

Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI FISICA E ASTRONOMIA "GALILEO GALILEI"
Corso di Laurea in Fisica

TESI DI LAUREA

I modi quasi-normali dei buchi neri

Laureando:
Andrea Grigoletto
Matricola 1072936

Relatore:
Prof. Gianguido Dall'Agata

Anno Accademico 2015-2016

Indice

Introduzione	III
1 Le Simmetrie	1
1.1 Gruppi ed Algebre di Lie	2
1.2 Simmetrie dinamiche ed Algebre di degenerazione	5
1.2.1 Problema di Coulomb in sei dimensioni	6
1.3 Algebre Dinamiche	9
1.3.1 Il potenziale di Pöschl–Teller	9
2 I modi quasi-normali dei buchi neri	13
2.1 Dai modi normali ai modi quasi-normali	13
2.2 Teoria perturbativa sulla metrica dei buchi neri	14
2.2.1 Perturbazioni gravitazionali per la metrica di Schwarzschild	17
2.2.2 Perturbazioni gravitazionali per la metrica di Kerr	19
2.3 Analisi mediante la funzione di Green	20
2.4 Analisi mediante il metodo WKB	25
2.5 Analisi mediante le Algebre Dinamiche	28
2.6 Analisi mediante il metodo della frazione continua	30
3 Dai modi quasi-normali al ringdown	33
3.1 Collisione di due buchi neri	33
3.2 Analisi dell’evento GW150914	34
3.2.1 Approccio perturbativo	34
3.2.2 Stima di massa e momento angolare del buco nero	36
Bibliografia	41

Introduzione

Da un secolo la Relatività Generale continua ad affascinare generazioni di fisici, proponendosi come uno dei capisaldi della Fisica Teorica odierna. Se da un lato la sua semplicità nella forma non può lasciare indifferenti, dall'altro troviamo la storia di una Teoria i cui progressi sono risultati lenti negli anni a causa della complessità della materia trattata. Basti pensare allo studio delle sue soluzioni esatte: dopo la pubblicazione delle equazioni di Einstein nella loro forma definitiva, avvenuta nel 1915, fu Schwarzschild nel 1916 a trovare per primo l'espressione della metrica in presenza di un corpo massivo, privo di carica e non rotante. Per il caso meno banale, invece, in cui questo sia in rotazione, si è dovuto attendere quasi cinquant'anni, con i risultati ottenuti da Kerr nel 1963. Assieme allo studio delle soluzioni esatte, la Relatività Generale ha portato alla luce la presenza di oggetti straordinariamente misteriosi quanto semplici: i buchi neri.

I buchi neri sono forse l'apice di una Teoria così elegante; costruiti con i soli concetti di spazio e tempo, sfidano ancora oggi le nostre conoscenze. Sono necessari solo tre parametri per spiegarne la struttura: massa, carica e momento angolare ed è certamente questa una delle loro caratteristiche più particolari. Tuttavia, nonostante la loro semplicità, la descrizione della loro dinamica risulta fortemente ostacolata dalla manifesta non linearità delle equazioni di Einstein. Per questo motivo negli anni '50 si è avviato il loro studio, grazie a Regge e Wheeler [6], in ambito perturbativo. Se si fosse trovato che la risposta di un buco nero alla presenza di una perturbazione provoca un aumento esponenziale di quest'ultima è ovvio, infatti, che tali oggetti non sarebbero altro che soluzioni instabili delle equazioni di Einstein. Pertanto, a livello astrofisico, sarebbero di importanza relativa poiché descriverebbero al più una possibile fase transiente nella vita di una stella o un eventuale altro corpo celeste. Per quanto paradossale possa sembrare, invece, ci troviamo oggi ad avere la prima verifica diretta della loro esistenza grazie anche ai risultati ottenuti da questi studi. Studi che, tra l'altro, hanno poi portato contributi notevoli nella descrizione di diversi fenomeni, dalla radiazione emessa dal collasso di oggetti quasi sferici a quella emessa da corpi che cadono in un buco nero.

La particolarità dell'approccio perturbativo è che, come vedremo, permette di descrivere il comportamento dei buchi neri in modo semplice; si trova infatti che alla presenza di un generico campo Ψ il sistema risponde producendo delle onde caratteristiche con frequenze

ben determinate. La dissipazione insita a causa dell'orizzonte degli eventi, tuttavia, rende il problema non Hermitiano e preclude dunque una descrizione standard di queste ultime in termini di *modi normali*: le frequenze presenteranno una parte immaginaria e si parlerà quindi più correttamente di *modi quasi-normali*.

Nel corso degli anni sono state sviluppate diverse tecniche utili per lo studio di queste onde, ciascuna con le proprie peculiarità. In questo lavoro ne analizzeremo le principali, permettendo di capirne quindi l'origine sia da un punto di vista fisico che matematico.

Se in ambito gravitazionale ci si trova, a meno di approssimazioni, a dover affrontare lo studio di sistemi complessi e fortemente non lineari, è altrettanto vero che, con lo sviluppo della Meccanica Quantistica, nel corso del XX Secolo nella ricerca teorica ha assunto un ruolo fondamentale il concetto di *Simmetria*. Con esso risulta possibile, infatti, giungere a una descrizione molto più profonda di una gran quantità di fenomeni, evidenziando le caratteristiche cardine cui il loro comportamento deve soddisfare. In questo lavoro avremo modo di trattare anche questo tema, mostrandone l'eleganza, ma soprattutto evidenziando come le tecniche così sviluppate trovino risvolti anche in contesti completamente differenti rispetto a quali erano state concepite, a conferma della loro efficacia. Come mostreremo, anche nello studio dei *modi quasi-normali*, infatti, troveremo un'applicazione concreta di questi concetti.

In Relatività Generale così come la ricerca teorica è, lo ripetiamo, molto intensa e i risultati lungi dall'essere banali, dal punto di vista sperimentale la sfida risulta altrettanto stimolante. La recente scoperta, da parte della collaborazione *LIGO*, delle onde gravitazionali prodotte da un sistema binario di buchi neri in coalescenza (evento *GW150914*) è certamente uno dei successi maggiori cui la comunità scientifica è giunta negli ultimi anni. Si tratta infatti di una delle previsioni di maggiore portata della Relatività Generale, che apre le porte ad un nuovo e fertile campo di ricerca. La rilevazione, oltre alle ovvie conseguenze che comporta, trova notevoli risvolti in ambito perturbativo: vedremo che l'analisi di *GW150914* permette di confermare la validità dello studio dei buchi neri mediante i *modi quasi-normali*. Applicando infatti i risultati di quest'ultimi, saremo in grado di determinare con efficacia le grandezze caratteristiche del buco nero formatosi in *GW150914*, compatibilmente con quanto ottenuto mediante sofisticate simulazioni numeriche delle equazioni di Einstein.

Notazioni.

In seguito denoteremo la metrica di Minkowski come $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$, dove la prima componente indica la coordinata temporale. L'asterisco * indicherà il coniugato di eventuali quantità complesse. Adotteremo poi la *convenzione di Einstein*: ogniqualvolta vi saranno due indici consecutivi uguali sarà sottintesa una sommatoria rispetto ad essi. Se non indicato diversamente, gli indici greci μ, ν, ρ, \dots assumeranno i valori $0, 1, \dots, 3$, mentre gli indici latini i, j, k, \dots andranno da 1 a 3. Porremo infine per semplicità $c = \hbar = G = 1$.

Capitolo 1

Le Simmetrie

Il concetto di Simmetria risulta fondamentale in Fisica in quanto permette di analizzare a fondo e talvolta semplificare problemi di grande interesse. Per poterne definire la struttura matematica sottostante e quindi capire come questa si possa applicare nello studio di un certo fenomeno, è necessario riassumerne le caratteristiche principali. Innanzitutto, possiamo intendere un sistema simmetrico se si mostra invariante sotto determinate regole di trasformazione. Queste ci aspettiamo presentino alcune proprietà: ad esempio una composizione di due o più simmetrie dovrà mantenere comunque il sistema invariato, indipendentemente dall'ordine con cui vengono applicate. È naturale poi aspettarsi la presenza tra di esse dell'identità, la quale non modifica il sistema, e di un'inversa per ciascun'altra trasformazione, con la cui composizione si ottenga appunto l'identità. Per quanto detto, possiamo perciò associare ad una simmetria un insieme G di trasformazioni, la cui struttura particolare prende il nome di *Gruppo*.

Definizione 1. Un *Gruppo* è un insieme G dotato di una legge di composizione $*$, detta prodotto,

$$\begin{aligned} * : G \times G &\rightarrow G \\ (g_1, g_2) &\rightarrow g_1 * g_2 \end{aligned}$$

che soddisfa le seguenti proprietà:

1. $a * (b * c) = (a * b) * c, \forall a, b, c \in G$ (associatività);
2. $\exists \mathbb{1} \in G : a * \mathbb{1} = \mathbb{1} * a, \forall a \in G$ (elemento neutro);
3. $\exists a^{-1} \in G : a * a^{-1} = a^{-1} * a = \mathbb{1}, \forall a \in G$ (elemento inverso).

È possibile inoltre distinguere due categorie particolari di *Gruppo*; esso potrà essere infatti composto da un numero finito o non di elementi e, nel caso in cui sia illimitato, questi ovviamente dipenderanno in modo continuo da un insieme di parametri.

Ci focalizzeremo, nel seguito, in una classe particolare di gruppi continui, i *Gruppi di Lie*, in quanto i più rilevanti per le loro applicazioni fisiche. In questo Capitolo si introdurranno perciò i concetti fondamentali utili per lo studio loro e delle conseguenti *Algebre di Lie*, vedendone alcune applicazioni a casi particolari. Nel dettaglio, si presenteranno i concetti di *Simmetria Dinamica*, *Algebra Dinamica* ed *Algebra di Degenerazione*, che permettono la risoluzione di una certa varietà di problemi.

1.1 Gruppi ed Algebre di Lie

Introduciamo innanzitutto la nozione fondamentale di *Gruppo di Lie*:

Definizione 2. Un *Gruppo di Lie* è un gruppo $(G, *)$ fornito di una struttura di varietà differenziabile tale che il prodotto $*$: $G \times G \rightarrow G$ e la mappa di inversione $G \rightarrow G$ data da $g \mapsto g^{-1}$ siano applicazioni di classe C^∞ . Si definisce poi come *dimensione* di G la dimensione della struttura differenziabile di cui è provvisto¹.

Oltre ai primi ovvi esempi di gruppi di Lie come $(\mathbb{R}^n, +)$ con la somma usuale e (\mathbb{C}^*, \cdot) , vi è $GL(n, \mathbb{C})$, il gruppo delle matrici $n \times n$ invertibili a valori in \mathbb{C} dotato del noto prodotto matriciale. Quest'ultimo risulta di grande importanza; contiene infatti le rappresentazioni matriciali di tutti i più importanti gruppi di Lie utilizzati estensivamente in Fisica, che qui riportiamo:

$$\begin{aligned} SL(n) &\equiv \{M \in GL(n, \mathbb{C}) : \det M = 1\}, \\ U(n) &\equiv \{M \in GL(n, \mathbb{C}) : M^\dagger M = MM^\dagger = \mathbf{1}\}, \\ O(n) &\equiv \{M \in GL(n, \mathbb{C}) : M^t M = \mathbf{1}\}, \\ SU(n) &\equiv \{M \in GL(n, \mathbb{C}) : \det M = 1, M^\dagger M = MM^\dagger = \mathbf{1}\}, \\ SO(n) &\equiv \{M \in GL(n, \mathbb{C}) : \det M = 1, M^t M = \mathbf{1}\}. \end{aligned}$$

Il motivo per il quale i sopracitati sottogruppi di $GL(n, \mathbb{C})$ risultano così importanti è semplice: il *teorema di Ado* ci garantisce, infatti, che ogni *Algebra di Lie* finito-dimensionale possa venire rappresentata in termini matriciali, ovvero, come vedremo, in termini delle algebre ad essi associate. È dunque naturale aspettarsi che un loro studio approfondito sia fondamentale nella risoluzione di problemi in cui si faccia utilizzo di tecniche gruppali.

Per quanto detto, se i *Gruppi di Lie* rappresentano trasformazioni continue descritte da una serie di parametri, è logico che quest'ultimi siano in numero pari alla dimensione del gruppo stesso. In aggiunta, ci si aspetta la loro presenza ogniqualvolta un problema

¹Con *struttura differenziabile* di dimensione $n \in \mathbb{N}$ si intende un atlante di dimensione n su G massimale rispetto all'inclusione.

mostri una determinata invarianza sotto un insieme continuo di operazioni; l'esempio più immediato si trova in sistemi dotati di simmetria sferica: come si vedrà, infatti, in tal caso gioca un ruolo determinante l'invarianza per rotazioni, a cui si associa il gruppo $SO(3)$.

Introduciamo ora il concetto di *Algebra di Lie* per capirne le loro applicazioni, strettamente collegate alla loro relazione con i *Gruppi di Lie*.

Definizione 3. Un' *Algebra di Lie* è uno spazio vettoriale \mathfrak{g} dotato di un'ulteriore operazione

$$[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$$

che soddisfa le seguenti proprietà $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$:

1. $[X, Y] = -[Y, X]$ (anticommutatività);
2. $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z], \forall a, b \in \mathbb{C}$ (linearità);
3. $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ (identità di Jacobi).

Trattandosi di spazi vettoriali, sarà possibile descrivere ogni elemento in termini di un numero determinato di vettori di base X_1, \dots, X_n , che prendono il nome di *generatori*. Allora per ogni $i, j = 1, \dots, n$, $[X_i, X_j]$ può essere scritto nella forma generica

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^n c_{ij}^k X_k,$$

ove le c_{ij}^k sono dette *costanti di struttura*. È ovvio che queste, una volta note, determinino in modo univoco l'algebra.

Si rende necessario dare ora alcune definizioni per poter capire appieno il significato di una simile struttura. Dato un gruppo di Lie G , si definisce innanzitutto la traslazione sinistra $L_h : G \rightarrow G$ con $L_h(g) = hg, \forall g, h \in G$. È poi possibile introdurre un'operazione, le *parentesi di Lie*, sull'insieme dei campi vettoriali su G , $\mathcal{T}(G)$, definita come $[\cdot, \cdot] : \mathcal{T}(G) \times \mathcal{T}(G) \rightarrow \mathcal{T}(G)$ tale che:

$$\forall f \in C^\infty(G) \quad [X, Y](f) = X(Yf) - Y(Xf).$$

Si dirà infine che un campo $X \in \mathcal{T}(G)$ è *invariante a sinistra* se è tale che $dL_h(X) = X \forall h \in G$. A questo punto risulta spontaneo attribuire un'interpretazione geometrica alla definizione di *Algebra di Lie* appena data: è possibile dimostrare infatti [1] che il sottospazio di $\mathcal{T}(G)$ dei campi X invarianti a sinistra è isomorfo allo spazio tangente all'identità, T_1G . Sfruttando quindi le *parentesi di Lie* definite su $\mathcal{T}(G)$ si induce su T_1G una struttura di algebra di Lie, che si dirà associata al gruppo G .

Il motivo per cui le algebre sono oggetto di studio è semplice: è intuitivo che lo spazio tangente dia informazioni su come è fatta la varietà di partenza, almeno localmente al punto

a cui si è interessati; ci si aspetta dunque che lo studio di un'algebra \mathfrak{g} associata ad un gruppo G permetta di estrarre informazioni su quest'ultimo.

Per veder ciò consideriamo un generico $X \in \mathfrak{g}$ e sia \tilde{X} il corrispondente campo invariante a sinistra. Data la curva integrale di \tilde{X} , ovvero $\sigma_X(t) : I \rightarrow G$ con $I \subseteq \mathbb{R}$ contenente l'origine, tale che $\sigma_X(0) = \mathbb{1}$ e $\sigma'_X(t) = \tilde{X}(\sigma_X(t))$, si può definire la mappa esponenziale, $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ data da $\exp(X) \equiv \sigma'_X(1)$. È proprio questa la funzione che ci permette di passare dall'algebra al rispettivo gruppo: si mostra infatti che essa induce un diffeomorfismo tra un intorno $U_{\mathbb{1}}$ di $\mathbb{1}$ in G con un intorno del vettore nullo $O_{\mathbb{1}} \in \mathfrak{g}$ [1]. Il risultato poi trova una sua formulazione più completa: considerata un'algebra \mathfrak{g} è possibile ricostruirne completamente tramite \exp la componente semplicemente connessa all'identità del corrispondente gruppo G qualora essa sia compatta.

