

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Risoluzione angolare dell’interferometro LISA

Relatore

Prof. Sabino Matarrese

Correlatore

Dr. Angelo Ricciardone

Laureando

Matteo Pegorin

Anno Accademico 2019/2020

Indice

| | | |
|----------|---------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 1 | Introduzione | 1 |
| 1.1 | Interferometro LISA | 1 |
| 1.2 | Buchi neri supermassicci binari | 2 |
| 2 | Relatività generale e onde gravitazionali | 3 |
| 2.1 | Onde gravitazionali in teoria linearizzata | 3 |
| 2.1.1 | Propagazione delle onde gravitazionali nel vuoto | 3 |
| 2.1.2 | Generazione di onde gravitazionali da sistema binario | 4 |
| 2.2 | Espansione post-Newtoniana | 7 |
| 2.2.1 | Generazione di onde gravitazionali da inspiral SMBHBs | 7 |
| 2.3 | Propagazione di onde gravitazionali lungo distanze cosmologiche | 8 |
| 2.3.1 | Principio cosmologico e metrica di Friedmann-Robertson-Walker | 8 |
| 2.3.2 | Effetti sulla propagazione delle onde gravitazionali | 9 |
| 3 | Modellizzazione di LISA e analisi del segnale | 11 |
| 3.1 | Modellizzazione dell'interferometro LISA | 11 |
| 3.1.1 | Pattern functions degli interferometri | 12 |
| 3.1.2 | Modulazione del segnale dovuta al moto orbitale | 13 |
| 3.2 | Metodologie di analisi del segnale | 14 |
| 3.2.1 | Matched filtering | 15 |
| 3.2.2 | Stima dell'incertezza dei parametri | 16 |
| 4 | Risultati e conclusioni | 17 |
| 4.1 | Risultati | 17 |
| 4.2 | Conclusioni | 20 |

Capitolo 1

Introduzione

Il *Laser Interferometer Space Antenna* (LISA) sarà un osservatorio spaziale di onde gravitazionali. Dato che ad ogni istante potrà rilevare onde gravitazionali provenienti da quasi l'intera sfera celeste, nel presente lavoro di tesi si andrà a stimare la risoluzione angolare con cui esso sarà in grado di localizzare sistemi binari di buchi neri supermassicci (SMBHBs) a distanze cosmologiche, valutando se la regione di cielo individuata sia sufficientemente ridotta per permettere osservazioni nello spettro elettromagnetico da parte di strumenti puntati, precedentemente alla coalescenza del sistema o nelle ore immediatamente successive. Nella prima parte saranno presentati alcuni concetti relativi alla generazione di onde gravitazionali da parte di sistemi binari, con correzioni derivanti dall'espansione post-Newtoniana, e saranno discussi alcuni effetti indotti sulle onde gravitazionali durante la loro propagazione lungo distanze cosmologiche. Nella seconda parte si modellerà l'interferometro LISA e la sua risposta ad onde gravitazionali, considerando anche le modulazioni del segnale misurato indotte dal moto nello spazio dello strumento. Successivamente saranno presentate alcune metodologie di analisi del segnale, in particolare la tecnica del *matched filtering*. Saranno infine esposti i risultati ottenuti utilizzando i più recenti dati tecnici disponibili della missione.

1.1 Interferometro LISA

Il *Laser Interferometer Space Antenna* è un progetto di un osservatorio spaziale di onde gravitazionali a interferometria laser. La prima proposta di tale progetto risale agli anni 1990 e, dopo varie modifiche, nel 2017 è stato selezionato dall'ESA (*European Space Agency*) come terza *large mission* del *Cosmic Vision 2015-2025 Programme*, con una partecipazione ridotta da parte della NASA (*National Aeronautics and Space Administration*). La data di lancio è prevista nel 2034, con una durata nominale della fase scientifica di 4 anni; tuttavia si pianifica la possibilità di un'estensione fino a 10 anni. La missione attualmente è nella fase iniziale A (*Feasibility*), che dovrebbe terminare con la presentazione del progetto preliminare nei prossimi anni, pertanto le specifiche non sono ancora definitive. In questa tesi si utilizzeranno i più recenti dati tecnici disponibili [24, 3, 7, 18].

Come schematizzato in figura 1.1, LISA sarà composto da una costellazione di tre satelliti in orbite eliocentriche simili a quella della Terra. Il moto complessivo della costellazione risulterà mantenere i tre satelliti ai vertici di un triangolo approssimativamente equilatero, i cui lati, di circa 2.5 milioni di chilometri, rappresentano i bracci dell'interferometro; al contempo tale triangolo ruoterà su sé stesso a causa della meccanica orbitale. Ogni satellite conterrà, seguendone il percorso, due *test masses* che, durante la fase scientifica della missione, percorreranno in ottima approssimazione le geodetiche dello spazio tempo, con minime accelerazioni spurie nelle frequenze di interesse; la fattibilità di tale tecnica è già stata dimostrata con ottimi risultati dalla missione *LISA Pathfinder* [5]. Tale situazione di caduta libera rappresenta una condizione ideale per la rilevazione delle onde gravitazionali, specialmente a basse frequenze, per cui LISA sarà maggiormente sensibile nella banda compresa tra 0.1 mHz e 0.1 Hz, andando a complementare gli interferometri terrestri. In conseguenza di ciò i principali eventi rilevabili da LISA saranno sistemi binari ultra-compatti nella nostra galassia; *extreme mass ratio inspirals* fino a redshift cosmologici pari a $z \sim 0.7$, cioè spiraleggiamento di sistemi binari di corpi con un rapporto di mas-

se estremo; oltre all'*inspiral* e coalescenza di sistemi binari di buchi neri supermassicci fino a redshift cosmologici pari a $z \sim 20$, su cui questo lavoro sarà focalizzato. Sarà inoltre possibile effettuare verifiche sulla validità della relatività generale, studiare l'evoluzione di buchi neri e galassie primordiali, fornire misure indipendenti di parametri cosmologici come la costante di Hubble, oltre a rilevare fondi stocastici di onde gravitazionali prodotte nell'universo primordiale a scale di energia dell'ordine del TeV [3, 36, 6]. La rilevazione di onde gravitazionali avverrà tramite la misura interferometrica della variazione della lunghezza del percorso ottico tra *test masses* ai vertici di ogni lato. Tale distanza tuttavia risulterà modificata dalla meccanica orbitale, da perturbazioni gravitazionali indotte dai vari corpi del sistema solare, oltre che da diversi effetti previsti dalla relatività generale, tra cui il ritardo temporale di Shapiro, il redshift gravitazionale e la deflessione della luce [33]. Queste variazioni, fino all'ordine del percento, potranno essere separate dal segnale gravitazionale in virtù del fatto che agiscono su scale temporali dell'ordine di diversi mesi. Il limite alla sensibilità dello strumento sarà dato da varie fonti di rumore, richiedendo l'impiego di tecniche avanzate per la loro mitigazione, come il *time-delay interferometry*.

Inoltre LISA non sarà uno strumento puntato, essendo invece in grado di rilevare ad ogni istante i segnali di onde gravitazionali provenienti da quasi ogni direzione. Tuttavia, a differenza della rete di interferometri terrestri, non sarà possibile impiegare la tecnica della triangolazione mediante differenza dei tempi di arrivo delle onde gravitazionali. Si rivela invece necessario studiare la modulazione del segnale indotta dalla risposta caratteristica dello strumento ad una determinata onda gravitazionale ed alla sua direzione; in particolare modo è necessario analizzare l'evoluzione temporale di tale modulazione dovuta al moto rotatorio ed orbitale di LISA.

1.2 Buchi neri supermassicci binari

Con la terminologia buco nero supermassiccio ci si riferisce ad un buco nero con massa compresa tra $10^5 M_\odot$ e $10^{10} M_\odot$, dove $M_\odot \approx 2 \cdot 10^{30}$ kg è la massa solare [26]. Di particolare interesse per questo lavoro sarà il caso di sistemi binari di buchi neri supermassicci, *supermassive black hole binaries* (SMBHBs).

L'evoluzione finale di un sistema binario compatto, ad esempio di una coppia di buchi neri supermassicci di massa m_1 e m_2 , si divide in tre fasi successive: *inspiral*, fase in cui i due corpi spiraleggiano diminuendo la separazione relativa, *merger*, fase in cui essi si fondono, *ringdown*, fase con cui il sistema, ora singolo ma perturbato, si diseccita attraverso l'emissione di onde gravitazionali. Di seguito ci si limiterà alla sola fase di *inspiral*, che convenzionalmente si considera terminare quando la distanza tra i due corpi compatti risulta paragonabile all'*innermost stable circular orbit* (ISCO) di un buco nero di massa $m_1 + m_2$, cioè al raggio minimo affinché l'orbita circolare di una massa di test attorno al corpo massivo sia stabile, pari a $R_{ISCO} = \frac{6G(m_1+m_2)}{c^2}$ nel caso semplificato di metrica di Schwarzschild.

Si presuppone che la maggior parte delle galassie a basso redshift cosmologico contengano almeno un buco nero supermassiccio al loro interno, come per esempio la Via Lattea nelle vicinanze della sorgente Sgr A*. Inoltre anche a redshift elevati, dunque nei primi miliardi di anni di vita dell'universo, osservazioni di nuclei galattici attivi fanno presumere esistessero sin d'allora buchi neri supermassicci. Si ipotizza che essi si siano evoluti in vari stadi, attraverso *mergers* successivi di buchi neri di massa minore. In particolare non è ancora nota con certezza la quantità di *inspirals* di SMBHBs che LISA potrà osservare, poiché per arrivare a tale fase i buchi neri devono avvicinarsi, prima a causa del cosiddetto attrito dinamico, e successivamente con la perdita di energia e momento associata all'emissione di onde gravitazionali. Tuttavia permane il cosiddetto *last-parsec problem* in una fase intermedia in cui i due precedenti fenomeni risultano poco efficaci, ed a cui è associata una maggiore incertezza riguardo il tempo di evoluzione del sistema [26]. Si stima in ogni modo che il numero di *inspiral* di SMBHBs rilevabili da LISA possa essere compreso tra 1 e 1000 eventi l'anno [17].

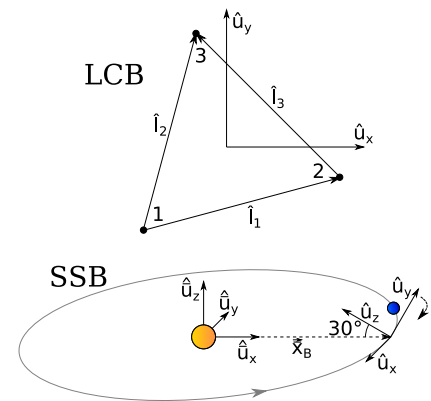


Figura 1.1 – Schematizzazione dei sistemi di riferimento del baricentro della costellazione di LISA (LCB) e del baricentro del sistema solare (SSB), descritti in dettaglio nella sezione 3.1. In quest'ultimo sistema di riferimento viene descritto il moto orbitale di LISA, qui schematizzato non in scala con il Sole in arancione e la Terra in blu come riferimento.

Capitolo 2

Relatività generale e onde gravitazionali

Le equazioni di campo di Einstein¹, con costante cosmologica Λ , sono:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

con $T_{\mu\nu}$ tensore energia-impulso complessivo, $R_{\mu\nu}$ tensore di curvatura di Ricci, $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = R^\mu{}_\mu$ curvatura scalare, G costante di gravitazione universale, c velocità della luce nel vuoto.

2.1 Onde gravitazionali in teoria linearizzata

In approssimazione di campo debole, quando la metrica $g_{\mu\nu}$ è approssimativamente minkowskiana $\eta_{\mu\nu}$, si può linearizzare la teoria di campo di Einstein (2.1). L'ulteriore ipotesi di distanze molto ridotte rispetto alla scala dell'universo osservabile permette di poter trascurare la costante cosmologica Λ . Per ottenere tale teoria si impone che il tensore metrico $g_{\mu\nu}$ sia $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, con $|h_{\mu\nu}| \ll 1$, e che venga utilizzata la metrica minkowskiana $\eta_{\mu\nu}$ per alzare ed abbassare gli indici ed eseguire le contrazioni; nella teoria linearizzata dunque l'operatore differenziale di d'Alembert risulta $\square = \eta_{\mu\nu}\partial^\mu\partial^\nu$. Si procede successivamente a sviluppare l'equazione tensoriale (2.1) mantenendo al massimo termini lineari in $h_{\mu\nu}$.

Attraverso la definizione del tensore traccia inversa $\bar{h}_{\mu\nu} := h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta}$, ed imponendo la gauge di Lorentz $\partial^\nu\bar{h}_{\mu\nu} = 0$, attraverso opportune trasformazioni di coordinate $x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x)$, con $|\partial_\mu\xi_\nu| \lesssim |h_{\mu\nu}|$, si ottiene [19]:

$$\square\bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (2.2)$$

Essa è l'equazione per la teoria linearizzata di campo debole in presenza di un tensore energia impulso generico, nel quale tuttavia si trascura il contributo dovuto all'energia gravitazionale associata ad $h_{\mu\nu}$.

2.1.1 Propagazione delle onde gravitazionali nel vuoto

Nel caso in cui si stia considerando la propagazione delle onde gravitazionali nel vuoto, per cui $T_{\mu\nu} = 0$, l'equazione (2.2) si riduce all'equazione delle onde $\square\bar{h}_{\mu\nu} = 0$. In questo caso è inoltre possibile operare un ulteriore cambio di coordinate per utilizzare la libertà di gauge residua, ponendosi in *transverse-traceless* gauge, o TT gauge. In essa la perturbazione $h_{\mu\nu}$ della metrica piatta assume traccia nulla,

¹La convenzione adottata per la segnatura della metrica $g_{\mu\nu}$ è (3, 1), pertanto $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-, +, +, +)$. In uno spaziotempo con metrica $\eta_{\mu\nu}$ la convenzione utilizzata per la trasformata di Fourier n -dimensionale e l'operazione inversa risulta $\tilde{F}(k) = \int d^n x F(x) e^{-ik_\mu x^\mu}$ e $F(x) = \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \tilde{F}(k) e^{ik_\mu x^\mu}$. Per funzioni del tempo essa si riduce a $\tilde{F}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt F(t) e^{i2\pi ft}$ ed $F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} df \tilde{F}(f) e^{-i2\pi ft}$, nel senso delle distribuzioni vale dunque $\int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i2\pi ft} = \delta(f)$.

$h^\mu{}_\mu = \bar{h}^\mu{}_\mu = 0$, da cui segue $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$, e, scelto un asse cartesiano per la propagazione delle eventuali onde gravitazionali piane, le uniche componenti non nulle sono quelle con indici spaziali differenti da quello associato all'asse prescelto. Inoltre in questa gauge si può facilmente verificare che i gradi di libertà associati al tensore $h_{\mu\nu}$ sono due, pertanto esistono due polarizzazioni indipendenti associate ad un'onda gravitazionale, che vengono definite $+$ (*plus*) e \times (*cross*). Dato che le componenti del tensore $h_{\mu\nu}$ dipendono dalla gauge in cui si lavora, esso verrà di seguito denotato con $h_{\mu\nu}^{TT}$ nel caso di TT gauge.

