



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Facoltà di Ingegneria

Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica e Meccatronica

Sede di Vicenza

Tesi di Laurea

**PIANIFICAZIONE DEL MOTO CON TECNICHE  
DI INPUT SHAPING**

Relatore:

Ch.mo Prof. Dario Richiedei

Laureando:

Roberto Meneghello

Matricola n. 593749

ANNO ACCADEMICO 2010 / 2011



## Ringraziamenti

*Innanzitutto, desidero cogliere questa opportunità per esprimere i miei più sinceri ringraziamenti al Professor Dario Richiedei, per la sua preziosa supervisione ed i consigli dati durante lo sviluppo del presente progetto.*

*Desidero inoltre ringraziare i miei amici e tutte le persone che mi hanno permesso, direttamente o indirettamente, di portare a termine il lavoro.*

*Ultimo, ma non meno importante, desidero ringraziare la mia famiglia che mi ha sempre incoraggiato e motivato durante il corso degli studi.*



# Indice

Glossario .....	vii
Introduzione .....	ix
1. Tecniche di Input Shaping .....	1
1.1. Equazioni di vincolo .....	2
1.1.1. Zero-Vibration shaper .....	3
1.1.2. Curva di sensibilità ed insensibilità .....	4
1.2. Shaper robusti .....	5
1.2.1. Metodi derivativi.....	5
1.2.2. Metodi a vibrazione tollerabile .....	7
1.2.3. Metodi MIS.....	9
1.3. Sensibilità all'errore sul fattore di smorzamento .....	11
1.4. Controllori PID e loro integrazione .....	12
1.4.1. Controllori PID .....	12
1.4.2. Integrazione dei controllori PID .....	14
2. Carroponete a due gradi di libertà .....	17
2.1. Modello dinamico .....	18
2.1.1. Matrici state-space .....	20
2.2. Simulazioni .....	22
2.2.1. Risposta del sistema ad una sequenza di impulsi.....	22
2.2.2. Integrazione del controllore PID.....	31
2.2.3. Confronto input shaping – legge di moto ottimizzata.....	38
3. Carroponete a quattro gradi di libertà.....	45
3.1. Modello dinamico .....	46
3.1.1. Matrici state-space .....	48
3.2. Simulazioni .....	49
3.2.1. Traiettoria rettangolare .....	50
3.2.2. Traiettoria circolare.....	54
4. Risultati sperimentali .....	61
4.1. Setup sperimentale .....	61
4.2. Determinazione dei parametri del sistema.....	64
4.3. Note tecniche .....	67

4.1. Risultati sperimentali .....	69
4.1.1. Traiettoria lineare .....	69
4.1.2. Traiettoria rettangolare .....	74
4.1.3. Traiettoria circolare .....	79
5. Conclusioni.....	85
Appendice A: Leggi di moto .....	89
Bibliografia.....	93

## Glossario

$a$ :	Accelerazione del carrello
$c$ :	Coefficiente di smorzamento
$F_i$ :	Forza d'inerzia del carico
$F_x$ :	Componente in direzione $x$ della forza esercitata sul carrello
$F_y$ :	Componente in direzione $y$ della forza esercitata sul carrello
$I$ :	Insensibilità di uno shaper
$K$ :	Energia cinetica del sistema
$L$ :	Funzione lagrangiana
$l$ :	Lunghezza della fune
$m$ :	Massa del carico sospeso
$M_x$ :	Massa equivalente del carrello lungo la direzione $x$
$M_y$ :	Massa equivalente del carrello lungo la direzione $y$
$N$ :	Numero di impulsi dello shaper
PRV:	Vibrazione percentuale residua (Percentage Residual Vibration)
$r_c$ :	Vettore che descrive la posizione del carrello
$r_m$ :	Vettore che descrive la posizione del carico sospeso
$t_d$ :	Periodo di oscillazione del sistema
$U$ :	Energia potenziale del sistema
$V_{tol}$ :	Vibrazione residua percentuale tollerabile
$\Delta x$ :	Deviazione del carico rispetto alla posizione del carrello lungo $x$
$\Delta y$ :	Deviazione del carico rispetto alla posizione del carrello lungo $y$
$\zeta$ :	Fattore di smorzamento
$\theta_x$ :	Angolo di deviazione del carico sospeso nel piano $x$ - $z$
$\theta_y$ :	Angolo di deviazione del carico sospeso nel piano normale a $x$ - $z$
$\omega_n$ :	Frequenza naturale di oscillazione del sistema



# Introduzione

L'area di ricerca sul controllo delle macchine in presenza di parti flessibili e dinamiche oscillanti è tutt'oggi un campo molto vasto, in quanto tutte le macchine, quando vengono portate al limite delle loro prestazioni, presentano una certa flessibilità. La maggior parte del lavoro in questa area è concentrato sui metodi di controllo in feedback, che prevedono una misura e una retroazione della variabile controllata, caratterizzandosi dunque come metodi in anello chiuso. Questi talvolta sono di difficile implementazione poiché richiedono necessariamente l'installazione di sensori dedicati. Si prestano dunque ad essere metodi di controllo, nelle forme più avanzate, piuttosto costosi, soprattutto nei casi in cui non risulta banale la collocazione del sensore.

Differentemente, si sono sviluppate tecniche in feedforward, ossia tecniche in catena aperta, in cui il controllo non è basato sulla misura della variabile controllata bensì sulla predizione della dinamica e sull'individuazione di ingressi ottimi.

In quest'ultima categoria rientra la tecnica dell'input shaping che consiste nel modificare l'ingresso al sistema sotto controllo in modo tale da annullare l'effetto di una o più frequenze di risonanza presenti nel sistema stesso. L'implementazione di tale metodo si basa nel modificare opportunamente il segnale di riferimento tramite una convoluzione con una sequenza di impulsi, chiamati input shaper.

Il presente lavoro di tesi si propone di riassumere i risultati principali presenti in letteratura in merito alla sintesi degli shaper. Saranno poi analizzati e confrontati tra loro applicandoli in un sistema carroponte composto da un carrello cui è collegata una massa sospesa tramite una fune e che è in grado di muoversi lungo una sola direzione. L'obiettivo che ci si impone è quello di verificare che il moto del pendolo avvenga con la minore oscillazione possibile rispettando la traiettoria pianificata.

L'input shaping è nato inizialmente come modifica del segnale di forza applicata al sistema. L'impossibilità pratica di predefinire la forza necessaria per far eseguire lo spostamento desiderato, ha imposto di applicare lo shaping ai riferimenti di posizione da fornire ad un anello di controllo in catena chiusa del carrello. In particolare, in

questo lavoro, verrà implementato un controllore a retroazione (PID) mediante il quale è possibile programmare la traiettoria da far seguire al carrello e verranno discusse le tecniche per l'implementazione contemporanea degli shaper e del controllore PID. Al fine di ottenere la miglior risposta possibile del sistema è tuttavia necessario prevedere anche una buona pianificazione del moto. Saranno dunque analizzate alcune leggi di moto che permetteranno di completare il quadro sulla pianificazione ed il controllo della movimentazione del carrozzone. La sintesi di leggi di moto "dolci" consente, inoltre, di confrontare anche l'input shaping, il quale genera leggi di moto tali da non eccitare le oscillazioni in base al modello del sistema, a partire da leggi che non sono basate su di esso.

Successivamente si studierà il carrozzone visto in precedenza introducendo il secondo asse di movimentazione: si passerà dunque da un sistema con due gradi di libertà ad uno con quattro gradi di libertà. In tale sezione si farà percorrere al carrello traiettorie predeterminate, con leggi di moto opportune e con gli shaper maggiormente efficaci. Ci si proporrà di indagare il caso in cui vi siano degli errori sul calcolo della frequenza naturale di oscillazione e sullo smorzamento, parametri base per il modellamento degli shaper. Infine saranno visti sperimentalmente in laboratorio, mediante l'ausilio di un robot, la risposta effettiva del pendolo e comparata con alcune delle prove simulate mediante software.

L'analisi e la modellazione dinamica del sistema saranno implementate al simulatore mediante la piattaforma per la simulazione multidominio e la progettazione model-based di sistemi dinamici Simulink di Matlab.

# 1. Tecniche di Input Shaping

L'input shaping è una delle principali tecniche di modifica del segnale di comando. Applicabile in real-time permette di eliminare o ridurre la vibrazione che sarebbe indotta al sistema dal comando originale per la presenza di dinamiche oscillanti.

Se due sinusoidi (smorzate o non), aventi la stessa frequenza ed ampiezza, sono sfasate opportunamente, generano un segnale nullo. Questo effetto è facilmente intuibile ed è illustrato in Fig. 1.. Tale principio può essere esteso anche al controllo di sistemi flessibili: se è nota la frequenza naturale di oscillazione (che deve essere costante) è possibile modificare l'impulso dato al sistema mediante la convoluzione con una sequenza di impulsi di ampiezza e sfasamento opportuni, al fine di annullare la vibrazione, ovvero l'oscillazione, risultante, come riportato in Fig. 1.. La caratterizzazione della sequenza degli N impulsi con cui viene convoluto il comando prende il nome di "Input Shaper" o, semplicemente, "Shaper".

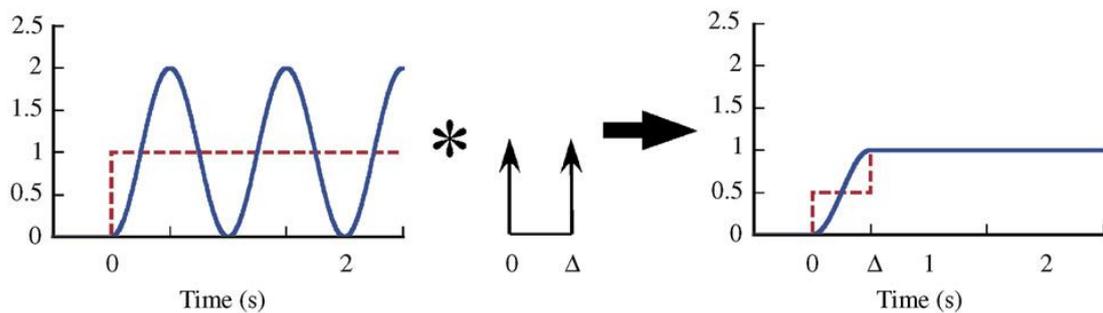


Fig. 1. Processo di input shaping: - - Comando, - Risposta

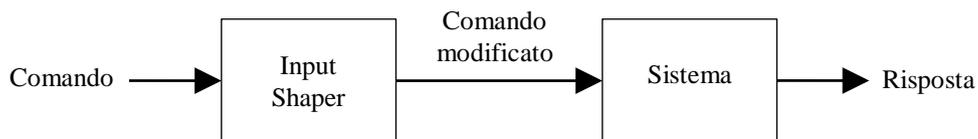


Fig. 1. Schema funzionale dell'input shaping

Si tratterà dunque di determinare il numero, l'ampiezza e la distribuzione temporale di ciascun impulso in modo tale che la loro convoluzione con il segnale di comando porti ad una interferenza distruttiva dei segnali di risposta del sistema. Ciascun

impulso è determinato univocamente da una coppia di valori in cui uno dei due è l'ampiezza mentre l'altro è la locazione temporale in cui deve avvenire. Si osservi come lo shaper introduca un ritardo nell'esecuzione dell'alzata pari alla distanza temporale tra il primo e l'ultimo impulso. Uno schema semplificato del processo di modifica del comando è infine riportato in Fig. 1..

Gli sviluppi proposti si baseranno sull'assunzione di condizioni iniziali nulle per le oscillazioni. Scostamenti rispetto a tali vincoli diminuiranno l'efficacia dell'input shaping.

### 1.1. Equazioni di vincolo

Al fine di determinare le ampiezze degli impulsi e le relative locazioni temporali, è necessario garantire alcune condizioni di vincolo.

Disponendo di una ragionevole stima della frequenza naturale di oscillazione  $\omega_n$  e del fattore di smorzamento  $\zeta$ , l'ampiezza della vibrazione residua percentuale risultante dalla risposta ad una sequenza di N impulsi può essere descritta da:

$$V(\omega_n, \zeta) = e^{-\zeta\omega_n t_n} \sqrt{C(\omega_n, \zeta)^2 + S(\omega_n, \zeta)^2} \quad (1.1)$$

dove

$$C(\omega_n, \zeta) = \sum_{i=1}^N A_i e^{\zeta\omega_n t_i} \cos(\omega_n t_i) \quad (1.2)$$

$$S(\omega_n, \zeta) = \sum_{i=1}^N A_i e^{\zeta\omega_n t_i} \sin(\omega_n t_i) \quad (1.3)$$

I parametri  $A_i$  e  $t_i$  sono l'ampiezza e l'istante temporale dell'i-esimo impulso. Il vincolo fondamentale è rappresentato dall'annullarsi dell'equazione (1.1), ovvero dall'annullamento contemporaneo delle equazioni (1.2) e (1.3). Risolvendo il sistema otteniamo infinite soluzioni di ampiezze e locazioni temporali, ma per evitare soluzioni matematicamente accettabili ma ingegneristicamente prive di senso, è necessario assumere altre restrizioni:

$$\sum_{i=1}^N A_i = 1 \quad (1.4)$$

$$A_i > 0 \quad (1.5)$$

L'equazione (1.4) permette di normalizzare gli impulsi, ovvero fare in modo che l'uscita dell'input modificato corrisponda all'input di riferimento, mentre la (1.5) impedisce di fatto la nascita di impulsi negativi. Esistono tuttavia metodi di shaping che non rispettano quest'ultimo vincolo, ma gli attuatori che poi andranno ad eseguire tali impulsi saranno maggiormente sollecitati. In questo esposto non vengono dunque menzionati.

Per una sequenza di N impulsi le incognite saranno dunque 2\*N: N ampiezze ed N locazioni temporali. Senza perdita di generalità si può imporre la locazione del primo impulso all'istante zero, così da avere  $t_1 = 0$ . Le incognite sono in definitiva 2\*N-1 e verranno di volta in volta indicate in una matrice 2 x N in funzione dello shaper.