Per quanto riguarda $\mathfrak{gl}(n)$, si può vedere che l'esponenziale appena definito coincide proprio con la serie di potenze matriciale standard

$$e^X = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{X^n}{n!} = 1 + X + \frac{1}{2}X^2 + \dots$$

Questa proprietà permette dunque di caratterizzare le algebre associate ai gruppi di Lie definiti precedentemente. Sia ad esempio $X \in \mathfrak{u}(n)$: allora affinché $e^{\varepsilon X} \in U(n)$, come ci si aspetta essere per qualche $\varepsilon > 0$, si dovrà avere $(e^{\varepsilon X})(e^{\varepsilon X})^\dagger = \mathbb{1}$. Sviluppando e tenendo solo i termini lineari:

$$(\mathbb{1} + \varepsilon X + \dots)(\mathbb{1} + \varepsilon X^\dagger + \dots) = \mathbb{1} + \varepsilon(X + X^\dagger) + \dots,$$

da cui si vede che $X^\dagger = -X$, che definisce dunque $\mathfrak{u}(n)$. Si può applicare lo stesso ragionamento anche per gli altri gruppi presentati, trovando $\mathfrak{gl}(n) = \text{Mat}(n, \mathbb{C})$ e

$$\begin{aligned} \mathfrak{sl}(n) &= \{X \in \text{Mat}(n, \mathbb{C}) : \text{tr}X = 0\}, \\ \mathfrak{o}(n) &= \{X \in \text{Mat}(n, \mathbb{C}) : X^T = -X\}, \end{aligned}$$

dove con $\text{Mat}(n, \mathbb{C})$ si intende l'insieme delle matrici $n \times n$ in \mathbb{C} .

I gruppi di Lie, come le loro algebre, possono presentarsi nei sistemi fisici in diversi modi; questo vuol dire che una simmetria non si mostra solo mediante le forme matriciali già esposte. È proprio per questo che si introduce il concetto di *rappresentazione*.

Definizione 4. Sia G un gruppo di Lie. Si definisce una *rappresentazione (finito dimensionale, complessa)* di G un omomorfismo di gruppi di Lie

$$D : G \rightarrow GL(n, V),$$

dove V è uno spazio vettoriale su \mathbb{C} di dimensione n . Allo stesso modo, data \mathfrak{g} un'algebra di Lie si definisce una *rappresentazione (finito dimensionale, complessa)* di \mathfrak{g} un omomorfismo di algebre di Lie

$$\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(n, V)$$

tale che $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$

$$\phi([X, Y]_{\mathfrak{g}}) = [\phi(X), \phi(Y)]_{\mathfrak{g}\mathfrak{t}}.$$

In genere le rappresentazioni possono venire decomposte come somma diretta di rappresentazioni di dimensioni minori, che si diranno *irriducibili* e tali per cui $\nexists V_1 \subset V : D(g)V_1 \subseteq V_1, \forall g \in G$. In seguito si farà riferimento solo a quest'ultime; è intuitivo infatti, ma non lo mostreremo, che il loro studio permetta di estrarre tutte le informazioni possibili sulle proprietà del gruppo o dell'algebra interessata.

1.2 Simmetrie dinamiche ed Algebre di degenerazione

Molto spesso, data una certa algebra \mathfrak{g} è possibile identificare in questa un sottospazio \mathfrak{g}' chiuso rispetto le *parentesi di Lie*, ovvero tale che $[Y_i, Y_j] \in \mathfrak{g}', \forall Y_i, Y_j \in \mathfrak{g}'$. In questo caso si dirà che \mathfrak{g}' è una sottoalgebra di \mathfrak{g} , $\mathfrak{g}' \subset \mathfrak{g}$. Associata a \mathfrak{g} una ben determinata rappresentazione, che si indicherà con $[\lambda]$, ovvio è che ne saranno contenute solo determinate rappresentazioni irriducibili di una certa sottoalgebra \mathfrak{g}' . In meccanica quantistica, dove queste descrivono i possibili stati del sistema, risulta di fondamentale importanza riuscire a determinare una *catena di algebre* $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{g}' \supset \mathfrak{g}'' \supset \dots$ che possano fornire un insieme completo di numeri quantici. Un caso particolare, ma molto interessante, è quando l'hamiltoniana del sistema H è scritta in termini degli *operatori di Casimir* C_i, C'_j, \dots di una certa catena:

$$H = f(C_i, C'_j, \dots).$$

Con operatori di Casimir di \mathfrak{g} si intendono gli operatori C_i che commutano con tutti gli elementi di \mathfrak{g} , $[C_i, X] = 0, \forall X \in \mathfrak{g}$. In generale, questi si possono costruire a partire dagli elementi di \mathfrak{g} come

$$C_p = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_p} f^{\alpha_1, \dots, \alpha_p} X_{\alpha_1} \dots X_{\alpha_p},$$

dove p è detto *ordine* di C_p . Qualora l'hamiltoniana si presenti dunque in termini dei Casimir si dirà che il sistema presenta una *simmetria dinamica* ed il problema agli autovalori di H può venire risolto in maniera analitica. Infatti, proprio in virtù della proprietà di questi operatori, si dimostra facilmente che il loro valore è costante per ogni rappresentazione associata a \mathfrak{g} [4]. Risulta perciò immediato rendersi conto che, una volta determinata la catena di algebre i cui Casimir descrivono l'hamiltoniano, i valori che questi assumono saranno in grado di descrivere completamente lo stato del sistema. È possibile invece che H sia descrivibile solo in termini di \mathfrak{g} e che i suoi autostati siano degeneri. In una situazione simile si dirà che \mathfrak{g} è l'*Algebra di degenerazione* del sistema e per poterne descrivere univocamente gli stati sarà necessario comunque studiare le catene di sottoalgebre di \mathfrak{g} , pur ricordando che queste non contribuiscono allo spettro energetico; vediamone di seguito un esempio.

1.2.1 Problema di Coulomb in sei dimensioni

Consideriamo come esempio un sistema composto da tre corpi carichi, che prende il nome di *HyperCoulomb Problem*. L'Hamiltoniana associata a questo problema è

$$H = - \sum_{i=1}^3 \left(\frac{1}{2} \nabla_i^2 + \sum_{j<i} \frac{1}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|} \right),$$

dove \mathbf{r}_i descrive la terna di coordinate dell' i -esimo corpo. Ci si propone di determinare gli autovalori di H , ovvero i valori E tali per cui $H\psi = E\psi$ per una qualche ψ funzione d'onda; ovviamente si è interessati agli stati legati del sistema e perciò si prenderà come ipotesi aggiuntiva $E < 0$. Per semplificare, si introducono le coordinate di Jacobi, ben note nello studio dei problemi ad n corpi poiché permettono di separare la dinamica interna del problema da quella del centro di massa [3]. Esse sono definite come:

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1), \quad \boldsymbol{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1), \quad \boldsymbol{\mu} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3).$$

L'Hamiltoniana può dunque essere riscritta in termini di $\boldsymbol{\rho}$ e di $\boldsymbol{\lambda}$:

$$H = \frac{1}{2} (\mathbf{p}_\rho^2 + \mathbf{p}_\lambda^2) - \frac{1}{r}, \quad (1.1)$$

ove con $\mathbf{p}_\rho, \mathbf{p}_\lambda$ si intendono i momenti rispettivi delle variabili $\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\lambda}$ ed $r \equiv \sqrt{\rho^2 + \lambda^2}$. In questo modo si è riusciti ad eliminare due gradi di libertà, riducendo effettivamente il problema a sei dimensioni. Mediante le nuove coordinate risulta ora possibile determinare lo spettro di H : a questo scopo cerchiamo di determinare le simmetrie del sistema, le quali, vedremo, permettono di riscrivere l'equazione agli autovalori in termini algebrici. Utilizzando la notazione

$$\mathbf{q} = (\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\lambda}), \quad \mathbf{p} = (\mathbf{p}_\rho, \mathbf{p}_\lambda),$$

è possibile definire gli operatori

$$L_{ij} \equiv q_i p_j - q_j p_i, \quad i = 1, \dots, 6, \quad j < i, \quad (1.2)$$

che soddisfano le relazioni caratteristiche dei generatori di $\mathfrak{so}(6)$:

$$[L_{ij}, L_{kl}] = i(\delta_{ik} L_{jl} + \delta_{jl} L_{ik} - \delta_{il} L_{jk} - \delta_{jk} L_{il}). \quad (1.3)$$

Si può poi scrivere il vettore di Runge-Lenz generalizzato per questo sistema, le cui componenti sono date da:

$$A_i = \sqrt{-\frac{1}{2H}} \left[\frac{1}{2} \left(\sum_j L_{ij} p_j - p_j L_{ji} \right) - \frac{k q_i}{x} \right], \quad i = 1, \dots, 6. \quad (1.4)$$

A questo punto è possibile vedere che gli L_{ij} ed A_i così definiti formano un'algebra $\mathfrak{so}(7)$, in quanto le loro parentesi di Lie soddisfano le espressioni proprie di quest'ultima:

$$\begin{aligned} [L_{ij}, L_{kl}] &= i(\delta_{ik}L_{jl} + \delta_{jl}L_{ik} - \delta_{il}L_{jk} - \delta_{jk}L_{il}), \\ [A_i, A_j] &= iL_{ij}, \\ [L_{ij}, A_k] &= i(\delta_{ik}A_j - \delta_{jk}A_i). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Sfruttando (1.2) e (1.4) è facile trovare, inoltre, che questi operatori commutano con l'Hamiltoniano H :

$$[L_{ij}, H] = [A_i, H] = 0, \quad \forall i, j.$$

Procediamo ora a determinare gli autovalori di quest'ultimo. Per prima cosa è possibile scrivere l'operatore di Casimir di ordine 2 di $\mathfrak{so}(7)$, che da un computo diretto si trova essere²:

$$C_2(\mathfrak{so}(7)) = \sum_{i < j}^6 L_{ij}^2 + \sum_{i=1}^6 A_i^2; \quad (1.6)$$

in secondo luogo si nota che:

$$-\sum_{i=1}^6 A_i^2 = \sum_{i < j}^6 L_{ij}^2 + \frac{1}{2H} + \frac{25}{4}. \quad (1.7)$$

Grazie ad un rapido conto si può dunque esprimere l'Hamiltoniano in termini di $C_2(\mathfrak{so}(7))$:

$$H = -\frac{1}{2[C_2(\mathfrak{so}(7)) + \frac{25}{4}]}.$$

È possibile poi dimostrare che compaiono solo alcune rappresentazioni particolari di $\mathfrak{so}(7)$, dette completamente simmetriche e indicate come $[\omega, 0, 0]$. Il risultato, che noi non dimostreremo, si ottiene andando a studiare il comportamento degli altri operatori di Casimir, i quali, attraverso le condizioni cui soddisfano, permettono di capire quali rappresentazioni si mostrino o meno nello studio di questo problema [2]. Per questo tipo di rappresentazioni gli autovalori del Casimir interessato si trovano essere $\langle C_2(\mathfrak{so}(7)) \rangle = \omega(\omega + 5)$ con $\omega \in \mathbb{N}$ e la determinazione dello spettro di H risulta perciò diretta:

$$E(\omega) = -\frac{1}{2[\omega(\omega + 5) + \frac{25}{4}]}.$$

Tuttavia, dallo studio delle rappresentazioni delle algebre $\mathfrak{so}(n)$, è noto che $\dim[\omega, 0, 0] \neq 1$; perciò lo stato del sistema non risulta completamente determinato una volta nota la sua energia. Ci si aspetta dunque di trovare una catena di sottoalgebre tali per cui le

²Per ogni algebra semisemplice esiste una formula esplicita (quella qui utilizzata) per determinarne un operatore di Casimir di ordine 2, ovvero $C_2(\mathfrak{g}) = g^{\rho\sigma} X_\rho X_\sigma$ con $g^{\rho\sigma}$ inversa di $g_{\rho\sigma} = c_{\sigma\mu}{}^\nu c_{\rho\nu}{}^\mu$ e $c_{\sigma\mu}{}^\nu$ costanti di struttura.

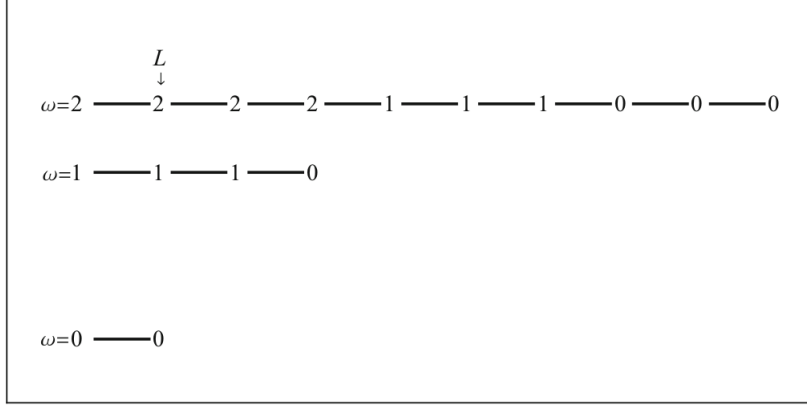


Figura 1.1. Lo spettro dell'Hamiltoniano per l'HyperCoulomb Problem.

rispettive rappresentazioni siano associate ad un insieme di numeri quantici che permettono di descrivere in modo univoco gli autostati possibili. In particolare, si è già visto in (1.2) che vi è la sottoalgebra $\mathfrak{so}(6) \subset \mathfrak{so}(7)$, alle cui rappresentazioni possiamo associare un numero quantico $\gamma = \omega, \omega - 1, \dots, 0$. A sua volta, considerati gli L_{ik} , è facile notare che, definiti

$$\tilde{L}_i = \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} L_{jk}, \quad i, j, k = 1, 2, 3, \quad \hat{L}_r = \sum_{s,t} \epsilon_{rst} L_{st}, \quad r, s, t = 4, 5, 6,$$

con ϵ_{ijk} tensore di Levi-Civita, $\{\tilde{L}_i\}_{i=1,2,3}$ ed $\{\hat{L}_r\}_{r=4,5,6}$ formano un prodotto diretto di due algebre $\mathfrak{so}(3)$, legate rispettivamente a $\boldsymbol{\rho}$ e $\boldsymbol{\lambda}$. Se ne potranno dunque associare i numeri quantici l_ρ, l_λ , descrittivi il “momento angolare” di queste due variabili. In questo modo, con la scelta di procedere mantenendo “separata” la dinamica di $\boldsymbol{\rho}$ e $\boldsymbol{\lambda}$, abbiamo la catena $\mathfrak{so}_\rho(3) \oplus \mathfrak{so}_\lambda(3) \simeq \mathfrak{so}(4) \subset \mathfrak{so}(6) \subset \mathfrak{so}(7)$.

Infine, per terminare la catena di sottoalgebre, in completa analogia con l'accoppiamento dei momenti angolari di due particelle, si sfrutta $\mathfrak{so}_\rho(3) \oplus \mathfrak{so}_\lambda(3) \supset \mathfrak{so}(3) \supset \mathfrak{so}(2)$, in cui si associano L ed M ad $\mathfrak{so}(3)$ e $\mathfrak{so}(2)$, i quali rappresentano il “momento angolare totale” e la sua proiezione lungo un determinato asse. Utilizzando quindi tutti i numeri quantici sinora riportati è possibile determinare gli autostati del sistema, che si presenteranno perciò come:

$$\left. \begin{array}{cccccc} \mathfrak{so}(7) & \supset & \mathfrak{so}(6) & \supset & \mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3) & \supset & \mathfrak{so}(3) & \supset & \mathfrak{so}(2) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \omega & & \gamma & & l_\rho, l_\lambda & & L & & M \end{array} \right\}. \quad (1.8)$$

Riassumendo, dunque, mediante lo studio dell'algebra $\mathfrak{so}(7)$ che ci permette di scrivere l'Hamiltoniana H è possibile determinare completamente lo spettro di energie possibili per i vari stati legati. Inoltre, verificando che le sue rappresentazioni interessate non sono unidimensionali, vi è la possibilità che più stati linearmente indipendenti tra loro siano autofunzioni dello stesso autovalore dell'energia. Per poterli descrivere in modo univoco, si è reso necessario lo studio di una catena di sottoalgebre di $\mathfrak{so}(7)$, che si propone come esempio di quanto presentato nella Sezione precedente.