Dalla condizione $\square h_{\mu\nu}^{TT}(x) = 0$ valida in TT gauge si può ottenere una generica soluzione reale non costante utilizzando la trasformata di Fourier e lavorando nel cono di luce $k_\mu k^\mu = 0$, con $k^\mu = (\frac{\omega}{c}, \vec{k})$ quadrivettore, ω pulsazione e \vec{k} vettore d'onda per un'onda piana, $\mathcal{A}_{ij}(\vec{k})$ un opportuno tensore, ottenendo [22, 25]:

$$h_{ij}^{TT}(x) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \left(\mathcal{A}_{ij}(\vec{k}) e^{ik_\alpha x^\alpha} + \mathcal{A}_{ij}^*(\vec{k}) e^{-ik_\alpha x^\alpha} \right), \quad (2.3)$$

dove gli indici ij indicano la sommatoria solo sulle tre componenti spaziali, dato che vale identicamente $h_{00}^{TT} = h_{0j}^{TT} = h_{i0}^{TT} = 0$, e l'integrale si intende esteso a tutto lo spazio tridimensionale relativo al vettore d'onda \vec{k} . Dalla contrazione $k_\mu k^\mu = 0$ si ottiene $\frac{\omega^2}{c^2} = |\vec{k}|^2$, da cui seguono $|\vec{k}| = \frac{2\pi f}{c}$, con $f > 0$ frequenza della specifica onda piana, e $\frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} = \frac{f^2 df d\Omega}{c^3}$, con $d\Omega = d(\cos(\theta)) d\phi$ l'angolo solido infinitesimo e θ, ϕ gli angoli in coordinate sferiche.

Poste $x = (t, \vec{x})$ le coordinate temporali e spaziali, $\hat{n} = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}$ il versore che indica la direzione di propagazione dell'onda, di componenti cartesiane $\hat{n} = (\sin(\theta) \cos(\phi), \sin(\theta) \sin(\phi), \cos(\theta))$, e intendendo con *c.c.* il complesso coniugato del termine a cui segue; sviluppando l'integrale (2.3) si ottiene

$$h_{ij}^{TT}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{f^2 df}{c^3} \int d\Omega \left(\mathcal{A}_{ij}(f, \hat{n}) e^{-i2\pi f(t - \frac{\hat{n} \cdot \vec{x}}{c})} + c.c. \right). \quad (2.4)$$

Dato che il caso d'interesse di questo lavoro è quello di onde gravitazionali con una direzione di propagazione $\hat{n} = \hat{n}_0$ ben precisa, nel precedente integrale si può assumere $\mathcal{A}_{ij}(f, \hat{n}) = A_{ij}(f) \delta^{(2)}(\hat{n} - \hat{n}_0)$, svolgendo dunque l'integrale sull'angolo solido e selezionando la direzione di propagazione dell'onda \hat{n}_0 , che successivamente verrà nuovamente chiamata \hat{n} . In questa situazione risulta inoltre utile introdurre i tensori di polarizzazione così definiti [25]:

$$e_{ij}^+(\hat{n}) := \hat{u}_i \hat{u}_j - \hat{v}_i \hat{v}_j \quad e_{ij}^\times(\hat{n}) := \hat{u}_i \hat{v}_j + \hat{v}_i \hat{u}_j, \quad (2.5)$$

con $\{\hat{u}, \hat{v}, \hat{n}\}$ terna ortonormale di versori, $+$, \times le due possibili polarizzazioni dell'onda gravitazionale corrispondenti alla scelta di assi operata. Lavorando ad \hat{n} fissato, grazie ai tensori $e_{ij}^+(\hat{n})$ ed $e_{ij}^\times(\hat{n})$ è possibile scomporre l'onda gravitazionale nelle due polarizzazioni, e definire le ampiezze $\tilde{h}_+(f)$ e $\tilde{h}_\times(f)$ a partire dalla relazione $\tilde{h}_+(f) e_{ij}^+(\hat{n}) + \tilde{h}_\times(f) e_{ij}^\times(\hat{n}) := \frac{f^2}{c^3} A_{ij}(f)$. In questo modo, assorbendo il complesso coniugato attraverso l'estensione dell'integrale (2.4) alle frequenze negative e la definizione $\tilde{h}_A(-f) := \tilde{h}_A^*(f)$ con $A = +, \times$; per un'onda gravitazionale che si propaga in direzione \hat{n} fissata si ottiene:

$$h_{ij}^{TT}(t, \vec{x})_{\hat{n}} = \int_{-\infty}^{+\infty} df \left(\tilde{h}_+(f) e_{ij}^+(\hat{n}) + \tilde{h}_\times(f) e_{ij}^\times(\hat{n}) \right) e^{-i2\pi f(t - \frac{\hat{n} \cdot \vec{x}}{c})}. \quad (2.6)$$

2.1.2 Generazione di onde gravitazionali da sistema binario

Una soluzione generica dell'equazione (2.2), con la richiesta aggiuntiva di causalità per la generazione di radiazione, può essere ottenuta mediante il metodo della funzione di Green ritardata [22]:

$$\bar{h}_{\mu\nu}(t, \vec{x}) = \frac{4G}{c^4} \int d^3\vec{y} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} T_{\mu\nu}(t_{ret}, \vec{y}), \quad (2.7)$$

con $t_{ret} = t - \frac{|\vec{x} - \vec{y}|}{c}$ tempo ritardato, che fisicamente tiene conto della velocità di propagazione finita dell'informazione, $|\vec{x} - \vec{y}|$ distanza spaziale valutata usando η_{ij} .

Lontano dalla sorgente è possibile ottenere il tensore $h_{ij}^{TT}(t, \vec{x})$ in TT gauge a partire da (2.7) in gauge di Lorentz secondo la relazione $h_{ij}^{TT} = \Lambda_{ij,kl}(\hat{n}) \bar{h}_{kl}$, con $\hat{n} = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$ e i tensori $\Lambda_{ij,kl}(\hat{n}) := P_{ik}P_{jl} - \frac{1}{2}P_{ij}P_{kl}$, $P_{ij}(\hat{n}) := \delta_{ij} - n_i n_j$ [25].

Risulta utile, sotto le condizioni di sistema compatto, $T_{\mu\nu}(t, \vec{y}) = 0$ per $|\vec{y}| > d$, ed elevata distanza $r = |\vec{x}| \gg d$ da esso, adoperare lo sviluppo in multipoli. In esso si esegue l'espansione $|\vec{x} - \vec{y}| = r - \hat{n} \cdot \vec{y} + o(\frac{1}{r})$, per cui nell'equazione (2.7) si ottiene, mantenendo solo i termini $o(\frac{1}{r})$:

$$h_{ij}^{TT}(t, \vec{x}) = \frac{1}{r} \frac{4G}{c^4} \Lambda_{ij,kl} \int d^3\vec{y} T_{kl} \left(t - \frac{r}{c} + \frac{\hat{n} \cdot \vec{y}}{c}, \vec{y} \right). \quad (2.8)$$

Nell'ipotesi che le velocità v del sistema siano ridotte, $v \ll c$, si ha che la distribuzione di energia e di quantità di moto variano con un tempo caratteristico $T \sim \frac{d}{v} \gg \frac{d}{c}$, pertanto $\frac{\hat{n} \cdot \vec{y}}{c} < \frac{d}{c} \ll \frac{d}{v} = T$, dunque la variazione di $T_{\mu\nu}$ nell'intervallo $\frac{\hat{n} \cdot \vec{y}}{c}$ è ridotta, per cui è possibile espandere tale tensore attorno al tempo $t - \frac{r}{c}$ in funzione di $\frac{\hat{n} \cdot \vec{y}}{c}$, ottenendo $T_{kl} \left(t - \frac{r}{c} + \frac{\hat{n} \cdot \vec{y}}{c}, \vec{y} \right) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m T_{kl}}{\partial t^m} \left(t - \frac{r}{c}, \vec{y} \right) \left(\frac{\hat{n} \cdot \vec{y}}{c} \right)^m$. Risulta utile definire le quantità $S^{kl,r\dots s}(t) = \int_V d^3\vec{y} T^{kl}(t, \vec{y}) y^r \dots y^s$, con V volume di integrazione spaziale che contiene completamente il sistema, in modo che l'equazione (2.8) diventi

$$h_{ij}^{TT}(t, \vec{x}) = \frac{1}{r} \frac{4G}{c^4} \Lambda_{ij,kl} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!} \frac{1}{c^m} \frac{\partial^m S_{kl}^{r\dots s}}{\partial t^m} \left(t - \frac{r}{c} \right) n^r \dots n^s, \quad (2.9)$$

dove gli indici uguali si intendono contratti secondo la metrica euclidea, la notazione $r\dots s$ nell' m -esimo addendo indica la sequenza di m indici, ed n^t rappresenta la componente t -esima del versore \hat{n} .

Nella teoria linearizzata, la condizione della gauge di Lorentz $\partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu} = 0$ congiuntamente con (2.2) implicano $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$, cioè la conservazione del tensore energia-impulso interpretata nello spaziotempo piatto. Da quest'ultima è possibile dimostrare che, dall'ipotesi che il supporto spaziale di $T_{\mu\nu}$ sia contenuto in una regione spaziale V limitata a tempo fissato, ed usando $\partial_0 T^{0\nu} = -\partial_i T^{i\nu}$, la quantità $P^\nu := \int_V d^3\vec{y} T^{0\nu}$ è un tensore conservato, nel senso che $\partial_0 P^\nu = 0$ [22]. Dalle ipotesi precedenti si ricavano, integrando per parti, le relazioni $\int_V d^3\vec{y} y^i y^j \frac{\partial^2 T^{00}}{\partial t^2}(t, \vec{y}) = c^2 \int_V d^3\vec{y} y^i y^j \partial_k \partial_l T^{kl}(t, \vec{y}) = 2c^2 S^{ij}(t, \vec{y})$. La componente T^{00} dovrebbe contenere tutti i contributi alla densità di energia, tuttavia, ipotizzando che le velocità e le energie del sistema siano ridotte, essa è approssimativamente proporzionale alla densità di massa ρ , $T^{00} \approx c^2 \rho$. Per le proprietà di $\Lambda_{ij,kl}$ risulta talvolta utile, seppur equivalente, lavorare con il momento di quadrupolo Q^{kl} , la cui derivata seconda risulta $\ddot{Q}^{kl}(t) = 2(S^{kl} - \frac{1}{3}\delta^{kl}S_{ii})$ [25]. Troncando l'espansione (2.9) al primo termine si ottiene la radiazione gravitazionale emessa in approssimazione di quadrupolo di massa:

$$h_{ij}^{TT}(t, \vec{x}) = \frac{1}{r} \frac{2G}{c^4} \Lambda_{ij,kl}(\hat{n}) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_V d^3\vec{y} y^k y^l \rho \left(t - \frac{r}{c}, \vec{y} \right). \quad (2.10)$$

Si considera ora un sistema isolato non relativistico composto da due corpi di massa m_1 ed m_2 , la cui coordinata relativa $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ compie un'orbita circolare di raggio R costante nel piano xy . Essendo nella teoria linearizzata, si sceglie un sistema di riferimento in cui l'origine corrisponde con il centro di massa classicamente definito, dato che da $\partial_0 P^i = 0$ questa scelta non influirà sulla generazione di onde gravitazionali.

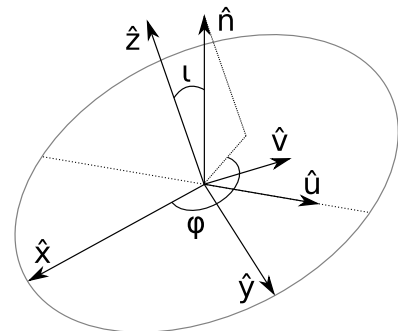


Figura 2.1 – Schematizzazione dei sistemi di riferimento adoperati. La circonferenza, con gli assi \hat{x} e \hat{y} del sistema cartesiano $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$ centrato sul centro di massa, giacciono sul piano dell'orbita. Il sistema di riferimento ortonormale $\{\hat{u}, \hat{v}, \hat{n}\}$ è stato descritto nella sezione 2.1.1, con \hat{n} direzione lungo cui si trova l'osservatore, \hat{u} che giace sul piano dell'orbita e punta nella direzione del nodo ascendente, cioè tra i due nodi quello nel quale la velocità dei corpi è direzionata verso l'emisfero boreale per l'osservatore. Le lunghezze dei versori non sono state rispettate per chiarezza.

Definite la massa ridotta $\mu := \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ e massa totale $m := m_1 + m_2$, valgono le relazioni $\vec{r}_1 = \frac{\mu}{m_1} \vec{r}$ e $\vec{r}_2 = -\frac{\mu}{m_2} \vec{r}$. Posto $\vec{r}(t) = R(\cos(\omega_s t + \frac{\pi}{2}), \sin(\omega_s t + \frac{\pi}{2}), 0)$, trattando la struttura spaziale dei corpi come puntiforme, la densità risulta $\rho(t, \vec{y}) = m_1 \delta^{(3)}(\vec{y} - \vec{r}_1(t)) + m_2 \delta^{(3)}(\vec{y} - \vec{r}_2(t))$. Valutando (2.10) si ottiene $h_{ij}^{TT}(t, \vec{x}) = -\frac{1}{r} \frac{4G}{c^4} \mu R^2 \omega_s^2 \Lambda_{ij,kl} ((\delta^{k1} \delta^{l1} - \delta^{k2} \delta^{l2}) \cos(2\omega_s t_{ret}) + (\delta^{k2} \delta^{l1} + \delta^{k1} \delta^{l2}) \sin(2\omega_s t_{ret}))$, con $t_{ret} = t - \frac{r}{c}$. Questa formula risulta approssimativamente valida anche nel caso in cui il raggio sia una funzione del tempo lentamente variabile, cioè $\frac{dR(t)}{dt} \ll \omega_s R(t)$ e $\frac{d^2 R(t)}{dt^2} \ll \omega_s^2 R(t)$.

Considerando un osservatore in direzione $\hat{n} = (\sin(\iota)\cos(\varphi), \sin(\iota)\sin(\varphi), \cos(\iota))$ è possibile definire un secondo sistema ortonormale Σ' come descritto in Figura 2.1, dove in particolare ι è l'angolo tra la normale al piano dell'orbita e la direzione di osservazione. Valutando le componenti di h_{ij}^{TT} e dei tensori di polarizzazione (2.5) nel sistema ortonormale Σ' si ottiene $h'_{ij}{}^{TT} = h_+(t, r, \iota, \varphi) e'_{ij}{}^+ + h_{\times}(t, r, \iota, \varphi) e'_{ij}{}^{\times}$, con $h_+ = \frac{2G}{rc^4}(S'_{11} - S'_{22})$ e $h_{\times} = \frac{4G}{rc^4} S'_{12}$, dove S'_{ij} sono le componenti del tensore S_{kl} valutate nel sistema Σ' . Data dunque la matrice di rotazione R_{ij} tra i due sistemi, tale che per un vettore valga $a'_i = R_{ij} a_j$, si ha $S'_{ij} = R_{ik} R_{jl} S_{kl}$. Utilizzando i risultati precedenti si ottiene $h_+ = \frac{1}{r} \frac{4G}{c^4} R^2 \mu \omega_s^2 \frac{(1+\cos^2(\iota))}{2} \cos(2\omega_s t_{ret} - 2\varphi)$ e $h_{\times} = \frac{1}{r} \frac{4G}{c^4} R^2 \mu \omega_s^2 \cos(\iota) \sin(2\omega_s t_{ret} - 2\varphi)$. Considerando il caso, nelle attuali approssimazioni valido, in cui il piano orbitale non precede rispetto alla direzione di osservazione \hat{n} , i due sistemi di riferimento possono essere considerati fissi e pertanto l'angolo φ è una costante, che potrà successivamente essere riassorbita con altre costanti in una fase ϕ . Si può inoltre notare come la frequenza associata al termine di quadrupolo, predominante nel caso non relativistico, sia il doppio della frequenza orbitale del sistema, pertanto è usuale definire $\omega := 2\omega_s$ e $f = \frac{\omega_s}{\pi}$, rappresentanti rispettivamente la pulsazione e la frequenza principali della forma d'onda dell'onda gravitazionale rilevata da un osservatore lontano. È comunque da notare che termini di multipolo superiori, qui trascurati, come pure un'orbita eccentrica, introducono armoniche della pulsazione orbitale ω_s .