### 1.1.1. Zero-Vibration shaper

Il principale shaper finalizzato ad annullare l'oscillazione residua data dall'equazione (1.1), tenendo conto delle (1.4) e (1.5), è quello denominato “Zero-Vibration” shaper (ZV shaper) costituito da una sequenza di 2 impulsi. Le soluzioni che si ottengono dalla risoluzione del sistema sono le seguenti:

$$ZV = \begin{bmatrix} A_i \\ t_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+K} & \frac{K}{1+K} \\ 0 & \frac{t_d}{2} \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

in cui  $t_d$  è il periodo di vibrazione del sistema smorzato:

$$t_d = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \quad (1.7)$$

mentre K assume la forma:

$$K = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \quad (1.8)$$

La risposta del sistema in seguito all'applicazione dello shaper è riportata in Fig. 1.

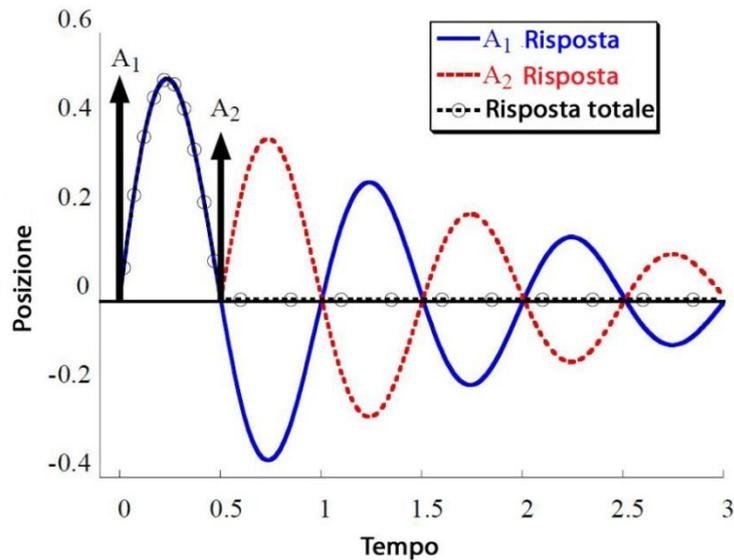


Fig. 1. Risposta del sistema applicando due impulsi di ampiezza e sfasamento opportuni

Come sarà poi discusso nel paragrafo 1.2, saranno necessari altri vincoli per rendere lo shaper più robusto.

### 1.1.2. Curva di sensibilità ed insensibilità

La robustezza di uno shaper può essere valutata misurando la vibrazione residua del sistema a fronte di un errore noto sulla frequenza di oscillazione e sullo smorzamento. Per valutare tale parametro si utilizza la curva di sensibilità riportata in Fig. 1. in cui nell'asse delle ascisse si riporta la frequenza attuale  $\omega$  rapportata a quella stimata per il modello  $\omega_m$  mentre l'asse delle ordinate rappresenta la vibrazione residua percentuale (PRV) che avevamo descritto con la funzione  $V(\omega_n, \zeta)$  nella (1.1). Quest'ultimo parametro è da intendersi come l'ampiezza della vibrazione residua al termine del comando rapportata a quella ottenibile senza alcuna modifica del segnale di riferimento. La curva di sensibilità rappresenterà dunque come varia la vibrazione residua in funzione di un dato errore sulla frequenza naturale.

L'insensibilità  $I$  può essere definita come la base della curva di sensibilità ad un valore di vibrazione residua tollerabile  $V_{tol}$  che rispetti dei parametri di interesse. Per esempio, in Fig. 1. per lo ZV shaper, si nota come l'insensibilità per  $V_{tol} = 5\%$  sia pari a 0.06. Maggiore sarà il valore dell'insensibilità maggiormente robusto risulterà lo shaper.

Da notare però, come sarà descritto nel paragrafo 1.2, che ad una maggiore insensibilità corrisponde un maggiore ritardo dell'input, riducendo dunque la velocità della macchina.

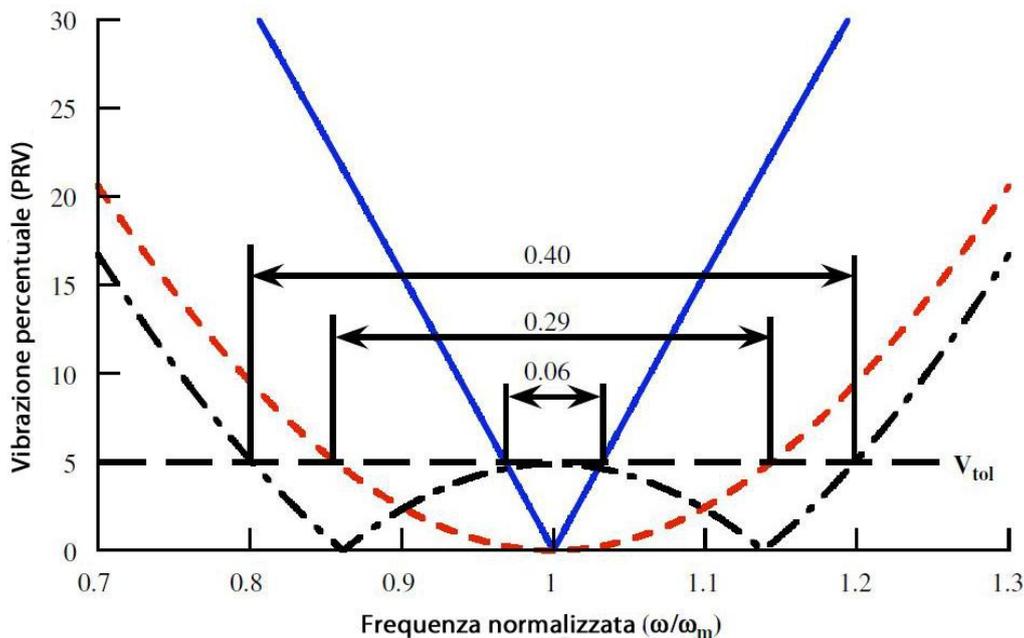


Fig. 1. Esempi di curve di sensibilità: - ZV, - - ZVD, - . - EI

## 1.2. Shaper robusti

Nelle applicazioni reali è spesso difficile, se non impossibile, determinare con esattezza i parametri necessari per la modellazione dello shaper quali la frequenza naturale di oscillazione ed il coefficiente di smorzamento. Per questo motivo è sorta la necessità di costruire shaper più robusti che permettono di ottenere vibrazioni residue accettabili anche a fronte di errori rilevanti sui parametri di modellamento. Tutti gli shaper robusti dovranno però essere progettati in modo tale da ottenere un giusto compromesso tra la robustezza (insensibilità) e la loro durata. Di seguito si riportano i principali metodi per irrobustire lo shaper.

### 1.2.1. Metodi derivativi

Uno dei primi shaper robusti introdotto fu ottenuto imponendo la derivata dell'equazione (1.1), fatta rispetto alla frequenza, uguale a zero:

$$\frac{\partial}{\partial \omega} V(\omega_n, \zeta) = 0 \quad (1.9)$$

Lo shaper risultante prende il nome di “Zero-Vibration and Derivative” (ZVD) shaper ed è composto da una sequenza di tre impulsi descritti da:

$$ZVD = \begin{bmatrix} A_i \\ t_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+2K+K^2} & \frac{2K}{1+2K+K^2} & \frac{K^2}{1+2K+K^2} \\ 0 & \frac{t_d}{2} & t_d \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

dove K assume la medesima forma della (1.8). Da notare come la durata dello ZVD shaper, ossia il ritardo rispetto al segnale originale, sia doppia rispetto a quella dello ZV shaper (rispettivamente pari a  $t_d$  e  $t_d/2$ ). Apportando questo vincolo alla definizione dello shaper si osserva come la curva di sensibilità si “appiattisca” e, di conseguenza, come l’insensibilità aumenti.

È possibile procedere ulteriormente in questa direzione apportando nuove equazioni di vincolo ottenute dall’annullare le derivate di ordine maggiore dell’equazione di partenza (1.1).

Ponendo ad esempio anche la derivata del secondo ordine uguale a zero:

$$\frac{\partial^2}{\partial \omega^2} V(\omega_n, \zeta) = 0 \quad (1.11)$$

si ottiene lo “Zero-Vibration and double Derivative” (ZVDD) shaper che è descritto dai seguenti quattro impulsi:

$$ZVDD = \begin{bmatrix} A_i \\ t_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{D1} & \frac{3K}{D1} & \frac{3K^2}{D1} & \frac{K^3}{D1} \\ 0 & \frac{t_d}{2} & t_d & \frac{3}{2}t_d \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

Ponendo infine nulla anche la derivata terza dell’equazione (1.1):

$$\frac{\partial^3}{\partial \omega^3} V(\omega_n, \zeta) = 0 \quad (1.13)$$

si ottiene lo “Zero-Vibration and triple Derivative” (ZVDDD) shaper descritto da cinque impulsi così conformati:

$$ZVDDD = \begin{bmatrix} A_i \\ t_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{D2} & \frac{4K}{D2} & \frac{6K^2}{D2} & \frac{4K^3}{D2} & \frac{K^4}{D2} \\ 0 & \frac{t_d}{2} & t_d & \frac{3}{2}t_d & 2t_d \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

I denominatori D1 e D2 sono descritti dai seguenti polinomi:

$$\begin{aligned} D1 &= 1 + 3K + 3K^2 + K^3 \\ D2 &= 1 + 4K + 6K^2 + 4K^3 + K^4 \end{aligned} \quad (1.15)$$

Le curve di sensibilità di questi shaper sono riportate in Fig. 1.. Si osservi come gli shaper robusti siano validi anche per sistemi con frequenze di vibrazione blandamente variabile in un intervallo.

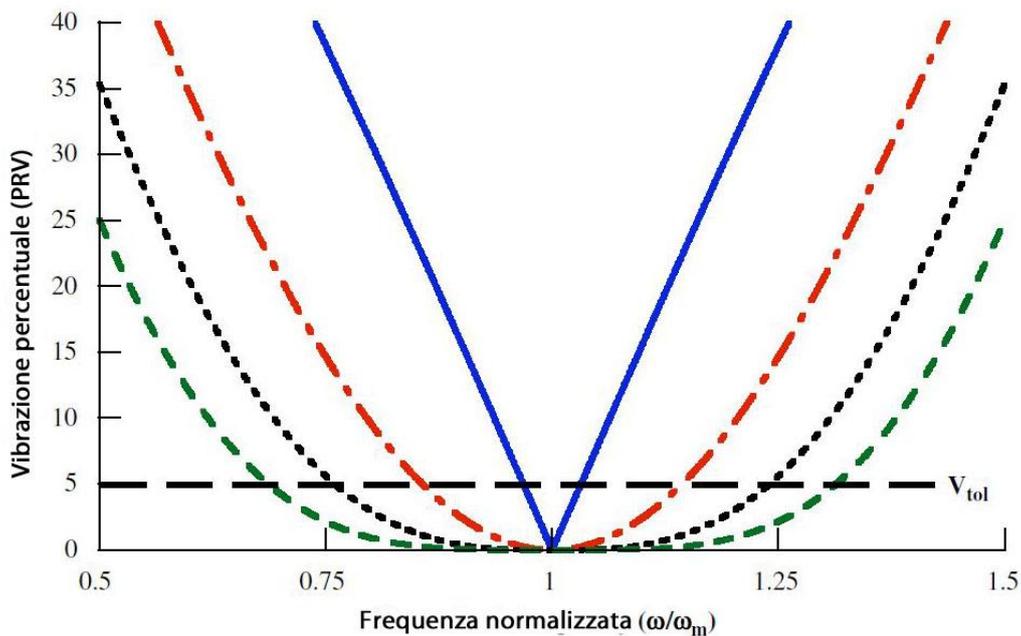


Fig. 1. Curve di sensibilità per gli shaper derivativi: - ZV, - - ZVD, ... ZVDD, - . - ZVDDD

### 1.2.2. Metodi a vibrazione tollerabile

I metodi di shaping discussi fino ad ora sono stati progettati ponendo a zero la vibrazione residua alla frequenza stimata. Talvolta però sono presenti significativi errori sulla frequenza naturale di oscillazione. Da questo fatto è nata l'idea di svincolare la richiesta di annullare l'oscillazione ad una frequenza specifica e di imporre la vibrazione residua, alla frequenza stimata, ad un valore tollerabile  $V_{tol}$  che può essere scelto in funzione di vincoli esterni. Il primo shaper utilizzando questa tecnica fu denominato "Extra Insensitive" (EI) shaper la cui curva di sensibilità è riportata in Fig. 1.. La durata dell'EI shaper è la medesima dello ZVD ma differisce per l'istante del secondo impulso e per le ampiezze di tutti e tre. La configurazione degli stessi per sistemi smorzati è la seguente:

$$EI = \begin{bmatrix} A_1 \\ t_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 1-(A_1+A_3) & A_3 \\ 0 & t_2 & t_d \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

in cui:

$$A_1 = 0.24968 + 0.24962V_{tol} + 0.80008\zeta + 1.23328V_{tol}\zeta + 0.49599\zeta^2 + 3.17316V_{tol}\zeta^2 \quad (1.17)$$

$$A_3 = 0.25149 + 0.21474V_{tol} - 0.83249\zeta + 1.41498V_{tol}\zeta + 0.85181\zeta^2 - 4.90094V_{tol}\zeta^2 \quad (1.18)$$

$$t_2 = t_d \begin{pmatrix} 0.49990 + 0.46159V_{tol}\zeta + 4.26169V_{tol}\zeta^2 + \\ + 1.75601V_{tol}\zeta^3 + 8.57843V_{tol}^2\zeta - 108.644V_{tol}^2\zeta^2 + \\ + 336.989V_{tol}^2\zeta^3 \end{pmatrix} \quad (1.19)$$

Successivamente si sono introdotti altri shaper che estesero l'idea di base aumentando il numero di "gobbe" (*hump*) della curva di sensibilità. Per questo vengono denominati multi-hump EI shaper. In Fig. 1. sono riportate le curve di sensibilità degli "Two-hump Extra Insensitive" e "Three-hump Extra Insensitive" shaper i quali sono contraddistinti da una durata equivalente allo ZVDD e ZVDDD shaper rispettivamente. Sempre per sistemi smorzati, le ampiezze e le locazioni temporali degli impulsi possono essere calcolate nel modo seguente:

$$A_i = M_0 + M_1\zeta + M_2\zeta^2 + M_3\zeta^3 \quad (1.20)$$

$$t_i = (M_0 + M_1\zeta + M_2\zeta^2 + M_3\zeta^3)\tau \quad (1.21)$$

In cui è il periodo di oscillazione del sistema equivalente non smorzato, ovvero  $\tau = 2\pi/\omega_n$ . In Tabella si riportano i coefficienti  $M_i$  per ottenere una vibrazione residua del 5 %.

