



# UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Formulazione dell’equazione di Hamilton-Jacobi  
quantistica in termini di campi vettoriali ausiliari

Relatore

Prof. Marco Matone

Laureando

Paolo Pianizzola

Anno Accademico 2022/2023



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>5</b>
<b>1 Equazione di Hamilton-Jacobi</b>	<b>7</b>
1.1 Condizione di Lie . . . . .	7
1.2 L'equazione classica . . . . .	8
<b>2 Equazione di H-J quantistica 1D</b>	<b>11</b>
2.1 $v$ -transformations . . . . .	11
2.2 Trasformazione di $\mathcal{W}$ in meccanica classica . . . . .	11
2.3 Modifica della CSHJE . . . . .	12
2.4 Proprietà . . . . .	13
2.5 Condizione di cociclo . . . . .	13
2.6 Simmetria di Moebius 1D . . . . .	14
2.7 Il termine non omogeneo . . . . .	15
2.8 Formulazione QSHJE . . . . .	17
2.9 Implicazione della SE . . . . .	18
2.10 Fenomenologia della MQ . . . . .	19
<b>3 Equazione di H-J quantistica 3D</b>	<b>23</b>



# Introduzione

Intorno al 1830 sir William Rowan Hamilton osserva che il modo in cui i raggi di luce si propagano nello spazio può essere descritto con delle traiettorie, proprie della meccanica classica. Da questa considerazione viene formulata l'equazione di Hamilton-Jacobi, che permette di associare una sorta di fronte d'onda, detto funzione principale di Hamilton, ad un sistema di particelle classiche, ma il formalismo che ne consegue diventa di grande interesse solo con l'avvento della meccanica quantistica, quando nel 1926 Erwin Schroedinger, per formulare l'omonima equazione, parte proprio dall'equazione di Hamilton-Jacobi.

L'obiettivo di questa tesi è innanzitutto derivare e caratterizzare l'equazione H-J nell'ambito della meccanica classica, mostrando in particolare quali dettagli sanciscono la differenza con altri approcci alla meccanica analitica come quello lagrangiano e hamiltoniano. Successivamente, ripercorrendo i ragionamenti in [1, 2], introdurremo una funzione analoga alla funzione caratteristica di Hamilton con il requisito che questa soddisfi una condizione d'invarianza legata alle trasformazioni tra sistemi di riferimento, condizione che condurrà all'aggiunta di un termine, corrispondente al potenziale quantistico, il quale si rivelerà essere, nel caso unidimensionale, di forma unica e sarà proprio la derivata schwarziana  $\{f, x\}$ .

Mostreremo come tale modifica all'equazione di Hamilton-Jacobi riproduca buona parte dei risultati della meccanica quantistica. Prima di tutto, ripercorrendo i passaggi di [3], vedremo che da una soluzione dell'equazione H-J quantistica si possono sempre costruire le soluzioni dell'equazione di Schroedinger e poi analizzeremo il modo in cui si possano ritrovare peculiarità della meccanica quantistica quali effetto tunnel, quantizzazione dell'energia e inesistenza delle traiettorie. Tutto questo verrà dedotto senza mai interpretare la funzione d'onda come ampiezza di probabilità.

Seguendo [4], nell'ultima sezione della tesi ci accingeremo a generalizzare l'equazione H-J quantistica al caso tridimensionale e ci accorgeremo che in questo caso la nostra equazione verrà affiancata da un'equazione di continuità che nel caso unidimensionale viene automaticamente inglobata nell'equazione principale. Troveremo comunque il modo di formulare l'equazione H-J in termini di un'unica relazione e faremo ciò sfruttando dei campi vettoriali ausiliari definiti in analogia con i campi elettrico e magnetico dell'elettromagnetismo classico delle equazione di Maxwell.



# Capitolo 1

## Equazione di Hamilton-Jacobi

Nell'ambito della meccanica classica un sistema dinamico a  $n$  gradi di libertà può essere completamente descritto grazie alle equazioni di Hamilton:

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \quad \mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n. \quad (1.1)$$

Le coordinate e i momenti coniugati possono trasformare in modo tale da preservare la struttura delle equazioni appena scritte. Tali trasformazioni sono dette *canoniche* e sono caratterizzate dalle seguenti proprietà:

**Proposizione 1.** *Sia  $\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$ . Una trasformazione  $\mathbf{y} = \mathbf{w}(\mathbf{x})$  si dice canonica se e solo se è soddisfatta una delle seguenti condizioni equivalenti:*

- $\exists c \neq 0 \in \mathbb{R}$  tale che  $\mathbb{J}_{\mathbf{w}}(\mathbf{x}) E \mathbb{J}_{\mathbf{w}}^T(\mathbf{x}) = cE \forall \mathbf{x}$  all'interno del dominio, dove  $\mathbb{J}_{\mathbf{w}}(\mathbf{x})$  è la matrice jacobiana di  $\mathbf{w}(\mathbf{x})$  ed  $E$  la matrice simplettica standard ossia  $\begin{pmatrix} \emptyset & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & \emptyset \end{pmatrix}$ ;
- la trasformazione conserva le parentesi di Poisson fondamentali a meno di una costante reale  $c \neq 0$ ;
- $\mathbf{y} = \mathbf{w}(\mathbf{x})$  soddisfa la condizione di Lie.

Si ricorda che nel caso di sistemi non autonomi e di trasformazioni dipendenti dal tempo è sempre possibile ricondursi al caso di cui sopra ampliando le dimensioni dello spazio delle fasi e trattando il tempo come una coordinata spaziale aggiuntiva di derivata temporale costante.

### 1.1 Condizione di Lie

Data una funzione  $F(\mathbf{z}, t)$  di classe  $C^1$  con  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^N$ , la forma differenziale

$$\tilde{d}F = dF - \frac{\partial F}{\partial t} dt = \left\langle \frac{\partial F}{\partial \mathbf{z}}, d\mathbf{z} \right\rangle = \sum_{k=1}^N \frac{\partial F}{\partial z_k} dz_k \quad (1.2)$$

è detta *differenziale a tempo bloccato* di  $f$  e nel caso che ci interessa  $N = 2n$  e  $\mathbf{z} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$ , quindi

$$\tilde{d}F = \left\langle \frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}}, d\mathbf{q} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}}, d\mathbf{p} \right\rangle. \quad (1.3)$$

**Definizione 1.** *Considerata una trasformazione  $\mathbf{y} = \mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$  dipendente esplicitamente dal tempo, poniamo  $\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$  e  $\mathbf{y} = (\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ . Se esiste un funzione  $F$  di classe  $C^1$  tale che*

$$\left\langle \mathbf{p}, \tilde{d}\mathbf{q} \right\rangle - \left\langle \mathbf{P}, \tilde{d}\mathbf{Q} \right\rangle = \sum_{k=1}^n (p_k dq_k - P_k dQ_k) = \tilde{d}F, \quad (1.4)$$

si dirà che la trasformazione soddisfa la **condizione di Lie**.

Si può dimostrare che una trasformazione soddisfacente la condizione di Lie coniuga l'hamiltoniana  $H$  di partenza ad una hamiltoniana  $\tilde{H}$  della forma

$$\tilde{H}(\mathbf{y}, t) = H(\mathbf{w}^{-1}(\mathbf{y}, t), t) + \left[ \frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{P} \cdot \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} \right] (\mathbf{w}^{-1}(\mathbf{y}, t), t) \quad (1.5)$$

e di conseguenza la condizione di Lie può essere riscritta nel seguente modo:

$$\langle \mathbf{P}, d\mathbf{Q} \rangle = \langle \mathbf{p}, d\mathbf{q} \rangle - \left[ dF - (\tilde{H} - H)dt \right]. \quad (1.6)$$

La funzione  $F$ , se è  $C^2$  e il suo hessiano è non singolare, si dice *generatrice* e può dipendere dal tempo e da una delle coppie  $(\mathbf{q}, \mathbf{Q})$ ,  $(\mathbf{q}, \mathbf{P})$ ,  $(\mathbf{p}, \mathbf{Q})$  e  $(\mathbf{p}, \mathbf{P})$  a seconda di quali di queste si assumano indipendenti nell'esecuzione della trasformazione.

## 1.2 L'equazione classica

Interessandoci al caso in cui  $(\mathbf{q}, \mathbf{Q})$  sono considerate indipendenti, dalla condizione di Lie possiamo dedurre le equazioni

$$\mathbf{p} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}}, \quad \mathbf{P} = -\frac{\partial F}{\partial \mathbf{Q}} \quad (1.7)$$

e

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) + \frac{\partial F}{\partial t}(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t) = \tilde{H}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t). \quad (1.8)$$

L'equazione di Hamilton-Jacobi classica (CHJE) si ottiene scegliendo la trasformazione che porta all'hamiltoniana nulla

$$\tilde{H} = 0, \quad (1.9)$$

la quale implica che  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{P}$  siano costanti, date le eq.(1.1), e quindi partendo da (1.6) troviamo che

$$dF = \langle \mathbf{p}, d\mathbf{q} \rangle - H dt = \left[ \left\langle \mathbf{p}, \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} \right\rangle - H \right] dt = \mathcal{L} dt = dS, \quad (1.10)$$

dove  $\mathcal{L}$  è la lagrangiana e  $S$  l'azione, cioè che la funzione generatrice di questa trasformazione è equivalente all'azione a meno di una costante e, denotandola con  $\mathcal{S}$ , la chiamiamo *funzione principale di Hamilton*. La differenza sostanziale tra quest'ultima e l'azione è che una è appunto una funzione delle coordinate iniziali e di quelle a tempo  $t$ , mentre l'altra è un funzionale di qualunque traiettoria percorribile tra due punti fissi in un intervallo di tempo fissato. Questo dettaglio rispecchia la diversità nell'utilizzo delle due: nella teoria di Hamilton-Jacobi, nella quale si adopera  $\mathcal{S}$ , si ricerca il modo in cui un sistema evolve a partire da delle condizioni date, mentre l'azione  $S$  è impiegata nell'ambito del principio variazionale che permette di individuare il percorso ottimale tra tutti quelli possibili a estremi fissati. In ogni caso, che si usi un metodo oppure l'altro, le soluzioni concordano.

