

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA



FACOLTÀ DI SCIENZE STATISTICHE

CORSO DI LAUREA SPECIALISTICA IN  
SCIENZE STATISTICHE, ECONOMICHE, FINANZIARIE E  
AZIENDALI

TESI DI LAUREA

**INVESTING FOR THE LONG RUN:  
PREDICTABILITY AND LOSS  
AVERSION**

RELATORE: PROF. MASSIMILIANO CAPORIN

LAUREANDA: ELISA GAIOFATTO

ANNO ACCADEMICO 2008/2009



# Indice

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Introduzione</b>  | <b>V</b>  |
| <b>1 Allocazione di portafoglio nel breve periodo</b>            | <b>1</b>  |
| 1.1 Introduzione . . . . .                                       | 1         |
| 1.2 Teoria dell'Utilità Attesa . . . . .                         | 2         |
| 1.3 Rendimenti e titolo non rischioso . . . . .                  | 6         |
| 1.3.1 Rendimenti del portafoglio . . . . .                       | 8         |
| 1.3.2 Risk free e extrarendimenti . . . . .                      | 9         |
| 1.4 Analisi Media-Varianza . . . . .                             | 10        |
| 1.4.1 Scelta di portafoglio nel breve periodo . . . . .          | 13        |
| 1.4.2 Limiti del modello di Markovitz . . . . .                  | 14        |
| 1.5 Effetto dell'orizzonte di investimento . . . . .             | 17        |
| 1.5.1 Strategie di investimento . . . . .                        | 18        |
| 1.5.2 Scelta di portafoglio nel lungo periodo . . . . .          | 19        |
| <b>2 Allocazione di portafoglio con incertezza nei parametri</b> | <b>23</b> |
| 2.1 Introduzione . . . . .                                       | 23        |
| 2.2 Incertezza nei parametri . . . . .                           | 24        |
| 2.3 Caratteristiche del dataset . . . . .                        | 27        |
| 2.3.1 Analisi preliminari . . . . .                              | 27        |
| 2.4 Allocazione di portafoglio nel lungo periodo . . . . .       | 35        |
| 2.4.1 Procedura di campionamento . . . . .                       | 39        |
| 2.5 Risultati . . . . .  | 40        |
| 2.5.1 Caso senza incertezza . . . . .                            | 42        |

---

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 2.5.2    | Caso con incertezza . . . . .                                  | 44         |
| 2.6      | Ricampionamento . . . . .                                      | 47         |
| 2.6.1    | Risultati . . . . .  | 48         |
| <b>3</b> | <b>Allocazione di portafoglio con rendimenti prevedibili</b>   | <b>51</b>  |
| 3.1      | Introduzione . . . . .   | 51         |
| 3.2      | Prevedibilità dei rendimenti . . . . .                         | 51         |
| 3.3      | Prevedibilità e incertezza negli investimenti di lungo periodo | 55         |
| 3.4      | Modello per l'analisi della prevedibilità . . . . .            | 56         |
| 3.5      | Allocazione di portafoglio nel lungo periodo . . . . .         | 58         |
| 3.5.1    | Procedura di campionamento . . . . .                           | 62         |
| <b>4</b> | <b>Risultati</b>   | <b>65</b>  |
| 4.1      | Introduzione . . . . .   | 65         |
| 4.2      | Variabile previsiva: tasso di dividendo . . . . .              | 65         |
| 4.2.1    | Analisi preliminari . . . . .                                  | 66         |
| 4.2.2    | Risultati . . . . .  | 71         |
| 4.3      | Variabile previsiva: tasso di interesse a breve . . . . .      | 79         |
| 4.3.1    | Analisi preliminari . . . . .                                  | 79         |
| 4.3.2    | Risultati . . . . .  | 81         |
| 4.4      | Variabile previsiva: term spread . . . . .                     | 87         |
| 4.4.1    | Analisi preliminari . . . . .                                  | 87         |
| 4.4.2    | Risultati . . . . .  | 91         |
| 4.5      | Ruolo della variabile tasso di dividendo . . . . .             | 97         |
| <b>5</b> | <b>Allocazione di portafoglio con funzione loss aversion</b>   | <b>101</b> |
| 5.1      | Introduzione . . . . .   | 101        |
| 5.2      | Critiche alla teoria dell'Utilità Attesa . . . . .             | 102        |
| 5.3      | Prospect Theory . . . . .                                      | 103        |
| 5.4      | Finanza Comportamentale . . . . .                              | 107        |
| 5.5      | Allocazione di portafoglio nel lungo periodo . . . . .         | 109        |
| 5.6      | Risultati . . . . .  | 111        |

|                                  |            |
|----------------------------------|------------|
| INDICE                           | III        |
| <hr/>                            |            |
| <b>Conclusioni</b>               | <b>119</b> |
| <b>Appendice: comandi R</b>      | <b>123</b> |
| <b>Riferimenti bibliografici</b> | <b>147</b> |



# Introduzione

In ambito finanziario il problema della scelta di portafoglio svolge un ruolo di primaria importanza. La moderna teoria finanziaria è probabilmente iniziata con il modello teorico sviluppato da Harry Markovitz (1952), il quale delineò l'*Analisi Media-Varianza* per la soluzione di problemi legati alla determinazione dell'allocazione ottimale di portafoglio nel breve periodo.

Le decisioni sulla scelta di portafoglio dipendono da una serie di fattori come le preferenze degli investitori, la disponibilità dei titoli finanziari, i rendimenti attesi e il rischio. Tutti questi fattori diventano particolarmente rilevanti per investitori con obiettivi di lungo termine. Gli investitori con orizzonti di investimento particolarmente lunghi sono interessati non solo ai rendimenti attesi e al rischio, ma soprattutto al modo in cui i rendimenti dei titoli finanziari variano nel tempo.

I portafogli ottimi per investitori con orizzonti di investimento di lungo termine non devono necessariamente avere la stessa composizione di quelli relativi a investitori di breve termine. Una massima finanziaria, molto diffusa, consiglia di investire maggiormente in azioni nel lungo termine, come è stato ripreso nel titolo di un famoso libro, *Stocks for the long run* (Siegel, 1994). È interessante chiedersi se effettivamente l'*effetto dell'orizzonte* di investimento influenzi le scelte di portafoglio, ovvero se un investitore con orizzonte di lungo termine allochi la sua ricchezza diversamente dall'allocazione ottimale di breve termine.

Questa tesi si focalizza sull'allocazione ottima di portafoglio nel lungo

termine per un investitore avverso al rischio, il quale decide oggi come investire e non modifica l'allocazione fino alla scadenza prefissata.

Il presente lavoro prende origine dall'articolo di Nicholas Barberis (2000) sugli investimenti per il lungo periodo. Le analisi da lui condotte sono volte ad analizzare l'allocazione ottima di portafoglio in presenza di due titoli finanziari, un indice azionario e il titolo privo di rischio, e di una funzione di utilità potenza per descrivere le preferenze dell'investitore.

Parte rilevante dell'articolo riguarda la composizione del portafoglio quando l'evoluzione dinamica dei rendimenti viene parzialmente prevista dalla variabile tasso di dividendo. Questa variabile comporta un'allocazione nell'indice azionario crescente all'aumentare dell'orizzonte di investimento, contrariamente al caso in cui i rendimenti siano trattati come indipendenti e identicamente distribuiti. La previsione effettuata dal tasso di dividendo fa apparire le azioni meno rischiose nel lungo periodo rispetto al breve termine.

L'obiettivo principale della tesi consiste nell'esaminare come la prevedibilità nei rendimenti influenzi le scelte di allocazione del portafoglio per investitori con diversi orizzonti di investimento. Si vogliono analizzare le implicazioni e l'ampiezza di questi effetti nella determinazione del portafoglio ottimo, quando l'individuo adotta una strategia di investimento *buy-and-hold* e il suo orizzonte di investimento cambia.

Nella letteratura finanziaria sono state esaminate diverse variabili per prevedere parzialmente variazioni nel tempo dei rendimenti attesi. Per questo motivo si è generalizzato nella tesi quanto studiato da Barberis, considerando non solo il tasso di dividendo ma anche altre variabili finanziarie, in particolare il tasso di interesse a breve e il term spread.

Spesso la capacità previsiva delle variabili considerate è piuttosto debole. Quindi si può prendere in considerazione l'estimation risk, ovvero l'incertezza nei veri valori dei parametri presenti nel modello utilizzato

per determinare l'allocazione ottima del portafoglio. Il ricorso all'estimation risk si rivela dunque come una via intermedia tra il rifiutare l'ipotesi di prevedibilità dei rendimenti e il fissare i parametri del modello al loro valore stimato.

Dal punto di vista applicativo viene considerato un modello vettoriale autoregressivo per spiegare le variazioni nel tempo dei rendimenti di un indice azionario attraverso le tre variabili previsive suddette. In seguito viene incorporata l'incertezza nel modello VAR per mezzo della distribuzione a posteriori dei parametri condizionatamente ai dati disponibili in un'ottica Bayesiana.

L'obiettivo consiste nel comprendere come le distribuzioni dei rendimenti e le allocazioni ottimali siano influenzate dall'incertezza nei parametri.

Un'ulteriore estensione a quanto presente nell'articolo di Barberis riguarda l'utilizzo della funzione di loss aversion, considerata da Kahneman e Tversky (1979) nella Prospect Theory, per descrivere le preferenze degli individui in condizioni di incertezza. Il comportamento degli investitori sembra essere di avversione al rischio per gli eventuali guadagni e di propensione quando devono prendere decisioni su perdite potenziali. Con questa funzione di utilità gli individui tendono a valutare la disutilità derivante da una perdita in modo superiore all'utilità associata ad un guadagno di uguale misura.

L'obiettivo consiste nell'analizzare come cambiano i risultati precedentemente ottenuti sull'allocazione ottima di portafoglio se si utilizza la funzione di loss aversion invece della funzione di utilità potenza.

Il primo capitolo è un capitolo di rassegna che introduce gli strumenti e i concetti che verranno poi applicati nel seguito della tesi. Vengono richiamate le definizioni di rendimento e di extrarendimento. Vengono trattate dettagliatamente la Teoria dell'Utilità Attesa e l'Analisi Media-Varianza.

Infine, si considerano i casi in cui l'allocazione di portafoglio non cambia al variare dell'orizzonte di investimento e le principali strategie di investimento che un individuo può adottare.

Il capitolo 2 tratta il problema dell'estimation risk nell'ambito dell'allocazione ottima di portafoglio. Vengono indicate le distribuzioni a posteriori dei parametri del modello, secondo un approccio Bayesiano, e viene determinata la distribuzione degli extrarendimenti azionari futuri condizionatamente ai dati disponibili. Il modello viene successivamente applicato ad un dataset reale. Di seguito vengono riportati i risultati ottenuti sia nel caso si consideri una distribuzione normale per gli extrarendimenti, sia nel caso si utilizzi la tecnica di ricampionamento per simulare dati dal vero e ignoto processo generatore.

Il terzo capitolo è relativo alla prevedibilità dei rendimenti. Vengono riportate le principali evidenze empiriche e le variabili previsive trattate nella letteratura finanziaria. In seguito viene considerato un modello vettoriale autoregressivo del primo ordine con alcune restrizioni per prevedere gli extrarendimenti dell'indice azionario.

Nel capitolo seguente vengono analizzati i risultati ottenuti dall'applicazione del modello al dataset reale. I risultati relativi all'allocazione ottimale di portafoglio al variare dell'orizzonte di investimento per un individuo buy-and-hold sono suddivisi a seconda della variabile previsiva considerata. Le variabili utilizzate sono il tasso di dividendo, il tasso di interesse a breve e il term spread.

Infine, nel capitolo 5, vengono menzionate le più importanti critiche alla Teoria dell'Utilità Attesa e i contributi empirici che hanno dato luogo alla nascita della Finanza Comportamentale. Successivamente viene introdotta la Prospect Theory per descrivere il comportamento reale degli investitori. In particolare vengono analizzati i risultati ottenuti dall'utilizzo della funzione di utilità loss aversion per lo studio dell'allocazione ottima di portafoglio.

# Capitolo 1

## Allocazione di portafoglio nel breve periodo

### 1.1 Introduzione

Il presente capitolo è essenzialmente un capitolo di rassegna, avente l'obiettivo di spiegare dettagliatamente alcuni concetti e strumenti utilizzati nel seguito della tesi.

Inizialmente viene descritta la Teoria dell'Utilità Attesa, utilizzata nei modelli finanziari per descrivere il comportamento degli investitori in condizioni di incertezza. Si richiamano le principali funzioni di utilità e le loro caratteristiche.

Nel secondo paragrafo viene definito il concetto di rendimento di un titolo finanziario e vengono menzionate le principali proprietà statistiche dei rendimenti. Successivamente viene spiegato il significato di tasso di interesse privo di rischio.

Parte fondamentale di questo capitolo riguarda l'Analisi Media-Varianza, teoria utilizzata per determinare l'allocazione ottimale del portafoglio nel breve periodo, della quale sono esposti i principali limiti.

Infine vengono considerati i casi in cui il portafoglio ottimo di breve periodo non cambia al variare dell'orizzonte di investimento, come trattato

dagli economisti Samuelson e Merton.

## 1.2 Teoria dell'Utilità Attesa

In ambito finanziario gli investitori effettuano scelte che hanno una natura intertemporale. Essendo il futuro ignoto, le decisioni devono essere prese in condizioni di incertezza, perché le conseguenze economiche non sono deterministiche ma stocastiche. Ad esempio dato un investimento al tempo  $t$ , il suo valore in  $t + 1$  sarà diverso a seconda dello stato di natura che si realizzerà. L'incertezza è ovunque, in ogni campo dell'economia e della finanza i soggetti devono prendere decisioni in un ambiente mutevole e quindi incerto.

Un modello che cerca di spiegare i comportamenti e le scelte di soggetti razionali è la Teoria dell'Utilità Attesa sviluppata da von Neumann e Morgenstern nel 1947. Nacque l'idea che gli individui valutino le grandezze finanziarie basandosi non direttamente sul loro ammontare, bensì sul livello di soddisfazione che essi attribuiscono, in modo del tutto soggettivo, al loro possesso. Secondo questa impostazione, ogni operatore agisce associando alle grandezze finanziarie un valore che misura il suo grado di desiderabilità in quel momento. Tale valore è un numero reale, determinato sulla base di un metro di valutazione personale, che dipenderà quindi dalla situazione particolare dell'individuo interessato.

Questa teoria permette di studiare le preferenze individuali, le quali vengono rappresentate tramite una funzione di utilità  $u$ , definita a meno di una trasformazione monotona crescente. Essa gode di due proprietà: deve rispettare l'ordine delle preferenze del soggetto e deve essere crescente, ovvero deve avere utilità marginale della ricchezza positiva, perché a maggiori payoff è naturale associare una maggiore utilità.

La teoria dell'Utilità Attesa può essere anche applicata in condizioni di rischio, cioè quando l'individuo deve prendere una decisione senza conoscere con certezza quale stato del mondo si verificherà, ma conosce i possibili eventi, a ciascuno dei quali associa una probabilità di realizzazione. Le persone che compiono scelte di investimento tra alternative diverse caratterizzate da esiti incerti, di cui sono note le probabilità di accadimento, associano un valore monetario ad ogni alternativa. Le alternative rischiose vengono ordinate per mezzo dell'utilità attesa, espressa in funzione dei risultati possibili e delle probabilità che tali risultati si manifestino.

Data una funzione  $u(x)$ , dove  $x$  è il valore della ricchezza in  $t + 1$  e assumendo che  $u'(x) > 0$ , l'utilità attesa della ricchezza risulta

$$\mathbb{E}[u(x)] = \sum_{i=1}^S p_i u(x_i)$$

con  $\sum_{i=1}^S p_i = 1$  e  $S$  numero degli stati di natura.

Tra varie combinazioni rischiose i soggetti scelgono sulla base dei rispettivi valori dell'utilità attesa. L'individuo razionale sceglierà l'alternativa che gli procura l'utilità maggiore, facendo riferimento non al valore atteso delle varie conseguenze, ma al valore atteso della corrispondente utilità. In pratica verrà sempre scelta la combinazione a cui è associata l'utilità attesa più elevata.

Dovendo scegliere tra due progetti, uno privo di rischio con rendimento certo  $R$  e uno rischioso con rendimento atteso  $R$ , la scelta avviene dal confronto tra  $u(\mathbb{E}[x])$  e  $\mathbb{E}[u(x)]$ .

Un soggetto decisore è avverso al rischio se a parità di rendimento preferisce la somma certa, ovvero  $u(\mathbb{E}[x]) > \mathbb{E}[u(x)]$ . In questo caso l'individuo è disposto a rinunciare a una parte di guadagno in cambio di un esito certo, in quanto l'incertezza è considerata un elemento negativo.

Il concetto di avversione al rischio è utile per misurare gli effetti del rischio

nel livello di soddisfazione e nelle preferenze degli individui.

La funzione di utilità può assumere diverse forme:

- concava quando descrive le preferenze di un individuo avverso al rischio;
- convessa quando descrive le preferenze di un individuo propenso al rischio, ovvero quando  $u(\mathbb{E}[x]) < \mathbb{E}[u(x)]$ ;
- lineare per un individuo neutrale al rischio, cioè quando è indifferente tra i due progetti.

Un modo per misurare l'intensità dell'avversione al rischio potrebbe essere quello di calcolare la derivata seconda  $u''$ , ma questa misura non è invariante a trasformazioni affini. Gli indicatori di avversione al rischio di Arrow-Pratt risolvono questo problema.

Il coefficiente di avversione assoluta al rischio di Arrow-Pratt è

$$R_A(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)},$$

dove  $x$  è la conseguenza generica. Si tratta di una misura locale del rischio, in quanto dipende in generale da  $x$ , e la sua unità di misura è l'inverso di quella con cui si misura la conseguenza  $x$ . Questo coefficiente determina l'ammontare assoluto che un investitore è disposto a pagare per evitare una situazione che presenta un certo livello di rischio. Comunemente si assume che  $R_A$  diminuisca con la ricchezza.

Il coefficiente di avversione relativa al rischio di Arrow-Pratt è

$$R_R(x) = -x \frac{u''(x)}{u'(x)} = x R_A(x).$$

Si tratta di una grandezza adimensionale che determina la quota di ricchezza che un investitore è disposto a pagare per evitare una situazione con un dato livello di rischio. Il comportamento di lungo periodo dell'economia mostra che l'avversione relativa al rischio è quasi indipendente dalla ricchezza. In questo caso individui con qualsiasi livello di ricchezza

prendono le stesse decisioni.

Se la funzione di utilità è concava, gli indicatori sono positivi e all'aumentare del loro valore aumenta il grado di avversione al rischio.

In economia vengono spesso utilizzate le funzioni di utilità appartenenti all'insieme delle funzioni con *avversione assoluta al rischio armonica*, HARA. Una funzione di utilità è di classe HARA se la *tolleranza al rischio*, cioè l'inverso di  $R_A$ , è lineare con la ricchezza  $x$

$$u(x) = \zeta \left( \eta + \frac{x}{\gamma} \right)^{1-\gamma},$$

con  $R_A(x) = \left( \eta + \frac{x}{\gamma} \right)^{-1}$ , funzione iperbolica. Questa funzione è definita se  $\eta + \frac{x}{\gamma} > 0$ , inoltre per avere una funzione crescente e concava è necessario che  $\zeta(1 - \gamma)^{-1} > 0$ .

Cambiando il valore dei parametri  $\eta$  e  $\gamma$  si possono generare tutte le funzioni di utilità di classe HARA, in particolare esistono tre tipologie di funzioni HARA particolarmente utilizzate nella letteratura finanziaria:

- **Avversione relativa al rischio costante (CRRA)**

Se  $\eta = 0$  l'avversione relativa al rischio è indipendente dalla ricchezza. Scegliendo  $\zeta$  in modo tale da normalizzare  $u'(1) = 1$  si ottiene  $u'(x) = x^{-\gamma}$ . Questo implica la seguente forma della funzione di utilità

$$u(x) = \begin{cases} x^{1-\gamma}/(1-\gamma) & \text{se } \gamma \neq 1, \\ \log(x) & \text{se } \gamma = 1 \end{cases}$$

Quando  $\gamma < 1$  l'utilità va da 0 a  $\infty$  come la ricchezza, mentre per valori di  $\gamma$  maggiori di 1 l'utilità è compresa tra  $-\infty$  e 0.

- **Avversione assoluta al rischio costante (CARA)**

Il coefficiente di avversione assoluta al rischio è indipendente dalla ricchezza  $x$  se  $\gamma \rightarrow +\infty$ . In questo caso  $R_A = 1/\eta$  e la funzione di utilità risulta

$$u(x) = -\frac{e^{-Ax}}{A}.$$

- Funzione di utilità quadratica

Ponendo  $\gamma = -1$  si ottiene una funzione di utilità quadratica, definita solo per valori della ricchezza inferiori a  $\eta$ . Quando la ricchezza supera il livello  $\eta$  la funzione quadratica, pur rimanendo concava, comincia a scendere. Questo significa che un soggetto che aumenta la sua ricchezza oltre un certo limite subisce una perdita di utilità. Questo problema ha contribuito al rapido tramonto della funzione di utilità quadratica nelle applicazioni finanziarie.

### 1.3 Rendimenti e titolo non rischioso

Per svolgere un'analisi empirica si devono utilizzare informazioni la cui tipologia dipende dagli obiettivi che si perseguono. La maggior parte degli studi finanziari non considera i prezzi ma i rendimenti, che rappresentano il legame tra la ricchezza finale e l'investimento iniziale. In primo luogo un investitore razionale non è attratto tanto dal guadagno assoluto, ovvero dalla differenza tra prezzo di acquisto e di vendita di un titolo, quanto piuttosto dal guadagno percentuale, che non dipende dalla somma inizialmente investita. I rendimenti rappresentano un sommario completo e adimensionale dell'opportunità di investimento. In secondo luogo, le serie storiche dei rendimenti sono più facili da trattare da un punto di vista statistico e manifestano proprietà statisticamente più attraenti rispetto alla serie dei prezzi, i quali evolvono nel tempo seguendo un processo stocastico Random Walk. Sia  $P_t$  il prezzo relativo ad una attività finanziaria al tempo  $t$ , allora  $\log P_t = \mu + \log P_{t-1} + u_t$  con  $\mathbb{E}(u_t | P_{t-1}, P_{t-2}, \dots) = 0$  è un processo non stazionario.

Esistono diverse definizioni di rendimento, tutte basate sul concetto di variazione dei prezzi. Inizialmente supponiamo che l'attività finanziaria non dia dividendi.

- rendimento semplice lordo

In capitalizzazione semplice il rendimento di un'attività finanziaria è dato da

$$1 + R_t = \frac{P_t}{P_{t-1}}.$$

I rendimenti semplici non possono essere generati da una distribuzione normale perché  $R_t \geq -1$ .

- rendimento composto a tempo continuo

In capitalizzazione continua il rendimento è dato dal logaritmo naturale del rendimento semplice lordo e rappresenta il tasso di crescita composto nei prezzi tra  $t - 1$  e  $t$ :

$$r_t = \log(1 + R_t) = \log \frac{P_t}{P_{t-1}}.$$

Questo rendimento, detto anche rendimento logaritmico, non è limitato inferiormente ed è quindi compatibile con l'ipotesi di normalità. Se  $r_t$  si distribuisce come una normale di media  $\mu$  e varianza  $\sigma^2$ , allora il rendimento semplice ha distribuzione lognormale con valore atteso  $\mathbb{E}(1 + R_t) = e^{(\mu + \frac{\sigma^2}{2})}$  e varianza  $Var(1 + R_t) = (e^{\sigma^2} - 1) e^{(2\mu + \sigma^2)}$ . Il rendimento logaritmico multiperiodale è semplicemente la somma dei rendimenti logaritmici uniperiodali. Quindi l'assunzione di rendimenti composti normali rimane valida per quelli multiperiodali, dato che la somma di normali è ancora una normale. In assenza di dividendi questa regola semplifica notevolmente l'aggregazione nel tempo dei rendimenti.

Se un titolo paga dei dividendi periodicamente, allora i rendimenti diventano

$$1 + R_t = \frac{P_t + D_t}{P_{t-1}} \quad \text{e} \quad r_t = \log(P_t + D_t) - \log(P_{t-1}).$$

I due modi per definire i rendimenti conducono in realtà a risultati molto simili. Tale proprietà è verificabile sviluppando in serie di Taylor il logaritmo dei prezzi fino al secondo ordine rispetto a  $P_t$  in un intorno di

$P_{t-1}$ . Si può notare che  $r_t \leq R_t$  e che la differenza tra le due definizioni è solitamente piccola, data l'unità di misura dei rendimenti. Pertanto le proprietà valide per i rendimenti logaritmici sono approssimativamente valide anche per i rendimenti semplici.

La scelta di quale tipo di rendimento utilizzare dipende strettamente dalla tipologia di analisi da condurre. Se l'attenzione è concentrata su una serie storica, la capitalizzazione continua tende a essere preferita per la facilità con la quale è possibile aggregare rendimenti consecutivi. Se invece il campione in analisi è di cross-section, allora è preferibile utilizzare i rendimenti semplici.

### 1.3.1 Rendimenti del portafoglio

Sia  $R_{it}$  il rendimento semplice associato al titolo  $i$  di un portafoglio composto da  $N$  titoli e  $w_i$  il suo peso nel portafoglio. Quindi un portafoglio è un insieme di titoli in cui viene allocata la ricchezza.

Il rendimento semplice del portafoglio è  $R_{pt} = \sum_{i=1}^N w_i R_{it}$  con le quote che sommano a 1. Invece il rendimento logaritmico del portafoglio è il logaritmo di questa combinazione lineare, che non corrisponde alla combinazione lineare dei logaritmi, ovvero  $r_{pt} \neq \sum_{i=1}^N w_i r_{it}$ .

I rendimenti semplici determinano il rendimento del portafoglio come somma ponderata dei rendimenti dei singoli titoli. Questo non è valido per i rendimenti logaritmici, in quanto il logaritmo di una sommatoria non è pari alla somma dei logaritmi e la somma di log-normali non si distribuisce come una log-normale. Tuttavia se i rendimenti semplici  $R_{it}$  sono tutti piccoli in valore assoluto, si può usare l'approssimazione  $r_{pt} \approx \sum_{i=1}^N w_i r_{it}$ . Questo tipo di problema nel calcolo dei rendimenti di portafoglio scompare completamente nel caso di tempo continuo, dunque può essere evitato considerando intervalli temporali estremamente brevi.

### 1.3.2 Risk free e extrarendimenti

Per le analisi che verranno condotte in seguito è necessario fare riferimento a un titolo non rischioso, il cui rendimento  $r_f$  è noto fin dalla data di acquisto del titolo. Nella realtà il titolo privo di rischio viene di solito identificato con un deposito bancario o un titolo di stato a breve termine. Questi non comportano rischi perché il pericolo di inadempienza da parte dello Stato è praticamente nullo. Nel corso del tempo i rendimenti di questo titolo fluttuano e potrebbero apparire rischiosi, dato che la loro varianza campionaria è diversa da zero. Tuttavia la loro variabilità è quasi sempre minima rispetto a quella dei titoli rischiosi e può con buona approssimazione essere considerata nulla.

Un risparmiatore può scegliere di investire una parte della propria ricchezza nel titolo non rischioso, oltre che negli  $N$  titoli rischiosi. Se si indica con  $\omega_0$  la quota di ricchezza investita nel titolo non rischioso, il cui rendimento è  $r_f$ , il rendimento del portafoglio diventa

$$r_p = \omega_0 r_f + \boldsymbol{\omega}' \mathbf{r}, \quad \text{con} \quad \omega_0 + \boldsymbol{\iota}' \boldsymbol{\omega} = 1,$$

equivalentemente

$$r_p = r_f + \boldsymbol{\omega}' (\mathbf{r} - r_f \boldsymbol{\iota}).$$

Il vettore  $\mathbf{r} - r_f \boldsymbol{\iota}$  contiene il rendimento in eccesso degli  $N$  titoli rischiosi rispetto al titolo non rischioso. Si definisce **extrarendimento** di un titolo rischioso la differenza tra il suo tasso di rendimento e il tasso privo di rischio. Sottraendo  $r_f$  a entrambi i membri della formula precedente è possibile ottenere la formula dell'extrarendimento del portafoglio in funzione degli extrarendimenti dei titoli rischiosi

$$z_p = \boldsymbol{\omega}' \mathbf{z}.$$

In questo caso il vettore delle quote non somma a 1, poiché  $\boldsymbol{\omega}$  riflette solo l'investimento nei titoli rischiosi.

Il valore atteso dell'extrarendimento di un titolo rischioso è definito il suo premio per il rischio, poiché rappresenta il compenso atteso per il rischio incorso nel detenere il titolo rischioso al posto di quello non rischioso. In altre parole è la remunerazione aggiuntiva per compensare il maggior livello di rischiosità di un investimento.

Una misura appropriata del rischio dei titoli rischiosi è fornita dalla deviazione standard degli extrarendimenti. A causa delle fluttuazioni di  $r_f$  nel corso del tempo, le varianze e covarianze campionarie degli extrarendimenti non coincidono con quelle dei rendimenti; non è difficile tuttavia verificare che la differenza è modesta se la variabilità nel tempo di  $r_f$  è piccola rispetto a quella di  $r$ . Nella maggior parte dei casi questa condizione è verificata e la differenza fra i momenti secondi empirici di  $r$  e  $z$  non è significativa.

La maggior parte dei modelli economici si fonda sull'ipotesi, non sempre verificata, che i rendimenti e gli extrarendimenti siano realizzazioni indipendenti provenienti dalla stessa distribuzione normale multivariata.

## 1.4 Analisi Media-Varianza

In finanza uno dei problemi più importanti da affrontare riguarda la scelta di portafoglio, ovvero la determinazione dell'allocazione ottimale ottenuta massimizzando l'utilità attesa. *L'asset allocation* è il processo di suddivisione delle proprie attività tra diverse asset classes, cioè insiemi molto ampi di titoli caratterizzati da un rapporto rischio-rendimento omogeneo. Di norma, il termine *asset class* viene assegnato alle seguenti tre macrocategorie di strumenti finanziari: azioni, obbligazioni, liquidità.

La selezione di portafoglio si configura come la modellazione di un problema di scelta tra alternative diverse, con l'obiettivo finale di determinare le quote costituenti il portafoglio che minimizza il rischio e massimizza il

rendimento.

La teoria della scelta di portafoglio fu sviluppata originariamente da Markovitz (1952), il quale delineò il modello teorico detto **Analisi Media-Varianza** per la soluzione di problemi legati all'asset allocation nel breve periodo. L'impianto markoviano consta di due grandi blocchi concettuali: una fase di ottimizzazione, relativa all'individuazione dei portafogli efficienti tra quelli considerati, ed una fase di massimizzazione della soddisfazione del decisore. In quest'ultima fase l'introduzione delle preferenze degli individui rende possibile confrontare i portafogli efficienti tra loro, e la conseguente scelta finale di uno di essi. Il tutto viene analizzato nell'ottica della teoria dell'Utilità Attesa, elemento di raccordo tra le due fasi, che quantifica in modo completo la posizione del decisore. Più precisamente il criterio Media-Varianza descrive il comportamento razionale dell'investitore, il quale basa le sue decisioni sul rendimento atteso dei titoli e sulla loro varianza come misura del rischio.

L'obiettivo consiste nel trovare la frontiera efficiente costituita da tutti i portafogli che hanno varianza minima per un dato livello di rendimento atteso o che hanno rendimento medio massimo a parità di rischio.

Ci sono due modi per ricavare la frontiera efficiente:

- minimizzare la varianza del portafoglio per tutti i possibili valori del rendimento atteso;
- massimizzare l'utilità degli investitori variando il livello di avversione al rischio.

Questi due metodi conducono alla stessa frontiera efficiente se la funzione di utilità è quadratica oppure se la distribuzione dei rendimenti è di tipo ellittico, come nel caso della normale multivariata.

L'agente massimizza una funzione obiettivo che dipende dalla media e dalla varianza dei rendimenti del portafoglio, determinando così un in-

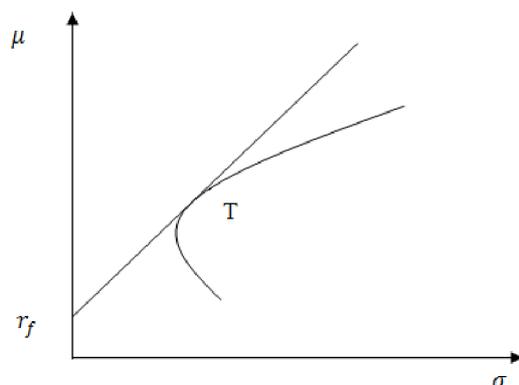


Figura 1.1: *Frontiera efficiente in presenza di titolo non rischioso.*

sieme di portafogli efficienti con varianza minima a parità di rendimento medio, che costituiscono la frontiera efficiente. Da notare è che l'insieme dei portafogli efficienti non dipende dalle aspettative dell'agente, né dalla sua avversione al rischio.

Se il portafoglio contiene un titolo non rischioso, allora la frontiera efficiente diventa una retta tangente alla frontiera efficiente costituita da soli titoli rischiosi, denominata **Capital Market Line**. Il portafoglio ottimo per il singolo investitore viene determinato come punto di tangenza tra la retta e le curve di indifferenza derivate dalla funzione di utilità. Pertanto tutti gli investitori interessati solo alla media e alla varianza detengono lo stesso portafoglio di titoli rischiosi ma in quantità diverse.

Questi risultati possono essere riportati in un diagramma cartesiano ponendo nell'asse delle ordinate il rendimento atteso del portafoglio e nell'asse delle ascisse la deviazione standard. Le azioni mostrano un rendimento medio più alto e una deviazione standard più elevata, mentre il titolo privo di rischio ha rendimento più basso e una deviazione standard approssimativamente nulla, per cui viene posto lungo l'asse verti-

cale. La linea curva rappresenta la frontiera efficiente nel caso di soli titoli rischiosi. Quando viene introdotto il titolo privo di rischio la frontiera efficiente diventa una retta passante per il risk-free e tangente alla curva. Un investitore sceglierà un punto lungo la Capital Market Line a seconda delle sue preferenze e della sua avversione al rischio. A sinistra del punto di tangenza si collocano i portafogli efficienti scelti da investitori conservatori, mentre a destra vi sono i portafogli di investitori aggressivi, i quali si indebitano al tasso  $r_f$  per investire quote maggiori nel portafoglio di tangenza, ottenendo così rendimenti attesi più elevati.

### 1.4.1 Scelta di portafoglio nel breve periodo

Nel modello di Markovitz, in presenza di un titolo rischioso e di un titolo non rischioso, l'investitore preferisce una media più alta e una varianza più bassa dei rendimenti del portafoglio. L'investitore massimizza una combinazione lineare di media e varianza, assegnando un peso  $k$  negativo alla varianza, che rappresenta la sua avversione alla variabilità dei rendimenti:

$$\max_{\omega} \left( \mathbb{E}_t(R_{p,t+1}) - \frac{k}{2} \sigma_{p,t}^2 \right),$$

dove  $\omega$  è la quota di portafoglio investita nel titolo rischioso e  $\sigma_{p,t}^2$  è la varianza del portafoglio al tempo  $t$ .

Risultati simili si ottengono anche assumendo che gli investitori abbiano una funzione di utilità definita sulla ricchezza alla fine del periodo considerato,  $W_{t+1}$ . Il problema di massimizzazione diventa

$$\max_{\omega} \mathbb{E}_t [U(W_{t+1})],$$

sotto il vincolo  $W_{t+1} = (1 + R_{t+1})W_t$ . I modelli per la scelta di portafoglio richiedono assunzioni sulla forma della funzione di utilità e sulla distribuzione dei rendimenti dei titoli. Vi sono tre insiemi alternativi di assunzioni che producono risultati consistenti con quelli derivanti dall'analisi media-varianza:

- Gli investitori hanno una funzione di utilità quadratica definita sulla ricchezza:  $U(W_{t+1}) = aW_{t+1} + bW_{t+1}^2$ . L'utilità quadratica implica che l'avversione assoluta e relativa al rischio sia crescente con la ricchezza. Massimizzare l'utilità attesa equivale a massimizzare una combinazione lineare di media e varianza. Non viene richiesta alcuna assunzione sulla distribuzione dei rendimenti.
- Gli investitori hanno una funzione di utilità esponenziale,  $U(W_{t+1}) = -e^{-\theta W_{t+1}}$ , e i rendimenti semplici dei titoli sono distribuiti normalmente. L'utilità esponenziale implica un coefficiente di avversione assoluta al rischio costante  $\theta$  e un coefficiente di avversione relativa al rischio crescente con la ricchezza.
- Gli investitori hanno una funzione di utilità potenza,  $U(W_{t+1}) = (W_{t+1}^{1-\gamma})/(1-\gamma)$ , e i rendimenti semplici dei titoli hanno una distribuzione lognormale. L'utilità potenza implica che il coefficiente di avversione assoluta al rischio diminuisca con la ricchezza, mentre il coefficiente di avversione relativa al rischio sia costante e pari a  $\gamma$ . Per  $\gamma = 1$  si ottiene l'utilità logaritmica:  $U(W_{t+1}) = \log(W_{t+1})$ .