Per i sistemi non smorzati esistono tuttavia formulazioni analitiche più semplici per determinare la configurazione degli impulsi e per qualsiasi valore di vibrazione residua  $V_{tol}$  [1, pp. 801-802].

Tabella Coefficienti per il calcolo dei multi-hump EI shaper, per  $V_{tol} = 5\%$

Shaper		$M_0$	$M_1$	$M_2$	$M_3$
Two-hump EI	$A_1$	0.16054	0.76699	2.26660	-1.22750
	$A_2$	0.33911	0.45081	-2.58080	1.73650
	$A_3$	0.34089	-0.61533	-0.68765	0.42261
	$A_4$	0.15997	-0.60246	1.00280	-0.93145
	$t_2$	0.49890	0.16270	-0.54262	6.16180
	$t_3$	0.99748	0.18382	-1.58270	8.17120
	$t_4$	1.49920	-0.09297	-0.28338	1.85710
Three-hump EI	$A_1$	0.11275	0.76632	3.29160	-1.44380
	$A_2$	0.23698	0.61164	-2.57850	4.85220
	$A_3$	0.30008	-0.19062	-2.14560	0.13744
	$A_4$	0.23775	-0.73297	0.46885	-2.08650
	$A_5$	0.11244	-0.45439	0.96382	-1.46000
	$t_2$	0.49974	0.23834	0.44559	12.4720
	$t_3$	0.99849	0.29808	-2.36460	23.3990
	$t_4$	1.49870	0.10306	-2.01390	17.0320
	$t_5$	1.99960	-0.28231	0.61536	5.40450

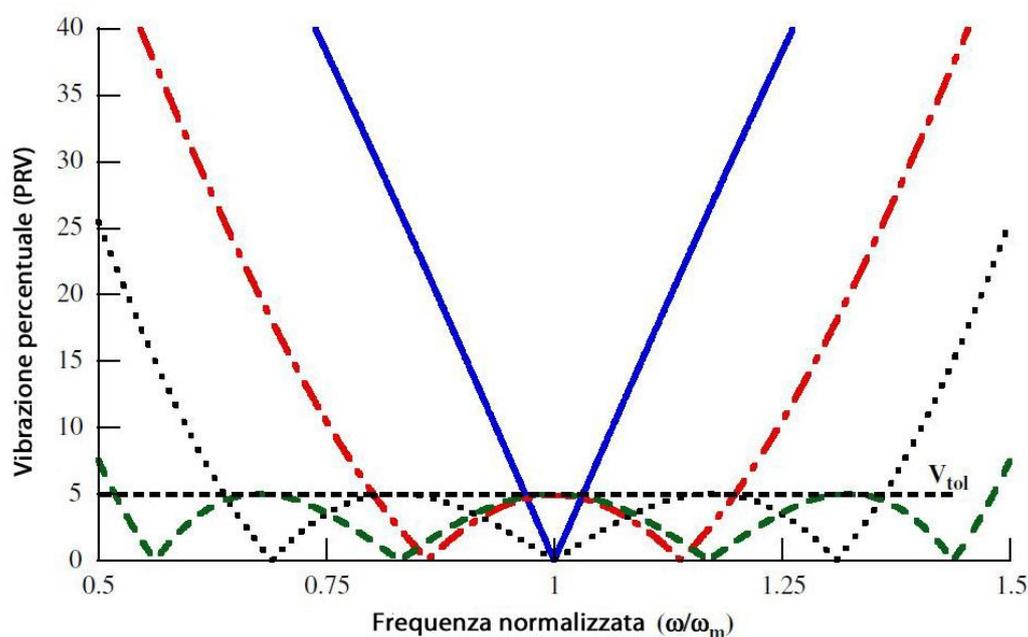


Fig. 1. Curve di sensibilità per gli extra insensitive shaper: - ZV, - . - EI, ... two-hump EI, - - three-hump EI

### 1.2.3. Metodi MIS

I metodi MIS (*Modified Input-Shaping*) si sono proposti di eliminare il vincolo di ottenere la modifica dell'input con il numero minimo di impulsi. Questa tecnica ha permesso di costruire il MISZV shaper che prevede l'annullamento della vibrazione alla frequenza stimata, ma che ha un numero maggiore di impulsi, e quindi una

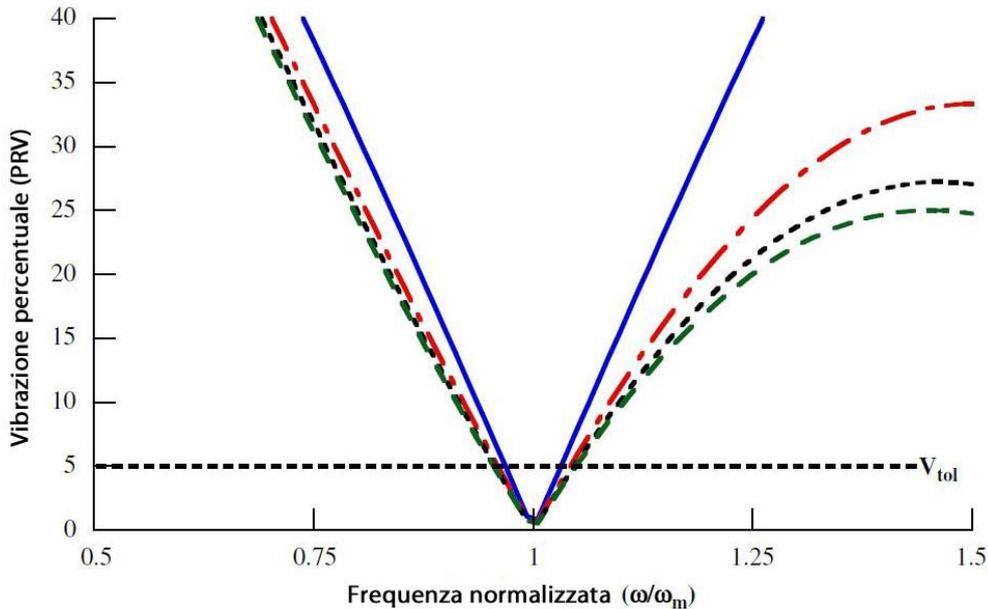
maggiore durata, rispetto al semplice ZV (a meno di limitare a due il numero di impulsi del MISZV shaper). Gli N impulsi del MISZV sono così descritti:

$$N \text{ impulsi MISZV} = \begin{bmatrix} A_i \\ t_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+M} & \frac{K_m}{1+M} & \dots & \frac{K_m^{i-1}}{1+M} & \frac{K_m^{N-1}}{1+M} \\ 0 & \frac{t_d}{N} & \dots & \frac{(i-1)t_d}{N} & \frac{(N-1)t_d}{N} \end{bmatrix} \quad (1.22)$$

dove

$$K_m = e^{-\frac{2\zeta\pi}{N\sqrt{1-\zeta^2}}} \quad (1.23)$$

$$M = K_m + \dots + K_m^{i-1} + K_m^{N-1} \quad (1.24)$$



**Fig. 1. Curve di sensibilità per N-impulsi MISZV: - ZV, - - 3 impulsi MISZV, ... 4 impulsi MISZV, - - 5 impulsi MISZV**

Si osservi come il parametro  $K_m$  sia diverso dal parametro  $K$  descritto dalla (1.8). In Fig. 1. sono riportate le curve di sensibilità per i metodi MISZV con un numero di impulsi compreso tra due (che corrisponde al metodo ZV) e cinque. È facile notare come all'aumentare del numero di impulsi l'insensibilità del metodo non cresca molto a fronte però di un aumento sensibile della durata della modifica dell'input. La sensibilità è, inoltre, asimmetrica.

### 1.3. Sensibilità all'errore sul fattore di smorzamento

A questo punto, la sensibilità alla presenza di errori sulla frequenza di oscillazione è stata discussa esaurientemente. È possibile, in modo analogo, trattare degli effetti degli errori sul fattore di smorzamento sulla risposta in frequenza. I risultati che si ottengono, riportati ancora mediante delle curve di sensibilità allo smorzamento, sono del tutto simili a quelli rilevati per errori sulla frequenza di modellamento. Unica differenza nel raffigurare i risultati tra i due tipi di curve di sensibilità, risiede nel riportare direttamente il fattore di smorzamento  $\zeta$  nell'asse delle ascisse invece di riportarne il valore normalizzato  $\zeta/\zeta_m$ . Questo perché, quando il fattore di smorzamento è vicino a zero, un piccolo cambiamento nello smorzamento stimato  $\zeta$  comporta elevate variazioni nel relativo valore normalizzato.

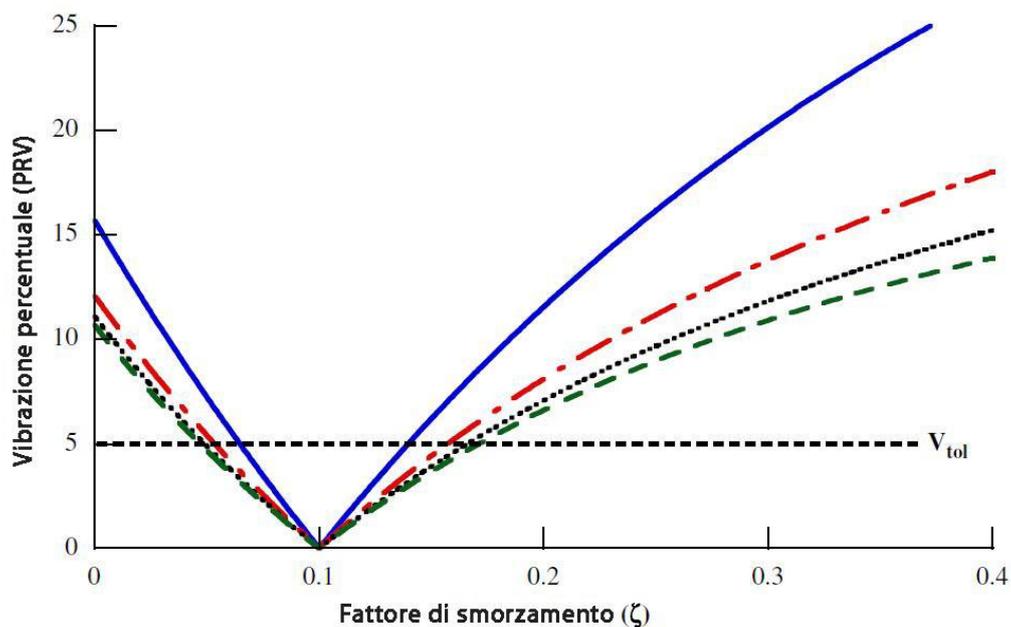


Fig. 1. Curve di sensibilità allo smorzamento per i metodi ZV e MISZV ( $\zeta_m = 0.1$ ): - ZV, - - MISZV N=3, ... MISZV N=4, - - MISZV N=5

Le curve di sensibilità allo smorzamento relative agli shaper ZV e MISZV, modellati sulla base di un fattore  $\zeta_m = 0.1$ , sono riportate in Fig. 1.. Si può osservare come questi shaper, risultati poco robusti alla variazione sulla frequenza di oscillazione, risultano oltremodo poco insensibili anche agli errori sullo smorzamento. Questo trend continua ad essere valido anche per tutti gli altri metodi; la robustezza di uno shaper riguardo la frequenza naturale può generalmente essere traslata alla robustezza relativa allo smorzamento. Sono riportati in Fig. 1., a titolo di esempio,

anche l'andamento della sensibilità allo smorzamento per i metodi "extra insensitive".

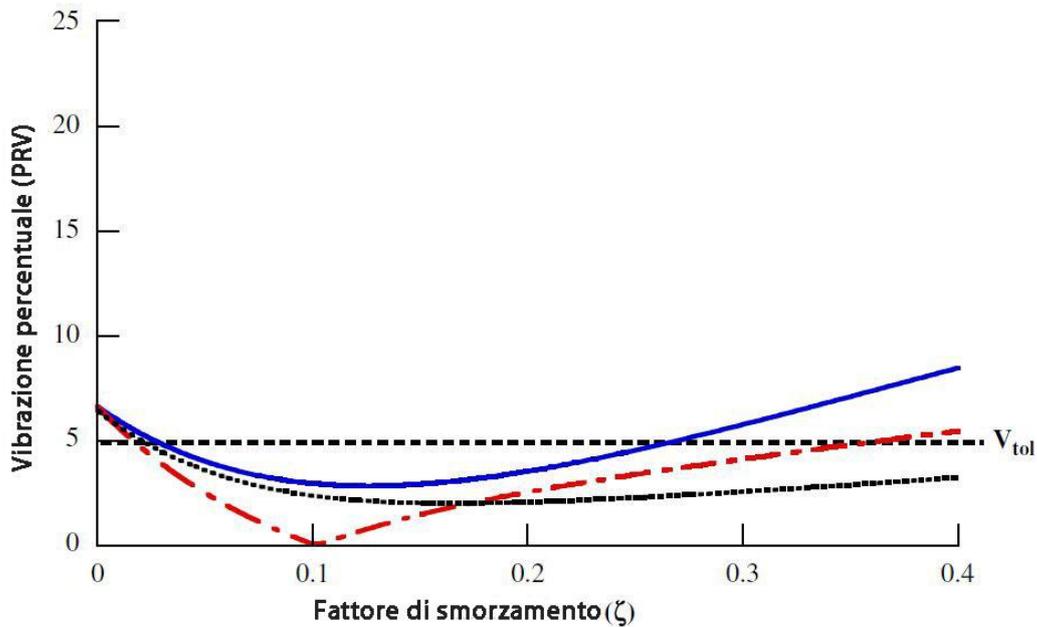


Fig. 1. Curve di sensibilità allo smorzamento per i metodi a vibrazione tollerabile ( $\zeta_m = 0.1$ ): - EI, - - two-hump EI, . . . three-hump EI

## 1.4. Controllori PID e loro integrazione

La tecnica dell'input shaping è nata per modificare un segnale di forza. Il problema della quasi totalità dei sistemi reali è quella dell'impossibilità di conoscere a priori il valore di tale parametro necessario per far compiere al sistema un determinato spostamento. Si rende dunque necessario aggiungere nella catena di controllo del moto un dispositivo in retroazione che permetta di verificare la posizione istantanea del sistema e di confrontarla con quella di riferimento generata a monte. Della molteplicità di controllori in retroazione che esistono, si considereranno esclusivamente quelli ad azione proporzionale, integrale e derivativa, in breve PID, a causa della loro larga diffusione nella realtà industriale.