1.3 Algebre Dinamiche

Altro caso in cui le Algebre di Lie trovano un'importante applicazione è quello delle *Algebre Dinamiche*. Come appurato nel caso delle *Algebre di degenerazione*, talvolta è possibile descrivere un Hamiltoniano H grazie alle rappresentazioni di una ben determinata algebra, che ci permette di trovare una forma analitica per lo spettro energetico. L'idea alla base delle algebre dinamiche è per certi versi la stessa di quella già adottata: dato un certo sistema e la corrispondente algebra di degenerazione \mathfrak{g} , ci si pone come obiettivo quello di determinare un'algebra $\tilde{\mathfrak{g}}$ tale che $\mathfrak{g} \subset \tilde{\mathfrak{g}}$. A questo punto, dunque, saremo in grado di scrivere il nostro H in funzione di nuovi parametri, o meglio numeri quantici, caratterizzanti le rappresentazioni irriducibili di $\tilde{\mathfrak{g}}$. Sarà possibile, per mezzo di quest'ultima, descrivere un insieme di sistemi fisici, associati a valori differenti dei parametri di cui sopra. Questi, ovviamente, non influenzeranno direttamente la forma dello spettro dei vari sistemi, poiché, come sappiamo, esso sarà scritto in termini dell'algebra di degenerazione \mathfrak{g} . Tuttavia, è altresì ovvio che il suo dominio sia dipendente dai valori che assumono, in quanto le rappresentazioni di \mathfrak{g} saranno limitate nella forma da quelle di $\tilde{\mathfrak{g}}$, così come i numeri quantici ad essa associati.

Questo problema, il cui obiettivo è quindi quello di descrivere sotto un unico formalismo un insieme di sistemi, prende anche il nome di *problema di embedding*. La difficoltà principale risiede nel fatto che non esistono tecniche generali per determinare l'algebra $\tilde{\mathfrak{g}}$; molto spesso, infatti, la scelta non è unica ed esistono invece diverse algebre che soddisfano la nostra richiesta.

1.3.1 Il potenziale di Pöschl–Teller

Si riporta ora un esempio in cui si utilizza il concetto di *algebra dinamica*. Anticipiamo che l'algebra che rivestirà questo ruolo sarà $\mathfrak{su}(2) \simeq \mathfrak{so}(3)$. I sistemi che vogliamo tentare di descrivere con questo approccio sono presentati da un'Hamiltoniana il cui potenziale è il noto *potenziale di Pöschl–Teller* unidimensionale, ovvero

$$H = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} - \frac{V_0}{\cosh^2 x}. \quad (1.9)$$

Questo particolare potenziale trova molte applicazioni, una delle quali verrà presentata proprio in questa tesi. Il suo utilizzo spazia in diversi abiti, dalla Relatività Generale alla Fisica Molecolare, e trova in quest'ultima le sue origini. Il primo suo impiego è da trovarsi, infatti, nella descrizione del potenziale cui risentono tra loro due atomi nelle molecole biatomiche, con il fine di determinarne l'energia vibrazionale [5].

Il motivo per cui si cerca di risolvere il problema dell'embedding utilizzando $\mathfrak{su}(2)$ è molto semplice. Come noto, tale algebra rappresenta un'invarianza rotazionale in 3 dimensioni, la quale si trova non a caso nel sistema fisico appena citato, così come nelle altre applicazioni.

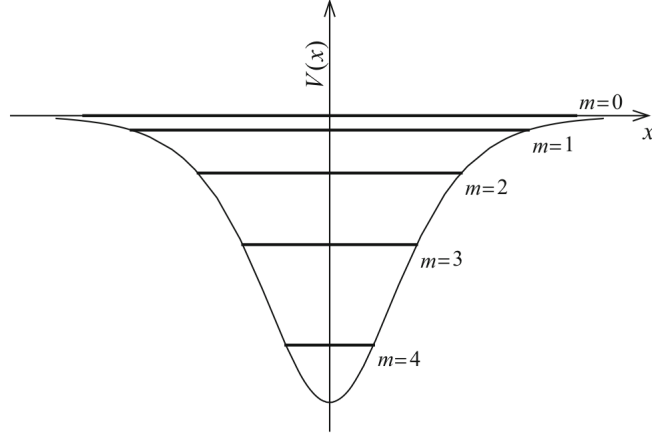


Figura 1.2. Il potenziale di Pösch-Teller. Le rette rappresentano gli stati legati del sistema.

In questo, in particolare, la coordinata x di H rappresenta, come è intuitivo, la differenza tra la distanza di equilibrio tra i due atomi e la loro distanza effettiva.

Alla luce di quanto detto, è naturale aspettarsi che *in generale* una qualche simmetria del sistema dal quale si trae il problema a cui si è interessati, così come nel nostro caso, si rifletta in modo spontaneo nella presenza di un'algebra dinamica particolarmente immediata da individuare.

Consideriamo dunque la rappresentazione differenziale ed in coordinate sferiche (ρ, φ, θ) di $\mathfrak{su}(2)$ e introduciamo perciò gli operatori J_3, J_\pm e J^2 , definiti da

$$J_3 \equiv -i \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad (1.10)$$

$$J_\pm \equiv -ie^{\mp i\varphi} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \mp i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right), \quad (1.11)$$

$$J^2 \equiv - \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right]. \quad (1.12)$$

I primi tre, come noto, generano $\mathfrak{su}(2)$, mentre J^2 ne è l'operatore di Casimir di ordine 2. Essi soddisfano infatti le relazioni

$$[J^2, J_3] = [J^2, J_\pm] = 0, \quad [J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k, \quad i, j, k = 1, 2, 3, \quad (1.13)$$

con $J_1 = (J_+ + J_-)/2$ e $J_2 = i(J_- - J_+)/2$. Procedendo con il cercare un sistema di autofunzioni comuni di J^2 e J_3 , si trova che queste sono le ben note *armoniche sferiche* $Y_j^m(\theta, \varphi)$, con m, j interi. L'equazione

$$J_3 Y_j^m(\theta, \varphi) = -i \frac{\partial}{\partial \varphi} Y_j^m(\theta, \varphi) = m Y_j^m(\theta, \varphi) \quad (1.14)$$

si vede soddisfatta per $Y_j^m(\theta, \varphi) = u_j^m(\theta)e^{im\varphi}$, mentre imponendo $Y_j^m(\theta, \varphi) = Y_j^m(\theta, \varphi + 2\pi)$ si trova $m \in \mathbb{N}$. Affinché $Y_j^m(\theta, \varphi)$ sia autofunzione di J^2 , $u_j^m(\theta)$ deve soddisfare

$$\left[-\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{d}{d\theta} \right) + \frac{m^2}{\sin^2\theta} \right] u_j^m(\theta) = j(j+1)u_j^m(\theta). \quad (1.15)$$

Ciò conferma che $j \in \mathbb{N}$ e che $Y_j^m(\theta, \varphi)$ siano le nostre armoniche. A questo punto effettuiamo un cambio di variabili cruciale:

$$\cos\theta = \tanh x, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Scrivendo (1.15) in termini del nuovo parametro x si trova, dopo qualche manipolazione algebrica:

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} - \frac{j(j+1)}{\cosh^2 x} \right] u_j^m(x) = -m^2 u_j^m(x). \quad (1.16)$$

Come si vede, quest'espressione è proprio l'equazione agli autovalori per il *potenziale di Pöschl–Teller* a meno di un fattore $1/2$ e a patto di identificare in (1.9) $V_0 = j(j+1)/2$. Abbiamo dunque trovato, utilizzando le rappresentazioni differenziali di $\mathfrak{su}(2)$, un modo per studiare lo spettro dell'Hamiltoniana H al variare di un parametro, V_0 . Si nota infatti la somiglianza tra i secondi membri di (1.16) e (1.14), che rende possibile scrivere:

$$J_3^2 = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{j(j+1)}{\cosh^2 x}. \quad (1.17)$$

A questo punto è immediato arrivare ad:

$$H = -\frac{1}{2} J_3^2. \quad (1.18)$$

da cui gli autovalori dell'energia seguono essere $E = -m^2/2$.

Risulta naturale, qualora l'interesse sia studiare un insieme di sistemi fisici al variare di certi parametri e *anche* il loro spettro energetico, descrivere le funzioni d'onda ψ da un numero quantico aggiuntivo, che indichi quale tra l'insieme dei sistemi si stia studiando. Nel caso qui presentato, poiché j e m sono sufficienti per definire completamente gli stati, possiamo rappresentare una generica autofunzione semplicemente come:

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathfrak{su}(2) & \supset & \mathfrak{so}(2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ j & & m \end{array} \right\rangle. \quad (1.19)$$

Vi è tuttavia una particolarità degna di nota: poiché gli autovalori dipendono solo da m^2 anziché da m , saranno doppiamente degeneri. Per rimuovere questa degenerazione l'algebra $\mathfrak{su}(2)$ sarà quindi da utilizzarsi con la condizione che solo stati con $m \geq 0$ debbano essere considerati [4].

Capitolo 2

I modi quasi-normali dei buchi neri

Abbiamo sinora presentato il concetto di Simmetria, mostrando come questo possa venire utilizzato per risolvere determinati problemi. Ci interessa ora descrivere il fenomeno fisico dei *modi quasi-normali dei buchi neri*, in cui vi si troverà un'applicazione diretta, che dimostra concretamente l'efficacia di quanto esposto. Verranno presentate, inoltre, ulteriori tecniche utili per la risoluzione dello stesso problema, in primo luogo per confermare quanto trovato ed, in secondo, per estendere i risultati laddove non sia possibile procedere con il solo utilizzo di metodi gruppali. Di seguito verrà illustrato innanzitutto il quadro generale alla base del fenomeno interessato.

2.1 Dai modi normali ai modi quasi-normali

In fisica classica risulta ben noto il concetto di *modi normali*. Sia dato infatti un sistema di lagrangiana \mathcal{L} affetto da soli potenziali conservativi e siano $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_k)$ l'insieme delle coordinate che descrivono le configurazioni del sistema. Se questo presenta un punto \mathbf{q}^0 di equilibrio stabile, è talvolta utile linearizzare le equazioni del moto per poterne studiare il comportamento in un suo intorno. Si trova, senza entrare in ulteriori dettagli, che in completa generalità il sistema si riduce ad un insieme di oscillatori armonici classici, il cui comportamento può venire descritto come sovrapposizione lineare di soluzioni particolari. Queste, chiamate *modi normali*, sono descritte da

$$\mathbf{q}_n(t) = \mathbf{q}^0 + \operatorname{Re} \left[e^{i(\omega_n t + \delta_n)} \right] \mathbf{u}_n, \quad (2.1)$$

con \mathbf{u}_n vettore in \mathbb{R}^k e le ω_n , reali, dette *frequenze proprie*. Quando studiamo un oscillatore, o in genere un sistema risonante, spesso risulta utile trascurare effetti dissipativi, riuscendo comunque a descrivere con un buon grado di approssimazione il fenomeno fisico a cui si è interessati. Ed è proprio questo che porta alla determinazione dei *modi normali*. L'espansione in modi stazionari altro non è che, tuttavia, una conseguenza della conservazione dell'energia, dovuta alle approssimazioni eseguite. Nel momento in cui, però, ci si interessa a casi più

realistici, tenendo conto di eventuali fenomeni di dissipazione, è naturale aspettarsi che l'espansione in modi appena presentata non sia più possibile. In tal caso, infatti, risulterà naturale che le soluzioni siano descritte da un decadimento nel tempo, anziché oscillare indefinitivamente. Per questo motivo, le ω_n ci aspetteremo siano complesse, ove la parte immaginaria, nel momento in cui i moti vengano descritti similmente alla (2.1), descriverà lo smorzamento. Si parlerà, pertanto, di *modi quasi-normali*.

Consideriamo invece l'eventualità in cui non sia nota a priori la natura del punto di equilibrio \mathbf{q}^0 attorno al quale eseguiamo uno sviluppo. I *modi quasi-normali* che determineremo potranno essere caratterizzati da frequenze la cui parte immaginaria non descriva uno smorzamento delle soluzioni attorno a \mathbf{q}^0 , bensì un aumento esponenziale nel tempo. È facile dedurre che in questo caso il punto di equilibrio sia in realtà instabile. L'importanza è notevole: spesso lo sviluppo in *modi quasi-normali* viene infatti utilizzato per determinare la stabilità di sistemi molto complessi ed è proprio questa idea l'idea che ha portato Regge e Wheeler ad iniziare lo studio in ambito perturbativo dei buchi neri.

Tuttavia, lo anticipiamo, poiché le metriche di Schwarzschild e Kerr risultano essere stabili¹, non sarà questo il caso di nostro interesse. Ciò non implica comunque che uno sviluppo in termini di *modi normali* sia realizzabile: è impossibile infatti, nemmeno in principio riducendoci al più ideale dei casi, trascurare il fenomeno di dissipazione che si presenta. È chiaro che la presenza di un orizzonte degli eventi, che agisce come una membrana unilaterale, e l'emissione di onde gravitazionali all'infinito, come vedremo, impongano uno smorzamento di quest'ultime proprio a causa delle condizioni a contorno che la situazione impone.

2.2 Teoria perturbativa sulla metrica dei buchi neri

Consideriamo innanzitutto l'azione di Einstein-Hilbert con un termine $S_M = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_M$ descrivente un qualsiasi campo di materia:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{16\pi G} R + \mathcal{L}_M \right], \quad (2.2)$$

dove si è imposta nulla la costante cosmologica Λ . Possiamo ricavare le equazioni che descriveranno la dinamica cui è soggetta $g_{\mu\nu}$ e gli eventuali campi $\{\Phi^i\}_{i \in I}$ di \mathcal{L}_M estremizzando l'azione S , ovvero imponendo

$$\delta S = \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} + \sum_i \frac{\delta S}{\delta \Phi^i} \delta \Phi^i = 0. \quad (2.3)$$

¹In realtà anche quella di Reissner–Nordström, di cui però non ci occuperemo, risulta essere stabile.

Si trova in questo modo che $g_{\mu\nu}$ soddisfa

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (2.4)$$

avendo indicato con $T_{\mu\nu}$ il tensore energia-impulso derivato da S_M^2 .

Supponiamo ora che la presenza dei campi di materia Φ_i generi una metrica di background $g_{\mu\nu}^{\text{BG}}$ e una *piccola* perturbazione. A questo punto potremo sviluppare $g_{\mu\nu}$ al primo ordine attorno a $g_{\mu\nu}^{\text{BG}}$, scrivendo perciò $g_{\mu\nu} \approx g_{\mu\nu}^{\text{BG}} + h_{\mu\nu}$, dove $h_{\mu\nu}$ sarà un tensore di rango 2 simmetrico. Analogamente, potremo effettuare lo stesso procedimento con i campi $\Phi_i \approx \Phi_i^{\text{BG}} + \phi_i$, dove Φ_i^{BG} indicheranno i valori per il quale viene soddisfatta la (2.4) con $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{\text{BG}}$. Utilizziamo poi uno sviluppo lineare per riscrivere anche il tensore energia-impulso, $T_{\mu\nu} \approx T_{\mu\nu}^{\text{BG}} + t_{\mu\nu}$, e il tensore di Ricci, $R_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}^{\text{BG}} + \Pi_{\mu\nu}$, dove un computo diretto porta a

$$\Pi_{\mu\nu} = \nabla_\beta \Gamma^\beta_{\mu\nu} - \nabla_\nu \Gamma^\beta_{\mu\beta}, \quad \text{con} \quad \Gamma^\beta_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g_{\text{BG}}^{\alpha\beta} (\partial_\nu h_{\mu\alpha} + \partial_\mu h_{\nu\alpha} - \partial_\alpha h_{\mu\nu}).$$

Si giunge in questo modo alle equazioni del moto per $h_{\mu\nu}$:

$$R_{\mu\nu}^{\text{BG}} + \Pi_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}^{\text{BG}}\Pi = 8\pi t_{\mu\nu}. \quad (2.5)$$

Anche per i campi Φ_i si ha che il comportamento del background si disaccoppia da quello delle perturbazioni ϕ_i . Ci ricordiamo infatti che sfruttando la (2.3) si arriva a descrivere la dinamica dei vari Φ_i mediante

$$\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \Phi_i} - \nabla_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial (\nabla_\mu \Phi_i)} = 0, \quad \forall i \in I. \quad (2.6)$$

Tuttavia, affinché i vari Φ_i^{BG} siano tali da produrre $g_{\mu\nu}^{\text{BG}}$ dovranno soddisfare le equazioni

$$\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \Phi_i^{\text{BG}}} - \nabla_\mu^{\text{BG}} \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial (\nabla_\mu^{\text{BG}} \Phi_i^{\text{BG}})} = 0, \quad \forall i \in I, \quad (2.7)$$

dove ∇_μ^{BG} indica la derivata covariante rispetto la metrica di background. La descrizione delle Φ_i^{BG} risulta dunque definita univocamente da (2.7) e, pertanto, la linearizzazione delle (2.6) porterà alla scrittura delle equazioni del moto per le ϕ_i .