Alla luce di (1.7), (1.8) e (1.9) possiamo scrivere

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t}(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t) = 0, \quad \mathbf{p} = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{q}} \quad (1.11)$$

e sostituendo la seconda equazione nella prima ricaviamo l'equazione di Hamilton-Jacobi:

$$H\left(\mathbf{q}, \mathbf{p} = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{q}}, t\right) + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t}(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t) = 0. \quad (1.12)$$

Per hamiltoniane della forma  $H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{q}, t)$  la CHJE diventa

$$\frac{1}{2m} \sum_{i=1}^n (\partial_{q_i} \mathcal{S})^2 + V(\mathbf{q}, t) + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} = 0. \quad (1.13)$$

Inoltre, se il potenziale è indipendente dal tempo, la funzione principale di Hamilton ammette la decomposizione

$$\mathcal{S}(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t) = \mathcal{S}_0(\mathbf{q}, \mathbf{Q}) - Et, \quad (1.14)$$

dove  $E$  è l'energia dello stato stazionario ed  $\mathcal{S}_0$  è detta *funzione caratteristica di Hamilton* oppure *azione ridotta*, quindi nel caso stazionario (1.13) si riduce a

$$\frac{1}{2m} \sum_{i=1}^n (\partial_{q_i} \mathcal{S}_0)^2 + \mathcal{W} = 0 \quad (1.15)$$

con  $\mathcal{W} = V(\mathbf{q}) - E$ . Questo caso dell'equazione di Hamilton-Jacobi, abbreviato con la sigla CSHJE (*Classical Stationary H-J Equation*), è il punto di partenza della trattazione a seguire.

Si osservi che  $\mathcal{S}(\mathbf{q}, t) = K$ , con  $K \in \mathbb{R}$ , definisce una ipersuperficie in  $\mathbb{R}^n$  formata da tutti i punti caratterizzati da uno stesso valore della funzione principale di Hamilton per ogni  $t$ . Analogamente si può fare con  $\mathcal{S}_0$ . Ad un istante arbitrario  $t_0$ , l'ipersuperficie  $\mathcal{S}(\mathbf{q}, t_0) = K$  coincide con  $\mathcal{S}_0(\mathbf{q}) = K + Et_0$  e ad un istante successivo  $t_0 + dt$ ,  $\mathcal{S}(\mathbf{q}, t_0 + dt) = K$  corrisponderà a  $\mathcal{S}_0(\mathbf{q}) = K + E(t_0 + dt)$ . Questo è il modo in cui in ottica evolvono i fronti d'onda e di conseguenza, geometricamente parlando, possiamo trattare  $\mathcal{S}$  e  $\mathcal{S}_0$  proprio come dei fronti d'onda che si muovono nello spazio, come espresso in dettaglio in [5].

Una volta trovata una soluzione  $\mathcal{S}(\mathbf{q}, t)$  all'eq.(1.13), possiamo descrivere l'evoluzione del sistema ricorrendo alla prima equazione di Hamilton:

$$\dot{q}_i = \left. \frac{\partial H}{\partial p_i} \right|_{p_i = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q_i}}, \quad (1.16)$$

dove sottolineiamo che nel caso conservativo si può usare direttamente la funzione caratteristica in quanto  $\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial \mathcal{S}_0}{\partial \mathbf{q}}$ . Il gradiente  $\nabla \mathcal{S} = \nabla \mathcal{S}_0$  è ortogonale all'ipersuperficie  $\mathcal{S}$  e dato che in sistemi meccanici sono i momenti a definire le direzioni del moto, possiamo affermare che le traiettorie delle particelle sono ortogonali all'ipersuperficie  $\mathcal{S} = K$  proprio come accade in ottica per i raggi luminosi rispetto ai fronti d'onda.

Notiamo che, mentre nel formalismo lagrangiano viene richiesta la risoluzione di  $n$  equazioni differenziali del secondo ordine nello spazio delle configurazioni e in quello hamiltoniano di  $2n$  equazioni differenziali del primo ordine nello spazio delle fasi, con questo approccio ci riduciamo ad  $n$  equazioni al primo ordine nello spazio delle configurazioni risolvibili una volta trovata la funzione  $\mathcal{S}(\mathbf{q}, t)$  la quale detta al sistema come evolvere come se fosse una sorta di "funzione d'onda" classica.

Al fine di mostrare con più chiarezza il legame tra l'equazione di Hamilton-Jacobi e le onde riportiamo da [6] il caso della particella libera. L'hamiltoniana è semplicemente  $H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}$  ed è facile provare che una soluzione di (1.12) è l'onda sferica  $\mathcal{S} = \frac{m\|\mathbf{q} - \mathbf{q}_0\|^2}{2(t - t_0)}$ , dove  $\mathbf{q}_0$  e  $t_0$  sono costanti d'integrazione. È possibile anche trovare l'azione ridotta risolvendo l'equazione differenziale alle derivate parziali

$$\frac{1}{2m} \sum_{i=1}^n (\partial_{q_i} \mathcal{S}_0)^2 = E. \quad (1.17)$$

Possiamo cercare una soluzione separabile della forma  $\mathcal{S}_0(\mathbf{q}) = \sqrt{2m} \sum s_i(q_i)$  e risolvere le equazioni  $\frac{ds_i}{dq_i} = \sqrt{e_i}$  trovando che  $s_i = \sqrt{e_i} q_i + C_i$  con il vincolo  $\sum e_i = E$ , dove  $e_i$  e  $C_i$  sono costanti da determinare. La soluzione completa è l'onda piana  $\mathcal{S}_0(\mathbf{q}) = \sqrt{2mE} \sum u_i q_i + C'_i$  con  $u_i = \sqrt{e_i/E}$  costanti d'integrazione. Raccogliendo le costanti  $u_i$  in un vettore  $\mathbf{v}$ , a sua volta costante, tale che  $v_i = v u_i$ ,  $E = (1/2)mv^2$ , scriviamo

$$\mathcal{S}_0(\mathbf{q}) = m\mathbf{v} \cdot \mathbf{q} + C. \quad (1.18)$$

Dedotto il fronte d'onda, possiamo trovare le traiettorie: i momenti si ricavano da  $\mathbf{p} = \partial \mathcal{S}_0 / \partial \mathbf{q} = m\mathbf{v}$  e secondo (1.16)  $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{p}/m = \mathbf{v} \implies \mathbf{q} = \mathbf{v}t + \mathbf{q}_0$ . È possibile verificare che dalla soluzione di onda sferica si giunge alle stesse conclusioni.



## Capitolo 2

# Equazione di H-J quantistica 1D

### 2.1 $v$ -transformations

**Definizione 2.** Definiamo una trasformazione di coordinate localmente invertibile  $q \rightarrow q^v = v(q)$  tale che

$$\mathcal{S}_0(\mathbf{q}) = \mathcal{S}_0^v(\mathbf{q}^v) \quad \text{oppure} \quad \mathcal{S}_0 \rightarrow \mathcal{S}_0^v = \mathcal{S}_0 \circ v^{-1}. \quad (2.1)$$

Chiameremo tale trasformazione una " **$v$ -transformation**" o "**VT**".

I momenti  $\mathbf{p}$  dipendono dalle coordinate  $\mathbf{q}$  secondo la relazione

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{S}_0}{\partial q_i} \quad (2.2)$$

e di conseguenza adoperando le VTs, che sono trasformazioni di punto, possiamo indurre le trasformazioni dei momenti..

### 2.2 Trasformazione di $\mathcal{W}$ in meccanica classica

Consideriamo ora la VT che porta da un sistema generico a quello triviale di hamiltoniana nulla. Quest'ultimo è caratterizzato da  $\mathcal{W}^0=0$  e di conseguenza l'azione ridotta  $\mathcal{S}_0^0$  è costante, dove abbiamo contrassegnato con uno zero all'apice l'appartenenza al sistema triviale. La mappa  $\mathcal{S}_0^0$ , però, non è invertibile e ciò impedisce l'equivalenza tra sistemi.