### 1.4.1. Controllori PID

Il principio sul quale si basa tale sistema è quello di confrontare un segnale di riferimento (in) con l'effettiva risposta del sistema (out) in ogni istante, generando un segnale di errore (e). Tale segnale sarà utilizzato per determinare il valore della

variabile di uscita ( $u$ ), che sarà la variabile manipolabile del processo. Lo schema del funzionamento è riportato in Fig. 1..

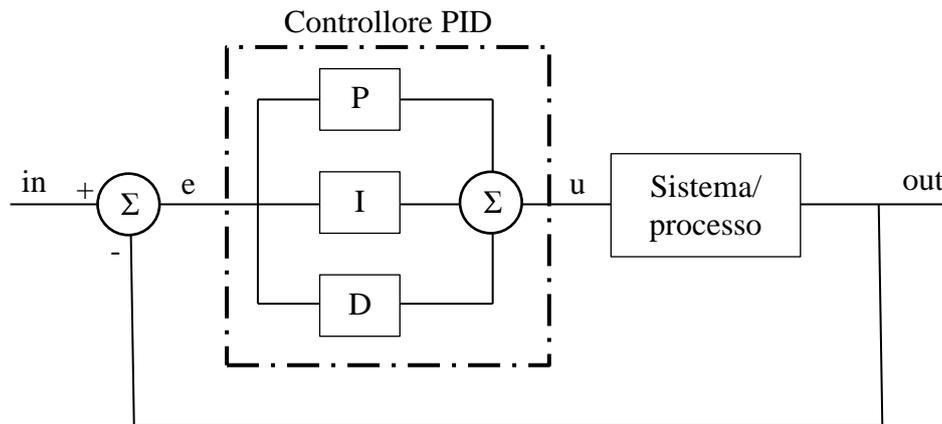


Fig. 1. Schematizzazione di un controllore PID

L'uscita del controllore PID è data da tre contributi differenti:

- azione proporzionale: valore istantaneo del segnale di errore;
- azione integrale: storia dei valori passati del segnale di errore;
- azione derivativa: velocità di variazione del segnale di errore.

Tali azioni vengono calcolate separatamente e poi sommate algebricamente per dare l'uscita finale:

$$u = u_p + u_i + u_d \quad (1.25)$$

in cui  $u_p$ ,  $u_i$  e  $u_d$  rappresentano rispettivamente le azioni proporzionali, integrali e derivate, calcolabili dalle seguenti relazioni:

$$u_p = K_p e \quad (1.26)$$

$$u_i = K_i \int e(t) dt \quad (1.27)$$

$$u_d = K_D \frac{\partial e(t)}{\partial t} \quad (1.28)$$

I parametri  $K_p$ ,  $K_i$  e  $K_D$  sono delle costanti, detti guadagni, che possono essere determinati con semplici regole empiriche, come i metodi di Ziegler-Nichols [2].

L'azione proporzionale ha l'effetto di ridurre il tempo di salita (parametro che caratterizza la prontezza della risposta) e di ridurre ma non eliminare l'errore a

regime permanente in quanto, al tendere a zero dell'errore, l'effetto proporzionale tende ad annullarsi anch'esso.

L'azione integratrice ha l'effetto di eliminare totalmente l'errore a regime permanente ma peggiora la risposta nei transitori, comportando problemi di stabilità.

Infine il controllore derivativo aumenta la stabilità del sistema migliorando la risposta transitoria. Questo tipo di controllore non è però fisicamente realizzabile e viene abbinato con un controllore proporzionale ed integratore.

Di seguito si riporta una tabella riepilogativa degli effetti delle tre azioni:

**Tabella Effetti dei singoli controllori P, I e D**

<b>Controllore</b>	<b>Tempo di salita</b>	<b>Sovraelongazioni</b>	<b>Transitori</b>	<b>Errore a regime</b>
<b>P</b>	diminuisce	aumentano	non influisce	diminuisce
<b>I</b>	diminuisce	aumentano	aumenta	eliminato
<b>D</b>	non influisce	diminuiscono	diminuisce	non influisce

L'azione derivativa è spesso tralasciata nelle implementazioni del PID perché li rende troppo sensibili: un PID con azione derivativa, per esempio, subirebbe una brusca variazione nel momento in cui il riferimento venisse cambiato quasi istantaneamente da un valore ad un altro, risultando in una derivata di e tendente all'infinito, o comunque molto elevata. Ciò sconsiglia l'applicazione dell'azione derivativa in tutti i casi in cui l'attuatore fisico non deve essere sottoposto a sforzi eccessivi. Se ben tarata e se il processo è abbastanza "tollerante", comunque, l'azione derivativa può dare un contributo determinante alle prestazioni del controllore.

### **1.4.2. Integrazione dei controllori PID**

In sistemi di movimentazione automatica, i controllori PID sono usati per il controllo del moto dell'apparato mentre l'input shaping viene utilizzato per lo smorzamento delle oscillazioni residue.

È evidente, di conseguenza, che riuscire a combinare le due tecniche risulterà particolarmente conveniente in quanto ciascuna aggiunge caratteristiche al sistema di controllo non presenti nell'altra. Oltre che conveniente però, in alcuni casi, tale combinazione si renderà necessaria: se si vuole far compiere al sistema un determinato spostamento, ad esempio, non si può calcolare a priori la forza necessaria per percorrerlo. Sono sufficienti, infatti, eventi imprevisti, anche lievi, per determinare errori di posizionamento rilevanti. Basti pensare ad attriti, errori di

trasmissione del segnale e alle stesse semplificazioni fatte per ottenere il modello matematico che descrive il sistema.

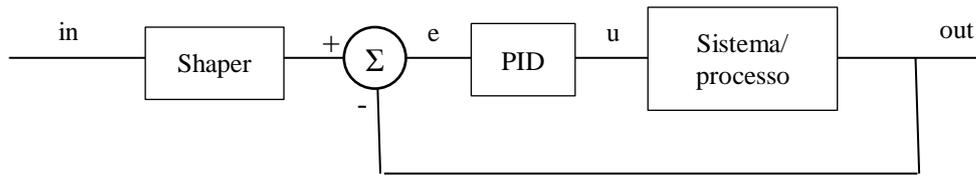


Fig. 1. Schema a blocchi della tecnica di combinazione OLIS

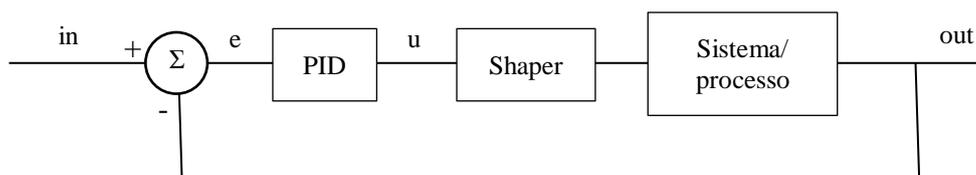


Fig. 1. Schema a blocchi della tecnica di combinazione CLSS

In letteratura si trovano due principali tecniche di combinazione dell'input shaping con i controllori PID. La prima è quella maggiormente consolidata ed anche quella più facilmente implementabile. Essa consiste nell'inserire lo shaper fuori dal ciclo del controllore PID (*outside-the-loop input shaping*, OLIS), processo illustrato schematicamente in Fig. 1.. In tal modo la forza da applicare al sistema viene calcolata dal PID sulla base del riferimento desiderato modificato dallo shaper. La seconda possibilità prevede, invece, l'inserimento del filtro dello shaper all'interno del ciclo del controllore PID (*closed-loop signal shaping*, CLSS), come illustrato in Fig. 1.. Per quest'ultima metodologia però non sono ancora presenti in letteratura linee guida generali per la sua progettazione, ed è tutt'ora oggetto di numerosi studi. Per lo svolgimento del presente lavoro sarà tuttavia utilizzato esclusivamente il metodo OLIS per la sua facilità di implementazione ma soprattutto in prospettiva di comparare i dati con quelli sperimentali. Come sarà meglio evidenziato nel Capitolo 4, infatti, nell'apparato sperimentale a disposizione, si è impossibilitati ad inserire qualunque elemento all'interno della catena di controllo della posizione del carrello. La combinazione del controllore PID e dell'input shaping si basa quindi sul retroazionare la posizione del carrello e di confrontarla con il riferimento. Qualora la massa del carico oscillante sia molto minore della massa del carrello, la posizione di

quest'ultimo, e quindi la relativa misura, non è influenzata dalla dinamica oscillatoria. In questo modo il PID non effettua alcuna azione di controllo delle oscillazioni e pertanto la sintesi del PID e dell'input shaping può essere sviluppata separatamente ed indipendentemente l'una dall'altra.

Ciò nonostante, è inevitabile che il PID introduca, in modo più o meno marcato, distorsioni del segnale di riferimento, riducendo l'efficacia della modifica del comando di posizione rispetto al caso di shaping su un segnale di forza.

## 2. Carroponte a due gradi di libertà

In questa sezione si discuterà ed analizzerà la risposta di un sistema costituito da un carroponte cui è collegato una massa sospesa tramite una fune. Per una prima analisi semplificativa si considera la possibilità di moto del carroponte esclusivamente lungo un asse, da cui ne deriva che il sistema avrà due soli gradi di libertà (gdl): uno dato dalla movimentazione del carrello lungo il suo asse e uno dato dalla possibilità di moto circolare, con centro il fulcro nel piano x-y, della massa sospesa.

L'analisi comprenderà vari passaggi: inizialmente si determina il modello matematico del sistema e se ne riporterà la risposta ad una forza ad impulso. Successivamente si introdurranno a monte del sistema le tecniche di controllo viste fino ad ora, ovvero l'input shaping e la tecnica di controllo in retroazione PID, prima separatamente e poi in modo congiunto in modo da poter fare una comparazione dettagliata dei vantaggi e svantaggi di ciascun controllo.

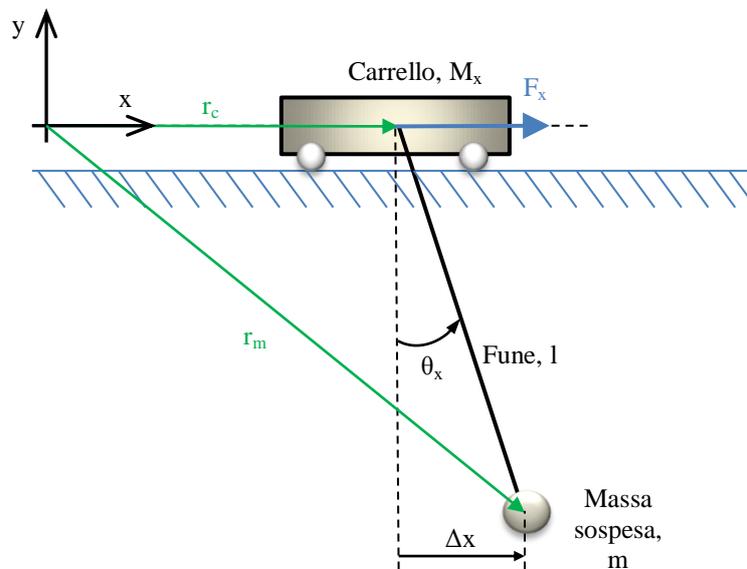


Fig. 2. Schema del carroponte a due gradi di libertà

## 2.1. Modello dinamico

È necessario come prima cosa poter descrivere matematicamente il comportamento del sistema carro-ponte analizzato all'inizio del paragrafo 2 e riportato in Fig. 2..

Al fine di semplificare la trattazione analitica si assume che:

- non vi sia attrito durante lo spostamento del carrello.
- il carrello e la massa sospesa vengono considerate masse puntiformi.
- la lunghezza della corda è considerata fissa (funo inestensibile)
- il moto è vincolato esclusivamente al piano x-y.

In funzione dello schema di Fig. 2. le posizioni del carrello e del carico sono descritte dai seguenti vettori:

$$r_c = \{x, 0\} \quad (2.1)$$

$$r_m = \{x + l \sin \theta_x, -l \cos \theta_x\} \quad (2.2)$$

L'energia cinetica e quella potenziale del sistema sono date dalla somma delle rispettive energie dei due singoli elementi, ovvero carrello e massa sospesa:

$$K = \frac{1}{2} M_x \dot{r}_c^2 + \frac{1}{2} m \dot{r}_m^2 = \frac{1}{2} M_x \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + l^2 \dot{\theta}_x^2 + 2\dot{x}l\dot{\theta}_x \cos \theta_x) \quad (2.3)$$

$$U = -mgl \cos \theta_x \quad (2.4)$$

in cui sono già stata utilizzata l'ipotesi di inestensibilità della funo. Nel termine  $M_x$  è compresa sia la massa del carrello stesso sia tutte le inerzie riportate al carrello tramite i rapporti di trasmissione di tutti gli organi in movimento.

