D \neq 0$ ).

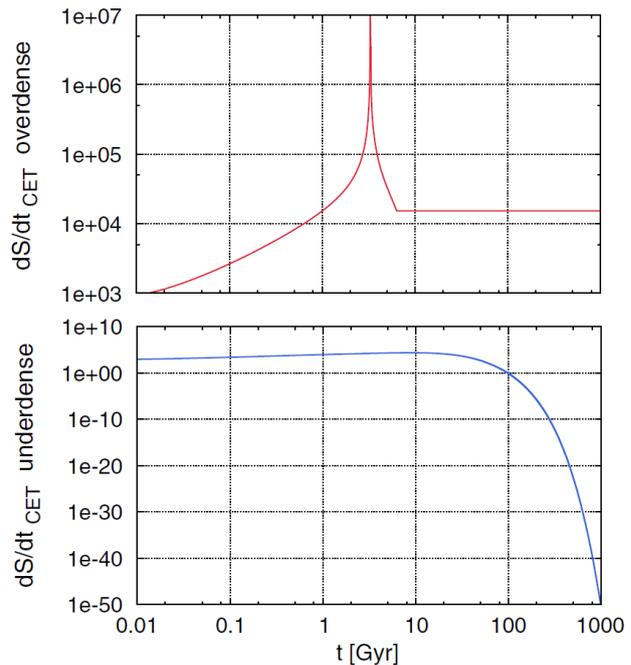


Figura 3.5: Andamento del tasso di cambiamento dell'entropia gravitazionale CET per una singola cella sovradensa (sopra) e minormente densa (sotto).

### 3.4 Conclusioni

Entrambe le formule dell'entropia forniscono una valida alternativa per la misura dell'entropia gravitazionale.

Nella prima sezione è stato ricavato l'andamento al secondo ordine perturbativo dell'entropia HBM nel contesto del modello Einstein-de Sitter. La congettura di Penrose in questo caso non è del tutto esatta in quanto non è solo la curvatura di Weyl che aumenta monotonicamente, ma una specifica combinazione della stessa con la backreaction cinematica.

Nella seconda sezione si è mostrato che l'entropia HBM non rispetta l'andamento voluto nel caso di un universo  $\Lambda$ CDM. Questa conclusione è valida solo nel caso del calcolo dell'entropia gravitazionale in un contesto di strutture su grande scala per le quali l'universo può essere descritto tramite un modello FL perturbato. La proposta CET, al contrario, fornisce un andamento compatibile con l'assunzione di una grandezza monotonicamente crescente per il modello di universo  $\Lambda$ CDM.

Nella terza sezione si è voluta mettere in luce, tramite una simulazione numerica, una conseguenza diretta dei risultati precedenti, ovvero l'apparente incompatibilità tra la congettura *no-hair* in cosmologia e l'esistenza di una grandezza monotonicamente crescente basata sulla disomogeneità del campo densità di energia. Si ricava che le due proposizioni sono compatibili grazie alla presenza di strutture su scale minori che non vengono diluite durante l'evoluzione dell'universo e che stanno alla base di una costante produzione di entropia gravitazionale. Contemporaneamente queste zone sovradense costituiscono una deviazione rispetto alla densità media di volume sempre meno rilevanti nel computo delle caratteristiche globali dello spazio su grande scala che tense asintoticamente ad un modello de Sitter.

# Capitolo 4

## Appendice

### 4.1 Epoche dell'universo

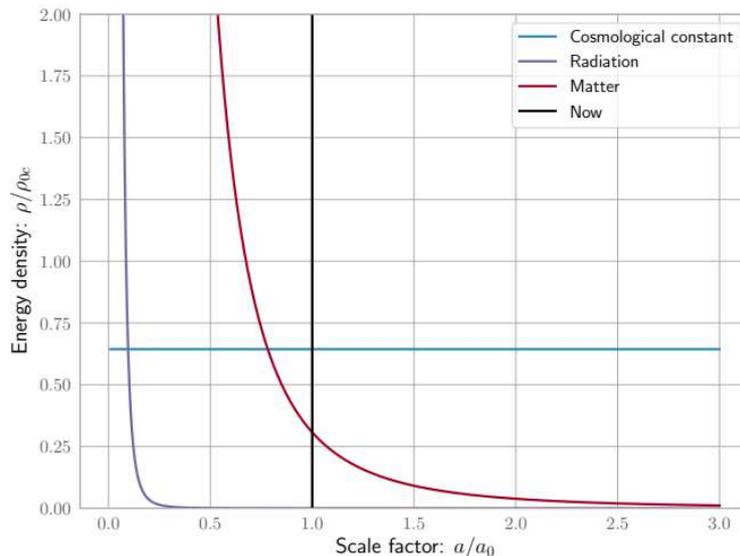
Andando a considerare una semplice ma efficace parametrizzazione della pressione di un fluido del tipo  $p = w\rho$  con:

- $w = 0 \Leftrightarrow p = 0$ : nel limite non relativistico di polvere.
- $w = 1/3 \Leftrightarrow p = \rho/3$ : nel caso di radiazione.
- $w = -1 \Leftrightarrow p = -\rho$ : nel caso della costante cosmologica.

