



Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE
Corso di Laurea Triennale in Ingegneria dell'Informazione

TESI DI LAUREA

**Modellistica e controllo del sistema
Ball and Hoop**

Candidato:
Pierre Scaramuzza
Matricola 609630

Relatore:
Prof. Maria Elena Valcher

Indice

1	Analisi del sistema	3
1.1	Descrizione del sistema	3
1.2	Derivazione del modello	4
1.3	Stabilità del sistema	7
1.4	Parametri della risposta in frequenza	9
1.5	Parametri della risposta al gradino	10
2	Controllo del sistema	13
2.1	Retroazione negativa	13
2.1.1	Studio con Nyquist	13
2.1.2	Luogo delle radici	14
2.1.3	Parametri della risposta al gradino	15
2.2	Sintesi per tentativi	16
2.3	Controllo PID	18
2.3.1	Controllore P	19
2.3.2	Controllore PI	19

Capitolo 1

Analisi del sistema

1.1 Descrizione del sistema

Il sistema Ball and Hoop studia la dinamica di una pallina d'acciaio libera di rotolare all'interno di un cilindro. Grazie ad un motore elettrico il cilindro può ruotare attorno al suo asse. Quando il cilindro comincia a ruotare la pallina tende inizialmente a muoversi nella stessa direzione del cilindro a causa della forza d'attrito. Ad un certo istante, però, la forza di gravità supera la forza di attrito provocando la caduta della pallina. La pallina inizia quindi a rotolare e continua a oscillare attorno al suo punto di equilibrio fino a fermarsi.

Il sistema della pallina e del cilindro è particolarmente interessante perchè permette di simulare e studiare il controllo delle oscillazioni di un liquido all'interno di un contenitore cilindrico. Il movimento di grandi quantità di liquido può fortemente influenzare il movimento del contenitore stesso generando situazioni spesso pericolose. Questo si verifica per esempio nel caso di un camion cisterna parzialmente riempito di liquido che affronta una curva stretta: in assenza di controllo la forza esercitata dal liquido sulle pareti della cisterna rischierebbe di rovesciare il camion.

Per questo motivo cercheremo inizialmente di analizzare le proprietà del sistema (studio della stabilità, risposta in frequenza, risposta al gradino...) e successivamente progetteremo delle soluzioni di controllo efficaci (controllo proporzionale, controllo PID...).

1.2 Derivazione del modello

Per derivare il modello ricorriamo alle equazioni lagrangiane. Essendo la dinamica del sistema completamente descritta dalle equazioni del moto della posizione angolare θ del cilindro e dalla posizione y della pallina nel cilindro, possiamo usare questi parametri come coordinate delle equazioni lagrangiane.

Dunque per θ

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\delta L}{\delta \dot{\theta}} \right) - \frac{\delta L}{\delta \theta} + \frac{\delta J}{\delta \dot{\theta}} = \tau_{\theta}(t),$$

mentre per y

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\delta L}{\delta \dot{y}} \right) - \frac{\delta L}{\delta y} + \frac{\delta J}{\delta \dot{y}} = F_y(t),$$

dove L è la lagrangiana, J è un coefficiente d'attrito, $\tau_{\theta}(t)$ è il momento torcente generalizzato riferito alla coordinata θ e $F_y(t)$ è la forza esterna generalizzata riferita alla coordinata y .

Abbiamo ora bisogno di alcune equazioni che colleghino le coordinate generalizzate alle altre equazioni del sistema.

In particolare, l'angolo di rotazione ϕ della pallina è dato da

$$\phi = \frac{y}{r},$$

la sua velocità periferica v è data da

$$v = (R - r)\ddot{\psi},$$

e il suo angolo di oscillazione

$$\psi = \left(\theta - \frac{y}{R} \right).$$

La lagrangiana L è data dall'energia cinetica U associata alla rotazione del

cilindro, alla rotazione della pallina e alla traslazione del centro di massa della pallina stessa

$$L = U = \frac{1}{2} \left(I_a (\dot{\theta})^2 + I_b (\dot{\phi})^2 + mv^2 \right).$$

Riscrivendo questa equazione in funzione delle coordinate generalizzate si trova

$$L = \frac{1}{2} \left[I_a (\dot{\theta})^2 + I_b \left(\frac{\dot{y}}{r} \right)^2 + m \left((R - r) \left(\dot{\theta} - \frac{\dot{y}}{R} \right) \right)^2 \right],$$

dove I_a è il momento di inerzia del cilindro, I_b è il momento di inerzia della pallina e m la sua massa.