Le coordinate libere del sistema, come detto, sono la posizione  $x$  del carrello e l'angolo di rotazione  $\theta_x$  della funo rispetto alla verticale. Per determinare ora le equazioni del moto in funzione di queste due variabili è necessario applicare il teorema di Lagrange che afferma:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial L}{\partial q_h} = Q_h \quad \forall h \in [1, gdl] \quad (2.5)$$

Nella definizione del teorema (2.5),  $q_h$  è la coordinata libera h-esima del sistema, nel nostro caso sono due e sono  $x$  e  $\theta_x$ , mentre  $L$  e  $Q_h$  sono date dalle seguenti espressioni:

$$L = K - U \quad (2.6)$$

$$Q_h = \sum_i F_i \frac{\partial \bar{P}_i}{\partial q_h} \quad (2.7)$$

Il termine  $Q_h$  rappresenta dunque la forza generalizzata data dalla somma di tutte le forze applicate alla coordinata libera  $q_h$  tenendo conto dei rapporti di velocità. Applicando tale teoria al nostro caso, potremo dunque scrivere due equazioni:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = F_x \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_x} - \frac{\partial L}{\partial \theta_x} = 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

Sviluppando la (2.8) e considerando l'attrito sul perno mediante un il coefficiente di smorzamento  $c$ , si ottengono le seguenti due equazioni rispettivamente per il carrello e per la massa sospesa:

$$\begin{cases} (M_x + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta}_x \cos \theta_x - ml\dot{\theta}_x^2 \sin \theta_x = F_x \\ ml^2\ddot{\theta}_x + cl^2\dot{\theta}_x \cos^2 \theta_x + mgl \sin \theta_x = -ml\ddot{x} \cos \theta_x \end{cases} \quad (2.9)$$

Il modello ottenuto che descrive il sistema è di tipo non lineare. Per semplificare la trattazione successiva, si rende necessario linearizzare le due equazioni ottemperando all'ipotesi di piccoli spostamenti. In tale situazione è infatti possibile fare le seguenti assunzioni:  $\sin \theta \approx \theta$ ,  $\cos \theta \approx 1$ . In seguito a questa considerazione e dividendo per  $ml$  la seconda della (2.9) si ottengono le due equazioni che descrivono il sistema:

$$\begin{cases} (M_x + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta}_x = F_x \\ l\ddot{\theta}_x + \frac{cl}{m}\dot{\theta}_x + g\theta_x = -\ddot{x} \end{cases} \quad (2.10)$$

Scritte in forma matriciale assumono la forma seguente:

$$\begin{bmatrix} M_x + m & ml \\ 1 & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta}_x \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{cl}{m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta}_x \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & g \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \theta_x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_x \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.11)$$

Dalla seconda equazione (2.10) (dividendo ulteriormente per l) si ricavano inoltre la frequenza naturale di oscillazione ed il fattore di smorzamento viscoso:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (2.12)$$

$$\zeta = \frac{c}{2m} \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (2.13)$$

### 2.1.1. Matrici state-space

L'implementazione al simulatore delle equazioni (2.10) risulta più agevole mediante la scrittura delle stesse attraverso due tecniche: la prima è quella della funzione di trasferimento mentre la seconda è quella delle matrici state-space (o spazio degli stati). Analizzeremo solamente la seconda possibilità.

La descrizione del modello mediante spazio degli stati consiste nel descrivere l'evoluzione del sistema mediante degli stati, ovvero informazioni che riassumono, in ogni istante, l'effetto della storia passata del sistema sul suo comportamento futuro. Per sistemi lineari e stazionari il modello state-space assume la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A x(t) + B u(t) \\ y(t) &= C x(t) + D u(t) \end{aligned} \quad (2.14)$$

in cui:

- $x(t)$  rappresenta lo stato del sistema ed è un vettore  $n \times 1$  costituito dalle  $n$  coordinate libere del sistema;
- $u(t)$  rappresenta l'ingresso del sistema ed è un vettore di dimensioni  $r \times 1$ ;
- $y(t)$  rappresenta invece l'uscita ed è un vettore di dimensioni  $m \times 1$ .

Le matrici A, B, C e D sono così definite:

- A ( $n \times n$ ): matrice dinamica;
- B ( $n \times r$ ): matrice di distribuzione degli ingressi;
- C ( $m \times n$ ): matrice di distribuzione delle uscite;
- D ( $m \times r$ ): legame algebrico ingresso-uscita;

Nel nostro caso, essendo il modello da implementare di secondo grado, è necessario introdurre nel vettore che ne descrive lo stato anche la velocità delle due coordinate libere riconducendosi, dunque, ai seguenti quattro parametri:

$$x(t) = \begin{Bmatrix} x \\ \theta_x \\ \dot{x} \\ \dot{\theta}_x \end{Bmatrix} \quad \dot{x}(t) = \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta}_x \\ \ddot{x} \\ \ddot{\theta}_x \end{Bmatrix} \quad (2.15)$$

L'ingresso del sistema in questo caso è unico ed è composto dalla forza  $F_x$  applicata al carrello:

$$u(t) = \{F_x\} \quad (2.16)$$

L'uscita che si vuole ottenere è data semplicemente dalle posizioni assunte dal carrello e del carico, quindi:

$$y(t) = \begin{Bmatrix} x \\ \theta_x \end{Bmatrix} \quad (2.17)$$

Tramite opportune sostituzioni è possibile determinare le quattro matrici necessarie alla definizione del modello tramite state-space. Il modello risultante è il seguente:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta}_x \\ \ddot{x} \\ \ddot{\theta}_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{mg}{M} & 0 & \frac{cl}{M} \\ 0 & -g \frac{M_x + m}{M_x l} & 0 & -c \frac{M_x + m}{M_x m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \theta_x \\ \dot{x} \\ \dot{\theta}_x \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M_x} \\ -\frac{1}{M_x l} \end{bmatrix} \{F_x\} \quad (2.18)$$

$$\begin{Bmatrix} x \\ \theta_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \theta_x \\ \dot{x} \\ \dot{\theta}_x \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \{F_x\}$$

## 2.2. Simulazioni

Il sistema è stato ora descritto matematicamente dal modello state-space (2.18) e può essere utilizzato per eseguire le simulazioni in Simulink.

In questo paragrafo si analizzeranno le tecniche di controllo viste fino ad ora ponendole a confronto tra loro e combinandole in modo da ottenere la migliore risposta del sistema in fatto di oscillazioni residue del carico sospeso. Si andranno poi ad osservare e commentare anche l'andamento di velocità ed accelerazione del carrello, ricavate per semplici derivazioni della sua posizione.

### 2.2.1. Risposta del sistema ad una sequenza di impulsi

Il primo passo da affrontare nell'analisi dinamica è quello di verificare la risposta del sistema sottoposto ad uno o più impulsi di forza noti, in modo da avere un riferimento con cui confrontare i dati ottenuti mediante le tecniche di controllo. Tale input può considerarsi (anche se in realtà non è così) come la manovra effettuata da un operatore atto al posizionamento per tentativi dell'oggetto trasportato (carico sospeso) mediante pressione degli azionamenti del carro ponte.

Si consideri un sistema avente le seguenti caratteristiche<sup>1</sup>:

- Massa equivalente del carrello:  $M_x = 32 \text{ kg}$
- Massa del carico sospeso:  $m = 0.7 \text{ kg}$
- Lunghezza fune:  $l = 1 \text{ m}$
- Fattore di smorzamento:  $\zeta = 0.04$

L'input di forza al sistema lo si considera composto da due impulsi di uguale intensità, pari a 20 N, ma segno opposto intervallati fra loro di un certo periodo così da ottenere una velocità nulla del carrello al termine del comando. La deviazione della massa sospesa è calcolata a partire dall'angolo di deviazione  $\theta_x$  secondo la semplice relazione (linearizzata):

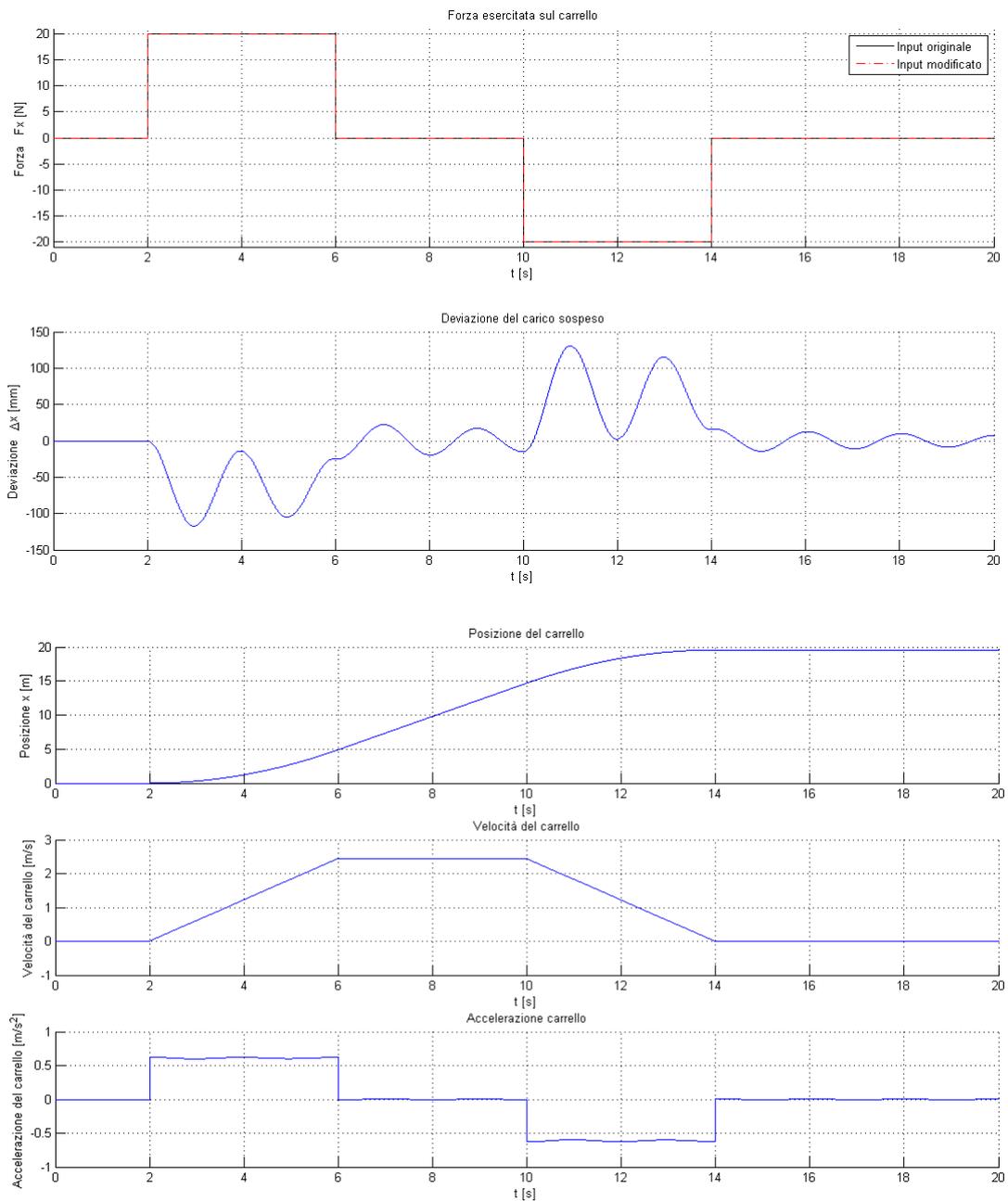
$$\Delta x = l \theta_x \quad (2.19)$$

In Fig. 2. è riportata la risposta del sistema alla sequenza di due impulsi sopracitata. Si osserva come al termine della sequenza, si ha un picco di deviazione della posizione della massa di circa 16 mm, valore che aumenta sensibilmente

---

<sup>1</sup> Salvo diversa specifica, tutte le simulazioni effettuate faranno riferimento a questi dati.

all'aumentare della forza con cui si agisce sul sistema (per una forza di 50 N, ad esempio, si ottiene una deviazione di 41 mm).

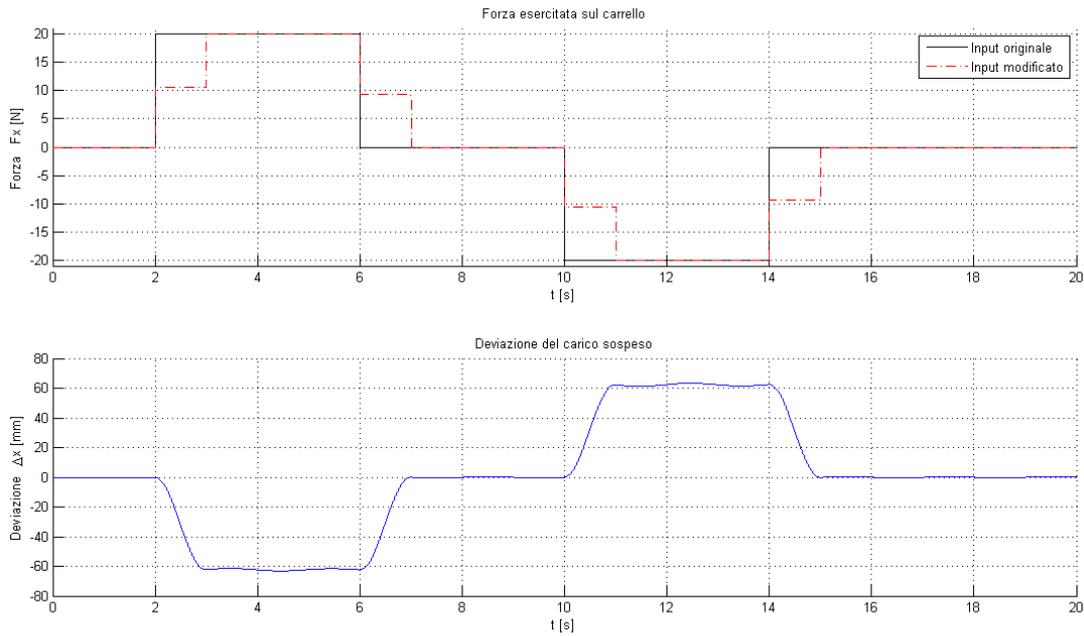


**Fig. 2. Risposta del sistema ad una sequenza di due impulsi noti**

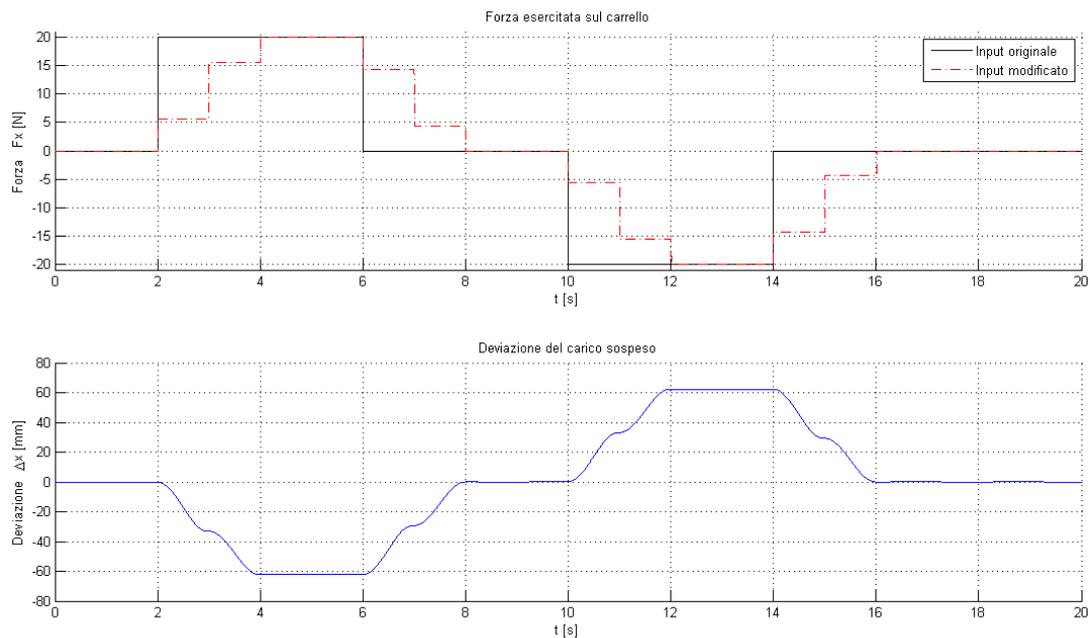
## ZV e ZVD shaper

Come discusso nel paragrafo 1.1.1, si può modificare l'input di forza mediante una convoluzione con due o più impulsi per ottenere in risposta una vibrazione residua

della massa sospesa praticamente nulla. In Fig. 2. è riportata dunque la risposta del sistema (alla stessa sequenza di impulsi visti in Fig. 2.) inserendo un filtro di shaping del tipo ZV. Un secondo esempio è riportato in Fig. 2. in cui è stato utilizzato lo shaper ZVD.