La situazione, tuttavia, nel caso in cui $g_{\mu\nu}^{\text{BG}}$ non sia la semplice metrica di Minkowski $\eta_{\mu\nu}$, non lascia procedere oltre mediante un metodo generale che descriva univocamente lo sviluppo di $h_{\mu\nu}$ e dei campi di materia che ne danno origine; sarà quindi necessario procedere caso per caso, a seconda della metrica $g_{\mu\nu}^{\text{BG}}$ considerata. Quel che è possibile anticipare, però, è che l'insieme di equazioni differenziali (2.5) mediante alcune manipolazioni sarà sempre

²Si utilizza come definizione di tale tensore $T_{\mu\nu} \equiv -2 \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}$, per maggiori dettagli si rimanda a [9].

riconducibile ad un'unica equazione, la cui forma si ritrova, a meno di ridefinire alcune quantità, anche nel caso in cui si studi la propagazione di un campo scalare privo di massa su $g_{\mu\nu}^{\text{BG}}$. Per tale motivo, risulta istruttivo studiare prima il comportamento di quest'ultimo, di facile trattazione, per addentrarci poi nella discussione del fenomeno di nostro interesse, ovvero perturbazioni gravitazionali, che esibiscono un comportamento più complicato.

Consideriamo quindi un campo complesso libero, che denoteremo con Φ , in metrica di Schwarzschild e di Kerr. Il termine \mathcal{L}_M ad esso dovuto sarà molto semplicemente $\mathcal{L}_M = -(\partial_\mu \Phi)^\dagger \partial^\mu \Phi$, da cui deriva l'ovvia equazione

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \Phi = \frac{1}{\sqrt{-g_{\text{BG}}}} \partial_\mu \left(\sqrt{-g_{\text{BG}}} g_{\text{BG}}^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi \right) = 0, \quad (2.8)$$

ricavata mediante la (2.3). Nel caso di Schwarzschild risulta immediato vedere come la simmetria sferica di $g_{\mu\nu}$ permetta la decomposizione

$$\Phi(t, r, \theta, \varphi) = \sum_{l,m} \frac{\Psi(t, r)}{r} Y_l^m(\theta, \varphi). \quad (2.9)$$

È facile a questo punto riscrivere la (2.8) sfruttando la (2.9) e ottenendo

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \left[\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3} \right] \right\} \Psi(t, x) = 0, \quad (2.10)$$

dove si è identificata con x la *coordinata tartaruga*³, definita da $dx/dr \equiv (1 - 2M/r)^{-1}$, e M è la massa del buco nero. Il termine $V(r) \equiv (1 - 2M/r) [l(l+1)/r^2 + 2M/r^3]$ svolge in questo caso l'azione di potenziale efficace. Come vedremo, potremo riscrivere la (2.10) sfruttando la trasformata di Laplace $\hat{\Psi}(\omega, x)$, ottenendo

$$\mathcal{O} \hat{\Psi}(\omega, x) \equiv \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + Q(\omega, x) \right] \hat{\Psi} = I(\omega, x), \quad (2.11)$$

dove $I(\omega, x)$ è funzione delle condizioni iniziali del problema. Nel caso scalare, così come per perturbazioni gravitazionali in metrica di Schwarzschild, avremo⁴ $Q(\omega, x) = \omega^2 - V(r(x))$; per quanto riguarda la metrica di Kerr, invece, la situazione si presenta più complicata, in quanto $g_{\mu\nu}^{\text{BG}}$ non è dotata di simmetria sferica. È stato dimostrato da Teukolsky [8], tuttavia, che Φ risulta anche in questo caso decomponibile in un termine radiale ed uno angolare, sebbene quest'ultimo sia scritto in termini di funzioni ben più complesse delle *armoniche sferiche* $Y_l^m(\theta, \varphi)$. Sarà dunque possibile scrivere in forma del tutto generale

$$\Phi = \Psi(t, r) \Theta(\theta, \varphi).$$

³Più avanti, ogni qualvolta verrà trattato il caso di un buco nero non rotante, sarà da intendersi ugualmente x come *coordinata tartaruga*.

⁴Ovviamente $V(r)$ nel caso di perturbazioni gravitazionali sarà differente da quello appena presentato.

Senza entrare nello specifico, ci basti sottolineare che con questa scomposizione ci si può ricondurre anche in metrica di Kerr alla (2.11), con la condizione di ridefinire opportunamente $Q(\omega, x)$ e x stesso. Dato che le grandezze in gioco saranno le stesse che utilizzeremo per l'analisi di perturbazioni gravitazionali, ci limitiamo ad anticipare in questa sede che anche per il caso di un buco nero rotante è possibile definire x affinché vari da $-\infty$ a $+\infty$ e con l'orizzonte degli eventi corrispondente a $x \rightarrow -\infty$, proprio come accade in Schwarzschild con la definizione già proposta.

2.2.1 Perturbazioni gravitazionali per la metrica di Schwarzschild

Poniamoci nel caso in cui la metrica di background $g_{\mu\nu}^{\text{BG}}$ sia data dalla presenza di un buco nero di massa M non rotante. Si avrà perciò

$$g_{\mu\nu}^{\text{BG}} dx^\mu dx^\nu = -f dt^2 + f^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (2.12)$$

avendo indicato con $f \equiv 1 - 2M/r$. Ci interessa, in questo caso, studiare la forma di $h_{\mu\nu}$ ⁵. Per prima cosa, dato che la geometria di background presenta simmetria sferica, descriveremo lo spaziotempo in 4 dimensioni come un prodotto $\mathbf{M}_2 \times \mathbf{S}^2$, dove \mathbf{M}_2 è una varietà lorentziana 2-dimensionale di coordinate (t, r) ed \mathbf{S}^2 una sfera di raggio unitario di coordinate (θ, φ) . Come risultato di questa decomposizione, sarà possibile scomporre la perturbazione in una parte rispetto \mathbf{M}_2 ed una rispetto \mathbf{S}^2 . Per quanto detto, $h_{\mu\nu}$ si scriverà in termini di multipoli, il cui ordine indicheremo con l , pari o dispari in accordo con la loro trasformazione sotto parità $(\theta, \varphi) \rightarrow (\pi - \theta, \pi + \varphi)$. In particolare, i multipoli dispari saranno quelli che trasformano come $(-1)^{l+1}$, mentre quelli pari come $(-1)^l$. Come risultato, si avrà perciò

$$h_{\mu\nu} = \sum_{l,m} \left[(h_{\mu\nu}^{lm})^{(o)} + (h_{\mu\nu}^{lm})^{(e)} \right], \quad (2.13)$$

dove ^(o) indicherà i dispari ed ^(e) quelli pari.

È noto che le equazioni di Einstein presentano una invarianza di gauge per cui due perturbazioni $h_{\mu\nu}$ e $h'_{\mu\nu}$ forniscono due differenti rappresentazioni della stessa situazione fisica nel momento in cui si trovino nel rapporto

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \epsilon (\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu), \quad (2.14)$$

con $\xi^\mu(x)$ campo vettoriale sulla varietà di background ed $\epsilon \ll 1$. Sfruttando questa caratteristica è possibile, mediante la scelta di un'opportuna gauge, semplificare notevolmente la forma di $h_{\mu\nu}$. Nel momento in cui selezioniamo una frequenza ben definita ω in modo

⁵Intenderemo di seguito, come coordinate su cui scorreranno gli indici, $x^0 = t, x^1 = r, x^2 = \theta, x^3 = \varphi$.

che $h_{\mu\nu} = e^{-i\omega t} \hat{h}_{\mu\nu}$, è infatti possibile arrivare all'espressione [6, 10]

$$h_{\mu\nu}^{(o)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & h_0(r) \\ 0 & 0 & 0 & h_1(r) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_0(r) & h_1(r) & 0 & 0 \end{bmatrix} e^{-i\omega t} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) Y_l^0(\theta) \quad (2.15)$$

per i multipoli dispari, mentre per i pari si trova

$$h_{\mu\nu}^{(e)} = \begin{bmatrix} H_0(r)f & H_1(r) & 0 & 0 \\ H_1(r) & H_2(r)/f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 K(r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 K(r) \sin^2 \theta \end{bmatrix} e^{-i\omega t} Y_l^0(\theta), \quad (2.16)$$

con h_0, h_1, H_0, H_1, K generiche funzioni di r . A questo punto, senza addentrarsi in ulteriori dettagli per i quali si rimanda a [6, 7], è possibile giungere alla (2.11) identificando opportunamente alcune grandezze a seconda della parità dei multipoli considerati. Presentiamo di seguito i risultati ottenuti. Per i dispari si giunge a

$$\Psi = \frac{f(r)}{r} h_1(r), \quad h_0(r) = \frac{i}{\omega} \frac{d}{dx} (r\Psi), \quad (2.17)$$

mentre per i pari la situazione risulta più complessa, descritta dalle espressioni

$$K(r) = \frac{6M^2 + \lambda(1 + \lambda)r^2 + 3\lambda Mr}{r^2(3M + \lambda r)f(r)} \Psi + \frac{d\Psi}{dx}, \quad (2.18)$$

$$H_1(r) = \frac{i\omega(3M^2 + 3\lambda Mr - \lambda r^2)}{r(3M + \lambda r)f(r)} \Psi - \frac{i\omega r}{f(r)} \frac{d\Psi}{dx}, \quad (2.19)$$

avendo posto $\lambda \equiv (l - 1)(l + 2)/2$. $H_0(r)$, invece, si trova in relazione con le altre due funzioni $H_1(r)$ e $K(r)$ da

$$\begin{aligned} \left[(l - 1)(l + 2) + \frac{6M}{r} \right] H_0(r) + \left[i \frac{Ml(l + 1)}{\omega r^2} - 2i\omega r \right] H_1(r) \\ - \left[(l - 1)(l + 2) + r f(r)' - \frac{4\omega^2 r^2 + r^2 f(r)'^2}{2f(r)} \right] K(r) = 0. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Come già anticipato, l'equazione a cui si giunge con Ψ così definito è in ambidue i casi del tipo

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} - V(r) \right] \Psi = 0, \quad (2.21)$$

dove però il potenziale efficace $V(r)$ sarà diverso da quello ottenuto per uno scalare. In realtà, la sua espressione non risulta particolarmente differente nel caso di perturbazioni dispari:

$$V^{(o)}(r) = f(r) \left[\frac{l(l + 1)}{r^2} - \frac{6M}{r^3} \right], \quad (2.22)$$

a differenza delle pari, per le quali:

$$V^{(e)}(r) = \frac{2f(r)}{r^2} \frac{9M^3 + 3\lambda^2 Mr^2 + \lambda^2(1 + \lambda)r^3 + 9M^2\lambda r}{(3M + \lambda r)^2}. \quad (2.23)$$

Il risultato ottenuto prende il nome di *equazione di Regge–Wheeler* per le prime ed *equazione di Zerilli* per le seconde. Notiamo che lo studio della dinamica di Ψ risulta, in virtù dei potenziali appena riportati, molto più agevole nel primo caso. A tal proposito, citiamo un risultato molto importante: si deve a Chandrasekar, infatti, una dimostrazione sull’isospettralità delle perturbazioni indipendentemente dalla loro parità; in altri termini i *modi quasi-normali* che si originano considerando (2.22) o (2.23) presentano lo stesso spettro [11, 15]. Per questo motivo in seguito, laddove studieremo lo spettro di un buco nero di Schwarzschild, ci limiteremo a considerare l’*equazione di Regge–Wheeler*.

2.2.2 Perturbazioni gravitazionali per la metrica di Kerr

Per giungere alla (2.11) nel caso di un buco nero rotante di massa M e momento angolare $J = aM$, risulta necessario fare utilizzo del *formalismo di Newman–Penrose (NP)*. Poiché $g_{\mu\nu}$ presenta ora solamente simmetria assiale, sembrerebbe infatti naturale aspettarsi che la scomposizione della parte angolare non sia più possibile; fortunatamente, poiché la metrica di Schwarzschild e di Kerr risultano molto simili mediante questo approccio, è possibile giungere ai risultati sinora anticipati. In questo caso, la metrica di background assume la forma

$$ds^2 = \frac{\Delta}{2} (dt - a \sin^2 \theta d\varphi)^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\Sigma} [(r^2 + a^2)d\varphi - a dt]^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2, \quad (2.24)$$

ove $\Sigma \equiv r^2 + a^2 \cos^2 \theta$, $\Delta \equiv r^2 - 2Mr + a^2$.

L’*NP* è un tipo particolare di formalismo delle tetradi, in cui si utilizzano quattro campi vettoriali⁶ \mathbf{l} , \mathbf{n} , \mathbf{m} , \mathbf{m}^* , linearmente indipendenti tra loro, per descrivere lo spazio-tempo e tali che il loro prodotto scalare soddisfi particolari requisiti. Poiché i conti risultano particolarmente estesi e complessi, ci limitiamo anche qui a presentare i risultati principali. In particolare assumeremo noto il passaggio dallo studio di $h_{\mu\nu}$ ad uno scalare, per il quale rimandiamo a [8].

È sempre possibile definendo opportunamente \mathbf{l} , \mathbf{n} , \mathbf{m} , \mathbf{m}^* , perciò, ricondursi ad un singolo scalare ${}_s\Psi$, il quale inglobi in sé la natura della perturbazione di partenza in una dipendenza dal suo spin⁷ s . Si dimostra che, in tal caso, lo sviluppo al primo ordine delle equazioni di Einstein scritte mediante in formalismo *NP* ne rende possibile la scomposizione come

$${}_s\Psi(t, r, \theta, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{l,m} \int e^{-i\omega t + im\varphi} R_{lm\omega}(r) {}_sS_{lm}(a\omega, \theta) d\omega. \quad (2.25)$$

⁶I primi due, \mathbf{l} e \mathbf{n} , saranno reali, mentre \mathbf{m} sarà complesso.

⁷Ricordiamo che le perturbazioni scalari sono caratterizzate da $s = 0$, a differenza delle gravitazionali, per le quali $s = 2$.

Le ${}_sS_{lm}(a\omega, \theta)$ e $R_{lm\omega}(r)$ sono funzioni particolari, la cui dinamica viene descritta da

$$\Delta \frac{\partial^2}{\partial r^2} R_{lm\omega} + 2(s+1)(r-m) \frac{\partial}{\partial r} R_{lm\omega} + V R_{lm\omega} = 0, \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d}{d\theta} \right) {}_sS_{lm} - \left(\frac{m^2}{\sin^2 \theta} + \frac{2ms \cos \theta}{\sin^2 \theta} \right) {}_sS_{lm} \\ & + \left(a^2 \omega^2 \cos^2 \theta - 2a\omega s \cos \theta - s^2 \cot^2 \theta + s + {}_sA_{lm} \right) {}_sS_{lm} = 0, \end{aligned} \quad (2.27)$$

avendo posto

$$\begin{aligned} V = & 2is\omega r - a^2 \omega^2 - {}_sA_{lm} + \frac{1}{\Delta} \left[(r^2 + a^2)^2 \omega^2 - 4Mam\omega r + a^2 m^2 \right. \\ & \left. + 2is(am(r-M) - M\omega(r^2 - a^2)) \right]. \end{aligned} \quad (2.28)$$

In letteratura le ${}_sS_{lm}(a\omega, \theta)$ sono ben note e prendono il nome di *armoniche sferoidali*; ${}_sA_{lm}$, invece, è detta *costante di separazione* ed emerge dalla separazione di variabili dell'equazione originale che soddisfa ${}_s\Psi$ in modo analogo a cui si presenta l nella separazione di variabili per sistemi con simmetria sferica, ad esempio come appena visto per un buco nero di Schwarzschild.

Senza addentarsi in ulteriori conti, per i quali si può fare riferimento a [12], ci basti sapere che mediante manipolazioni algebriche è possibile portare la (2.26) nella forma (2.11). L'espressione di $Q(\omega, x)$, decisamente complessa da presentare, viene scritta in questo caso in funzione di x tale che $dx/dr = (r^2 + a^2)/\Delta$ e riporta le stesse caratteristiche asintotiche di (2.22).