Inoltre J è legato all'attrito radente della pallina b_b e all'attrito volvente del motore b_m dalla relazione

$$J = \frac{1}{2} \left[b_b \left(\frac{\dot{y}}{r} \right) + b_m (\dot{\theta})^2 \right].$$

Per la coordinata θ il momento torcente generalizzato $\tau_\theta(t)$ si ottiene con la somma del momento torcente del motore e della forza di gravità sulla pallina

$$\tau_\theta(t) = \tau(t) + mg \frac{\delta x}{\delta \theta}.$$

Per la coordinata y invece

$$F_y = mg \frac{\delta x}{\delta y},$$

dove x è lo spostamento verticale della pallina

$$x = -(R - r) \left(1 - \cos \left(\theta - \frac{y}{R} \right) \right).$$

Dunque da

$$\tau_\theta(t) = \tau(t) - mg(R-r)\sin\left(\theta - \frac{y}{R}\right),$$

$$F_y(t) = mg\left(\frac{R-r}{R}\right)\sin\left(\theta - \frac{y}{R}\right),$$

seguono le equazioni del moto:

per θ

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta L}{\delta \dot{\theta}}\right) - \frac{\delta L}{\delta \theta} + \frac{\delta J}{\delta \dot{\theta}} = \tau_\theta(t),$$

$$\left[I_a + m(R-r)^2\right]\ddot{\theta} + b_m\dot{\theta} - \frac{m(R-r)^2}{R}\ddot{y} = \tau(t) - mg(R-r)\sin\left(\theta - \frac{y}{R}\right),$$

mentre per y

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta L}{\delta \dot{y}}\right) - \frac{\delta L}{\delta y} + \frac{\delta J}{\delta \dot{y}} = F_y(t),$$

$$\left[\frac{I_b}{r^2} + \frac{m(R-r)^2}{R^2}\right]\ddot{y} + \frac{b_b}{r^2}\dot{y} - \frac{m(R-r)^2}{R}\ddot{\theta} = mg\frac{(R-r)}{R}\sin\left(\theta - \frac{y}{R}\right).$$

Infine le equazioni del moto possono essere riscritte sotto forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} I_a + m(R-r)^2 & \frac{m(R-r)^2}{R} \\ -\frac{m(R-r)^2}{R} & \frac{I_b}{r^2} + \frac{m(R-r)^2}{R^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_m & 0 \\ 0 & \frac{b_b}{r^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{y} \end{pmatrix} + mg \begin{pmatrix} (R-r)\sin\left(\theta - \frac{y}{R}\right) \\ -\left(\frac{R-r}{R}\right)\sin\left(\theta - \frac{y}{R}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau(t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Assumendo l'angolo di oscillazione $\psi = \left(\theta - \frac{y}{R}\right)$ abbastanza piccolo possiamo sostituire $\sin\left(\theta - \frac{y}{R}\right)$ con $\left(\theta - \frac{y}{R}\right)$ per ottenere una matrice del secondo ordine lineare

$$\begin{pmatrix} I_a + m(R-r)^2 & -\frac{m(R-r)^2}{R} \\ -\frac{m(R-r)^2}{R} & \frac{I_b}{r^2} + \frac{m(R-r)^2}{R^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_m & 0 \\ 0 & \frac{b_b}{r^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{y} \end{pmatrix} + mg \begin{pmatrix} (R-r) & -\left(\frac{R-r}{R}\right) \\ -\left(\frac{R-r}{R}\right) & \left(\frac{R-r}{R^2}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau(t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Siccome il raggio del cilindro R è molto più grande di quello della pallina r possiamo approssimare la precedente equazione con la seguente

$$\begin{pmatrix} I_a + mR^2 & -mR \\ -mR & \frac{I_b}{r^2} + m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_m & 0 \\ 0 & \frac{b_b}{r^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{y} \end{pmatrix} + mg \begin{pmatrix} R & -1 \\ -1 & \frac{1}{R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau(t) \\ 0 \end{pmatrix},$$