**Fig. 2. Risposta del sistema ad un input di forza noto con filtro ZV shaper**



**Fig. 2. Risposta del sistema ad un input di forza noto con filtro ZVD shaper**

Come si nota dal grafico, la deviazione risultante del carico a regime è nulla (il picco registrato è di soli 0.2 mm). Mentre si ha il picco di forza si osserva poi che la deviazione  $\Delta x$  rimane praticamente costante attorno ad un valore assoluto di 62 mm. Tale valore è infatti imputabile all'azione della forza d'inerzia  $F_i$  sulla massa sospesa ed è anche calcolabile mediante la relazione seguente (sulla base della (2.19)):

$$\Delta x = l \tan^{-1} \frac{F_i}{mg} = l \tan^{-1} \frac{a}{g} \quad (2.20)$$

in cui  $a$  è l'accelerazione subita dal carrello. Avendo registrato per quest'ultimo dato il valore di  $0.611 \text{ m/s}^2$  (visibile anche in Fig. 2.) si ottiene effettivamente una deviazione di circa 62 mm.

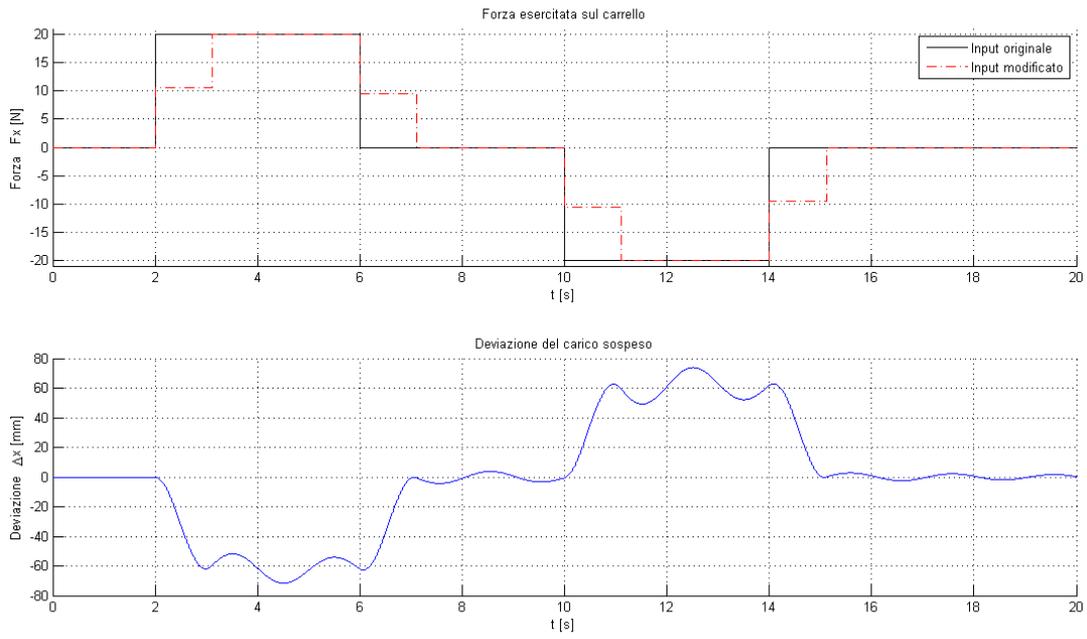
Si osserva comunque che le componenti oscillatorie della deviazione sono annullate.

### Modifica dell'input in presenza di errori sulla valutazione di $\omega_n$

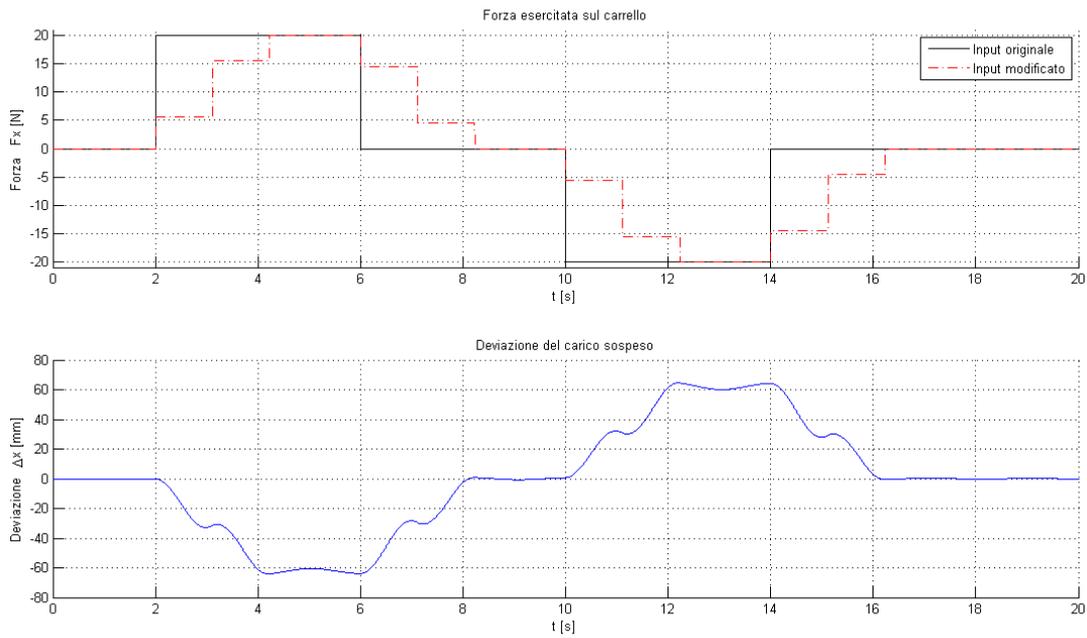
La modifica del comando mediante tecnica di input shaping per ottenere una vibrazione nulla può essere fatta mediante uno qualsiasi degli shaper visti nei paragrafi 1.1.1 e 1.2. Tutti infatti, modellati sulla frequenza naturale di vibrazione calcolabile mediante la (2.12), implicano una deviazione del carico al termine del comando praticamente nullo (dell'ordine del decimo di millimetro) o del valore pari alla vibrazione imposta  $V_{\text{tot}}$  se lo shaper in questione è l'extra insensitive o il three-hump extra insensitive (gli unici due ad avere nella curva di sensibilità la "gobba" in corrispondenza della frequenza naturale di oscillazione).

Di maggiore interesse risulta tuttavia essere la comparazione degli shaper quando i parametri con i quali vengono modellati, ovvero la frequenza di vibrazione e lo smorzamento, sono affetti da errori. È in tali condizioni infatti che si può valutare l'efficienza di uno shaper in funzione della vibrazione residua e del tempo di shaping. In questo paragrafo sono dunque esposti i risultati ottenuti a partire da un errore dell' 5 % sulla frequenza naturale di vibrazione. L'errore sullo smorzamento è da considerarsi anch'esso, ma influisce molto meno sulla vibrazione residua rispetto ad un errore di pari intensità sulla frequenza naturale di vibrazione [1]. Si impone dunque un errore del 10 %.

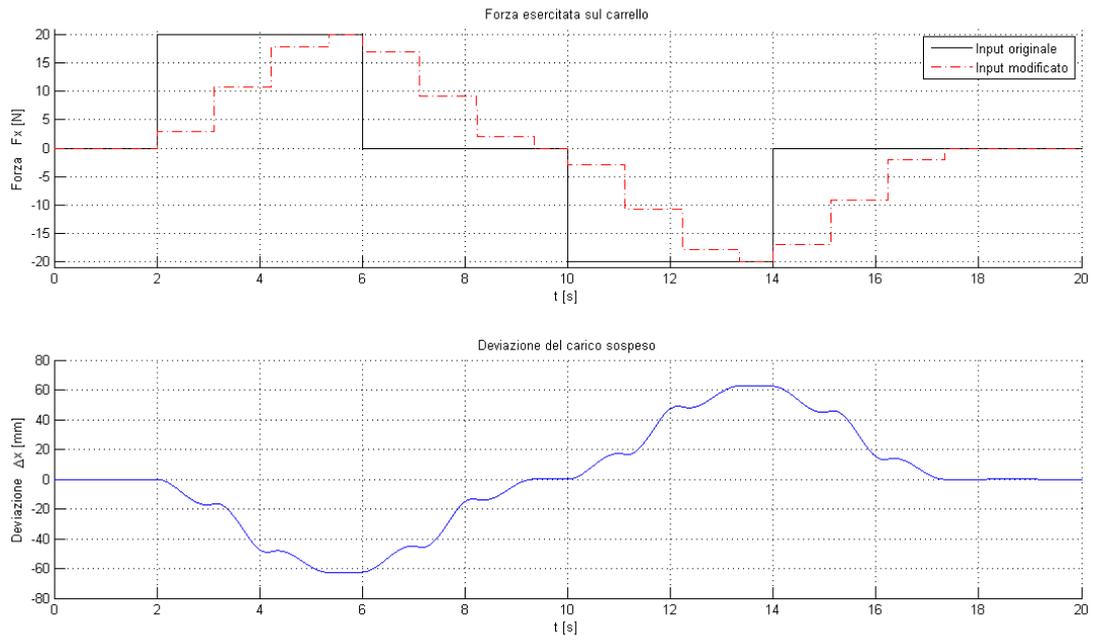
Di seguito sono riportati i risultati ottenuti.



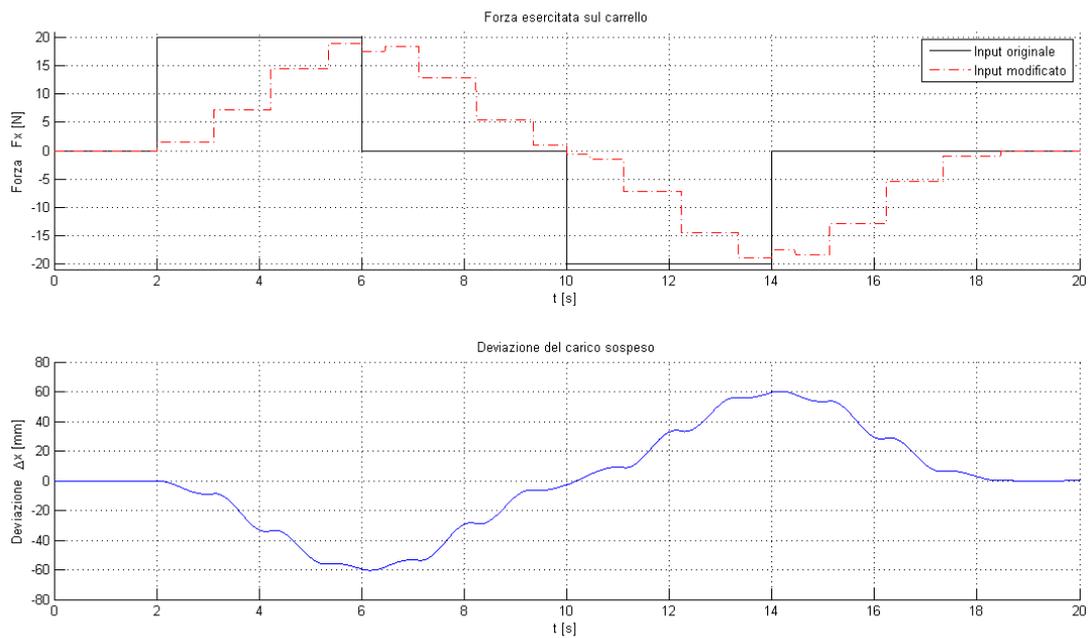
**Fig. 2. Risposta del sistema con interposizione del filtro ZV modellato con errori**