2.3 Analisi mediante la funzione di Green

Per quanto già detto, ricordiamo che lo studio della risposta di un buco nero a perturbazioni gravitazionali si riconduce alla (2.11), ovvero

$$\mathcal{O}\hat{\Psi}(\omega, x) \equiv \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + Q(\omega, x) \right] \Psi = I(\omega, x),$$

con Ψ , $Q(\omega, x)$, $I(\omega, x)$, x quantità variabili a seconda del caso considerato. Allo studio in frequenza si giunge, come anticipato, mediante la trasforma di Laplace di Ψ , che viene definita da

$$\mathcal{L}\Psi \equiv \hat{\Psi} = \int_{t_0}^{\infty} \Psi(t, x) e^{i\omega t} dt, \quad (2.29)$$

rispetto la quale è possibile poi tornare al campo originale mediante

$$\Psi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+ic}^{+\infty+ic} \hat{\Psi}(\omega, x) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (2.30)$$

Nel caso di Schwarzschild, in particolare, grazie alla proprietà elementare $\mathcal{L}(\partial\Psi(t, x)/\partial t) = -i\omega\mathcal{L}\Psi(t, x) - e^{i\omega t_0}\Psi(t_0, x)$ è immediato giungere dalla (2.21) alla (2.11) ponendo

$$Q(\omega, x) = \omega^2 - V(r(x)), \quad I(\omega, x) = e^{i\omega t_0} \left[i\omega\Psi(t, x) - \frac{\partial\Psi(t, x)}{\partial t} \right] \Big|_{t=t_0}. \quad (2.31)$$

Anche per un buco nero rotante $I(\omega, x)$ sarà determinato da combinazioni lineari di $\Psi(t_0, x)$ e $\partial\Psi(t_0, x)/\partial t$, sebbene la sua forma non presenti la stessa semplicità [14]. Risulta ora spontaneo andare a studiare la funzione di Green $\hat{G}(x, y)$ associata all'operatore \mathcal{O} , che soddisferà

$$\mathcal{O}\hat{G}(x, y) = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + Q(\omega, x) \right] \hat{G}(x, y) = \delta(x - y), \quad (2.32)$$

per riuscire a determinare le proprietà generali che dovranno presentare le $\hat{\Psi}$ soluzioni di (2.11), la cui espressione sarà infatti data da

$$\hat{\Psi}(\omega, x) = \int \hat{G}(x, y) I(\omega, y) dy. \quad (2.33)$$

Poiché il potenziale effettivo $Q(\omega, x)$ in ambidue i casi di nostro interesse (Schwarzschild e Kerr) tende ad una costante all'infinito spaziale così come sull'orizzonte degli eventi, risulta immediato aspettarsi che le soluzioni si propaghino come delle onde piane, avendo dunque un andamento asintotico del tipo⁸

$$\hat{\Psi} \sim e^{\pm i\omega x}.$$

Consideriamo ora le condizioni a contorno che risultano necessarie imporre: innanzitutto, ci si aspetta che una soluzione generale soddisfi la limitazione causale che nessun onda emerga dal buco nero; in secondo luogo, invece, risulta fisicamente motivato imporre che non giungano onde dall'infinito. Questi due vincoli si traducono in due soluzioni della (2.11), che soddisferanno ciascuna una condizione al contorno particolare e che, definite $A_{\text{in}}, A_{\text{out}}, B_{\text{in}}, B_{\text{out}}$ generiche funzioni di ω , potremo scrivere come

$$\hat{\Psi}^{\text{in}}(\omega, x) \sim \begin{cases} e^{-i\omega x}, & x \rightarrow -\infty, \\ A_{\text{out}}(\omega)e^{i\omega x} + A_{\text{in}}(\omega)e^{-i\omega x}, & x \rightarrow +\infty, \end{cases} \quad (2.34)$$

$$\hat{\Psi}^{\text{up}}(\omega, x) \sim \begin{cases} B_{\text{out}}(\omega)e^{i\omega x} + B_{\text{in}}(\omega)e^{-i\omega x}, & x \rightarrow -\infty, \\ e^{+i\omega x}, & x \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (2.35)$$

Le soluzioni con pieno significato fisico, dovendo rispettare ambedue le condizioni, saranno perciò determinate in funzione delle (2.34), (2.35). A questo punto è facile calcolare il Wronskiano

$$W(\omega) = \hat{\Psi}^{\text{in}}(\omega, x) \frac{\partial \hat{\Psi}^{\text{up}}(\omega, x)}{\partial x} - \hat{\Psi}^{\text{up}}(\omega, x) \frac{\partial \hat{\Psi}^{\text{in}}(\omega, x)}{\partial x} = 2i\omega A_{\text{in}}(\omega),$$

ove si è giunti all'ultimo passaggio con $x \rightarrow +\infty$, sfruttando l'indipendenza lineare di $\hat{\Psi}^{\text{up}}(\omega, x)$, $\hat{\Psi}^{\text{in}}(\omega, x)$ e dunque la costanza di W al variare di x . Mediante l'utilizzo di un

⁸Ricordando che $\Psi = \int e^{-i\omega t} \hat{\Psi} d\omega$ è facile capire che per $x \rightarrow -\infty$ onde uscenti corrisponderanno all'esponente positivo, entranti all'esponente negativo. Il viceversa varrà per $x \rightarrow +\infty$.

noto metodo per la determinazione della funzione di Green, è possibile riuscire a scrivere quest'ultima in termini di $\hat{\Psi}^{\text{in}}$, $\hat{\Psi}^{\text{up}}$ e $W(\omega)$ [13]:

$$\hat{G}(x, y, \omega) = -\frac{1}{W(\omega)} \begin{cases} \hat{\Psi}^{\text{in}}(x, \omega)\hat{\Psi}^{\text{up}}(y, \omega), & x < y, \\ \hat{\Psi}^{\text{in}}(y, \omega)\hat{\Psi}^{\text{up}}(x, \omega), & x > y. \end{cases} \quad (2.36)$$

Cerchiamo ora di semplificare il problema mediante alcune approssimazioni, al fine di proseguire l'analisi a livello analitico. La prima ipotesi ragionevole che possiamo effettuare è data dall'assunzione che sia l'osservatore che la perturbazione all'istante iniziale t_0 siano a distanze sufficientemente elevate dal buco nero; come seconda, invece, verrà presupposto che quest'ultima non abbia supporto oltre la distanza a cui è posto il primo. In altri termini, perciò, $x/M > y/M \gg 1$, a cui segue l'immediata semplificazione

$$\hat{G}(x, y, \omega) \approx -\frac{1}{2i\omega} \left[e^{i\omega(x-y)} + \frac{A_{\text{out}}}{A_{\text{in}}} e^{i\omega(x+y)} \right]. \quad (2.37)$$

A tal punto, in linea teorica sarebbe sufficiente computare la (2.33) sfruttando la (2.37). Per far questo, risulta decisamente più immediato utilizzare il metodo dei residui; i poli di \hat{G} saranno perciò fondamentali nel descrivere la dinamica del sistema. Consideriamo ora per semplicità il caso di un buco nero di Schwarzschild: per mezzo del cambio di variabile

$$\hat{\Psi} = f^{-1/2}(r)\chi, \quad (2.38)$$

espandendo la (2.21) con il potenziale di Regge–Wheeler e trascurando termini $1/r$ di ordine superiore al secondo in virtù delle approssimazioni già eseguite è possibile scrivere

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \omega^2 + \frac{4M\omega^2}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] \chi \approx 0. \quad (2.39)$$

Mediante un secondo cambio di variabile

$$\chi = \left(\frac{r}{M} \right)^{l+1} e^{i\omega r} \phi(z), \quad (2.40)$$

la (2.39) si traduce in

$$\left[z \frac{d^2}{dz^2} + (2l+2-z) \frac{d}{dz} - (l+1-2i\omega M) \right] \phi \approx 0, \quad (2.41)$$

dove $z \equiv -2i\omega r$. Le soluzioni sono ora immediate da trovare, in quanto la (2.41) altro non è che un'equazione differenziale ben nota in letteratura. Considerando i comportamenti di $\hat{\Psi}^{\text{in}}$, $\hat{\Psi}^{\text{up}}$ e identificando opportunamente le quantità è possibile giungere perciò a

$$\hat{\Psi}^{\text{in}} = A \left(\frac{r}{M} \right)^{l+1} e^{i\omega r} M(l+1-2i\omega M, 2l+2, -2i\omega r), \quad (2.42)$$

$$\hat{\Psi}^{\text{up}} = B \left(\frac{r}{M} \right)^{l+1} e^{i\omega r} U(l+1-2i\omega M, 2l+2, -2i\omega r), \quad (2.43)$$

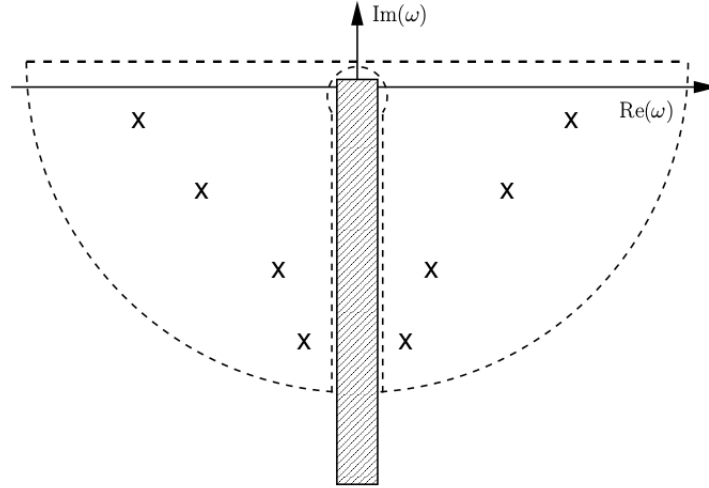


Figura 2.1. Il percorso lungo il quale è possibile calcolare $\hat{\Psi}$ mediante (2.45). L'area tratteggiata rappresenta il branch-cut; le croci rappresentano invece gli zeri di A_{in} .

in cui $M(a, b, z)$ ed $U(a, b, z)$, non scrivibili in termini di funzioni elementari, rappresentano le due soluzioni standard, appunto, dell'equazione appena citata, detta *ipergeometrica confluyente*; A e B invece altro non sono che costanti di normalizzazione. Sfruttando le proprietà che $M(a, b, z)$ e $U(a, b, z)$ presentano, si trova poi

$$U(a, n + 1, ze^{i2\pi}) = U(a, n + 1, z) + 2\pi i \frac{(-1)^{n+1}}{n! \Gamma(a - n)} M(a, n + 1, z), \quad (2.44)$$

da cui discende immediatamente che $\hat{\Psi}^{\text{up}}$ - e di conseguenza pure \hat{G} - è una funzione polidroma con un punto di ramificazione in $\omega = 0$. Ci limitiamo solamente a citare in questa sede che mediante metodi analoghi è possibile verificare lo stesso comportamento per la funzione di Green relativa ad un buco nero di Kerr. Pertanto, nel momento in cui si andrà ad utilizzare il metodo dei residui per il calcolo di Ψ sarà sempre necessario tenere in considerazione un branch-cut, posto per convenzione lungo il semiasse da 0 a $-i\infty$; riportiamo in Figura (2.1) il cammino di integrazione che verrà quindi utilizzato.

In merito a quanto detto, la radiazione prodotta in risposta ad una perturbazione nel campo di un buco nero può venire divisa in tre componenti, in accordo con i contributi delle differenti parti del percorso di integrazione nel semipiano $\text{Im}(\omega) < 0$:

1. In un primo tempo l'osservatore riceverà solamente la radiazione emessa direttamente dalla sorgente;
2. Dopo un certo istante, giungerà anche la riflessione di questa per mezzo del potenziale efficace, caratterizzata da *modi quasi-normali* di oscillazione smorzati esponenzialmente, derivanti a livello matematico dai poli della funzione di Green;

3. Infine vi sarà una coda a decadimento esponenziale, che si origina dai contributi apportati dal branch-cut [17].

Si giunge in questo modo alla determinazione di $\hat{\Psi}$ in funzione dei termini appena elencati

$$\begin{aligned} \Psi(t, x) = & 2\pi i \sum_n \text{Res} \left[\int I(\omega, x) \hat{G}(x, y, \omega) e^{-i\omega t} dy \right] \Big|_{\omega=\omega_n} - \int_C I(\omega, x) \hat{G}(\omega, x) e^{-i\omega t} d\omega dy \\ & - \int_{-i\infty}^0 I(\omega, x) \hat{G}(\omega, x) e^{-i\omega t} d\omega dy - \int_0^{-i\infty} I(\omega e^{i2\pi}, x) \hat{G}(\omega e^{i2\pi}, x) e^{-i\omega 2\pi t} d\omega dy, \end{aligned} \quad (2.45)$$

in cui l'integrale sui due quarti di circonferenza, indicati con C , è in realtà nullo per il lemma di Jordan. Dimostriamo ora come effettivamente i *modi quasi-normali* del sistema nascano dal termine dei residui. Sia infatti ω_n una frequenza per la quale $A_{\text{in}}(\omega_n) = 0$ e denotiamo di conseguenza $\alpha_n \equiv A_{\text{in}}(\omega)/(\omega - \omega_n)$ per $\omega \approx \omega_n$. Definendo

$$B_n \equiv \frac{\pi A_{\text{out}}(\omega)}{\omega_n \alpha_n}, \quad (2.46)$$

è possibile riscrivere il contributo generale dei residui in $\Psi(t, x)$ come

$$\Psi(t, x)_{QNM} = -\text{Re} \left[\sum_n B_n e^{-i\omega_n(t-x)} \int I(\omega_n, y) e^{i\omega_n y} dy \right] \equiv -\text{Re} \left[\sum_n C_n e^{-i\omega_n(t-x)} \right], \quad (2.47)$$

ove si è sfruttata la (2.37) e si è utilizzato il fatto che se ω_n è uno zero di A_{in} lo è anche $-\omega_n^*$ [16]. A questo punto è importante chiedersi come sia possibile determinare le frequenze di oscillazione in funzione delle grandezze caratteristiche del buco nero considerato.

In realtà, con l'approccio appena presentato, non risulta possibile trovare in modo esplicito una funzione per ω_n in termini di massa e momento angolare di quest'ultimo. Quel che è possibile, però, è determinare i *fattori di eccitazione quasi-normali* C_n , dai quali poi sarà possibile giungere alla determinazione delle varie ω_n . Per far questo, però, è ovvio dalla definizione dei C_n stessi che sia necessario riuscire a determinare con precisione l'espressione di $I(\omega, x)$ in funzione dei vari parametri del buco nero così come della $\Psi(t_0, x)$, affinché le previsioni date da (2.47) possano rivelarsi soddisfacenti. Dato che la trattazione di questo punto risulta particolarmente estesa [14], ci limitiamo a riportare il risultato finale, ricavato per un buco nero di Kerr nel caso di uno scalare:

$$I(\omega, r) = e^{i\omega t_0} \left\{ i \left[\omega - \frac{2a\omega r + \omega a^2 \Delta \gamma_l^m}{(r^2 + a^2)^2} \right] \Psi(t_0, r) + \left[1 - \frac{a^2 \Delta \gamma_l^m}{(r^2 + a^2)^2} \right] \frac{\partial \Psi}{\partial t}(t_0, r) \right\}. \quad (2.48)$$

Si è definita, nella (2.48), la grandezza

$$\gamma_l^m \equiv 2\pi \int_0^\pi {}_s S_{lm}^*(a\omega, \theta) {}_s S_{lm}(a\omega, \theta) \sin^3 \theta d\theta, \quad (2.49)$$

in cui le ${}_s S_{lm}$ sono le già presentate *armoniche sferoidali*. È altresì ovvio che qualora si voglia determinare le ω_n , la forma complicata di (2.48) renda necessario proseguire per complicate vie numeriche anche solo per perturbazioni scalari. In virtù di questa difficoltà, presenteremo di seguito ulteriori approcci per la determinazione dei *modi quasi-normali*, con i quali, proprio grazie alla loro eleganza, sarà possibile giungere ad espressioni più semplici.

2.4 Analisi mediante il metodo WKB

Uno dei metodi più importanti per la determinazione dei *modi quasi-normali* è il *metodo WKB*. Questo approccio particolare sfrutta ampiamente l'analogia tra il fenomeno fisico che stiamo qui studiando e lo studio degli autovalori di energia per funzioni d'onda mediante l'equazione di Schrödinger in Meccanica Quantistica, ovvero la

$$H\Psi(x) = \left[\frac{p^2}{2m} + V(x) \right] \Psi(x) = \left[-\frac{1}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right] \Psi(x) = E\Psi(x). \quad (2.50)$$

È da quest'ultima, infatti, che il metodo qui esposto nasce, proponendosi di descrivere in linea del tutto generale la Ψ a prescindere dalla forma del potenziale $V(x)$, ad eccezione di un'ipotesi come vedremo non eccessivamente limitativa.