La funzione di utilità potenza risulta essere la migliore per spiegare le preferenze degli individui perché presenta un coefficiente di avversione relativa al rischio indipendente dalla ricchezza, particolarmente adatto a spiegare la stabilità delle variabili finanziarie. Nel caso i rendimenti logaritmici abbiano distribuzione normale, la funzione di utilità potenza produce risultati semplici. Per questo motivo le prossime analisi sulla scelta di portafoglio verranno elaborate sotto queste due assunzioni.

### 1.4.2 Limiti del modello di Markovitz

Negli ultimi anni si è posta l'attenzione sulla necessità di costruire portafogli che riflettano la situazione personale e le caratteristiche dell'investi-

tore, in modo da soddisfare le sue esigenze. Solitamente i pianificatori finanziari suggeriscono a investitori conservatori di detenere quote maggiori in obbligazioni rispetto agli investitori aggressivi, contrariamente a quanto stabilito nel modello di Markovitz, che prevede un rapporto obbligazioni-azioni costante per qualsiasi tipo di investitore. Una possibile spiegazione riguarda l'impossibilità degli investitori aggressivi di prendere a prestito denaro al tasso  $r_f$ , non riuscendo così a raggiungere i punti in alto a destra della Capital Market Line. In questa situazione sono quindi costretti a muoversi lungo la linea curva aumentando la loro allocazione in azioni rispetto alle obbligazioni.

Nel modello di Markovitz si assume che le preferenze dell'investitore siano descritte da una funzione di utilità di tipo media-varianza. Questa ipotesi consente di ricavare soluzioni esplicite, ma le condizioni sotto le quali essa è verificata sono piuttosto restrittive. La massimizzazione dell'utilità attesa quando non è di tipo media-varianza può tuttavia essere risolta numericamente. Un'ulteriore possibilità è rappresentata dall'assunto che le preferenze dell'investitore violino gli assiomi della teoria dell'Utilità Attesa, come nel caso della Prospect Theory di Kahneman e Tversky (1979).

Aït-Sahalia e Brandt (2001) stimano e confrontano fra loro le frontiere efficienti sotto quattro diverse ipotesi sulle preferenze degli investitori, sottolineando il ruolo svolto dalle preferenze sulle proprietà dei portafogli efficienti.

Nel modello Media-Varianza la composizione dei portafogli ottimali dipende dal valore atteso  $\mu$  e dalla matrice di varianza e covarianza  $\Sigma$  del vettore dei rendimenti  $r$  considerato. Dato che queste quantità sono ignote, è necessario approssimarle utilizzando i relativi stimatori campionari,  $\hat{\mu}$  e  $\hat{\Sigma}$ , stimati sulla base delle serie storiche disponibili. Sostituendo queste stime ai momenti teorici, si ottiene l'allocazione efficiente empirica,

che non coincide con quella teorica ma ne costituisce una stima. Talvolta piccole variazioni negli input portano a grandi cambiamenti della frontiera efficiente.

In diversi casi può essere desiderabile integrare queste stime con altre informazioni, oggettive o soggettive, che si ritiene contribuiscano a rendere più accurata la previsione dei rendimenti. A questo proposito è importante menzionare il modello di Black e Litterman (1992), che combina le informazioni a priori relative ai rendimenti attesi con le relative aspettative, secondo un approccio Bayesiano. I rendimenti attesi e le varianze ottenute dalla distribuzione a posteriori vengono poi utilizzati come input per il modello di Markovitz.

Un'ultima considerazione riguarda il carattere uniperiodale del problema di allocazione del portafoglio analizzato da Markovitz, in quanto si basa sull'assunzione che gli investitori siano interessati solo alla distribuzione della ricchezza nel periodo successivo. Nella realtà gli investitori sono maggiormente interessati a mantenere un determinato tenore di vita attraverso investimenti di lungo periodo.

Se si investe ripetutamente nel portafoglio efficiente uniperiodale si ha una strategia efficiente quando:

- gli investitori hanno avversione relativa al rischio costante e possiedono solo ricchezza finanziaria;
- i rendimenti dei titoli non sono autocorrelati e non possono essere previsti;
- non c'è incertezza nei parametri stimati;
- non ci sono costi di transazione.

La maggior parte di queste assunzioni non è realistica, quindi l'analisi Media-Varianza non risulta adatta per gli investimenti di lungo periodo. Merton (1969) ha mostrato che in un contesto multiperiodale le scelte di

portafoglio possono essere significativamente diverse. Il problema diventa ancor più interessante quando i rendimenti futuri possono essere parzialmente previsti nel momento in cui viene scelta la composizione del portafoglio. In generale ciò conduce a un maggior investimento in titoli rischiosi rispetto al caso uniperiodale (Barberis, 2000), anche se non mancano risultati di segno contrario (Aït-Sahalia e Brandt, 2001) a seconda delle variabili prese in considerazione per prevedere i rendimenti.

## 1.5 Effetto dell'orizzonte di investimento

Le scelte di investimento, indipendentemente dall'individuo che le compie, dipendono da una serie di fattori specifici. Questi influenzano il processo che porta alle scelte e alle politiche di investimento. Uno di questi fattori è l'orizzonte di investimento, rilevante per stabilire la composizione del portafoglio. Gli investitori possono differire tra loro per l'orizzonte di investimento: alcuni possono avere obiettivi a breve termine, altri possono risparmiare per tutta la vita in vista di una pensione integrativa. Ad esempio i giovani investitori, con orizzonti di lungo, vengono incoraggiati ad investire una quota maggiore del loro capitale in titoli rischiosi.

Ci si può chiedere come questo fenomeno influenzi le scelte di allocazione del portafoglio e se vi siano *effetti dell'orizzonte*, ovvero se un investitore con un lungo orizzonte di investimento allochi la sua ricchezza diversamente da uno con orizzonte di breve termine.

I portafogli ottimi per investitori con orizzonti di lungo non devono necessariamente avere la stessa composizione di quelli creati appositamente per brevi orizzonti. Investitori di lungo termine, che valutano la ricchezza per il tenore di vita che permette di sostenere, possono giudicare il rischio diversamente dagli investitori di breve. Il denaro, ad esempio, è rischioso nel lungo termine sebbene sia considerato sicuro nel breve periodo, perché in futuro la liquidità è soggetta al rischio di inflazione. E' evidente che le azioni permettano maggiori guadagni nel lungo termine, nonostante siano

caratterizzate da una certa variabilità nel breve periodo. Per questi motivi un investitore di lungo periodo detiene più azioni e obbligazioni e meno liquidità di quanto detiene un investitore nel breve periodo, analogamente un investitore conservatore ha un portafoglio dominato da obbligazioni.

Per comprendere quale sia l'allocazione ottimale di portafoglio nel caso di diversi orizzonti di investimento, è fondamentale precisare il comportamento che un investitore può adottare.

### 1.5.1 Strategie di investimento

La nostra analisi si focalizza sulle azioni e sulle scelte di investimento di individui con un lungo orizzonte di investimento. Si possono distinguere tre diverse strategie di investimento:

- **strategia buy-and-hold**

Un investitore con orizzonte di investimento pari a  $t$  anni sceglie un'allocazione del portafoglio all'inizio del primo anno e non la modifica fino al raggiungimento dei  $t$  anni. La strategia buy-and-hold è una strategia di investimento passiva e statica: il portafoglio, una volta creato, non viene in alcun modo movimentato. I suoi cambiamenti di valore sono pertanto attribuibili interamente alla dinamica di mercato.

- **strategia di ribilanciamento miope**

L'investitore sceglie alcuni intervalli prefissati per ribilanciare il portafoglio, ad esempio ogni anno. All'inizio del primo anno decide come allocare il portafoglio, sapendo che all'inizio di ogni anno sceglierà sempre la stessa allocazione iniziale.

Questa strategia è detta miope perché l'individuo non utilizza l'informazione aggiuntiva disponibile dopo ogni anno per allocare il portafoglio in modo ottimale per gli anni successivi. Inoltre essa risulta simile alla strategia buy-and-hold in quanto nel corso degli

anni viene scelta sempre la stessa allocazione, come se non si intervenisse fino al termine dell'orizzonte di investimento.

- **strategia di ribilanciamento ottimale**

L'investitore sceglie l'allocazione del suo portafoglio oggi, sapendo che a intervalli regolari potrà riallocare il portafoglio utilizzando tutta la nuova informazione disponibile fino a quell'istante.

Si tratta della tecnica più sofisticata per gestire un portafoglio in un contesto dinamico e incerto come il mercato finanziario.

### **1.5.2 Scelta di portafoglio nel lungo periodo**

In questo paragrafo viene rivista la teoria del portafoglio di Markovitz per investitori con orizzonte di lungo termine e viene illustrato il caso particolare in cui viene scelto lo stesso portafoglio nonostante orizzonti diversi. Si vuole fornire uno schema rigoroso e rilevante empiricamente per aiutare gli investitori con orizzonti di lungo a comprendere come cambia il trade-off tra rischio e rendimento all'aumentare dell'orizzonte.

Gli economisti videro la necessità di costruire teorie per la scelta di portafoglio nel lungo periodo diversi decenni fa. I primi lavori teorici risalgono al 1969 con le ricerche di Samuelson e Merton, a cui seguirono i contributi di Rubinstein, Stiglitz e Breeden. Per molti anni queste ricerche rimasero sul piano teorico, trovando sviluppo solo alla fine degli anni novanta grazie all'utilizzo di metodi numerici per risolvere in modo approssimato i problemi di scelta. Nel frattempo la scoperta di soluzioni esatte e il progredire dei metodi econometrici permisero un notevole sviluppo di questa area nell'ambito della finanza empirica.

Samuelson (1969) e Merton (1969) furono i primi a descrivere le condizioni restrittive sotto le quali gli investitori con orizzonti di lungo termine prendono le stesse decisioni di quelli di breve, agendo in modo miope.

In questo caso l'orizzonte di investimento è irrilevante e la scelta di portafoglio viene detta *miope* in quanto gli investitori ignorano cosa può succedere il periodo successivo e continuano a scegliere lo stesso portafoglio. Si assume che gli investitori con orizzonti di investimento di lungo siano liberi di trattare titoli in ogni momento, cioè possano ribilanciare i loro portafogli in ogni periodo. Inoltre si ipotizza che il coefficiente di avversione relativa al rischio non dipenda dalla ricchezza degli individui.

Sotto queste condizioni, Samuelson e Merton mostrarono che se i rendimenti dei titoli sono indipendenti e identicamente distribuiti (i.i.d.), l'investitore con funzione di utilità potenza, che ribilancia nel tempo il proprio portafoglio in modo ottimo, sceglierà la stessa allocazione di breve periodo indipendentemente dall'orizzonte di investimento. La scelta di portafoglio miope risulta quindi ottimale se gli investitori non hanno redditi da lavoro e se le opportunità di investimento sono costanti nel tempo.

La seconda condizione per una scelta di portafoglio miope fa riferimento ad una funzione di utilità logaritmica. L'utilità logaritmica è un caso particolare della funzione di utilità potenza, ottenuta ponendo  $R_R$  pari a 1. In questo caso la scelta di portafoglio è miope anche se i rendimenti non sono indipendenti e identicamente distribuiti. Pertanto anche se le opportunità di investimento variano nel tempo, con questa funzione di utilità l'orizzonte diventa irrilevante. Questi investitori si comportano in modo miope scegliendo sempre il portafoglio che presenta le migliori caratteristiche nel breve periodo.

Di questo risultato è possibile fornire una spiegazione intuitiva: se l'investitore ha utilità logaritmica, sceglierà il portafoglio che massimizza il valore atteso del rendimento logaritmico del portafoglio. Poiché i rendimenti logaritmici multiperiodali sono la somma dei rendimenti logaritmici uniperiodali, la somma può essere massimizzata massimizzando ogni addendo separatamente, ovvero scegliendo in ogni periodo il portafoglio ottimo di breve periodo.

Le condizioni ottenute che portano a una scelta miope del portafoglio sono abbastanza semplici e possono essere ricavate senza ricorrere alla matematica avanzata.

Contrariamente ai risultati ottenuti, viene spesso consigliato agli investitori con obiettivi di lungo termine di investire maggiormente in azioni all'aumentare dell'orizzonte considerato. Questo consiglio risulta erraneo se si ritengono validi i risultati classici ottenuti da Samuelson e Merton.

Nel prossimo capitolo verrà sviluppata una teoria per la scelta di portafoglio per il lungo periodo quando sono violate le assunzioni di Samuelson e Merton. Ad esempio se i rendimenti sono prevedibili e l'investitore ha una funzione di utilità potenza, l'orizzonte di investimento giocherà probabilmente un ruolo importante nella determinazione dell'allocazione ottimale.

Nel seguito della tesi verrà considerata la strategia buy-and-hold, la quale, pur nella sua semplicità, permette di evidenziare gli effetti di prevedibilità e incertezza, sia separatamente che congiuntamente, sull'allocazione ottimale del portafoglio per un investitore avverso al rischio e con orizzonte di lungo termine.



# Capitolo 2

## Allocazione di portafoglio con incertezza nei parametri

### 2.1 Introduzione

Questo capitolo si focalizza sull'allocazione ottima del portafoglio nel caso in cui i parametri non siano noti con certezza. L'obiettivo consiste nel determinare come l'incertezza nei parametri influenzi la composizione del portafoglio.

Il terzo paragrafo introduce il dataset utilizzato per le analisi successive, unitamente ad una analisi preliminare dei dati al fine di comprendere le loro principali caratteristiche.

Nel quarto paragrafo viene riportato il modello utilizzato per determinare l'allocazione ottima, sia nel caso in cui l'incertezza venga trascurata, sia nel caso in cui venga introdotta attraverso un approccio Bayesiano. Il paragrafo successivo è dedicato all'analisi dei risultati ottenuti dall'applicazione del modello al dataset precedentemente descritto.

Infine si considera la tecnica di ricampionamento per capire se l'ipotesi di normalità dei rendimenti logaritmici influisca sull'allocazione ottima di portafoglio.

## 2.2 Incertezza nei parametri

I modelli teorici che permettono agli agenti economici di prendere decisioni finanziarie ottime assumono noto il vero valore dei parametri, il quale è raramente conosciuto dagli investitori. Nella realtà i parametri del modello devono essere stimati utilizzando le informazioni disponibili. L'affidabilità di un modello dipende dai dati posseduti e dalle stime effettuate, la cui bontà è giudicata da criteri statistici come la minima varianza e l'efficienza asintotica.

Si definisce *estimation risk* l'incertezza dell'investitore sul vero valore dei parametri del modello considerato. Le ragioni dell'esistenza di questo rischio sono da attribuire a due fattori specifici: l'errore campionario in senso stretto, in sede di stima degli input, e la non stazionarietà delle serie storiche. Esso costituisce la fonte primaria di scostamento da soluzioni razionalmente soddisfacenti e coerenti.

La mancanza di precisione tende a produrre portafogli poco realistici. La costruzione di portafogli efficienti è esposta a questo tipo di problema, che si traduce in qualità non desiderabili dei portafogli ottimi:

- *non intuitività*, ovvero la non effettiva proponibilità dei portafogli presso gli asset managers a causa della scarsa diversificazione;
- *instabilità* dei portafogli efficienti ottenuti, cioè l'eccessiva sensibilità a fronte di esigue variazioni negli input;
- *ambiguità*, ovvero la non unicità dei portafogli ottimi selezionati, in quanto provenienti da variabili casuali, i parametri in input, caratterizzati da un certo grado di dispersione;
- *sottoperformance* fuori dal campione, cioè la difficoltà di trovare un riscontro ex-post all'efficienza di portafogli considerati ottimali a priori.

Per questi motivi è interessante incorporare l'incertezza nei parametri all'interno del problema di allocazione del portafoglio; infatti l'obiettivo del presente capitolo consiste nello studio del problema classico di scelta del portafoglio nel caso in cui i parametri non siano noti con certezza.

Markovitz (1952) mostrò che il portafoglio ottimo per un investitore con utilità media-varianza è una combinazione del portafoglio di tangenza e del titolo privo di rischio. Questo modello richiede la conoscenza della media e della matrice di varianza e covarianza dei rendimenti dei titoli, che nella realtà sono ignoti e vengono stimati a partire dai dati presenti nelle serie storiche. L'approccio comune, che ignora l'estimation risk, tratta le stime ottenute come se fossero i veri valori dei parametri e da queste ricava direttamente il portafoglio ottimo. I rendimenti dei titoli relativi al periodo successivo sono ovviamente ignoti, ma i valori attesi, le varianze e le covarianze dei vari titoli considerati si assumono noti in modo esatto. Pur assumendo che gli investitori conoscano questi parametri con certezza, non possiamo essere sicuri che i valori stimati coincidano effettivamente con i veri valori dei parametri. L'investitore dovrebbe fronteggiare due problemi contemporaneamente: un problema di allocazione del portafoglio e un problema inferenziale.

Nel contesto dell'analisi Media-Varianza, Kan e Zhou (2007) hanno mostrato che la sostituzione dei parametri con le stime campionarie può portare a performance fuori dal campione molto esigue. In presenza di incertezza nei parametri non è ottimale costruire il portafoglio attraverso soltanto il portafoglio di tangenza stimato e il titolo non rischioso, perché vi sono altri portafogli rischiosi che aiutano l'investitore a diversificare l'estimation risk. I due autori hanno dimostrato che un portafoglio che combina in modo ottimo il titolo non rischioso, il portafoglio di tangenza stimato e il portafoglio a varianza minima globale domina il portafoglio derivante dal Teorema dei due fondi, nel senso che le performance attese

fuori dal campione risultano migliori.

Un modo alternativo per affrontare e tenere esplicitamente in considerazione il problema dell'estimation risk nella costruzione di portafogli ottimi si ha ricorrendo alle tecniche Bayesiane di stima dei parametri ignoti.

Bawa, Brown e Klein (1979) furono i primi a studiare il problema dell'incertezza dei parametri nel contesto di rendimenti indipendenti e identicamente distribuiti, mentre Kandel e Stambaugh (1996) riconobbero l'importanza dell'estimation risk nell'allocazione di portafoglio con rendimenti prevedibili.

In questo lavoro l'estimation risk è riassunto dalla distribuzione a posteriori dei parametri date le osservazioni disponibili. Un investitore avverso al rischio è interessato a conoscere la distribuzione dei rendimenti futuri. Invece di costruire la distribuzione dei rendimenti futuri condizionata ai valori stimati dei parametri, si integra nei parametri, la cui incertezza è catturata dalla distribuzione a posteriori. In questo modo si può costruire la *predictive distribution* per i rendimenti futuri, condizionata soltanto ai dati osservati e non ai valori fissati dei parametri.

Nei prossimi paragrafi verranno riportati i risultati relativi al caso in cui l'incertezza è ignorata, ovvero quando l'investitore alloca il suo portafoglio considerando i parametri fissi ai loro valori stimati. Successivamente si confrontano questi risultati con quelli ottenuti considerando la *predictive distribution*, in modo da analizzare l'effetto e determinare la rilevanza dell'estimation risk nel problema di allocazione del portafoglio.

## 2.3 Caratteristiche del dataset

Per illustrare le analisi condotte in questa tesi sono stati utilizzati i dati a frequenza mensile di prezzi e rendimenti di alcune variabili. Come indice azionario si è considerato l'indice value-weighted delle azioni trattate nel New York Stock Exchange, calcolato dal Center for Research in Security Prices (CRSP) dell'università di Chicago. I rendimenti esaminati sono stati calcolati assumendo capitalizzazione continua a partire dalle serie storiche mensili dei prezzi con e senza i dividendi.

Il tasso di interesse non rischioso utilizzato per calcolare gli extrarendimenti dei titoli azionari è stato scaricato dal sito *Yahoo! Finance*. Il tasso d'interesse considerato si riferisce alle quotazioni mensili dell'U.S. Treasury bill, Buoni del Tesoro statunitensi, con scadenza a 3 mesi. Il tasso non rischioso scaricato è annualizzato, quindi per ottenere il tasso mensile si è diviso per 12 il tasso annualizzato a 3 mesi.

Successivamente per calcolare la variabile previsiva term-spread è stato utilizzato l'U.S. Treasury bill con scadenza a 10 anni, anch'esso ricavato da *Yahoo! Finance*.

Il campione considerato consta di 517 dati mensili, che si estendono da dicembre 1965 a dicembre 2008. Si è scelto di esaminare un intervallo di 43 anni, in modo da poter valutare le dinamiche dei rendimenti azionari in un periodo di tempo piuttosto lungo.

### 2.3.1 Analisi preliminari

I prezzi dell'indice azionario NYSE sono ovviamente non stazionari e risultano quindi non adeguati per le analisi che si vogliono effettuare. Per questo motivo si analizza il dataset partendo da un'analisi dei rendimenti, per verificare tutti i presupposti teorici e le principali proprietà. A partire dai prezzi di chiusura contenenti i dividendi si è calcolata la serie dei rendimenti logaritmici dell'indice NYSE. I rendimenti esaminati sono stazionari e hanno una media positiva ma relativamente piccola.

| Rendimenti NYSE |           |                    |           |
|-----------------|-----------|--------------------|-----------|
| media           | 0.008216  | st.error           | 0.001904  |
| minimo          | -0.216174 | varianza           | 0.001873  |
| massimo         | 0.168059  | dev. st.           | 0.043283  |
| 1° quartile     | -0.017979 | asimmetria         | -0.485835 |
| 3° quartile     | 0.037486  | eccesso di curtosi | 2.409089  |

Tabella 2.1: *Principali statistiche descrittive dei rendimenti composti del NYSE relative al periodo 1965-2008.*

In questo caso la media è significativa dato che il t-test, ottenuto dal rapporto tra il valor medio dei rendimenti e il relativo standard error, è pari a 4.3151.

La distribuzione empirica dei rendimenti è caratterizzata da una asimmetria a sinistra e da un eccesso di curtosi rispetto alla distribuzione normale perché i rendimenti estremi hanno più probabilità di accadere. Ciò significa che la distribuzione dei rendimenti è leptocurtica.

Quando i rendimenti vengono calcolati assumendo capitalizzazione continua si assume che si distribuiscano come una normale, proprietà che si mantiene valida anche aggregando nel tempo i rendimenti logaritmici dello stesso titolo. L'ipotesi di rendimenti i.i.d. normali è alla base di molti modelli, tuttavia esistono ragioni empiriche per ritenere che essa non rappresenti una descrizione totalmente accettabile del processo generatore dei rendimenti.

Per verificare la normalità sono disponibili diverse statistiche test. Quelle più semplici sono basate sulle proprietà degli indici di asimmetria e di curtosi. Per una distribuzione normale l'indice di asimmetria  $S$  è uguale a 0, mentre quello di curtosi  $K$  è pari a 3 qualunque siano la media e la varianza della distribuzione. Se le osservazioni presenti nel campione sono tratte da una distribuzione normale,  $\hat{S}$  e  $\hat{K}$  non dovrebbero discostarsi

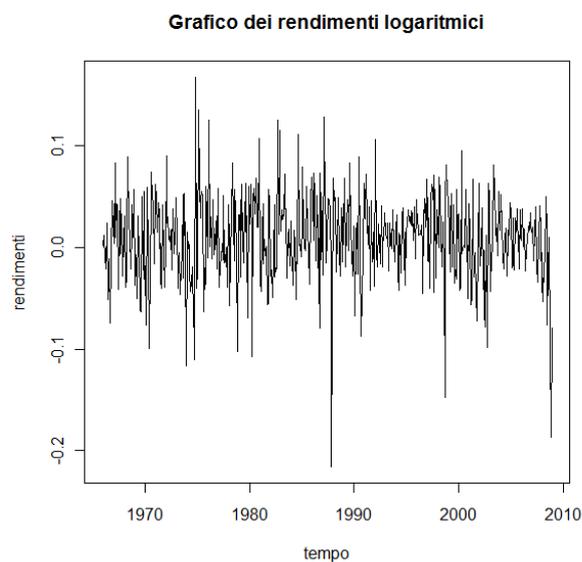


Figura 2.1: *Grafico dei rendimenti composti inclusi i dividendi dell'indice NYSE nel periodo 1965-2008.*

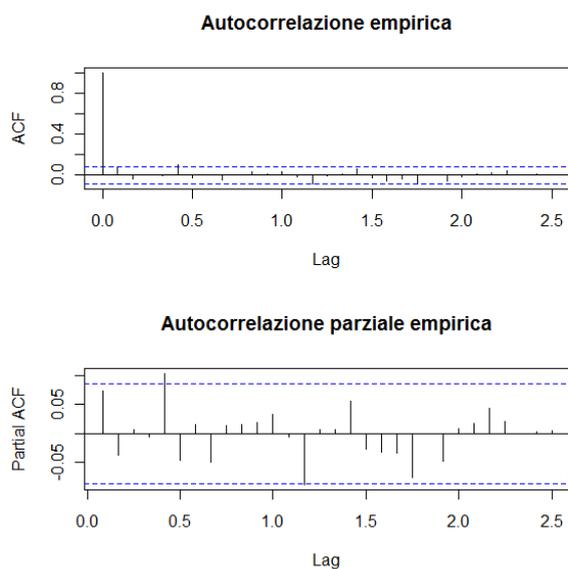


Figura 2.2: *Correlogrammi empirici dei rendimenti NYSE inclusi i dividendi.*

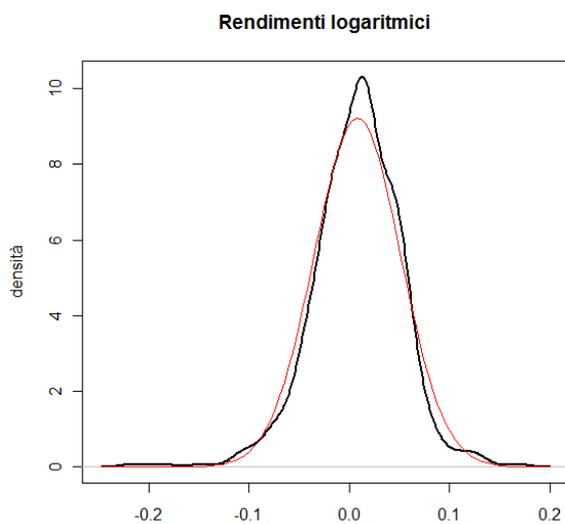


Figura 2.3: *Stima della densità della serie dei rendimenti e densità di una normale con media e varianza pari a quella stimata dalla serie dei rendimenti.*

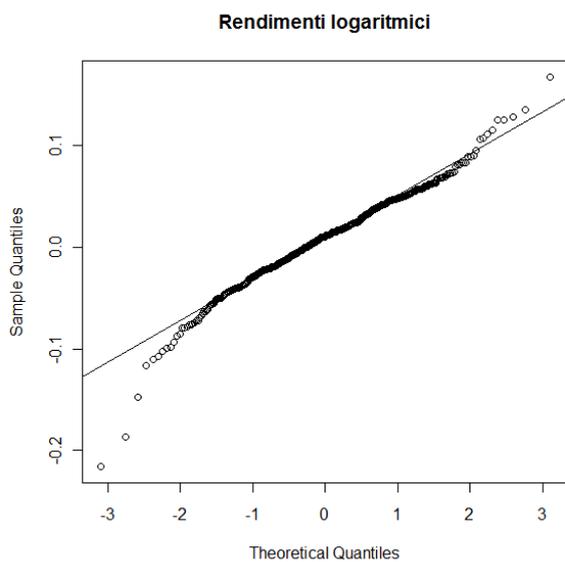


Figura 2.4: *Normal probability plot per la serie dei rendimenti.*

troppo dai valori precedenti. Per la serie storica dei rendimenti l'ipotesi nulla di normalità può essere verificata utilizzando i test marginali basati rispettivamente su  $\hat{S}$  e  $\hat{K}$ . Esiste anche un test congiunto, il *test di Jarque e Bera* che sfrutta l'indipendenza asintotica di  $\hat{S}$  e  $\hat{K}$  sotto  $H_0$ . La statistica test è la seguente

$$JB = \left( \frac{\hat{S}}{\sqrt{6/T}} \right)^2 + \left( \frac{\hat{K} - 3}{\sqrt{24/T}} \right)^2,$$

con distribuzione asintotica  $\chi_2^2$ .

Un'altra statistica utilizzata per verificare l'ipotesi di normalità, quando non sono specificate la media e la varianza, è quella di *Lilliefors*. Inizialmente viene stimata la media e la varianza dai dati a disposizione, poi si determina la distanza massima tra la funzione di distribuzione empirica e quella normale con i parametri uguali a quelli stimati. Infine il valore trovato della statistica viene confrontato con i valori critici della distribuzione di Lilliefors.

| Test di normalità |         |                    |          |
|-------------------|---------|--------------------|----------|
| Jarque-Bera       | 2.2e-16 | Kolmogorov-Smirnov | 2.2e-16  |
| Lilliefors        | 0.03504 | Shapiro-Wilk       | 5.98e-08 |

Tabella 2.2: *P-value associato ai principali test per verificare la normalità dei rendimenti composti del NYSE.*

Dai risultati ottenuti si rifiuta l'ipotesi nulla di rendimenti normali ad un livello di significatività pari a 0.05. A conferma di quanto detto, il grafico 2.4 mostra un allontanamento dalla normale sulle code, in particolare su quella sinistra.

Analizzando le funzioni di autocorrelazione empiriche, si nota l'incorrelazione dei rendimenti azionari. Questo non implica rendimenti indipendenti, come si può verificare analizzando ad esempio i quadrati o i

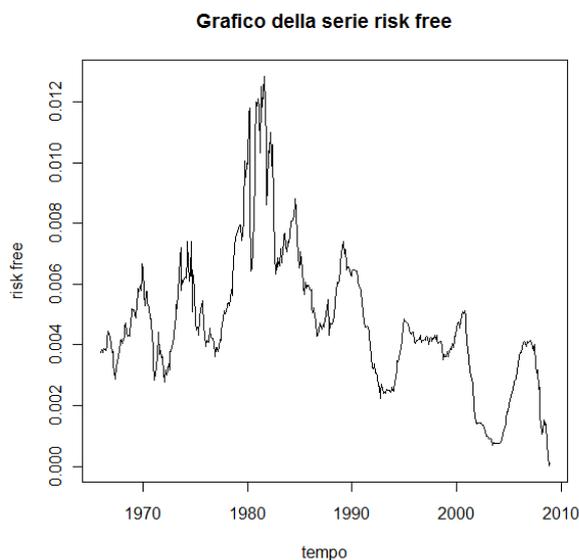


Figura 2.5: *Grafico del tasso di interesse a breve relativo al periodo 1965-2008.*

valori assoluti della serie dei rendimenti.

Adesso viene analizzata la serie del tasso di interesse a breve, ottenuto dai Treasury bills statunitensi con scadenza a tre mesi. Osservando il grafico si notano valori particolarmente alti realizzati nei primi anni '80, e valori estremamente bassi, prossimi a 0, che caratterizzano gli ultimi mesi del 2008.

Dalle funzioni di autocorrelazione si ipotizza la non stazionarietà della serie dei tassi. La media della serie differenziata è non significativa, quindi il processo generatore dei dati non presenta drift. Per verificare la non stazionarietà è stato considerato il test di radice unitaria di *Dickey-Fuller* nella sua versione *augmented*, in quanto la serie differenziata dei tassi presenta autocorrelazioni significative ai primi ritardi. Per implementare questo test si è partiti da un ritardo massimo  $p$  e si è verificata la significatività del coefficiente relativo a questo ritardo, se non significativo il test è stato ripetuto riducendo il ritardo massimo di 1 e ripetendo la procedura

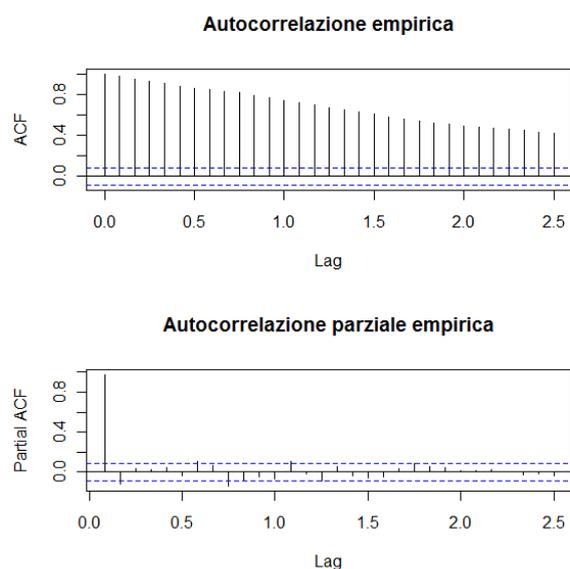


Figura 2.6: *Correlogrammi empirici del tasso di interesse a breve nel periodo 1965-2008.*

fino al primo ritardo significativo trovato. Il risultato è stato un p-value pari a 0.2, pertanto viene accettata l'ipotesi nulla di presenza di radice unitaria nella serie dei tassi di interesse.

Tutti i test di normalità, già considerati per i rendimenti dell'indice NYSE, portano a rifiutare l'ipotesi di normalità del titolo privo di rischio. Un'ulteriore conferma viene fornita dalla densità stimata, ben lontana dalla distribuzione normale, e dal normal probability plot.

Il tasso d'interesse mensile è un numero molto piccolo e presenta una varianza molto inferiore a quella dei rendimenti dell'indice azionario. Pertanto i tassi di interesse si possono ritenere pressoché costanti e si possono porre uguali alla loro media campionaria  $r_f$ . L'approssimazione utilizzata può essere considerata influente ai fini delle analisi successive.

Per questi motivi il tasso di interesse viene considerato privo di ri-

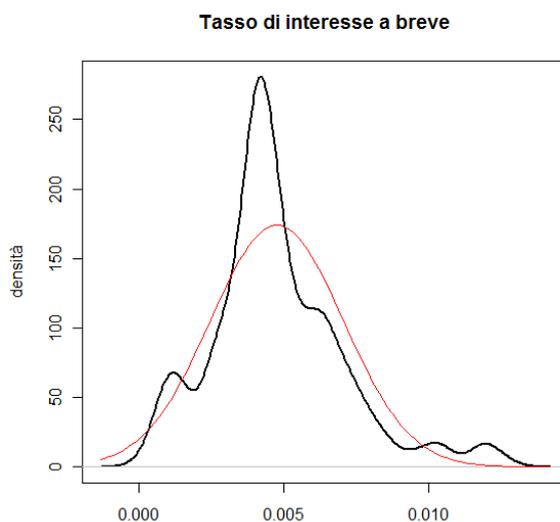


Figura 2.7: *Stima della densità della serie dei tassi di interesse a breve e densità di una normale con media e varianza pari a quella stimata dalla serie dei tassi.*

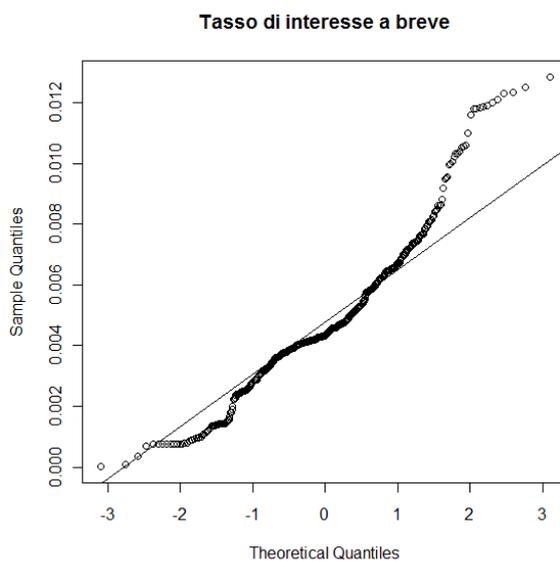


Figura 2.8: *Normal probability plot per la serie dei tassi di interesse a breve.*

| Tasso di interesse a breve |          |                    |          |
|----------------------------|----------|--------------------|----------|
| media                      | 0.004766 | st.error           | 0.000101 |
| minimo                     | 0.000017 | varianza           | 0.000005 |
| massimo                    | 0.012850 | dev. st.           | 0.002293 |
| 1° quartile                | 0.003610 | asimmetria         | 0.860650 |
| 3° quartile                | 0.005932 | eccesso di curtosi | 1.397488 |

Tabella 2.3: *Principali statistiche descrittive del tasso di interesse a breve, relative al periodo 1965-2008.*

schio e viene utilizzato per creare gli extrarendimenti dell'indice azionario NYSE. Gli extrarendimenti, ottenuti come differenza tra i rendimenti azionari e  $r_f$ , conservano tutte le proprietà viste per l'indice azionario. Cambiano soltanto alcune statistiche descrittive riguardanti gli indici di posizione, come ad esempio la media, i quantili e gli estremi.