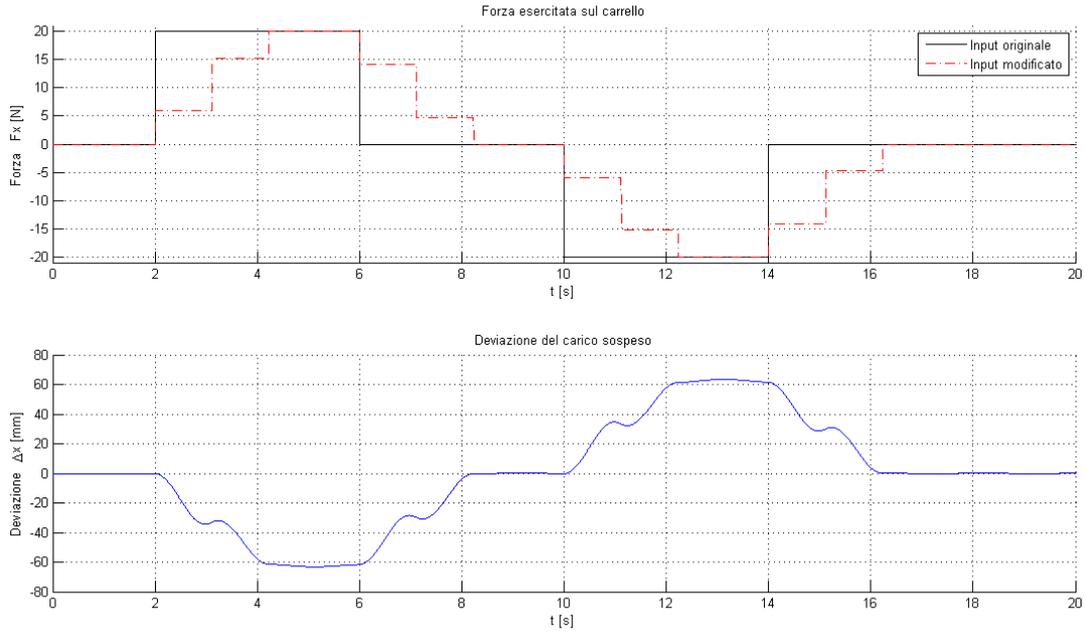
**Fig. 2. Risposta del sistema con interposizione del filtro ZVD modellato con errori**



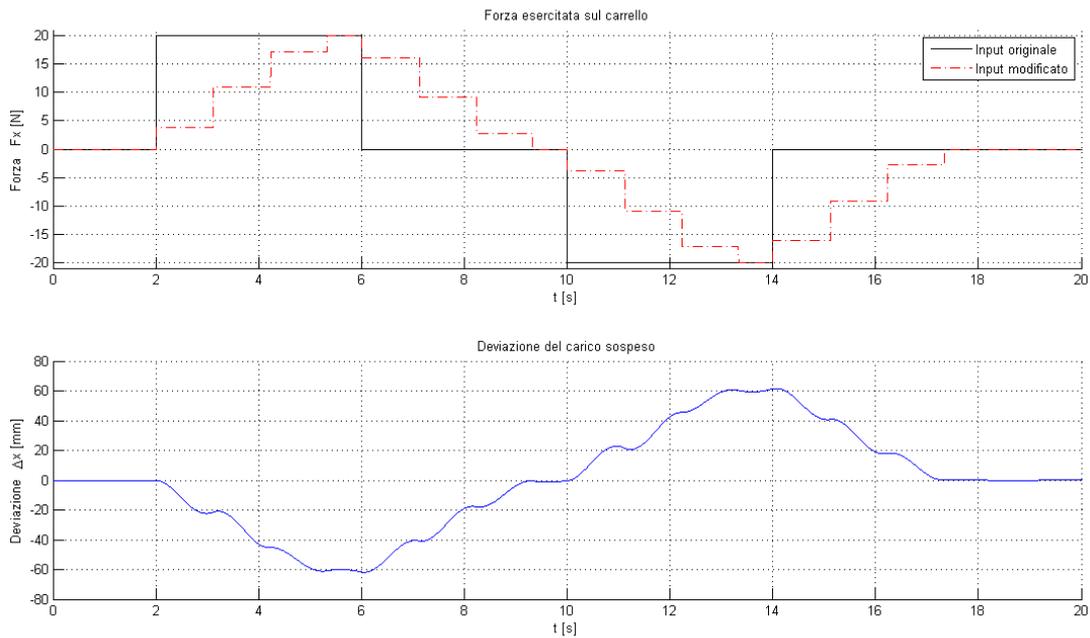
**Fig. 2. Risposta del sistema con interposizione del filtro ZVDD modellato con errori**



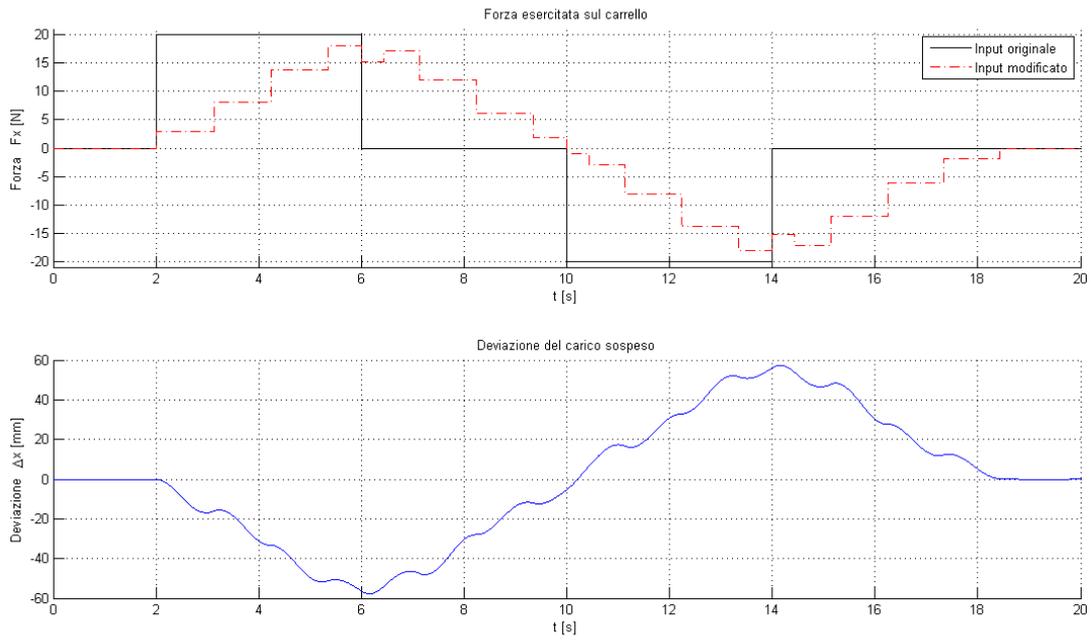
**Fig. 2. Risposta del sistema con interposizione del filtro ZVDD modellato con errori**



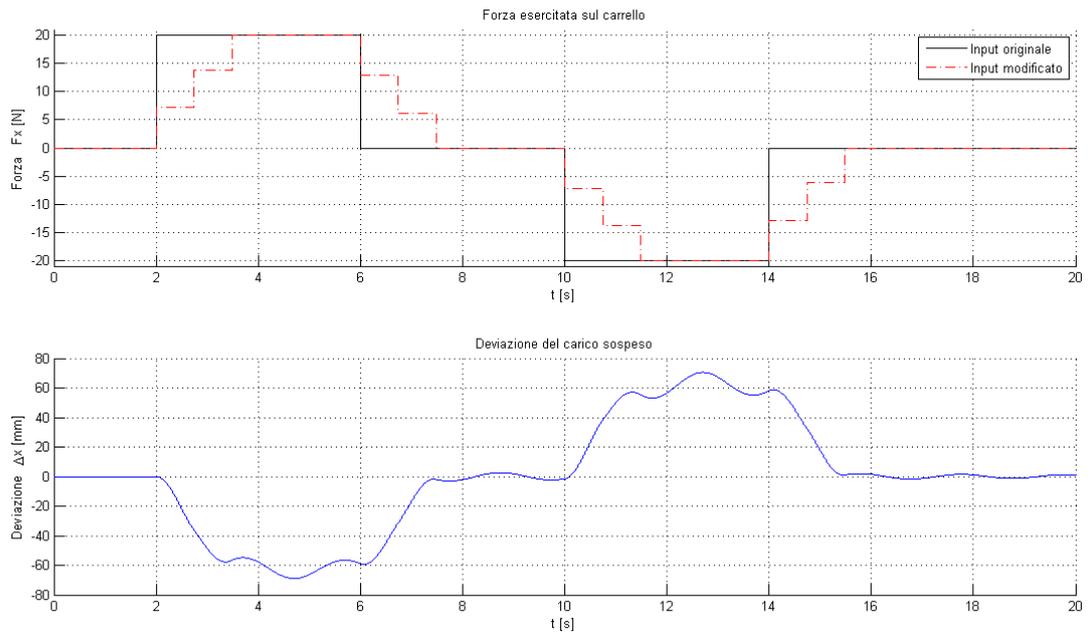
**Fig. 2. Risposta del sistema con interposizione del filtro EI ( $V_{tol} = 5\%$ ) modellato con errori**



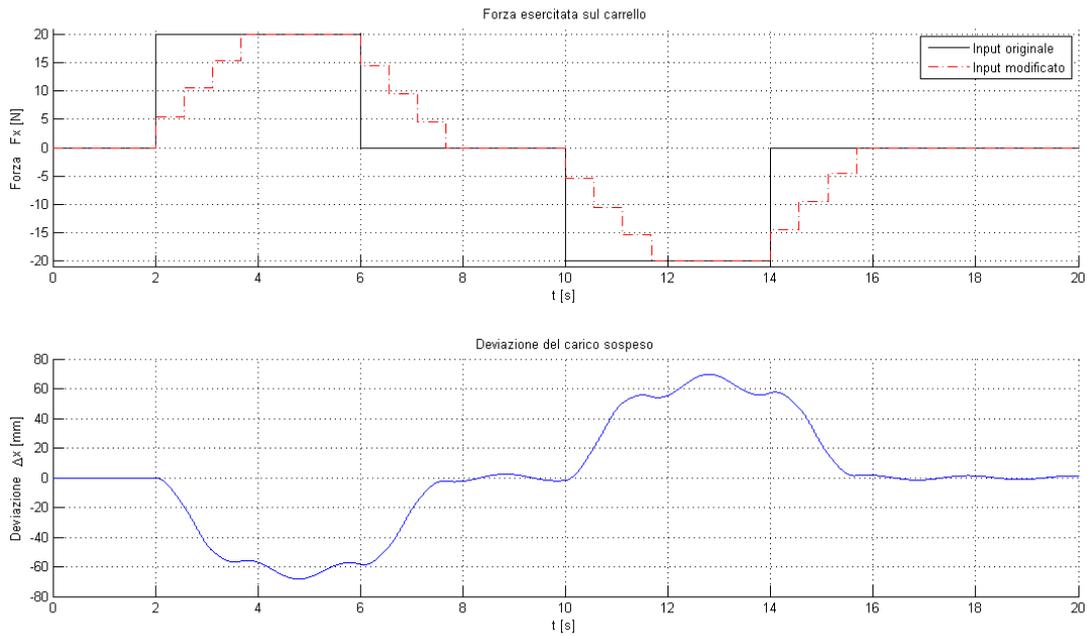
**Fig. 2. Risposta del sistema con interposizione del filtro two-hump EI ( $V_{tol} = 5\%$ ) modellato con errori**



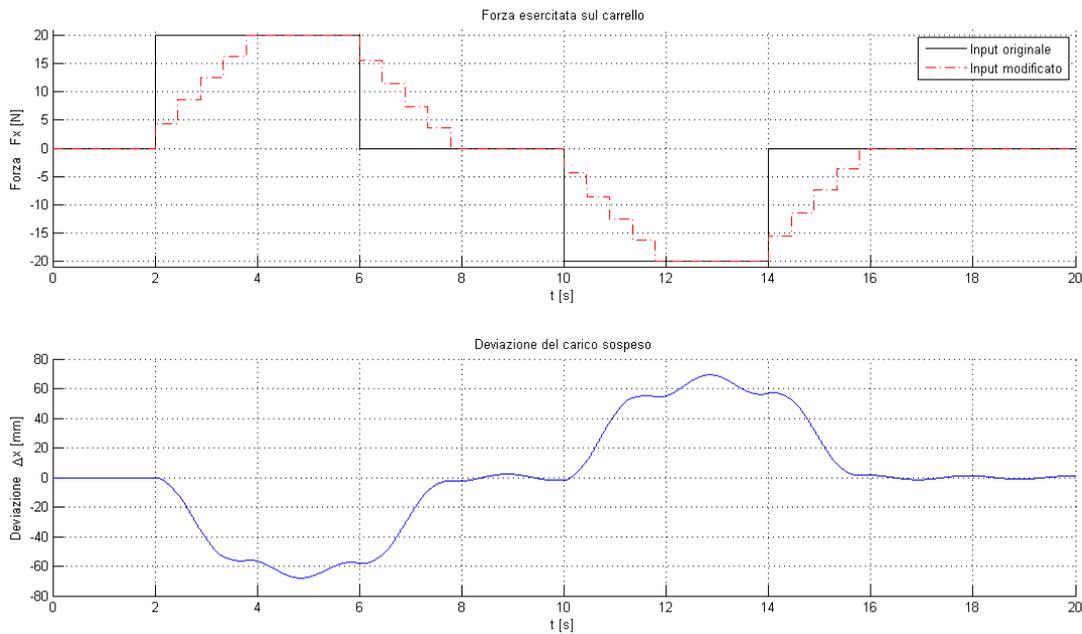
**Fig. 2. Risposta del sistema con interposizione del filtro three-hump EI ( $V_{tol} = 5\%$ ) modellato con errori**



**Fig. 2. Risposta del sistema con interposizione del filtro MISZV con 3 impulsi modellato con errori**



**Fig. 2. Risposta del sistema con interposizione del filtro MISZV con 4 impulsi modellato con errori**



**Fig. 2. Risposta del sistema con interposizione del filtro MISZV con 5 impulsi modellato con errori**

Come si osserva, tutti gli shaper ottengono una buona risposta, in quanto la deviazione residua del carico alla fine del comando è praticamente nulla. Tali risultati attestano dunque quanto osservabile delle curve di sensibilità. Fattore tutt'altro che irrilevante nella considerazione dell'efficacia dello shaper è il tempo

che impiega quest'ultimo nel modificare l'input. È possibile, nel caso in cui nel segnale di riferimento si susseguano più impulsi ravvicinati tra loro, che non si riesca a raggiungere il valore di picco previsto dall'impulso. Tale fatto è molto ben visibile negli shaper molto robusti quali il ZVDDD ed il three-hump EI, illustrati rispettivamente in Fig. 2. e in Fig. 2.. Da ciò ne consegue che più è alto il tempo di modifica del comando minori saranno le velocità di movimentazione della macchina azionata. Tuttavia dalle simulazioni emerge che la posizione finale occupata dal carrello è la medesima in tutte le simulazioni e ciò deriva dal fatto che l'integrale doppio della forza in funzione del tempo si conserva a valle del filtro di shaping.