Al grado di approssimazione Newtoniano attuale, risulta valida la legge di Keplero $\omega_s^2 = \frac{Gm}{R^3}$, dunque, definendo la massa di chirp $M_c := \frac{(m_1 m_2)^{\frac{3}{5}}}{(m_1 + m_2)^{\frac{1}{5}}} = \mu^{\frac{3}{5}} m^{\frac{2}{5}}$, è possibile rimuovere la dipendenza dal raggio: $\frac{4G}{c^4} R^2 \mu \omega_s^2 = \frac{4}{c^4} \pi^{\frac{2}{3}} (G M_c)^{\frac{5}{3}} f^{\frac{2}{3}}$ [25]. Si ottiene pertanto $h_+ = \frac{1}{r} \frac{4}{c^4} \pi^{\frac{2}{3}} (G M_c)^{\frac{5}{3}} f^{\frac{2}{3}} \left(\frac{1+\cos^2(\iota)}{2} \right) \cos(2\pi f t_{ret} + \phi)$ e $h_{\times} = \frac{1}{r} \frac{4}{c^4} \pi^{\frac{2}{3}} (G M_c)^{\frac{5}{3}} f^{\frac{2}{3}} \cos(\iota) \sin(2\pi f t_{ret} + \phi)$.

Seppur sia trascurato dalla teoria linearizzata, il sistema gravitazionale perde energia a causa dell'emissione di onde gravitazionali: la potenza irradiata, in approssimazione di quadrupolo, risulta $P = \frac{32}{5} \frac{c^5}{G} \left(\frac{G M_c \omega}{2c^3} \right)^{\frac{10}{3}}$ [25]. Eguagliandone l'opposto con la derivata temporale della formula per l'energia cinetica e potenziale del sistema, calcolabile esattamente con il teorema del viriale per un'orbita circolare e che risulta $E = -\frac{1}{2} \frac{G m_1 m_2}{R}$, si può ottenere la derivata temporale del raggio dell'orbita, o equivalentemente, la derivata temporale della frequenza rilevata, $\frac{df}{dt} = \frac{96}{5} \pi^{\frac{8}{3}} \left(\frac{G M_c}{c^3} \right)^{\frac{5}{3}} f^{\frac{11}{3}}$. Questo ragionamento tuttavia è valido solamente nel regime di orbita quasi-circolare, per cui ad ogni istante si considera un'orbita circolare per il sistema, il cui raggio tuttavia diventa una funzione decrescente del tempo $R(t)$ a causa della perdita di energia. Questa approssimazione è valida fintanto che il raggio varia lentamente, o equivalentemente $\frac{df}{dt} \ll f^2$ [25]. Definendo $\tau := t_{c,ret} - t_{ret} = t_c - t$ il tempo rimanente prima della coalescenza del sistema, che per l'osservatore avviene nell'istante $t_{c,ret}$, risolvendo la precedente equazione differenziale a variabili separabili si ottiene $f(\tau) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{5}{256} \frac{1}{\tau} \right)^{\frac{3}{8}} \left(\frac{c^3}{G M_c} \right)^{\frac{5}{8}}$. Si può notare come la frequenza rilevata f risulti essere una funzione crescente del tempo, fenomeno denominato *chirping*. Inoltre le divergenze che compaiono nelle formule in corrispondenza della coalescenza non hanno significato, dato che ben prima di tal punto il regime di validità delle stesse non è più rispettato.

Definita la fase della forma d'onda $\Phi(t) := \int_{t_0}^t 2\pi f(t') dt'$ e la costante $\mathcal{H} := 5^{\frac{1}{4}} c^{-\frac{11}{4}} (G M_c)^{\frac{5}{4}}$, nel limite di orbite quasi-circolari, dai risultati precedenti si ottiene:

$$h_+(\tau) = \frac{\mathcal{H}}{r} \left(\frac{1}{\tau} \right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{1 + \cos^2(\iota)}{2} \right) \cos(\Phi(\tau) + \phi) \quad h_{\times}(\tau) = \frac{\mathcal{H}}{r} \left(\frac{1}{\tau} \right)^{\frac{1}{4}} \cos(\iota) \sin(\Phi(\tau) + \phi). \quad (2.11)$$

2.2 Espansione post-Newtoniana

La trattazione di sistemi binari compatti esula dal regime di validità della teoria linearizzata quando l'interazione gravitazionale tra i due corpi non risulta più trascurabile, ad esempio nel caso di sistemi binari la cui evoluzione risulta dettata in maniera predominante dall'interazione gravitazionale. In tal caso, come si può intuire dal teorema del viriale, vale una relazione per cui $v^2 \propto \frac{1}{r}$; dunque per sistemi compatti nelle fasi finali dell'*inspiral*, mentre la separazione relativa r diminuisce, la velocità v aumenta, come pure l'entità della deviazione della metrica $g_{\mu\nu}$ dalla semplice metrica piatta $\eta_{\mu\nu}$ percepita localmente da un corpo a causa dell'altro.

Per ottenere risultati più accurati è dunque necessario effettuare delle correzioni; per la situazione di interesse risulta più utile la tecnica dell'espansione post-Newtoniana (PN). In tal formalismo si espande la metrica $g_{\mu\nu}$ attorno alla metrica piatta $\eta_{\mu\nu}$ in funzione del parametro $\frac{v}{c}$, in particolare $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \sum_n ({}^{(n)}g_{\mu\nu})$, e similmente per il tensore energia-impulso della materia $T_{\mu\nu} = \sum_n ({}^{(n)}T_{\mu\nu})$, dove l'apice $({}^{(n)})$ indica la potenza di $\frac{v}{c}$ a cui sono proporzionali tali termini; si inseriscono successivamente tali espansioni nell'equazione di campo di Einstein (2.1) e si eguagliano termini dello stesso ordine in $\frac{v}{c}$. Per ottenere l'espansione PN all'ordine m (mPN), con m eventualmente semintero, che a causa delle convenzioni corrisponde all'ordine $(\frac{v}{c})^{2m+2}$, sono necessari i termini fino a $({}^{(2m+2)}g_{00}, ({}^{(2m+1)}g_{0i} \text{ e } ({}^{(2m)}g_{ij})$ compresi, ed alcuni termini potrebbero risultare nulli a causa di simmetrie o perché di ordine troppo ridotto: ad esempio in prima approssimazione $T_{ij} \propto v_i v_j$, pertanto saranno non nulli solo i termini da $({}^{(2)}T_{ij})$. L'ordine zero $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + ({}^{(2)}g_{00} \delta_{\mu}^0 \delta_{\nu}^0)$ corrisponde al limite newtoniano a cui si riduce la relatività generale per sistemi orbitanti con $\frac{v}{c} \ll 1$, dunque masse ridotte ed elevata separazione [25].

Tuttavia la metrica così ottenuta diverge quando si tenta di valutarla nella zona lontana, cioè distante dalla sorgente. Per risolvere questo problema un possibile approccio è quello di Blanchet-Damour [9, 25], che prevede di approssimare la metrica nella zona lontana, in assenza di materia, usando un'ulteriore espansione attorno alla metrica piatta $\eta_{\mu\nu}$. Si congiungono dunque quest'ultima espansione, detta post-Minkowskiana, e la precedente post-Newtoniana, andando ad eguagliare i vari termini in una zona intermedia in cui entrambe risultano valide. Successivamente, pensando di porsi a grande distanza, si mantengono solo i termini radiativi con andamento $\frac{1}{r}$ nell'espansione post-Minkowskiana, andando a riesprimere il tensore metrico così ottenuto in TT gauge come una perturbazione H_{ij}^{TT} attorno alla metrica piatta $\eta_{\mu\nu}$.

La corretta applicazione del formalismo descritto e la derivazione dei risultati è non banale e va oltre lo scopo di questa tesi. Inoltre è da notare che questo formalismo diventa esatto nel limite di velocità nulla, non essendo invece più applicabile qualora le velocità tipiche del sistema fossero troppo vicine a quelle della luce. Per tal motivo esso viene utilizzato per la fase di *inspiral*, quando le velocità in gioco sono al massimo frazioni modeste della velocità della luce, affidandosi al contrario ad altre tecniche, numeriche o perturbative, per le fasi finali della coalescenza [25, 26].

2.2.1 Generazione di onde gravitazionali da inspiral SMBHBs

In letteratura il formalismo post-Newtoniano e la sua applicazione a sistemi binari sono ampiamente trattati, ad esempio in [9]. Nel caso più generale, come ad esempio orbita con eccentricità e non nulla o corpi con momenti angolari intrinseci \vec{S}_1 e \vec{S}_2 non nulli, le equazioni del moto risultano molto complicate già dai primi ordini, come pure eventuali soluzioni analitiche, per cui spesso sono utilizzate varie approssimazioni. Tali aspetti sono approfonditi nell'ambito del formalismo PN in [9, 23]; risulta di particolare rilievo il caso di momento angolare intrinseco non nullo dei corpi, dato che esso va ad indurre una precessione del piano dell'orbita, effetto che risulta difficile da trattare ma che può portare ad una modulazione significativa della forma d'onda dell'onda gravitazionale rilevata, con un impatto possibilmente importante sulla successiva stima dei parametri del sistema [4, 20, 14].

Per questa sezione si utilizzeranno i risultati esposti in [25], in particolare ci si limiterà ad utilizzare la cosiddetta *restricted PN expansion* all'ordine 2PN, che fornirà delle correzioni alle equazioni (2.11), relativamente all'*inspiral* di sistemi binari di massa equiparabile in orbita quasi-circolare, $e = 0$, con momenti angolari intrinseci trascurabili. La *restricted PN expansion*, spesso utilizzata in letteratura,

fornisce delle formule analitiche più facilmente trattabili, utilizzando ad esempio l'espansione 2PN per il calcolo della fase della forma d'onda dell'onda gravitazionale, cruciale per l'analisi esposta nel paragrafo 3.2.1, limitandosi tuttavia all'ordine zero per il calcolo della relativa ampiezza. Inoltre, nonostante l'ipotesi di momenti angolari intrinseci nulli possa talvolta essere forte, l'ipotesi di orbita quasi-circolare si ritiene possa essere spesso ben giustificata, perlomeno nelle fasi finali dell'*inspiral*, a causa della circolarizzazione dell'orbita operata dall'emissione stessa di onde gravitazionali [25, 26]. È inoltre valido un principio di cancellazione, *effacement principle*, secondo cui l'eventuale struttura interna dei corpi compatti del sistema binario, ed il modo in cui questa viene modificata dalle forze mareali esercitate dall'altro corpo, non modificano l'evoluzione del sistema se non all'ordine 5PN [25]. Pertanto di seguito, assunti $\vec{S}_1 = \vec{S}_2 = \vec{0}$, le masse m_1 ed m_2 sono gli unici parametri intrinseci ai corpi da considerare.

Richiamando le definizioni della sezione 2.1.2 e la scelta degli assi di polarizzazione \hat{u} e \hat{v} adoperata in Figura 2.1, risulta utile definire il rapporto simmetrico adimensionale delle masse $\nu := \frac{\mu}{m} = \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}$ e una variabile tempo adimensionale $\Theta(t) := \frac{\nu c^3}{5Gm}(t_c - t)$, ove t è il tempo per l'osservatore e t_c è l'istante temporale in cui egli osserva la coalescenza nel proprio sistema di riferimento. Con queste premesse si riporta in (2.12) la fase dell'onda gravitazionale troncata all'ordine 2PN, a meno di una costante, e in (2.13) le forme d'onda relative alle due polarizzazioni con ampiezze all'ordine Newtoniano, dove la dipendenza da t segue per mezzo della variabile $\Theta = \Theta(t)$ [25]:

$$\Phi(t) = -\frac{2}{\nu}\Theta^{\frac{5}{8}} - \left(\frac{3715}{4032}\frac{1}{\nu} + \frac{55}{48}\right)\Theta^{\frac{3}{8}} + \frac{3\pi}{2\nu}\Theta^{\frac{2}{8}} - \left(\frac{9275495}{7225344}\frac{1}{\nu} + \frac{284875}{129024} + \frac{1855}{1024}\nu\right)\Theta^{\frac{1}{8}} + o\left(\frac{1}{c^5}\right) \quad (2.12)$$

$$h_+(t) = \frac{1}{r} \frac{G\mu}{c^2} \Theta^{-\frac{1}{4}} \left(\frac{1 + \cos^2(\iota)}{2}\right) \cos(\Phi(t)) \quad h_\times(t) = \frac{1}{r} \frac{G\mu}{c^2} \Theta^{-\frac{1}{4}} \cos(\iota) \sin(\Phi(t)). \quad (2.13)$$

Si può notare che le ampiezze, essendo troncate all'ordine Newtoniano, risultano una semplice riscrittura di quelle ricavate in (2.11).

2.3 Propagazione di onde gravitazionali lungo distanze cosmologiche

L'enorme quantità di energia irradiata sotto forma di onde gravitazionali durante l'*inspiral* di una coppia di buchi neri supermassicci, congiuntamente al fatto che la sezione d'urto gravitazionale è estremamente ridotta e pertanto le onde gravitazionali interagiscono molto debolmente con la materia durante la propagazione [25], permettono la rilevazione delle onde gravitazionali prodotte da SMBHBs a distanze cosmologiche, ad esempio di vari gigaparsec, dunque miliardi di anni luce ($\approx 10^{25}$ m; un parsec (pc) equivale a circa 3.262 anni luce; un anno luce (ly) a circa $9.461 \cdot 10^{15}$ m).

A tali distanze tuttavia i fenomeni di carattere cosmologico assumono un carattere preponderante, ad esempio l'espansione dell'universo causa un redshift significativo della frequenza delle onde gravitazionali rilevate, che va ad influire anche sulla stima dei parametri fisici del sistema binario, oltre pure al fenomeno delle lenti gravitazionali che possono andare ad influire sull'ampiezza misurata e dunque sulla stima della distanza stessa [26].

2.3.1 Principio cosmologico e metrica di Friedmann-Robertson-Walker

Il principio cosmologico asserisce che l'universo sia omogeneo ed isotropo se mediato a tempo fissato su scale cosmologiche, ad esempio gigaparsec. Si assume cioè che non esistano posizioni o direzioni privilegiate nell'universo [19].

Per realizzare questo principio in relatività generale si considerano degli osservatori cosiddetti comoventi, solidali con la distribuzione media della massa-energia del cosmo; essi ad esempio risultano in quiete rispetto alla radiazione cosmica di fondo, intendendo che non osservano momento di dipolo nella distribuzione angolare della radiazione [19]. Si costruisce dunque una foliazione dello spazio tempo attraverso un insieme di iperpiani tridimensionali di tipo spazio $\{\Sigma_t\}$, ortogonali in ogni punto alla linea di universo dell'osservatore comovente ivi situato. In questo modo ad ogni iperpiano si assegna

un valore t , corrispondente al tempo proprio per ogni osservatore comovente, dato che la quadri-velocità di ogni osservatore risulta ortogonale all'ipersuperficie istantanea per costruzione. Inoltre ad ogni istante l'ipersuperficie Σ_t corrisponde localmente alla parte spaziale tridimensionale del sistema di riferimento minkowskiano solidale con l'osservatore comovente, per il principio di equivalenza.

Con questa costruzione il parametro t viene definito tempo cosmico. È possibile inoltre definire delle coordinate spaziali (x^1, x^2, x^3) , dette coordinate comoventi, tali che esse assumano valore costante lungo la linea di universo di ogni osservatore comovente. In tal modo la distanza comovente tra due osservatori comoventi A e B, intesa ad esempio come il modulo euclideo del vettore $\Delta x^i = x_B^i - x_A^i$, risulterà essere sempre costante per definizione, nonostante l'intervallo proprio s^2 tra di essi possa variare in funzione del tempo cosmico. Questo impone anche un vincolo sulla metrica $g_{\mu\nu}$; deve valere infatti $ds^2 = -c^2 dt^2 + g_{ij} dx^i dx^j$, dato che a coordinate spaziali fissate $dx^i = 0$ ci si sta muovendo lungo la linea di universo di un osservatore comovente.