Prendiamo in esame un semplice sistema unidimensionale classico di due particelle libere  $a$  e  $b$  di masse  $m_a$  e  $m_b$  e di velocità relativa  $v$  per analizzare le implicazioni di questo fatto. Per un osservatore nel sistema di riferimento a riposo della particella  $a$  le azioni ridotte sono

$$\mathcal{S}_0^a(q^a) = \text{cost} \quad \text{e} \quad \mathcal{S}_0^b(q^b) = m^b v q^b. \quad (2.3)$$

dove  $q^b$  è la posizione di  $b$  nel sistema di riferimento di  $a$ . Non è possibile rendere il sistema  $b$  equivalente ad  $a$  imponendo  $\mathcal{S}_0^a = \mathcal{S}_0^b$ , infatti la trasformazione  $q^a \rightarrow q^b$  è degenera. Considerando invece un osservatore in moto per entrambe le particelle di velocità relativa  $w \neq 0$  rispetto alla particella  $a$  le azioni ridotte diventano

$$\mathcal{S}_0^a(q^a) = m^a w q^a \quad \text{e} \quad \mathcal{S}_0^b(q^b) = m^b (v + w) q^b. \quad (2.4)$$

Troviamo facilmente la trasformazione di coordinate  $q^b(q^a) = \frac{m^a w}{m^b (v+w)} q^a$  e così facendo osserviamo che il sistema  $b$  equivale al sistema  $a$  quando descritto in termini di  $q^a$ .

In meccanica classica, quindi, è sempre possibile connettere due sistemi di riferimento a meno che uno dei due non sia descritto da un'azione ridotta costante, come nel caso del sistema a riposo, e perciò in questo ambito l'equivalenza per cambio di coordinate non è assoluta, ma dipende dai sistemi di riferimento considerati. Questo suggerisce di formulare in un generico sistema  $n$ -dimensionale la seguente ipotesi sulla quale si fonderà la trattazione seguente:

**Principio 1.** *Esiste sempre una VT tra due generici sistemi A e B tale che*

$$\mathcal{S}_0^a(\mathbf{q}^a) = \mathcal{S}_0^b(\mathbf{q}^b) \quad (2.5)$$

sia sempre ben definito, dove  $\mathbf{q}^a, \mathbf{q}^b \in \mathbb{R}^n$ .

Osserviamo che la CSHJE offre un legame tra  $\mathcal{S}_0$  e  $\mathcal{W}$  e che per (2.5)

$$\frac{\partial \mathcal{S}_0^v}{\partial q_i^v} = \Lambda_i^j \frac{\partial \mathcal{S}_0}{\partial q^j}, \quad (2.6)$$

dove  $\Lambda_i^j = \frac{\partial q_j}{\partial q_i^v}$  con  $\det \Lambda(\mathbf{q}) \neq 0 \forall \mathbf{q}$  per garantire l'invertibilità, quindi, dovendo  $\mathcal{S}_0^v$  soddisfare

$$\frac{1}{2m} \sum_{i=1}^n \left( \partial_{q_i^v} \mathcal{S}_0^v \right)^2 + \mathcal{W}^v(\mathbf{q}^v) = 0, \quad (2.7)$$

troviamo che

$$\frac{\mathcal{W}^v}{\mathcal{W}} = \frac{-\frac{1}{2m} \sum_{i=1}^n \left( \partial_{q_i^v} \mathcal{S}_0^v \right)^2}{-\frac{1}{2m} \sum_{i=1}^n \left( \partial_{q_i} \mathcal{S}_0 \right)^2} = \frac{\sum_{i=1}^n \left( \Lambda_i^j \partial_{q_i} \mathcal{S}_0 \right)^2}{\sum_{i=1}^n \left( \partial_{q_i} \mathcal{S}_0 \right)^2} = \frac{p^\dagger \Lambda^\dagger \Lambda p}{p^\dagger p} \quad (2.8)$$

e, più succintamente, definendo  $(p^v|p) := \frac{p^\dagger \Lambda^\dagger \Lambda p}{p^\dagger p}$  abbiamo

$$\mathcal{W}^v(\mathbf{q}^v) = (p^v|p) \mathcal{W}(\mathbf{q}). \quad (2.9)$$

Sottolineiamo che nel caso unidimensionale (2.9) si riduce a  $\mathcal{W}^v(q^v) = (\partial_{q^v} q)^2 \mathcal{W}(q)$ .

Questo risultato, ottenuto in [7], mostra che in meccanica classica non è possibile passare dal caso triviale  $\mathcal{W}^0 = 0$ , che presenta azione ridotta costante, ad un generico  $\mathcal{W} \neq 0$ , infatti  $\mathcal{W}^0$  è un punto fisso all'interno dello spazio delle funzioni che trasformano come differenziali quadratici.

## 2.3 Modifica della CSHJE

Per riuscire a conciliare la condizione  $\mathcal{S}_0^v(\mathbf{q}^v) = \mathcal{S}_0(\mathbf{q})$  con la teoria di Hamilton-Jacobi dobbiamo modificare la CSHJE e iniziamo esaminando le caratteristiche generali di questo formalismo.

Definiamo la funzione  $\mathcal{T}_0$  come la trasformata di Legendre di  $\mathcal{S}_0$ :

$$\mathcal{T}_0 = \sum q_k p_k - \mathcal{S}_0, \quad \mathcal{S}_0 = \sum q_k p_k - \mathcal{T}_0. \quad (2.10)$$

Se  $\mathcal{S}_0$  è la funzione generatrice dei momenti,  $\mathcal{T}_0$  è l'analogo per le coordinate

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{S}_0}{\partial q_i}, \quad q_i = \frac{\partial \mathcal{T}_0}{\partial p_i}. \quad (2.11)$$

Osserviamo che la dinamica resta invariata se aggiungiamo una costante a  $\mathcal{S}_0$  o  $\mathcal{T}_0$ , quindi in via del tutto generale l'equazione di Hamilton-Jacobi dipenderà della derivate di  $\mathcal{S}_0$  secondo la struttura

$$\mathcal{F}(\mathbf{q}, \mathcal{S}'_0, \mathcal{S}''_0, \dots) = 0 \quad (2.12)$$

che possiamo anche scrivere nella forma generale

$$\frac{1}{2m} \sum_{i=1}^n \left( \partial_{q_i} \mathcal{S}_0 \right)^2 + \mathcal{W}(\mathbf{q}) + Q(\mathbf{q}) = 0, \quad (2.13)$$

dove nel caso classico il termine aggiuntivo  $Q$ , introdotto appositamente per prevenire i problemi di cui sopra, si deve annullare.

## 2.4 Proprietà

Secondo la stessa linea di ragionamento di prima, non sarà più  $\mathcal{W}$  a trasformare come un differenziale quadratico, ma  $(\mathcal{W} + Q)$ , quindi in questo modo la trasformazione è data da

$$\mathcal{W}^v(\mathbf{q}^v) = (p^v|p)\mathcal{W}(\mathbf{q}) + (\mathbf{q}; \mathbf{q}^v), \quad (2.14)$$

dove  $(\mathbf{q}; \mathbf{q}^v)$  è un termine non omogeneo totalmente anonimo per il momento, e, affinché  $(\mathcal{W}^v + Q^v) = (p^v|p)(\mathcal{W} + Q)$  troviamo che il potenziale quantistico  $Q$  deve trasformare nel seguente modo:

$$Q^v(\mathbf{q}^v) = (p^v|p)Q(\mathbf{q}) - (\mathbf{q}; \mathbf{q}^v). \quad (2.15)$$

Notiamo *in primis* che (2.13) è soddisfatta in tutti i sistemi di riferimento:

$$\frac{1}{2m} \sum_{i=1}^n (\partial_{q_i} \mathcal{S}_0^v)^2 + \mathcal{W}^v(\mathbf{q}^v) + Q^v(\mathbf{q}^v) = (p^v|p) \left[ \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^n (\partial_{q_i} \mathcal{S}_0)^2 + \mathcal{W}(\mathbf{q}) + Q(\mathbf{q}) \right] = 0 \quad (2.16)$$

e *in secundis* che  $\mathcal{W}^0$  non è più un punto fisso grazie alla presenza del termine non omogeneo. Inoltre, questo fatto implica che  $\mathcal{W} = (\mathbf{q}^0; \mathbf{q})$ , cioè che tutti i possibili  $\mathcal{W}$  possono essere scritti in funzione del termine non omogeneo:

$$\mathcal{W}(\mathbf{q}) = (\mathbf{q}^0; \mathbf{q}). \quad (2.17)$$

## 2.5 Condizione di cociclo

Consideriamo la trasformazione di  $\mathcal{W}$  da un sistema A ad un sistema B

$$\mathcal{W}^b(\mathbf{q}^b) = (p^b|p^a)\mathcal{W}^a(\mathbf{q}^a) + (\mathbf{q}^a; \mathbf{q}^b) \quad (2.18)$$

e poi applichiamo l'inversa da B ad A

$$\mathcal{W}^a(\mathbf{q}^a) = (p^a|p^b) \left[ (p^b|p^a)\mathcal{W}^a(\mathbf{q}^a) + (\mathbf{q}^a; \mathbf{q}^b) \right] + (\mathbf{q}^b; \mathbf{q}^a) = \mathcal{W}^a(\mathbf{q}^a) + (p^a|p^b)(\mathbf{q}^a; \mathbf{q}^b) + (\mathbf{q}^b; \mathbf{q}^a). \quad (2.19)$$