ed esplicitando il momento di inerzia della pallina I_b

$$\begin{pmatrix} I_a + mR^2 & -mR \\ -mR & \frac{7}{5}m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_m & 0 \\ 0 & \frac{b_b}{r^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{y} \end{pmatrix} + mg \begin{pmatrix} R & -1 \\ -1 & \frac{1}{R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau(t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Se la massa della pallina m è sufficientemente piccola rispetto al momento di inerzia I_a del cilindro le due precedenti equazioni possono essere disaccoppiate e di fatto la prima equazione diventa

$$I_a \ddot{\theta} + b_m \dot{\theta} = \tau(t),$$

mentre la seconda

$$\frac{7}{5} \ddot{y} + \frac{b_b}{mr^2} \dot{y} + \frac{g}{R} y = R \ddot{\theta} + g \theta.$$

1.3 Stabilità del sistema

Dal modello ingresso/uscita ricavato nell'ultima equazione, ovvero

$$\frac{7}{5} \ddot{y} + \frac{b_b}{mr^2} \dot{y} + \frac{g}{R} y = R \ddot{\theta} + g \theta,$$

possiamo calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$

$$G(s) = \frac{Rs^2 + g}{\frac{7}{5}s^2 + \frac{b_b}{mr^2}s + \frac{g}{R}},$$

ed esprimerla in forma di Bode

$$G(s) = R \frac{1 + \frac{R}{g}s^2}{1 + \frac{b_b R}{gmr^2}s + \frac{7R}{5g}s^2}.$$

Siccome i parametri fisici sono tutti positivi e non ci sono cancellazioni zero/polo nella funzione di trasferimento, per il criterio di Cartesio possiamo dedurre sia la BIBO-stabilità che la stabilità asintotica del sistema.

Inoltre se

$$\left(\frac{b_b R}{gmr^2}\right)^2 < 4\left(\frac{7R}{5g}\right)$$

i poli sono valori complessi coniugati.

Nel nostro caso, essendo i valori dei parametri:

$$R = 0.085m$$

$$b_b = 1.67 \cdot 10^{-6}$$

$$b_m = 0.1$$

$$I_a = 1.6 \cdot 10^{-3}kg \cdot m^2$$

$$I_b = 1.06 \cdot 10^{-6}kg \cdot m^2$$

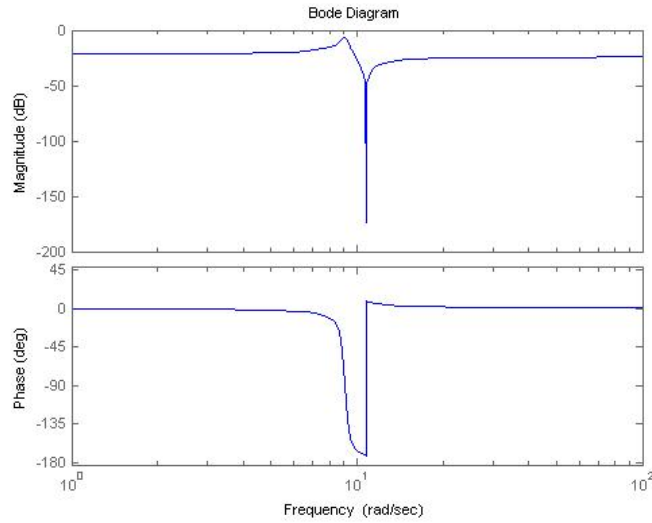
$$m = 0.032kg$$

$$r = 0.0091m$$

la relazione è rispettata e il calcolo dei poli della funzione porta

$$p_1 = -0.22 + j9.07,$$

$$p_2 = -0.22 - j9.07.$$

Figura 1.1: Diagramma di Bode di $G(s)$

1.4 Parametri della risposta in frequenza

Come si deduce dal diagramma di Bode il valore della pulsazione di risonanza coincide con buona approssimazione con quello della pulsazione naturale. Infatti

$$\omega_r \simeq \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2} = 9.07 \frac{\text{rad}}{\text{s}},$$