Ad un tempo cosmico fissato t , considerando lo spazio tridimensionale Σ_t , ed ivi imponendo la condizioni di omogeneità e di isotropia alle coordinate comoventi spaziali che lo parametrizzano, si può richiedere che il tensore di curvatura di Riemann tridimensionale $R^i{}_{jkl}$ rispetti condizioni di simmetria massima, ad esempio che lo scalare di Ricci $R = g^{jk} R^i{}_{jkl}$ sia una costante indipendente dalle coordinate spaziali. Passando alla descrizione in coordinate sferiche delle coordinate comoventi, tenendo tuttavia presente che la scelta dell'origine è totalmente arbitraria e non influisce sulle osservabili finali, si ottiene la metrica di Friedmann-Robertson-Walker (FRW) [19]:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2 \right), \quad (2.14)$$

dove la costante k può, dopo un opportuno riscaldamento delle coordinate, assumere i valori $k = -1, 0, 1$; rispettivamente nei casi di universo aperto, piatto, chiuso.

Si può vedere che in questa metrica la distanza spaziale propria a tempo fissato tra l'origine ed un altro osservatore risulta essere $R(t) = a(t) \int_0^{r_{oss}} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}$, e tale valore varia nel tempo. Questa metrica, compatibile con tutte le condizioni di simmetria prima enunciate, corrisponde dunque alla situazione fisica di un universo in espansione o contrazione, a seconda dell'andamento del fattore di scala adimensionale $a(t) > 0$, con geometria dipendente dal valore di k .

2.3.2 Effetti sulla propagazione delle onde gravitazionali

Considerando la propagazione di segnali, ad esempio onde gravitazionali in ottima approssimazione, lungo geodetiche di tipo luce, $ds^2 = 0$; supponendo per semplicità che una sorgente sia posta ad $r = r_{sorg}$ ed un osservatore nell'origine delle coordinate sferiche; dalle simmetrie imposte e con il verso di propagazione scelto si ottiene $c dt = -a(t) \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}$.

Se si assume che il segnale sia prodotto dalla sorgente ad un tempo $t = t_e$, in modo che arrivi all'osservatore a $t = t_0$, vale $\int_{t_e}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} = - \int_{r_{sorg}}^0 \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}$. Per un secondo segnale inviato dalla sorgente immediatamente dopo il primo, a $t = t_e + \Delta t$, si ottiene $\int_{t_e + \Delta t}^{t_0 + \Delta t'} \frac{cdt}{a(t)} = - \int_{r_{sorg}}^0 \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}$. Notando che gli integrali della variabile comovente radiale sono identici è possibile uguagliarli, ottenendo anche $\int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_e + \Delta t}^{t_0 + \Delta t'} \frac{dt}{a(t)}$; da cui segue $\int_{t_e}^{t_e + \Delta t} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t'} \frac{dt}{a(t)}$. Le quantità Δt e $\Delta t'$ possono essere interpretate come i periodi di due onde, pertanto per la sorgente vale $f_{sorg} = \frac{1}{\Delta t}$, per l'osservatore $f_{oss} = \frac{1}{\Delta t'}$. Assumendo che tali periodi siano molto ridotti rispetto al tempo caratteristico di variazione della funzione $a(t)$, dato da $\frac{a(t)}{\dot{a}(t)} = \frac{1}{H(t)}$, con $\dot{a}(t) = \frac{da(t)}{dt}$ e $H(t)$ il parametro di Hubble, è possibile considerare $a(t)$ costante in tal intervallo, per cui $\frac{\Delta t}{a(t_e)} = \frac{\Delta t'}{a(t_0)}$. Da quest'ultima relazione si può ricavare la relazione per il redshift cosmologico z , definito come $1 + z := \frac{a(t_0)}{a(t_e)} = \frac{f_{sorg}}{f_{oss}}$. Si ottiene pertanto

$$f_{oss} = \frac{f_{sorg}}{(1 + z)}. \quad (2.15)$$

Per descrivere le distanze è inoltre consuetudine utilizzare la distanza di luminosità d_L , definita come la quantità per cui il flusso di energia Φ misurato dall'osservatore risulta essere $\Phi = \frac{P}{4\pi d_L^2}$, con P la potenza irradiata in modo isotropo dalla sorgente, valutata in un sistema di riferimento locale [25]. Nel caso di uno spazio piatto, $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, trascurando velocità relative, si ha che la distanza di luminosità è identica alla distanza spaziale usuale, $d_L = r_{euclideo}$. Tuttavia in un universo in espansione questo non risulta più valido: considerando per semplicità il caso di fotoni, la relazione tra potenza osservata e potenza irradiata risulta $P_{oss} = \frac{dE_{oss}}{dt_{oss}} = \frac{2\pi\hbar}{(1+z)} \frac{df_{oss}}{dt_{sorg}} = \frac{2\pi\hbar}{(1+z)^2} \frac{df_{sorg}}{dt_{sorg}} = \frac{P_{sorg}}{(1+z)^2}$, mentre la superficie di una sfera di raggio comovente r risulta $S(t) = 4\pi a^2(t)r^2$ [25], pertanto si ottiene che l'espressione che lega la distanza radiale comovente r e la distanza di luminosità d_L è:

$$d_L = (1+z)a_0 r, \quad (2.16)$$

dove tale quantità si intende valutata da un osservatore al tempo odierno t_0 , in particolare $a_0 := a(t_0)$. In questo caso, per distanze ridotte, cioè valori di redshift $z \ll 1$, espandendo (2.16) in serie di Taylor si ottiene la legge di Hubble $d_L = \frac{zc}{H_0}$, con $H_0 = H(t = t_0)$ valore attuale del parametro di Hubble, chiamato costante di Hubble, il quale vale $H_0 = (67.4 \pm 0.5) \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ [28]. Nel caso generale, assumendo che l'universo sia piatto, $k = 0$, ed utilizzando il modello Λ CDM, la relazione risulta [26] $d_L(z) = \frac{(1+z)c}{H_0} \int_0^z d\tilde{z} (\Omega_R(1+\tilde{z})^4 + \Omega_M(1+\tilde{z})^3 + \Omega_\Lambda)^{-\frac{1}{2}}$, con $\Omega_R + \Omega_M + \Omega_\Lambda = 1$, $\Omega_R \approx 8.5 \cdot 10^{-5}$ [26], $\Omega_M = 0.3111 \pm 0.0056$, $\Omega_\Lambda = 0.6889 \pm 0.0056$ [28] (utilizzando dati TT,TE,EE+lowE+lensing+BAO).

Per studiare dunque come le onde gravitazionali vengano modificate durante la loro propagazione è utile definire la regione dell'universo in cui è situato l'osservatore, ad esempio l'origine, ed una regione spaziale vicina alla sorgente di onde gravitazionali ma abbastanza distante da potersi considerare zona delle onde per essa. La propagazione di onde gravitazionali in uno spazio curvo generico è dettata dall'equazione $\nabla^\alpha \nabla_\alpha (h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}h^\beta_\beta) = 0$ in gauge $\nabla^\mu (h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}h^\beta_\beta) = 0$ [25], con ∇_α derivata covariante calcolata usando la metrica imperturbata $g_{\mu\nu}$. Risolvendo tali equazioni è possibile dimostrare che, in ottima approssimazione, le onde gravitazionali si propagano lungo le geodetiche con $ds^2 = 0$ [25]. Si nota inoltre che nel caso di onde prodotte da un sistema binario di masse m_1 e m_2 , esse mantengono per l'osservatore lontano la stessa formula analitica che avevano nella zona delle onde vicina alla sorgente, dove tuttavia è necessario apportare, come intuibile anche dalle formule (2.15) e (2.16), la sostituzione $f_{sorg} = (1+z)f_{oss}$ per la frequenza, $\Delta t_{sorg} = \frac{\Delta t_{oss}}{(1+z)}$ per gli intervalli di tempo, e la sostituzione dell'andamento $\frac{1}{r}$ con $\frac{1}{ra_0} = \frac{(1+z)}{d_L(z)}$ nell'ampiezza [25].

A causa della degenerazione dei parametri nelle equazioni (2.12) e (2.13) è possibile riassorbire tali fattori $(1+z)$ attraverso una ridefinizione delle masse, introducendo le masse redshiftate misurate dall'osservatore: per la massa totale si ottiene $m_z := (1+z)m$, per la massa ridotta $\mu_z := (1+z)\mu$; dove m e μ ora si riferiscono ai valori delle masse che sarebbero misurati in un sistema vicino alla sorgente. Si osserva inoltre che il valore del rapporto simmetrico delle masse $\nu = \frac{\mu}{m}$ non viene modificato, $\nu_z = \nu$. Con queste definizioni la variabile tempo adimensionale può essere ridefinita come $\Theta_z(t) := \frac{\nu c^3}{5Gm_z}(t_c - t)$, ove t e t_c adesso sono coordinate temporali del sistema di riferimento dell'osservatore lontano. Pertanto l'equazione (2.12) può essere valutata nel sistema di riferimento dell'osservatore lontano a seguito della semplice sostituzione formale $\Theta(t) \rightarrow \Theta_z(t)$, mentre le equazioni (2.13) trasformano come prima descritto:

$$\Phi_z(t) = -\frac{2}{\nu}\Theta_z^{\frac{5}{2}} - \left(\frac{3715}{4032}\frac{1}{\nu} + \frac{55}{48}\right)\Theta_z^{\frac{3}{2}} + \frac{3\pi}{2\nu}\Theta_z^{\frac{2}{2}} - \left(\frac{9275495}{7225344}\frac{1}{\nu} + \frac{284875}{129024} + \frac{1855}{1024}\nu\right)\Theta_z^{\frac{1}{2}} + o\left(\frac{1}{c^5}\right) \quad (2.17)$$

$$h_{+,z}(t) = \frac{1}{d_L(z)} \frac{G\mu_z}{c^2} \Theta_z^{-\frac{1}{4}} \left(\frac{1 + \cos^2(\iota)}{2}\right) \cos(\Phi_z(t)) \quad h_{\times,z}(t) = \frac{1}{d_L(z)} \frac{G\mu_z}{c^2} \Theta_z^{-\frac{1}{4}} \cos(\iota) \sin(\Phi_z(t)). \quad (2.18)$$

Successivamente a queste sostituzioni le variabili temporali si intendono sempre valutate nel sistema dell'osservatore lontano; allo stesso modo le masse redshiftate sono i valori da egli effettivamente misurati, che potranno essere eventualmente corretti nel caso in cui il valore del redshift cosmologico fosse noto. Di seguito dunque, per semplicità, si ometterà il pedice z .

Capitolo 3

Modellizzazione di LISA e analisi del segnale

3.1 Modellizzazione dell'interferometro LISA

In questa sezione si andrà a modellizzare l'interferometro LISA, in particolare la sua risposta ad un'onda gravitazionale e quindi il segnale che è effettivamente possibile misurare. Alcune informazioni utili sono già state presentate nella sezione 1.1, tuttavia data la complessità del progetto è necessario operare alcune semplificazioni, i cui effetti si presume siano in prima approssimazione trascurabili. In particolare si considera circolare sia l'orbita del baricentro della costellazione che il moto dei singoli satelliti attorno a tal baricentro, mantenendo costante la lunghezza dei lati del triangolo equilatero (si utilizza il termine costellazione in senso figurato, intendendo il raggruppamento dei tre satelliti identici). Per la descrizione successiva verranno inoltre adoperati due sistemi di riferimento, quello del baricentro della costellazione di LISA (LCB) e quello del baricentro del sistema solare (SSB), entrambi rappresentati in figura 1.1.

Il sistema di riferimento del baricentro della costellazione di LISA ha origine O nel baricentro della costellazione ed è dotato della terna cartesiana $\{\hat{u}_x, \hat{u}_y, \hat{u}_z\}$. Questo sistema è solidale con il moto dei satelliti, i quali si considerano giacere nel piano xy ; in particolare le loro posizioni rispetto all'origine O sono date da $\vec{x}_a = \frac{L}{\sqrt{3}}(\cos(\phi_a)\hat{u}_x + \sin(\phi_a)\hat{u}_y + 0\hat{u}_z)$, dove $a = 1, 2, 3$ indicizza l' a -esimo satellite, $\phi_a = (a - 1)\frac{2\pi}{3} - \frac{3}{4}\pi$, e $L \approx 2.5 \cdot 10^9$ m è la lunghezza costante del lato del triangolo equilatero in assenza di onde gravitazionali.

Il sistema del baricentro del sistema solare, utile per descrivere il moto orbitale, ha per origine \bar{O} il centro di massa del sistema solare, con terna cartesiana $\{\hat{u}_x, \hat{u}_y, \hat{u}_z\}$; le quantità riferite o valutate in questo sistema saranno soprالineate. Il sistema è orientato in modo tale che all'istante $t = 0$ l'orbita circolare del baricentro della costellazione giaccia nel piano $\bar{x}\bar{y}$, ed il baricentro sia posizionato lungo l'asse positivo \bar{x} . Considerando un periodo orbitale T_o , indicativamente un anno, si può parametrizzare la posizione del baricentro $\vec{\bar{x}}_B$ rispetto all'origine \bar{O} come $\vec{\bar{x}}_B(t) = R(\cos(\frac{2\pi}{T_o}t)\hat{u}_x + \sin(\frac{2\pi}{T_o}t)\hat{u}_y + 0\hat{u}_z)$, con $R \approx 1\text{AU} \approx 1.5 \cdot 10^{11}$ m raggio dell'orbita.

Impiegando l'opportuna matrice di rotazione $R_{ij}(t)$ tra i due sistemi riferimento si ottengono le relazioni tra le rispettive quantità. In particolare il vettore posizione $\vec{\bar{x}}_a$, rispetto all'origine \bar{O} del sistema del baricentro del sistema solare, risulta $\vec{\bar{x}}_a(t) = \vec{\bar{x}}_B(t) + \frac{L}{\sqrt{3}}\left[\frac{1}{4}\left(3\sin(\phi_a + \phi_0) - \sin(\phi_a + \phi_0 - 2\frac{2\pi}{T_o}t)\right)\hat{u}_x + \left(-\frac{1}{4}\right)\left(3\cos(\phi_a + \phi_0) + \cos(\phi_a + \phi_0 - 2\frac{2\pi}{T_o}t)\right)\hat{u}_y + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\phi_a + \phi_0 - \frac{2\pi}{T_o}t)\hat{u}_z\right]$, dove ϕ_0 è una fase costante che parametrizza l'orientazione della costellazione all'istante iniziale. Inoltre la proiezione del versore \hat{u}_z sul piano $\bar{x}\bar{y}$ risulta avere sempre verso opposto rispetto a quello di $\vec{\bar{x}}_B(t)$, con un'inclinazione costante $\hat{u}_z \cdot \hat{u}_z = \cos(\frac{\pi}{3})$.

3.1.1 Pattern functions degli interferometri

Nonostante un interferometro sia uno strumento non puntato, che può rilevare onde gravitazionali provenienti da quasi qualsiasi direzione, esso ha comunque una risposta variabile, calcolabile per mezzo delle *pattern functions* dello strumento; esse dipendono dalla posizione angolare della sorgente, dalla polarizzazione dell'onda gravitazionale e dalla sua frequenza. In particolare sono queste dipendenze che vengono utilizzate per localizzare la posizione della sorgente, andando a misurare nel tempo la modulazione del segnale dovuta alla rotazione della costellazione.

Ponendosi dunque nel sistema di riferimento del baricentro della costellazione, considerato per il momento fermo e non rotante rispetto alla sorgente, si considera un'onda gravitazionale con una direzione di propagazione $-\hat{n}$ ben precisa. Seppur nel sistema solare le perturbazioni dovute alle interazioni gravitazionali tra i vari corpi vadano ad incidere sulla misura del segnale effettuata da LISA, come accennato nella sezione 1.1, è possibile trattare e mitigare tale perturbazioni in modo indipendente dalla trattazione dell'effetto dell'onda gravitazionale [33]. Inoltre, essendo un obiettivo della missione, nella banda di frequenze di interesse le *test masses* di LISA possono essere considerate come corpi che seguono in ottima approssimazione le geodetiche dello spazio tempo; si può pertanto considerare di operare in TT gauge, da cui segue che le coordinate dei satelliti sono costanti, $dx^i = 0$, e il loro tempo proprio coincide con la coordinata temporale t , dato che l'intervallo invariante infinitesimo risulta $ds^2 = -c^2 dt^2 + (\delta_{ij} + h_{ij}^{TT}) dx^i dx^j$. Da quest'ultima espressione si nota che per rilevare la perturbazione dovuta al passaggio dell'onda gravitazionale è necessario misurare il tempo di propagazione di un'onda elettromagnetica tra due satelliti, la quale segue geodetiche in cui vale $ds^2 = 0$, ottenendo la relazione $c^2 dt^2 = (\delta_{ij} + h_{ij}^{TT}) dx^i dx^j$.