## 2.4 Allocazione di portafoglio nel lungo periodo

In questo paragrafo viene esaminato il modello trattato da Barberis (2000) utile agli investitori per prendere decisioni riguardanti l'allocazione ottima di portafoglio. Si suppone che l'investitore adotti una strategia buy-and-hold, per cui non può ribilanciare il portafoglio tra il momento iniziale  $T$  e l'orizzonte  $T + \hat{T}$ . Secondo questa strategia la decisione di allocazione dei titoli viene presa all'inizio e non viene più modificata fino al termine del periodo di investimento.

Questa assunzione non descrive quanto avviene nella realtà. In pratica gli investitori con orizzonti di lungo termine sono liberi di trattare titoli in ogni momento, aiutati dagli intermediari finanziari a ribilanciare i portafogli sulla base delle loro esigenze. Sebbene pochi investitori possano essere caratterizzati come buy-and-hold, assumere questa strategia per le analisi che verranno svolte permetterà di evidenziare l'effetto dell'orizzonte sulla

composizione di portafoglio di lungo periodo.

L'obiettivo dell'analisi consiste nel determinare l'allocazione ottimale di portafoglio per un individuo buy-and-hold con un orizzonte di  $\hat{T}$  mesi. Se l'investitore non ha alcuna possibilità di acquistare o vendere titoli tra il tempo  $T$  e l'orizzonte  $T + \hat{T}$ , è interessato solo alla distribuzione della ricchezza al termine del periodo di investimento, ovvero a  $u(W_{T+\hat{T}})$ . In letteratura la più utilizzata funzione di utilità per problemi di allocazione del portafoglio è la funzione potenza, la quale presenta un coefficiente di avversione relativa al rischio costante. Le preferenze dell'investitore sulla ricchezza finale in  $T + \hat{T}$  sono descritte da una funzione di utilità potenza del tipo

$$u(W_{T+\hat{T}}) = \frac{W_{T+\hat{T}}^{1-\gamma}}{1-\gamma},$$

dove  $\gamma$  rappresenta il coefficiente di avversione relativa al rischio.

L'individuo ha a disposizione solo due titoli: il titolo non rischioso e un indice azionario, in questo caso l'indice value-weighted NYSE. Si suppone che il rendimento del titolo non rischioso sia costante e pari a  $r_f$  e che l'extrarendimento del titolo rischioso  $r_t$ , ottenuto come differenza tra il rendimento dell'indice azionario e  $r_f$ , sia in capitalizzazione continua. Pertanto si può assumere una distribuzione normale per gli extrarendimenti.

Se la ricchezza iniziale  $W_T$  è uguale a 1 e  $\omega$  è la quota investita nell'indice azionario, allora la ricchezza finale è

$$W_{T+\hat{T}} = (1 - \omega) \exp(r_f \hat{T}) + \omega \exp(r_f \hat{T} + R_{T+\hat{T}}),$$

dove  $R_{T+\hat{T}} = r_{T+1} + r_{T+2} + \dots + r_{T+\hat{T}}$  è il rendimento composto multiperiodale, somma dei rendimenti uniperiodali.

Il problema dell'investitore consiste nel massimizzare l'utilità attesa

$$\max_{\omega} \mathbb{E}_T \left( \frac{\left( (1 - \omega) \exp(r_f \hat{T}) + \omega \exp(r_f \hat{T} + R_{T+\hat{T}}) \right)^{1-\gamma}}{1 - \gamma} \right),$$

dove  $\mathbb{E}_T$  significa che il valore atteso dell'utilità viene calcolato condizionatamente all'informazione disponibile. Per il calcolo del valore atteso si deve fare riferimento alla distribuzione dei rendimenti. L'investitore può scegliere tra due possibili distribuzioni per il calcolo dell'utilità attesa: può ignorare l'incertezza nei parametri oppure incorporare l'incertezza nella costruzione del portafoglio ottimo attraverso la predictive distribution per i rendimenti.

- Caso senza incertezza

Si assume che gli extrarendimenti siano indipendenti e identicamente distribuiti, ovvero  $r_t = \mu + \epsilon_t$  con  $\epsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$ .

Una volta stimati i parametri  $\theta = (\mu, \sigma^2)$ , la distribuzione degli extrarendimenti condizionata  $p(R_{T+\hat{T}} | \hat{\mu}, \hat{\sigma}^2, \mathbf{r})$  è normale con media  $\hat{T}\hat{\mu}$  e varianza  $\hat{T}\hat{\sigma}^2$ , perché  $R_{T+\hat{T}}$  è la somma di  $\hat{T}$  variabili casuali normalmente distribuite con media  $\hat{\mu}$  e varianza  $\hat{\sigma}^2$ . Viene così generata la distribuzione degli extrarendimenti azionari futuri condizionata al valore fissato per i parametri e ai dati osservati dall'investitore fino all'inizio dell'orizzonte di investimento,  $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_T)'$ . Quindi l'investitore risolve

$$\max_{\omega} \int u(W_{T+\hat{T}}) p(R_{T+\hat{T}} | \mathbf{r}, \hat{\theta}) dR_{T+\hat{T}}. \quad (2.1)$$

- Caso con incertezza

Per un investitore di lungo periodo è importante considerare l'estimation risk. Si può utilizzare la distribuzione a posteriori  $p(\theta | \mathbf{r})$  per i parametri, la quale riassume l'incertezza condizionatamente ai dati osservati. Per costruire la distribuzione a posteriori  $p(\mu, \sigma^2 | \mathbf{r})$  è

richiesta una distribuzione a priori; una possibile a priori per questo problema di allocazione del portafoglio è l'a priori non informativa

$$p(\mu, \sigma^2) \propto \frac{1}{\sigma^2}.$$

La conseguente distribuzione a posteriori ricavata da Zellner (1971) è composta dalla distribuzione marginale Gamma Inversa

$$\sigma^2 | \mathbf{r} \sim IG \left( \frac{T-1}{2}, \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (r_t - \bar{r})^2 \right)$$

e dalla distribuzione condizionata

$$\mu | \sigma^2, \mathbf{r} \sim N \left( \bar{r}, \frac{\sigma^2}{T} \right).$$

Integrando nella distribuzione a posteriori si ottiene la predictive distribution per i rendimenti composti multiperiodali. La predictive distribution è condizionata solo al campione osservato e non al valore assunto dal parametro  $\theta$ :

$$p(R_{T+\hat{T}} | \mathbf{r}) = \int p(R_{T+\hat{T}} | \mathbf{r}, \theta) p(\theta | \mathbf{r}) dR_{T+\hat{T}} d\theta.$$

Il problema che l'investitore deve risolvere è

$$\max_{\omega} \int u(W_{T+\hat{T}}) p(R_{T+\hat{T}} | \mathbf{r}) dR_{T+\hat{T}}. \quad (2.2)$$

Un modo alternativo per risolvere il problema consiste nel riscriverlo in questa forma

$$\begin{aligned} & \max_{\omega} \int u(W_{T+\hat{T}}) p(R_{T+\hat{T}}, \theta | \mathbf{r}) dR_{T+\hat{T}} d\theta \\ & = \max_{\omega} \int u(W_{T+\hat{T}}) p(R_{T+\hat{T}} | \theta, \mathbf{r}) p(\theta | \mathbf{r}) dR_{T+\hat{T}} d\theta. \end{aligned}$$

La distribuzione dei rendimenti condizionata a particolari valori fissati dei parametri  $p(R_{T+\hat{T}} | \mu, \sigma^2, \mathbf{r})$  è  $N(\hat{T}\mu, \hat{T}\sigma^2)$ .

Il problema di massimizzazione dell'utilità attesa viene risolto calcolando gli integrali (2.1) e (2.2) per diversi valori della quota investita nell'indice azionario, più precisamente per  $\omega = 0, 0.01, 0.02, \dots, 0.98, 0.99$ , escludendo così le vendite allo scoperto. Per ogni orizzonte di investimento, da un mese a 10 anni, viene riportato il valore di  $\omega$  che massimizza l'utilità attesa.

Gli integrali vengono risolti numericamente attraverso la tecnica di simulazione. Ad esempio se si vuole risolvere l'integrale  $\int g(y)p(y)dy$ , dove  $p(y)$  è una funzione di densità, lo si può approssimare tramite

$$\frac{1}{I} \sum_{i=1}^I g(y^{(i)}),$$

con  $y^{(1)}, \dots, y^{(I)}$  simulazioni indipendenti con funzione di densità  $p(y)$ . Pertanto l'integrale per il calcolo dell'utilità attesa viene approssimato per mezzo di un campione  $R_{T+\hat{T}}^{(i)}$  da una delle due possibili distribuzioni calcolando

$$\frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \frac{\left( (1 - \omega) \exp(r_f \hat{T}) + \omega \exp(r_f \hat{T} + R_{T+\hat{T}}^{(i)}) \right)^{1-\gamma}}{1 - \gamma}.$$

### 2.4.1 Procedura di campionamento

Per raggiungere un elevato grado di accuratezza delle stime si è posto una numerosità campionaria  $I$  pari a 200000 unità in ogni analisi. Come indicato nell'equazione (2.2), ci sono due passi da compiere per ricavare i rendimenti logaritmici multiperiodali relativi a investimenti di lungo. Per prima cosa si genera un campione dalla distribuzione a posteriori  $p(\mu, \sigma^2 | \mathbf{r})$ . Dapprima si campiona dalla distribuzione marginale  $p(\sigma^2 | \mathbf{r})$ , Gamma-Inversa, e poi per ogni  $\sigma^2$  generato, si estrae un valore dalla distribuzione condizionata  $p(\mu | \sigma^2, \mathbf{r})$ , Normale. Ripetendo questo procedimento 200000 volte si ottiene una rappresentazione accurata della distribuzione a posteriori.

In secondo luogo, per ogni coppia  $(\mu, \sigma^2)$  ricavata dalla distribuzione a posteriori, si estrae un valore della distribuzione dei rendimenti multiperiodali condizionatamente alle osservazioni passate e alla coppia di parametri,  $p(R_{T+\hat{T}}|\mu, \sigma^2, \mathbf{r})$ , Normale. Questa procedura permette di ottenere un campione di numerosità elevata dalla predictive distribution, la quale può essere poi utilizzata per il calcolo dell'allocazione ottimale.

Nel caso in cui non venga considerata l'incertezza, si assume che l'investitore utilizzi le medie a posteriori delle variabili casuali  $\mu$  e  $\sigma^2$  come valori fissati dei parametri e poi formi un campione di 200000 unità generato da una distribuzione normale di media  $\hat{T}\hat{\mu}$  e varianza  $\hat{T}\hat{\sigma}^2$ .

Nel seguito verranno riportate le allocazioni ottimali di portafoglio ottenute ripetendo la procedura per diversi orizzonti di investimento, da un mese a 10 anni con incrementi di un mese e per diversi livelli di avversione relativa al rischio  $\gamma$ . Le analisi verranno svolte considerando le due possibili distribuzioni dei rendimenti, una che ignora l'estimation risk e l'altra che lo incorpora.

Al fine di implementare le procedure suddette si è scelto di utilizzare l'ambiente di calcolo statistico R. Pertanto ricorrendo alle simulazioni Monte Carlo è possibile generare realizzazioni pseudo-casuali dalle distribuzioni considerate. I comandi utilizzati sono riportati in Appendice.

## 2.5 Risultati

In questo paragrafo sono esposti i risultati delle analisi compiute. L'obiettivo è mostrare come cambia l'allocazione del portafoglio all'aumentare dell'orizzonte di investimento per un individuo che adotta una strategia buy-and-hold e come si modifica l'allocazione ottimale se l'incertezza nei parametri è incorporata esplicitamente nel modello considerato.

I risultati si basano sul modello  $r_t = \mu + \epsilon_t$ , dove  $r_t$  è l'extrarendimento composto relativo al mese  $t$  dell'indice azionario e  $\epsilon_t \sim i.i.d.N(0, \sigma^2)$ . Per le analisi svolte sono stati considerati dapprima i dati da dicembre 1965 a dicembre 2008 e poi il sottocampione che comprende le osservazioni da dicembre 1965 a dicembre 2006. Sono stati scelti questi due campioni per analizzare l'effetto sull'allocatione del portafoglio dell'attuale crisi finanziaria, iniziata nel luglio 2007 a seguito dei mutui subprime, i cui effetti sono ancora visibili. In ogni caso, i dati a disposizione vengono utilizzati per generare un campione di numerosità  $I = 200000$  dalla distribuzione a posteriori di  $\mu$  e  $\sigma^2$ .

|            | 1965-2008 |          | 1965-2006 |          |
|------------|-----------|----------|-----------|----------|
|            | media     | dev. st. | media     | dev. st. |
| $\mu$      | 0.0035    | 0.0019   | 0.0045    | 0.00191  |
| $\sigma^2$ | 0.0019    | 0.0001   | 0.0018    | 0.0001   |

Tabella 2.4: *Media e deviazione standard per i parametri  $\mu$  e  $\sigma^2$ .*

Dalla Tabella 2.4 si può notare che per un investitore che utilizza l'intero campione dal 1965 al 2008, la distribuzione a posteriori per il parametro  $\mu$  degli extrarendimenti mensili ha media 0.0035 e deviazione standard 0.0019. La grande variabilità della variabile casuale  $\mu$  sembra essere un'importante fonte di incertezza. La distribuzione a posteriori per la varianza  $\sigma^2$  risulta maggiormente concentrata attorno alla sua media pari a 0.0019. Nel sottocampione 1965-2006 la media degli extrarendimenti mensili risulta 0.0045, maggiore della media su tutto il campione, a conferma del fatto che negli ultimi due anni la crisi finanziaria ha portato ad una crescente sfiducia degli investitori verso i mercati azionari.

### 2.5.1 Caso senza incertezza

Nel caso in cui il problema dell'incertezza nei parametri venga ignorato, l'agente economico utilizza una distribuzione per gli extrarendimenti normale di media  $\hat{T}\hat{\mu}$  e varianza  $\hat{T}\hat{\sigma}^2$ , dove  $\hat{\mu}$  e  $\hat{\sigma}^2$  sono le medie delle variabili  $\mu$  e  $\sigma^2$  ricavate dalla distribuzione a posteriori, i cui valori sono riportati nella Tabella 2.4.

La Figura 2.9 illustra l'allocazione ottima di portafoglio per un investitore buy-and-hold che esprime le proprie preferenze sulla ricchezza finale attraverso una funzione di utilità potenza. Nell'asse delle ordinate viene individuata la percentuale,  $100\omega$ , allocata nell'indice azionario e il relativo complemento rappresenta la parte di ricchezza che deve essere investita nel titolo non rischioso. Sull'asse delle ascisse viene riportato l'orizzonte di investimento in anni, da 1 mese a 10 anni.

I due grafici a sinistra si riferiscono alle analisi condotte sull'intero campione, mentre a destra si hanno i grafici relativi al periodo 1965-2006. Per ciascuno dei periodi considerati, le analisi sono state svolte per due diversi valori del coefficiente di avversione relativa al rischio:  $\gamma = 5$  e  $\gamma = 10$ .

Nei 4 grafici la linea che riporta l'allocazione nell'indice azionario al variare dell'orizzonte risulta perfettamente orizzontale. Pertanto un investitore che ignora l'incertezza sulla media e sulla varianza dei rendimenti alloca la stessa quota del portafoglio nell'indice azionario a prescindere dall'orizzonte di investimento. Questo è dovuto all'aver ipotizzato gli extrarendimenti logaritmici omoschedastici, incorrelati e distribuiti come una normale di media  $\hat{T}\hat{\mu}$  e varianza  $\hat{T}\hat{\sigma}^2$ . Poiché sia la media che la varianza crescono linearmente con l'orizzonte  $\hat{T}$ , la soluzione non cambia all'aumentare dell'orizzonte. L'allocazione ottimale per un orizzonte di breve è quindi ottima anche per un orizzonte di lungo termine.

Quanto ottenuto è simile al risultato ottenuto da Samuelson (1969), il

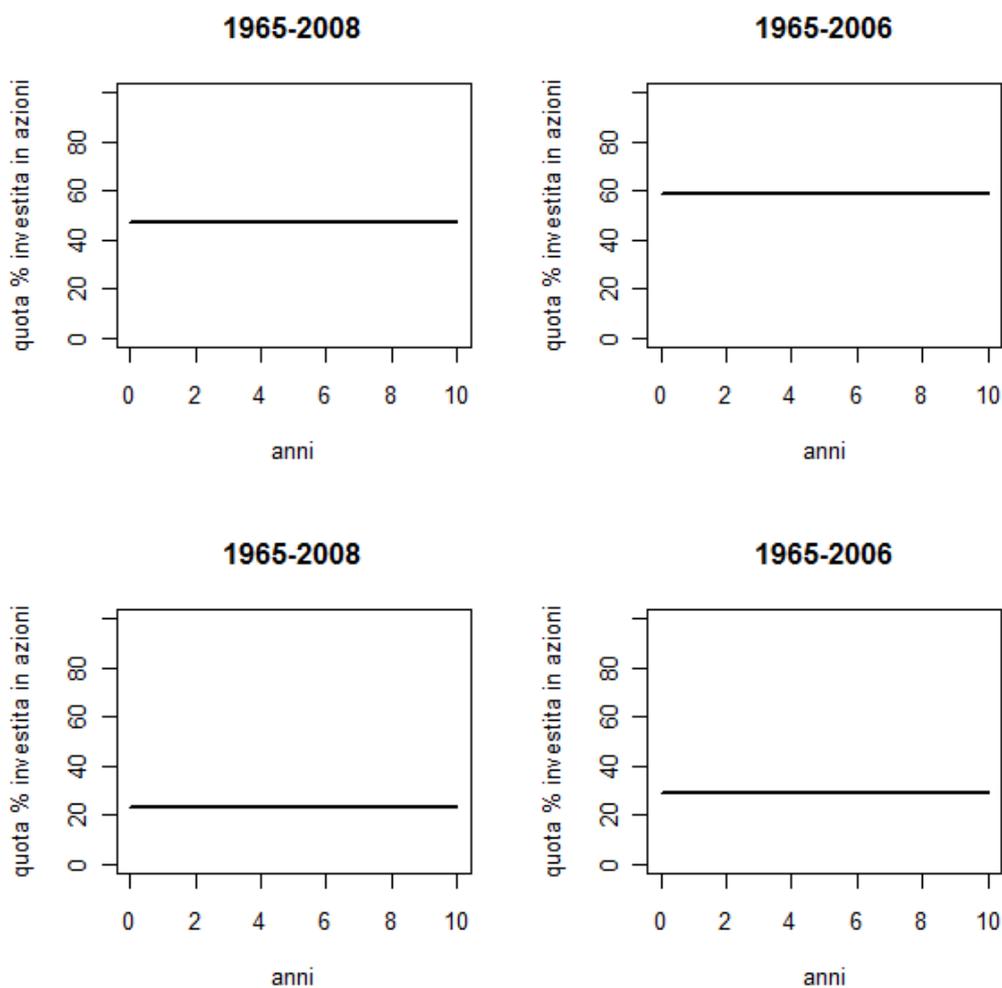


Figura 2.9: Allocations ottima di portafoglio per un investitore buy-and-hold con funzione di utilità potenza. I due grafici superiori si riferiscono ad un coefficiente di avversione relativa al rischio  $\gamma = 5$ , i due inferiori a  $\gamma = 10$ . Sull'asse delle ordinate è indicata la percentuale,  $100\omega$ , investita nell'indice azionario; sull'asse delle ascisse è riportato l'orizzonte di investimento in anni.

quale mostrò che l'allocazione ottimale è indipendente dall'orizzonte nel caso di rendimenti i.i.d. e funzione di utilità potenza. La diversità dei risultati risiede nella possibilità, in Samuelson, di poter ribilanciare il portafoglio a intervalli regolari. Invece nel nostro caso l'investitore adotta una strategia buy-and-hold, per cui non può modificare le quote investite nel corso del tempo.

All'aumentare del coefficiente di avversione relativa al rischio, l'allocazione nell'indice azionario diminuisce, infatti l'investitore più avverso al rischio preferisce un portafoglio costituito prevalentemente dal titolo non rischioso.

Analizzando i dati relativi all'intero campione, quando  $\gamma = 5$ , la quota investita nel titolo rischioso è pari al 47%, mentre quando  $\gamma = 10$  la quota è circa la metà e pari a 23%. Questo è riscontrabile anche nel sottocampione dove si passa dal 59% al 29%.

Confrontando i risultati ottenuti nei due periodi si nota che a parità di  $\gamma$  la percentuale investita nell'indice azionario nel sottocampione è più alta, a conferma di una media a posteriori più alta per il parametro  $\mu$  rispetto all'intero campione. Si può dedurre che il peso della componente azionaria nel portafoglio cresce all'aumentare della media della distribuzione a posteriori.

## 2.5.2 Caso con incertezza

Per studiare l'effetto dell'incertezza nei parametri sull'allocazione di portafoglio si confrontano i risultati presenti nella Figura 2.9 con quelli ottenuti facendo riferimento alla predictive distribution.

Dai grafici si evince che l'allocazione ottimale nell'indice azionario diminuisce all'aumentare dell'orizzonte di investimento. L'incertezza nei parametri introduce un *effetto dell'orizzonte*, ovvero una diversa allocazione del portafoglio al variare dell'orizzonte di investimento, anche nel con-

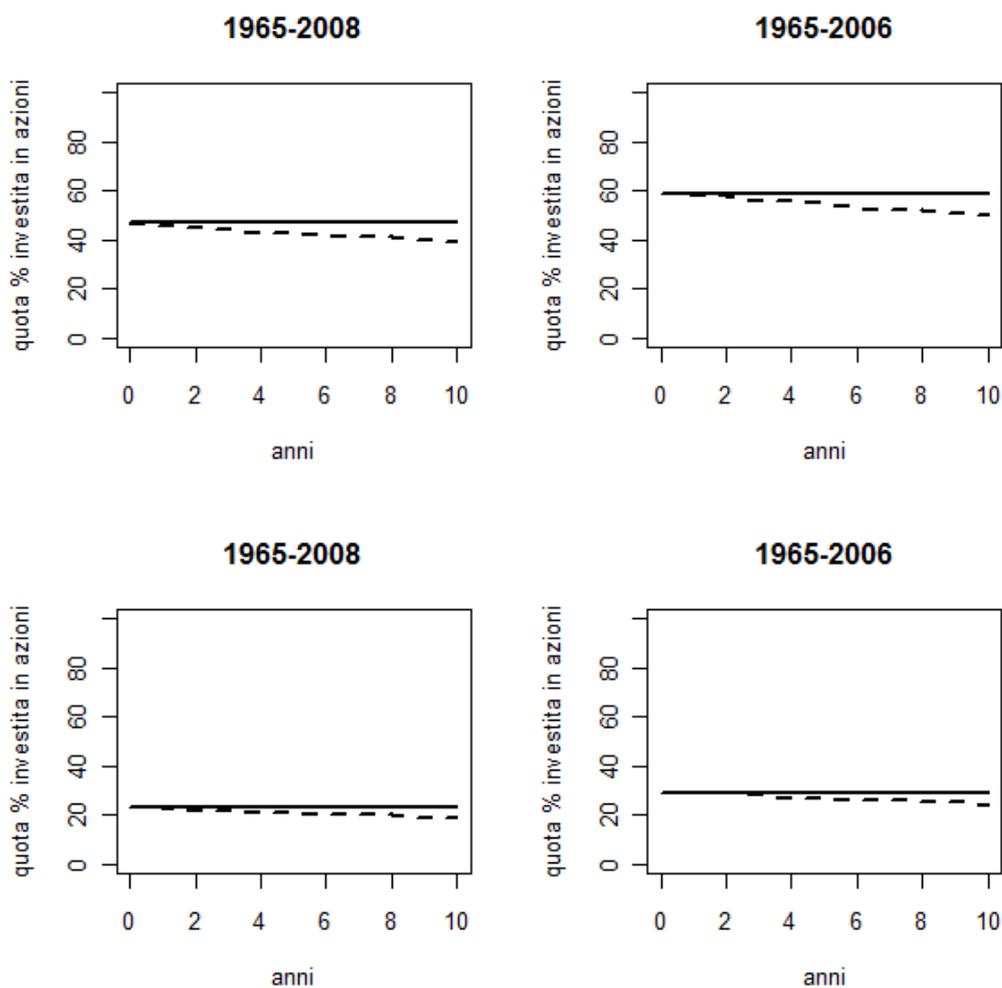


Figura 2.10: *Allocazione ottima di portafoglio per un investitore buy-and-hold con funzione di utilità potenza. I due grafici superiori si riferiscono ad un coefficiente di avversione relativa al rischio  $\gamma = 5$ , i due inferiori a  $\gamma = 10$ . La linea continua riporta l'allocazione relativa al caso senza incertezza e la linea tratteggiata rappresenta l'allocazione quando viene introdotto l'estimation risk.*

testo di un modello che tratta i rendimenti come indipendenti e identicamente distribuiti.

La distribuzione degli extrarendimenti multiperiodali incorpora un grado maggiore di incertezza, derivante dall'incertezza nei parametri  $\mu$  e  $\sigma^2$ . La varianza degli extrarendimenti cresce in modo più veloce che linearmente all'aumentare di  $\hat{T}$ , al contrario del caso senza incertezza. La varianza condizionata degli extrarendimenti fa apparire più rischioso l'indice azionario per gli investitori con orizzonte di lungo. Per questo motivo la quantità investita nel titolo rischioso diminuisce.

Quando l'incertezza nei parametri coinvolge la media  $\mu$  degli extrarendimenti, questi non sono più i.i.d. dal punto di vista dell'investitore ma autocorrelati positivamente nel breve periodo. Ad esempio se il rendimento azionario del mese  $t$  è più alto del mese precedente, allora sarà probabilmente alto anche nel mese successivo perché è probabile trovarsi in uno stato del mondo in cui si hanno realizzazioni elevate del parametro incerto  $\mu$  (Conrad e Kaul, 1988) e (Lo e MacKinlay, 1988).

L'ampiezza dell'effetto indotto dall'estimation risk nell'allocazione ottima è evidente: nel periodo 1965-2008 e  $\gamma = 5$  la quota investita nell'indice azionario per un orizzonte di un mese è il 47%, come nel caso in cui non si considera l'incertezza, per arrivare al 39% dopo 10 anni, diminuendo dell'8%. Quando l'avversione al rischio aumenta e  $\gamma$  è pari a 10, l'investitore arriva ad investire il 4% in meno. Analogamente per il periodo 1965-2006, dove si ha una diminuzione del 9% quando  $\gamma = 5$  e del 5% quando  $\gamma = 10$ . L'effetto dell'incertezza nei due periodi è approssimativamente lo stesso perché è abbastanza simile il grado di variabilità dei parametri  $\mu$  e  $\sigma^2$  nei due campioni.

Se l'incertezza sui parametri dovesse aumentare, questo si rifletterebbe sull'allocazione ottima facendo diminuire in modo notevole la quota investita nell'indice azionario.

## 2.6 Ricampionamento

Nei precedenti paragrafi abbiamo ipotizzato valido il modello  $r_t = \mu + \epsilon_t$ , con  $\epsilon_t \sim i.i.d. N(0, \sigma^2)$  per gli extrarendimenti relativi al mese  $t$ . Dalle analisi preliminari svolte sugli extrarendimenti dell'indice azionario NYSE si è giunti, dopo aver applicato opportuni test statistici, alla conclusione di rifiutare l'ipotesi di normalità. Inoltre la distribuzione degli extrarendimenti futuri è ignota, perché ignote sono le realizzazioni future dell'indice azionario, rendendo così difficoltoso capire quale sia la distribuzione degli extrarendimenti multiperiodali  $R_{T+\hat{T}} = r_{T+1} + r_{T+2} + \dots + r_{T+\hat{T}}$ .

Un modo per ricavare empiricamente la distribuzione degli extrarendimenti futuri consiste nell'utilizzare la storia passata per simulare i rendimenti futuri dal campione a disposizione.

Il ricampionamento è una procedura statistica che evita qualsiasi assunzione sulla distribuzione dei rendimenti, ad eccezione di considerare equiprobabili tutti i dati appartenenti al campione. I valori degli extrarendimenti vengono simulati estraendo con reinserimento alcuni valori dai dati disponibili, generando così copie dei dati originali. Questa procedura è ripetuta migliaia di volte per generare una distribuzione di probabilità ancorata alla vera ma ignota distribuzione dei rendimenti. Gli extrarendimenti multiperiodali relativi al tempo  $T+\hat{T}$  sono semplicemente la somma di  $\hat{T}$  campioni generati attraverso il ricampionamento.

Nel caso in cui si voglia incorporare l'incertezza nel metodo di ricampionamento, si deve per prima cosa ricampionare dai rendimenti standardizzati

$$u_t = \frac{r_t - \mu}{\sigma},$$

in modo da avere media 0 e varianza 1. Successivamente ogni valore ricampionato viene moltiplicato per un valore di  $\sigma$  tratto dalla distribuzione a posteriore di  $\sigma^2$ , e aggiunto a un valore di  $\mu$  ottenuto dalla distribuzione

a posteriori del parametro  $\mu$ .

Il grado di diversità tra le allocazioni ottenute ipotizzando extrarendimenti composti normali e quelle ottenute tramite il ricampionamento degli extrarendimenti è una misura della sensibilità dei risultati a scostamenti dall'ipotesi di normalità.

### 2.6.1 Risultati

Nella Figura 2.11 viene riportata l'allocazione ottima di portafoglio per un soggetto che adotta una strategia buy-and-hold, avente funzione di utilità potenza. I due grafici a sinistra fanno riferimento alle analisi condotte nell'ipotesi che gli extrarendimenti composti abbiano una distribuzione normale:  $r_t = \mu + \epsilon_t$ , con  $\epsilon_t \sim i.i.d.N(0, \sigma^2)$ . A destra sono posizionati i grafici relativi al caso in cui gli extrarendimenti vengano generati tramite ricampionamento. Il periodo di riferimento va da dicembre 1965 a dicembre 2008. La Figura 2.12 presenta i risultati relativi al sottocampione 1965-2006.

Osservando i grafici della Figura 2.11, si evince che le allocazioni ottimali sotto l'ipotesi di normalità sono sostanzialmente le stesse di quelle ottenute tramite il ricampionamento degli extrarendimenti, sia nel caso in cui viene ignorato l'estimation risk, sia nel caso in cui venga considerato esplicitamente. Analoghe osservazioni risultano valide anche per il periodo 1965-2006.

Nonostante gli extrarendimenti non si distribuiscano come una normale, l'allocazione ottimale di portafoglio non sembra risentire di questa assunzione. Per questo motivo nelle prossime analisi si continuerà a supporre una distribuzione normale per gli extrarendimenti.

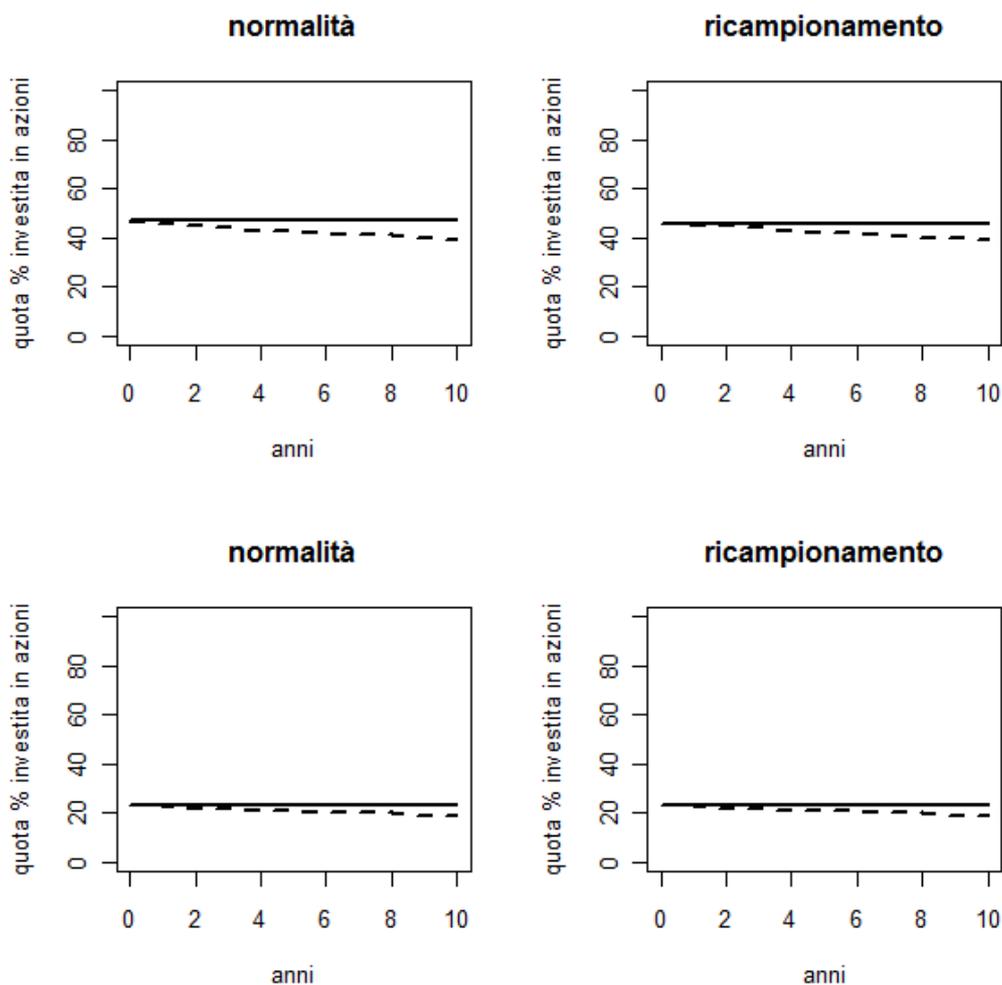


Figura 2.11: Allocations ottima di portafoglio per un investitore buy-and-hold con funzione di utilità potenza. I due grafici superiori si riferiscono ad un coefficiente di avversione relativa al rischio  $\gamma = 5$ , i due inferiori a  $\gamma = 10$ . Le analisi sono relative al campione 1965-2008.

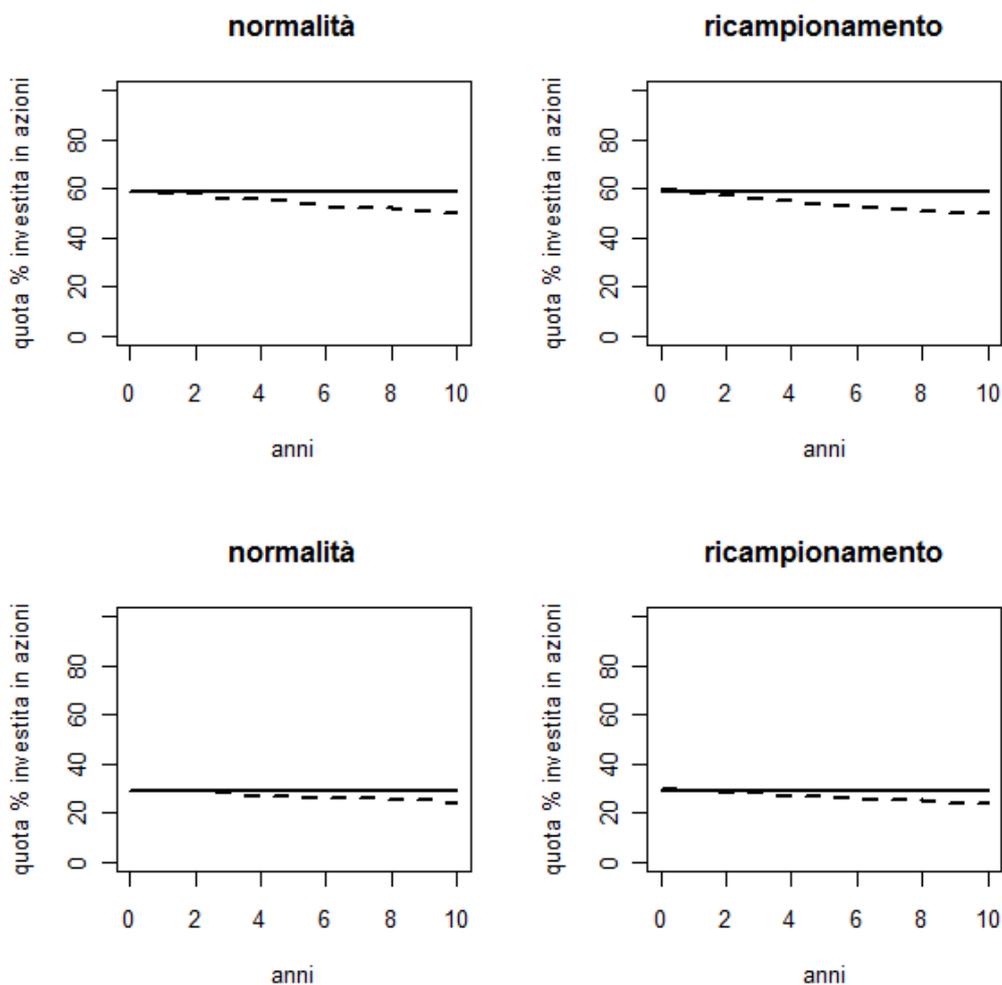


Figura 2.12: *Allocazione ottima di portafoglio per un investitore buy-and-hold con funzione di utilità potenza. I due grafici superiori si riferiscono ad un coefficiente di avversione relativa al rischio  $\gamma = 5$ , i due inferiori a  $\gamma = 10$ . Le analisi sono relative al campione 1965-2006.*

# Capitolo 3

## Allocazione di portafoglio con rendimenti prevedibili

### 3.1 Introduzione

Questo capitolo verte sull'effetto della prevedibilità dei rendimenti nell'allocazione ottima di portafoglio. In primo luogo vengono riportate le principali variabili trattate nella letteratura finanziaria per prevedere i rendimenti. In seguito si analizza un modello VAR utile per descrivere il comportamento dinamico dei rendimenti azionari.