Prima di continuare, notiamo che la (2.50) può essere riscritta nella forma

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + Q(x)\Psi = 0, \quad (2.51)$$

dove $Q(x) = 2m[E - V(x)]$. È immediato vedere che l'equazione per la perturbazione scalare che abbiamo sinora studiato ha la stessa forma, a meno di una dipendenza da ω e del termine $I(\omega, x)$. Come abbiamo visto, tuttavia, le frequenze ω_n sono ricavate come zeri di $A_{\text{in}}(\omega)$ e sono perciò indipendenti dai dati iniziali. Possiamo dunque limitarci allo studio del caso $I(\omega, x) = 0$.

Alla luce delle espressioni ottenute, si capisce che il ruolo che rivestono gli autovalori E nel caso della Meccanica Quantistica sia simile a quello ricoperto da ω nel fenomeno a cui siamo interessati. Ci ricordiamo infatti dell'identificazione $Q(\omega, x) = \omega^2 - V(x)$ per un buco nero di Schwarzschild e, poiché questo altro non è che la situazione limite di Kerr per $a \rightarrow 0$, ci aspettiamo che l'analogia si riesca ad estendere anche per buchi neri rotanti.

Considerando stavolta la dipendenza da ω possiamo scrivere le soluzioni di (2.51) come

$$\Psi(\omega, x) = A(\omega, x)e^{i\phi(\omega, x)}, \quad (2.52)$$

ove $A(\omega, x)$ e $\phi(\omega, x)$, senza perdere di generalità, sono funzioni reali di ω e x . A questo punto, dunque, derivando due volte l'espressione appena presentata ed inserendola in (2.51) si trovano le due condizioni per parte reale ed immaginaria⁹:

$$\begin{aligned} 2A'(\omega, x)\phi'(\omega, x) + A(\omega, x)\phi''(\omega, x) &= 0, \\ A(\omega, x) [(\phi'(\omega, x))^2 - Q(\omega, x)] &= A''(\omega, x). \end{aligned} \quad (2.53)$$

Introduciamo ora una ipotesi, ovvero richiederemo che $A'' \approx 0$. Ricordando che nel caso in cui $Q(\omega, x) \equiv Q$ costante la soluzione della (2.51) è

$$\Psi = A \exp \left[iQ^{1/2}x \right] \quad (2.54)$$

⁹Indicheremo qui con un apice ' le derivate rispetto x , per non appesantire troppo la notazione.

con A fissato, si capisce che ciò si presenta nel caso in cui $Q(\omega, x)$, e dunque $V(r)$, vari lentamente rispetto la lunghezza d'onda $\lambda = 2\pi/Q^{1/2}$. Infatti, sotto tale assunzione è ragionevole aspettarsi che la Ψ rimanga circa della forma (2.54) cambiando gradualmente $A(\omega, x)$, ovvero in modo che una sua variazione sia apprezzabile solo per intervalli dell'ordine di diverse lunghezze d'onda. Di seguito assumeremo che nel nostro caso questa condizione sia soddisfatta. Risolvendo a questo punto le (2.53) si giunge al risultato

$$\Psi(\omega, x) \approx [Q(\omega, x)]^{-1/4} \exp \left\{ \pm i \int [Q(\omega, z)]^{1/2} dz \right\}. \quad (2.55)$$

Il metodo, però, cessa di validità nel momento in cui $Q(\omega, x) \approx 0$, in quanto la (2.55) diverge; come vedremo questa caratteristica risulterà fondamentale per la determinazione dei *modi quasi-normali*. Guardiamo ora gli andamenti asintotici: per $|x| \rightarrow \infty$, $Q(\omega, x)$ tende ad una costante e l'andamento di Ψ sarà dunque simile alla (2.54).

Sfruttiamo nuovamente l'analogia con il punto di vista della Meccanica Quantistica: per un'onda proveniente da $x \rightarrow +\infty$ ed incidente su una barriera di potenziale estesa per un certo intervallo d , solo una piccola frazione ne verrà trasmessa ad $x \rightarrow -\infty$. In particolare, è ben noto che quest'ultima sia ridotta rispetto la prima di un fattore e^{-B} , con

$$B \equiv \int_d [-Q(\omega, x)]^{-1/2} dx.$$

Viceversa, nel momento in cui $E \gg V(x)$, come è naturale aspettarsi l'onda viene trasmessa quasi completamente. Traducendo il tutto in termini della nostra perturbazione nel campo di un buco nero, potremo applicare lo stesso ragionamento nel primo caso per $Q(\omega, x_0) < 0$ e nel secondo per $Q(\omega, x_0) \gg 0$, avendo indicato x_0 il punto massimo di $-Q(\omega, x)$ fissata ω . Il processo che stiamo studiando, come abbiamo già avuto modo di vedere, presenta però alcune condizioni al contorno particolari. Deve essere verificato, infatti, che a $x \rightarrow -\infty$ vi siano solo onde entranti in direzione dell'orizzonte degli eventi; in secondo luogo non vi devono essere onde provenienti da $x \rightarrow +\infty$. Per questo motivo, dunque, l'interazione del campo con il picco di potenziale dovrà dare luogo a due onde, una riflessa e una trasmessa, dello stesso ordine di grandezza [12, 18]. Affinché questa richiesta sia soddisfatta, alla luce della discussione appena fatta ci aspetteremo che le onde presentino le frequenze caratteristiche tali per cui $Q(\omega, x_0) \approx 0$. L'espressione (2.55) cessa però di valere in un intorno $]x_1, x_2[$ di x_0 , mentre permette di scrivere

$$\Psi(x) \approx [Q(\omega, x)]^{-1/4} \exp \left\{ \pm i \int_{x_2}^x [Q(\omega, z)]^{1/2} dz \right\}, \quad x > x_2, \quad (2.56)$$

$$\Psi(x) \approx [Q(\omega, x)]^{-1/4} \exp \left\{ \pm i \int_x^{x_1} [Q(\omega, z)]^{1/2} dz \right\}, \quad x < x_1. \quad (2.57)$$

Sarà dunque necessario incollare le due funzioni tra di loro in $]x_1, x_2[$. Per far questo, sviluppiamo $Q(\omega, x)$ attorno al massimo x_0 , ottenendo l'espressione $Q(\omega, x) \approx Q(\omega, x_0) + Q''(\omega, x_0)(x - x_0)^2/2$ valida con un buon grado di precisione nell'intervallo considerato.

Tenendo conto dell'approssimazione eseguita, andiamo a risolvere la (2.51): la soluzione che otterremo rappresenterà l'andamento della Ψ nella regione in cui la (2.55) non è più valida. Ovvio è che il risultato ottenuto dovrà poi soddisfare dei vincoli con le (2.56) e (2.57) affinché sia garantita la continuità di Ψ .

Identificando le grandezze

$$t \equiv (2Q(\omega, x_0)'')^{1/4}(x - x_0), \quad \nu + \frac{1}{2} \equiv -iQ(\omega, x_0)/(2Q''(\omega, x_0))^{1/2}, \quad (2.58)$$

nell'intorno di x_0 si giunge alla

$$\frac{d^2\Psi}{dt^2} + \left(\nu + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}t^2\right)\Psi = 0, \quad (2.59)$$

la cui soluzione generale è della forma $\Psi = AD_\nu(t) + BD_{-\nu-1}(it)$, ove $D_\nu(t)$ in letteratura prende il nome di *funzione parabolica cilindrica*. Sfruttando il suo andamento asintotico, si trova [15, 18]

$$\Psi \sim Ae^{-i\pi\nu}t^\nu e^{-t^2/2} - i\sqrt{2\pi}A[\Gamma(-\nu)]^{-1}e^{i5\pi/4}t^{-\nu-1}e^{t^2/2}, \quad x \gg x_2, \quad (2.60)$$

con $\Gamma(\nu)$ la funzione gamma di Eulero. Affinché l'espressione appena presentata sia compatibile con (2.57), si dovrà imporre $[\Gamma(-\nu)]^{-1} = 0$, ovvero in altri termini:

$$\frac{Q(\omega, x_0)}{\sqrt{2Q''(\omega, x_0)}} = i\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.61)$$

Poiché Q è funzione solamente di ω e x , la (2.61) esprime la condizione che fissa i *modi quasi-normali*. Nel caso specifico di Schwarzschild, ad esempio, è immediato arrivare all'espressione

$$\omega_n = \left\{ V(r(x_0)) + [2V(r(x_0))']^{1/2} i\left(n + \frac{1}{2}\right) \right\}^{1/2}. \quad (2.62)$$

Come anticipato, sfruttando il *metodo WKB* si è riusciti dunque a determinare in prima approssimazione una formula semi-analitica per ω_n dipendente, come è ovvio che sia, dal potenziale efficace e dunque dalle grandezze fisiche caratterizzanti il buco nero.

L'utilità di questo approccio non termina qui: siamo riusciti a dimostrare che le frequenze ω_n trovate hanno una spiegazione ben definita. Esse descrivono infatti i modi di oscillazione che vengono eccitati a causa della presenza di una perturbazione iniziale. A tal proposito, è d'uso comune pensare ai *modi quasi-normali* come onde intrappolate nelle geodetiche circolari nulle ed instabili attorno al buco nero, le quali fuoriescono lentamente con un certo tempo di decadimento proprio grazie alla presenza della perturbazione. A sostegno dell'ipotesi presentata, è possibile dimostrare [19] che le ω_n determinate per mezzo del *metodo WKB* presentano infatti la parte reale pari alla velocità angolare caratterizzante le orbite appena citate; la parte immaginaria, invece, si trova scrivibile in termini dei tempi di fuga.

2.5 Analisi mediante le Algebre Dinamiche

In questa Sezione ci proponremo di presentare una tecnica utile per la determinazione dei *modi quasi-normali* mediante le tecniche gruppali presentate nel primo Capitolo. Poiché, come abbiamo visto, il problema affrontato risulta molto complesso, non è stato possibile giungere con gli approcci sinora trattati a dei risultati esatti, trovando difficoltà di calcolo in primo luogo e richiedendo l'utilizzo di approssimazioni in secondo. Sfruttando le *algebre dinamiche* e tentando dunque di riscrivere l'operatore \mathcal{O} in termini di generatori di algebre a noi note è invece possibile trovare in modo esatto le frequenze proprie ω_n . Ovviamente anche qui saranno necessarie opportune ipotesi, a vantaggio però di una notevole semplificazione dei calcoli. La tecnica proposta, dovuta a Ferrari e Mashhoon [20], in particolare sarà utilizzabile solamente nel caso di un buco nero di Schwarzschild e non di Kerr. Per quest'ultimo, infatti, è difficile presentare analiticamente $Q(\omega, x)$ e ciò rende difficoltosa una sua riscrittura in termini algebrici.

Consideriamo dunque un buco nero stazionario: il sistema presenta in tal caso una simmetria sferica, che ci aspettiamo possa aiutarci in qualche modo a raggiungere il nostro obiettivo. A riguardo, possiamo notare una notevole somiglianza tra il potenziale efficace $V(r)$ e il potenziale di Pöschl–Teller rovesciato, la quale risulta sempre più accurata all'aumentare di l ; si veda a proposito la Figura (2.2), dove $V(r)$ è stato espresso in termini di x , $V(r(x))$. Nel dettaglio, notiamo che l'unica differenza tra i due è una coda più pronunciata per il primo, mentre i comportamenti principali, ovvero la presenza di un massimo e il fatto che $V \rightarrow 0$ per $|x| \rightarrow \infty$, vengono riprodotti. In ragione di quanto discusso facendo utilizzo del *metodo WKB*, poiché sono quest'ultimi i caratteri di $V(r)$ che danno origine ai *modi quasi-normali*, sarà naturale aspettarsi che, anziché utilizzare il potenziale efficace (2.22), lo

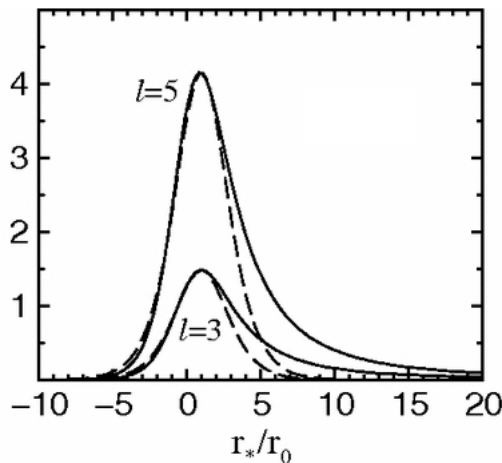


Figura 2.2. Il potenziale effettivo nel caso di Schwarzschild al variare di l ed in funzione di x , qui indicata con r_* ; r_0 , invece, corrisponde al massimo x_0 . Il potenziale di Pöschl–Teller rovesciato è indicato con la linea tratteggiata, quello reale dal tratto continuo.

studio della (2.11) con il potenziale di Pöschl–Teller porti comunque a risultati soddisfacenti. Anche qui, poi, porremo per semplicità $I(\omega, x) = 0$.

Cerchiamo dunque di caratterizzare il nuovo potenziale in funzione di alcuni parametri che definiremo opportunamente affinché l'approssimazione risulti la più fedele possibile. Ricordiamo che x ed r si trovano collegate tra loro da $dx/dr \equiv (1 - 2M/r)^{-1}$, ovvero¹⁰:

$$x(r) = r + 2M \log \left| \frac{r}{2M} - 1 \right|. \quad (2.63)$$

Per il nostro problema considereremo il dominio $r > 2M$, ovvero la regione di spazio esterna all'orizzonte degli eventi. In questo caso, la (2.63) è invertibile, sebbene non in forma analitica. Segue poi che il potenziale $V(r)$ presenta un unico massimo sia lo si scriva in termini di r che di x , infatti $\forall r > 2M$, $dx/dr > 0$. Per convenzione, denoteremo $r = r_0$ il valore per cui appunto $V(r)$ è massimo, ovvero

$$r_0 = 2M \frac{3[3 + l(l+1)] + \sqrt{3[27 + l(l+1)][3l(l+1) - 14]}}{4l(l+1)},$$

ed $x_0 \equiv x(r_0)$. Consideriamo perciò la generica forma del *potenziale di Pöschl–Teller*

$$V_{\text{PT}}(x) = \frac{U_0}{\cosh^2 \alpha(x - x_0)}, \quad (2.64)$$

centrato in x_0 . Definiremo i parametri U_0 ed α in modo tale che uno sviluppo sino al secondo grado di (2.64) attorno ad x_0 coincida con quello del potenziale reale in $V(r_0)$. In tal modo si arriva a definire

$$U_0 \equiv V(r_0), \quad \alpha^2 \equiv -\frac{1}{2V(r_0)} \frac{d^2V}{dx^2} \Big|_{x=x_0}. \quad (2.65)$$

Giungiamo così alla nuova equazione per $\hat{\Psi}$:

$$\frac{\partial^2 \hat{\Psi}}{\partial x^2} + \left[\omega^2 - \frac{V(r_0)}{\cosh^2 \alpha(x - x_0)} \right] \hat{\Psi} = 0. \quad (2.66)$$

Come è facile vedere, la (2.66) ricorda particolarmente l'equazione agli autovalori già affrontata nel primo Capitolo, la (1.9). È possibile, infatti, ricondursi al caso già affrontato mettendo opportunamente in corrispondenza le varie grandezze. Tuttavia, allora si trattava dello studio degli stati legati di un sistema in cui il *potenziale di Pöschl–Teller* rappresentava una buca di potenziale, mentre qui il suo effetto è quello di una barriera di potenziale. Per poter passare da uno dei due casi all'altro è necessario procedere con la trasformazione $(x, \alpha) \rightarrow (ix, i\alpha)$ [20]. Ripercorrendo tutti i passaggi che ci permettono di scrivere il problema in termini dell'algebra dinamica $\mathfrak{su}(2)$ ed eseguendo la trasformazione appena presentata, si identificano:

$$j(j+1) = \frac{V(r_0)}{\alpha^2}, \quad m^2 = \frac{\omega^2}{\alpha^2}. \quad (2.67)$$

¹⁰In realtà x ed r sono definite dalla (2.63) a meno di una costante, che qui poniamo nulla.