Risulta utile definire i versori $\hat{l}_1 := \frac{\vec{x}_2 - \vec{x}_1}{L}$, $\hat{l}_2 := \frac{\vec{x}_3 - \vec{x}_1}{L}$ e $\hat{l}_3 := \frac{\vec{x}_3 - \vec{x}_2}{L}$, ognuno parallelo ad un lato del triangolo, e per cui vale $\hat{l}_a = \cos(\gamma_a)\hat{x} + \sin(\gamma_a)\hat{y}$, con $\gamma_a = \frac{\pi}{12} + (a-1)\frac{\pi}{3}$. Scelte queste denominazioni e versi di percorrenza per i lati del triangolo, il tempo di propagazione di un segnale lungo un intervallo di tipo luce tra due vertici, al primo ordine in h_{ij}^{TT} , risulta $T + \Delta T_a(t) = \int_t^{t+T+\Delta T_a(t)} dt = \frac{L}{c} + \frac{1}{2c} \int_0^L du l_a^i l_a^j h_{ij}^{TT}(t + \frac{u}{c}, \vec{x}_a + u\hat{l}_a) + o(h^2)$. Richiamando la relazione (2.6) per un'onda gravitazionale generica, ora con direzione di propagazione $-\hat{n}$; detti t l'istante e \vec{x}_a la posizione del satellite da cui è partito il segnale, si ottiene che il ritardo ΔT nel tempo di propagazione lungo il lato \hat{l}_a , dovuto alla perturbazione dell'onda gravitazionale, risulta, con $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ e $\text{sinc}(0) = 1$:

$$\Delta T_a(t) = \frac{L}{2c} l_a^i l_a^j \int_{-\infty}^{+\infty} df \left(\tilde{h}_+(f) e_{ij}^+(-\hat{n}) + \tilde{h}_\times(f) e_{ij}^\times(-\hat{n}) \right) e^{-i2\pi f(t + \frac{\hat{n} \cdot \vec{x}_a}{c} + \frac{L}{2c}(1 + \hat{n} \cdot \hat{l}_a))} \text{sinc}\left(f \frac{\pi L}{c} (1 + \hat{n} \cdot \hat{l}_a)\right). \quad (3.1)$$

Tuttavia la misura del passaggio dell'onda gravitazionale viene effettuata comparando i tempi di andata e ritorno del segnale lungo percorsi differenti. Una possibile configurazione è l'interferometro Michelson, che utilizzi ad esempio i bracci 1 e 2, per il quale lo strain adimensionale misurato al tempo t è dato da $h_I(t) = \frac{c}{2L} (\Delta T_{-1}(t - \frac{L}{c}) + \Delta T_1(t - 2\frac{L}{c}) - \Delta T_{-2}(t - \frac{L}{c}) - \Delta T_2(t - 2\frac{L}{c}))$ [25], dove con un numero negativo a pedice si intende tal braccio percorso in verso opposto alla definizione.

Nella realtà le misure effettuate da LISA sono riconducibili a misure di differenze di frequenza o fase tra i vari fasci laser che percorrono i bracci degli interferometri, comunque approssimativamente proporzionali alla differenza dei tempo di volo. Tuttavia tali misure saranno fortemente influenzate dal cosiddetto *laser phase noise*, dovuto a fluttuazioni della frequenza della radiazione emessa dai vari laser, un rumore di svariati ordini di grandezza maggiore del segnale indotto dalle onde gravitazionali. Per eliminarlo è necessario impiegare la tecnica del *time-delay interferometry*, che mediante opportune combinazioni lineari di misure effettuate ad istanti temporali diversi può mitigare questo rumore [37, 29, 21, 8, 30, 11]. Per questo lavoro si era tentato di utilizzare le configurazioni A ed E di tal metodo; tuttavia l'implementazione reale è molto complicata, e anche nel caso più semplificato le formule analitiche non risultavano facilmente gestibili, mentre i risultati numerici fornivano valori non affidabili. Si è dunque adoperata la modellizzazione impiegata in [13, 32, 31], per cui si trascurano le varie ricombinazioni di segnali traslati temporalmente, ipotizzando tuttavia che il *laser phase noise* sia stato correttamente rimosso. Fintanto che le onde gravitazionali sono quasi monocromatiche, con frequenze

$f \lesssim 20$ mHz ed una variazione temporale lenta $\frac{\dot{f}}{f} \ll \frac{c}{L}$, come è il caso di *inspiral* di sistemi binari con massa totale redshiftata $m_z \gtrsim 10^5 M_\odot$, questa approssimazione fornisce risultati equiparabili [33].

Per quanto esposto, nel limite di basse frequenze $f \lesssim \frac{c}{L} \approx 0.12$ Hz, si può considerare $\text{sinc} \approx 1$, trascurando le traslazioni temporali imposte dagli esponenziali nella formula (3.1) e quelle presenti nella definizione dello strain $h_I(t)$ per l'interferometro Michelson, valutando pertanto il tensore h_{ij}^{TT} al tempo t_0 nel baricentro della costellazione. In questo modo si ottiene $h_I(t) = \frac{1}{2} h_{ij}^{TT}(t) (l_1^i l_1^j - l_2^i l_2^j)$, che valutando i vettori \hat{l} nel sistema LCB si riduce a $h_I(t) = \frac{\sqrt{3}}{4} (h_+(t)(e_{xx}^+ - e_{yy}^+) + h_\times(t)(e_{xx}^\times - e_{yy}^\times))$.

Tuttavia sono da considerare anche altre fonti di rumore, le cui principali sono lo *shot noise* nel fotoregistratore ad alte frequenze e l'*acceleration noise* dovuto ad accelerazioni spurie a basse frequenze [12, 35]. Diagonalizzando la matrice di correlazione del rumore nei vari bracci, sotto ipotesi di simmetria giustificate dal fatto che i tre satelliti possono essere considerati quasi identici, è possibile ottenere una seconda configurazione di interferometro, per cui vale $h_{II}(t) = \frac{1}{2\sqrt{3}} h_{ij}^{TT}(t) (l_1^i l_1^j + l_2^i l_2^j - 2l_3^i l_3^j)$ [13]; contraendo i tensori si ottiene $h_{II}(t) = \frac{\sqrt{3}}{4} (h_+(t)(e_{xy}^+ + e_{yx}^+) + h_\times(t)(e_{xy}^\times + e_{yx}^\times))$. Inoltre, dato che i tensori di polarizzazione sotto rotazioni tridimensionali R_{ij} modificano come $e'_{ij} = R_{ik} R_{jl} e_{kl}$, si può vedere che la configurazione *II* è equivalente ad una configurazione *I* dopo l'applicazione a quest'ultima di una rotazione di $\frac{\pi}{4}$ nel piano xy [13].

Confrontando le precedenti equazioni con la definizione dei tensori di polarizzazione (2.5) è necessario prestare attenzione al fatto che le formule (2.18) per h_+ e h_\times del sistema binario assumono tale forma solo con la scelta degli assi principali \hat{u}, \hat{v} ivi operata, come in Figura 2.1. Si considera dunque il versore che punta in direzione della sorgente $\hat{n} = (\sin(\theta_s) \cos(\phi_s), \sin(\theta_s) \sin(\phi_s), \cos(\theta_s))$ e, considerando tali coordinate cartesiane come parametrizzazione della sfera unitaria, si utilizzano come assi arbitrari dei versori nel piano ivi tangente, in particolare $\hat{u}' = (-\cos(\theta_s) \cos(\phi_s), -\cos(\theta_s) \sin(\phi_s), \sin(\theta_s))$ che punta lungo il meridiano nel verso di θ_s decrescente e $\hat{v}' = (-\sin(\phi_s), \cos(\phi_s), 0)$ che punta lungo il parallelo nel verso di ϕ_s crescente, in modo da ottenere la terna ortonormale $\{\hat{u}', \hat{v}', -\hat{n}\}$. Ruotando gli assi \hat{u}' e \hat{v}' di un angolo ψ_s , detto angolo di polarizzazione, in senso orario attorno a $-\hat{n}$, si ottengono i versori di polarizzazione principali \hat{u} e \hat{v} . Tale angolo parametrizza l'orientazione del sistema binario, sconosciuta a priori, ed in particolare vale $\psi_s = \arctan(\frac{\hat{z} \cdot \hat{v}}{\hat{z} \cdot \hat{u}})$, a meno di multipli di π [13]. In tal sistema risulta anche possibile valutare le cosiddette *pattern functions* del rivelatore, F^+ ed F^\times . Esse sono definite in modo che il segnale misurato risulti $h_\alpha(t) = F_\alpha^+(\theta_s, \phi_s, \psi_s) h_+(t) + F_\alpha^\times(\theta_s, \phi_s, \psi_s) h_\times(t)$, con $\alpha = I, II$ a seconda della configurazione considerata. Sfruttando la relazione prima specificata tra gli interferometri *I* e *II* per definire la costante ϕ_α in modo che $\phi_I = 0$ e $\phi_{II} = -\frac{\pi}{2}$, si trova:

$$F_\alpha^+(\theta_s, \phi_s, \psi_s) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{(1 + \cos^2(\theta_s))}{2} \cos(2\phi_s + \phi_\alpha) \cos(2\psi_s) - \cos(\theta_s) \sin(2\phi_s + \phi_\alpha) \sin(2\psi_s) \right) \quad (3.2)$$

$$F_\alpha^\times(\theta_s, \phi_s, \psi_s) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{(1 + \cos^2(\theta_s))}{2} \cos(2\phi_s + \phi_\alpha) \sin(2\psi_s) + \cos(\theta_s) \sin(2\phi_s + \phi_\alpha) \cos(2\psi_s) \right). \quad (3.3)$$

3.1.2 Modulazione del segnale dovuta al moto orbitale

Per considerare il moto di LISA nello spazio, come parametrizzato all'inizio della sezione, e i suoi effetti sul segnale rilevato, si sfrutta il fatto che i moti orbitali avvengono con un periodo T_o di circa un anno, a fronte di un periodo massimo di qualche ora relativo alle minime frequenze della banda utile di rilevazione. Di conseguenza è possibile porsi nel sistema del baricentro del sistema solare, nel quale il versore $\hat{n} = (\sin(\bar{\theta}_s) \cos(\bar{\phi}_s), \sin(\bar{\theta}_s) \sin(\bar{\phi}_s), \cos(\bar{\theta}_s))$, che punta verso la fonte, risulta costante durante tutto il periodo di osservazione, come risultano costanti pure \hat{u} e \hat{v} , avendo trascurato possibili precessioni del piano dell'orbita del sistema binario. Tutte le componenti delle quantità valutate nel sistema LCB nella trattazione precedente invece ottengono, a causa del moto traslatorio e rotatorio della costellazione, una dipendenza dal tempo t , considerato ora il tempo coordinato del sistema SSB. Questa trattazione dunque calcola il segnale misurato da LISA come la risposta istantanea dello strumento fermo ad un segnale proveniente da una direzione fissata, e definisce il segnale reale come la successione di queste misurazioni, in cui si va a variare la direzione della fonte nel tempo.

La relazione che intercorre tra gli angoli $\theta_s(t)$, $\phi_s(t)$, $\psi_s(t)$ e le corrispondenti quantità costanti $\bar{\theta}_s$, $\bar{\phi}_s$, $\bar{\psi}_s$ è pertanto ottenibile attraverso l'opportuna applicazione della matrice di rotazione $R_{ij}(t)$ che lega le basi cartesiane dei sistemi LCB e SSB. Valutando opportuni prodotti scalari, invarianti per rotazioni, nei due sistemi si trova:

$$\theta_s(t) = \arccos \left(\frac{\cos(\bar{\theta}_s)}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\bar{\phi}_s - \frac{2\pi}{T_o}t) \sin(\bar{\theta}_s) \right) \quad (3.4)$$

$$\phi_s(t) = \arctan \left(\frac{\tan(\bar{\theta}_s)(\cos(\bar{\phi}_s + \phi_0 - 2\frac{2\pi}{T_o}t) - 3 \cos(\bar{\phi}_s - \phi_0)) - 2\sqrt{3} \cos(\frac{2\pi}{T_o}t - \phi_0)}{\tan(\bar{\theta}_s)(\sin(\bar{\phi}_s + \phi_0 - 2\frac{2\pi}{T_o}t) + 3 \sin(\bar{\phi}_s - \phi_0)) + 2\sqrt{3} \sin(\frac{2\pi}{T_o}t - \phi_0)} \right) \quad (3.5)$$

$$\psi_s(t) = \arctan \left(\frac{\sin(\bar{\psi}_s)(\sqrt{3} \cos(\bar{\theta}_s) \cos(\frac{2\pi}{T_o}t - \bar{\phi}_s) + \sin(\bar{\theta}_s)) - \sqrt{3} \cos(\bar{\psi}_s) \sin(\frac{2\pi}{T_o}t - \bar{\phi}_s)}{\cos(\bar{\psi}_s)(\sqrt{3} \cos(\bar{\theta}_s) \cos(\frac{2\pi}{T_o}t - \bar{\phi}_s) + \sin(\bar{\theta}_s)) + \sqrt{3} \sin(\bar{\psi}_s) \sin(\frac{2\pi}{T_o}t - \bar{\phi}_s)} \right), \quad (3.6)$$

dove l'angolo $\bar{\psi}_s$ è stato definito analogamente alla sezione precedente ma eseguendo tale costruzione nel sistema SSB. Inserendo queste relazioni nelle formule (3.2) e (3.3) si ottengono le espressioni delle *pattern functions* e dunque del segnale misurato in funzione di $(t, \bar{\theta}_s, \bar{\phi}_s, \bar{\psi}_s)$, ossia $h_\alpha(t, \bar{\theta}_s, \bar{\phi}_s, \bar{\psi}_s) = F_\alpha^+(t, \bar{\theta}_s, \bar{\phi}_s, \bar{\psi}_s) h_+(t) + F_\alpha^\times(t, \bar{\theta}_s, \bar{\phi}_s, \bar{\psi}_s) h_\times(t)$, con $\alpha = I, II$. Dato che sono stati utilizzati gli assi di polarizzazione principali nella trattazione, è possibile scrivere $h_+(t) = A_+(t) \cos(\Phi(t))$ e $h_\times(t) = A_\times(t) \sin(\Phi(t))$ [25], da cui $h_\alpha(t, \bar{\theta}_s, \bar{\phi}_s, \bar{\psi}_s) = A_\alpha(t, \bar{\theta}_s, \bar{\phi}_s, \bar{\psi}_s) \cos(\Phi(t) + \varphi_{p,\alpha}(t, \bar{\theta}_s, \bar{\phi}_s, \bar{\psi}_s))$, dove $A_\alpha = \sqrt{(A_+ F_\alpha^+)^2 + (A_\times F_\alpha^\times)^2}$ e $\varphi_{p,\alpha} = \arctan \left(\frac{A_\times F_\alpha^\times}{A_+ F_\alpha^+} \right)$. Infine, dato che ora tutte le quantità sono valutate nel SSB, è necessario aggiungere alla fase del segnale misurato h_α anche la differenza di fase dell'onda gravitazionale tra il baricentro del sistema solare e quello della costellazione [13], che in prima approssimazione vale $\varphi_D(t, \bar{\theta}_s, \bar{\phi}_s) = -2\pi f(t) \frac{-\hat{n} \cdot \vec{x}_B}{c} = 2\pi f(t) \frac{R}{c} \sin(\bar{\theta}_s) \cos(\frac{2\pi}{T_o}t - \bar{\phi}_s)$, con $f(t)$ la frequenza dell'onda gravitazionale istantaneamente misurata nel baricentro del sistema solare. Dunque, sottintendendo la dipendenza angolare d'ora in poi, $h_\alpha(t) = A_\alpha(t) \cos(\Phi(t) + \varphi_{p,\alpha}(t) + \varphi_D(t))$.