e, essendo lo smorzamento della coppia di poli

$$|\xi| = \left| \frac{1}{2} \frac{b_b R}{g m r^2} \omega_n \right| = 0.02 \ll 1,$$

risulta

$$\omega_r \simeq \omega_n.$$

Per quanto riguarda la banda passante possiamo riscontrare dal grafico un valore sensibilmente maggiore rispetto a quello della pulsazione naturale

$$B_p = 9.92 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Il motivo di questa differenza si trova nell'elevato picco di risonanza relativo

$$M_{rel} = |W(j\omega_r)|_{dB} - |W(0)|_{dB} = 14.83dB,$$

dovuto al basso valore di ξ .

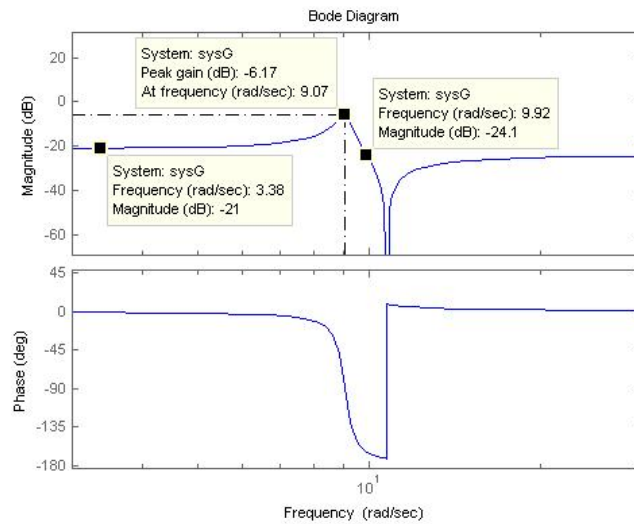


Figura 1.2: Parametri del diagramma di Bode di $G(s)$

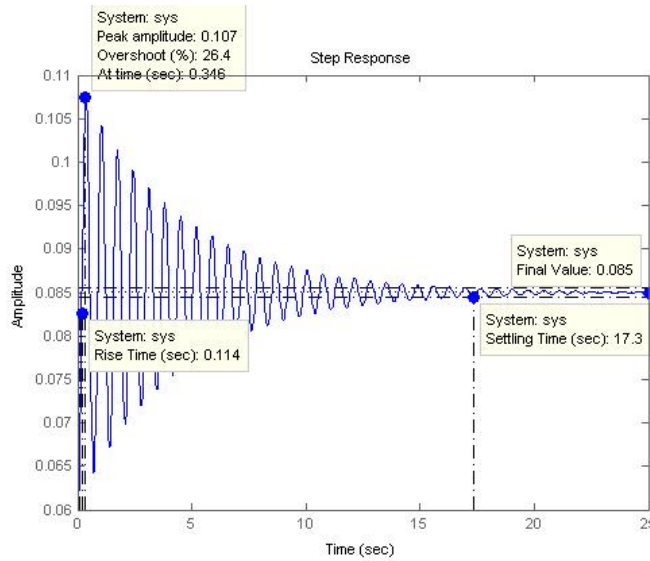
1.5 Parametri della risposta al gradino

Dal grafico della risposta al gradino deduciamo chiaramente che il valore della risposta a regime permanente

$$w_{-1}(+\infty) = |W(0)| = 0.085$$

coincide esattamente con la dimensione del raggio del cilindro.

Questo risultato non sorprende ed è fisicamente motivato dal fatto che ad una variazione unitaria dell'angolo di rotazione del cilindro la pallina si

Figura 1.3: Parametri della risposta al gradino di $G(s)$

sposta in un nuovo punto di equilibrio distante esattamente R dal punto precedente:

$$\frac{y}{R} = 1 \implies y = R.$$

Per quanto riguarda i parametri della risposta al gradino ci accorgiamo che malgrado il tempo di salita sia abbastanza breve

$$t_r = 0.114s,$$

il tempo di assestamento è decisamente lungo

$$t_s = 17.3s,$$

e la sovraelongazione eccessiva

$$\sigma\% = 26.4\%.$$

Questi valori dovuti ad uno smorzamento ξ molto basso caratterizzano un transitorio troppo lungo che cercheremo di ridurre attraverso un controllo ad anello chiuso.