Nel quarto paragrafo viene ideato un modello adatto a incorporare nel problema di allocazione di portafoglio l'incertezza nei parametri.

Infine viene illustrata la procedura di campionamento, necessaria per implementare il modello VAR con il dataset considerato.

### 3.2 Prevedibilità dei rendimenti

Nel 1953 l'avvento delle tecnologie informatiche permise a Maurice Kendall di studiare l'evoluzione dei prezzi di titoli azionari a partire dai dati disponibili. Secondo le sue analisi, i prezzi si muovono nel tempo in modo casuale senza nessuna evidenza di prevedibilità. Qualsiasi informazione che può

essere utilizzata per prevedere le performance dei titoli deve già essere contenuta nei prezzi, il cui compito è di riflettere tutta l'informazione a disposizione. Pertanto solo nuovi dati, che giungono in modo imprevedibile, fanno muovere i prezzi in modo casuale e altrettanto imprevedibile. La non prevedibilità dei prezzi e dei rendimenti, implica un modello Random-Walk per i prezzi  $P_t = P_{t-1} + \epsilon_t$ . Questa evoluzione è la conseguenza ovvia del comportamento degli investitori, che competono tra loro alla scoperta di informazioni rilevanti per acquistare o vendere titoli prima che il resto del mercato venga a conoscenza della nuova informazione.

Negli ultimi anni sono stati scoperti alcuni particolari fenomeni nell'andamento dei rendimenti azionari. Nel breve periodo è stata osservata un'autocorrelazione positiva, ovvero la tendenza dei rendimenti a essere positivi dopo rendimenti positivi, mentre nel lungo periodo l'autocorrelazione risulta negativa. Sembra che i rendimenti azionari sovra reagiscano alle informazioni importanti, creando dapprima un'autocorrelazione positiva dei rendimenti, i quali vengono successivamente corretti nel lungo periodo portando a una correlazione seriale negativa.

Studi empirici recenti hanno evidenziato la capacità di alcune variabili economiche, facilmente osservabili, di prevedere parzialmente i rendimenti azionari e obbligazionari e i tassi di interesse. Nel 1988 Keim e Stambaugh mostrarono che la differenza tra i tassi obbligazionari high grade e quelli low grade aiuta a prevedere i rendimenti di mercato. Nello stesso anno Fama e French evidenziarono che il rendimento dei titoli di mercato tende ad essere più alto quando il dividend yield è alto, mentre Campbell e Shiller riscontrarono lo stesso effetto utilizzando l'earnings yield. Fama e French mostrarono che il default spread ha un potere previsivo maggiore per i rendimenti di aziende low grade rispetto a quelle high, e per i rendimenti azionari rispetto a quelli obbligazionari.

Nelle analisi finora condotte si è evidenziata la prevedibilità dei rendimenti di azioni e obbligazioni: medie, varianze e covarianze dei rendimenti variano nel tempo e possono essere parzialmente previste. Un insieme crescente di variabili economiche viene utilizzato per prevedere i momenti della distribuzione dei rendimenti. Ad esempio nel 1988 Fama e French mostrarono che dividend yield, term spread e default spread riescono a catturare le variazioni cicliche nel tempo degli extrarendimenti dei titoli azionari e obbligazionari.

Alcune variabili previsive maggiormente usate per prevedere il valore atteso dei rendimenti sono:

- dividend yield,
- term spread,
- tasso di interesse a breve,
- default spread,
- rendimenti ritardati,
- rapporto book to market.

Studi sulla prevedibilità della varianza includono oltre alle variabili precedenti anche

- rendimenti ritardati al quadrato,
- rapporto debiti-azioni.

Invece per la covarianza dei rendimenti sono state considerate queste variabili:

- dividend yield,
- term spread,
- default spread.

Un'altra possibile classificazione delle variabili predittive può essere:

- variabili di tipo rapporto aventi nel denominatore una grandezza che rappresenta il valore di mercato (dividend yield, rapporto book-to-market);

- misure di tassi che catturano il livello o la pendenza della struttura a termine dei tassi e il rischio di default (tasso di interesse a breve, term spread, default spread);
- valori del rischio azionario (rendimenti al quadrato);
- variabili finanziarie ed economiche (tasso di inflazione).

Nel seguito verrà sviluppato un modello per descrivere la dinamica dei rendimenti e per cercare di prevederli attraverso un opportuno insieme di variabili. Nello specifico verranno considerate tre variabili: tasso di dividendo, tasso di interesse a breve e term spread. Sono le più utilizzate in letteratura per la previsione dei primi due momenti della distribuzione dei rendimenti perché considerate le più adeguate per lo studio del problema di allocazione del portafoglio e perché facilmente ottenibili.

Il *tasso di dividendo* è il tasso di rendimento fornito dai dividendi pagati da un'azienda. Gli articoli finanziari in cui viene trattata questa variabile per descrivere i rendimenti sono: Campbell e Shiller (1988), Fama e French (1988), Ferson e Harvey (1991), Campbell e Viceira (1998), Barberis (2000) e Lynch (2000).

Il *tasso di interesse a breve* utilizzato nelle analisi successive è relativo ai Treasury bills con scadenza a 3 mesi. Questa variabile è stata considerata da Fama e Schwert (1977), Ferson e Harvey (1991), Whitelaw (1994), Brennan, Schwartz e Lagnado (1997), Campbell e Viceira (1998).

Il *term spread* è la differenza tra il tasso di interesse dei titoli di Stato con lunga scadenza e il tasso di interesse a breve. Ad esempio si può ricavare dalla differenza tra il tasso dei Treasury bills statunitensi con scadenza a 10 anni e il tasso dei Treasury bills a 3 mesi. Gli studiosi che hanno utilizzato questa variabile per le loro analisi sulla prevedibilità sono: Campbell (1987), Fama e French (1988), Ferson e Harvey (1991) e Lynch (2000).

### 3.3 Prevedibilità e incertezza negli investimenti di lungo periodo

Nel primo capitolo si è visto che se i rendimenti dei titoli variano nel tempo, allora le condizioni di Samuelson e Merton non sono più valide. Di conseguenza l'allocazione di portafoglio può cambiare al variare dell'orizzonte di investimento. Già nei loro originali lavori sulla scelta di portafoglio si comprese come la prevedibilità nei rendimenti possa influenzare le scelte di allocazione del portafoglio e come ciò influisca sulle varie strategie di allocazione di soggetti con diversi orizzonti di investimento.

La prevedibilità ha importanti effetti sulle varianze dei rendimenti multi-periodali di azioni e obbligazioni.

Gli investitori avversi al rischio necessitano di una stima dell'intera distribuzione dei rendimenti futuri per prendere le loro decisioni. Sebbene siano numerose le variabili in grado di prevedere i primi momenti dei rendimenti, risulta abbastanza difficile traslare l'evidenza di prevedibilità in consigli pratici per la scelta di portafoglio. Un altro problema da affrontare è che i diversi momenti dei rendimenti sono previsti spesso da insiemi diversi di variabili economiche.

Solitamente le scelte di portafoglio si basano unicamente sul valore atteso degli extrarendimenti essendo difficile modellare l'intera distribuzione dei rendimenti condizionatamente alle variabili previsive. Inoltre i rendimenti attesi sono il più intuitivo e importante input della funzione obiettivo che l'investitore vuole massimizzare.

Finora abbiamo visto che esistono alcune variabili economiche che riescono a prevedere i rendimenti dei titoli finanziari. Il problema è che il vero grado di prevedibilità dei rendimenti è ignoto; inoltre l'evidenza di variazioni nel tempo dei rendimenti attesi è solitamente debole. Ad esempio se si considera un modello di regressione semplice per gli extraren-

dimenti, il coefficiente della variabile esplicativa o la costante possono risultare scarsamente significativi e l' $R^2$  associato al modello può essere molto basso. In questo caso alcuni investitori possono reagire alla debolezza di questa evidenza empirica sostenendo che la variabile considerata non riesce a prevedere i rendimenti. Altri possono ignorare l'incertezza relativa alla vera capacità previsiva della variabile, e finiscono con l'analizzare il problema di portafoglio assumendo che il valore dei parametri sia noto e pari a quanto stimato.

In questa tesi verrà considerata l'incertezza nei parametri associati alle diverse variabili previsive utilizzate. Incorporare l'incertezza nei parametri attraverso un approccio Bayesiano risulta fondamentale per studiare come cambia l'allocazione ottimale di portafoglio al variare dell'orizzonte di investimento. Infine si vuole capire se l'incertezza influisce sulla sensibilità dell'allocazione ottimale alle variabili predittive considerate.

### 3.4 Modello per l'analisi della prevedibilità

Per descrivere il comportamento dinamico dei rendimenti azionari si considera un semplice ma flessibile modello statistico, un processo vettoriale autoregressivo, VAR. Questo modello viene utilizzato da Barberis (2000) per esaminare l'effetto della prevedibilità nelle scelte di portafoglio per investitori avversi al rischio. La struttura del modello è simile a quanto utilizzato da Kandel e Stambaugh (1987) e da Campbell (1991).

L'investitore utilizza un modello VAR per prevedere l'andamento futuro dei rendimenti attraverso un insieme di variabili facilmente osservabili. Per modellare gli extrarendimenti, la forma del modello risulta

$$\mathbf{z}_t = \mathbf{a} + \mathbf{B}\mathbf{x}_{t-1} + \boldsymbol{\epsilon}_t,$$

con  $\mathbf{z}'_t = (r_t, \mathbf{x}'_t)$ ,  $\mathbf{x}'_t = (x_{1,t}, \dots, x_{n,t})'$  e  $\boldsymbol{\epsilon}_t \sim i.i.d. N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$ . La prima componente del vettore  $\mathbf{z}_t$  è l'extrarendimento  $r_t$  del titolo azionario relativo al

mese  $t$  in capitalizzazione continua. Le componenti rimanenti di  $z_t$  sono le variabili  $x_t$  utilizzate per cercare di prevedere i rendimenti.

La prima equazione del sistema,  $r_t = a + \mathbf{B}x_{t-1} + \epsilon_{1,t}$ , spiega gli extrarendimenti del titolo rischioso come funzione delle variabili previsive. L'extrarendimento  $r_t$  dipende linearmente dalla costante e dai valori ritardati delle altre variabili.

Le restanti equazioni specificano l'evoluzione stocastica delle variabili previsive, che dipendono solo dalla costante e dai loro valori ritardati.

Il modello qui considerato non è esattamente un modello VAR di ordine 1, in quanto tutte le variabili considerate dovrebbero dipendere anche dal valore ritardato di  $r_t$ . In realtà il modello considerato è un modello VAR(1) con alcune restrizioni sui parametri, infatti si può riscrivere il modello in questa forma

$$z_t = \mathbf{a} + \mathbf{B}_0 z_{t-1} + \epsilon_t.$$

Il vettore  $\mathbf{a}$  rappresenta il vettore di intercette e

$$\mathbf{B}_0 = \begin{pmatrix} 0 & & \\ \vdots & \mathbf{B} & \\ 0 & & \end{pmatrix},$$

è una matrice quadrata in cui la prima colonna fa in modo che  $z_t$  non dipenda da  $r_{t-1}$ .

La matrice di varianza e covarianza degli errori contemporanei  $\Sigma$  è invertibile e non necessariamente diagonale; si permette che realizzazioni inattese degli extrarendimenti covarino con le altre variabili e che queste ultime covarino tra loro. Inoltre la matrice  $\Sigma$  non varia nel tempo, cioè il rischio non cambia con il passare del tempo. Sebbene questa ipotesi non sia del tutto realistica, l'evidenza empirica suggerisce che le variazioni del rischio siano un fenomeno di breve durata che non influisce sulla scelta

del portafoglio nel lungo periodo (Chacko e Viceira, 1999).

Il modello VAR analizzato è diverso dall'approccio tradizionale che considera il valore atteso dei rendimenti costante, la cui stima è semplicemente fornita dalla media delle osservazioni passate. Il modello tradizionale è una versione ristretta del VAR(1) in cui solo il termine costante viene utilizzato per spiegare i rendimenti.

Una possibile estensione del modello, che non verrà presa in considerazione in questa tesi, si ottiene aumentando l'ordine del modello autoregressivo, cioè considerando altri ritardi delle variabili per aumentare la capacità previsiva del modello. Dal momento che il numero di parametri ignoti nel modello cresce esponenzialmente con il numero di ritardi, l'introduzione di ulteriori ritardi può ridurre significativamente la precisione delle stime.

### **3.5 Allocazione di portafoglio nel lungo periodo**

Dopo aver trattato nel capitolo 2 l'effetto dell'estimation risk nell'allocazione ottimale di portafoglio, viene qui introdotta la prevedibilità dei rendimenti.

Si vuole analizzare il problema di allocazione del portafoglio per un investitore buy-and-hold con un orizzonte di investimento di  $\hat{T}$  mesi. L'individuo è al tempo  $T$  e ha a disposizione solo due titoli: il titolo non rischioso e un indice azionario. Il suo obiettivo consiste nel massimizzare la ricchezza finale in  $T + \hat{T}$ , valutata per mezzo di una funzione di utilità potenza, dove  $\gamma$  è il coefficiente di avversione relativa al rischio.

Il modello VAR considerato da Barberis (2000) per lo studio dei rendimenti futuri fa riferimento a due sole variabili: gli extrarendimenti  $r_t$  dell'indice azionario e  $x_t$ , variabile utilizzata per fare le previsioni. Il modello

può essere così riscritto:  $\mathbf{Z} = \mathbf{X}\mathbf{C} + \mathbf{E}$ , ovvero

$$\begin{pmatrix} z'_2 \\ \vdots \\ z'_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_{T-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}' \\ \mathbf{B}' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon'_2 \\ \vdots \\ \epsilon'_T \end{pmatrix},$$

dove  $\mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{X}$  ed  $\mathbf{E}$  sono matrici  $(T - 1, 2)$  mentre  $\mathbf{C}$  è una matrice  $(2, 2)$  del tipo

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix},$$

dove la prima riga contiene i termini di intercetta e la seconda i coefficienti della variabile previsiva.

Determinati in questo modo gli extrarendimenti futuri dell'indice azionario, il problema dell'investitore riguarda la massimizzazione della sua utilità attesa definita sulla ricchezza finale

$$\max_{\omega} \mathbb{E}_T \left( \frac{\left( (1 - \omega) \exp(r_f \hat{T}) + \omega \exp(r_f \hat{T} + R_{T+\hat{T}}) \right)^{1-\gamma}}{1 - \gamma} \right),$$

dove  $\mathbb{E}_T$  significa che il valore atteso dell'utilità viene calcolato condizionatamente all'informazione disponibile, facendo riferimento alla distribuzione degli extrarendimenti composti multiperiodali  $R_{T+\hat{T}}$ . L'investitore può scegliere tra due possibili distribuzioni: può ignorare l'incertezza nei parametri oppure incorporarla attraverso la predictive distribution.

- Caso senza incertezza

Si assume valido il modello  $z_t = \mathbf{a} + \mathbf{B}x_{t-1} + \epsilon_t$ , dove  $z_t = (r_t, \mathbf{x}_t)'$  e  $\epsilon_t \sim i.i.d. N(\mathbf{0}, \Sigma)$ . Dopo aver ricavato le stime dei parametri dalla distribuzione a posteriori per  $\theta = (\mathbf{a}, \mathbf{B}, \Sigma)$ , viene generata la distribuzione degli extrarendimenti azionari futuri condizionatamente al valore fissato per i parametri e ai dati osservati fino al tempo  $T$ ,

$\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_T)'$ . Quindi l'investitore risolve

$$\max_{\omega} \int u(W_{T+\hat{T}}) p(R_{T+\hat{T}}|\hat{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{z}) dR_{T+\hat{T}}. \quad (3.1)$$

Per conoscere la distribuzione degli extrarendimenti condizionata  $p(R_{T+\hat{T}}|\hat{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{z})$ , necessaria al calcolo dell'integrale, si può riscrivere il modello come  $\mathbf{z}_t = \mathbf{a} + \mathbf{B}_0 \mathbf{z}_{t-1} + \boldsymbol{\epsilon}_t$ , quindi

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_{T+1} &= \mathbf{a} + \mathbf{B}_0 \mathbf{z}_T + \boldsymbol{\epsilon}_{T+1} \\ \mathbf{z}_{T+2} &= \mathbf{a} + \mathbf{B}_0 \mathbf{z}_{T+1} + \boldsymbol{\epsilon}_{T+2} \\ &= \mathbf{a} + \mathbf{B}_0(\mathbf{a} + \mathbf{B}_0 \mathbf{z}_T + \boldsymbol{\epsilon}_{T+1}) + \boldsymbol{\epsilon}_{T+2} \\ &= \mathbf{a} + \mathbf{B}_0 \mathbf{a} + \mathbf{B}_0^2 \mathbf{z}_T + \boldsymbol{\epsilon}_{T+2} + \mathbf{B}_0 \boldsymbol{\epsilon}_{T+1} \\ &\vdots \\ \mathbf{z}_{T+\hat{T}} &= \mathbf{a} + \mathbf{B}_0 \mathbf{a} + \mathbf{B}_0^2 \mathbf{a} + \dots + \mathbf{B}_0^{\hat{T}-1} \mathbf{a} + \mathbf{B}_0^{\hat{T}} \mathbf{z}_T + \boldsymbol{\epsilon}_{T+\hat{T}} \\ &\quad + \mathbf{B}_0^2 \boldsymbol{\epsilon}_{T+\hat{T}-1} + \dots + \mathbf{B}_0^{\hat{T}-2} \boldsymbol{\epsilon}_{T+2} + \mathbf{B}_0^{\hat{T}-1} \boldsymbol{\epsilon}_{T+1}. \end{aligned}$$

Condizionatamente ai parametri  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\boldsymbol{\Sigma}$ , la somma

$\mathbf{Z}_{T+\hat{T}} = \mathbf{z}_{T+1} + \dots + \mathbf{z}_{T+\hat{T}}$  è normalmente distribuita con media

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}_{sum} &= \hat{T} \mathbf{a} + (\hat{T} - 1) \mathbf{B}_0 \mathbf{a} + (\hat{T} - 2) \mathbf{B}_0^2 \mathbf{a} + \dots + \mathbf{B}_0^{\hat{T}-1} \mathbf{a} + \\ &\quad (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_0^2 + \dots + \mathbf{B}_0^{\hat{T}}) \mathbf{z}_T \end{aligned}$$

e varianza

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma}_{sum} &= \boldsymbol{\Sigma} + (\mathbf{I} + \mathbf{B}_0) \boldsymbol{\Sigma} (\mathbf{I} + \mathbf{B}_0)' + (\mathbf{I} + \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_0^2) \boldsymbol{\Sigma} (\mathbf{I} + \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_0^2)' \\ &\quad + \dots + (\mathbf{I} + \mathbf{B}_0 + \dots + \mathbf{B}_0^{\hat{T}-1}) \boldsymbol{\Sigma} (\mathbf{I} + \mathbf{B}_0 + \dots + \mathbf{B}_0^{\hat{T}-1})'. \end{aligned}$$

Quindi nel caso senza incertezza si ha una distribuzione  $N(\boldsymbol{\mu}_{sum}, \boldsymbol{\Sigma}_{sum})$ , dove  $\boldsymbol{\mu}_{sum}$  e  $\boldsymbol{\Sigma}_{sum}$  vengono calcolati con i parametri posti uguali ai valori stimati.

- Caso con incertezza

Per incorporare l'estimation risk nel problema di allocazione del portafoglio si fa riferimento a un approccio Bayesiano.

Per costruire la distribuzione a posteriori per i parametri, si considera una distribuzione a priori non informativa

$$p(\mathbf{C}, \Sigma) \propto |\Sigma|^{-3/2}.$$

La distribuzione a posteriori ricavata da Zellner (1971) è composta dalla distribuzione marginale

$$\Sigma^{-1} | \mathbf{z} \sim \text{Wishart}(T - 3, \mathbf{S}^{-1}),$$

dove  $\mathbf{S} = (\mathbf{Z} - \mathbf{X}\hat{\mathbf{C}})'(\mathbf{Z} - \mathbf{X}\hat{\mathbf{C}})$  con  $\hat{\mathbf{C}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Z}$  e dalla distribuzione marginale

$$\text{vec}(\mathbf{C}) | \Sigma, \mathbf{z} \sim N(\text{vec}(\hat{\mathbf{C}}), \Sigma \otimes (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}).$$

Integrando nella distribuzione a posteriori si ottiene la predictive distribution per gli extrarendimenti relativi a investimenti di lungo termine. Questa distribuzione è condizionata solo al campione osservato e non al parametro  $\theta$ :

$$p(R_{T+\hat{T}} | \mathbf{z}) = \int p(R_{T+\hat{T}} | \mathbf{z}, \theta) p(\theta | \mathbf{z}) dR_{T+\hat{T}} d\theta.$$

Il problema che l'investitore deve risolvere è

$$\max_{\omega} \int u(W_{T+\hat{T}}) p(R_{T+\hat{T}} | \mathbf{z}) dR_{T+\hat{T}}. \quad (3.2)$$

Un modo alternativo per risolvere il problema consiste nel riscriverlo in questa forma

$$\begin{aligned} & \max_{\omega} \int u(W_{T+\hat{T}}) p(R_{T+\hat{T}}, \theta | \mathbf{z}) dR_{T+\hat{T}} d\theta \\ & = \max_{\omega} \int u(W_{T+\hat{T}}) p(R_{T+\hat{T}} | \theta, \mathbf{z}) p(\theta | \mathbf{z}) dR_{T+\hat{T}} d\theta. \end{aligned}$$

La distribuzione degli extrarendimenti condizionata alle osservazioni passate e ai parametri si ricava da

$$\mathbf{Z}_{T+\hat{T}} | \mathbf{C}, \mathbf{z} \sim N(\boldsymbol{\mu}_{sum}, \Sigma_{sum}).$$

Il problema di massimizzazione viene risolto calcolando gli integrali (3.1) e (3.2) per diversi valori della quota investita nell'indice azionario, più precisamente per  $\omega = 0, 0.01, 0.02, \dots, 0.98, 0.99$ . Per analizzare se l'orizzonte di investimento influisce sulle scelte di allocazione viene ripetuta questa procedura, che consente di trovare il valore ottimo di  $\omega$  per diversi orizzonti da un mese a 10 anni.

Gli integrali vengono risolti numericamente attraverso la tecnica di simulazione, generando 200000 valori dalle varie distribuzioni considerate.

### 3.5.1 Procedura di campionamento

Per raggiungere un elevato grado di accuratezza delle stime si è posto una numerosità campionaria  $I$  pari a 200000 unità in ogni analisi. Come indicato nell'equazione (3.2) ci sono due passi da compiere per risolvere l'integrale. Per prima cosa si genera un campione dalla distribuzione a posteriori  $p(\theta|z)$ : dapprima si estraggono i valori dalla distribuzione marginale  $p(\Sigma^{-1}|z)$ , Wishart, e poi per ogni matrice  $\Sigma$  ricavata, si simula dalla distribuzione condizionata  $p(\text{vec}(\mathbf{C})|\Sigma, z)$ , Normale. Ripetendo questo procedimento 200000 volte si ottiene una rappresentazione accurata della distribuzione a posteriori.

In secondo luogo, per ogni  $(\mathbf{C}, \Sigma)$  ricavati dalla distribuzione a posteriori, si estrae un valore da  $p(\mathbf{Z}_{T+\hat{T}}|\mathbf{C}, \Sigma, z)$ , distribuzione normale dei rendimenti multiperiodali condizionatamente alle osservazioni passate e ai parametri  $\mathbf{C}$  e  $\Sigma$ . Questa procedura permette di ottenere un campione di numerosità elevata della predictive distribution, la quale può essere poi utilizzata per il calcolo dell'allocazione ottimale.

Nel caso in cui non venga considerata l'incertezza, si assume che l'investitore utilizzi le medie a posteriori delle variabili casuali  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\Sigma$  come valori fissati dei parametri, e che poi formi un campione di 200000 unità generando i valori da una distribuzione normale di media  $\hat{\boldsymbol{\mu}}_{sum}$  e varianza

---

 $\hat{\Sigma}_{sum}$ .

Nel capitolo seguente verranno riportate le allocazioni ottimali di portafoglio ottenute ripetendo questa procedura per diversi orizzonti di investimento, da un mese a 10 anni con incrementi di un mese e per diversi livelli di avversione relativa al rischio. Le analisi verranno svolte considerando le due possibili distribuzioni dei rendimenti: una che ignora l'estimation risk e l'altra che lo incorpora.

Al fine di implementare le procedure suddette si è scelto anche in questo caso di utilizzare l'ambiente di calcolo statistico R. I comandi utilizzati per implementare questa procedura sono elencati dettagliatamente in Appendice.



# Capitolo 4

## Risultati

### 4.1 Introduzione

In questo capitolo vengono analizzati i risultati relativi all'allocazione ottimale di portafoglio per un investitore buy-and-hold ed avverso al rischio. Per le analisi sulla prevedibilità degli extrarendimenti azionari vengono considerate tre variabili: il tasso di dividendo, il tasso di interesse a breve e il term spread. Per ciascuna di queste variabili vengono riportate le allocazioni ottimali nel caso venga ignorata l'incertezza e nel caso venga inserita nella distribuzione dei rendimenti futuri.

Nel quinto paragrafo sono illustrati i risultati ottenuti considerando diversi valori iniziali della variabile tasso di dividendo.

### 4.2 Variabile previsiva: tasso di dividendo

La prima variabile oggetto di analisi per la previsione dei rendimenti è il *tasso di dividendo*, detto anche dividend yield. Il dividend yield relativo al mese  $t$  è definito come la somma dei dividendi pagati dalle aziende presenti nell'indice azionario dal mese  $t - 11$  fino al mese  $t$ , diviso per il valore dell'indice alla fine del mese  $t$ .

Per calcolare la serie dei dividendi è necessario avere a disposizione i dati

dei rendimenti inclusi i dividendi  $r_{t,WD}$ , dei rendimenti esclusi i dividendi  $r_{t,ND}$  e la serie dei prezzi  $P_t$  senza i dividendi.

Facendo la differenza dei rendimenti con e senza i dividendi  $D_t$  pagati al mese  $t$

$$\begin{aligned} r_{t,WD} &= \log \frac{P_t + D_t}{P_{t-1}} \\ r_{t,ND} &= \log \frac{P_t}{P_{t-1}}, \end{aligned}$$

si ottiene

$$d_t = r_{t,WD} - r_{t,ND} = \log \left( 1 + \frac{D_t}{P_t} \right),$$

da cui si ricavano i dividendi pagati nel mese  $t$  dalle imprese  $D_t = (e^{d_t} - 1) P_t$ .

Il dividend yield è semplicemente ottenuto dall'applicazione della definizione, ovvero

$$dividend\ yield = \frac{\sum_{j=0}^{11} D_{t-j}}{P_t}.$$

### 4.2.1 Analisi preliminari

Osservando il grafico e i correlogrammi empirici sembra che la variabile dividend yield sia non stazionaria. Applicando il test di Dickey-Fuller senza costante, perché non significativa, si ricava il seguente valore del p-value associato, 0.5111. La serie presenta quindi una radice unitaria.

Le variabili considerate in un modello VAR dovrebbero essere stazionarie, purtroppo questo non vale per il tasso di dividendo. Stambaugh (1999) afferma che l'utilizzo di variabili altamente persistenti in un modello VAR può portare a piccole distorsioni nelle stime dei coefficienti quando il campione non ha numerosità elevata. In questo caso la distorsione ha segno opposto alla correlazione tra gli errori degli extrarendimenti e quelli del dividend yield.

Sebbene la non stazionarietà possa avere alcuni effetti sul valore dei coefficienti stimati, inizialmente non verrà fatta alcuna correzione. I va-

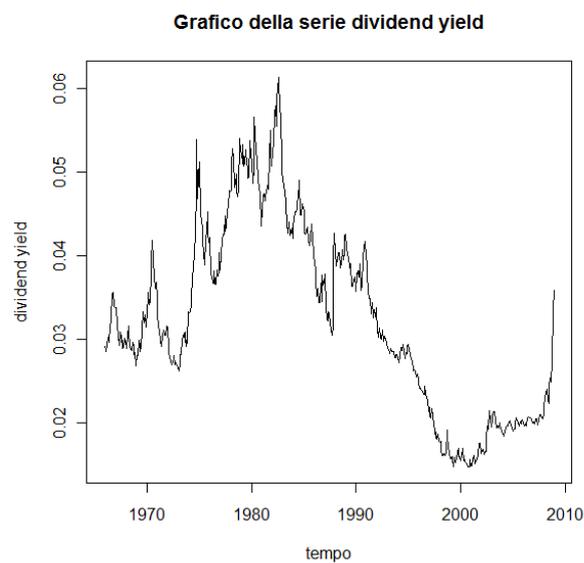


Figura 4.1: *Grafico della variabile previsiva dividend yield nel periodo 1965-2008.*

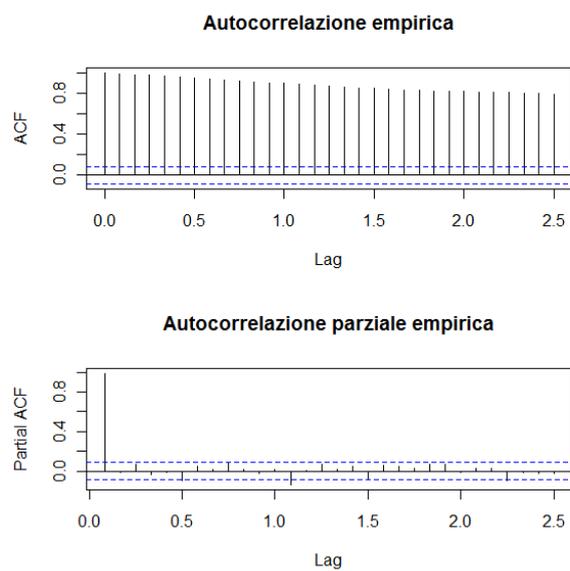


Figura 4.2: *Correlogrammi empirici della variabile previsiva dividend yield.*

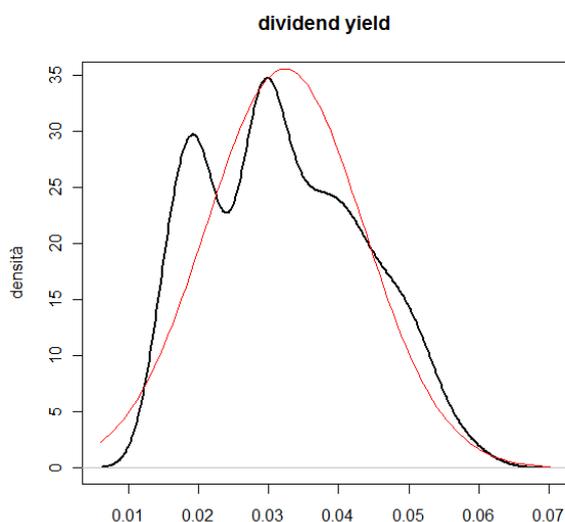


Figura 4.3: *Stima della densità della serie dividend yield e densità di una normale con media e varianza pari a quella stimata dalla serie del dividend yield.*

lori stimati verranno considerati come dati e noti dagli investitori. Tuttavia per evitare questo problema, viene successivamente considerata l'incertezza nei parametri del modello VAR, in modo tale da non considerare unicamente il particolare valore stimato.

I test di normalità portano a rifiutare l'ipotesi di normalità. Un'ulteriore conferma viene fornita dalla densità stimata, ben lontana dalla distribuzione normale, e dal grafico del normal probability plot.

Per determinare l'ordine del modello VAR da utilizzare per risolvere il problema della scelta di portafoglio, sono stati applicati alcuni criteri di selezione automatica. L'approccio consiste nello stimare il modello VAR( $p$ ) mediante diversi valori di  $p$ ,  $p = 0, 1, \dots, p_{max}$  e scegliere poi il valore che minimizza un determinato criterio di scelta. I più comuni sono quelli di Akaike, Hannan-Quinn e Schwarz. Questi criteri assegnano un costo all'introduzione di ogni nuovo parametro addizionale.

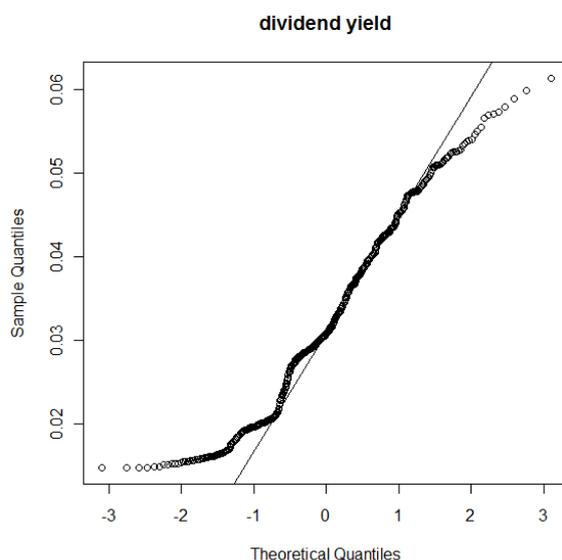


Figura 4.4: *Normal probability plot per la serie del dividendo yield.*

In questo caso tutti i criteri di selezione automatica considerati scelgono un modello autoregressivo del primo ordine con costante. Vengono poi poste le restrizioni in modo tale che l'unica variabile esplicativa in entrambe le equazioni sia il tasso di dividendo ritardato. Il modello di regressione considerato diventa

$$r_{t+1} = a_1 + b_1 x_t + \epsilon_{1,t+1},$$

$$x_{t+1} = a_2 + b_2 x_t + \epsilon_{2,t+1},$$

dove

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{1,t} \\ \epsilon_{2,t} \end{pmatrix} \sim N \left( \mathbf{0}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \right).$$

Analizzando i risultati del modello VAR stimato, si nota che la costante e il coefficiente della variabile previsiva nella prima equazione sono significativamente diversi da 0 ad un livello di significatività del 10%. Il coefficiente  $b_2$  è prossimo a 1, a conferma della forte persistenza che caratterizza

| dividend yield |          |                    |           |
|----------------|----------|--------------------|-----------|
| media          | 0.032306 | st.error           | 0.000494  |
| minimo         | 0.014703 | varianza           | 0.000126  |
| massimo        | 0.061418 | dev. st.           | 0.011230  |
| 1° quartile    | 0.021361 | asimmetria         | 0.287881  |
| 3° quartile    | 0.040472 | eccesso di curtosi | -0.847105 |

Tabella 4.1: *Principali statistiche descrittive della variabile dividend yield, relative al periodo 1965-2008.*

| $r_{t+1} = a_1 + b_1 x_t + \epsilon_{1,t+1}$ |          |           |         |        |
|--|----------|-----------|---------|--------|
|  | estimate | st. error | t value | prob   |
| $a_1$  | -0.0099  | 0.0058    | -1.717  | 0.0866 |
| $b_1$  | 0.4145   | 0.169     | 2.452   | 0.0145 |
| $x_{t+1} = a_2 + b_2 x_t + \epsilon_{2,t+1}$ |          |           |         |        |
|  | estimate | st. error | t value | prob   |
| $a_2$  | 0.0003   | 0.0002    | 1.524   | 0.128  |
| $b_2$  | 0.9907   | 0.0059    | 165.13  | <2e-16 |

Tabella 4.2: *Stima del modello VAR con variabile previsiva dividend yield nel periodo 1965-2008.*

la serie del dividend yield.  $L'R^2$  associato alla prima equazione è pari a 0.02, mentre la correlazione tra gli errori di  $r_t$  e di  $x_t$  è negativa e uguale a  $-0.914$ .

Per controllare l'adeguatezza del modello si sono analizzati i residui di entrambe le equazioni. Si è riscontrata l'assenza di autocorrelazione dei residui, applicando il test di Ljung-Box e il test di Breusch-Godfrey, ma non l'omoschedasticità e la normalità.

### 4.2.2 Risultati

In questo paragrafo sono esposti i risultati delle analisi compiute. L'obiettivo è mostrare come cambia l'allocazione del portafoglio all'aumentare dell'orizzonte di investimento per un individuo che adotta una strategia buy-and-hold e come si modifichi l'allocazione ottimale se l'incertezza nei parametri è incorporata esplicitamente nel modello considerato.