Ovviamente, poiché effettuare una trasformazione e poi la sua inversa equivale all'operazione di identità, troviamo che

$$(\mathbf{q}^b; \mathbf{q}^a) = -(p^a|p^b)(\mathbf{q}^a; \mathbf{q}^b) \quad (2.20)$$

e banalmente abbiamo che

$$(\mathbf{q}; \mathbf{q}) = 0. \quad (2.21)$$

Nel caso unidimensionale (2.20) diventa

$$(q^b; q^a) = -(\partial_{q^a} q^b)^2 (q^a; q^b). \quad (2.22)$$

In generale richiediamo che passare da un sistema A ad un sistema C e poi ad un sistema B sia la stessa cosa di passare direttamente da A a B, quindi, in formule, confrontando

$$\mathcal{W}^b(\mathbf{q}^b) = (p^b|p^c) \left[ (p^c|p^a)\mathcal{W}^a(\mathbf{q}^a) + (\mathbf{q}^a; \mathbf{q}^c) \right] + (\mathbf{q}^c; \mathbf{q}^b) \quad (2.23)$$

con l'eq. (2.18) otteniamo la cosiddetta *condizione di cociclo*:

$$(\mathbf{q}^a; \mathbf{q}^c) = (p^c|p^b) \left[ (\mathbf{q}^a; \mathbf{q}^b) - (\mathbf{q}^c; \mathbf{q}^b) \right] \quad (2.24)$$

che nel caso unidimensionale diventa

$$(q^a; q^c) = (\partial_{q^c} q^b)^2 \left[ (q^a; q^b) - (q^c; q^b) \right]. \quad (2.25)$$

## 2.6 Simmetria di Moebius 1D

Nel caso unidimensionale se  $(f(q); q)$  soddisfa la condizione di cociclo, allora continua a soddisfarla anche se viene aggiunto un termine di cobordo

$$(f(q); q) \rightarrow (f(q); q) + (\partial_q f)^2 G(f(q)) - G(q). \quad (2.26)$$

Se stimato in  $q = 0$ , il valore di  $(Aq; q)$ , con  $A \neq 0 \in \mathbb{R}$ , non dipende da  $A$  e quindi abbiamo

$$0 = (q; q) = (q; q)|_{q=0} = (Aq; q)|_{q=0}. \quad (2.27)$$

Di conseguenza l'unica proprietà che  $G$  deve soddisfare è  $G(0) = 0$  affinché sia  $f(q)$  che (2.26) soddisfino (2.25). Sapendo che  $\mathcal{W} = (q^0; q)$  e  $q^0 = \mathcal{S}_0^{0^{-1}} \circ \mathcal{S}_0(q)$ , il termine non omogeneo deve necessariamente rispettare (2.12) e può fare ciò solo se dipende al più da derivate di  $q^0$ . Da questa osservazione ne deduciamo un vincolo sul termine di cobordo che viene quindi fissato:  $G(q^0) = 0 \implies G(q) = 0$ .

La dipendenza dalle derivate del primo argomento implica invarianza per traslazioni in entrambi gli argomenti:

$$(q^a + B; q^b) = (q^a; q^b) \stackrel{2.22}{=} (q^a; q^b + B). \quad (2.28)$$

Definendo  $h(A, q) = (Aq; q)$ , grazie a (2.28)  $h(A, q + B) = h(A, q)$  e quindi  $h$  non dipende da  $q$  e per (2.27) deduciamo che

$$(Aq; q) = 0 \stackrel{2.22}{=} (q; Aq). \quad (2.29)$$

Dalla condizione (2.25) abbiamo  $(q^a; Aq^b) = A^{-2}((q^a; q^b) - (Aq^b; q^b))$  e unendola a (2.29) troviamo che

$$(q^a; Aq^b) = A^{-2}(q^a; q^b) \quad (2.30)$$

e di conseguenza per (2.22) abbiamo invarianza per dilatazioni nel primo argomento:

$$(Aq^a; q^b) = (q^a; q^b). \quad (2.31)$$

Definendo  $f(q) = q^{-2}(q; q^{-1})$  troviamo che

$$f(q) = \frac{1}{q^2}(q; q^{-1}) \stackrel{2.22}{=} -\frac{q^4}{q^2}(q^{-1}; q) = -f(q^{-1}) \quad (2.32)$$

$$\implies 0 = f(q) + f(q^{-1}) = q^{-2}(q; q^{-1}) + q^2(q^{-1}; q) \quad \forall q \iff (q; q^{-1}) = 0 = (q^{-1}; q) \quad (2.33)$$

e dalla condizione di cociclo (2.25) abbiamo l'equazione  $(q^a; q^{b-1}) = q^{b^4}(q^a; q^b)$  grazie alla quale deduciamo l'invarianza per inversioni nel primo argomento

$$(q^{a-1}; q^b) = -(\partial_{q^b} q^{a-1})^2 (q^b; q^{a-1}) = -(\partial_{q^b} q^a)^2 (q^b; q^a) = (q^a; q^b). \quad (2.34)$$

Poiché traslazioni, dilatazioni e inversioni sono i generatori del gruppo di Moebius, da (2.28), (2.31), (2.30) e (2.34) ne segue

$$(\gamma(q^a); q^b) = (q^a; q^b) \quad (2.35)$$

e

$$(q^a; \gamma(q^b)) = (\partial_{q^b} \gamma(q^b))^{-2} (q^a; q^b), \quad (2.36)$$

dove

$$\gamma(q) = \frac{Aq + B}{Cq + D} \quad (2.37)$$

con  $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C})$ .

## 2.7 Il termine non omogeneo

Un oggetto che possiede simmetria di Moebius e inoltre rispetta la condizione di cociclo è la *derivata schwarziana*:

$$\{f(x), x\} = \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2} \left( \frac{f''}{f} \right)^2 \quad (2.38)$$

dove ' indica la derivata rispetto al secondo argomento.

Questa è l'unica soluzione a (2.25) come espresso dal seguente teorema:

**Teorema 1.** *La condizione di cociclo (2.25) definisce in maniera unica  $(q^a; q^b) = -k\{q^a, q^b\}$ , con  $k \in \mathbb{R}^+$ , a meno di un fattore moltiplicativo ed un termine di cobordo.*

**Dimostrazione:**

Senza perdere di generalità prendiamo in esame il caso di una trasformazione infinitesima  $q \rightarrow q + \epsilon f(q)$ . Dato che  $(q^a; q^b)$  dipende solo dalle derivate del suo primo argomento

$$(q + \epsilon f(q); q) = c_1 \epsilon f^{(k)}(q) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (2.39)$$

dove  $f^{(k)}(q) = \partial_q^k f(q)$ . È possibile fissare il valore di  $k$  dalle proprietà analizzate nella sezione precedente:

$$(Aq + A\epsilon f(q); Aq) = (q + \epsilon f(q); Aq) = A^{-2}(q + \epsilon f(q); q). \quad (2.40)$$

Definendo  $F(Aq) = Af(q)$  troviamo che

$$(Aq + A\epsilon f(q); Aq) = (Aq + \epsilon F(Aq); Aq) = c_1 \epsilon \partial_{Aq}^k F(Aq) = A^{1-k} c_1 \epsilon f^{(k)}(q) \quad (2.41)$$

e di conseguenza  $k = 3$ , di modo che

$$(q + \epsilon f(q); q) = c_1 \epsilon f^{(3)}(q) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (2.42)$$

A proposito, notiamo che al primo ordine lo sviluppo della derivata schwarziana è del tutto analoga:

$$\begin{aligned} \{q + \epsilon f(q), q\} &= \frac{\epsilon f^{(3)}}{1 + \epsilon f^{(1)}} - \frac{3}{2} \left( \frac{\epsilon f^{(2)}}{1 + \epsilon f^{(1)}} \right)^2 \\ &= \epsilon f^{(3)}(1 - \epsilon f^{(1)} + \mathcal{O}(\epsilon^2)) - \frac{3}{2} (\epsilon f^{(2)})^2 (1 - \epsilon f^{(1)} + \mathcal{O}(\epsilon^2))^2 \\ &= \epsilon f^{(3)} + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (2.43)$$

In generale la proprietà (2.40) deve valere anche per un generico termine di ordine  $\epsilon^n$  dello sviluppo di  $(Aq + A\epsilon f; Aq)$ :

$$c_{i_1 \dots i_n} \partial_{Aq}^{i_1} \epsilon F(Aq) \dots \partial_{Aq}^{i_n} \epsilon F(Aq) = c_{i_1 \dots i_n} \epsilon^n A^{n - \sum i_k} f^{(i_1)}(q) \dots f^{(i_n)}(q), \quad (2.44)$$

quindi per (2.40)

$$\sum_{k=1}^n i_k = n + 2. \quad (2.45)$$

Dal momento che  $(q^a; q^b)$  dipende dalle derivate di  $q^a$ , abbiamo il vincolo

$$i_k \geq 1 \quad k \in [1, n] \quad (2.46)$$

che implica due soli scenari possibili

$$i_k = 3, \quad i_j = 1, \quad j \in [1, n], j \neq k \quad \text{oppure} \quad i_k = i_j = 2, \quad i_l = 1, \quad l \in [1, n], l \neq j, l \neq k, j \neq k, \quad (2.47)$$

in modo tale che

$$(q + \epsilon f(q); q) = \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n (c_n f^{(3)} f^{(1)n-1} + d_n f^{(2)2} f^{(1)n-2}), \quad d_1 = 0. \quad (2.48)$$