Capitolo 2

Controllo del sistema

2.1 Retroazione negativa

La funzione di trasferimento del sistema in retroazione negativa di guadagno variabile K è

$$W(s) = \frac{G(s)}{1 + KG(s)}.$$

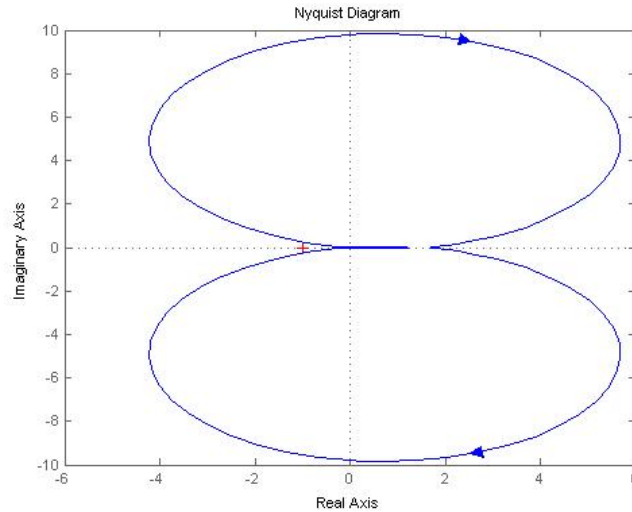
Essendo il denominatore della funzione $W(s)$

$$\left(\frac{7}{5} + KR\right)s^2 + \frac{b_b}{mr^2}s + g\left(\frac{R+1}{R}\right),$$

per il criterio di Cartesio, possiamo dedurre che il sistema retroazionato è sicuramente BIBO-stabile per qualsiasi valore di K positivo.

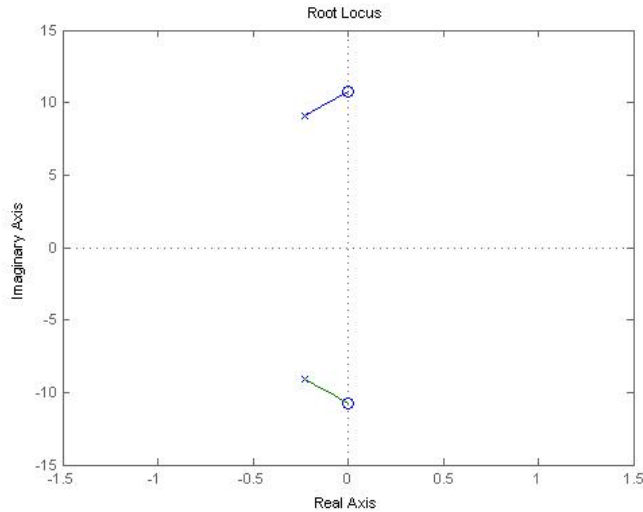
2.1.1 Studio con Nyquist

Il diagramma di Nyquist, disegnato con $K = 20$, ci conferma che il sistema retroazionato è stabile. Infatti il numero di giri che il grafico fa attorno al valore $-1 + j0$ è nullo, come è nullo il numero di poli a parte reale positiva di $G(s)$. Dunque il numero di poli di $W(s)$ a parte reale positiva, per il criterio di Nyquist, non può che essere nullo.

Figura 2.1: Diagramma di Nyquist di $KG(j\omega)$

2.1.2 Luogo delle radici

Alla stessa conclusione giungiamo nuovamente analizzando il luogo delle radici della funzione di trasferimento. Possiamo infatti notare che le radici sono completamente contenute nel semipiano sinistro del grafico e che hanno quindi parte reale negativa per qualsiasi valore del guadagno K positivo. Possiamo anche notare che essendo le radici molto più vicine all'asse immaginario che all'asse reale per ogni valore di K la risposta al gradino del sistema in catena chiusa presenterà in ogni caso una discreta componente oscillatoria.