I risultati si basano sul modello  $z_t = \mathbf{a} + \mathbf{B}x_{t-1} + \epsilon_t$ , dove  $z_t = (r_t, x_t)'$  include l'extrarendimento logaritmico  $r_t$  e il dividend yield  $x_t$ . Si ipotizza che gli errori siano i.i.d. e provenienti da una distribuzione normale  $\epsilon_t \sim i.i.d. N(\mathbf{0}, \Sigma)$ . Per le analisi svolte sono stati considerati dapprima i dati da dicembre 1965 a dicembre 2008 e poi il sottocampione contenente le osservazioni da dicembre 1965 a dicembre 2006. In entrambi i casi i dati a disposizione sono stati utilizzati per generare un campione di numerosità  $I = 200000$  dalla distribuzione a posteriori dei parametri.

|               | 1965-2008 |          | 1965-2006 |          |
|---------------|-----------|----------|-----------|----------|
|               | media     | dev. st. | media     | dev. st. |
| $a_1$         | -0.0099   | 0.0058   | -0.0076   | 0.0029   |
| $a_2$         | 0.0003    | 2.1e-5   | 0.0002    | 2.1e-5   |
| $b_1$         | 0.4142    | 0.1695   | 0.3701    | 0.1702   |
| $b_2$         | 0.9907    | 0.0060   | 0.9919    | 0.0061   |
| $\sigma_1^2$  | 0.0019    | 1.19e-4  | 0.0018    | 1.17e-4  |
| $\sigma_{12}$ | -6.07e-5  | 3.99e-6  | -5.93e-5  | 4.01e-6  |
| $\sigma_2^2$  | 2.35e-6   | 1.48e-7  | 2.35e-6   | 1.51e-7  |

Tabella 4.3: *Media e deviazione standard dei parametri  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\Sigma$  ricavati generando 200000 valori dalle rispettive distribuzioni a posteriori, relative all'intervallo 1965-2008 e al sottocampione 1965-2006.*

La capacità della variabile tasso di dividendo di prevedere i rendimenti azionari è sintetizzata nel coefficiente  $b_1$ , il quale ha media a posteriori

0.4142 e deviazione standard 0.1695. Osservando il valore del coefficiente  $b_2$  riscontriamo la forte persistenza che caratterizza il tasso di dividendo, come già notato nelle analisi preliminari.

La matrice di varianza e covarianza degli errori presenta un'elevata correlazione negativa tra gli errori degli extrarendimenti azionari e del dividend yield, pari a  $-0.914$ ; questo valore influenza fortemente la distribuzione degli extrarendimenti nel lungo periodo.

Una diminuzione improvvisa del dividend yield comporta uno shock positivo degli extrarendimenti azionari dato che la correlazione tra gli errori è negativa. Inoltre una diminuzione del dividend yield porta a prevedere un abbassamento degli extrarendimenti del periodo successivo, essendo il coefficiente  $b_1$  maggiore di 0. Pertanto l'aumento inatteso degli extrarendimenti è seguito da una successiva diminuzione, generando in questo modo un'autocorrelazione negativa che fa diminuire la varianza condizionata degli extrarendimenti multiperiodali al crescere dell'orizzonte di investimento.

In conclusione, bassi valori del dividend yield comportano alti rendimenti azionari contemporanei e bassi rendimenti azionari futuri.

Le stime ottenute dei coefficienti sono simili a quelle presenti nell'articolo di Barberis (2000) relativi al periodo 1952-1995, pertanto questi risultati sono di supporto alla scelta di utilizzare un modello vettoriale autoregressivo del primo ordine come implementato da Barberis.

L'allocazione ottimale viene determinata facendo riferimento a 4 possibili distribuzioni degli extrarendimenti futuri condizionatamente ai dati passati. Nel capitolo 2 si è analizzato il caso in cui i rendimenti sono i.i.d. e il caso in cui viene incorporato l'estimation risk. In questo capitolo l'attenzione si focalizza sul ruolo della prevedibilità nella scelta di portafoglio attraverso uno specifico modello VAR. Esistono due modi per prevedere i rendimenti: l'investitore può ignorare l'incertezza e considerare i parametri  $\alpha$ ,  $B$ ,  $\Sigma$  fissi ai valori medi ricavati dalle distribuzioni a posteriori dei

parametri oppure servirsi della predictive distribution.

- Caso senza incertezza

Nel caso in cui il problema dell'incertezza nei parametri venga ignorato, l'individuo ipotizza per  $Z_{T+\hat{T}}$  una distribuzione normale di media  $\hat{\mu}_{sum}$  e varianza  $\hat{\Sigma}_{sum}$ , ottenute sostituendo ai parametri  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\Sigma$  i corrispettivi valori stimati riportati nella Tabella 4.3. La distribuzione degli extrarendimenti futuri condizionata alle osservazioni passate dipende dall'ultimo dato a disposizione per il tasso di dividendo,  $x_T$ . Se  $x_T$  è basso, verranno previsti bassi rendimenti, abbassando così la media  $\hat{\mu}_{sum}$  della distribuzione degli extrarendimenti futuri con la conseguente riduzione della quota investita nell'indice azionario. Per non tenere conto dell'effetto del valore iniziale sulle scelte di portafoglio, nelle analisi successive verrà posto  $x_T$  uguale alla media campionaria, ovvero  $x_T = 3.23\%$  quando si considera il campione 1965-2008 e uguale a  $3.28\%$  nel sottocampione. In questo modo è possibile concentrarsi unicamente sull'allocazione ottima al variare dell'orizzonte di investimento.

La Figura 4.5 illustra l'allocazione ottimale di portafoglio per un investitore buy-and-hold con funzione di utilità potenza. In ciascun grafico vengono riportate due linee: quella nera rappresenta l'allocazione ottima quando il modello considerato è  $r_t = \mu + \epsilon_t$ , con  $\epsilon_t \sim i.i.d. N(0, \sigma^2)$ , mentre la linea verde riporta l'allocazione ottimale di portafoglio se si utilizza il modello VAR considerato per prevedere gli extrarendimenti. In entrambi i casi non viene considerata l'incertezza nei parametri.

Confrontando l'andamento delle due linee nei grafici è possibile determinare l'effetto sulla scelta di portafoglio della prevedibilità dei rendimenti mediante la variabile tasso di dividendo. In tutti i grafici

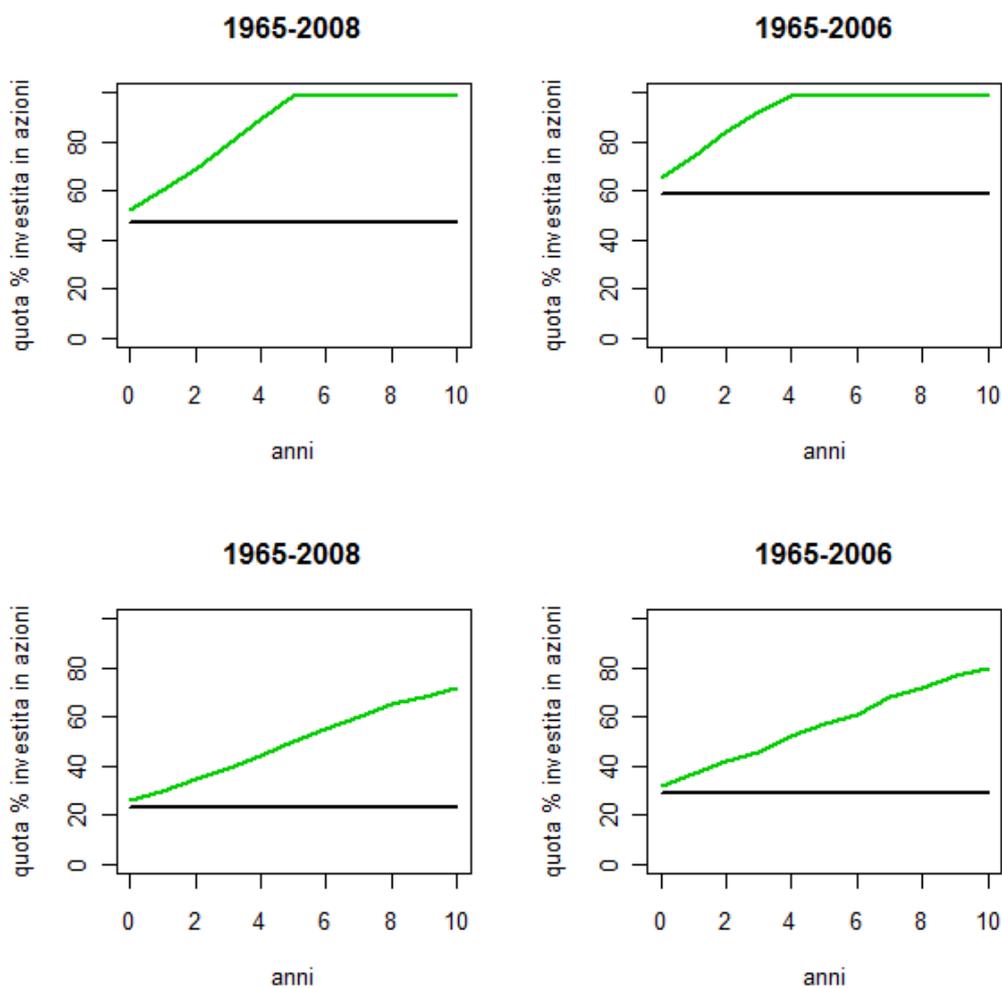


Figura 4.5: *Allocazione ottima di portafoglio per un investitore buy-and-hold con funzione di utilità potenza, relativamente al caso senza estimation risk. I due grafici superiori si riferiscono a  $\gamma = 5$ , i due inferiori a  $\gamma = 10$ . La linea verde riporta l'allocazione ottima ottenuta dall'utilizzo della variabile previsiva dividend yield.*

la linea verde, che riporta l'allocazione nell'indice azionario quando i rendimenti sono prevedibili, cresce notevolmente all'aumentare dell'orizzonte di investimento. Pertanto un investitore che ignora l'incertezza nei parametri ma considera i rendimenti prevedibili, detiene quote maggiori in azioni all'aumentare dell'orizzonte di investimento. Questo è dovuto all'abbandono dell'ipotesi di rendimenti i.i.d. in favore di un modello VAR che cerca di prevedere gli extrarendimenti attraverso il tasso di dividendo.

Nel caso di rendimenti i.i.d. la media e la varianza degli extrarendimenti multiperiodali condizionatamente alle osservazioni disponibili cresce linearmente con l'orizzonte  $\hat{T}$ , ovvero  $Var_T(R_{T+\hat{T}}) = \hat{T}\sigma^2$ . La quota investita in azioni risulta sempre la stessa indipendentemente dall'orizzonte di investimento.

Invece se i rendimenti vengono previsti dal tasso di dividendo la varianza degli extrarendimenti multiperiodali cresce più lentamente che linearmente con  $\hat{T}$ , facendo apparire le azioni relativamente meno rischiose per gli investimenti di lungo periodo.

Queste affermazioni possono essere verificate matematicamente. Per ricavare le formule della varianza condizionata di  $R_{T+\hat{T}}$ , dove  $R_{T+\hat{T}} = r_{T+1} + \dots + r_{T+\hat{T}}$ , è sufficiente sviluppare i conti matriciali presenti in  $\Sigma_{sum}$ . Ad esempio quando  $\hat{T}$  è uguale a 1 e 2 si ha

$$\begin{aligned} Var_T(r_{t+1}) &= \sigma_1^2, \\ Var_T(r_{t+1} + r_{t+2}) &= 2\sigma_1^2 + b_1^2\sigma_2^2 + 2b_1\sigma_{12}. \end{aligned}$$

Confrontando questi risultati con le varianze condizionali ottenute nel caso di rendimenti i.i.d. si trova la conferma di quanto precedentemente affermato. Nel caso di rendimenti prevedibili, la varianza condizionata per  $\hat{T} = 2$  è minore di quella calcolata sotto l'ipotesi di rendimenti i.i.d. solo se  $b_1^2\sigma_2^2 + 2b_1\sigma_{12}$  risulta minore di 0. Con i parametri stimati e posti uguali alle medie a posteriori si può verificare che  $\hat{b}_1^2\hat{\sigma}_2^2 + 2\hat{b}_1\hat{\sigma}_{12} < 0$ , quindi la varianza condizionata non cresce in proporzione con  $\hat{T}$  ma più lentamente. Per questo motivo il rischio

azionario di lungo periodo viene percepito più basso, favorendo il maggiore investimento in azioni.

Nel portafoglio ottimo l'allocazione nell'indice azionario aumenta con il crescere dell'orizzonte di investimento per tutti gli investitori buy-and-hold con funzione di utilità potenza.

Finora abbiamo visto che gli extrarendimenti azionari nel lungo periodo sono meno volatili e autocorrelati negativamente. Questo comportamento è il risultato del fenomeno di mean-reversion, indotto dalla capacità del dividend yield di prevedere i rendimenti azionari. Con il termine mean-reversion si intende che un inatteso alto rendimento oggi riduce i rendimenti attesi futuri, analogamente alti rendimenti a breve sono seguiti da rendimenti più bassi nel lungo termine e viceversa, come conseguenza di un processo di ritorno verso la media. Questo fenomeno venne documentato per la prima volta da Poterba e Summers (1988), i quali partendo dall'analisi della varianza dei rendimenti azionari statunitensi riscontrarono una correlazione negativa nei rendimenti per orizzonti temporali lunghi. Tuttavia ai livelli statistici convenzionali non poteva essere rifiutata l'ipotesi di processo White Noise per i rendimenti.

Attualmente il problema nella rilevazione di mean-reversion risiede nella mancanza di serie storiche lunghe e attendibili, perché si presume che questo comportamento si manifesti con una certa lentezza e necessiti di intervalli significativi per essere catturato.

Pertanto dal punto di vista dell'investitore e condizionatamente ai dati disponibili, gli extrarendimenti azionari sono meno volatili se misurati su periodi lunghi. Matematicamente questa riduzione del rischio all'aumentare dell'orizzonte di investimento è dovuta al fenomeno di mean-reversion, il quale favorisce il maggiore investimento in azioni da parte di soggetti avversi al rischio.

- Caso con incertezza

Per studiare l'effetto dell'incertezza nei parametri sull'allocazione di portafoglio si confrontano i risultati in cui la distribuzione dei rendimenti è condizionata ai valori fissati dei parametri  $\alpha$ ,  $B$ ,  $\Sigma$  con quelli ottenuti facendo riferimento alla loro distribuzione a posteriori.

Nella Figura 4.6 viene riportata l'allocazione ottimale nell'indice azionario per un investitore buy-and-hold con funzione di utilità potenza. La linea verde continua riporta l'allocazione relativa al caso senza incertezza, mentre la linea verde tratteggiata rappresenta l'allocazione ottima quando viene introdotto l'estimation risk. In entrambi i casi si ipotizza che i rendimenti vengano previsti dalla variabile tasso di dividendo.

Dai grafici si evince che l'effetto dell'orizzonte, ovvero la diversa allocazione del portafoglio al variare dell'orizzonte di investimento, è ancora presente ma meno rilevante. Un investitore con orizzonte di lungo termine continua ad investire la maggior parte della sua ricchezza nell'indice azionario, ma in misura inferiore a quanto avrebbe fatto se non avesse considerato l'estimation risk.

Questo risultato deriva innanzi tutto dall'incertezza dell'investitore sulla media degli extrarendimenti azionari futuri. L'incertezza fa crescere la varianza condizionata all'aumentare di  $\hat{T}$  più velocemente del caso in cui non si tenga conto dell'estimation risk. Inoltre la vera capacità previsiva della variabile dividend yield è ignota e potrebbe essere sia più debole di quanto stimato, con la conseguente riduzione della quota investita in azioni, sia più forte, comportando un notevole investimento in azioni. A questi due effetti contrapposti, l'individuo, avverso al rischio, risponde investendo meno in azioni nel lungo periodo rispetto al caso senza incertezza.

Incorporare l'incertezza nei parametri fa crescere la varianza condi-

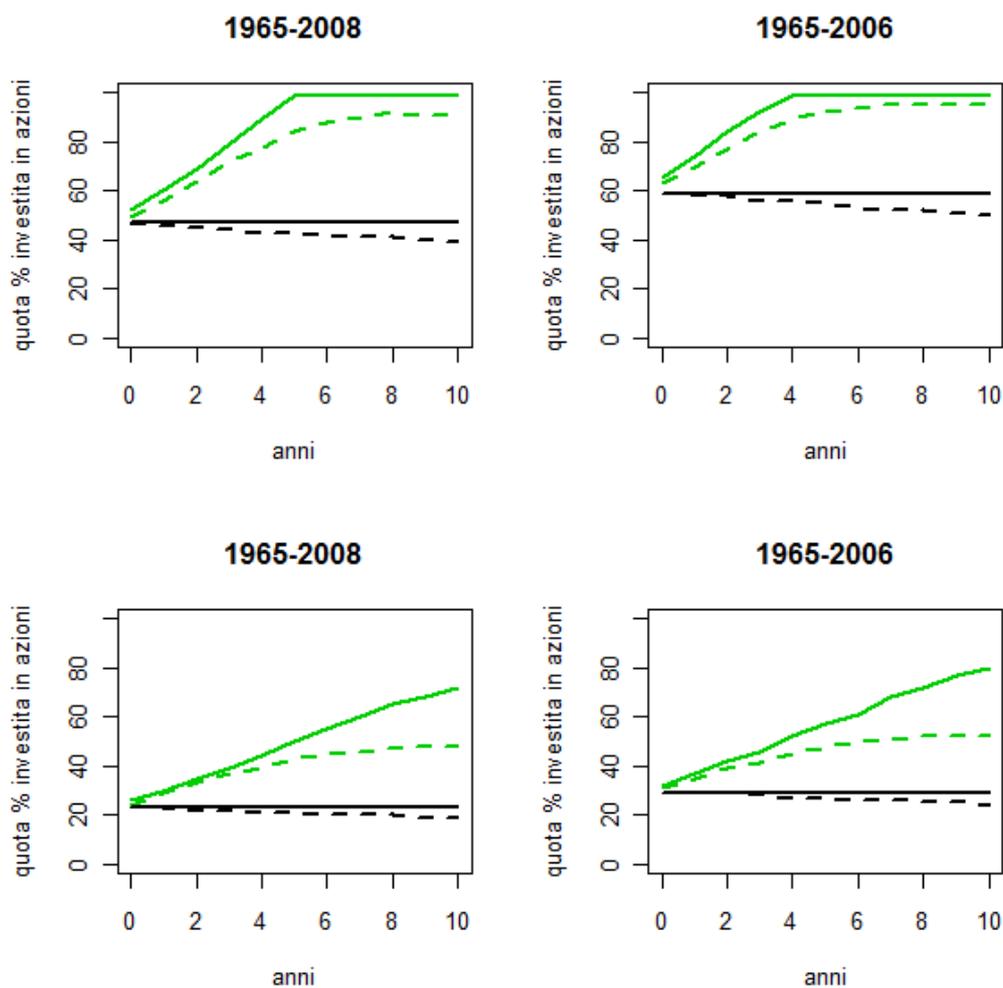


Figura 4.6: *Allocazione ottima di portafoglio nel caso di incertezza nei parametri. I due grafici superiori si riferiscono a  $\gamma = 5$ , i due inferiori a  $\gamma = 10$ . La linea verde tratteggiata riporta l'allocazione ottima quando viene introdotto l'estimation risk.*

zionata degli extrarendimenti multiperiodali soprattutto per lunghi orizzonti di investimento, facendo sembrare le azioni più rischiose. L'investitore, consapevole che i veri valori dei parametri sono ignoti, diventa più cauto e investe una quantità minore nell'indice azionario.

Analizzando i grafici si riscontra una diminuzione dell'ampiezza dell'effetto dell'orizzonte. Ad esempio nel periodo 1965-2006, quando  $\gamma = 10$ , ignorare l'incertezza nei parametri può portare a una sovrallocazione nell'indice azionario del 25% circa in un orizzonte di 10 anni.

Un aumento dell'incertezza sui parametri, osservabile dall'aumento delle deviazioni standard dei parametri, si rifletterebbe sull'allocazione ottimale facendo diminuire in modo notevole la quota investita nell'indice azionario.

## 4.3 Variabile previsiva: tasso di interesse a breve

La seconda variabile utilizzata per prevedere gli extrarendimenti dell'indice azionario NYSE è il *tasso di interesse a breve termine*, definito anche *risk free*, il quale è ottenuto dai Treasury bills con scadenza a 3 mesi. Questa variabile viene spesso trattata nella letteratura finanziaria non solo per prevedere gli extrarendimenti azionari ma anche quelli obbligazionari.

### 4.3.1 Analisi preliminari

Nel capitolo 2 sono state analizzate le principali proprietà del tasso di interesse a breve. Si è visto che è non stazionario e che non ha distribuzione normale. Come per la variabile tasso di dividendo, la forte persistenza che caratterizza il *risk free* può portare a distorsioni nelle stime dei parametri del modello VAR. Inizialmente non verrà eseguita alcuna modifica e i veri

valori dei parametri saranno posti uguali a quanto stimato, successivamente verrà considerato l'estimation risk per ovviare a questo problema.

Per determinare l'ordine del modello VAR sono stati applicati alcuni criteri di selezione automatica. Il criterio di Akaike propende per  $p = 2$ , mentre quello di Schwarz per  $p = 1$ , in quanto assegna una penalità più alta all'introduzione di nuovi parametri rispetto al criterio di Akaike. Si sceglie di operare con un modello VAR del primo ordine, come sostenuto dal criterio di Schwarz, perché più semplice e perché ci sono meno parametri da stimare, in modo tale da avere stime più accurate con i dati a disposizione. Al modello VAR(1) sono state imposte alcune restrizioni in modo tale che le variabili considerate non dipendano dagli extrarendimenti azionari ritardati.

|       | $r_{t+1} = a_1 + b_1 x_t + \epsilon_{1,t+1}$ |           |         |        |
|-------|--|-----------|---------|--------|
|       | estimate                                     | st. error | t value | prob   |
| $a_1$ | 0.0025                                       | 0.0044    | 0.557   | 0.578  |
| $b_1$ | 0.2087                                       | 0.8357    | 0.250   | 0.803  |
|       | $x_{t+1} = a_2 + b_2 x_t + \epsilon_{2,t+1}$ |           |         |        |
|       | estimate                                     | st. error | t value | prob   |
| $a_2$ | 6.06e-5                                      | 4.42e-5   | 1.371   | 0.171  |
| $b_2$ | 0.986  | 0.0083    | 118.05  | <2e-16 |

Tabella 4.4: *Stima del modello VAR con variabile previsiva tasso di interesse a breve nel periodo 1965-2008.*

Dalla Tabella 4.4 si nota che la costante e il coefficiente della variabile previsiva nella prima equazione sono entrambi non significativi. Il coefficiente  $b_2$  prossimo a 1 evidenzia la forte persistenza che caratterizza la serie del risk free. L' $R^2$  associato alla prima equazione pari a 0.006 indica la scarsa bontà di adattamento del modello teorico ai dati. La correlazione

tra gli errori di  $r_t$  e di  $x_t$  è positiva e uguale a 0.11.

Analizzando i residui del modello VAR stimato relativi alla prima equazione non si riscontra la presenza di autocorrelazione. Tuttavia i residui non hanno distribuzione normale.

Da questi risultati sembra che il tasso di interesse a breve non sia una variabile in grado di spiegare il comportamento dinamico degli extrarendimenti dell'indice azionario. Tuttavia si può provare ugualmente ad utilizzare questa variabile per determinare l'allocazione ottima e si può vedere se e come essa influenzi le scelte di portafoglio.

### 4.3.2 Risultati

In questo paragrafo vengono esposti i risultati ottenuti utilizzando il tasso di interesse a breve come variabile previsiva. Il modello considerato è  $z_t = \mathbf{a} + \mathbf{B}x_{t-1} + \epsilon_t$ , dove  $z_t = (r_t, x_t)'$  include l'extrarendimento logaritmico  $r_t$  e il risk free  $x_t$ . Si ipotizza che gli errori siano i.i.d. e provenienti da una distribuzione normale  $\epsilon_t \sim i.i.d. N(\mathbf{0}, \Sigma)$ .

|               | 1965-2008 |          | 1965-2006 |          |
|---------------|-----------|----------|-----------|----------|
|               | media     | dev. st. | media     | dev. st. |
| $a_1$         | 0.0025    | 0.0044   | 0.0079    | 0.0046   |
| $a_2$         | 6.1e-5    | 4.4e-5   | 9.3e-5    | 4.7e-5   |
| $b_1$         | 0.2057    | 0.8392   | -0.7132   | 0.8472   |
| $b_2$         | 0.9858    | 0.0084   | 0.9812    | 0.0087   |
| $\sigma_1^2$  | 0.0019    | 1.19e-4  | 0.0018    | 1.17e-4  |
| $\sigma_{12}$ | 2.04e-6   | 8.43e-7  | 1.72e-6   | 8.52e-7  |
| $\sigma_2^2$  | 1.89e-7   | 1.19e-8  | 1.91e-7   | 1.22e-8  |

Tabella 4.5: Media e deviazione standard dei parametri  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\Sigma$  ricavati generando 200000 valori dalle rispettive distribuzioni a posteriori, relative all'intervallo 1965-2008 e al sottocampione 1965-2006.

Dalle analisi della Tabella 4.5 si deducono due risultati particolarmente importanti per le considerazioni successive. In primo luogo il coefficiente  $b_1$  è positivo nel periodo 1965-2008 e negativo nel periodo 1965-2006. Secondo, la matrice di varianza e covarianza degli errori presenta una correlazione positiva in entrambi i periodi e pari a 0.11 nel periodo 1965-2008 e a 0.09 nel sottocampione. Questo significa che una diminuzione improvvisa del risk free comporta uno shock negativo degli extrarendimenti azionari, dato che  $\sigma_{12} > 0$ . I rendimenti futuri continuano a diminuire se si considera  $b_1$  positivo, mentre in futuro crescono se il coefficiente  $b_1$  è negativo.

Nel seguito si analizza l'effetto della prevedibilità dei rendimenti attraverso il tasso di interesse a breve termine nell'allocazione ottimale di portafoglio. Dapprima non viene incorporato l'estimation risk e si studia solo l'effetto della prevedibilità, successivamente si considera la predictive distribution.

- Caso senza incertezza

L'investitore ipotizza per  $Z_{T+\hat{T}}$  una distribuzione normale di media  $\hat{\mu}_{sum}$  e varianza  $\hat{\Sigma}_{sum}$ , ottenute sostituendo ai parametri  $a, B, \Sigma$  i corrispondenti valori stimati e pari alle medie a posteriori riportate nella Tabella 4.5. La distribuzione degli extrarendimenti futuri condizionatamente ai dati passati dipende dall'ultimo valore osservato  $x_T$  del risk free. Per non tenere conto dell'effetto del valore iniziale, nelle analisi successive verrà posto uguale alla media campionaria, ovvero 0.00477 quando si considera l'intero campione e 0.00489 per il sottocampione 1965-2006.

La Figura 4.7 illustra l'allocazione ottimale di portafoglio per un investitore buy-and-hold con funzione di utilità potenza. In ciascun grafico la linea nera rappresenta l'allocazione ottimale in azioni quando il modello considerato è  $r_t = \mu + \epsilon_t$ , con  $\epsilon_t \sim i.i.d. N(0, \sigma^2)$ , mentre la linea verde riporta l'allocazione nel caso di prevedibilità degli ex-

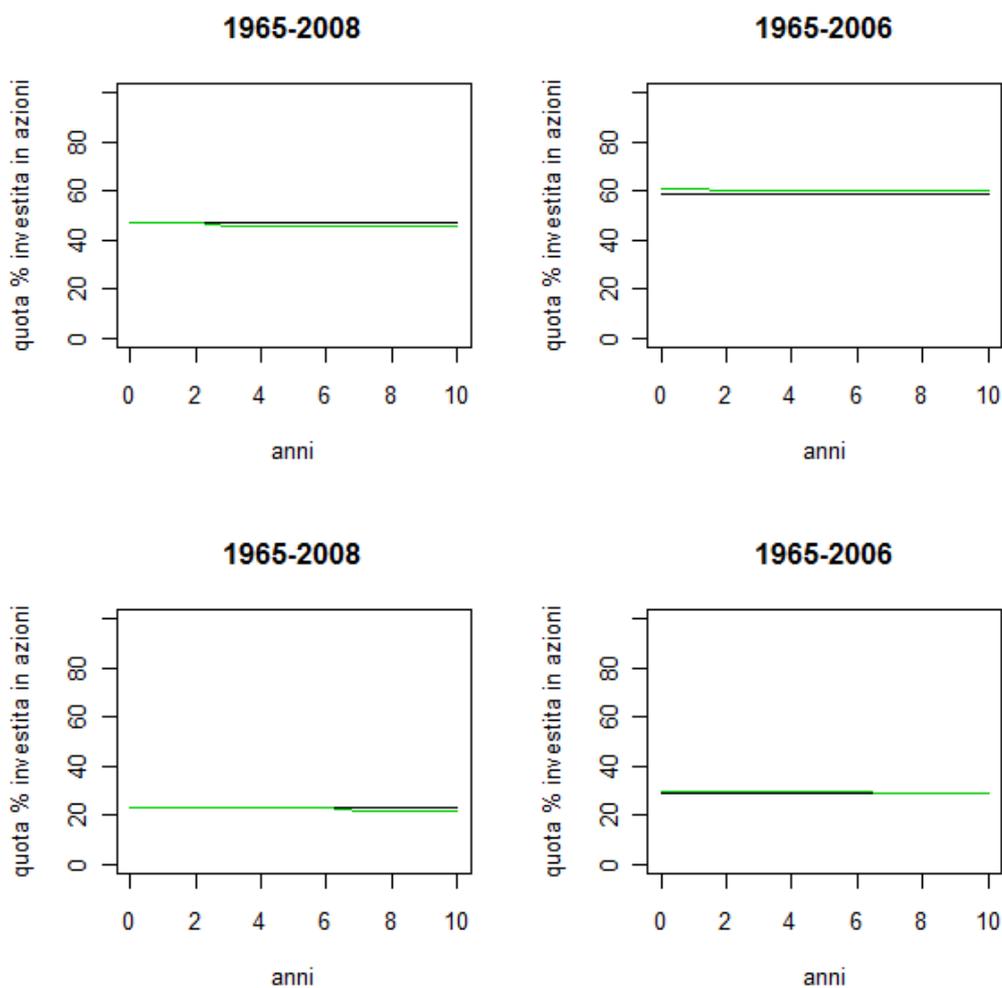


Figura 4.7: *Allocazione ottima di portafoglio per un investitore buy-and-hold con funzione di utilità potenza, relativamente al caso senza estimation risk. I due grafici superiori si riferiscono a  $\gamma = 5$ , i due inferiori a  $\gamma = 10$ . La linea verde riporta l'allocazione ottima ottenuta dall'utilizzo della variabile previsiva tasso di interesse a breve termine.*

trarendimenti. In entrambi i casi non viene considerata l'incertezza nei parametri.

Confrontando l'andamento delle due linee è possibile determinare l'effetto sulla scelta di portafoglio della prevedibilità dei rendimenti mediante la variabile risk free.

Osservando i grafici relativi al periodo 1965-2008 si nota che l'investitore buy-and-hold investe quote minori nell'indice azionario nel lungo periodo rispetto a quanto avrebbe investito nel breve termine. Sembra che le azioni diventino più rischiose all'aumentare dell'orizzonte di investimento. Infatti la quota investita in azioni a 10 anni utilizzando il risk free è sotto dell'1% rispetto all'allocatione ottenuta quando l'orizzonte di investimento è di un mese.

La varianza condizionata degli extrarendimenti multiperiodali cresce più velocemente che linearmente con  $\hat{T}$ , facendo apparire le azioni più rischiose nel lungo periodo. Ponendo i parametri uguali alle medie a posteriori del periodo 1965-2008, si può verificare che  $Var_T(R_{T+2}) = 2\hat{\sigma}_1^2 + \hat{b}_1^2\hat{\sigma}_2^2 + 2\hat{b}_1\hat{\sigma}_{12} > 2\hat{\sigma}_1^2$ , quindi la varianza condizionata non cresce in proporzione con  $\hat{T}$  ma più velocemente. Ne consegue che il rischio azionario di lungo periodo venga percepito più alto, favorendo gli individui ad investire maggiormente nel titolo privo di rischio. Gli extrarendimenti azionari nel lungo periodo risultano più volatili rispetto al breve termine, come conseguenza del fenomeno di mean-aversion. Questo fenomeno è il risultato della previsione dei rendimenti effettuata dalla variabile risk free, i cui errori sono correlati positivamente con gli errori degli extrarendimenti azionari.

Dall'analisi dei grafici ottenuti con i dati fino al 2006, la quota investita in azioni risulta maggiore di quella investita quando i rendimenti non sono prevedibili. Nel caso in cui i rendimenti vengano pre-

visti dal tasso di interesse a breve, la varianza condizionata degli extrarendimenti multiperiodali cresce più lentamente che linearmente con  $\hat{T}$ . Tuttavia l'allocazione nell'indice azionario diminuisce al crescere dell'orizzonte di investimento, pur mantenendosi superiore o uguale all'allocazione ottima relativa al caso di rendimenti i.i.d.

- Caso con incertezza

Come si è visto dai risultati del modello VAR stimato, la non significatività di  $a_1$  e  $b_1$  indica che la vera capacità previsiva del risk free può essere più debole di quanto stimato. Inoltre la serie del tasso di interesse presenta una radice unitaria. Per questi motivi è fondamentale considerare l'incertezza nei parametri del modello VAR.

Nella Figura 4.8 viene riportata l'allocazione ottimale nell'indice azionario per un investitore buy-and-hold con funzione di utilità potenza. La linea verde continua riporta l'allocazione relativa al caso senza incertezza, mentre la linea verde tratteggiata rappresenta l'allocazione ottima quando viene introdotto l'estimation risk. In entrambi i casi si ipotizza che i rendimenti siano previsti dal tasso di interesse a breve.

Indipendentemente dal periodo scelto per le analisi, la posizione della linea verde tratteggiata comporta un'allocazione in azioni inferiore rispetto a tutti i restanti casi. Questo significa che considerare congiuntamente prevedibilità e incertezza porta a una significativa diminuzione di quanto investito nell'indice azionario, che raggiunge il 12% in meno nel caso di  $\gamma = 5$  e periodo 1965-2008 rispetto al caso di rendimenti i.i.d. Pertanto l'introduzione dell'estimation risk provoca una diminuzione superiore, in valore assoluto, alla diminuzione provocata dall'incertezza quando i rendimenti non vengono previsti da alcuna variabile.

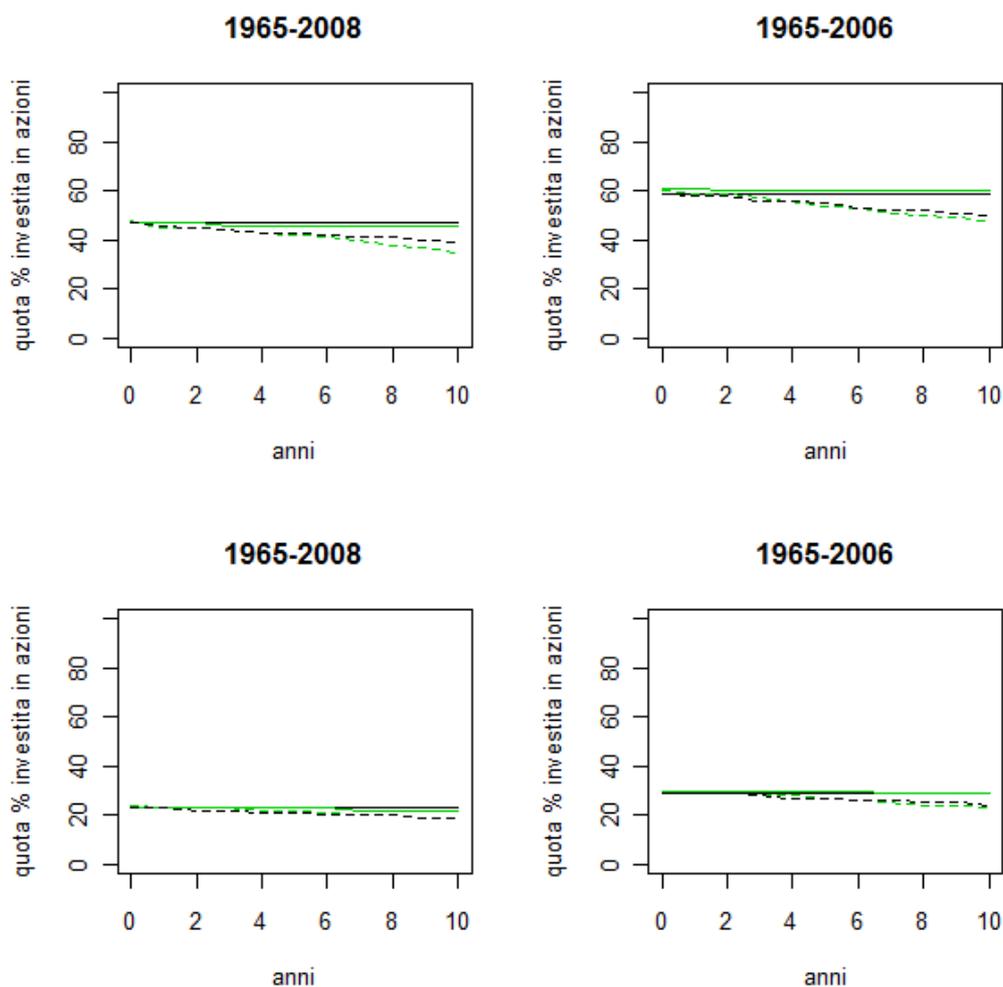


Figura 4.8: *Allocazione ottima di portafoglio nel caso di incertezza nei parametri. I due grafici superiori si riferiscono a  $\gamma = 5$ , i due inferiori a  $\gamma = 10$ . La linea verde tratteggiata riporta l'allocazione ottima quando viene introdotto l'estimation risk e i rendimenti sono previsti dal tasso di interesse a breve.*

Incorporare l'incertezza nei parametri, fa crescere la varianza condizionata degli extrarendimenti multiperiodali soprattutto per lunghi orizzonti di investimento, facendo sembrare le azioni ancora più rischiose. L'investitore, consapevole che i veri valori dei parametri sono ignoti, diventa più cauto e investe una quantità minore nell'indice azionario. Pertanto l'incertezza nei parametri introduce un effetto dell'orizzonte, ovvero una diversa allocazione del portafoglio al variare dell'orizzonte di investimento.