Si giunge dunque a determinare gli stati legati per la buca di potenziale, che saranno caratterizzati da

$$\omega_n = \alpha \left[-\frac{2n+1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{V(r_o)}{\alpha} \right)^{1/2} \right], \quad (2.68)$$

dove $m = j - n$. Utilizzando nuovamente la trasformazione $(x, \alpha) \rightarrow (ix, i\alpha)$ è possibile ora tornare al caso della barriera di potenziale e risalire alle frequenze ω_n vere e proprie dei *modi quasi-normali*. Sfruttando la (2.68) è immediato infatti giungere all'espressione finale

$$\omega_n = \pm \sqrt{V(r_0) - \frac{\alpha^2}{4} - i\alpha \frac{2n+1}{2}}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.69)$$

Notiamo che, se nello studio del *potenziale di Pöschl–Teller* vero e proprio n poteva assumere solamente un certo numero di valori, determinati dal fatto che $m \in [-j, +j]$, una volta che eseguiamo la trasformazione $(x, \alpha) \rightarrow (ix, i\alpha)$ questo vincolo, che era imposto dalla richiesta di avere stati legati, viene perso, e avremo dunque più genericamente $n \in \mathbb{N}$.

Ovviamente, essendoci limitati alla trattazione di un buco nero non rotante, l'unico suo parametro che influenzerà le ω_n sarà la massa M , la cui dipendenza nella (2.69) si troverà presente in α e $V(r_0)$.

2.6 Analisi mediante il metodo della frazione continua

Nelle Sezioni precedenti abbiamo avuto modo di studiare i *modi quasi-normali* dei buchi neri mediante tecniche semianalitiche, le quali hanno permesso una trattazione chiara in particolar modo sulla loro origine dal punto di vista fisico. Tuttavia, come già sottolineato, i risultati a cui si è giunti non permettono un'analisi quantitativa del tutto soddisfacente, in quanto la determinazione delle frequenze ω_n risulta laboriosa dal punto di vista computazionale¹¹. Per far fronte a questo problema, risulta più comodo utilizzare per il calcolo vero e proprio di quest'ultime un procedimento numerico, dovuto a Leaver [21], di cui presentiamo i risultati principali e necessari per il loro computo.

L'idea è semplice: è noto infatti che le soluzioni di (2.26) e (2.27) posso venire espresse in termini di sommatorie che, affinché soddisfino le condizioni al contorno che il problema impone, si presentano come

$${}_s S_{lm}(a\omega, \theta) = e^{a\omega \cos \theta} (1 + \cos \theta)^{|m-s|/2} (1 - \cos \theta)^{|m+s|/2} \sum_{p=0}^{+\infty} a_p (1 + \cos \theta)^p, \quad (2.70)$$

$$R_{lm\omega}(r) = e^{i\omega r} (r - r_-)^{-1-s+i\omega+i\sigma_+} (r - r_+)^{-s-i\sigma_+} \sum_{p=0}^{+\infty} d_p \left(\frac{r - r_+}{r - r_-} \right)^p, \quad (2.71)$$

¹¹L'approccio mediante le *algebre dinamiche*, che non presenta questa difficoltà, risulta in compenso limitato nelle sue applicazioni a buchi neri non rotanti.

dove $r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}$ e $\sigma_{\pm} \equiv (\omega r_{\pm} - am)/\sqrt{1 - 4a^2}$. I coefficienti a_n e d_n risultano in questo caso determinati dalle relazioni:

$$\alpha_o^{\theta} a_1 + \beta_o^{\theta} a_0 = 0, \quad \alpha_n^{\theta} a_{n+1} + \beta_n^{\theta} a_n + \gamma_n^{\theta} a_{n-1} = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.72)$$

$$\alpha_0^r d_1 + \beta_0^r d_0 = 0, \quad \alpha_n^r d_{n+1} + \beta_n^r d_n + \gamma_n^r d_{n-1} = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.73)$$

dove $\alpha_n^{\theta,r}$, $\beta_n^{\theta,r}$ e $\gamma_n^{\theta,r}$ sono funzioni dipendenti da θ o r a seconda dell'apice utilizzato, oltre che dagli altri parametri, tra cui ${}_s A_{lm}$. Per le loro espressioni analitiche rimandiamo all'articolo originale [21], in quanto non portano un'aggiunta di informazioni rilevanti a quanto già detto. Notiamo che (2.72) e (2.73) possono venire riportate nella forma a frazione continua

$$0 = \beta_0^{\theta,r} - \frac{\alpha_0^{\theta,r} \gamma_1^{\theta,r}}{\beta_1^{\theta,r} - \frac{\alpha_1^{\theta,r} \gamma_2^{\theta,r}}{\beta_2^{\theta,r} - \frac{\alpha_2^{\theta,r} \gamma_3^{\theta,r}}{\beta_3^{\theta,r} - \dots}}}. \quad (2.74)$$

A questo punto la determinazione delle frequenze proprie dei *modi quasi-normali* segue da un processo iterativo: fissiamo infatti i valori di a, m, s ed ω e ne ricaviamo il valore di ${}_s A_{lm}$ tale per cui è soddisfatta una delle due equazioni (2.74), sia nel nostro caso quella per θ . Utilizzando il risultato appena ottenuto e mantenendo a, m e s uguali, ricaviamo una nuova ω sfruttando quindi l'equazione per r . Con questa nuova frequenza, poi, ripetiamo nuovamente il procedimento, avendo sempre cura di mantenere a, m ed s fissati. Ciò che ci aspetteremo reiterando più volte il tutto sarà una rapida convergenza di ${}_s A_{lm}$ e ω agli effettivi valori per cui le (2.74) sono soddisfatte contemporaneamente. Ovvio è che, in questo modo, si è in grado di determinare le frequenze di oscillazione caratterizzanti una perturbazione Ψ che soddisfa le equazioni di Teoukolsky (2.26), (2.27) e che descrivono appunto i *modi quasi-normali*.

A livello numerico, il metodo appena presentato risulta semplice quanto efficace. Pertanto, per facilitare l'analisi dell'evento *GW150914* che andremo a presentare di seguito, si è deciso di fare riferimento ai valori così ottenuti. È importante comunque sottolineare che un'analisi approfondita conferma che le tecniche di analisi già presentate nelle altre Sezioni portino a valori delle ω_n analoghi a quelli determinati mediante le *frazioni continue*, si veda a riguardo [15].

Capitolo 3

Dai modi quasi-normali al ringdown

Nel secondo Capitolo siamo andati ad affrontare lo studio dei *modi quasi-normali* dei buchi neri, causati dalla presenza di una perturbazione rispetto la metrica di quest'ultimo. Ci siamo limitati, tuttavia, al loro studio a livello matematico, senza fare alcuna ipotesi sulla loro origine. Nel presente Capitolo ci occuperemo dunque di mostrare un'applicazione fisica di quanto sinora esposto: proveremo ad utilizzare la teoria dei *modi quasi-normali* in un fenomeno molto importante, la collisione e fusione di due buchi neri, studiandone le onde gravitazionali emesse. Nel dettaglio ci interesseremo al *ringdown*, l'ultimo degli stadi principali caratterizzanti questo processo. Grazie all'evento *GW150914* recentemente rilevato dalla collaborazione *LIGO*, avremo modo di confermare o meno l'efficacia delle tecniche trattate in questa tesi nello studio di questo fenomeno, riuscendo dunque ad avere un riscontro diretto con dei dati sperimentali.

3.1 Collisione di due buchi neri

La collisione di due buchi neri è certamente uno degli eventi attualmente conosciuti più potenti in termini energetici e non a caso le prime e uniche onde gravitazionali ad oggi rilevate sono relative a questo fenomeno. La non linearità delle equazioni di Einstein, come già detto, ne rende difficile lo studio nella sua completezza a livello matematico. È possibile, tuttavia, avere un'idea di come si svolge il processo, perlomeno qualitativamente parlando. A tal proposito, è utile suddividerlo in tre stadi, i quali saranno contraddistinti da andamenti particolari:

1. In un primo tempo, si presenterà un sistema binario formato da due buchi neri, i quali ruotano attorno al loro centro di massa. Le continue rotazioni, tuttavia, comportano una lenta e graduale perdita di energia da parte del sistema a causa dell'emissione di onde gravitazionali. Per questo motivo i due corpi anziché mantenere delle orbite costanti spiraleggiano tra loro, diminuendo in tempi molto lunghi la distanza che li

separa. Gradualmente dunque l'attrazione gravitazionale tra questi si intensifica, con il conseguente incremento della loro velocità e dell'emissione di onde gravitazionali. Negli ultimi istanti che precedono lo scontro, il processo si fa talmente intenso da provocare un aumento esponenziale dell'ampiezza delle onde emesse.

2. Nella seconda fase i due buchi neri collidono e i due orizzonti degli eventi si fondono, dando così vita ad un unico buco nero. Il processo risulta particolarmente violento e l'emissione di onde raggiunge in questo istante il suo picco, con la conseguente radiazione di energia il cui ordine di grandezza può risultare pari a diverse masse solari.
3. Il sistema a questo punto non è ancora assestato completamente e continua a irradiare enormi quantità di energia sino a che l'orizzonte degli eventi non raggiunge la sua configurazione finale. Questo andamento prosegue, dunque, per tutto il tempo in cui si presentano variazioni della curvatura all'interno dell'orizzonte. Quest'ultima fase prende il nome di *ringdown*. La radiazione, che possiamo vedere come emissione di energia da parte del buco nero per passare dallo stato "eccitato" a quello di equilibrio, è caratterizzata in questo stadio da un drastico smorzamento che la porta a zero rapidamente.

3.2 Analisi dell'evento GW150914

Il 14 Settembre 2015, alle ore 09:50:45 UTC, i rilevatori di *LIGO* presenti ad Hanford, Washington e a Livingston, Louisiana, hanno rilevato un segnale riconducibile ad un'onda gravitazionale. Andando ad analizzarne la forma è stato possibile determinarne l'origine: l'evento è descritto infatti da un'onda compatibile con quella prodotta durante la collisione di due buchi neri. Mediante l'uso di simulazioni numeriche, rese necessarie in quanto il sistema è fortemente non lineare, è stato possibile determinare il range di valori possibili di massa e momento angolare dei due buchi neri originali e di quello prodotto dalla loro fusione. I risultati finali sono $M_1 = 39_{-4}^{+6} M_\odot$ e $M_2 = 32_{-5}^{+4} M_\odot$ per i primi due, mentre $M_f = 68_{-4}^{+4} M_\odot$ e $a_f/M_f = 0.67_{-0.07}^{+0.05}$ per l'ultimo, con conseguente emissione di energia nel corso di tutto il processo pari a $E = 3.0_{-0.5}^{+0.5} M_\odot c^2$ [24].

3.2.1 Approccio perturbativo

Come detto, l'analisi eseguita dalla collaborazione *LIGO* sull'evento *GW150914* ha fatto principalmente utilizzo di simulazioni, in particolare ponendo attenzione alla prima parte del segnale, dovuta allo spiraleggiare dei due buchi neri di partenza [25, 26]. Nel dettaglio,

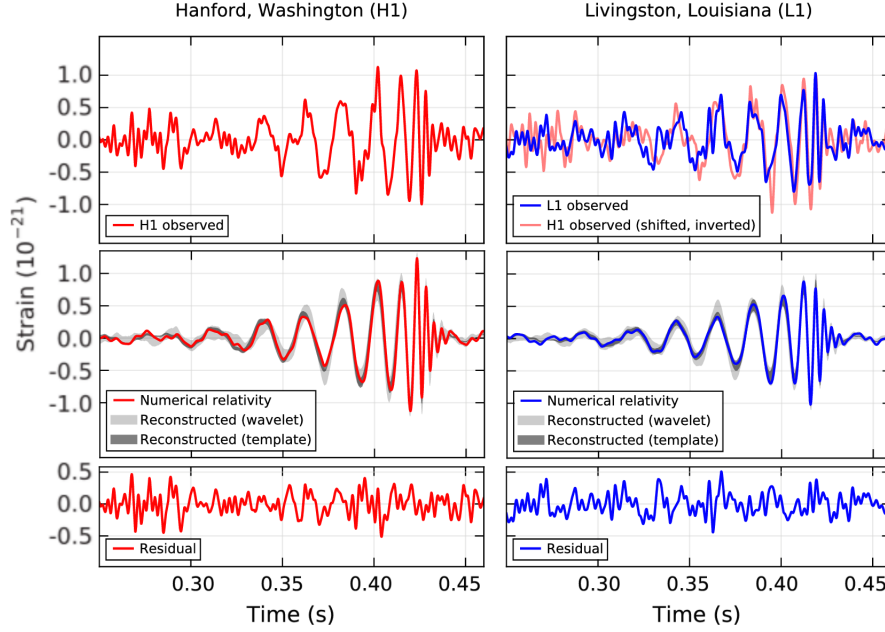


Figura 3.1. La variazione della distanza propria $h(t) = \Delta L(t)/L$ registrata dagli interferometri di Livingston e Hanford e l’andamento previsto da simulazioni numeriche. L’ultimo riquadro presenta i residui tra le due.

dapprima sono state risolte le equazioni di Einstein *esatte*¹, non approssimate, caratterizzate da condizioni iniziali del sistema ben definite, tra le quali si annoverano masse e momenti angolari dei buchi neri. In un secondo luogo, dunque, a ciascuna soluzione calcolata è stata associata una curva che ne descrive il segnale atteso qualora gli interferometri rilevino un evento con quei dati iniziali. Affinché venissero coperti intervalli sufficientemente ampi per ogni parametro che interessa il problema, sono state compute in questo modo approssimativamente 250 000 curve differenti.

Una volta che il segnale vero e proprio è stato rilevato si è poi proceduto con il confronto di questo con ciascuna delle soluzioni calcolate, valutando dunque quale curva ne approssimasse meglio l’andamento; si veda a riguardo la Figura (3.1) per il risultato finale. In realtà, poiché come abbiamo già spiegato il fenomeno è caratterizzato da tre fasi, il procedimento è stato eseguito singolarmente per ciascuna di queste e si è poi verificato che i valori finali così determinati fossero tra loro compatibili.

Vi sono poi ulteriori dettagli da tenere in considerazione, ad esempio la disposizione dei momenti angolari rispetto al momento angolare orbitale del sistema, il redshift o la determinazione del rumore di fondo che altera il segnale rilevato dagli interferometri. Tuttavia, poiché nell’analisi che andremo a presentare non ci interesseremo di questi dettagli, rimandiamo a [26, 27] per ulteriori approfondimenti.

Con gli argomenti sviluppati nel corso di questa tesi, infatti, risulta possibile affrontare

¹E perciò di secondo grado non lineari.

il problema mediante un approccio totalmente differente, di tipo perturbativo. I mezzi a nostra disposizione, tuttavia, permettono una trattazione di fenomeni fisici caratterizzati solamente da una piccola deviazione della metrica da quella di un buco nero; pertanto non saremo in grado di descrivere la dinamica dei due corpi quando questi devono ancora collidere². Ci ridurremo dunque allo studio dell'ultima parte del segnale, nella quale è più probabile che le nostre tecniche possano portare a risultati significativi.

L'idea fondamentale risulta in sé ingenua: si tratta infatti di supporre che la discussione sinora effettuata per i *modi quasi-normali* sia applicabile anche nel caso si stia descrivendo un buco nero in fase di *ringdown*. In questo modo considereremo la continua distorsione dell'orizzonte degli eventi come una perturbazione che porta al suo stato di equilibrio il sistema.

In realtà, poiché l'evento che andremo ad analizzare è il risultato di un collasso di due corpi di massa comparabile, è del tutto naturale attendersi che l'approccio sinora descritto non dia i risultati sperati. Non potendo limitarci a considerare uno dei due buchi neri come una perturbazione nel campo dell'altro, infatti, subito dopo il momento dell'impatto avremo che i riassetamenti del sistema, e dunque le deformazioni dell'orizzonte degli eventi, saranno così intensi da non poter considerare valido il regime perturbativo e pertanto applicabili con successo, in linea teorica, le tecniche esposte nel secondo Capitolo. Vediamo perciò di seguito ciò che si è ottenuto.

3.2.2 Stima di massa e momento angolare del buco nero

I rivelatori di *LIGO* sono dei “semplici” interferometri di Michelson con due braccia della lunghezza di $L_x = L_y = 4\text{ km}$. Un'onda gravitazionale, dunque, verrà misurata come variazione della distanza propria tra questi, $\Delta L = \delta L_x - \delta L_y = h(t)L$ con $h(t)$ la grandezza riportata in Figura (3.1).

Nella trattazione di onde gravitazionali, si è soliti descrivere la perturbazione $h_{\mu\nu}$ fissando un'opportuna gauge, detta *trasversa a traccia nulla* (TT). Mediante questa gauge, che implicitamente utilizzeremo da ora in avanti, $h_{\mu\nu}$ sarà scrivibile mediante due sue sole componenti:

$$h_{\mu\nu}^{TT} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

²In realtà, mediante un approccio perturbativo risulta comunque possibile descriverne in prima approssimazione la dinamica. Noi però non ce ne occuperemo, si veda [16] per un'introduzione a riguardo.