Per l'analisi successiva sarà infine necessaria la trasformata di Fourier $\tilde{h}_\alpha(f)$ del segnale $h_\alpha(t)$ effettivamente rilevata dal canale α . Nel regime di validità delle ipotesi già enunciate, e grazie al fatto che i moti orbitali hanno un periodo molto maggiore di quello del segnale, è possibile calcolare la trasformata utilizzando il metodo approssimato della fase stazionaria [4]. Per fare ciò ci si avvale del fatto che l'onda gravitazionale, essendo a frequenza relativamente alta, può essere considerata un'onda portante, mentre gli effetti orbitali discussi inducono solamente una lenta modulazione dell'onda portante stessa. Procedendo in tal modo, dal confronto con le formule (2.18) si ha $\varphi_{p,\alpha}(t) = \arctan \left(\frac{2 \cos(\iota) F_\alpha^\times(t)}{(1 + \cos^2(\iota)) F_\alpha^+(t)} \right)$ e, definita $\tilde{h}_{+,z}(f)$ la trasformata di Fourier del segnale $h_{+,z}(t)$, si ottiene per $f > 0$ [13]:

$$\tilde{h}_\alpha(f) = \frac{2}{1 + \cos^2(\iota)} \sqrt{\left(\frac{1 + \cos^2(\iota)}{2} F_\alpha^+(t(f)) \right)^2 + (\cos(\iota) F_\alpha^\times(t(f)))^2} e^{-i(\varphi_{p,\alpha}(t(f)) + \varphi_D(t(f)))} \tilde{h}_{+,z}(f), \quad (3.7)$$

dove $t(f)$ è la funzione inversa di $f(t)$, che restituisce l'istante temporale t nel SSB in cui la frequenza dell'onda gravitazionale è f . Per il calcolo di $\tilde{h}_{+,z}(f)$ si ricorre nuovamente al metodo della fase stazionaria, ottenendo una buona approssimazione [16]; in particolare le formule esplicite per $t(f)$ e $\tilde{h}_{+,z}(f)$ sono riportate in [25], e in quest'ultima si include anche una fase costante φ_0 relativa alla forma d'onda.

3.2 Metodologie di analisi del segnale

Secondo la modellizzazione operata nella precedente sezione, dalle varie misurazioni che effettuerà LISA si potranno costruire due serie temporali di maggior interesse, $s_{mis,\alpha}(t)$, $\alpha = I, II$. Tuttavia tale segnale osservato sarà composto da una componente $h_{mis,\alpha}(t)$ di segnale associato all'onda gravitazionale, qualora in tal istante ve ne fosse una, ed una componente inevitabile $n_{mis,\alpha}(t)$ di rumore. Per analizzare il segnale è utile idealizzare i vari processi di misura reali secondo un modello lineare, come esposto in [25], per cui nello spazio delle frequenze per il segnale d'interesse vale $\tilde{h}_{mis,\alpha}(f) = T(f) \tilde{h}_\alpha(f)$, con $\tilde{h}_\alpha(f)$ dato da (3.7), e $T(f)$ la funzione di trasferimento totale del sistema. Invertendo quest'ultima relazione è possibile definire anche $\tilde{s}_\alpha(f) := T^{-1}(f) \tilde{s}_{mis,\alpha}(f)$ e $\tilde{n}_\alpha(f) := T^{-1}(f) \tilde{n}_{mis,\alpha}(f)$, oltre alle

rispettive trasformate inverse $s_\alpha(t)$ e $n_\alpha(t)$, in modo da poter astrarre dalle caratteristiche esatte del rumore, ottenendo inoltre delle grandezze direttamente confrontabili con $\tilde{h}_\alpha(f)$, quantità finora trattata.

Con questo approccio, si definisce la funzione di autocorrelazione del rumore $\kappa(t_1, t_2) := \langle n(t_1) n(t_2) \rangle$, dove le parentesi ad angolo indicano la media sull'ensemble di possibili realizzazioni del rumore, oppure operativamente, pure meno propriamente, tale media effettuata a partire da vari campioni di rumore effettivamente registrato [34, 25]. Nel resto dell'analisi si ipotizzerà che il rumore sia stazionario, cioè che l'autocorrelazione del rumore non dipenda da un istante di tempo assoluto, $\kappa(t_1, t_2) = \kappa(|t_1 - t_2|)$, e che sia gaussiano, nel senso che $n(t)$ rappresenti un processo stocastico gaussiano. L'ipotesi di stazionarietà implica che debba valere $\kappa(\tau) = \langle n(t + \tau) n(t) \rangle$, ed applicandovi la trasformata di Fourier si arriva a definire la densità spettrale di rumore a coda singola

$S_n(f) := 2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \kappa(\tau) e^{i2\pi f\tau}$. Tale quantità risulta reale, con dimensioni Hz^{-1} considerando i segnali e i rumori adimensionali, e vale $S_n(-f) = S_n(f)$. Estendendo la trattazione a più detector, indicizzati con α o β , si ottiene $\langle \tilde{n}_\alpha^*(f) \tilde{n}_\beta(f') \rangle = \frac{1}{2} \delta(f - f') S_n(f)_{\alpha\beta}$, da cui segue la scelta di interferometri non correlati I e II operata nel paragrafo 3.1.1 [13]. In tal caso si ottiene $S_n(f)_{I,I} = S_n(f)_{II,II} = S_n(f)$, con termini non diagonali nulli. Come stima della densità spettrale di rumore $S_n(f)$ si utilizzano i più recenti dati disponibili del progetto, ottenuti da [24, 10], che pur rappresentano i requisiti minimi per ottenere un ritorno scientifico soddisfacente, con validità assunta almeno nella banda utile da $1 \cdot 10^{-4}$ Hz a 0.1 Hz e trascurando l'eventuale *confusion noise* a basse frequenze dovuto al segnale generato da un elevato numero di sistemi binari non singolarmente risolvibili [13]:

$$S_n(f) = \frac{10}{3} \left(\frac{1}{(2\pi f)^4} \left(5.76 \cdot 10^{-48} \text{Hz}^3 \left(1 + \left(\frac{0.4 \text{ mHz}}{f} \right)^2 \right) \right) + 3.6 \cdot 10^{-41} \frac{1}{\text{Hz}} \right) \left(1 + \left(\frac{f}{25 \text{ mHz}} \right)^2 \right). \quad (3.8)$$

3.2.1 Matched filtering

Seppur la sensibilità degli interferometri sia molto elevata, l'ampiezza del segnale atteso dall'*inspiral* di SMBHBs è comunque minore in ogni istante dell'ampiezza del rumore; per ovviare a questa difficoltà viene impiegata la tecnica del *matched filtering*. Essa sfrutta la proprietà per cui integrando nel tempo il prodotto tra il segnale misurato $s(t)$ e la forma d'onda $\bar{h}(t)$ del segnale atteso, soltanto in presenza del segnale reale corrispondente $h(t)$ si otterrà un contributo significativo all'integrale stesso, a causa della non correlazione tra rumore e forma d'onda [25]. Tuttavia questa tecnica, oltre a necessitare il confronto del segnale misurato con migliaia o milioni di *templates* per campionare accuratamente lo spazio dei parametri, richiede un'ottima conoscenza a priori della forma d'onda stessa da ricercare, motivo per cui è stato utile discutere le correzioni del paragrafo 2.2.1, anche se operativamente sono necessari termini fino all'ordine 3.5PN. Inoltre l'aggiunta di ulteriori parametri che descrivano anche lo spin dei buchi neri o l'eccentricità dell'orbita è necessaria per ridurre l'errore sistematico che altrimenti viene introdotto. Tuttavia tale aggiunta può portare anche ad un significativo peggioramento dell'errore statistico di un sottoinsieme di parametri [15, 14].

Definita pertanto la quantità $\hat{s} = \int_{-\infty}^{+\infty} dt s(t) K(t)$, con $K(t)$ *filter function* da determinare, si definisce il rapporto segnale su rumore (SNR) in ampiezza come il rapporto tra il valore atteso della variabile \hat{s} in presenza dell'onda gravitazionale, per cui $s(t) = h(t) + n(t)$, e il suo scarto quadratico medio in assenza dell'onda gravitazionale, ove $s(t) = n(t)$. In tal caso si può dimostrare che la *filter function* ottimale, che massimizza l'SNR, è data dalla trasformata inversa del filtro di Wiener $\tilde{K}(f) \propto \frac{\tilde{h}(f)}{S_n(f)}$ [25].

Estendendo la tecnica del *matched filtering* a più rilevatori risulta utile indicare con \mathbf{g} il vettore contenente gli N segnali $\{g_\alpha(t)\}_{\alpha=1,\dots,N}$ prodotti dai corrispondenti N detector che compongono il sistema. In tal modo, dati gli insiemi di segnali \mathbf{g} e \mathbf{k} si definisce il prodotto scalare reale

$$(\mathbf{g} | \mathbf{k}) := 2 \int_0^{+\infty} df [S_n(f)^{-1}]^{\alpha\beta} \left(\tilde{g}_\alpha^*(f) \tilde{k}_\beta(f) + \tilde{g}_\alpha(f) \tilde{k}_\beta^*(f) \right). \quad (3.9)$$

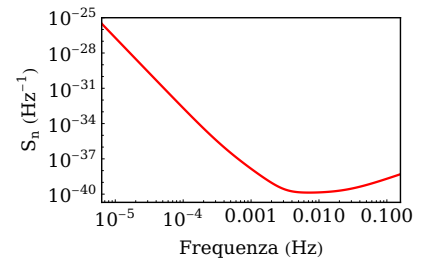


Figura 3.1 – Stima adottata per la densità spettrale di rumore $S_n(f)$ nelle configurazioni I, II .

Con questa notazione nel caso di matched filtering ottimale, per cui nella funzione filtro si utilizza esattamente la forma d'onda del segnale indotto dall'onda gravitazionale, il rapporto segnale-rumore si riduce a $\frac{S}{N}[\mathbf{h}] = \sqrt{(\mathbf{h}|\mathbf{h})}$ [13, 25]. È da notare che questa quantità non è riferita al valore istantaneo del rapporto segnale su rumore, bensì a quantità integrate nel tempo, pertanto la qualità della misura aumenta con il tempo di osservazione.

Dall'ipotesi di rumore gaussiano segue inoltre che la probabilità di ottenere una certa realizzazione \mathbf{n}_0 per il rumore risulta $p(\mathbf{n} = \mathbf{n}_0) \propto e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{n}_0|\mathbf{n}_0)} = e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{s}-\mathbf{h}|\mathbf{s}-\mathbf{h})}$, dato che per definizione si ha $\mathbf{s} = \mathbf{n} + \mathbf{h}$ [13]. Considerando le variabili $\{\lambda_i\}$ che parametrizzano il segnale dell'onda gravitazionale $\mathbf{h} = \mathbf{h}(\{\lambda_i\})$, e definiti $\{\hat{\lambda}_i\}$ i valori veri del sistema considerato, si può scrivere $\hat{\lambda}_i = \lambda_i^s + \Delta\lambda^i$, dove $\{\lambda_i^s\}$ sono la miglior stima dei parametri, ottenuta ad esempio massimizzando la funzione di verosimiglianza (likelihood). Nel caso di SNR elevato, in prima approssimazione, la probabilità a posteriori associata agli errori $\Delta\lambda^i$ dei parametri, dato un segnale \mathbf{s} , è $p(\Delta\lambda^i|\mathbf{s}) \propto e^{-\frac{1}{2}\Gamma_{ij}\Delta\lambda^i\Delta\lambda^j}$ [25]. A partire dalla matrice dell'informazione di Fisher $\Gamma_{ij} = (\frac{\partial\mathbf{h}}{\partial\lambda^i}|\frac{\partial\mathbf{h}}{\partial\lambda^j})$ è dunque possibile ottenere la matrice delle covarianze dei parametri $\langle\Delta\lambda^i\Delta\lambda^j\rangle = (\Gamma^{-1})^{ij} + o(\frac{S}{N})^{-1}$, il tutto valutato in $\{\lambda_i^s\}$ [13]. È comunque da notare che gli errori dei parametri così ottenuti sono verosimilmente un limite inferiore, pertanto talvolta possono risultare sottostimati [38].

3.2.2 Stima dell'incertezza dei parametri

Considerando i contributi di segnale $h_I(t)$ ed $h_{II}(t)$ dovuti alla sola perturbazione di un'onda gravitazione h_{ij}^{TT} , dalla definizione (3.9) e da $\Gamma_{ij} = (\frac{\partial\mathbf{h}}{\partial\lambda^i}|\frac{\partial\mathbf{h}}{\partial\lambda^j})$, la matrice dell'informazione di Fisher risulta:

$$\Gamma_{ij} = 4 \int_0^{+\infty} df \frac{1}{S_n(f)} \operatorname{Re} \left(\frac{\partial(\tilde{h}_I^*(f))}{\partial\lambda^i} \frac{\partial(\tilde{h}_I(f))}{\partial\lambda^j} + \frac{\partial(\tilde{h}_{II}^*(f))}{\partial\lambda^i} \frac{\partial(\tilde{h}_{II}(f))}{\partial\lambda^j} \right), \quad (3.10)$$

dove $\operatorname{Re}(z) = \frac{z+z^*}{2}$ indica la parte reale del numero complesso, con $S_n(f)$ funzione reale per definizione, e $h_\alpha(f)$ dato dall'equazione (3.7).

Nel caso di interesse di *inspiral* di SMBHBs, impiegando le approssimazioni presentate nel paragrafo 2.2.1, i parametri fisici necessari per descrivere il segnale $\tilde{h}_\alpha(f)$ sono 9: $d_L(z)$, $\bar{\theta}_s$, $\bar{\phi}_s$, $\bar{\psi}_s$, ι , le masse ν e m_z o μ_z , o equivalentemente $m_{1,z}$ e $m_{2,z}$, la fase costante φ_0 nella forma d'onda, ed il tempo t_c in cui l'osservatore osserva la coalescenza. Nell'analisi successiva, oltre all'ipotesi di matched filtering ottimale, si assumerà che i valori veri scelti per tali parametri siano anche la loro miglior stima. Si andrà dunque a valutare la formula (3.10) numericamente, attraverso il software *Mathematica*; per ottenere risultati più accurati si utilizzano pertanto le quantità $\ln(\frac{d_L}{1\text{m}})$, $\bar{\mu}_s$, $\bar{\phi}_s$, $\bar{\psi}_s$, ι , ν , $\ln(\frac{m_z}{1\text{kg}})$, φ_0 , t_c ; con $\bar{\mu}_s := \cos(\bar{\theta}_s)$. Si assume inoltre che il tempo $t = 0$ sia l'istante in cui LISA inizi l'osservazione di tal segnale, seppur solo gli ultimi mesi dell'*inspiral* di SMBHBs forniscono un contributo significativo alla misurazione. In tal modo si assume che la fase di rotazione del triangolo della costellazione ϕ_0 sia una variabile uniformemente distribuita nell'intervallo $[0, 2\pi[$; inoltre l'estremo inferiore dell'integrale (3.10) è dato dalla frequenza dell'onda gravitazionale all'istante $t = 0$, mentre l'estremo superiore è dato dalla frequenza misurata nell'istante in cui si ferma l'osservazione, oppure dal valore di frequenza redshiftata misurata dall'osservatore quando la separazione del sistema binario è pari a $\frac{5}{3}R_{ISCO} = \frac{5}{3}\frac{6Gm}{c^2}$, valore limite oltre cui l'espansione post-Newtoniana utilizzata non risulta più valida [23].