Prendiamo ora in esame le trasformazioni fra tre sistemi A, B e C nella forma

$$q_y = v^{yx}(q_x) = q_x + \epsilon_{yx} q_x \quad (2.49)$$

e osserviamo che valgono le proprietà

$$v^{ab} = v^{ba^{-1}} \quad (2.50)$$

$$v^{ca} = v^{cb} \circ v^{ba}. \quad (2.51)$$

In generale, possiamo ricavare che

$$q^c = q^b + \epsilon^{cb}(q^b) \implies q^a + \epsilon^{ca}(q^a) = (q^a + \epsilon^{ba}(q^a)) + \epsilon^{cb}(q^b) \implies \epsilon^{ca}(q^a) = \epsilon^{ba}(q^a) + \epsilon^{cb}(q^b) \quad (2.52)$$

e adoperando il fatto che  $q^b = q^a + \epsilon^{ba}(q^a) = q^a - \epsilon^{ab}(q^b)$  vale la relazione

$$\epsilon^{ca}(q^a) = \epsilon^{ba}(q^a) + \epsilon^{cb}(q^b) = \epsilon^{cb}(q^b) - \epsilon^{ab}(q^b). \quad (2.53)$$

Dalla proprietà (2.51) con  $v^{yx} = \mathbb{1} + \epsilon^{yx}$  troviamo che

$$\epsilon^{ca} = (\mathbb{1} + \epsilon^{cb}) \circ (\mathbb{1} + \epsilon^{ba}) - \mathbb{1}, \quad (2.54)$$

dove con  $\mathbb{1}$  si indica l'identità.

Consideriamo il caso in cui  $\epsilon^{yx} = \epsilon f_{yx}(q^x)$  con  $\epsilon$  infinitesimo. Al primo ordine in  $\epsilon$  (2.54) diventa

$$\epsilon^{ca} = \epsilon^{cb} + \epsilon^{ba}. \quad (2.55)$$

Alla luce di quanto trovato possiamo riscrivere la condizione di cociclo come

$$c_1 \epsilon^{ac'''}(q^c) + \mathcal{O}^{ac}(\epsilon^2) = (1 + \epsilon^{bc'}(q^c))^2 (c_1 \epsilon^{ab'''}(q^b) + \mathcal{O}^{ab}(\epsilon^2) - c_1 \epsilon^{cb'''}(q^b) - \mathcal{O}^{cb}(\epsilon^2)), \quad (2.56)$$

la quale al primo ordine corrisponde a (2.55). Osserviamo che  $c_1 \neq 0$ , perché altrimenti al secondo ordine dovrebbe valere la relazione

$$\mathcal{O}^{ac}(\epsilon^2) = \mathcal{O}^{ab}(\epsilon^2) - \mathcal{O}^{cb}(\epsilon^2) \quad (2.57)$$

che porta ad un'incongruenza: da (2.48) abbiamo che

$$\mathcal{O}^{ab}(\epsilon^2) = c_2 \epsilon^{ab'''}(q^b) \epsilon^{ab'}(q^b) + d_2 \epsilon^{ab''2}(q^b) + \mathcal{O}^{ab}(\epsilon^3) \quad (2.58)$$

e andando a sostituire la (2.55) in (2.58) notiamo che comparirebbero dei termini composti dal prodotto di derivate di  $\epsilon^{xy}$  attinenti a trasformazioni diverse e quindi arriveremmo ad una relazione inconsistente con (2.57). Una soluzione possibile è  $(q^a; q^b) = 0$ , ma è esclusa dal principio di equivalenza (2.5) e di conseguenza  $c_1 \neq 0$ . Si potrebbe considerare il caso in cui i contributi fino ad un ordine  $n \geq 2$  siano tutti nulli, ma si esclude questa ipotesi con ragionamenti analoghi a quelli appena compiuti, dato che non è possibile conciliare la condizione di cociclo con la linearità di (2.55) in altra maniera, a meno che non si consideri  $(q^a; q^b)$  nullo.

Passiamo ora alla dimostrazione dell'unicità a meno di costante e termine di cobordo. Una volta definito

$$[q^a; q^b] := (q^a; q^b) - c_1 \{q^a, q^b\}, \quad (2.59)$$

notiamo che soddisfa la condizione di cociclo e che dipende dalle derivate di ordine maggiore o uguale al primo dato che  $(q^a; q^b)$  e  $\{q^a, q^b\}$  lo fanno. In analogia con  $(q + \epsilon f(q); q)$  troviamo che vale

$$[q + \epsilon f(q); q] = \tilde{c}_1 \epsilon f^{(3)}(q) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (2.60)$$

dove o  $\tilde{c}_1 \neq 0$  o  $[q + \epsilon f(q); q] = 0$ . Grazie a (2.42), (2.43) e (2.59) troviamo che  $\tilde{c}_1 = 0$  e di conseguenza  $[q + \epsilon f(q); q] = 0$ , quindi abbiamo finalmente definito in maniera univoca

$$(q^a; q^b) = -\frac{\hbar^2}{4m} \{q^a, q^b\} \quad (2.61)$$

dove abbiamo posto  $c_1 = -\frac{\hbar^2}{4m}$  in modo tale che venga rispettato il limite classico. Ci accorgiamo che questa è l'unica forma che può assumere il coefficiente  $c_1$  da un'analisi dimensionale:  $(q^a; q^b)$  ha necessariamente le dimensioni di un'energia, mentre  $\{q^a, q^b\}$  è una lunghezza alla  $-2$ , quindi, tenendo conto che  $c_1$  deve essere proporzionale ad una potenza positiva di  $\hbar$  per soddisfare il limite classico, scriviamo

$$\begin{aligned} [E] &= [c_1][\{q^a, q^b\}] = [c'_1][\hbar^n [L]^{-2}] = [c'_1][E]^n [T]^n [L]^{-2} \stackrel{mks}{=} [c'_1][E] \left( [M][L]^2 [T]^{-2} \right)^{n-1} [T]^n [L]^{-2} \\ &\implies n = 2, \quad [c'_1] = [M]^{-1} \end{aligned} \quad (2.62)$$

quindi scegliamo  $c'_1 = -\frac{1}{4m}$  dove le ragioni del fattore  $-\frac{1}{4}$  diventeranno ovvie più avanti.  $\square$

## 2.8 Formulazione QSHJE

Dalle equazioni (2.17) e (2.61)

$$\mathcal{W}(q) = -\frac{\hbar^2}{4m} \{q^0, q\} \quad (2.63)$$

e, valendo la relazione

$$\left( \frac{\partial \mathcal{S}_0}{\partial q} \right)^2 = \frac{\hbar^2}{2} \left( \{e^{\frac{2i}{\hbar} \mathcal{S}_0}, q\} - \{\mathcal{S}_0, q\} \right), \quad (2.64)$$

possiamo ottenere a partire da (2.13)

$$Q(q) = \frac{\hbar^2}{4m} \left( \{\mathcal{S}_0, q\} - \{e^{\frac{2i}{\hbar} \mathcal{S}_0}, q\} + \{q^0, q\} \right), \quad (2.65)$$

Nel caso triviale  $\mathcal{W}^0$  troviamo la correzione

$$Q(q^0) = \frac{\hbar^2}{4m} \left( \{\mathcal{S}_0^0, q^0\} - \{e^{\frac{2i}{\hbar} \mathcal{S}_0^0}, q^0\} \right). \quad (2.66)$$

Resta da determinare solo  $q_0$  oppure  $\mathcal{S}_0^0$  dalla quale possiamo dedurre  $q_0$ . L'unica possibilità che abbiamo è

$$q^0 = \frac{A e^{\frac{2i}{\hbar} \mathcal{S}_0} + B}{C e^{\frac{2i}{\hbar} \mathcal{S}_0} + D}, \quad (2.67)$$

di conseguenza, per simmetria di Moebius e per (2.63)

$$\mathcal{W}(q) = -\frac{\hbar^2}{4m} \{e^{\frac{2i}{\hbar} \mathcal{S}_0}, q\} \quad (2.68)$$

e per (2.65)

$$Q(q) = \frac{\hbar^2}{4m} \{\mathcal{S}_0, q\}. \quad (2.69)$$

Sulla base di ciò, l'equazione che stavamo cercando, in sigla QSHJE (*Quantum Stationary Hamilton-Jacobi Equation*), è

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial \mathcal{S}_0}{\partial q} \right)^2 + V(q) - E + \frac{\hbar^2}{4m} \{\mathcal{S}_0, q\} = 0. \quad (2.70)$$

### Unicità della soluzione

Ipotizziamo per assurdo che il potenziale quantistico contenga un altro generico termine

$$Q(q) = \frac{\hbar^2}{4m} \{\mathcal{S}_0, q\} - g(q) \quad (2.71)$$

e quindi anche che

$$\mathcal{W}(q) = -\frac{\hbar^2}{4m} \{e^{\frac{2i}{\hbar}\mathcal{S}_0}, q\} + g(q). \quad (2.72)$$