## 4.4 Variabile previsiva: term spread

L'ultima variabile considerata per prevedere gli extrarendimenti dell'indice azionario è il *term spread*, definito anche come differenziale del tasso di interesse a lungo termine e di quello a breve. Nella tesi il term spread viene ricavato facendo la differenza tra il tasso dei Treasury bills con scadenza a 10 anni e il tasso dei Treasury bills a 3 mesi.

### 4.4.1 Analisi preliminari

Dalla Tabella 4.6 si deduce che la serie considerata del term spread ha media positiva, come è ovvio attendersi dato che a scadenze lunghe corrispondono solitamente tassi più elevati. La serie presenta asimmetria negativa e ha code meno pesanti della distribuzione normale.

Analizzando i correlogrammi empirici si riscontrano diversi ritardi significativi nella funzione di autocorrelazione empirica. Applicando il test di Dickey-Fuller, senza costante perché non significativa, si ottiene un p-value pari a 0.014. Si rifiuta l'ipotesi nulla di presenza di radice unitaria, pertanto la serie del term spread può essere considerata stazionaria. I test di normalità portano al rifiuto dell'ipotesi di normalità; è sufficiente osservare la forma della densità stimata per capire che la distribuzione del term

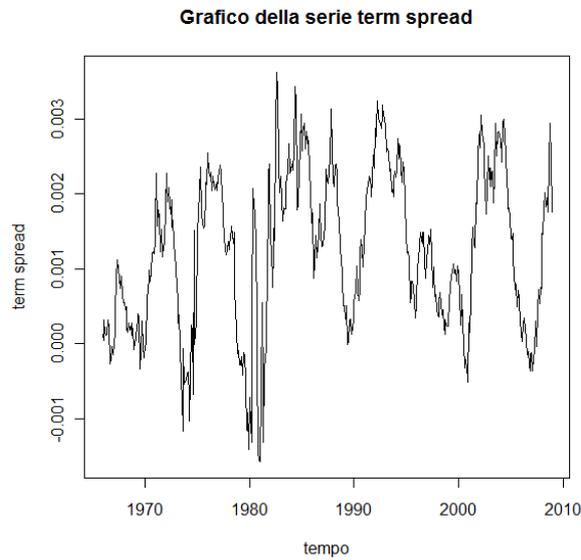


Figura 4.9: *Grafico della variabile previsiva term spread nel periodo 1965-2008.*

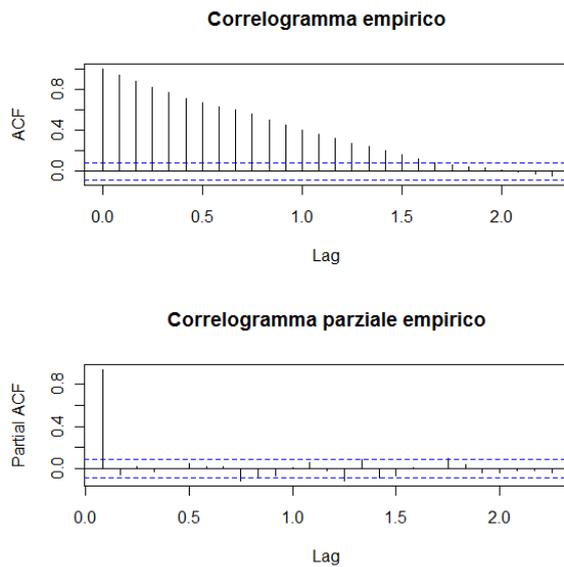


Figura 4.10: *Correlogrammi empirici della variabile previsiva term spread nel periodo 1965-2008.*

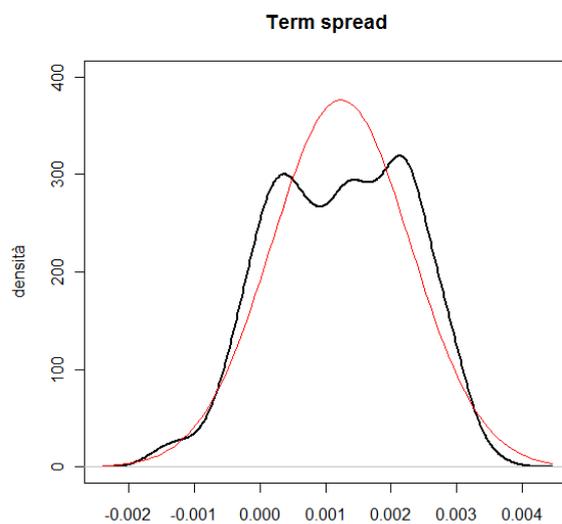


Figura 4.11: *Stima della densità della serie term spread e densità di una normale con media e varianza pari a quella stimata dalla serie del term spread.*

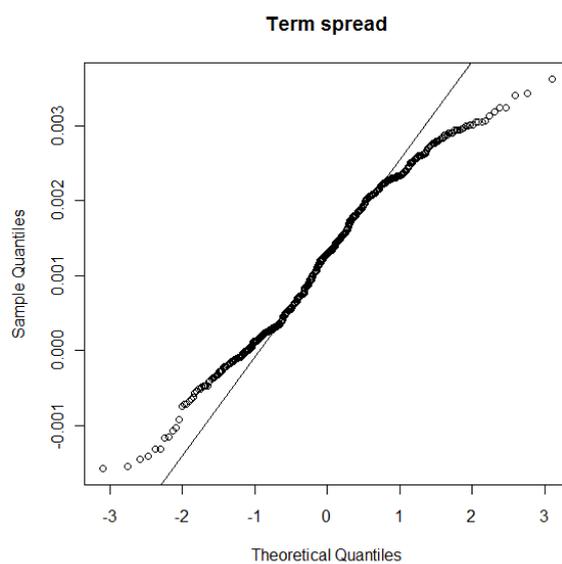


Figura 4.12: *Normal probability plot per la serie del term spread.*

spread è lontana dalla normale.

| term spread |           |                    |           |
|-------------|-----------|--------------------|-----------|
| media       | 0.001236  | st.error           | 0.000047  |
| minimo      | -0.001574 | varianza           | 0.000001  |
| massimo     | 0.003626  | dev. st.           | 0.001059  |
| 1° quartile | 0.000347  | asimmetria         | -0.161052 |
| 3° quartile | 0.002122  | eccesso di curtosi | -0.757096 |

Tabella 4.6: *Principali statistiche descrittive della variabile term spread, relative al periodo 1965-2008.*

| $r_{t+1} = a_1 + b_1 x_t + \epsilon_{1,t+1}$ |          |           |         |        |
|--|----------|-----------|---------|--------|
|  | estimate | st. error | t value | prob   |
| $a_1$  | 0.0021   | 0.0029    | 0.698   | 0.485  |
| $b_1$  | 1.146    | 1.8018    | 0.636   | 0.525  |
| $x_{t+1} = a_2 + b_2 x_t + \epsilon_{2,t+1}$ |          |           |         |        |
|  | estimate | st. error | t value | prob   |
| $a_2$  | 7.61e-5  | 2.41e-5   | 3.155   | 0.002  |
| $b_2$  | 0.9409   | 0.0015    | 63.45   | <2e-16 |

Tabella 4.7: *Stima del modello VAR con variabile previsiva term spread, nel periodo 1965-2008.*

I criteri di Hannan-Quinn e Schwarz scelgono come ordine del modello VAR  $p = 1$ . Al modello VAR(1) sono state imposte le restrizioni già considerate per le precedenti variabili previsive.

Dalle stime dei parametri presenti nel modello VAR riportate in Tabella 4.7 si osserva che la costante e il coefficiente della variabile previsiva  $b_1$  sono non significative. Il coefficiente  $b_2$  stimato è vicino a 1 e la correlazione tra gli errori degli extrarendimenti e del term spread è negativa e

pari a  $-0.003$ . L' $R^2$  associato alla prima equazione del modello VAR è pari a  $0.007$ ; da cui si deduce che il modello non si adatta bene ai dati.

Applicando il test di Ljung-Box si ricava che i residui del modello stimato non sono serialmente correlati, mentre attraverso il test di Jarque-Bera si rifiuta l'ipotesi di normalità.

#### 4.4.2 Risultati

|               | 1965-2008 |          | 1965-2006 |          |
|---------------|-----------|----------|-----------|----------|
|               | media     | dev. st. | media     | dev. st. |
| $a_1$         | 0.0020    | 0.0029   | 0.0017    | 0.0029   |
| $a_2$         | 7.6e-5    | 2.4e-5   | 7.1e-5    | 2.5e-5   |
| $b_1$         | 1.1482    | 1.8036   | 2.2945    | 1.8118   |
| $b_2$         | 0.9409    | 0.0149   | 0.9425    | 0.0152   |
| $\sigma_1^2$  | 0.0019    | 1.19e-4  | 0.0018    | 1.17e-4  |
| $\sigma_{12}$ | -4.67e-8  | 1.0e-6   | -1.17e-7  | 1.0e-6   |
| $\sigma_2^2$  | 1.28e-7   | 8.05e-9  | 1.28e-7   | 8.28e-9  |

Tabella 4.8: Media e deviazione standard dei parametri  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\Sigma$  ricavati generando 200000 valori dalle rispettive distribuzioni a posteriori, relative all'intervallo 1965-2008 e al sottocampione 1965-2006.

In questo paragrafo vengono esposti i risultati ottenuti utilizzando il term spread come variabile previsiva. Il modello considerato è  $z_t = \mathbf{a} + \mathbf{B}x_{t-1} + \epsilon_t$ , dove  $z_t = (r_t, x_t)'$  include l'extrarendimento logaritmico  $r_t$  e il term spread  $x_t$ . Si ipotizza che gli errori siano i.i.d. e provenienti da una distribuzione normale  $\epsilon_t \sim i.i.d. N(\mathbf{0}, \Sigma)$ .

Analizzando i valori presenti nella Tabella 4.8 ricaviamo due risultati particolarmente importanti per le analisi successive.

In primo luogo il coefficiente  $b_1$  è positivo, quindi una diminuzione oggi del term spread provoca una diminuzione degli extrarendimenti azionari

nel periodo successivo. Secondo, la matrice di varianza e covarianza degli errori presenta una correlazione negativa ma prossima a 0 tra gli errori degli extrarendimenti e del term spread,  $\rho = -0.003$  nel periodo 1965-2008 e  $\rho = -0.007$  nel sottocampione. Pertanto un'inattesa diminuzione del term spread provoca uno shock positivo istantaneo degli extrarendimenti. In sintesi, una diminuzione improvvisa del term spread comporta uno shock positivo dei rendimenti azionari, dato che  $\sigma_{12} < 0$ , mentre i rendimenti futuri sono previsti più bassi, essendo  $b_1$  positivo. Quindi bassi valori del term spread implicano extrarendimenti azionari contemporanei più elevati e prevedono rendimenti azionari futuri inferiori.

Nel seguito si analizza l'effetto della prevedibilità dei rendimenti attraverso il term spread nell'allocazione ottimale di portafoglio.

- Caso senza incertezza

L'agente economico ipotizza per  $Z_{T+\hat{T}}$  una distribuzione normale di media  $\hat{\mu}_{sum}$  e varianza  $\hat{\Sigma}_{sum}$ , ottenute sostituendo ai parametri  $a, B, \Sigma$  i corrispettivi valori stimati e pari alle medie a posteriori, riportate nella Tabella 4.8. La distribuzione degli extrarendimenti futuri condizionatamente ai dati passati dipende dall'ultimo valore disponibile  $x_T$  del term spread. Per non tenere conto dell'effetto del valore iniziale, nelle analisi successive verrà posto uguale alla media campionaria, ovvero  $x_T = 0.1235\%$  quando si considera l'intero campione e  $x_T = 0.1242\%$  per il sottocampione 1965-2006.

In ciascun grafico vengono riportate due linee: quella nera rappresenta l'allocazione ottimale quando il modello considerato è  $r_t = \mu + \epsilon_t$ , con  $\epsilon_t \sim i.i.d. N(0, \sigma^2)$  e non c'è incertezza nei parametri, mentre la linea verde riporta l'allocazione in azioni se si utilizza il modello VAR per prevedere gli extrarendimenti senza incorporare l'estimation risk.

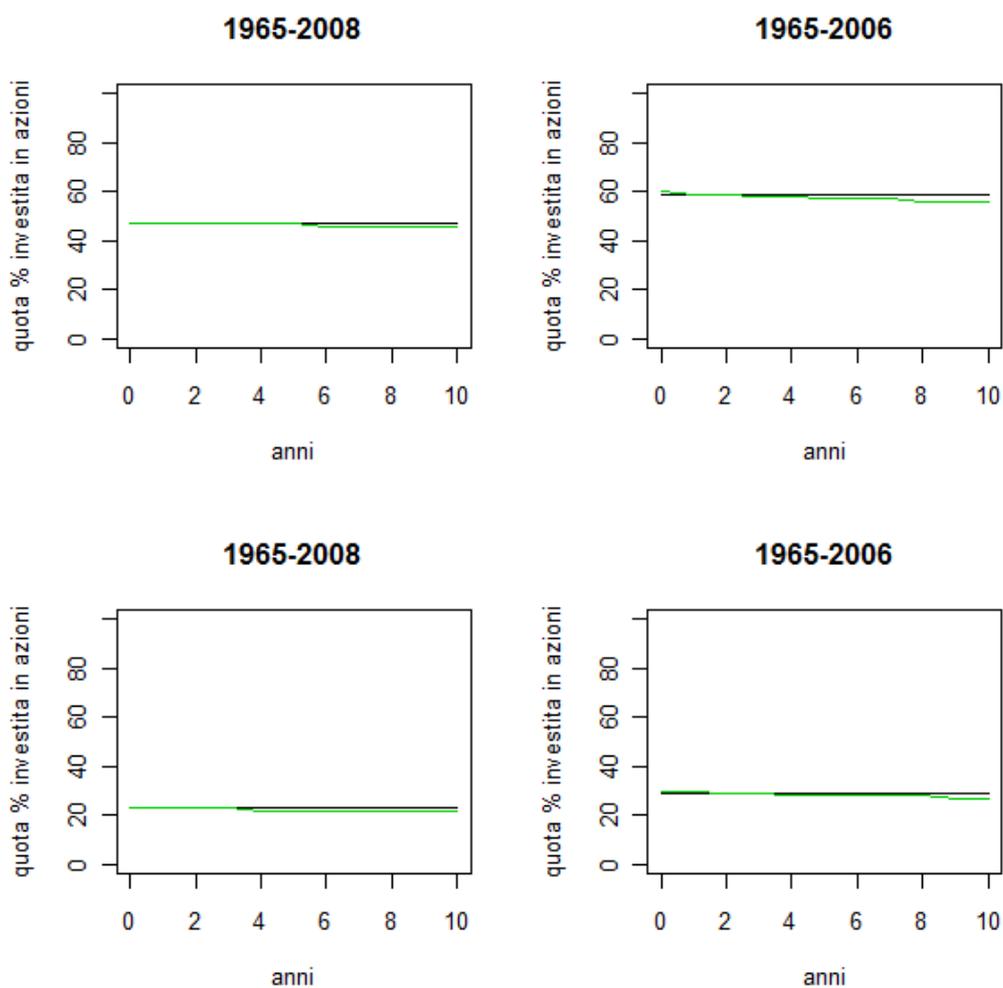


Figura 4.13: *Allocazione ottimale per un investitore buy-and-hold con funzione di utilità potenza relativamente al caso senza estimation risk. La linea verde riporta l'allocazione ottima ottenuta dall'utilizzo della variabile term spread.*

Confrontando l'andamento delle due linee è possibile determinare l'effetto sulla scelta di portafoglio della prevedibilità dei rendimenti. In tutti i grafici la linea verde, che rappresenta l'allocazione nell'indice azionario quando i rendimenti sono previsti dal term spread, diminuisce all'aumentare dell'orizzonte. L'effetto è maggiormente evidente nel periodo 1965-2006. Un investitore buy-and-hold investe quote minori del suo portafoglio in azioni nel lungo periodo rispetto a quanto avrebbe investito nel breve termine.

Nel caso di rendimenti i.i.d. la media e la varianza condizionata degli extrarendimenti composti multiperiodali cresce linearmente con l'orizzonte  $\hat{T}$ , ad esempio per  $\hat{T} = 2$  si ha  $Var_T(R_{T+2}) = 2\sigma^2$ . Invece se i rendimenti sono previsti dal term spread, la varianza condizionata degli extrarendimenti multiperiodali cresce più velocemente che linearmente con  $\hat{T}$ , facendo apparire le azioni più rischiose nel lungo periodo. Infatti ponendo i parametri uguali alle medie a posteriori, si può verificare che  $Var_T(R_{T+2}) = 2\hat{\sigma}_1^2 + \hat{b}_1^2\hat{\sigma}_2^2 + 2\hat{b}_1\hat{\sigma}_{12} > 2\hat{\sigma}_1^2$ , quindi la varianza condizionata non cresce in proporzione con  $\hat{T}$  ma più velocemente. Ne consegue che il rischio azionario di lungo periodo venga percepito più alto, favorendo gli individui ad investire maggiormente nel titolo privo di rischio.

Gli extrarendimenti azionari nel lungo periodo diventano più volatili dal punto di vista dell'investitore, che cerca di prevederli attraverso il term spread. Questo fenomeno di mean-aversion è il risultato della previsione dei rendimenti effettuata dalla variabile term spread.

Il fenomeno di mean-aversion è più evidente nell'intervallo 1965-2006, in quanto sia la correlazione tra gli errori sia il coefficiente  $b_1$  presentano valori più elevati in valore assoluto, amplificando così la rischiosità delle azioni. Di conseguenza l'allocazione nell'indice azionario diminuisce all'aumentare dell'orizzonte. Quando il coef-

ficiente di avversione relativa al rischio è pari a 5, la quota investita nell'indice azionario risulta 56%, il 3% inferiore al caso in cui i rendimenti sono indipendenti e identicamente distribuiti.

- Caso con incertezza

Nel caso i rendimenti vengano previsti dalla variabile term spread, è importante tenere in considerazione l'estimation risk per i parametri  $a$ ,  $B$ ,  $\Sigma$ , in quanto la capacità previsiva della variabile può essere molto debole.

Nella Figura 4.14 viene riportata l'allocazione ottima nell'indice azionario per un investitore buy-and-hold con funzione di utilità potenza. La linea verde continua riporta l'allocazione relativa al caso senza incertezza, mentre la linea verde tratteggiata rappresenta l'allocazione ottima quando viene introdotto l'estimation risk. In entrambi i casi si ipotizza che i rendimenti siano previsti dal term spread.

In tutti i grafici l'allocazione nell'indice azionario quando i rendimenti sono previsti dal term spread e viene incorporata l'incertezza risulta inferiore all'allocazione ottima relativa ai restanti casi. Questo significa che considerare congiuntamente prevedibilità e incertezza porta a una significativa diminuzione di quanto investito nell'indice azionario, che raggiunge il 14% nel caso di  $\gamma = 5$  e periodo 1965-2006. L'introduzione dell'estimation risk provoca una diminuzione superiore, in valore assoluto, alla diminuzione provocata dall'incertezza quando i rendimenti non vengono previsti da alcuna variabile.

Incorporare l'incertezza nei parametri, fa crescere la varianza condizionata degli extrarendimenti multiperiodali soprattutto per lunghi orizzonti di investimento, facendo sembrare le azioni ancora più rischiose. L'investitore avverso al rischio è più prudente, quindi investe una quota nell'indice azionario che decresce nel tempo.

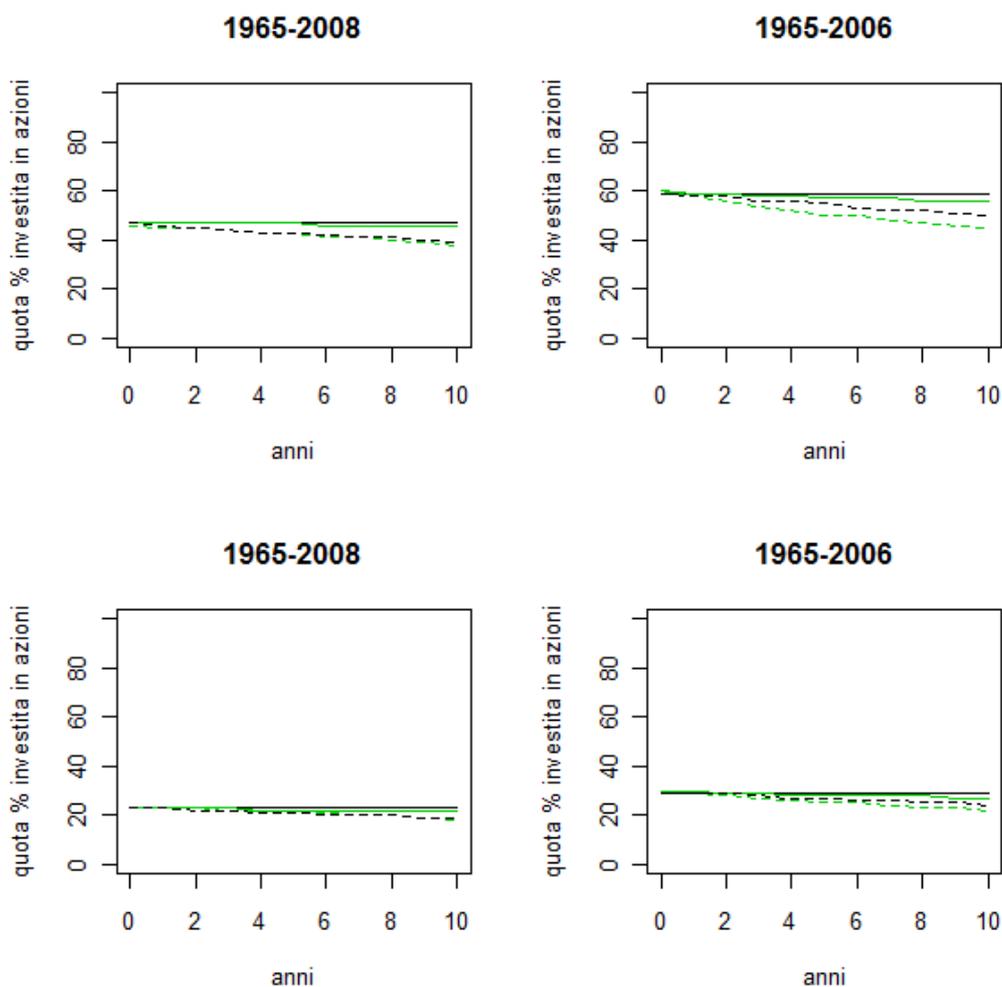


Figura 4.14: Allocations ottima per un investitore buy-and-hold con funzione di utilità potenza relativamente al caso con estimation risk. La linea verde tratteggiata riporta l'allocazione ottima quando è introdotta l'incertezza nei parametri e i rendimenti sono previsti dalla variabile term spread.

## 4.5 Ruolo della variabile tasso di dividendo

Tra le tre variabili previsive considerate quella che ha un impatto maggiore sulle scelte di portafoglio è sicuramente il tasso di dividendo. Per questo motivo le analisi che seguono verranno svolte facendo riferimento alla variabile previsiva dividend yield.

Fino ad ora si è visto che la varianza condizionata degli extrarendimenti multiperiodali diminuisce al crescere dell'orizzonte di investimento, favorendo l'investimento nell'indice azionario per investitori con orizzonte di lungo termine. La previsione dei rendimenti per mezzo del dividend yield influisce non solo la varianza condizionata ma anche la media degli extrarendimenti multiperiodali. Quando il tasso di dividendo è inferiore alla sua media campionaria, l'investitore prevede rendimenti azionari più bassi della media, riducendo così la quota investita in azioni.

Nei paragrafi precedenti questo effetto non era stato preso in considerazione perché il valore iniziale del tasso di dividendo  $x_T$  era tenuto fisso alla sua media campionaria.

In questo paragrafo verranno visualizzati i risultati sull'allocazione ottima di portafoglio ottenuti a partire da diversi valori iniziali del tasso di dividendo  $x_T$ . In Figura 4.15 sono riportati i risultati delle analisi relative al periodo 1965-2008 quando non viene introdotto l'estimation risk. All'interno di ogni grafico sono state tracciate le allocazioni ottime in funzione dell'orizzonte di investimento per 5 diversi valori iniziali del tasso di dividendo: la media storica nel campione, il primo e il terzo quartile e i percentili 37.5% e 67.5%.

In entrambi i grafici l'allocazione nell'indice azionario aumenta al crescere dell'orizzonte di investimento. Per ogni orizzonte fissato l'allocazione ottima è maggiore per valori elevati del tasso di dividendo. Inoltre le varie allocazioni di investimento non convergono nel lungo periodo ad un particolare valore.

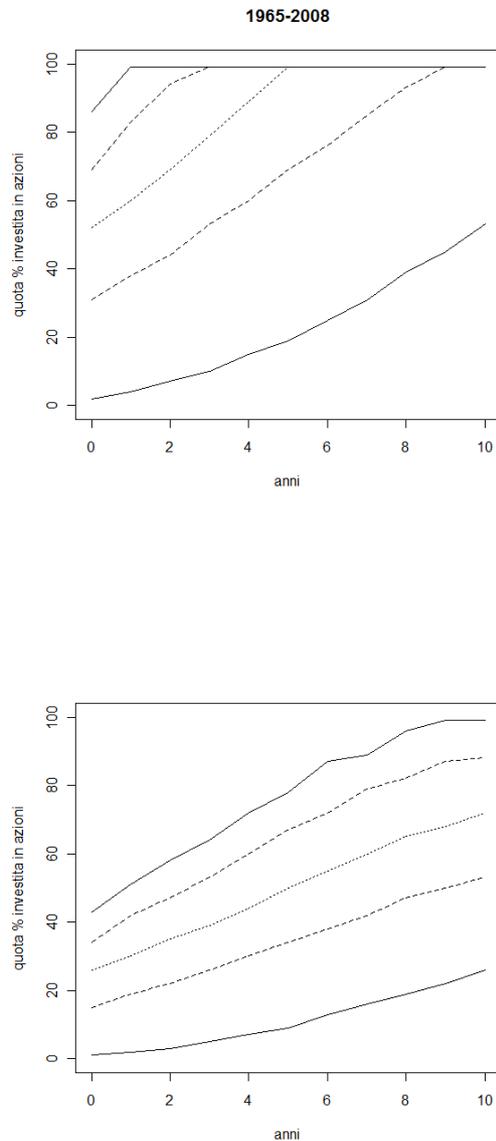


Figura 4.15: *Allocazione ottima per un investitore buy-and-hold con funzione di utilità potenza relativamente al caso senza estimation risk. Il grafico superiore si riferisce a  $\gamma = 5$ , quello inferiore a  $\gamma = 10$ . Le 5 linee corrispondono a diversi valori iniziali di  $x_T$ : 2.13% (linea continua), 2.8% (linea tratteggiata), 3.23% (linea puntinata), 3.67% (linea tratteggiata) e 4.05% (linea continua).*

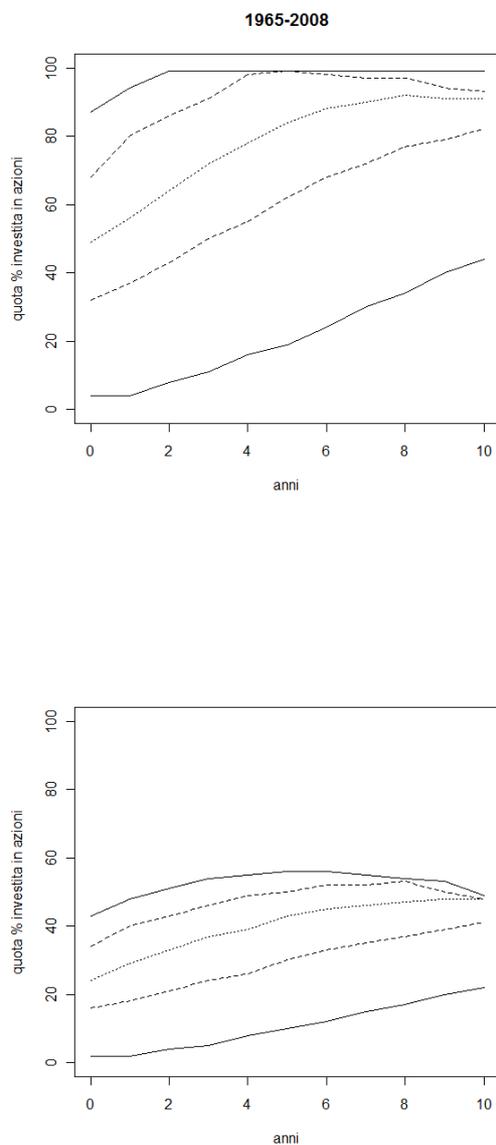


Figura 4.16: *Allocazione ottima per un investitore buy-and-hold con funzione di utilità potenza relativamente al caso con estimation risk. Il grafico superiore si riferisce a  $\gamma = 5$ , quello inferiore a  $\gamma = 10$ . Le 5 linee corrispondono a diversi valori iniziali di  $x_T$ : 2.13% (linea continua), 2.8% (linea tratteggiata), 3.23% (linea puntinata), 3.67% (linea tratteggiata) e 4.05% (linea continua).*

Quando l'investitore introduce l'estimation risk nei parametri e il valore  $x_T$  è basso, la quota investita nell'indice azionario cresce con  $\hat{T}$ . Al contrario per valori elevati di  $x_T$ , la quota in azioni dapprima cresce, poi lentamente decresce con l'aumentare dell'orizzonte di investimento. In questo caso le varie linee tendono a convergere. Pertanto quando la vera capacità previsiva del tasso di dividendo è incerta, l'allocazione di un individuo che investe per il lungo termine è meno sensibile al valore iniziale assunto dalla variabile previsiva. Stambaugh (1999) ha dimostrato che quando si incorpora l'incertezza nei parametri si genera un'asimmetria positiva nella predictive distribution per piccoli valori di  $x_T$  e negativa per elevati valori di  $x_T$ . Questa asimmetria negativa fa sembrare le azioni più rischiose al crescere del valore assunto dal tasso di dividendo.

# Capitolo 5

## Allocazione di portafoglio con funzione loss aversion

### 5.1 Introduzione

In questo capitolo si vuole studiare come varia l'allocazione ottimale se cambia la funzione di utilità per descrivere le preferenze degli investitori. Dapprima vengono riportate le principali critiche alla Teoria dell'Utilità Attesa e le evidenze empiriche che hanno portato alla nascita della Finanza Comportamentale.

Successivamente viene introdotta la Prospect Theory, una teoria che cerca di descrivere il comportamento reale degli investitori facendo ricorso anche a principi derivanti dalla psicologia. In particolare viene utilizzata la funzione di *loss aversion* per lo studio dell'allocazione di portafoglio.

Nel sesto paragrafo vengono riportati i risultati sulla composizione ottima di portafoglio quando si considera la funzione di loss aversion per descrivere le preferenze degli investitori.

## 5.2 Critiche alla teoria dell'Utilità Attesa

La Teoria dell'Utilità Attesa rappresenta il modello teorico principale per lo studio del comportamento umano nelle fasi decisionali. Questa teoria, incentrata sull'uomo come essere razionale e prevedibile nel suo agire, è stata proposta nel 1947 da von Neumann e Morgenstern ed è stata largamente accettata e applicata. Secondo questa teoria, gli individui si avvalgono di modelli comportamentali predeterminati, basati sull'assunto che l'utilità marginale della ricchezza è sempre positiva.

Questa teoria ha avuto grande successo poiché rende molto semplice la modellazione matematica del processo decisionale anche se trascura alcune importanti variabili implicate nel processo di decisione, come ad esempio la complessità del compito, la valutazione affettiva delle alternative di scelta e i limiti delle risorse cognitive dell'individuo.

La prima grande critica a questa teoria è stata mossa dall'economista Maurice Allais nel 1953, il quale dimostrò attraverso il suo celebre paradosso che gli individui sopravvalutano i risultati considerati certi e sottovalutano i risultati giudicati probabili. Questa osservazione è in contrasto con la Teoria dell'Utilità Attesa, secondo la quale l'utilità di un evento aleatorio è esattamente la combinazione lineare delle probabilità associate a ciascun risultato possibile. Nel 1969 lo psicologo Paul Slovic indagò sulla percezione errata del rischio da parte degli agenti economici.

Gli psicologi Daniel Kahneman e Amos Tversky (1979) dimostrarono l'esistenza di alcuni fenomeni che contraddicono la teoria tradizionale: l'effetto certezza, l'effetto riflessione e l'effetto isolamento.

Per l'*effetto certezza* gli individui preferiscono un guadagno certo di valore più basso piuttosto che un guadagno probabile di valore più alto.

L'*effetto riflessione* consiste nella manifestazione opposta delle preferenze riguardanti eventi positivi ed eventi negativi. Gli individui preferiscono guadagni minori ma con probabilità maggiore, mentre preferiscono perdite di valore maggiore ma con probabilità minore. In altre parole preferiscono

eventi positivi certi a quelli incerti ed eventi negativi incerti a quelli certi. Infine secondo l'*effetto isolamento*, ogni alternativa viene suddivisa nei suoi elementi fondamentali per semplificare e velocizzare il processo di scelta.

Numerosi risultati sperimentali hanno evidenziato come gli individui nelle scelte finanziarie non siano guidati da principi di razionalità, ma siano influenzati dal contesto, dalla storia personale, da come viene proposto l'investimento e dall'incompletezza informativa. A conferma di quanto detto finora, quello dei mercati finanziari è uno dei settori economici in cui maggiormente si evidenzia la mancanza di razionalità, tanto è vero che il loro andamento è spesso descritto utilizzando termini come euforia, depressione o disillusione. Una possibile spiegazione del comportamento degli investitori fa riferimento al fatto che le scelte sono dettate maggiormente da valutazioni affettive piuttosto che da calcoli sull'utilità attesa. Pertanto nella comprensione dei mercati finanziari e nello studio delle dinamiche comportamentali umane è importante il fattore psicologico. Da alcuni decenni si assiste a un crescente interesse da parte della psicologia verso i fenomeni economici, portando addirittura alla vincita del premio Nobel per l'economia uno psicologo, Daniel Kahneman, per l'ideazione di una teoria sulle decisioni in condizioni di incertezza facilmente applicabile alla scienza economica.