Per fornire una stima della risoluzione angolare con cui LISA sarà in grado di determinare la direzione in cui è situata la sorgente, si definisce l'incertezza sulla posizione angolare

$$\Delta\Omega_s = 2\pi\sqrt{\Delta\bar{\mu}_s^2\Delta\bar{\phi}_s^2 - \langle\Delta\bar{\mu}_s\Delta\bar{\phi}_s\rangle^2} = 2\pi\sqrt{(\Gamma^{-1})^{\mu\mu}(\Gamma^{-1})^{\phi\phi} - ((\Gamma^{-1})^{\mu\phi})^2}, \quad (3.11)$$

quantità misurata in steradiani (sr). Con tale definizione, nel limite di SNR elevato e incertezze ridotte, scelta un'ellisse opportunamente orientata che sottende un angolo solido Ω , la probabilità che la sorgente sia all'esterno della regione scelta risulta approssimativamente $p = e^{-\frac{\Omega}{\Delta\Omega_s}}$ [39]. Per avere un riferimento utile, mentre l'intera sfera celeste sottende 4π sr, la Luna piena sottende mediamente un angolo solido pari a $6.4 \cdot 10^{-5}$ sr.

Capitolo 4

Risultati e conclusioni

Si riportano di seguito i risultati dell'analisi effettuata, richiamando quanto descritto nel resto del lavoro, in particolare l'ultima sezione 3.2.2. Tutte le masse di seguito riportate sono riferite al valore intrinseco, cioè al valore della massa che sarebbe misurato da un osservatore vicino alla sorgente. Data la dimensionalità non banale dello spazio dei parametri, per studiare la dipendenza della risoluzione angolare da essi è stato talvolta necessario fissare alcuni parametri in modo arbitrario; i restanti vengono sottoposti ad campionamento casuale, assumendo distribuzioni uniformi nell'intervallo $[0, 2\pi[$ per $\bar{\phi}_s, \varphi_0, \phi_0$; nell'intervallo $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ per $\bar{\psi}_s$ e nell'intervallo $]-1, 1[$ per $\bar{\mu}_s$. Al contrario si sceglie di fissare sempre i parametri z o d_L, m_1, m_2 e ι , dato che questi vanno a modificare in modo preponderante l'ampiezza e le caratteristiche intrinseche dell'onda gravitazionale.

Nonostante quest'ultima scelta, la distribuzione di $\Delta\Omega_s$ risultava molto asimmetrica, pertanto la si è approssimata con una distribuzione normale nella variabile casuale $\log_{10}(\Delta\Omega_s \cdot \text{sr}^{-1})$. Per chiarezza espositiva tuttavia i risultati sono presentati nell'usuale scala lineare in steradiani, se non specificato diversamente. Di conseguenza nella tabella 4.1 per l'incertezza angolare si è scelto di esporre l'intervallo simmetrico di semiampiezza 2 scarti quadratici medi rispetto alla media dei valori $\log_{10}(\Delta\Omega_s \cdot \text{sr}^{-1})$, pertanto nella scala lineare esso può essere considerato come l'intervallo contenente approssimativamente il 95% dei valori meno estremali ottenuti. Nonostante valori di $\Delta\Omega_s$ maggiori di 4π sr inoltre non abbiano significato fisico, sono in ogni caso riportati per confronto, poiché forniscono informazioni riguardo la dipendenza dell'incertezza sulla posizione angolare da altri parametri. Per l'SNR invece si espone la media dei valori, calcolata nell'usuale scala lineare.

4.1 Risultati

Osservando la figura 4.1, si può notare come l'SNR aumenti in modo considerevole nell'ultimo periodo dell'*inspiral*, quando l'ampiezza intrinseca dell'onda gravitazionale aumenta, come pure la sua frequenza, arrivando nella banda di maggior sensibilità di LISA. In particolar modo si vede che la maggior parte del segnale viene raccolto nell'ultima settimana circa, e per sistemi più massivi l'evoluzione risulta ancora più rapida. Anche l'evoluzione della stima dell'incertezza sulla posizione angolare mostra un andamento simile, seppur il suo miglioramento sembri avvenire in un periodo di tempo più lungo dell'ultima settimana, coerentemente con l'ipotesi che l'informazione sulla direzione della sorgente sia estratta dalla modulazione del segnale operata dai moti orbitali di LISA, con scale temporali di un anno o almeno una sua discreta frazione.

Dalla tabella 4.1 tuttavia, confrontando gli scenari A e B, si nota che la risoluzione angolare può aumentare in discreto modo nelle ultime ore, corrispondentemente al maggiore aumento di SNR; si ipotizza che ciò sia riconducibile al fatto che un SNR più elevato, permettendo di ottenere stime migliori per la maggior parte dei parametri, possa in qualche modo vincolare maggiormente i valori di alcune variabili correlate a $\bar{\mu}_s$ e $\bar{\phi}_s$, permettendo dunque di ridurre l'incertezza anche sulla stima di queste ultime. È allo stesso tempo possibile che una determinazione più precisa delle caratteristiche dell'onda gravitazionale, come della sua polarizzazione, permetta di ottenere ulteriori informazioni sulla posizione angolare della sorgente in funzione della modulazione del segnale indotta istantaneamente

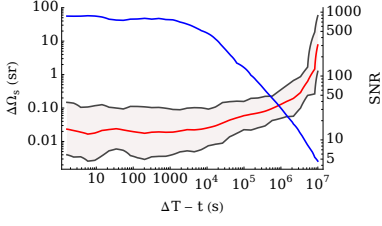


Figura 4.1 – Valor medio dell’SNR (in blu) e mediana di $\Delta\Omega_s$ (in rosso con banda comprendente il 95% degli eventi) in funzione del tempo mancante affinché il sistema raggiunga la separazione limite $\frac{5}{3}R_{ISCO}$, termine dell’osservazione. Il sistema binario ha parametri $z = 1$, $m_1 = 3 \cdot 10^5 M_\odot$, $m_2 = 10^5 M_\odot$, $\Delta T = 1$ anno, $\iota = 0.7$ rad; si esegue un campionamento casuale di tutti gli altri angoli.

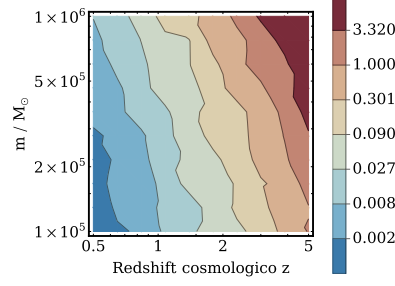


Figura 4.2 – Mediana dell’incertezza sulla posizione angolare $\Delta\Omega_s$, scala in steradiani, in funzione di z e m : in ascissa il valore di redshift z , in ordinata il valore di massa totale non redshiftata $m = m_1 + m_2$, con $m_1 = m_2$. Si è fissato $\iota = 0.7$ rad e $\Delta T = 1$ anno, mentre i parametri rimanenti sono stati generati casualmente.

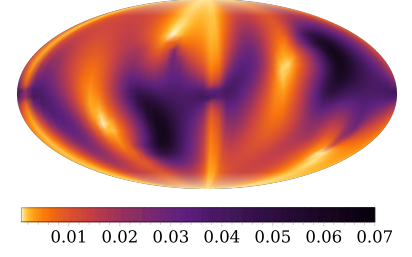


Figura 4.3 – Proiezione di Mollweide della incertezza sulla posizione angolare $\Delta\Omega_s$ in funzione della posizione angolare, scala in steradiani, per un sistema con $z = 1$, $m_1 = 3 \cdot 10^5 M_\odot$, $m_2 = 10^5 M_\odot$, $\bar{\psi}_s = -0.65$ rad, $\iota = 0.5$ rad, $\varphi_0 = 0.3$ rad, $\phi_0 = 3.5$ rad, $\Delta T = 1$ anno. Il centro del grafico è posizionato in $\bar{\theta}_s = \frac{\pi}{2}$ rad, $\bar{\phi}_s = 0$ rad, spostandosi verso destra si aumenta $\bar{\phi}_s$, verso il basso $\bar{\theta}_s$.

| Parametri sistema | | | Scenario A | | Scenario B | | Scenario \tilde{C} | |
|-------------------|----------------|---------|------------|------------------|------------|------------------|----------------------|------------------|
| m_1 | m_2 | ι | SNR | $\Delta\Omega_s$ | SNR | $\Delta\Omega_s$ | SNR | $\Delta\Omega_s$ |
| M_\odot | M_\odot | rad | | 10^{-3} sr | | 10^{-3} sr | | 10^{-3} sr |
| 10^5 | 10^5 | 0.5 | 1040 | [1.3, 60] | 260 | [4, 50] | 1200 | [0.6, 40] |
| 10^5 | 10^5 | 1.5 | 400 | [10, 270] | 90 | [25, 380] | 500 | [3, 450] |
| 10^5 | 10^5 | 2.0 | 575 | [2.6, 200] | 170 | [20, 150] | 700 | [4, 90] |
| 10^5 | 10^5 | 3.0 | 1080 | [0.6, 40] | 300 | [4, 40] | 1300 | [0.5, 25] |
| $6 \cdot 10^5$ | $2 \cdot 10^5$ | 0.5 | 640 | [6, 250] | 200 | [25, 250] | 3300 | [7, 130] |
| $6 \cdot 10^5$ | $2 \cdot 10^5$ | 1.5 | 260 | [60, 630] | 80 | [220, 1300] | 1200 | [15, 1400] |
| $6 \cdot 10^5$ | $2 \cdot 10^5$ | 2.0 | 380 | [20, 430] | 110 | [50, 930] | 1700 | [8, 350] |
| $6 \cdot 10^5$ | $2 \cdot 10^5$ | 3.0 | 725 | [7, 150] | 250 | [20, 200] | 3500 | [2.6, 140] |
| $8 \cdot 10^5$ | $8 \cdot 10^4$ | 0.5 | 150 | [7, 120] | 190 | [12, 220] | 2200 | [3, 80] |
| $8 \cdot 10^5$ | $8 \cdot 10^4$ | 1.5 | 100 | [30, 1200] | 80 | [110, 1200] | 850 | [10, 550] |
| $8 \cdot 10^5$ | $8 \cdot 10^4$ | 2.0 | 85 | [30, 280] | 120 | [23, 850] | 1200 | [5, 300] |
| $8 \cdot 10^5$ | $8 \cdot 10^4$ | 3.0 | 180 | [5, 80] | 230 | [10, 200] | 2700 | [1.4, 110] |
| 10^6 | 10^6 | 0.5 | 300 | [40, 550] | 130 | [90, 1200] | 5000 | [15, 400] |
| 10^6 | 10^6 | 1.5 | 135 | [330, 3700] | 50 | [700, 8500] | 1800 | [80, 3200] |
| 10^6 | 10^6 | 2.0 | 215 | [160, 2000] | 75 | [270, 4000] | 2800 | [30, 2400] |
| 10^6 | 10^6 | 3.0 | 380 | [50, 420] | 150 | [70, 950] | 5200 | [13, 400] |
| 10^7 | 10^7 | 0.5 | 14 | *[2k, 24k] | 13 | *[1.4k, 30k] | 840 | [0.5k, 9.2k] |
| 10^7 | 10^7 | 1.5 | 6 | *[13k, 325k] | 6 | *[15k, 200k] | 270 | [2.4k, 36k] |
| 10^7 | 10^7 | 2.0 | 9 | *[10k, 65k] | 8 | *[5.5k, 85k] | 500 | [1k, 30k] |
| 10^7 | 10^7 | 3.0 | 20 | *[1k, 22k] | 15 | *[1.7k, 17k] | 950 | [0.25k, 8.3k] |

Tabella 4.1 – Valori del rapporto segnale rumore (SNR) e dell’incertezza sulla posizione angolare $\Delta\Omega_s$ per un campionamento arbitrario dello spazio dei parametri, secondo quanto descritto nel testo. I valori contrassegnati con un asterisco sono da considerarsi non affidabili a causa dell’SNR ridotto, mentre il suffisso k abbrevia 10^3 . Ogni stima è ottenuta a partire da 40 simulazioni con valori casuali di $\bar{\phi}_s$, $\bar{\mu}_s$, φ_0 , ϕ_0 , $\bar{\psi}_s$. Per tutti e tre gli scenari si ipotizza un sistema binario a $z = 1$, dunque $d_L = 2.1 \cdot 10^{26}$ m, con un tempo di osservazione $\Delta T = 1$ anno. Nello scenario A si osserva il segnale fino a $\frac{5}{3}R_{ISCO}$ (vedasi sezione 3.2.2); nello scenario B si interrompe l’osservazione 12 ore prima, simulando il ritardo tecnico medio di comunicazione dei dati [3]; mentre nello scenario \tilde{C} si estende l’osservazione del segnale fino a $\frac{1}{2}R_{ISCO}$, come in [13], per avere un ordine di grandezza dell’aumento della qualità della stima dei parametri ottenibili dall’osservazioni delle fasi successive a quelle di *inspiral*, seppur questi dati non possano reputarsi affidabili dato che esulano dal regime di validità dell’espansione PN e delle approssimazioni adoperate nella sezione 3.1.

dalle *pattern functions* statiche, formule (3.2) e (3.3), anche se tali informazioni risulterebbero più adatte ad escludere eventuali regioni della sfera celeste, non consentendo invece una stima accurata della direzione di arrivo del segnale.

Confrontando la figura 4.2 con la tabella 4.1 si nota che LISA è in grado di localizzare con maggiore precisione sistemi meno massivi, perlomeno se si limita l'osservazione non oltre la fase finale dell'*inspiral*. La dipendenza dal redshift cosmologico z , cioè dalla distanza di luminosità d_L , risulta invece attesa: minore è la distanza del sistema binario, maggiore sarà l'ampiezza del segnale rilevato e di conseguenza la precisione nella stima dei parametri. Inoltre ci si aspetta che per redshift elevati $z \sim 10$, oltre a rilevare un'ampiezza del segnale molto ridotta, il range di frequenze per sistemi molto massivi potrebbe essere redshiftato lontano dalla banda di maggior sensibilità degli interferometri.

Dalla figura 4.3 si può osservare come l'incertezza sulla posizione angolare del sistema binario abbia una forte dipendenza dalla direzione di provenienza del segnale, oltre che dall'orientazione spaziale relativa tra costellazione e sistema. Si presuppone che questa forte variabilità sia dovuta al fatto che la modulazione del segnale indotta dai moti orbitali dipenda dalla direzione di arrivo dell'onda gravitazionale, per esempio in $\varphi_D(t)$ dalla sua perpendicolarità o meno rispetto al vettore della velocità orbitale del baricentro della costellazione; come pure dalla possibilità che le regioni di maggiore incertezza nel grafico corrispondano a zone di minor sensibilità per le *pattern functions* degli interferometri, in particolar modo negli ultimi istanti della coalescenza.

I dati in tabella 4.1 indicano che LISA non sarà in grado di localizzare con sufficiente precisione sistemi binari di massa totale $m \gtrsim 10^5 M_\odot$ prima della fine della fase di *inspiral*. Tale ridotta risoluzione angolare è in parte riconducibile all'elevato numero di parametri da stimare, poiché in assenza di un SNR elevato non vi sono abbastanza informazioni per misurare fedelmente molteplici quantità di interesse. Un'altra possibilità è che la densità spettrale di rumore $S_n(f)$ sia troppo elevata, essendone possibilmente una stima conservativa, dato che il progetto è ancora nelle fasi iniziali. A tal proposito se una nuova stima della densità spettrale di rumore risultasse $S'_n(f) = k S_n(f)$, con k costante positiva perlomeno nella regione di integrazione della formula (3.10), il rapporto segnale-rumore trasformerebbe come $\frac{S'}{N} = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{S}{N}$, mentre la risoluzione angolare come $\Delta\Omega'_s = k \Delta\Omega_s$.