Figura 2.2: Luogo delle radici di $G(s)$

2.1.3 Parametri della risposta al gradino

Calcolando i parametri della risposta al gradino all'aumentare del guadagno K si nota come il tempo di assestamento cresca nonostante il tempo di salita resti sensibilmente invariato. La sovraelongazione percentuale, invece, diminuisce all'aumentare di K . Bisogna quindi cercare di individuare un valore del guadagno che permetta di ottenere un buon compromesso tra i due parametri. Per $K = 20$, ad esempio, la sovraelongazione percentuale risulta praticamente dimezzata rispetto al sistema in catena aperta

$$\sigma_{\%} = 12.5\%,$$

mentre, nonostante il tempo di salita sia rimasto quasi inalterato, il tempo di assestamento è più che raddoppiato:

$$t_r = 0.102s,$$

$$t_s = 38.3s.$$

Dovremo quindi in ogni caso ricorrere ad un compensatore per ridurre il tempo di assestamento.

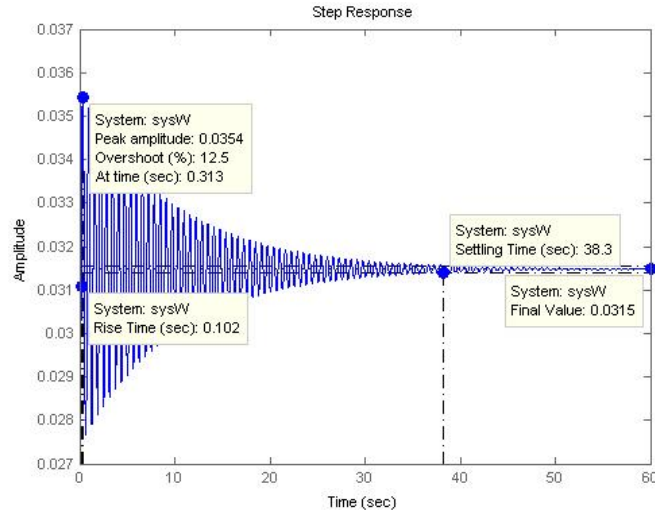


Figura 2.3: Parametri della risposta al gradino di $W(s)$

2.2 Sintesi per tentativi

La coppia di zeri puramente immaginari impedisce di alzare il valore della pulsazione di attraversamento di $G(s)$ oltre la pulsazione naturale del polinomio al numeratore. Il picco in frequenza infinito dovuto alla coppia di zeri taglia infatti l'asse del diagramma di Bode approssimativamente nello stesso punto qualsiasi sia il guadagno del compensatore. Non resta quindi che cercare di ottenere un margine di fase elevato corrispondente ad una pulsazione di attraversamento ridotta.

Data la funzione di trasferimento $W(s)$ del sistema retroazionato

$$W(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)},$$

un controllore efficace può essere:

$$C(s) = \frac{30}{1 + 3s}.$$

Infatti il valore elevato del guadagno di Bode permette di ridurre l'errore al gradino del sistema retroazionato, mentre la scelta di valori maggiori causerebbe un tempo di assestamento eccessivo. Il posizionamento del polo leggermente prima dell'origine fissa la pulsazione di attraversamento in modo da ottenere un margine di fase sufficiente.

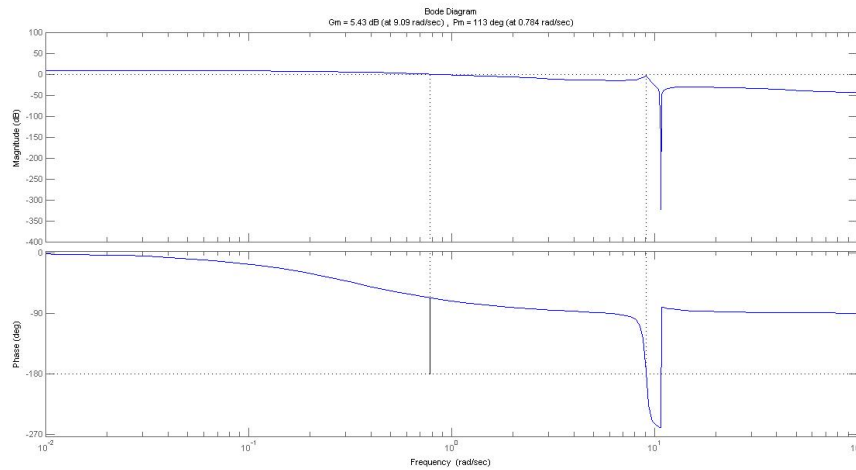


Figura 2.4: Diagramma di Bode di $C(s)G(s)$

Dal diagramma di Bode di $C(s)G(s)$ notiamo che grazie al controllore otteniamo effettivamente un margine di fase elevato ad una pulsazione di attraversamento inferiore al valore degli zeri:

$$PM = 134^\circ,$$

$$\omega_a = 0.78 \frac{rad}{s}.$$

A causa del basso valore di ω_a il tempo di salita della risposta al gradino del

sistema retroazionato risulta più lungo del tempo di salita a catena aperta pur restando accettabile:

$$t_r = 1.68s.$$

La sovraelongazione e il tempo di assestamento sono invece decisamente diminuiti rispetto al sistema in catena aperta grazie all'elevato margine di fase:

$$t_s = 5.75s,$$

$$\sigma_{\%} = 1.97\%.$$

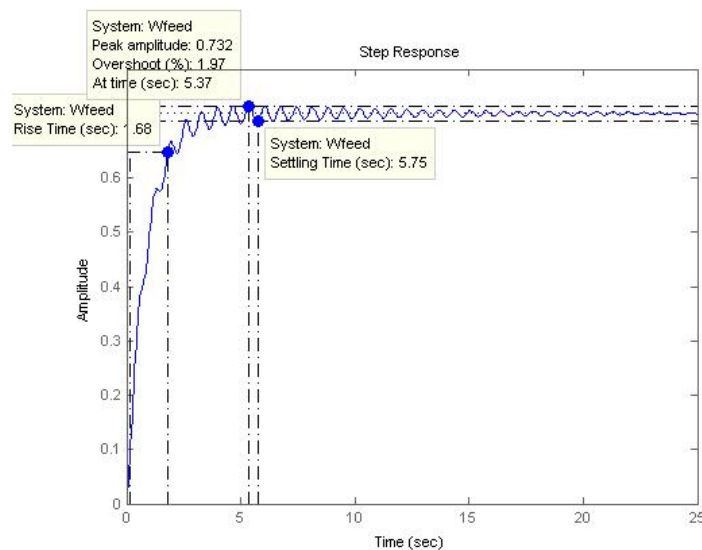


Figura 2.5: Risposta al gradino del sistema retroazionato

2.3 Controllo PID

Possiamo cercare di ottenere buone prestazioni anche con dei controllori di tipo PID.

2.3.1 Controllore P

Proviamo innanzitutto a verificare le prestazioni del sistema con un semplice controllo proporzionale:

$$P(s) = 20.$$

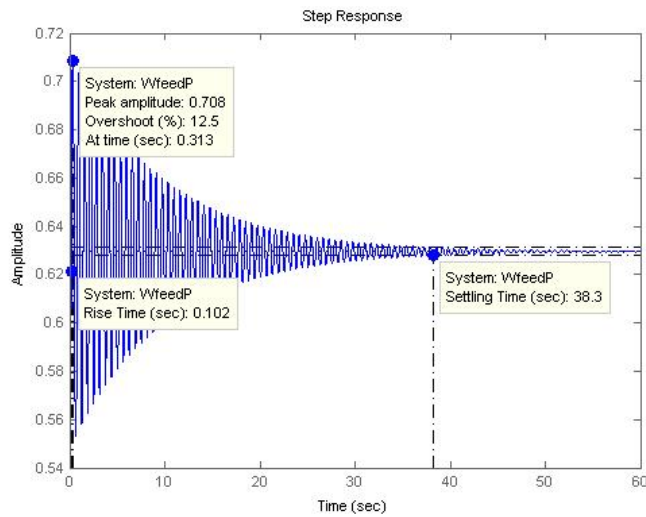


Figura 2.6: Risposta al gradino del sistema retroazionato

Ovviamente con un guadagno $K = 20$ la risposta al gradino è la stessa del sistema a retroazione non unitaria, con ampiezza 20 volte maggiore. I parametri sono gli stessi e qualsiasi sia il guadagno non sono complessivamente soddisfacenti.