La funzione $h(t)$ rilevata dagli interferometri può venire scritta in termini di h_+ e h_\times come [15, 23]

$$h = h_+ F_+(\theta_S, \phi_S, \psi_S) + h_\times F_\times(\theta_S, \phi_S, \psi_S), \quad (3.1)$$

dove le $F_{+,\times}$ esprimono il peso delle $h_{+,\times}$ a seconda della disposizione dell’apparato strumentale rispetto l’asse di rotazione del buco nero (data da θ_S e ϕ_S) e di un angolo di polarizzazione ψ_S . A tutti gli effetti, una volta che risultano fissati θ_S, ϕ_S e ψ_S , $h(t)$ sarà una sovrapposizione lineare di $h_{+,\times}$ e ne presenterà dunque lo stesso andamento.

Assumiamo ora che $h_{\mu\nu}$ soddisfi le equazioni di Teukosky e che pertanto le onde gravitazionali siano descritte come perturbazioni della metrica del buco nero finale. In questo modo è possibile descrivere h_+ ed h_\times in termini delle funzioni già incontrate ${}_2S_{lm}(a\omega, \theta)$ ed $R_{lm\omega}(r)$ [23]:

$$h_+ + ih_\times = \frac{1}{r^4} \sum_{l,m,n} e^{-i\omega_{lmn}t} {}_2S_{lm}(a\omega, \theta) R_{lm\omega}(r) \sim \frac{1}{r} \sum_{l,m,n} \mathcal{A}_{lmn} e^{-i(\omega_{lmn}t + \phi_{lmn})} {}_2S_{lm}(a\omega, \theta), \quad (3.2)$$

dove si è sfruttato l’andamento asintotico $R_{lm\omega}(r) \sim_{r \rightarrow +\infty} r^3 \mathcal{A}_{lmn} e^{i\phi_{lmn}}$, con \mathcal{A}_{lmn} e ϕ_{lmn} costanti. Ricordando che le frequenze proprie di oscillazione sono caratterizzate sia da una parte immaginaria (negativa) che da una parte reale, possiamo dunque capire che h_+ e h_\times sono descritte da una sommatoria di oscillazioni smorzate esponenzialmente con tempi caratteristici $\tau_{lmn} \equiv 1/\text{Im } \omega_{lmn}$. Nel momento in cui registriamo un segnale, tuttavia, poiché ci aspettiamo che gli eventi di nostro interesse avvengano a distanze molto elevate dalla Terra, tra tutti i modi eccitati dalla collisione rileveremo solamente quello meno smorzato, corrispondente alla $\tilde{\omega}_{lmn}$ con modulo della parte immaginaria minore. Per questo motivo, dunque, ci aspettiamo che il segnale soddisfi in prima approssimazione

$$h_+ + ih_\times \approx \frac{1}{r} \mathcal{A}_{lmn} e^{-i(\tilde{\omega}_{lmn}t + \phi_{lmn})} {}_2S_{lm}(a\tilde{\omega}, \theta). \quad (3.3)$$

Procedendo con un computo dei *modi quasi-normali* [15, 22, 28], si trova che le frequenze che ci interessano e che andremo dunque a considerare sono caratterizzate, a parità di massa e momento angolare del buco nero, da $l = 2, m = 2$ ed $n = 0$.

A questo punto, studiando solamente la parte di segnale relativa al *ringdown*, potremo eseguire un fit del tipo $h(t \geq t_0) = Ae^{-(t-t_0)/\tau} \cos(2\pi f(t-t_0) + \phi_0)$ e ricavare dunque f e τ , corrispondenti a $\text{Re } \omega_{lmn}$ e $\text{Im } \omega_{lmn}$. Qui si pone un problema: è necessario infatti fissare un istante t_0 oltre il quale poter assumere come valido il regime di *ringdown* e precedentemente il quale prevale il segnale dovuto alla collisione dei due buchi neri. A tal proposito, nello studio effettuato dalla collaborazione *LIGO* [26], emerge che un tempo realistico e compatibile con i dati ricavati dalle fasi precedenti del segnale sia $t_0 = 3 \text{ ms}$, riferito rispetto all’istante in cui si è registrato il picco massimo dell’onda. Troviamo in Figura (3.2) i range possibili per (f, τ) che sono stati così determinati, corrispondenti ad un intervallo di credibilità del 90%.

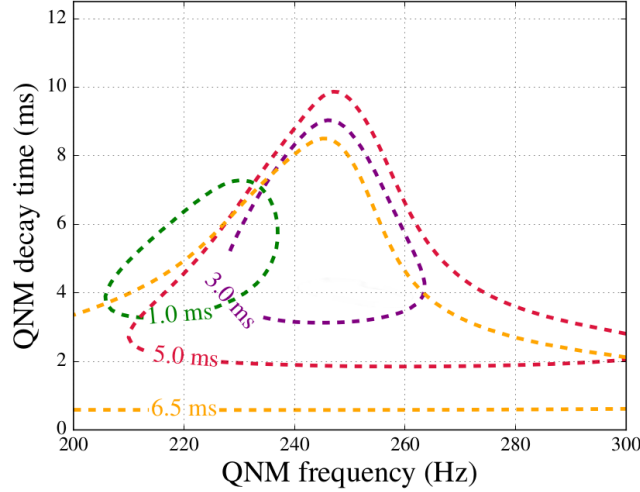


Figura 3.2. I valori possibili ricavati per (ω, τ) . I risultati sono stati ottenuti dalla collaborazione *LIGO*, si veda a riguardo [26].

Sfruttando questo risultato siamo in grado di dare una stima dei valori di momento angolare a_f e massa M_f del buco nero prodotto. Si ricorda infatti che le frequenze proprie di oscillazione per un buco nero di Kerr dipendono da m, l, s, a e M , dove i primi due valori risultano fissati nel momento in cui consideriamo il modo meno smorzato³. Per mezzo delle tecniche presentate nel secondo Capitolo, dunque, ci è possibile associare in modo biunivoco una coppia di valori (M_f, a_f) ad ogni coppia (f, τ) , ovvero scrivere $(M_f, a_f) = \rho(f, \tau)$. In questo modo potremo associare all'intervallo di credibilità rappresentato in Figura (3.2) un rispettivo intervallo espresso in termini di M_f e a_f . Non disponendo di una formula analitica per la funzione ρ si è scelto, come già accennato, di procedere mediante l'utilizzo del metodo della *frazione continua*, calcolando di volta in volta i valori (M_f, a_f) corrispondenti alle coppie (f, τ) che delimitano, appunto, l'intervallo di credibilità.

Nello specifico, è stata utilizzata per semplicità la libreria dei *modi quasi-normali* già calcolati da Berti e Cardoso, reperibile in [28], limitandoci a verificare che effettivamente i valori di nostro interesse fossero corretti. Riportiamo quanto ottenuto in Figura (3.3), dove per confronto viene mostrato l'intervallo calcolato mediante le simulazioni effettuate dalla collaborazione *LIGO* considerando la sola fase di *ringdown*, nonché i risultati finali $M_f = 68_{-4}^{+4} M_\odot$ e $a_f/M_f = 0.67_{-0.07}^{+0.05}$ a cui questa è giunta considerando anche le stime ottenute dallo studio delle altre parti del segnale.

Per una maggiore visione d'insieme è stato computato anche il range di valori associati a $t_0 = 1 \text{ ms}$. Come si vede, mentre per quest'ultimo non vi è sovrapposizione con quanto ricavato dalle simulazioni, con $t_0 = 3 \text{ ms}$ l'approccio perturbativo riesce ad arrivare a risultati perfettamente compatibili con i valori finali proposti, presentando inoltre una

³Ovviamente s è già fissato poiché stiamo considerando perturbazioni gravitazionali.

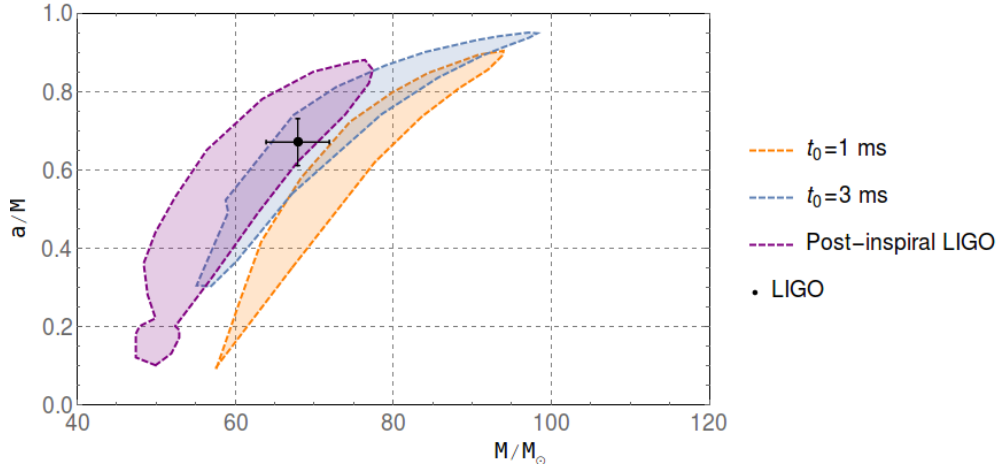


Figura 3.3. I range di valori ottenuti mediante l'approccio perturbativo, rappresentati in arancione per $t_0 = 1 \text{ ms}$ e in blu per $t_0 = 3 \text{ ms}$. Sono riportati inoltre l'intervallo presentato dalla collaborazione *LIGO* in [26], ricavato mediante simulazioni numeriche e delineato in viola, e il valore finale da questa proposto.

discreta sovrapposizione con l'intervallo determinato dalle analisi di *LIGO*, a dispetto di quanto ci si potesse attendere.

Potrebbe sembrare che il valore di t_0 utilizzato sia sufficientemente elevato in modo tale che l'assestamento dell'orizzonte degli eventi durante l'intervallo valutato per il fit possa considerarsi già in regime perturbativo. Ciò tuttavia non è corretto: è possibile vedere, infatti, che all'istante t_0 il segnale risulta ancora dello stesso ordine di grandezza del picco registrato nel momento dello scontro⁴, suggerendo perciò che quest'ipotesi non sia sufficiente a spiegare la bontà di quanto ottenuto.

Nonostante le nostre previsioni, dunque, l'approccio perturbativo riesce a descrivere in modo ottimo un segnale che dovrebbe derivare da un sistema in pieno regime non lineare, ovvero quello di un buco nero in fase di *ringdown*. Il risultato, oltre ad essere già di per sé non banale, è molto importante. Assunto infatti, che una descrizione in *modi quasi-normali* sia corretta, possiamo sfruttarne appieno le sue potenzialità. In particolare, ricordiamo che ci è stato sufficiente determinare un singolo modo per calcolare massa e momento angolare del buco nero. Mediante l'identificazione di almeno due frequenze saremo perciò in grado di effettuare un ulteriore controllo sui dati.

In questa maniera, dunque, avremo un metodo diretto per verificare o meno la validità del *teorema no-hair*, secondo il quale gli unici parametri che caratterizzano la dinamica di un buco nero sono la sua massa, il momento angolare e la carica. Affinché questo risulti valido, infatti, i dati ricavati dallo studio di ogni singolo modo dovranno essere compatibili, in quanto ciascuno di loro determina in modo univoco i valori di⁵ a e M .

⁴Anche dalla Figura (3.1) è possibile notare che il segnale si dimezza dopo un tempo approssimativamente pari a $t_{1/2} \approx 5 \text{ ms}$.

⁵I buchi neri di origine astrofisica presentano una carica nulla e vengono dunque ben descritti dalla

Ancora più importante, infine, è invece l'eventualità in cui un simile test abbia esito negativo: in tal caso la discrepanza tra risultati sperimentali e teorici dovrà trovare una spiegazione in nuovi modelli e sarà indice, dunque, dell'incapacità della Relatività Generale di spiegare completamente il fenomeno interessato.

Bibliografia

- [1] M. Abate, F. Tovena, *Geometria Differenziale*, Springer (2011).
- [2] E. Santopinto, M. Giannini, F. Iachello, *Algebraic approach to the Hypercoulomb Problem*, a cura di B. Gruber, Springer (1995).
- [3] F. Iachello, *Algebraic Theory of the three-body problem*, a cura di B. Gruber, Springer (1995).
- [4] F. Iachello, *Lie Algebras and Applications*, Springer (2006).
- [5] F. Iachello, D. R. Levine, *Algebraic Theory of Molecules*, Oxford University Press (1995).
- [6] T. Regge, J. A. Wheeler, *Stability of a Schwarzschild Singularity*, Phys. Rev. 108 (1957), 1063.
- [7] L. A. Edelstein, C. V. Vishveshwara, *Differential equations for perturbations on the schwarzschild metric*, Phys. Rev. D1 (1970), 3514.
- [8] S. A. Teukolsky, *Perturbations of a rotating black hole I. Fundamental equations for a gravitational, electromagnetic, and neutrino-field perturbations*, Phys. Rev. Lett. 29 (1972), 1114.
- [9] S. Carrol, *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*, Addison-Wesley (2003).
- [10] A. Nagar, L. Rezzolla, *Gauge-invariant Non-spherical Metric Perturbations of Schwarzschild Black-Hole Spacetimes*, Class. Quant. Grav. 22 (2005), [gr-qc/0502064].
- [11] S. Chandrasekhar, *The Mathematical Theory of Black Holes*, Oxford University Press, New York (1983).
- [12] E. Seidel, S. Iyer, *Black-hole normal modes: A WKB approach. IV. Kerr black holes*, Phys. Rev. D41 (1990), 374.
- [13] N. Andersson, *Excitation of Schwarzschild black-hole quasinormal modes*, Phys. Rev. D 51 (1995), 353.
- [14] E. Berti, V. Cardoso, *Quasinormal ringing of Kerr black holes. I. The Excitation factors*, Phys. Rev. D74 (2006), [gr-qc/0605118].
- [15] E. Berti, V. Cardoso, A. O. Starinets, *Quasinormal modes of black holes and black branes*, Class. Quant. Grav. 26 (2009), [gr-qc/0905.2975].
- [16] I. D. Novikov, V. Frolov, *Physics of black holes*, Kluwer Academic Publishers (1996).

-
- [17] N. Andersson, *Evolving test-fields in a black-hole geometry*, Phys. Rev. D55 (1997), [gr-qc/9607064].
- [18] B. F. Schutz, C. M. Will, *Black hole normal modes: a semianalytic approach*, Astrophys. J. 291 (1985), L33.
- [19] V. Cardoso, A. S. Miranda, E. Berti, H. Witek, V. T. Zanchin, *Geodesic stability, Lyapunov exponents and quasinormal modes*, Phys. Rev. D79 (2009), [hep-th/0812.1806].
- [20] V. Ferrari, B. Mashhoon, *New approach to the quasinormal modes of a black hole*, Phys. Rev. D30 (1984), 295.
- [21] E. W. Leaver, *An Analytic Representation for the Quasi-Normal Modes of Kerr Black Holes*, Proc. Roy. Soc. Lond. A402 (1985), 285.
- [22] E. Berti, *Black hole quasinormal modes: hints of quantum gravity?*, (2004), [gr-qc/0411025].
- [23] E. Berti, V. Cardoso, C. M. Will, *On gravitational-wave spectroscopy of massive black holes with the space interferometer LISA*, Phys. Rev. D73 (2006), 064030, [gr-qc/0512160].
- [24] The LIGO Scientific Collaboration, the Virgo Collaboration, *Properties of the Binary Black Hole Merger GW150914*, Phys. Rev. Lett. 116 (2016), 241102, [gr-qc/1602.03840].
- [25] The LIGO Scientific Collaboration, the Virgo Collaboration, *Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger*, Phys. Rev. Lett. 116 (2016), 061102.
- [26] The LIGO Scientific Collaboration, the Virgo Collaboration, *Tests of general relativity with GW150914*, Phys. Rev. Lett. 116 (2016), 221101, [gr-qc/1602.03841].
- [27] The LIGO Scientific Collaboration, the Virgo Collaboration, *GW150914: First results from the search for binary black hole coalescence with Advanced LIGO*, Phys. Rev. D 93 (2016), 122003, [gr-qc/1602.03839].
- [28] E. Berti, V. Cardoso, <http://www.phy.olemiss.edu/~berti/ringdown/>.