Ripetendo i conti effettuati nella prima parte del terzo capitolo, prima sezione (3.3) nel caso più generale dell'equazione di continuità (terza equazione di Friedmann) considerando anche la pressione del fluido:

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= -3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = -3\frac{\dot{a}}{a}\rho(1+w) \Rightarrow \frac{\dot{\rho}}{\rho} + 3(1+w)\frac{\dot{a}}{a} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \ln\left(\rho a^{3(1+w)}\right) = 0 \Rightarrow \rho a^{3(1+w)} = \text{cost.} \\ &\Rightarrow \rho(t) = \rho_0 \left(\frac{a(t)}{a_0}\right)^{-3(1+w)}\end{aligned}\quad (4.1)$$

È quindi possibile graficare l'andamento delle varie densità delle componenti del cosmo in funzione al fattore di scala  $a(t)/a_0$  ottenendo un andamento del tipo [10]:



Come si nota è possibile dividere la storia dell'universo in tre fasi ben distinte: la prima epoca dominata dalla radiazione (non ben visibile nel grafico), la seconda epoca dominata dalla materia e la terza dominata dalla costante cosmologica. Per tempi molto grandi le densità di radiazione e materia tendono asintoticamente a zero e la densità di energia associata alla costante cosmologica è sempre più dominante. A partire da queste constatazioni si può immaginare che nel lontano futuro l'unico parametro rilevante alla descrizione dell'universo sarà la costante cosmologica supportando la congettura *no-hair*.

Nel caso di andamenti di grandezze ottenuti un universo dominato da materia a costante cosmologica nulla, come considerato nella prima sezione del terzo capitolo, possono essere qualitativamente ricondotti agli andamenti delle stesse grandezze in un universo  $\Lambda$ CDM durante l'epoca intermedia dominata da materia.

# Bibliografia

- [1] Krzysztof Bolejko. “Gravitational entropy and the cosmological no-hair conjecture”. In: *Physical Review D* 97 (2018). DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1712.04041>.
- [2] Thomas Buchert. “On average properties of inhomogeneous fluids in general relativity I: dust cosmologies”. In: (1999). DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.gr-qc/9906015>.
- [3] Timothy Clifton, George F. R. Ellis e Reza Tavakol. “A Gravitational Entropy Proposal”. In: *The Astrophysical Journal* 496 (1998), pp. 605–614. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.astro-ph/9709112>.
- [4] Daniel J. Eisenstein e Wayne Hu. “Baryonic Features in the Matter Transfer Function”. In: *The Astrophysical Journal* 496 (1998), pp. 605–614. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.astro-ph/9709112>.
- [5] George F. R. Ellis, Roy Maartens e Malcom A. H. Maccallum. *Relativistic cosmology*. Cambridge University Press, 2012.
- [6] Akio Hosoya, Thomas Buchert e Masaaki Morita. “Information Entropy in Cosmology”. In: *Physical Review Letters* 92 (2004). DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.gr-qc/0402076>.
- [7] Nan Li et al. “Relative information entropy and Weyl curvature of the inhomogeneous Universe”. In: *Physical Review D* 86 (2012). DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1208.3376>.
- [8] Giovanni Marozzi et al. “Cosmological evolution of the gravitational entropy of the large-scale structure”. In: (2015). DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1501.04906>.
- [9] Planck Collaboration. “Planck 2013 results. XVI. Cosmological parameters”. In: *A&A* 571 (2014), A16. DOI: <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201321591>.
- [10] Jacopo Tissino, Giorgio Mentasti e Eleonora Vanzan. *Astrophysics and cosmology notes*. URL: [https://stem.elearning.unipd.it/pluginfile.php/336371/mod\\_resource/content/1/Fundamentals\\_astrophysics\\_cosmology.pdf](https://stem.elearning.unipd.it/pluginfile.php/336371/mod_resource/content/1/Fundamentals_astrophysics_cosmology.pdf). (accessed: 7.10.2022).