### 5.3 Prospect Theory

La Prospect Theory venne formulata nel 1979 dagli psicologi Kahneman e Tversky, in contrapposizione alla Teoria dell'Utilità Attesa, con l'obiettivo di descrivere in modo migliore il comportamento reale degli individui. Questa teoria modifica l'usuale descrizione degli investitori, considerati esseri razionali e avversi al rischio. Nel loro lavoro svilupparono una diversa funzione di utilità, detta *value function*, che sostituisce la funzione di utilità proposta da von Neumann e Morgenstern. La value function  $v(x)$

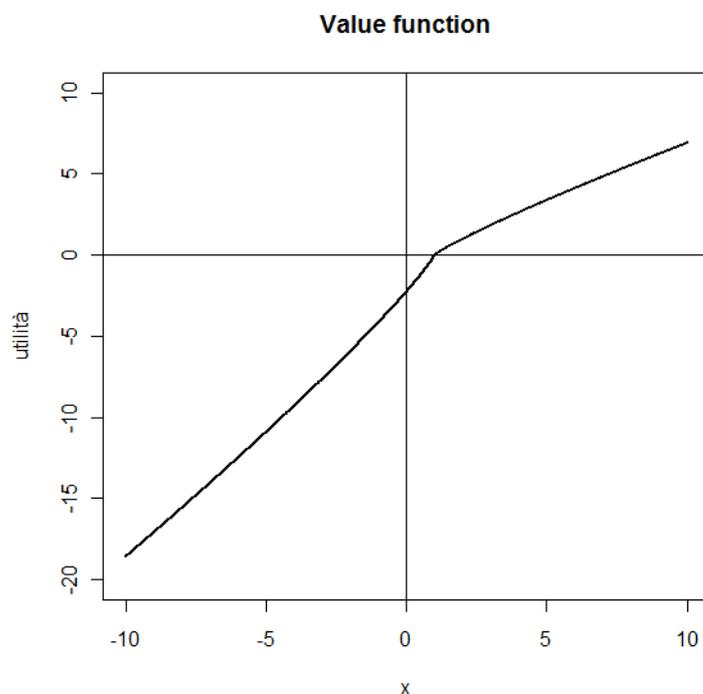


Figura 5.1: Grafico della *value function* con parametri  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.88$ ,  $\beta = 2.25$  e punto di riferimento  $x_0 = 1$ .

assume questa forma analitica

$$v(x) = \begin{cases} -\beta(x_0 - x)^{\alpha_1} & \text{per } x < x_0, \\ (x - x_0)^{\alpha_2} & \text{per } x \geq x_0 \end{cases}$$

Questa funzione mostra come gli individui valutino il proprio livello di soddisfazione non in termini di valore assoluto del risultato conseguito, ma in termini relativi rispetto a livelli desiderati o ipotizzati sulla base di aspettative. Essa mostra che l'utilità di un agente economico dipende dai guadagni e dalle perdite che può ricavare rispetto a un certo livello di ricchezza  $x_0$ , definito *punto di riferimento*. I risultati potenziali ottenibili dalle varie alternative vengono espressi in termini di guadagni e perdite rispetto a questo punto di riferimento, contrariamente alla Teoria dell'Uti-

lità Attesa che si focalizza unicamente sulla ricchezza finale.

Nella letteratura finanziaria sono stati proposti diversi valori per i parametri  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  e  $\beta$ . Il valore di  $\beta$  viene sempre posto tra 2 e 3, solitamente pari a 2.25. Tversky e Kahneman hanno stimato  $\beta = 2.25$  e  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.88$ , dopo aver analizzato le scelte di un gruppo di individui alle prese con ipotetici problemi di decisione. Invece Gemmill, Hwang e Salmon (2005) hanno fissato  $\alpha_1 = 0.95$  e  $\alpha_2 = 0.85$ .

Con questi valori dei parametri la funzione di valore assume una forma ad *S*, concava a destra del punto di riferimento e convessa a sinistra nell'area delle perdite. Questa forma consente di osservare come il comportamento degli individui sia di avversione al rischio quando si tratta di guadagni e di propensione quando devono essere prese decisioni su perdite potenziali. In particolare  $\alpha_2$  misura il grado di avversione al rischio per i guadagni e  $\alpha_1$  il livello di propensione al rischio per le perdite del portafoglio.

Il parametro  $\beta$ , maggiore di 1, consente di rappresentare il fenomeno della *loss aversion*, ovvero la tendenza degli individui a valutare la disutilità derivante da una perdita in modo superiore all'utilità associata ad un guadagno di uguale misura. La *loss aversion* trova la sua conferma empirica nell'asimmetria di comportamento degli individui quando trattano le perdite invece dei guadagni, dato che preferiscono evitare perdite piuttosto che avere guadagni. Ad esempio, in condizioni di incertezza, la paura di poter perdere 1000 euro è molto più intensa ed elevata in valore assoluto alla gioia di guadagnarne mille.

Il concetto di avversione al rischio viene inserito nel modello attraverso la concavità della funzione di utilità, mentre l'avversione alle perdite viene inserita in  $v(x)$  introducendo un punto di non derivabilità in corrispondenza del punto di riferimento. In  $x_0$  la pendenza della funzione cambia in modo da cogliere il peso maggiore assegnato dal soggetto alle perdite

rispetto ai guadagni, dando luogo a un punto angoloso.

Gli individui sono più sensibili, in termini di utilità marginale, ad una diminuzione della loro ricchezza investita piuttosto che ad un suo aumento. Quindi nel valutare l'utilità attesa l'investitore pesa maggiormente le perdite rispetto alle vincite.

A parità di risultato assoluto, la sofferenza generata dalle perdite è più elevata del godimento determinato dai guadagni, per questo motivo la value function è più inclinata nell'area delle perdite, provocando un salto dell'utilità marginale in  $x_0$ .

Un altro aspetto trattato nella Prospect Theory riguarda il modo con cui vengono valutate le probabilità dei vari eventi di una lotteria rischiosa. Studi sperimentali hanno mostrato che gli individui utilizzano dei pesi soggettivi che sovrastimano o sottostimano le vere probabilità  $p_i$ . L'utilità di una lotteria diventa  $V(L) = \sum_{i=1}^n \pi_i v(x_i)$ , dove  $x_i$  è la generica conseguenza della lotteria  $L$  relativa all'evento  $i$ . I pesi soggettivi  $\pi_i$  dipendono dalla funzione di ripartizione della lotteria e sono posti  $\pi_i = w(P_i) - w(P_i^*)$ , dove  $P_i$  è la probabilità di ottenere un risultato almeno pari a  $x_i$ ,  $P_i^*$  è la probabilità di un risultato strettamente maggiore di  $x_i$  e  $w$  indica una trasformazione non lineare.

Tversky e Kahneman hanno suggerito la seguente approssimazione per trasformare le vere probabilità in quelle percepite dagli agenti economici

$$w(p) = \frac{p^\gamma}{(p^\gamma + (1-p)^\gamma)^{1/\gamma}},$$

con  $\gamma$  stimato pari a 0.65. Da notare che nel caso di  $\gamma = 1$ , i pesi soggettivi attribuiti alle probabilità si riducono alle probabilità oggettive  $p_i$ , pertanto gli individui non distorcono le vere probabilità.

## 5.4 Finanza Comportamentale

La finanza tradizionale cerca di comprendere le caratteristiche e la struttura dei mercati finanziari attraverso modelli in cui gli agenti economici vengono ipotizzati razionali. Se gli agenti fossero guidati da principi di razionalità, allora all'arrivo di nuove informazioni aggiornerebbero le loro credenze applicando correttamente il Teorema di Bayes.

L'impianto tradizionale risulta semplice, ma sfortunatamente non ha trovato conferma nei dati. Nel mondo reale vi sono investitori che sembrano compiere sistematici errori operativi ed effettuare scelte di investimento non ottimali. Anche i mercati sembrano mostrare significative e ripetute violazioni dell'efficienza e non sempre riflettere il valore corretto delle attività finanziarie.

Un numero crescente di economisti ha riscontrato nel corso del tempo una serie di anomalie che possono essere giustificate tramite la non completa razionalità degli individui quando devono prendere decisioni complesse in condizioni di incertezza.

Queste anomalie, non spiegabili dalle teorie tradizionali, hanno condotto alla nascita di un nuovo approccio ai mercati finanziari, la *Finanza Comportamentale*. Si è sviluppata come ramo della teoria classica a partire dagli anni '50, ma solo verso la fine degli anni '70 ha acquisito lo status di teoria grazie a studi empirici particolarmente rilevanti. Un contributo fondamentale al suo sviluppo e alla sua diffusione venne fornito dagli psicologi Kahneman e Tversky con la loro Prospect Theory.

La Finanza Comportamentale non costituisce un paradigma alternativo alla teoria tradizionale, in quanto quest'ultima è in grado di spiegare la maggior parte dei fenomeni, quanto piuttosto un modo per spiegare alcuni fenomeni non totalmente comprensibili sotto le ipotesi classiche, analizzando il comportamento concreto degli investitori.

La Finanza Comportamentale ha una forte connotazione empirica e

la recente letteratura in questo ambito utilizza principi comportamentali provenienti anche dalla psicologia e dalla sociologia, con l'obiettivo di spiegare il modo in cui gli individui utilizzano le informazioni per prendere decisioni nei mercati finanziari.

Alla base di questi studi c'è la consapevolezza dell'inadeguatezza dei modelli fondati sulla razionalità degli individui per le analisi economiche. Lo studio del comportamento dell'investitore nasce dal bisogno di risolvere la discrepanza tra un contesto teorico-normativo di razionalità e un agire reale, poco legato a principi razionali.

Per prendere decisioni in caso di incertezza è necessario stimare la probabilità dei vari eventi. Kahneman e Tversky (1974) notarono che i soggetti formulano queste stime sulla base di un numero limitato di meccanismi che permettono di ridurre la complessità del problema. Si tratta di una serie di strategie sistematiche utilizzate per la gestione delle informazioni a fini decisionali, utilizzate per far fronte a situazioni di incertezza oppure per selezionare le informazioni rilevanti quando il tasso informativo è elevato. Se da un lato maggiore è l'informazione disponibile, maggiore è l'accuratezza con cui si possono valutare le alternative di scelta, dall'altro troppe informazioni rendono ingestibile il processo di decisione.

A livello psicologico quando il numero e la frequenza delle informazioni cresce, la mente cerca delle scorciatoie che permettano di ridurre il tempo di elaborazione dei dati. Queste scorciatoie, definite *euristiche*, sono metodi decisionali basati su regole rapide e semplici piuttosto che su un meccanismo logico e razionale, le quali permettono di gestire in modo selettivo le informazioni a disposizione facendo ricorso in gran parte all'intuizione. Errori in questo processo conducono gli investitori a stimare in modo errato le vere probabilità degli eventi creando distorsioni connesse all'uso di strategie euristiche, dando luogo a conclusioni errate o troppo semplificate. Queste distorsioni provocano errori nelle scelte di investimento individuali o collettive quando i comportamenti individuali si sommano e oltrepassano una determinata soglia critica, infine generano generiche

inefficienze di mercato.

La maggior parte dei modelli tradizionali assume che le preferenze degli agenti economici soddisfino una serie di assiomi -completezza, transitività, continuità e indipendenza- che vengono considerati nella Teoria dell'Utilità Attesa.

Sfortunatamente, molti lavori empirici hanno evidenziato la violazione sistematica di questa teoria quando devono essere prese decisioni in condizioni di rischio. In risposta a queste evidenze empiriche sono stati avanzati numerosi modelli con l'obiettivo di spiegare i comportamenti reali. Alcuni dei modelli più conosciuti sono la weighted-utility theory (Chew e MacCrimmon, 1979), l'utilità attesa implicita (Chew, 1989), la regret theory (Bell, 1982) e la prospect theory (Kahneman e Tversky, 1979).

Tra queste teorie che studiano i problemi decisionali la più utilizzata nelle applicazioni finanziarie è senza dubbio la Prospect Theory perché riesce meglio a catturare le evidenze sperimentali.

La Finanza Comportamentale cerca di individuare e comprendere le distorsioni e le anomalie presenti nel mercato e per quanto possibile di sfruttarle nella determinazione delle strategie di investimento ottimali. I gestori *comportamentali* di portafoglio adottano regole di gestione volte a sfruttare le anomalie che si formano a seguito del comportamento di investitori non perfettamente razionali. Le gestioni comportamentali sono volte a individuare le condizioni di mercato in cui gli investitori sono più propensi a sovra o sotto reagire alle nuove informazioni, acquistando o vendendo titoli prima che il mercato riconosca gli errori compiuti.

## 5.5 Allocazione di portafoglio nel lungo periodo

In questo paragrafo si vuole analizzare il problema dell'allocazione di portafoglio quando le preferenze dell'investitore sono descritte dalla funzione

di loss aversion considerata da Tversky e Kahneman (1992) nella Prospect Theory.

Si ipotizza che l'investitore adotti una strategia di investimento buy-and-hold, secondo la quale non è possibile modificare l'allocazione scelta al tempo  $T$  fino al raggiungimento dell'orizzonte prefissato in  $T + \hat{T}$ . L'individuo ha a disposizione solo due titoli: l'indice azionario e il titolo privo di rischio.

A differenza dei casi trattati nei capitoli precedenti in cui l'investitore adotta una funzione di utilità potenza per valutare la ricchezza finale, in questo caso viene utilizzata la funzione di loss aversion. L'utilità è definita sulle perdite e sui guadagni realizzati all'orizzonte  $T + \hat{T}$ , relativamente a un punto di riferimento identificato con la ricchezza iniziale  $W_T$  supposta per semplicità pari a 1. Questo approccio risulta ben diverso da quanto sostenuto dalla teoria dell'Utilità Attesa, secondo la quale la massimizzazione dell'utilità va eseguita sulla ricchezza finale  $W_{T+\hat{T}}$  indipendentemente dal livello di ricchezza iniziale.

La funzione di loss aversion considerata assume la seguente forma analitica

$$v(W_{T+\hat{T}}) = \begin{cases} -\beta(W_T - W_{T+\hat{T}})^{\alpha_1} & \text{per } W_{T+\hat{T}} < W_T, \\ (W_{T+\hat{T}} - W_T)^{\alpha_2} & \text{per } W_{T+\hat{T}} \geq W_T \end{cases}$$

Il parametro  $\beta$  cattura l'avversione alle perdite dell'investitore,  $\alpha_2$  misura il grado di avversione al rischio per i guadagni e  $\alpha_1$  il livello di propensione al rischio per le perdite del portafoglio.

Un'ulteriore assunzione riguarda la scelta di non utilizzare la trasformazione non lineare delle probabilità oggettive per il problema di allocazione di portafoglio, come considerato da Aït-Sahalia e Brandt (2001) e Berkeelaar, Kouwenberg e Post (2004). Benartzi e Thaler (1995) mostrarono che l'aspetto più rilevante della Prospect Theory per la scelta di portafoglio è la forma della funzione di loss aversion, mentre la distorsione delle probabilità da parte degli agenti economici ha soltanto un effetto secondario.

Per questi motivi l'obiettivo principale è di studiare l'impatto sulle decisioni di portafoglio della funzione di loss aversion utilizzata per descrivere le preferenze dell'individuo.

Il problema dell'investitore consiste nella massimizzazione dell'utilità quando la funzione è di loss aversion. Per il calcolo dell'utilità attesa si deve fare riferimento alla distribuzione dei rendimenti. Lo studio viene svolto su due possibili distribuzioni degli extrarendimenti multiperiodali condizionatamente ai valori osservati fino al tempo  $T$ . In primo luogo gli extrarendimenti possono essere considerati i.i.d., pertanto  $r_t = \mu + \epsilon_t$  con  $\epsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$ . Si può introdurre l'incertezza nei parametri come trattato nel paragrafo 2.4.

Un ulteriore modo per risolvere il problema di allocazione del portafoglio riguarda la possibilità di prevedere i rendimenti attraverso alcune variabili economiche e finanziarie. Si può assumere un modello VAR per lo studio del comportamento dinamico degli extrarendimenti. La distribuzione degli extrarendimenti multiperiodali condizionatamente ai dati passati risulta normale di media  $\mu_{sum}$  e varianza  $\Sigma_{sum}$ , vedi il paragrafo 3.5. In seguito si può incorporare l'estimation risk in questa distribuzione.

## 5.6 Risultati

In questo paragrafo sono esposti i risultati delle analisi compiute. Dapprima si vuole mostrare come cambia l'allocazione del portafoglio al crescere dell'orizzonte di investimento e come si modifica se l'incertezza nei parametri è incorporata direttamente nel modello considerato. Infine si vogliono esaminare gli effetti sulla composizione ottima del portafoglio quando si considera una funzione di loss aversion per descrivere le preferenze dell'investitore. Per le analisi svolte sono stati considerati dapprima i dati da dicembre 1965 a dicembre 2008 e poi il sottocampione contenente le osservazioni da dicembre 1965 a dicembre 2006.

Sono state utilizzate due diverse funzioni di loss aversion per il calcolo dell'utilità attesa. La prima riguarda la funzione di loss aversion con parametri  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.88$  e  $\beta = 2.25$ , utilizzata da Berkelaar, Kouwenberg e Post (2004) per il problema di allocazione del portafoglio.

La seconda funzione trattata da Barberis, Huang e Santos (2001) pone  $\beta = 2.25$  e  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ . In questo caso l'investitore è neutrale al rischio sia sulle perdite che sui guadagni attesi, ma riceve una disutilità maggiore nel caso delle perdite rispetto a guadagni di uguale ammontare in valore assoluto.

La Figura 5.2 illustra l'allocazione ottimale di portafoglio per un investitore con funzione di loss aversion quando il modello non tiene conto dell'eventuale prevedibilità degli extrarendimenti. I due grafici superiori si riferiscono al caso in cui  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.88$ , mentre quelli inferiori sono relativi al caso di neutralità al rischio ottenuti ponendo  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ . Nell'asse delle ordinate viene indicata la percentuale,  $100\omega$ , allocata nell'indice azionario e il relativo complemento rappresenta la parte di ricchezza che deve essere investita nel titolo non rischioso.

Le analisi sono state svolte per orizzonti di investimento da un mese a 10 anni con incrementi di un mese. Avendo riscontrato che l'allocazione ottima risulta sempre la stessa per orizzonti di tempo lunghi, nei grafici viene riportata l'allocazione ottimale solo per orizzonti di investimento fino a 15 mesi.

La più importante caratteristica riscontrabile nei risultati ottenuti con funzione di loss aversion riguarda il forte effetto dell'orizzonte: la quota investita nell'indice azionario varia notevolmente all'aumentare dell'orizzonte di investimento  $\hat{T}$ . Nel periodo 1965-2008 quando i parametri sono  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.88$ , l'allocazione in azioni a un orizzonte di un mese è pari al 5% per poi giungere al 99% a 13 mesi e rimanere a questo livello fino a 10 anni. Questo è in contrasto con quanto ottenuto con la funzione di

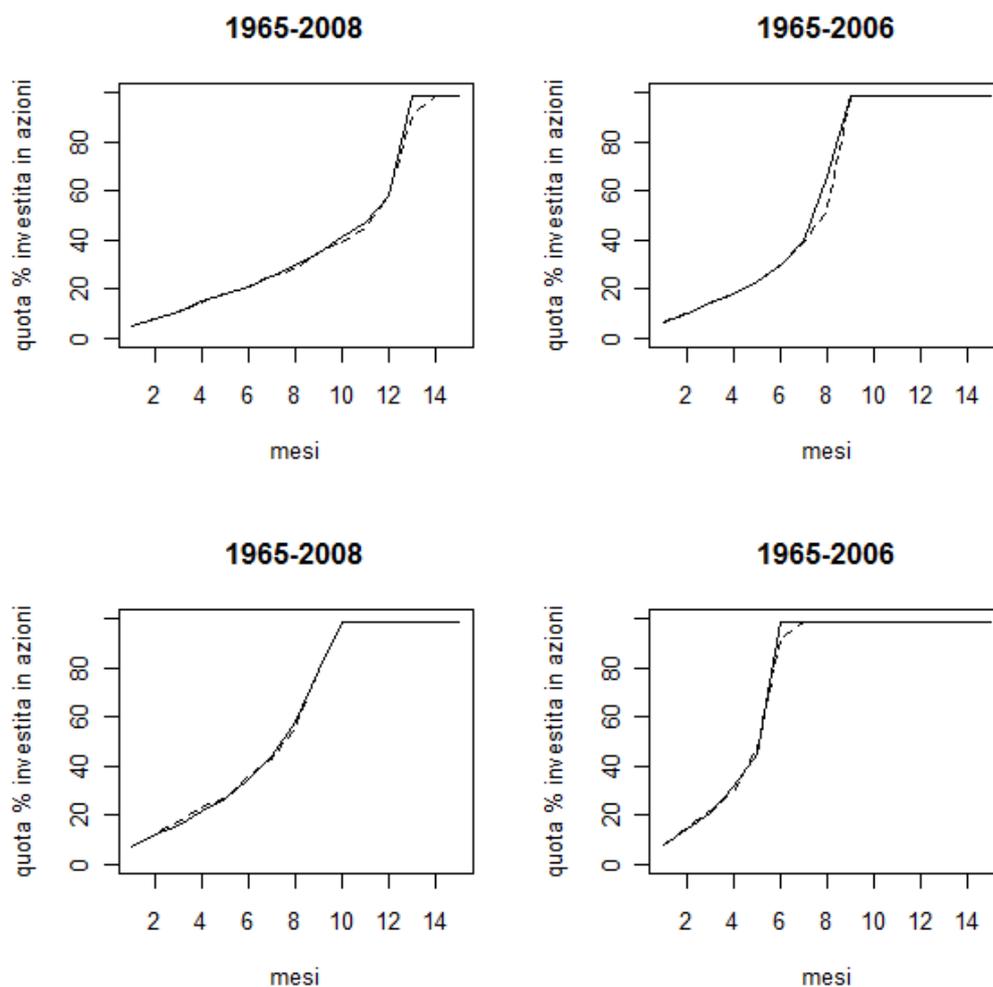


Figura 5.2: Allocations ottimali per un investitore buy-and-hold con rendimenti non prevedibili. La linea continua rappresenta il caso senza incertezza nei parametri, quella tratteggiata considera l'estimation risk. I grafici superiori sono ottenuti con  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.88$ , quelli inferiori con  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ .

utilità potenza, secondo la quale la composizione del portafoglio rimane costante indipendentemente da  $\hat{T}$ .

Benartzi e Thaler (1995) affermarono che, in un modello con funzione di loss aversion, minore è l'orizzonte di investimento minore è la capacità attrattiva degli investimenti dotati di rendimenti alti e rischi elevati. In questo caso l'avversione alle perdite causa agli investitori di breve termine un'estrema avversione al rischio, portandoli ad allocare la loro ricchezza in quote azionarie molto piccole. All'aumentare dell'orizzonte  $\hat{T}$  cresce l'investimento in titoli rischiosi. Nemmeno l'introduzione dell'estimation risk fa sembrare le azioni più rischiose nel lungo termine, infatti la linea continua si discosta raramente e per piccole variazioni dalla linea tratteggiata che rappresenta il caso in cui è presente l'incertezza nei parametri.

Quando si utilizza la funzione di parametri  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$  per valutare le preferenze dell'investitore, la quota investita in azioni è pari al 7% quando  $\hat{T}$  è uguale a un mese e raggiunge il 99% a 10 mesi. Essendo gli individui neutrali al rischio sia sui guadagni che sulle perdite, è ovvio che la quota investita in azioni sia maggiore del caso in cui i parametri  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  sono posti uguali a 0.88 per ogni orizzonte.

I risultati qui ottenuti sono consistenti con quanto riportato da Aït-Sahalia e Brandt (2001) nello studio dell'allocazione ottimale di portafoglio.

La Figura 5.3 riporta l'allocazione ottima quando il comportamento dinamico degli extrarendimenti viene spiegato dalla variabile previsiva tasso di dividendo. Nel periodo 1965-2008 il portafoglio è interamente investito nell'indice azionario già ad un orizzonte di 10 mesi se  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.88$  e ad un orizzonte di 8 mesi quando gli investitori sono neutrali al rischio ma avversi alle perdite. Anche in questi grafici è rilevante l'effetto dell'orizzonte sulle scelte ottime. Gli investitori sono più propensi ad investire nel titolo rischioso rispetto al caso in cui non venga ipotizzata la prevedibilità dei rendimenti.

Inoltre l'incertezza nei parametri del modello VAR fa apparire le azioni più rischiose all'aumentare dell'orizzonte di investimento, come si era già visto nel capitolo 4.

Le Figure 5.4 e 5.5 si riferiscono all'allocazione ottimale quando le variabili previsive sono rispettivamente il tasso di interesse a breve e il term spread. In entrambi i casi l'allocazione ottima nell'indice azionario non si discosta molto dal caso in cui i rendimenti non sono previsti da alcuna variabile finanziaria. Invece quando viene incorporata nel modello l'incertezza nei parametri, l'investitore diventa più cauto ed investe quote inferiori nell'indice azionario. L'effetto dell'estimation risk è più rilevante di quando i rendimenti sono trattati come indipendenti e identicamente distribuiti.

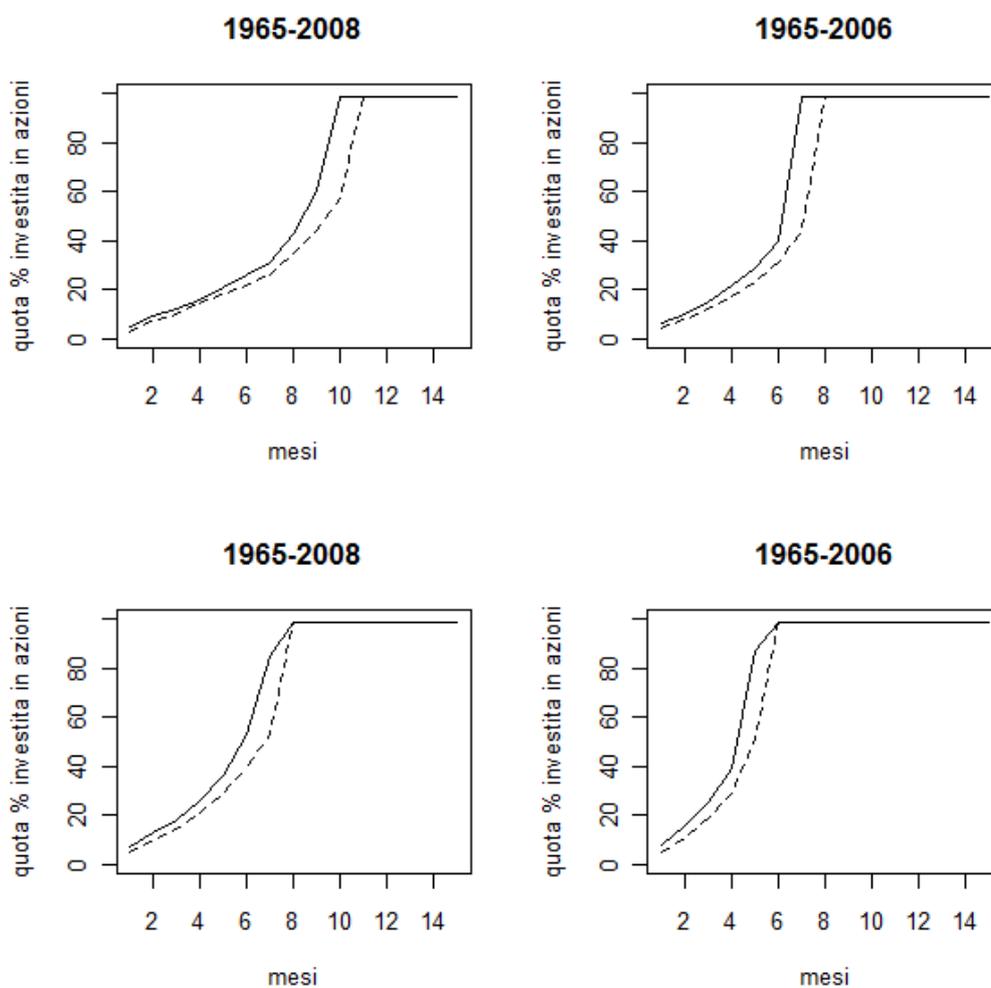


Figura 5.3: Allocazione ottimale per un investitore buy-and-hold con rendimenti previsti dalla variabile dividend yield. I grafici superiori sono ottenuti con  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.88$ , quelli inferiori con  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ .

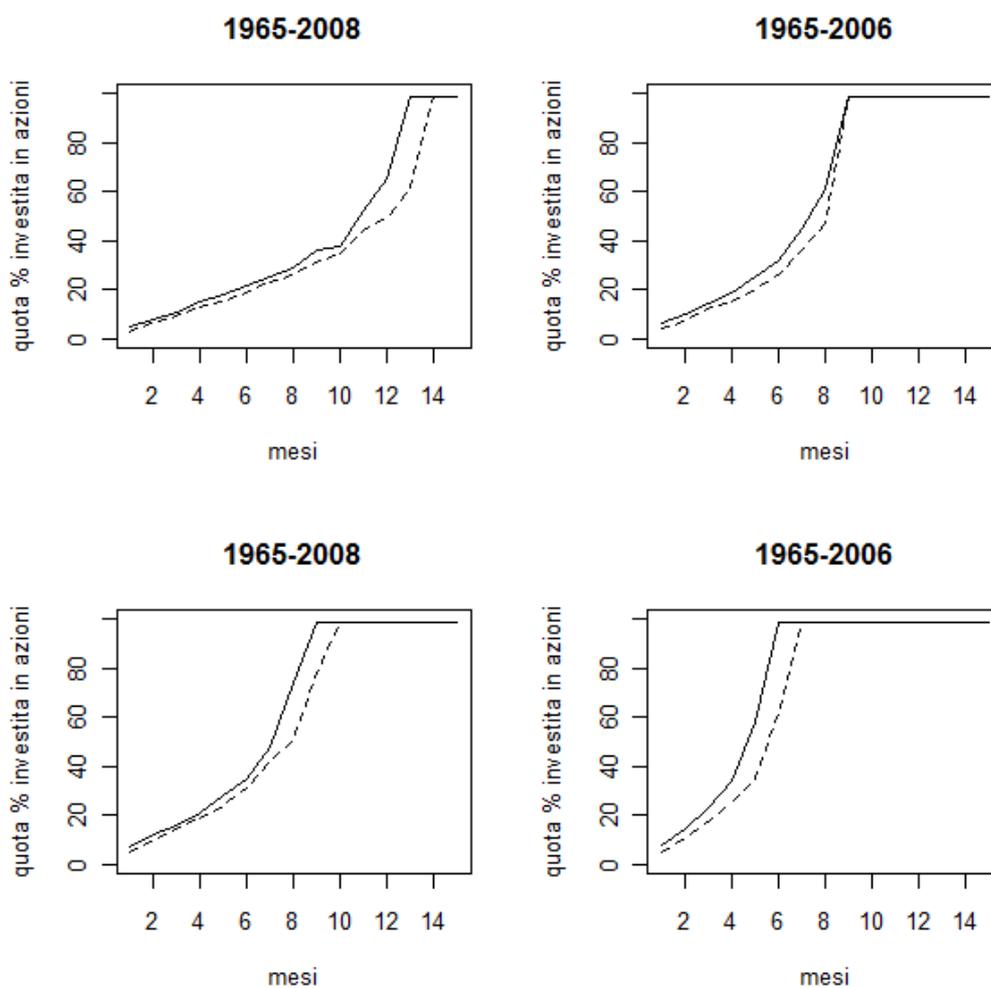


Figura 5.4: Allocations ottimali per un investitore buy-and-hold con rendimenti previsti dalla variabile risk free. I grafici superiori sono ottenuti con  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.88$ , quelli inferiori con  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ .

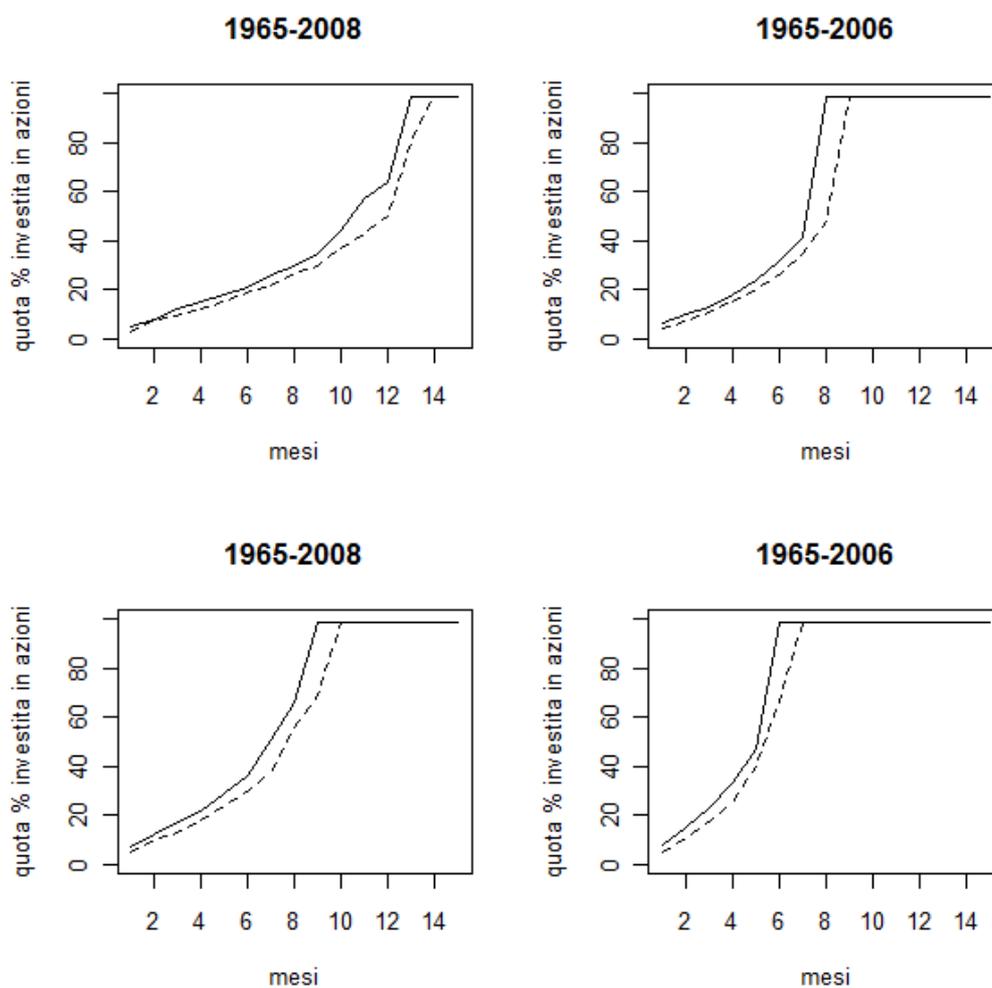


Figura 5.5: Allocations ottimale per un investitore buy-and-hold con rendimenti previsti dalla variabile term spread. I grafici superiori sono ottenuti con  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.88$ , quelli inferiori con  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ .

# Conclusioni

In questa tesi è stato considerato il problema della scelta di portafoglio da parte di un individuo che vuole investire la sua ricchezza per il lungo periodo. Gli investitori con orizzonti di investimento particolarmente lontani sono interessati non solo ai rendimenti attesi e al rischio dei titoli finanziari, ma anche alle variazioni dei rendimenti nel corso del tempo.

Inizialmente si è supposto che le preferenze dell'investitore avverso al rischio fossero descritte da una funzione di utilità potenza. Dalle analisi svolte si è riscontrato che nel caso di rendimenti generati da un processo White Noise con errori normali, l'allocazione ottimale di portafoglio non cambia al variare dell'orizzonte di investimento, pertanto la composizione ottima rimane invariata rispetto al breve periodo. Invece se viene incorporata l'incertezza nei parametri attraverso un approccio Bayesiano, la quota investita in azioni diminuisce al crescere dell'orizzonte, in quanto l'incertezza nei veri valori dei parametri comporta un aumento della varianza dei rendimenti condizionatamente ai dati passati.

A seguito di numerose evidenze empiriche sulla prevedibilità dei rendimenti sono state considerate tre variabili finanziarie frequentemente usate in letteratura per il problema di scelta del portafoglio: tasso di dividendo, tasso di interesse a breve e term spread. Per lo studio del comportamento dinamico degli extrarendimenti si è utilizzato un modello vettoriale autoregressivo del primo ordine.

Se si considera la variabile previsiva tasso di dividendo, l'investitore

buy-and-hold investe quote sempre più elevate in azioni all'aumentare del suo orizzonte di investimento. La previsione dei rendimenti attesi mediante il tasso di dividendo fa crescere la varianza condizionata dei rendimenti multiperiodali meno velocemente rispetto al caso di rendimenti White Noise. Per questo motivo le azioni appaiono meno rischiose nel lungo periodo. Questa forte propensione ad investire in azioni viene parzialmente meno se si prende in considerazione l'incertezza che circonda le stime dei coefficienti del modello VAR. Gli investitori continuano ad investire quote maggiori in azioni rispetto al breve periodo, ma in misura minore rispetto al caso senza incertezza. Pertanto le analisi che ignorano l'importanza dell'estimation risk conducono l'individuo ad investire quote in azioni troppo elevate e troppo sensibili al valore assunto dalle variabili previsive.

Dalle analisi riguardanti le variabili previsive tasso di interesse a breve e term spread si è riscontrato che la varianza condizionata degli extrarendimenti multiperiodali aumenta più velocemente che proporzionalmente con l'orizzonte di investimento, come invece avviene nel caso in cui i rendimenti non siano prevedibili. Questo rende gli investitori più cauti e prudenti, facendoli investire quantità sempre minori in azioni all'aumentare dell'orizzonte. Poiché le due variabili considerate hanno una debole capacità previsiva e i coefficienti possono essere stimati in modo impreciso, è fondamentale ricorrere all'estimation risk. La scarsa capacità previsiva delle due variabili influenza in modo marginale le scelte ottime degli agenti, le quali si discostano solo leggermente dall'allocazione ottima ottenuta dall'ipotesi di rendimenti White Noise. I risultati così diversi da quelli ottenuti con la variabile tasso di dividendo possono in parte dipendere dalla presenza in portafoglio di un titolo rischioso di tipo azionario. Modificando il portafoglio con una diversa attività rischiosa, ad esempio obbligazionaria, i risultati possono cambiare significativamente.