Imponendo che pure (2.71) rispetti il limite classico abbiamo

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \frac{\hbar^2}{4m} \{\mathcal{S}_0, q\} - g(q) = \lim_{\hbar \rightarrow 0} \frac{\hbar^2}{4m} \{\mathcal{S}_0^{cl}, q\} - g^{cl}(q) = -g^{cl}(q), \quad (2.73)$$

dove stiamo considerando casi in cui  $\{\mathcal{S}_0^{cl}, q\}$  sia definito, cioè  $\mathcal{S}_0^{cl} \neq \text{cost.}$  Troviamo che necessariamente

$$g^{cl}(q) = 0 \quad \forall q. \quad (2.74)$$

Evidenziamo il fatto che sotto VT  $\{\mathcal{S}_0, q\}$  trasforma come (2.14) e quindi  $g$  deve per forza trasformare come un differenziale quadratico e l'unico modo in cui possiamo costruirlo è

$$g(q) = \frac{1}{4m} (\partial_q \mathcal{S}_0)^2 G(\mathcal{S}_0), \quad (2.75)$$

dove  $G$  è una funzione di  $\mathcal{S}_0$ . Osserviamo che da un lato non è possibile costruire  $g(q)$  sfruttando derivate superiori dell'azione ridotta in quanto questa non trasformerebbe più come un differenziale quadratico, dall'altro imponendo (2.12) non possiamo avere termini che dipendano direttamente da  $\mathcal{S}_0$  e quindi  $G(\mathcal{S}_0) = c$  dove  $c$  è una costante adimensionale. Notiamo inoltre che per ragioni dimensionali  $g(q)$  non può dipendere da  $\hbar$  e per coerenza con il limite classico (2.74) necessariamente

$$g(q) = 0 \quad (2.76)$$

e ciò vale in ogni sistema di riferimento in quanto  $g^v(q^v) = (\partial_q q^v)^{-2} g(q)$ .

## 2.9 Implicazione della SE

È possibile mostrare che una soluzione della QSHJE permette di risolvere automaticamente l'equazione di Schroedinger (SE). Partiamo dalle identità

$$\frac{\partial}{\partial x} h^{1/2} h'^{-1/2} = 0 = \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{h'} \frac{\partial}{\partial x} h^{1/2} h'^{-1/2} h. \quad (2.77)$$

Grazie a queste possiamo dedurre che  $h'^{-1/2}$  e  $h'^{-1/2} h$  siano i generatori del nucleo dell'operatore lineare

$$h^{1/2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{h'} \frac{\partial}{\partial x} h^{1/2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \{h, x\}, \quad (2.78)$$

cioè

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \{h, x\} \right) \frac{1}{h^{1/2}} (Ah + B) = 0 \quad (2.79)$$

è sempre soddisfatta. Notiamo che se  $h$  è il rapporto tra due elementi linearmente indipendenti del nucleo di un operatore lineare  $(\partial_x^2 + V(x))$  allora  $\{h, x\} = 2V(x)$ . Per questo, data un soluzione  $\mathcal{S}_0$  di (2.70) e ponendo  $h = e^{\frac{2i}{\hbar}\mathcal{S}_0}$ , troviamo che

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{S}'_0}} (Ae^{\frac{i}{\hbar}\mathcal{S}_0} + Be^{-\frac{i}{\hbar}\mathcal{S}_0}) \quad (2.80)$$

risolve la SE e, inoltre, dette  $\psi$  e  $\psi^D$  due soluzioni linearmente indipendenti della SE, la mappa trivializzante è data da

$$e^{\frac{2i}{\hbar}\mathcal{S}_0} = \frac{\psi}{\psi^D} =: w. \quad (2.81)$$

## 2.10 Fenomenologia della MQ

È possibile recuperare dalla QSHJE alcuni risultati fondamentali, osservati sperimentalmente, della meccanica quantistica quali effetto tunnel, quantizzazione dell'energia e l'indefinitezza delle traiettorie. Sottolineiamo che tutti i risultati seguenti sono stati ottenuti senza mai interpretare la funzione come ampiezza di probabilità, in accordo con [3].

### Effetto tunnel

L'effetto tunnel consiste nella possibilità di localizzare una particella anche dove classicamente è proibito, cioè dove  $V(q) - E > 0$ . L'introduzione del potenziale quantistico  $Q$  implica che il momento  $p$  non sia più uguale a  $\sqrt{2m(E - V(q))}$ , ma

$$p = \partial_q \mathcal{S}_0 = \sqrt{2m(E - V(q) - Q(q))} \quad (2.82)$$

perciò  $p$  può restare reale anche nella regione classicamente proibita  $\Omega = \{q | E - V(q) > 0\}$ . Si può dimostrare che effettivamente  $p$  è una funzione reale  $\forall q$ , ma per ottenere l'effetto tunnel bisogna verificare che anche  $\dot{q}$  sia sempre reale.

Variando  $\mathcal{S}$  rispetto a tempo ed energia troviamo

$$\delta \mathcal{S} = \frac{\partial \mathcal{S}_0}{\partial E} \delta E - (t - t_0) \delta E + E \delta t \quad (2.83)$$

e imponendo il principio di Hamilton segue il teorema di Jacobi:

$$t - t_0 = \frac{\partial \mathcal{S}_0}{\partial E}. \quad (2.84)$$

Tale teorema offre quindi un modo di parametrizzare il tempo, perciò invertendo rispetto a  $q$  si ottiene la traiettoria  $q(t)$ . Adoperando la QSHJE, possiamo scrivere

$$t - t_0 = \frac{\partial}{\partial E} \int_{q_0}^q dx \frac{\partial \mathcal{S}_0}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial E} \int_{q_0}^q dx \sqrt{2m(E - V - Q)} = \left(\frac{m}{2}\right)^{1/2} \int_{q_0}^q dx \frac{1 - \partial_E Q}{\sqrt{E - V - Q}} \quad (2.85)$$

dove  $q_0 = q(t_0)$ . La velocità, di conseguenza, è data da

$$\frac{dq}{dt} = \left(\frac{dt}{dq}\right)^{-1} = \frac{\partial_q \mathcal{S}_0}{m(1 - \partial_E(V + Q))} = \frac{p}{m(1 - \partial_E Q)} \quad (2.86)$$

e non da  $\dot{q} = p/m$ . Derivando la QSHJE rispetto all'energia  $E$  troviamo

$$\partial_E Q = 1 - \frac{p}{m} \partial_E p, \quad (2.87)$$

quindi la velocità è legata al momento dalla relazione

$$\dot{q} = \frac{1}{\partial_E p} \quad (2.88)$$

e se  $p$  è una funzione reale, in particolare in  $\Omega$ , lo sarà pure  $\dot{q}$ .

### Quantizzazione dell'energia

L'equazione (2.70) può essere riscritta nella forma

$$\{w, q\} = -\frac{4m}{\hbar^2} \mathcal{W}(q) \quad (2.89)$$

e affinché in questa equazione sia definita la derivata schwarziana bisogna richiedere che

$$w \neq \text{cost}, w \in C^2(\mathbb{R}) \text{ e } \partial_q^2 w \text{ differenziabile su } \mathbb{R}. \quad (2.90)$$

Queste condizioni sono condizioni di esistenza della QSHJE e poiché quest'ultima deriva dal principio di equivalenza, allora possiamo dire che è proprio da questo che discendono i requisiti che stiamo considerando. Osserviamo che ci sono altre due equazioni che il principio di equivalenza implica:

- da proprietà della derivata schwarziana (2.22) vale

$$\{w, q\} = \left( \frac{\partial w}{\partial q} \right)^2 \{q, w\}, \quad (2.91)$$

che è definita se e solo se  $\partial_q w \neq 0 \forall q \in \mathbb{R}$ ;

- dalla condizione di cociclo (2.25) abbiamo che  $\{w, q^{-1}\} = q^4 \{w, q\}$  e quindi

$$\{w, q^{-1}\} = -\frac{4m}{\hbar^2} q^4 \mathcal{W}(q) \quad (2.92)$$

che è anch'essa equivalente alla (2.89).

Notiamo che, per effetto della trasformazione  $q \rightarrow \frac{1}{q}$ ,  $0^\pm$  viene mappato in  $\pm\infty$  e di conseguenza le condizioni (2.90) devono essere estese a  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ . Sottolineiamo che i sistemi fisici restano definiti su  $\mathbb{R}$ , infatti è il principio di equivalenza che ci costringe ad imporre le condizioni ad infinito. Riscriviamo (2.90) come

$$w \neq \text{cost}, w \in C^2(\mathbb{R}^*) \text{ e } \partial_q^2 w \text{ differenziabile su } \mathbb{R}^*. \quad (2.93)$$

Da (2.92) osserviamo che bisogna estendere a  $\mathbb{R}^*$  anche l'univalenza, quindi imponiamo che

$$w(-\infty) = \begin{cases} w(+\infty), & \text{se } w(-\infty) \neq \pm\infty \\ -w(+\infty), & \text{se } w(-\infty) = \pm\infty \end{cases} \quad (2.94)$$

e perciò  $w$  è un auto-omeomorfismo di  $\mathbb{R}^*$  su se stesso. Evidenziamo quindi che dalle condizioni (2.93) e (2.94) dedotte dal principio di equivalenza otteniamo le seguenti condizioni sulle funzioni d'onda:

$$(\psi, \psi^D) \text{ continue e } (\psi', \psi^{D'}) \text{ differenziabili.} \quad (2.95)$$

Quest'ultime sono le stesse richieste nell'interpretazione di Copenhagen della meccanica quantistica, interpretazione in cui tali requisiti discendono dal fatto che le funzioni d'onda sono ampiezza di probabilità e quindi elementi di  $L^2(\mathbb{R})$ , non condizioni di esistenza obbligate direttamente da un'equazione.