2.3.2 Controllore PI

Possiamo ora provare una sintesi con un controllore proporzionale-integrale:

$$PI(s) = 1.1 + \frac{10}{s} = 10 \frac{\left(1 + \frac{s}{9.07}\right)}{s}.$$

L'integratore permette di avere un sistema retroazionato di tipo 1 e quindi di annullare l'errore al gradino mentre lo zero consente di migliorare ulteriormente il margine di fase.

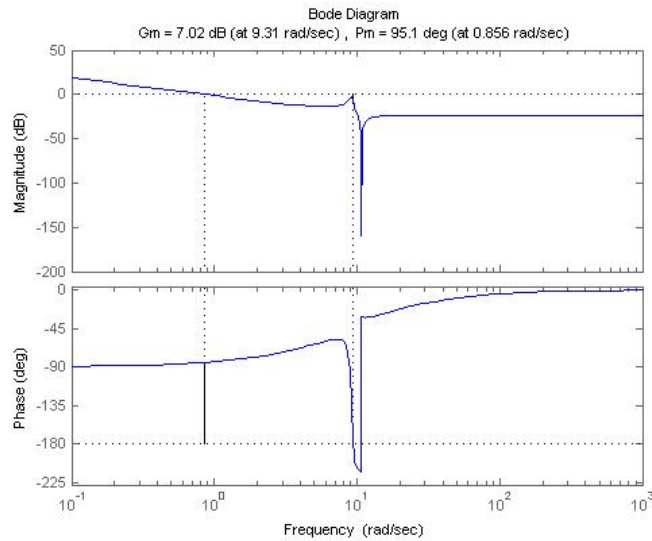


Figura 2.7: Diagramma di Bode di $G(s)PI(s)$

Come osservato nel sistema ottenuto tramite sintesi per tentativi la pulsazione di attraversamento deve risultare inferiore alla pulsazione naturale della coppia di zeri. In corrispondenza del precedente PID si trova:

$$\omega_a = 0.86 \frac{rad}{s}.$$

Il margine di fase ha un valore accettabile, anche se inferiore a quello ottenuto con il precedente controllore $C(s)$:

$$PM = 95^\circ.$$

I parametri della risposta al gradino sono paragonabili a quelli ottenuti attraverso la sintesi per tentativi. Nonostante il tempo di salita non sia estremamente rapido la sovraelongazione e il tempo di assestamento sono comunque abbastanza ridotti

$$t_r = 2.83s,$$

$$t_s = 6.96s,$$

$$\sigma_{\%} = 1.19\%.$$

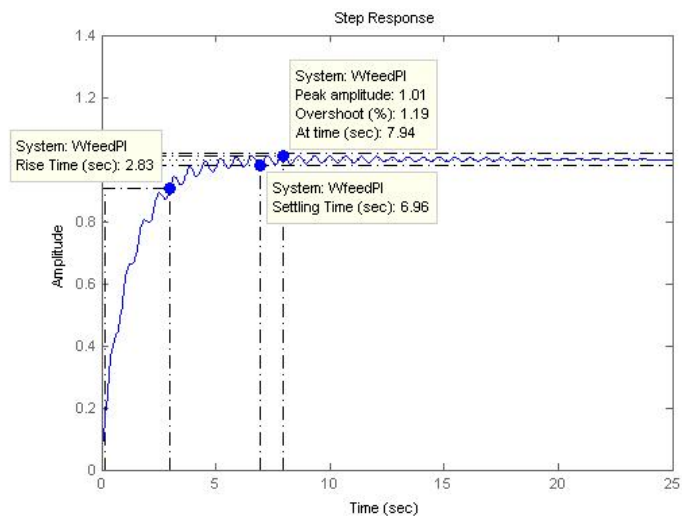


Figura 2.8: Risposta al gradino del sistema retroazionato

Bibliografia

- [1] M. Bisiacco, M.E. Valcher, *Controlli Automatici*, Padova, Libreria Progetto, 2008;
- [2] P. Wellstead, *Ball and Hoop 1: Basics*, reperibile all'URL:
<http://www.control-systems-principles.co.uk/downloads.html>;
- [3] P. Wellstead, *Ball and Hoop 2: Control and Analysis*, reperibile all'URL:
<http://www.control-systems-principles.co.uk/downloads.html>;