Se il comportamento degli investitori viene descritto dalla funzione di loss aversion, l'allocazione ottima di portafoglio cambia notevolmente rispetto a quanto ottenuto con la funzione di utilità potenza. Ad orizzonti di investimento di pochi mesi la quota investita nell'indice azionario è esigua, dato che la funzione di loss aversion rende gli individui fortemente avversi al rischio. All'aumentare dell'orizzonte l'investimento nel titolo rischioso cresce velocemente fino a raggiungere il 100% ad un orizzonte di investimento di soli 13 mesi.

Questa tesi rende possibile estendere i modelli e la loro struttura per esaminare diversi casi che possono essere di interesse per gli investitori. Ulteriori sviluppi particolarmente utili per aiutare l'investitore nel processo di allocazione del portafoglio riguardano la possibilità di includere più titoli finanziari. Ad esempio l'investitore potrebbe suddividere la sua ricchezza non solo tra azioni e tasso privo di rischio, ma potrebbe investire anche in obbligazioni. Sarebbe interessante studiare la dinamica nel tempo dei rendimenti obbligazionari introducendo altre variabili previsive, come il tasso di interesse reale e il default spread. Infine si potrebbero permettere variazioni nel tempo dei parametri considerati.

Un'interessante estensione di quanto trattato in questa tesi riguarda lo studio del problema di selezione del portafoglio quando l'investitore adotta una strategia di ribilanciamento ottimale, ovvero quando può cambiare l'allocazione del portafoglio a intervalli temporali da lui prescelti. Questa strategia di investimento, maggiormente vicina al caso reale, fa riferimento alla *hedging demands*, trattata originariamente da Merton (1973).

Solitamente l'implementazione pratica delle varie strategie di allocazione del portafoglio non è semplice. Per formare il portafoglio ottimo per il lungo periodo gli investitori devono dapprima comprendere le loro effettive preferenze e i vincoli da fronteggiare. In secondo luogo, devono analizzare il processo dinamico che determina i tassi di interesse e il pre-

mio per il rischio, cercando di descrivere l'evoluzione nel tempo di queste grandezze. In seguito è necessario risolvere un problema di ottimizzazione, in modo tale da massimizzare la loro utilità. Infine è importante che gli investitori conducano le loro scelte senza soccombere a quelle innumerevoli distorsioni psicologiche che sono ampiamente documentate dalla Finanza Comportamentale.

Questo processo, che ha termine nella determinazione delle quote ottimali di portafoglio, è difficilmente realizzato dai singoli investitori. Pertanto in futuro sarà fondamentale sviluppare dei sistemi in grado di combinare le conoscenze scientifiche con l'abilità dei pianificatori finanziari nel comprendere le esigenze specifiche dei vari investitori, il tutto reso possibile attraverso l'utilizzo di tecnologie informatiche sempre più potenti dal punto di vista computazionale.

# Appendice: comandi R

In questa sezione vengono riportati i comandi e le procedure in R utilizzati per le varie analisi sull'allocazione ottimale del portafoglio per un investitore buy-and-hold. Per alcune operazioni si è ricorso a funzioni non incluse nei pacchetti compresi di default in R.

## Allocazione di portafoglio con incertezza nei parametri

Vengono presentati i comandi utilizzati per implementare le analisi presenti nel capitolo 2. Si è ipotizzato che gli extrarendimenti siano indipendenti e identicamente distribuiti,  $r_t = \mu + \epsilon_t$ , con  $\epsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$ .

```
# caricamento dati
NYSE=read.csv("index2.csv")
attach(NYSE) # indice NYSE
TBB=read.csv("TBB.csv") # Treasury Bill
tb=TBB[,4] #dati di chiusura
rf<-log(1+tb/1200) # tasso di interesse a breve
rfree=mean(rf)
# rendimenti azionari nel periodo 1965-2008
WD<- wdr[480:996] # rendimenti inclusi i dividendi
rt<-WD-rfree # extrarendimenti azionari
mu<-mean(rt)
sigma2<-var(rt)
n<-length(rt)
# funzione di utilità potenza
```

```
U<-function (x,R) #R=coeff.avv.relativa al rischio
{
util<- x^(1-R)/(1-R)
return(util)
}
```

```
omega<-seq(0,0.99,by=0.01) #quota in azioni
```

```
### INCERTEZZA
```

```
a<-(n-1)/2
b<- ((n-1)*sigma2)/2
c<-1/b
x<-rgamma(200000,shape=a,scale=c)
marg<-1/x # distr. di sigma2|r gamma inversa
```

```
W<-matrix(0,ncol=200000,nrow=100)
EU5<-rep(0,100)
utilita5<-matrix(0,ncol=200000,nrow=100)
EU10<-rep(0,100)
utilita10<-matrix(0,ncol=200000,nrow=100)
omegamax5<- rep (0,120)
omegamax10<- rep (0,120)
```

```
for (t in 1:120) {
C<- rnorm(200000,0,1)
sd<-sqrt(marg/517)
condiz<- mu+sd*C # distr. di mu|sigma2,r
Z<-rnorm(200000,0,1)
sdd<-sqrt(t*marg)
```

---

```
RT<-t*condiz+sdd*Z # distr. extrarendimenti
W<-(1-omega)*exp(t*rfree)+omega**%t(exp(t*rfree+RT))
utilita5<- U(W,5)
EU5<-apply(utilita5,1,sum)/200000
omegamax5[t]<-omega[which.max(EU5)]
utilita10<- U(W,10)
EU10<-apply(utilita10,1,sum)/200000
omegamax10[t]<-omega[which.max(EU10)]
}
omegamax5
omegamax10

### SENZA INCERTEZZA

#medie a posteriori dei parametri mu e sigma2
mup<-mean(condiz)
sigma2p<-mean(marg)

W<-matrix(0,ncol=200000,nrow=100)
utilita5<-matrix(0,ncol=200000,nrow=100)
EU5<-rep(0,100)
omegamax5<- rep(0,120)
utilita10<-matrix(0,ncol=200000,nrow=100)
EU10<-rep(0,100)
omegamax10<- rep(0,120)

for (t in 1:120) {
sd<-sqrt(t*sigma2p)
RT<- rnorm(200000,t*mup,sd) # RT~N(t*mup,t*sigma2p)
W<-(1-omega)*exp(t*rfree)+omega**%t(exp(t*rfree+RT))
```

```

utilita5<- U(W,5)
EU5<-apply(utilita5,1,sum)/200000
omegamax5[t]<-omega[which.max(EU5)]
utilita10<- U(W,10)
EU10<-apply(utilita10,1,sum)/200000
omegamax10[t]<-omega[which.max(EU10)]
}
omegamax5
omegamax10

```

### Ricampionamento

Vengono riportati i comandi relativi al paragrafo 2.6. In questo caso viene abbandonata l'ipotesi di normalità degli extrarendimenti multiperiodali condizionatamente ai valori passati.

```

### RICAMPIONAMENTO CON INCERTEZZA

#distribuzione a posteriori di mu e sigma2
a<-(n-1)/2
b<- ((n-1)*sigma2)/2
c<-1/b
x<-rgamma(200000,shape=a,scale=c)
marg<-1/x      # distr. di sigma2|r gamma inversa
C<- rnorm(200000,0,1)
sd<-sqrt(marg/517)
condiz<- mu+sd*C # distr. di mu|sigma2,r

sdd<-sqrt(marg)
RT<-rep(0,200000)
omegamax5<- rep(0,120)
omegamax10<- rep(0,120)

```

```
UT<-(rt-mu)/(sqrt(sigma2)) #rendimenti standard.

for (t in 1:120) {
  ZTi<-sample(UT,200000,replace=T)
  RTi<-(ZTi*sdd)+condiz #rend.ricampionati uniperiodali
  RT<-RT+RTi #rend.ricampionati multiperiodali
  W<-matrix(0,ncol=200000,nrow=100)
  W<-(1-omega)*exp(t*rfree)+omega**t(exp(t*rfree+RT))
  utilita5<-matrix(0,ncol=200000,nrow=100)
  utilita5<- U(W,5)
  EU5<-rep(0,100)
  EU5<-apply(utilita5,1,sum)/200000
  omegamax5[t]<-omega[which.max(EU5)]
  utilita10<-matrix(0,ncol=200000,nrow=100)
  utilita10<- U(W,10)
  EU10<-rep(0,100)
  EU10<-apply(utilita10,1,sum)/200000
  omegamax10[t]<-omega[which.max(EU10)]
}
omegamax5
omegamax10

### RICAMPIONAMENTO SENZA INCERTEZZA

RT<-rep(0,200000)
W<-matrix(0,ncol=200000,nrow=100)
utilita5<-matrix(0,ncol=200000,nrow=100)
EU5<-rep(0,100)
omegamax5<-rep(0,120)
```

```

utilita10<-matrix(0,ncol=200000,nrow=100)
EU10<-rep(0,100)
omegamax10<-rep(0,120)

for (t in 1:120) {
RTi<- sample(rt,200000,replace=T)
RT<-RT+RTi # rend. ricampionati multiperiodali
W<-(1-omega)*exp(t*rfree)+omega**%t(exp(t*rfree+RT))
utilita5<- U(W,5)
EU5<-apply(utilita5,1,sum)/200000
omegamax5[t]<-omega[which.max(EU5)]
utilita10<- U(W,10)
EU10<-apply(utilita10,1,sum)/200000
omegamax10[t]<-omega[which.max(EU10)]
}
omegamax5
omegamax10

```

### Allocazione di portafoglio con rendimenti prevedibili

Vengono presentati i comandi utilizzati per implementare le analisi i cui risultati sono presenti nel capitolo 4. Si è ipotizzato che gli extrarendimenti siano prevedibili, pertanto si assume un modello VAR  $z_t = \mathbf{a} + \mathbf{B}x_{t-1} + \epsilon_t$ , dove  $z_t = (r_t, x_t)'$  e  $\epsilon_t \sim i.i.d. N(\mathbf{0}, \Sigma)$ .

- Variabile previsiva: tasso di dividendo

```

# calcolo della serie dei dividendi dal 1925 al 2008
dt<-wdr-ndr
Dt<-(exp(dt)-1)*ndp
divy<-rep(0,996)

```

---

```
for (t in 13:996) {
totdiff<-0
for (j in 0:11) {
diff<-Dt[t-j]
totdiff<-(totdiff+diff)
}
divy[t]<-totdiff/(ndp[t])
}
div<- divy[480:996] #dividendi nel periodo 1965-2008
mean(div)

# pacchetto per generare dati dalla distr. Wishart
require(bayesSurv)

Z<- cbind(rt[2:n],div[2:n])
I<-rep(1,(n-1))
X<-cbind(I,div[1:(n-1)])
D<- (solve(t(X)%*%X))
Chat<- D %*% t(X)%*% Z
S<- (t(Z-X%*%Chat))%*%(Z-X%*%Chat)
sigmainversa<-rWishart(200000,n-3,solve(S))

# pacchetto per generare dati da una multinormale
require(mnormt)
vecChat<-as.vector(Chat)
vecChat

# Funzioni utilizzate per determinare la predictive
# distribution

sposta <-function (x)
```

```
{varcov<- matrix(c(x[1],x[2],x[2],x[3]),nrow=2,byrow=T)
return(varcov) }
```

```
sposta2 <-function (x)
{varcov<-matrix(c(x[1],x[2],x[3],x[4]),nrow=2,byrow=T)
return(varcov) }
```

```
#elevamento a potenza delle matrici
```

```
potenza<- function(x,n)
```

```
{if (n==0)
```

```
return(x^0)
```

```
else{if (n==1)
```

```
return (x)
```

```
else {pot<- x
```

```
for (i in 1:(n-1))
```

```
{pot<-pot %*% x }
```

```
return(pot) }
```

```
}}
```

```
# Per la media della predictive distribution:
```

```
#  $t \cdot B_0^0 + (t-1) \cdot B_0^1 + 1 \cdot B_0^{(t-1)}$ 
```

```
polinomio<-function(x,n){
```

```
totsum<-matrix(0,nrow=2,ncol=2)
```

```
for (i in 1:n) {
```

```
sum<- i*potenza(x, (n-i))
```

```
totsum<-totsum+sum}
```

```
return(totsum) }
```

```
sommamatrix<-function(x,n) # $B_0^1 + B_0^2 + \dots + B_0^t$ 
```

```
{ totsum<-matrix(0,nrow=2,ncol=2)
```

---

```
for (i in 1:n) {
sum<- potenza(x,i)
totsum<-totsum+sum}
return(totsum) }

#Per la var e covar della predictive distribution

#  $B_0^0+B_0^1 +B_0^{(t-1)}$ 
sommamatrix2<-function(x,n){
totsum<-matrix(0,nrow=2,ncol=2)
for (i in 0:(n-1)) {
sum<- potenza(x,i)
totsum<-totsum+sum}
return(totsum) }

sigmaric<- function(x,t){
if (t==1) return (totalsum)
else {
for (n in 1:(t-1))
{f<- sommamatrix2(x,n+1)
sum<- f %*% sigma %*% t(f)
totalsum<- totalsum+sum
}}
return(totalsum) }

### SENZA INCERTEZZA

cond<-matrix(0,nrow=200000,ncol=4)
totalsonna1<-rep(0,200000)
totalsonna2<-rep(0,200000)
```

```
totalsommacov<-rep(0,200000)

for (i in 1:200000) {
  sigmainv<-sposta(sigmainversa[i,])
  sigma<-solve(sigmainv)
  totalsomma1[i] <- sigma[1,1]
  totalsomma2[i] <- sigma[2,2]
  totalsommacov[i] <- sigma[1,2]
  #var e covar della distr.condizionale
  varcov <-kronecker(sigma,D)
  cond[i,]<-rmnorm(1,mean=vecChat,varcov)
}

m<-apply(cond,2,mean) #mean(cond)

# medie a posteriori dei parametri
a<- c(m[1],m[3])
B0<-matrix(0,ncol=2,nrow=2)
B0[1,2]<-c(m[2])
B0[2,2]<-c(m[4])
sigma<-matrix(0,nrow=2,ncol=2)
sigma[1,1]<-mean(totalsomma1)
sigma[1,2]<-mean(totalsommacov)
sigma[2,1]<-mean(totalsommacov)
sigma[2,2]<-mean(totalsomma2)

# valore presente in musum
ZZ<-c(Z[(n-1),1],mean(div))

RT<-rep(0,200000)
W<-matrix(0,ncol=200000,nrow=100)
```

```
utilita5<-matrix(0,ncol=200000,nrow=100)
EU5<-rep(0,100)
omegamax5<-rep(0,120)
utilita10<-matrix(0,ncol=200000,nrow=100)
EU10<-rep(0,100)
omegamax10<-rep(0,120)

for (t in 1:120) {
musum<- as.vector(polinomio(B0,t) %*% a +
sommamatrix(B0,t)%*% ZZ)
totalsum<-matrix(0,nrow=2,ncol=2)
sigmasum<- sigma+sigmaric(B0,t)
RT<-rmnorm(200000, mean=musum, sigmasum)[,1]
W<-(1-omega)*exp(t*rfree)+omega%*%t(exp(t*rfree+RT))
utilita5<- U(W,5)
EU5<-apply(utilita5,1,sum)/200000
omegamax5[t]<-omega[which.max(EU5)]
utilita10<- U(W,10)
EU10<-apply(utilita10,1,sum)/200000
omegamax10[t]<-omega[which.max(EU10)]
}
omegamax5
omegamax10

### INCERTEZZA

cond<-matrix(0,ncol=4,nrow=200000)
a<-matrix(0,ncol=2,nrow=200000)
B0<-matrix(0,ncol=4,nrow=200000)
```

```

mupred<-matrix(0,ncol=2,nrow=120)
ZT<-matrix(0,ncol=200000,nrow=120)

ZZ<-c(Z[(n-1),1],mean(div))

for (i in 1:200000) {
  sigmainv<-sposta(sigmainversa[i,])
  sigma<-solve(sigmainv)
  #var e covar della distr.condizionale
  varcov <-kronecker(sigma,D)

  cond[i,]<-rmnorm(1,mean=vecChat,varcov)
  a[i,]<- c(cond[i,1],cond[i,3])
  B0[i,]<-c(0,cond[i,2],0,cond[i,4])
  totsigmaricors<-matrix(0,nrow=2,ncol=2)
  for (t in 1:120) {
    mupred[t,]<- polinomio(sposta2(B0[i,]),t)%*%a[i,]+
    sommamatrix(sposta2(B0[i,]),t)%*% ZZ
    f<-sommamatrix2(sposta2(B0[i,]),t)
    sigmaricors<- f%*% sigma %*% t(f)
    totsigmaricors<- totsigmaricors+sigmaricors
    sigmapred<- sigma+totsigmaricors
    ZT[t,i]<-rmnorm(1,mean=as.vector(mupred[t,]),
    sigmapred)[1,1]
  }}

W<-matrix(0,ncol=200000,nrow=100)
EU5<-rep(0,100)
utilita5<-matrix(0,ncol=200000,nrow=100)
omegamax5<-rep(0,120)

```

```

EU10<-rep(0,100)
utilita10<-matrix(0,ncol=200000,nrow=100)
omegamax10<-rep(0,120)

for (t in 1:120) {
W<-(1-omega)*exp(t*rfree)+omega**t(exp(t*rfree+ZT[t,]))
utilita5<-U(W,5)
EU5<-apply(utilita5,1,sum)/200000
omegamax5[t]<-omega[which.max(EU5)]
utilita10<-U(W,10)
EU10<-apply(utilita10,1,sum)/200000
omegamax10[t]<-omega[which.max(EU10)]
}
omegamax5
omegamax10

```

- **Variabile previsiva: tasso di interesse a breve**

```

Z<-cbind(rt[2:n],rf[2:n])
I<-rep(1,(n-1))
X<-cbind(I,rf[1:(n-1)])
D<-solve(t(X)**X)
Chat<-D**t(X)**Z
S<-(t(Z-X**Chat)**(Z-X**Chat))
sigmainversa<-rWishart(200000,n-3,solve(S))

### SENZA INCERTEZZA

cond<-matrix(0,nrow=200000,ncol=4)

```

```
totalsomma1<-rep(0,200000)
totalsomma2<-rep(0,200000)
totalsommacov<-rep(0,200000)

for (i in 1:200000) {
  sigmainv<-sposta(sigmainversa[i,])
  sigma<-solve(sigmainv)
  totalsomma1[i] <- sigma[1,1]
  totalsomma2[i] <- sigma[2,2]
  totalsommacov[i] <- sigma[1,2]
  #var e covar della distr.condizionale
  varcov <-kronecker(sigma,D)
  cond[i,]<-rmnorm(1,mean=vecChat,varcov)
}

m<-apply(cond,2,mean) #mean(cond)

# medie a posteriori dei parametri
a<- c(m[1],m[3])
B0<-matrix(0,ncol=2,nrow=2)
B0[1,2]<-c(m[2])
B0[2,2]<-c(m[4])
sigma<-matrix(0,nrow=2,ncol=2)
sigma[1,1]<-mean(totalsomma1)
sigma[1,2]<-mean(totalsommacov)
sigma[2,1]<-mean(totalsommacov)
sigma[2,2]<-mean(totalsomma2)

# valore presente in musum
ZZ<-c(Z[(n-1),1],mean(rf))
```

---

```
RT<-rep(0,200000)
W<-matrix(0,ncol=200000,nrow=100)
utilita5<-matrix(0,ncol=200000,nrow=100)
EU5<-rep(0,100)
omegamax5<-rep(0,120)
utilita10<-matrix(0,ncol=200000,nrow=100)
EU10<-rep(0,100)
omegamax10<-rep(0,120)

for (t in 1:120) {
musum<- as.vector(polinomio(B0,t) %*% a +
sommamatrix(B0,t)%*% ZZ)
totalsum<-matrix(0,nrow=2,ncol=2)
sigmasum<- sigma+sigmaric(B0,t)
RT<-rmnorm(200000, mean=musum, sigmasum) [,1]
W<-(1-omega)*exp(t*rfree)+omega%*%t(exp(t*rfree+RT))
utilita5<- U(W,5)
EU5<-apply(utilita5,1,sum)/200000
omegamax5[t]<-omega[which.max(EU5)]
utilita10<- U(W,10)
EU10<-apply(utilita10,1,sum)/200000
omegamax10[t]<-omega[which.max(EU10)]
}
omegamax5
omegamax10

### INCERTEZZA

cond<-matrix(0,ncol=4,nrow=200000)
```

```

a<-matrix(0,ncol=2,nrow=200000)
B0<-matrix(0,ncol=4,nrow=200000)

mupred<-matrix(0,ncol=2,nrow=120)
ZT<-matrix(0,ncol=200000,nrow=120)

ZZ<-c(Z[(n-1),1],mean(rf))

for (i in 1:200000) {
  sigmainv<-sposta(sigmainversa[i,])
  sigma<-solve(sigmainv)
  #var e covar della distr.condizionale
  varcov <-kronecker(sigma,D)

  cond[i,]<-rmnorm(1,mean=vecChat,varcov)
  a[i,]<- c(cond[i,1],cond[i,3])
  B0[i,]<-c(0,cond[i,2],0,cond[i,4])
  totsigmaricors<-matrix(0,nrow=2,ncol=2)
  for (t in 1:120) {
    mupred[t,]<- polinomio(sposta2(B0[i,]),t)%*%a[i,]+
    sommamatrix(sposta2(B0[i,]),t)%*% ZZ
    f<-sommamatrix2(sposta2(B0[i,]),t)
    sigmaricors<- f%*% sigma %*% t(f)
    totsigmaricors<- totsigmaricors+sigmaricors
    sigmapred<- sigma+totsigmaricors
    ZT[t,i]<-rmnorm(1,mean=as.vector(mupred[t,]),
    sigmapred)[1,1]
  }
}

W<-matrix(0,ncol=200000,nrow=100)
EU5<-rep(0,100)

```

```

utilita5<-matrix(0,ncol=200000,nrow=100)
omegamax5<-rep(0,120)
EU10<-rep(0,100)
utilita10<-matrix(0,ncol=200000,nrow=100)
omegamax10<-rep(0,120)

for (t in 1:120) {
W<-(1-omega)*exp(t*rfree)+omega**%t(exp(t*rfree+ZT[t,]))
utilita5<- U(W,5)
EU5<-apply(utilita5,1,sum)/200000
omegamax5[t]<-omega[which.max(EU5)]
utilita10<- U(W,10)
EU10<-apply(utilita10,1,sum)/200000
omegamax10[t]<-omega[which.max(EU10)]
}
omegamax5
omegamax10

```

- **Variabile previsiva: term spread**

```

TNXX10anni=csv2r("TNXX10anni.csv")
t1=TNXX10anni[,4] #dati di chiusura
rfl<-log(1+t1/1200) #tasso di interesse di LT
ts<-rfl-rf #term spread

Z<- cbind(rt[2:n],ts[2:n])
I<-rep(1,(n-1))
X<-cbind(I,ts[1:(n-1)])
D<- (solve(t(X)**%X))
Chat<- D **% t(X)**% Z

```

```
S<- (t(Z-X**%Chat))**%(Z-X**%Chat)
sigmainversa<-rWishart(200000,n-3,solve(S))

### SENZA INCERTEZZA

cond<-matrix(0,nrow=200000,ncol=4)
totalsomma1<-rep(0,200000)
totalsomma2<-rep(0,200000)
totalsommacov<-rep(0,200000)

for (i in 1:200000) {
  sigmainv<-sposta(sigmainversa[i,])
  sigma<-solve(sigmainv)
  totalsomma1[i] <- sigma[1,1]
  totalsomma2[i] <- sigma[2,2]
  totalsommacov[i] <- sigma[1,2]
  #var e covar della distr.condizionale
  varcov <-kronecker(sigma,D)
  cond[i,]<-rmnorm(1,mean=vecChat,varcov)
}

m<-apply(cond,2,mean) #mean(cond)

# medie a posteriori dei parametri
a<- c(m[1],m[3])
B0<-matrix(0,ncol=2,nrow=2)
B0[1,2]<-c(m[2])
B0[2,2]<-c(m[4])
sigma<-matrix(0,nrow=2,ncol=2)
sigma[1,1]<-mean(totalsomma1)
```

```
sigma[1,2]<-mean(totalsommacov)
sigma[2,1]<-mean(totalsommacov)
sigma[2,2]<-mean(totalsomma2)

# valore presente in musum
ZZ<-c(Z[(n-1),1],mean(ts))

RT<-rep(0,200000)
W<-matrix(0,ncol=200000,nrow=100)
utilita5<-matrix(0,ncol=200000,nrow=100)
EU5<-rep(0,100)
omegamax5<-rep(0,120)
utilita10<-matrix(0,ncol=200000,nrow=100)
EU10<-rep(0,100)
omegamax10<-rep(0,120)

for (t in 1:120) {
musum<- as.vector(polinomio(B0,t) %*% a +
sommamatrix(B0,t)%*% ZZ)
totalsum<-matrix(0,nrow=2,ncol=2)
sigmasum<- sigma+sigmaric(B0,t)
RT<-rmnorm(200000, mean=musum, sigmasum)[,1]
W<-(1-omega)*exp(t*rfree)+omega%*%t(exp(t*rfree+RT))
utilita5<- U(W,5)
EU5<-apply(utilita5,1,sum)/200000
omegamax5[t]<-omega[which.max(EU5)]
utilita10<- U(W,10)
EU10<-apply(utilita10,1,sum)/200000
omegamax10[t]<-omega[which.max(EU10)]
}
```

```
omegamax5
omegamax10

### INCERTEZZA

cond<-matrix(0,ncol=4,nrow=200000)
a<-matrix(0,ncol=2,nrow=200000)
B0<-matrix(0,ncol=4,nrow=200000)

mupred<-matrix(0,ncol=2,nrow=120)
ZT<-matrix(0,ncol=200000,nrow=120)

ZZ<-c(Z[(n-1),1],mean(ts))

for (i in 1:200000) {
  sigmainv<-sposta(sigmainversa[i,])
  sigma<-solve(sigmainv)
  #var e covar della distr.condizionale
  varcov <-kronecker(sigma,D)

  cond[i,]<-rmnorm(1,mean=vecChat,varcov)
  a[i,]<- c(cond[i,1],cond[i,3])
  B0[i,]<-c(0,cond[i,2],0,cond[i,4])
  totsigmaricors<-matrix(0,nrow=2,ncol=2)
  for (t in 1:120) {
    mupred[t,]<- polinomio(sposta2(B0[i,]),t)%*%a[i,]+
    sommamatrix(sposta2(B0[i,]),t)%*% ZZ
    f<-sommamatrix2(sposta2(B0[i,]),t)
    sigmaricors<- f%*% sigma %*% t(f)
    totsigmaricors<- totsigmaricors+sigmaricors
  }
}
```

```

sigmapred<- sigma+totsigmaricors
ZT[t,i]<-rmnorm(1,mean=as.vector(mupred[t,]),
sigmapred)[1,1]
}}

W<-matrix(0,ncol=200000,nrow=100)
EU5<-rep(0,100)
utilita5<-matrix(0,ncol=200000,nrow=100)
omegamax5<-rep(0,120)
EU10<-rep(0,100)
utilita10<-matrix(0,ncol=200000,nrow=100)
omegamax10<-rep(0,120)

for (t in 1:120) {
W<-(1-omega)*exp(t*rfree)+omega%%t(exp(t*rfree+ZT[t,]))
utilita5<- U(W,5)
EU5<-apply(utilita5,1,sum)/200000
omegamax5[t]<-omega[which.max(EU5)]
utilita10<- U(W,10)
EU10<-apply(utilita10,1,sum)/200000
omegamax10[t]<-omega[which.max(EU10)]
}
omegamax5
omegamax10

```

### **Allocazione di portafoglio con funzione loss aversion**

Sono riportati i comandi utilizzati per calcolare l'allocazione ottimale del portafoglio quando si considera la funzione di utilità di *loss aversion*.

```
loss_aversion<-function(x) #loss aversion
```

```
{
if (x>=1) return((x-1)^0.88)
else return(-2.25*((1-x)^0.88))
}

loss_aversion2<-function(x) #loss aversion
{
if (x>=1) return(x-1)
else return(-2.25*(1-x))
}

### INCERTEZZA

W<-matrix(0,ncol=200000,nrow=100)
EU_la<-rep(0,100)
utilita_la<-matrix(0,ncol=200000,nrow=100)
omegamax_la<-rep(0,120)

for (t in 1:120) {
C<- rnorm(200000,0,1)
sd<-sqrt(marg/517)
condiz<- mu+sd*C
Z<-rnorm(200000,0,1)
sdd<-sqrt(t*marg)
RT<-t*condiz+sdd*Z
W<-(1-omega)*exp(t*rfree)+omega%%t(exp(t*rfree+RT))
utilita_la<- matrix(sapply(W,loss_aversion),nrow=100)
EU_la<-apply(utilita_la,1,sum)/200000
omegamax_la[t]<-omega[which.max(EU_la)]
}
```

```
### SENZA INCERTEZZA
```

```
W<-matrix(0,ncol=200000,nrow=100)
EU_la<-rep(0,100)
utilita_la<-matrix(0,ncol=200000,nrow=100)
omegamax_la<-rep(0,120)

for (t in 1:120) {
sd<-sqrt(t*sigma2p)
RT<- rnorm(200000, t*mup, sd) # RT~N(t*mu, t*sigma2)
W<-(1-omega)*exp(t*rfree)+omega**%t (exp(t*rfree+RT))
utilita_la<-matrix(sapply(W,loss_aversion),nrow=100)
EU_la<-apply(utilita_la,1,sum)/200000
omegamax_la[t]<-omega[which.max(EU_la)]
}
```

```
### MODELLO VAR SENZA INCERTEZZA
```

```
W<-matrix(0,ncol=200000,nrow=100)
EU_la<-rep(0,100)
utilita_la<-matrix(0,ncol=200000,nrow=100)
omegamax_la<-rep(0,120)

for (t in 1:120) {
mupred<-as.vector(polinomio(B0,t)**%a+
sommamatrix(B0,t)**% ZZ)
totalsum<-matrix(0,nrow=2,ncol=2)
sigmapred<- sigma+sigmaric(B0,t)
```

```
RT<-rmnorm(200000, mean=mupred, sigmapred) [,1]
W<-(1-omega)*exp(t*rfree)+omega%%t(exp(t*rfree+RT))
utilita_la<-matrix(sapply(W, loss_aversion), nrow=100)
EU_la<-apply(utilita_la, 1, sum)/200000
omegamax_la[t]<-omega[which.max(EU_la)]
}
```

```
### MODELLO VAR CON INCERTEZZA
```

```
W<-matrix(0, ncol=200000, nrow=100)
EU_la<-rep(0, 100)
utilita_la<-matrix(0, ncol=200000, nrow=100)
omegamax_la<-rep(0, 120)

for (t in 1:120) {
W<-(1-omega)*exp(t*rfree)+omega%%
t(exp(t*rfree+ZT[t,]))
utilita_la<-matrix(sapply(W, loss_aversion), nrow=100)
EU_la<-apply(utilita_la, 1, sum)/200000
omegamax_la[t]<-omega[which.max(EU_la)]
}
```

# Riferimenti bibliografici

- Aït-Sahalia, Y. e Brandt, M.W. (2001). Variable selection for portfolio choice. *Journal of Finance*, **56**, 1297-1351.
- Barberis, N. (2000). Investing for the long run when returns are predictable. *Journal of Finance*, **55**, 225-264.
- Barberis, N., Huang, M. e Santos, T. (2001). Prospect theory and asset prices. *Quarterly Journal of Economics*, **116**, 1-53.
- Barberis, N. e Thaler, R. (2003). A survey of behavioral finance. *Handbook of the Economics of Finance*. North-Holland, Amsterdam.
- Bawa, V.S., Brown, S.J. e Klein, R.W. (1979). Estimation risk and optimal portfolio choice. North-Holland, Amsterdam.
- Bell, D. (1982). Regret in decision making under uncertainty. *Operations Research*, **30**, 961-981.
- Benartzi, S. e Thaler, R. (1995). Myopic loss aversion and the equity premium puzzle. *Quarterly Journal of Economics*, **110**, 73-92.
- Berkelaar, A.B., Kouwenberg, R. e Post, T. (2004). Optimal portfolio choice under loss aversion. *Review of Economics and Statistics*, **86**, 973-987.
- Brennan, M.J., Schwartz, E.S. e Lagnado, R. (1997). Strategic asset allocation. *Journal of Economic Dynamics and Control*, **21**, 1377-1403.

Riferimenti bibliografici Riferimenti bibliografici Riferimenti bibliografici

- Campbell, J.Y. (1987). Stock returns and the term structure. *Journal of Financial Economics*, **18**, 373-399.
- Campbell, J.Y. (1991). A variance decomposition for stock returns. *Economic Journal*, **101**, 157-179.
- Campbell, J.Y. e Schiller R. (1988). The dividend-price ratio, expectations of future dividends and discount factors. *Review of Financial Studies*, **1**, 195-227.
- Campbell, J.Y. e Schiller R. (1988). Stock prices, earnings and expected dividends. *Journal of Finance*, **43**, 661-676.
- Campbell, J.Y. e Viceira , L.M. (1998). Who should buy long-term bonds?. *Working paper*, Harvard University.
- Campbell, J.Y. e Viceira, (2002). Strategic asset allocation: portfolio choice for long-term investors. Oxford University, New York.
- Chacko, G. e Viceira, L.M. (1999). Dynamic consumption and portfolio choice with stochastic volatility in incomplete markets. *NBER Working paper*, no. 7377.
- Chew, S. (1989). Axiomatic utility theories with the betweenness property. *Annals of Operations Research*, **19**, 273-298.
- Chew, S. e MacCrimmon, K. (1979). Alpha-nu choice theory: an axiomatization of expected utility. *Working Paper*, University of British Columbia.
- Conrad, J. e Kaul, G. (1988). Time-variation in expected returns. *Journal of Business*, **61**, 409-425.
- Fama, E.F. e French, K.R. (1988). Dividend yields and expected stock returns. *Journal of Financial Economics*, **22**, 3-27.

Riferimenti bibliografici Riferimenti bibliografici Riferimenti bibliografici

- Fama, E.F. e French, K.R. (1989). Business conditions and expected returns on stocks and bonds. *Journal of Financial Economics*, **25**, 23-49.
- Fama, E.F. e Schwert, G.W. (1977). Asset returns and inflation. *Journal of Financial Economics*, **5**, 115-146.
- Ferson, W.E. e Harvey, R. (1991). The variation of economic risk premiums. *Journal of Political Economy*, **99**, 385-415.
- Gemmill, G., Hwang, S. e Salmon, M. (2006). Performance measurement with loss aversion. *Journal of Asset Management*, **7**, 190-207.
- Gollier, C. (2001). The economics of risk and time. MIT Press.
- Kahneman, D. e Tversky, A. (1973). On the psychology of prediction. *Psychology Review*, **80**, 237-251.
- Kahneman, D. e Tversky, A. (1979). Prospect Theory: an analysis of decision under risk. *Econometrica*, **47**, 263-291.
- Kan, R. e Zhou, G. (2007). Optimal portfolio choice with parameter uncertainty. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, **42**, 621-656.
- Kandel, S. e Stambaugh, R.F. (1987). Long horizon returns and short horizon models. *CRSP Working Paper, no 222*, University of Chicago.
- Kandel, S. e Stambaugh, R.F. (1996). On the predictability of stock returns: an asset allocation perspective. *Journal of Finance*, **51**, 385-424.
- Keim, D.B. e Stambaugh, R.F. (1986). Predicting returns in the stock and bond markets. *Journal of Financial Economics*, **17**, 357-390.
- Kendall, M. (1953). The analysis of economic time series, Part I: Prices. *Journal of the Royal Statistical Society*, **96**.
- Lo, A.W. e MacKinlay, A.C. (1988). Stock market prices do not follow random walks: evidence from a simple specification test. *Review of Financial Studies*, **1**, 41-66.

Riferimenti bibliografici Riferimenti bibliografici Riferimenti bibliografici

- Lynch, Anthony W. (2001). Portfolio choice and equity characteristics: Characterizing the hedging demands induced by return predictability. *Journal of Financial Economics*, **62**, 67-130.
- Markovitz, H. (1952). Portfolio selection. *Journal of Finance*, **7**, 77-91.
- Merton, R. (1969). Lifetime portfolio selection: the continuous-time case. *Review of Economics and Statistics*, **51**, 247-257.
- Merton, R. (1973). An intertemporal capital asset pricing model. *Econometrica*, **41**, 867-887.
- Samuelson, P. (1969). Lifetime portfolio selection by dynamic stochastic programming. *Review of Economics and Statistics*, **51**, 239-246.
- Siegel, J. (1994). Stocks for the long run. McGraw-Hill.
- Stambaugh, R.F. (1999). Predictive regressions. *Journal of Financial Economics*, **54**, 375-421.
- Tversky, A. e Kahneman, D. (1992). Advances in Prospect Theory: cumulative representation of uncertainty. *Journal of risk and uncertainty*, **5**, 297-323.
- Whitelaw, R.F. (1994). Time variations and covariations in the expectation and volatility of stock market returns. *Journal of Finance*, **49**, 515-541.
- Zellner, A. (1971). An introduction to bayesian inference in econometrics. John Wiley and Sons, New York.