Nel caso in cui  $\lim_{q \rightarrow \pm\infty} \mathcal{W} > 0$  la funzione d'onda deve annullarsi all'infinito ed è da questo fatto che segue la quantizzazione dello spettro, poi, imponendo la continuità, lo spettro energetico viene ulteriormente selezionato, come si può notare nel caso delle buche di potenziale. Si può dimostrare quanto segue

**Teorema 2.** *Se*

$$\mathcal{W}(q) \geq \begin{cases} P_-^2 > 0, & q < q_- \\ P_+^2 > 0, & q > q_+ \end{cases} \quad (2.96)$$

dove  $q_-$  e  $q_+$  sono i punti minimo e massimo dove  $\mathcal{W}$  cambia segno, allora  $w$  è localmente un auto-omeomorfismo su  $\mathbb{R}^*$  se e solo se l'equazione di Schroedinger corrispondente ammette una soluzione  $L^2(\mathbb{R})$ .

In base a questo teorema dal momento che la QSHJE è definita se e solo se  $w$  è un auto-omeomorfismo, la quantizzazione dell'energia è una conseguenza diretta della QSHJE senza bisogno di ricorrere ad un'interpretazione probabilistica della funzione d'onda.

Prendendo in esame il caso di una particella 1D in una buca di potenziale lunga  $L$ , notiamo che il suo spettro di energia, dato da

$$E = \frac{\hbar^2 n^2}{8mL^2} \quad (2.97)$$

con  $n \in \mathbb{N}^+$ , è legato alle dimensioni della buca, quindi lo spettro energetico di una particella libera viene determinato in maniera analoga dalla struttura del nostro spazio tridimensionale. Ipotizziamo, perciò, che questo spettro sia proporzionale a  $R^{-2}$ , dove  $R$  è una lunghezza cosmologica caratteristica, e che di conseguenza la spaziatura tra i vari livelli sia incredibilmente ridotta.

### Impossibilità di definizione delle traiettorie

Per quanto trattato finora potrebbe sembrare che la QSHJE, insieme al teorema di Jacobi (2.84), fornisca la possibilità di definire esattamente le traiettorie e ciò non è consistente con la natura probabilistica della meccanica quantistica, però nel caso di spettri discreti chiaramente non è più possibile effettuare una variazione rispetto all'energia come in (2.83) e di conseguenza (2.84) non è ben definita e non si può più adoperare come parametrizzazione del tempo. Adesso mostreremo come all'interno di uno spazio compatto la QSHJE sia definita solo per spettri discreti e quindi come il caso continuo risulti essere solo un limite. Senza perdita di generalità prendiamo in esame il caso unidimensionale in cui il potenziale tende a zero per  $q \gg 1$ . Per  $q \gg 1$  due soluzioni dell'equazione di Schroedinger linearmente indipendenti sono

$$\psi = \sin(kq), \quad \psi^D = \cos(kq) \quad (2.98)$$

e quindi

$$w = \tan(kq). \quad (2.99)$$

La funzione  $w$  è localmente un omeomorfismo per distanze finite, ma non è più così andando a considerare tutto l'asse reale. Per esempio, nel caso della particella libera in una buca di potenziale infinita, grazie alle condizioni al contorno lo spettro di energia è dato da (2.97), quindi finché  $L$  è finito lo spettro è discreto. Per il teorema (2) concludiamo che la condizione di cociclo seleziona lo spettro energetico e lo rende discreto all'interno di spazio compatti e quindi necessariamente non è più ammesso variare l'energia in modo continuo.

Possiamo proporre altri modi di parametrizzare il tempo che tengano conto della discretezza dello spettro. Considerando il rapporto incrementale tra livelli energetici contigui invece della derivata abbiamo

$$t_n = \frac{\mathcal{S}_0(E_{n+1}) - \mathcal{S}_0(E_n)}{E_{n+1} - E_n}. \quad (2.100)$$

Osserviamo che questa definizione implicherebbe una sovrapposizione tra autostati dell'energia mostrando una connessione tra tempo e interferenza, fenomeno alla base della meccanica quantistica. Ricercando una definizione più intrinseca, possiamo provare a legare il tempo alla funzione d'onda stessa. Possiamo scrivere  $t_\psi = t(\psi)$ , perché da (2.100) abbiamo  $t = t(E)$  e sapendo che  $\psi$  dipende da  $E$  ci basta invertire, trovando  $E = E(\psi)$ , e sostituire per ottenere la relazione cercata.

Consideriamo

$$\psi(q, t) = \sum_k c_k e^{-\frac{i}{\hbar} E_k t} \psi_k(q), \quad (2.101)$$

dove le  $\psi_k$  sono autofunzioni dell'hamiltoniano

$$H\psi_k = E_k\psi_k \quad (2.102)$$

e possono essere normalizzate in modo tale che assumano solo valori reali. Integrando su  $\mathbb{R}$  il prodotto di (2.101) per  $\psi_n$  troviamo

$$t_\psi = \frac{i\hbar}{E_n} \left( \ln \int_{\mathbb{R}} \psi \psi_n dq - \ln \int_{\mathbb{R}} \psi(q, 0) \psi_n dq \right), \quad (2.103)$$

nella quale specifichiamo che  $t_\psi$  è il tempo percepito dall'osservatore.



## Capitolo 3

# Equazione di H-J quantistica 3D

Facendo riferimento a [4], andiamo a ricercare la generalizzazione al caso tridimensionale dell'equazione (2.70), in sigla QHJE (*Quantum Hamilton-Jacobi Equation*), con hamiltoniana che però dipende esplicitamente dal tempo. Sfruttando il legame insito tra l'equazione di Hamilton-Jacobi e quella di Schroedinger, come illustrato in (2.10), possiamo adempiere al nostro obiettivo e perciò scegliamo come *ansatz*

$$\psi(q, t) = R(q, t)e^{\frac{i}{\hbar}S(q, t)}, \quad (3.1)$$

dove  $R(q, t)$  è una funzione reale. Inserendo (3.1) nell'equazione di Schroedinger dipendente dal tempo

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = H(q, t)\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V(q, t)\psi \quad (3.2)$$

troviamo

$$\left(-\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial t} + i\hbar\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial t}\right)\psi = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\nabla^2 R}{R} + \frac{1}{2m}(\nabla\mathcal{S})^2 + V\right]\psi - \frac{i\hbar}{m}\left[\frac{\nabla R \cdot \nabla\mathcal{S}}{R} + \frac{1}{2}\nabla^2\mathcal{S}\right]\psi \quad (3.3)$$

e quindi distinguendo parte reale da quella immaginaria abbiamo un sistema formato dalle seguenti equazioni:

$$\frac{1}{2m}(\nabla\mathcal{S})^2 + V - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\nabla^2 R}{R} = -\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial t}, \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial R^2}{\partial t} + \frac{1}{m}\nabla \cdot (R^2\nabla\mathcal{S}) = 0. \quad (3.5)$$

Osserviamo che (3.4) è l'equazione che stavamo cercando con potenziale quantistico

$$Q = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\nabla^2 R}{R}, \quad (3.6)$$

mentre la formula (3.5) è un'equazione di continuità che lega  $R$  ed  $\mathcal{S}$ . Notiamo che ovviamente non abbiamo più a che fare con un'unica equazione, ma con due e ciò è dovuto all'introduzione della funzione  $R$  che necessita di una relazione affinché possa essere determinata. Nel caso stazionario unidimensionale la soluzione per  $R$  è banale e ci riconduce alla (2.70):

$$\frac{1}{2m}(\partial_q\mathcal{S}_0)^2 + V - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial_q^2 R}{R} = E, \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial q}(R^2\partial_q\mathcal{S}_0) = 0. \quad (3.8)$$

Integrando la seconda equazione troviamo

$$R^2\partial_q\mathcal{S}_0 = k \implies R = \frac{1}{\sqrt{\partial_q\mathcal{S}_0}} \quad (3.9)$$

con  $k$  costante reale che poniamo uguale ad 1. Inserendo (3.9) in (3.6) ritroviamo la derivata schwarziana e quindi ci siamo ricondotti all'equazione (2.70).

## La QHJE come un'unica equazione

Definiamo i campi vettoriali  $\mathcal{E}$  e  $\mathcal{B}$  in analogia con i campi elettrico e magnetico

$$\nabla \cdot \mathcal{E} = 4\pi R^2, \quad (3.10)$$

$$\nabla \times \mathcal{B} - \frac{1}{c_\psi} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{mc_\psi} R^2 \nabla \mathcal{S}, \quad (3.11)$$

dove  $c_\psi$  è una costante con le dimensioni di una velocità e rispetto alle equazioni di Maxwell abbiamo effettuato la sostituzione

$$\rho = R^2, \quad j = \frac{1}{m} R^2 \nabla \mathcal{S}. \quad (3.12)$$

Osserviamo che l'equazione di continuità in questo modo è automaticamente soddisfatta

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\nabla \cdot \mathcal{E}}{4\pi} \right) + \frac{1}{m} \frac{mc_\psi}{4\pi} \nabla \cdot \left( \nabla \times \mathcal{B} - \frac{1}{c_\psi} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \right) = 0 \quad (3.13)$$

e inoltre notiamo che vale la seguente libertà di gauge

$$\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B} + \nabla a + \frac{\partial b}{\partial t}, \quad (3.14)$$

$$\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} + \nabla \times b, \quad (3.15)$$

dove  $a$  e  $b$  sono rispettivamente un campo scalare ed uno vettoriale.