Confrontando infine i risultati esposti in [13] con lo scenario \tilde{C} , dato che in tal articolo l'osservazione viene interrotta a $\frac{1}{2}R_{ISCO}$, si nota che in questo lavoro l'incertezza sulla posizione angolare $\Delta\Omega_s$ stimata risulta maggiore anche di più di 3 ordini di grandezza, in particolar modo per sistemi con masse $m_z \gtrsim 10^6 M_\odot$. Tuttavia in tale articolo viene utilizzata una precedente configurazione di LISA con bracci lunghi il doppio, una definizione di $\Delta\Omega_s$ leggermente differente, oltre ad una forma d'onda dell'onda gravitazionale diversa. Nonostante ciò questi due ultimi fattori non sembrano influire eccessivamente sui risultati: utilizzando le formule e il codice di questo lavoro con la densità spettrale di rumore $S_n(f)$ di tal articolo e frequenza finale corrispondente a $\frac{1}{2}R_{ISCO}$ si ottengono risultati comparabili sia per l'SNR che per $\Delta\Omega_s$ in tutto il range di masse qui considerato.

Si presuppone dunque che la discrepanza nei risultati sia riconducibile alla densità spettrale di rumore $S_n(f)$ ivi utilizzata, differente dalla formula (3.8). In particolare, esclusa una regione attorno a $7 \cdot 10^{-4}$ Hz, la densità spettrale di questo lavoro risulta maggiore di $3 \sim 5$ volte per $f > 7 \cdot 10^{-4}$ Hz, essendo al contrario circa 100 volte maggiore a $f \sim 10^{-4}$ Hz, per arrivare ad essere fino a $7 \cdot 10^3$ volte maggiore a $f \sim 10^{-5}$ Hz. Dato che la fase di *inspiral*, per sistemi a $z = 1$ con corpi di massa m uguali, termina approssimativamente a $f \approx 0.005 \left(\frac{10^5 M_\odot}{m}\right)$ Hz, o a $f \approx 0.03 \left(\frac{10^5 M_\odot}{m}\right)$ Hz se si continua l'osservazione fino a $\frac{1}{2}R_{ISCO}$ (pur non essendo valido il regime newtoniano di tal formula), si può vedere che in particolar modo per i sistemi più massivi l'ampiezza del rumore ipotizzata in questo lavoro potrebbe essere preponderante sul segnale fino quasi alla fase di *merger*, visto anche l'andamento riportato in tabella 4.1. Da essa si può notare anche che il segnale di sistemi molto massivi nella fase finale diventerà comunque ben rilevabile, visto l'elevato aumento di SNR tra lo scenario A e lo scenario \tilde{C} , dovuto all'aumento dell'ampiezza intrinseca dell'onda gravitazionale; ma al contempo non vi è una corrispondente diminuzione dell'incertezza angolare. Si presuppone, come descritto da [13], che questo sia dovuto al fatto che la maggior parte dell'informazione relativa alla posizione angolare della sorgente, almeno per le approssimazioni utilizzate in questo lavoro, sia ottenuta dalla modulazione del segnale dovuto al moto orbitale di LISA, in particolare dalla differenza variabile di fase dell'onda φ_D

dovuta al moto orbitale del baricentro, come pure alla modulazione della risposta ottenuta attraverso la rotazione della costellazione, che permette di campionare in modo variabile nel tempo la risposta non isotropa delle *pattern function* rispetto alle caratteristiche dell'onda gravitazionale. Pertanto nel caso in cui il segnale risultasse rilevabile soltanto per un periodo di tempo ridotto, come sembrerebbe accadere per sistemi con masse $\gtrsim 10^6 M_\odot$, non sarebbe possibile misurare con la dovuta precisione le modulazioni del segnale prima descritte, da cui la differenza anche di diversi ordini di grandezza nell'incertezza della posizione angolare. Difatti, utilizzando una stima in regime Newtoniano [25], si ottiene che per sistemi con corpi di ugual massa a $z = 1$ e massa totale $m = 10^5 M_\odot, 10^6 M_\odot, 10^7 M_\odot$, la coalescenza avviene rispettivamente 25 minuti, 4 ore e 40 ore dopo l'istante in cui la separazione relativa diventa minore di $\frac{5}{3} R_{ISCO}$, mentre avviene rispettivamente 15 secondi, 2 minuti e 20 minuti dopo che essa diventa minore di $\frac{1}{2} R_{ISCO}$, seppure soprattutto nell'ultimo caso questi valori non si possano ritenere accurati, se non nell'ordine di grandezza. Queste differenze di tempo tra lo scenario *A* e lo scenario *C* sembrerebbero corroborare l'ipotesi precedente, dato che in un paio di giorni i moti orbitali risultano essere praticamente trascurabili. Si può anche notare che per i sistemi più massivi lo scenario *B* sia solo parzialmente utile, dato che tra la fine della fase di *inspiral*, qui fissata a $\frac{5}{3} R_{ISCO}$, e la coalescenza del sistema, può trascorrere anche più di un giorno.

4.2 Conclusioni

Per valutare la possibilità di un'efficace ricerca e localizzazione di SMBHBs attraverso l'utilizzo dello spettro elettromagnetico si richiama l'osservazione del segnale gravitazionale GW170817 da parte del network di osservatori gravitazionali LIGO-Virgo [1], segnale ricondotto alla coalescenza di un sistema binario di stelle di neutroni. In tal caso la sola rilevazione delle onde gravitazionali prodotte dal sistema ha permesso di circoscrivere la posizione angolare ad una regione di circa 30 deg^2 al 90% di credibilità, approssimativamente paragonabile a $\Delta\Omega \approx 0.004 \text{ sr}$ secondo le convenzioni adottate in questo lavoro. Ciò ha consentito, in meno di 11 ore, una successiva localizzazione più precisa ed uno studio attraverso lo spettro elettromagnetico [2].

Utilizzando tale precedente come riferimento, i risultati ottenuti in questo lavoro indicano la possibilità di localizzare un sistema binario di buchi neri supermassicci con ore di anticipo rispetto alla coalescenza, ed un'incertezza sulla posizione angolare nella maggior parte degli eventi $\Delta\Omega \lesssim 0.01 \text{ sr}$, soltanto nel caso di sistemi con massa totale intrinseca m minore di pochi multipli di $10^5 M_\odot$, a redshift cosmologico $z \sim 1$. Tuttavia è da considerare anche il fatto che nel caso in cui il numero di SMBHBs *inspirals* osservati da LISA risultasse elevato, specialmente a basso redshift, vi è la possibilità per pura casualità che alcuni eventi abbiano le giuste caratteristiche per essere osservati in modo ottimale da LISA, poiché per quanto visto nella precedente sezione l'incertezza sulla posizione angolare presenta un'elevata variabilità in funzione di diversi parametri.

È comunque necessario ricordare che in questo lavoro sono state effettuate varie approssimazioni, in particolar modo sono stati trascurati l'eccentricità dell'orbita reciproca dei buchi neri e i loro momenti angolari intrinseci, quantità che si ritiene possano modificare in modo significativo l'evoluzione del sistema, come pure la capacità di estrarre informazioni dal segnale; in tal caso infatti risulterebbe necessario stimare fino a 7 parametri aggiuntivi [15, 14, 38]. Essi tuttavia dovranno essere tenuti in considerazione nel caso reale per ottenere stime accurate; risulterà inoltre necessario adoperare una modellizzazione più completa della risposta degli interferometri.

È altresì verosimile che con un'accurata analisi del segnale rilevato nelle fasi di *merger* e *ringdown* del sistema, nelle quali l'ampiezza intrinseca dell'onda gravitazionale arriva ad essere massima, possano essere stimati con maggior precisione tutti i parametri necessari [26, 27, 7]. In tal modo, seppur nel burst finale non siano presenti le informazioni riguardanti la localizzazione angolare del sistema date dalla modulazione indotta dal moto orbitale di LISA, è possibile che una miglior stima o dei vincoli sui parametri rimanenti possano ridurre l'incertezza sulla posizione angolare, dato che spesso tali quantità risultano correlate.

Infine, nel caso in cui la reale densità spettrale di rumore di LISA dovesse risultare minore di quella utilizzata in questo lavoro, vi sarebbe un corrispondente miglioramento della stima di tutti i parametri, tra cui anche una diminuzione dell'incertezza sulla posizione angolare.

Bibliografia

- [1] B. P. Abbott et al., *GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral*, Phys. Rev. Lett. **119** (16 2017), 161101, DOI: 10.1103/PhysRevLett.119.161101.
- [2] B. P. Abbott et al., *Multi-messenger Observations of a Binary Neutron Star Merger*, Astrophys. J. **848.2** (2017), L12, DOI: 10.3847/2041-8213/aa91c9.
- [3] P. Amaro-Seoane et al., *Laser Interferometer Space Antenna*, 2017, arXiv: 1702.00786 [astro-ph.IM].
- [4] T. A. Apostolatos et al., *Spin-induced orbital precession and its modulation of the gravitational waveforms from merging binaries*, Phys. Rev. D **49** (12 1994), 6274–6297, DOI: 10.1103/PhysRevD.49.6274.
- [5] M. Armano et al., *Beyond the Required LISA Free-Fall Performance: New LISA Pathfinder Results down to 20 μ Hz*, Phys. Rev. Lett. **120** (6 2018), 061101, DOI: 10.1103/PhysRevLett.120.061101.
- [6] J. Baker et al., *Multimessenger science opportunities with mHz gravitational waves*, 2019, arXiv: 1903.04417 [astro-ph.HE].
- [7] J. Baker et al., *The Laser Interferometer Space Antenna: Unveiling the Millihertz Gravitational Wave Sky*, 2019, arXiv: 1907.06482 [astro-ph.IM].
- [8] N. Bartolo et al., *Probing non-Gaussian Stochastic Gravitational Wave Backgrounds with LISA*, JCAP **11** (2018), 034, DOI: 10.1088/1475-7516/2018/11/034, arXiv: 1806.02819 [astro-ph.CO].
- [9] L. Blanchet, *Gravitational Radiation from Post-Newtonian Sources and Inspiralling Compact Binaries*, Living Rev. Relativ. **17.1** (2014), DOI: 10.12942/lrr-2014-2.
- [10] C. Caprini et al., *Reconstructing the spectral shape of a stochastic gravitational wave background with LISA*, J. Cosmol. Astropart. Phys. **2019.11** (2019), 017–017, DOI: 10.1088/1475-7516/2019/11/017.
- [11] C. R. Contaldi et al., *Maximum likelihood map making with the Laser Interferometer Space Antenna*, Phys. Rev. D **102** (4 2020), 043502, DOI: 10.1103/PhysRevD.102.043502.
- [12] N. J. Cornish, *Detecting a stochastic gravitational wave background with the Laser Interferometer Space Antenna*, Phys. Rev. D **65.2** (2001), DOI: 10.1103/physrevd.65.022004.
- [13] C. Cutler, *Angular resolution of the LISA gravitational wave detector*, Phys. Rev. D **57.12** (1998), 7089–7102, DOI: 10.1103/physrevd.57.7089.
- [14] C. Cutler e É. E. Flanagan, *Gravitational waves from merging compact binaries: How accurately can one extract the binary’s parameters from the inspiral waveform?*, Phys. Rev. D **49** (6 1994), 2658–2697, DOI: 10.1103/PhysRevD.49.2658.
- [15] C. Cutler e M. Vallisneri, *LISA detections of massive black hole inspirals: Parameter extraction errors due to inaccurate template waveforms*, Phys. Rev. D **76.10** (2007), DOI: 10.1103/physrevd.76.104018.
- [16] S. Droz et al., *Gravitational waves from inspiraling compact binaries: Validity of the stationary-phase approximation to the Fourier transform*, Phys. Rev. D **59** (12 1999), 124016, DOI: 10.1103/PhysRevD.59.124016.

- [17] European Space Agency, *LISA, unveiling a hidden Universe - Assessment Study Report*, rapp. tecn. ESA/SRE(2011)3, 2011.
- [18] Gravitational Observatory Advisory Team, *The ESA-L3 Gravitational Wave Mission*, rapp. tecn., ver. 1, 2016.
- [19] M. P. Hobson, G. P. Efstathiou e A. N. Lasenby, *General Relativity: An Introduction for Physicists*, Cambridge University Press, 2006, DOI: 10.1017/CB09780511790904.
- [20] L. E. Kidder, *Coalescing binary systems of compact objects to (post)^{5/2}-Newtonian order. V. Spin effects*, Phys. Rev. D **52** (2 1995), 821–847, DOI: 10.1103/PhysRevD.52.821.
- [21] A. Królak, M. Tinto e M. Vallisneri, *Optimal filtering of the LISA data*, Phys. Rev. D **70** (2 2004), 022003, DOI: 10.1103/PhysRevD.70.022003.
- [22] K. Lechner, *Elettrodinamica Classica*, Springer-Verlag Mailand, 2014, DOI: 10.1007/978-88-470-5211-6.
- [23] J. Levin, S. T. McWilliams e H. Contreras, *Inspirals of generic black hole binaries: spin, precession and eccentricity*, Classical and Quantum Gravity **28**.17 (2011), 175001, DOI: 10.1088/0264-9381/28/17/175001.
- [24] LISA Science Study Team, *LISA Science Requirements Document*, rapp. tecn. ESA-L3-EST-SCI-RS-001, ver. 1.0, 2018.
- [25] M. Maggiore, *Gravitational Waves: Volume 1: Theory and Experiments*, OUP Oxford, 2008, DOI: 10.1093/acprof:oso/9780198570745.001.0001.
- [26] M. Maggiore, *Gravitational Waves: Volume 2: Astrophysics and Cosmology*, Oxford University Press, 2018, DOI: 10.1093/oso/9780198570899.001.0001.
- [27] S. Marsat, J. G. Baker e T. D. Canton, *Exploring the Bayesian parameter estimation of binary black holes with LISA*, 2020, arXiv: 2003.00357 [gr-qc].
- [28] Planck Collaboration et al., *Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters*, A&A (2020), DOI: 10.1051/0004-6361/201833910, in pubblicazione.
- [29] T. A. Prince et al., *LISA optimal sensitivity*, Phys. Rev. D **66** (12 2002), 122002, DOI: 10.1103/PhysRevD.66.122002.
- [30] T. Robson e N. J. Cornish, *Detecting gravitational wave bursts with LISA in the presence of instrumental glitches*, Phys. Rev. D **99** (2 2019), 024019, DOI: 10.1103/PhysRevD.99.024019.
- [31] W.-H. Ruan et al., *The LISA-Taiji network: precision localization of massive black hole binaries*, 2019, arXiv: 1909.07104 [gr-qc].
- [32] W.-H. Ruan et al., *The LISA-Taiji network*, Nat. Astron. **4**.2 (2020), 108–109, DOI: 10.1038/s41550-019-1008-4.
- [33] L. J. Rubbo, N. J. Cornish e O. Poujade, *Forward modeling of space-borne gravitational wave detectors*, Phys. Rev. D **69**.8 (2004), DOI: 10.1103/physrevd.69.082003.
- [34] B. S. Sathyaprakash e B. F. Schutz, *Physics, astrophysics and cosmology with gravitational waves*, Living Rev. Relativ. **12**.1 (2009), 2, DOI: 10.12942/lrr-2009-2.
- [35] T. L. Smith e R. R. Caldwell, *LISA for cosmologists: Calculating the signal-to-noise ratio for stochastic and deterministic sources*, Phys. Rev. D **100**.10 (2019), DOI: 10.1103/physrevd.100.104055.
- [36] The eLISA Consortium et al., *The Gravitational Universe*, 2013, arXiv: 1305.5720 [astro-ph.CO].
- [37] M. Tinto e S. V. Dhurandhar, *Time-delay interferometry*, Living Rev. Relativ. **17**.1 (2014), 6, DOI: 10.12942/lrr-2014-6.
- [38] M. Vallisneri, *Use and abuse of the Fisher information matrix in the assessment of gravitational-wave parameter-estimation prospects*, Phys. Rev. D **77**.4 (2008), DOI: 10.1103/physrevd.77.042001.
- [39] A. Vecchio, *LISA observations of rapidly spinning massive black hole binary systems*, Phys. Rev. D **70** (4 2004), 042001, DOI: 10.1103/PhysRevD.70.042001.