Si noti che nel caso di una particella carica descritta dalla funzione d'onda  $\psi$ ,  $\mathcal{E}$  e  $\mathcal{B}$  sono fissati a meno della libertà di gauge. In seguito ad una misura della posizione di tale particella la funzione d'onda collassa ed è possibile collocare nello spazio la particella. In questo caso (3.10) e (3.11) ricordano due delle equazioni di Maxwell.

Dividendo (3.11) per (3.10) e moltiplicando entrambi i membri per  $mc_\psi$  troviamo il momento in termini dei campi ausiliari

$$\nabla \mathcal{S} = m \frac{c_\psi \nabla \times \mathcal{B} - \partial_t \mathcal{E}}{\nabla \cdot \mathcal{E}} = m \frac{4\pi j}{\nabla \cdot \mathcal{E}}, \quad (3.16)$$

però notando che  $\psi = R e^{\frac{i}{\hbar} \mathcal{S}}$  dovrebbe essere a singolo valore su ogni curva chiusa  $\gamma$ , in generale  $\mathcal{S}$  potrebbe essere polidroma e ciò implica la condizione di quantizzazione

$$\oint_\gamma \nabla \mathcal{S} \cdot dx = 2\pi n \hbar, \quad (3.17)$$

dove  $n \in \mathbb{Z}$ , che si traduce in una condizione sulla massa

$$m = \frac{2\pi n \hbar}{\oint_\gamma \frac{c_\psi \nabla \times \mathcal{B} - \partial_t \mathcal{E}}{\nabla \cdot \mathcal{E}} \cdot dx}. \quad (3.18)$$

Riscrivendo il potenziale quantistico in funzione di  $\mathcal{E}$  e  $\mathcal{B}$ , troviamo, a meno di una costante moltiplicativa,

$$\frac{\nabla^2 R}{R} = \frac{1}{R} \nabla \cdot \left( \frac{\nabla R^2}{2R} \right) = \frac{\nabla^2(R^2)}{2R^2} + \frac{1}{2R} \nabla R^2 \cdot \nabla \left( \frac{1}{R} \right) = \frac{\nabla^2(R^2)}{2R^2} - \frac{1}{4} \left( \frac{\nabla(R^2)}{R^2} \right), \quad (3.19)$$

quindi sostituendo il primo membro di (3.10) in quest'ultima equazione abbiamo

$$\frac{\nabla^2 R}{R} = \frac{1}{2} [\mathcal{E}, x] \quad \text{con} \quad [\mathcal{E}, x] := \frac{\nabla^2(\nabla \cdot \mathcal{E})}{\nabla \cdot \mathcal{E}} - \frac{1}{2} \left[ \frac{\nabla(\nabla \cdot \mathcal{E})}{\nabla \cdot \mathcal{E}} \right]^2. \quad (3.20)$$

Nel caso stazionario unidimensionale, avevamo trovato che  $\frac{\nabla^2 R}{R} = -\{\mathcal{S}_0, x\}$ , quindi l'equazione (3.20) sembrerebbe suggerire una possibile generalizzazione della derivata schwarziana in tre dimensioni:

$$\{f, x\} := \frac{\nabla^2(\nabla \cdot f)}{\nabla \cdot f} - \frac{3}{2} \left[ \frac{\nabla(\nabla \cdot f)}{\nabla \cdot f} \right]^2 \quad (3.21)$$

dove  $f$  è un campo vettoriale su  $\mathbb{R}^3$ . Considerando un campo  $g$  tale che  $(\nabla \cdot g)(\nabla \cdot f) = \text{cost} \neq 0$ , troviamo che

$$[g, x] = -\{f, x\}. \quad (3.22)$$

Inoltre, in più dimensioni la derivata schwarziana ammette la seguente scomposizione

$$\{f, x\} = \sum_{i=1}^n (h, x_i) \quad (3.23)$$

con  $h = \nabla \cdot f$  e

$$(h, x_i) := \frac{\partial_{x_i}^2 h}{h} - \frac{3}{2} \left( \frac{\partial_{x_i} h}{h} \right)^2. \quad (3.24)$$

Sostituendo (3.16) e (3.20) in (3.4), otteniamo

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} + \frac{8m\pi^2 j^2}{(\nabla \cdot \mathcal{E})^2} + V - \frac{\hbar^2}{4m} [\mathcal{E}, q] = 0 \quad (3.25)$$

che nel caso stazionario diventa

$$\frac{mc_\psi^2}{2} \left( \frac{\nabla \times \mathcal{B}}{\nabla \cdot \mathcal{E}} \right)^2 + V - E - \frac{\hbar^2}{4m} [\mathcal{E}, q] = 0, \quad (3.26)$$

dove abbiamo applicato la sostituzione  $j \rightarrow \frac{c_\psi}{4\pi} \nabla \times \mathcal{B}$  e, calcolando il gradiente di (3.25), abbiamo l'equazione di Hamilton-Jacobi quantistica in tre dimensioni

$$\frac{\partial j}{\partial t} (\nabla \cdot \mathcal{E}) - j \frac{\partial \nabla \cdot \mathcal{E}}{\partial t} + 2\pi \nabla(j^2) - 4\pi j^2 \frac{\nabla(\nabla \cdot \mathcal{E})}{\nabla \cdot \mathcal{E}} + \frac{(\nabla \cdot \mathcal{E})^2}{4m\pi} \nabla V - \frac{\hbar^2 (\nabla \cdot \mathcal{E})^2}{16m^2\pi} \nabla [\mathcal{E}, q] = 0. \quad (3.27)$$

Abbiamo quindi trovato il modo di esprimere l'equazione di Hamilton-Jacobi in termini di una singola formula, seppure molto complessa, dipendente solo dai campi  $\mathcal{E}$  e  $\mathcal{B}$ .



# Conclusioni

In questa tesi abbiamo osservato come un'equazione puramente classica, che però mette in luce strutture altrimenti inedite della meccanica, crei un ponte con la fisica quantistica. Abbiamo formulato un principio di equivalenza che regolasse le proprietà per trasformazione dell'azione ridotta  $\mathcal{S}_0$  e da questo abbiamo derivato la condizione di cociclo che ci ha permesso di dedurre sia l'esistenza che la forma del potenziale quantistico  $Q$ . Caratteristica fondamentale della trattazione è che non appoggiandoci mai all'interpretazione di Copenhagen siamo stati in grado di derivare i tratti distintivi della meccanica quantistica, come, per esempio, la quantizzazione dell'energia.

Generalizzando poi al caso tridimensionale abbiamo dimostrato che, nonostante in apparenza possa sembrare che per definire l'equazione di Hamilton-Jacobi servano due relazioni, in realtà è possibile ricondursi ad un'unica formula, anche se abbastanza intricata. Per fare ciò abbiamo sfruttato dei campi vettoriali definiti in analogia con le equazioni di Maxwell di modo che l'equazione di continuità che era spuntata fuori fosse automaticamente soddisfatta. L'introduzione di questi campi ci ha inoltre permesso di generalizzare la derivata schwarziana sfruttando la corrispondenza con il potenziale quantistico unidimensionale.



# Bibliografia

- [1] A. E. Faraggi and M. Matone, “Quantum mechanics from an equivalence principle,” *Phys. Lett. B* **450** (1999), 34-40 doi:10.1016/S0370-2693(99)00113-6 [arXiv:hep-th/9705108 [hep-th]].
- [2] A. E. Faraggi and M. Matone, “The Equivalence postulate of quantum mechanics,” *Int. J. Mod. Phys. A* **15** (2000), 1869-2017 doi:10.1142/S0217751X00000811 [arXiv:hep-th/9809127 [hep-th]].
- [3] A. E. Faraggi and M. Matone, “Energy Quantisation and Time Parameterisation,” *Eur. Phys. J. C* **74** (2014), 2694 doi:10.1140/epjc/s10052-013-2694-1 [arXiv:1211.0798 [hep-th]].
- [4] M. Matone, in preparation.
- [5] J. Masoliver and A. Ros. “From Classical to Quantum Mechanics through Optics”. *Eur. J. Phys.* **31** (2010) 171-192. doi: 10.1088/0143-0807/31/1/016. arXiv: 0909.3258 [physics.hist-ph].
- [6] B. Houchmandzadeh. “The Hamilton-Jacobi equation: an intuitive approach”. doi: 10.1119/10.0000781. arXiv: 1910.09414 [physics.class-ph].
- [7] G. Bertoldi, A. E. Faraggi and M. Matone, “Equivalence principle, higher dimensional Mobius group and the hidden antisymmetric tensor of quantum mechanics,” *Class. Quant. Grav.* **17** (2000), 3965 doi:10.1088/0264-9381/17/19/302 [arXiv:hep-th/9909201 [hep-th]].