### 2.2.2. Integrazione del controllore PID

Introducendo nella catena di controllo del sistema un controllore PID, il segnale di riferimento che noi andremo ad inserire non sarà più relativo alla forza, bensì alla posizione che dovrà inseguire il carrello, essendo questa la variabile in retroazione. Ne consegue che, applicando uno schema di integrazione di tipo OLIS (Fig. 1.), il filtro di shaping si troverà a dover agire sulla legge di moto in ingresso al PID e dunque il riferimento modificato dallo shaper diventerà il nuovo riferimento anti-oscillazione per il controllore PID.

Quest'ultimo passaggio è molto delicato in quanto un controllore PID, in genere, riesce di per sé a controllare le vibrazioni: questo però, come descritto nel paragrafo 1.4.2, solo nel caso in cui le masse costitutive del sistema siano comparabili tra loro. Nelle simulazioni che andremo ad affrontare però la massa del carico oscillante è molto inferiore a quella equivalente del carrello, il che comporta che le oscillazioni del carico influiscano minimamente sullo spostamento del carrello e che dunque non vengano avvertite dal PID. I guadagni impostati per quest'ultimo sono i seguenti:

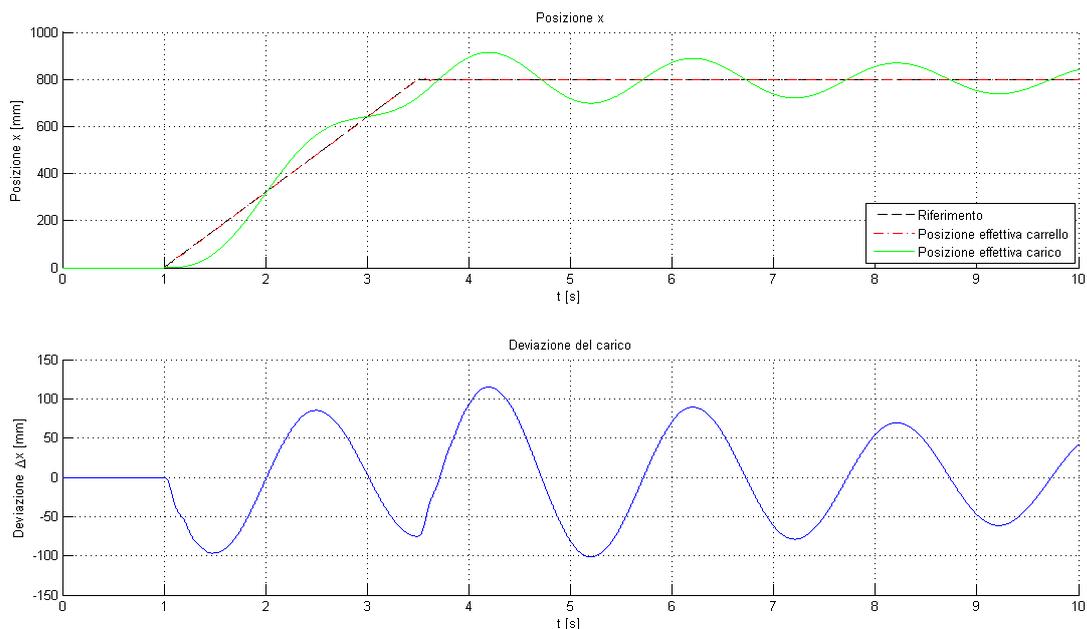
- $K_P = 50000$ ;
- $K_I = 0$ ;
- $K_D = 400$ .

Sebbene tali parametri non siano realistici, si è scelto di utilizzarli per fare in modo che la posizione del carrello sia in ogni istante quasi perfettamente coincidente con quella del riferimento modificato. In tal modo si evitano di visualizzare vibrazioni residue dovute al mancato rispetto della legge di moto imposta e non all'erroneo funzionamento dell'input shaping. Si è scelto inoltre di eliminare la componente integrativa del controllore al fine di minimizzare le risposte del sistema ai transitori,

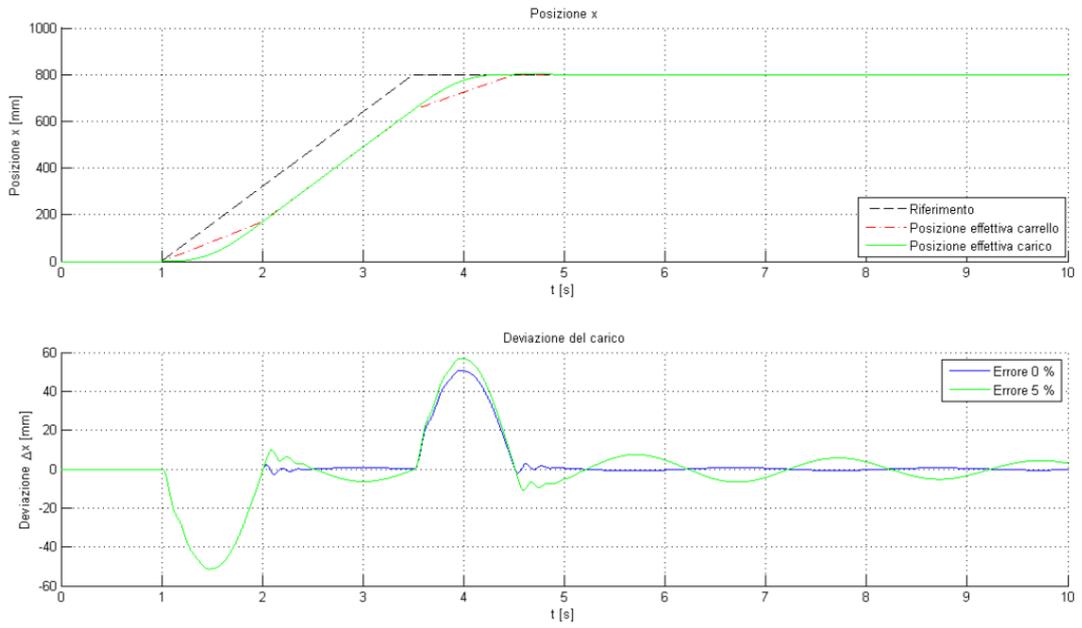
scenario sul quale si basa, appunto, l'input shaping. Il controllore così implementato sarà dunque del tipo proporzionale-derivativo (PD).

Chiaramente i risultati proposti in seguito sono influenzati dalla scelta dei guadagni: i valori utilizzati permettono di preservare adeguatamente l'efficacia dello shaper. Per contro, guadagni molto più bassi, tali da determinare una risposta del PID poco pronta, diminuiscono notevolmente l'efficacia dell'input shaping.

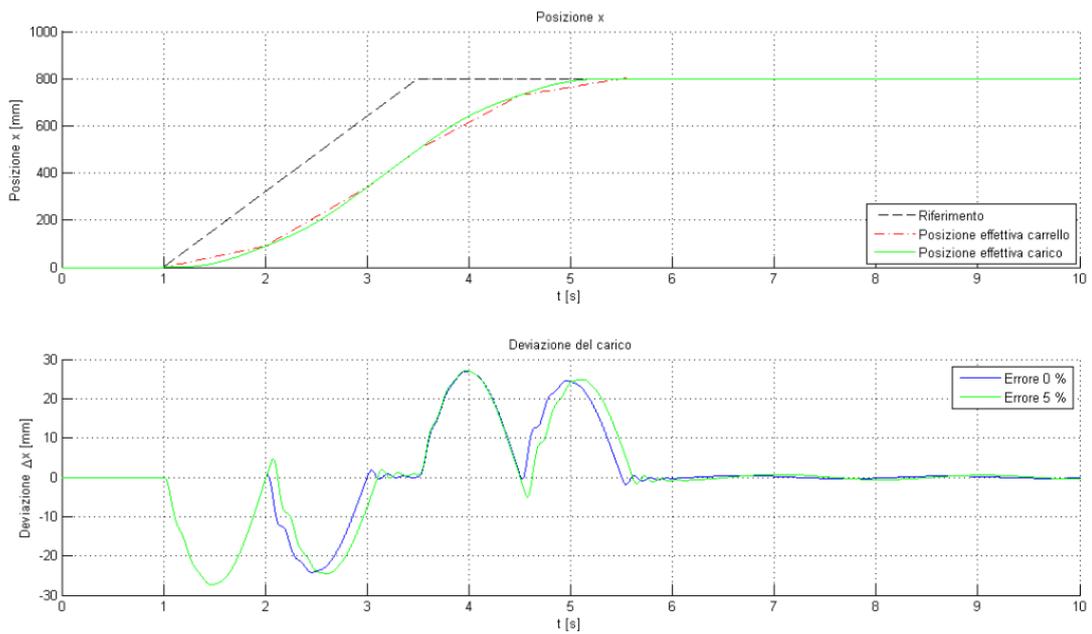
Di seguito si riportano i risultati delle simulazioni avendo imposto come riferimento sulla posizione del carrello una legge di moto lineare che permetta una movimentazione dello stesso di 0.8 m in un tempo di 2.5 s. La variazione a gradino della velocità è tale da eccitare le oscillazioni del carico significativamente. La modellazione dello shaper è stata fatta sulla frequenza naturale di oscillazione ed introducendo un errore del 5 % su quest'ultima. La posizione effettiva del carrello ed il riferimento che deve seguire vengono riportati sul grafico mediante la stessa curva in quanto le due, nella scala dei tempi visualizzata, sono praticamente sovrapposte. L'andamento della posizione del carico in funzione del tempo per ciascuna simulazione è inoltre riferita alla prova in cui il modellamento dello shaper è stato fatto sulla frequenza di oscillazione corretta.



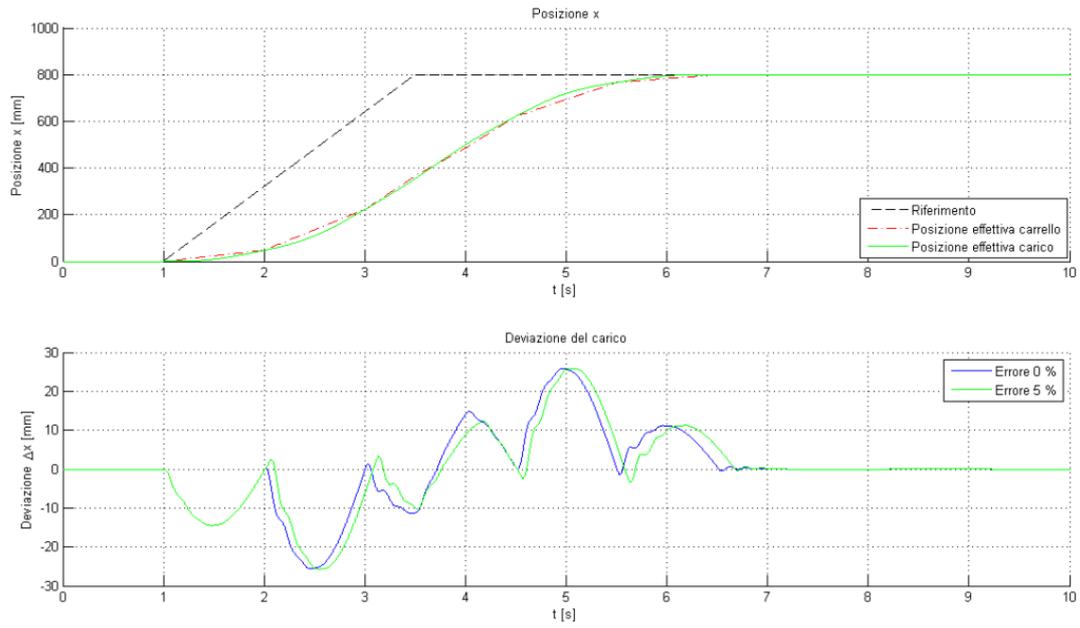
**Fig. 2. Risposta del sistema ad un profilo di moto lineare in posizione**



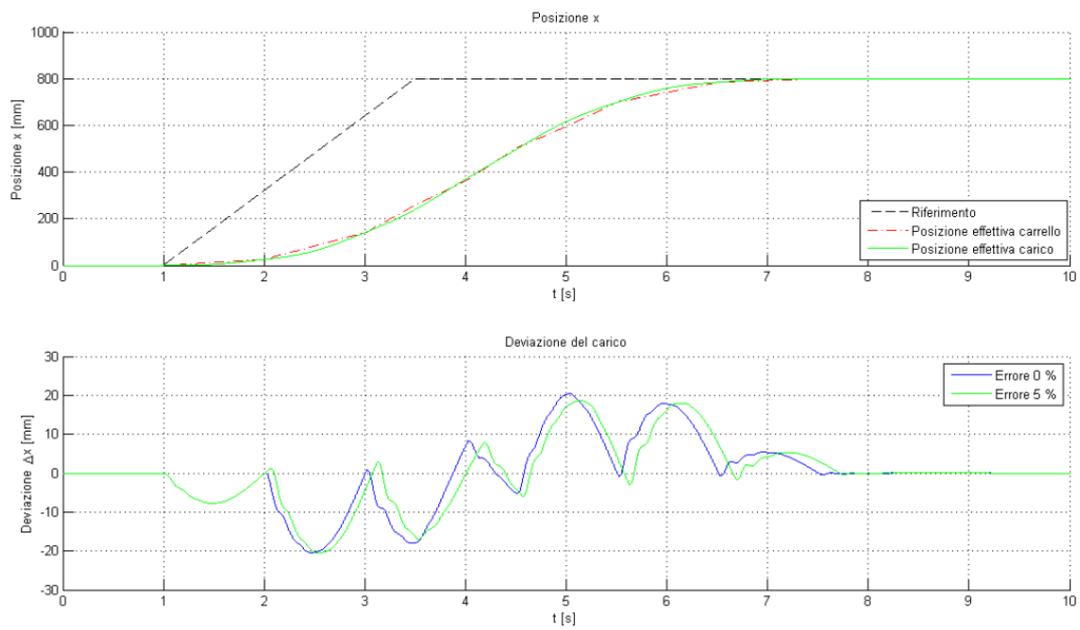
**Fig. 2. Risposta del sistema ad un profilo di moto lineare con filtro ZV**



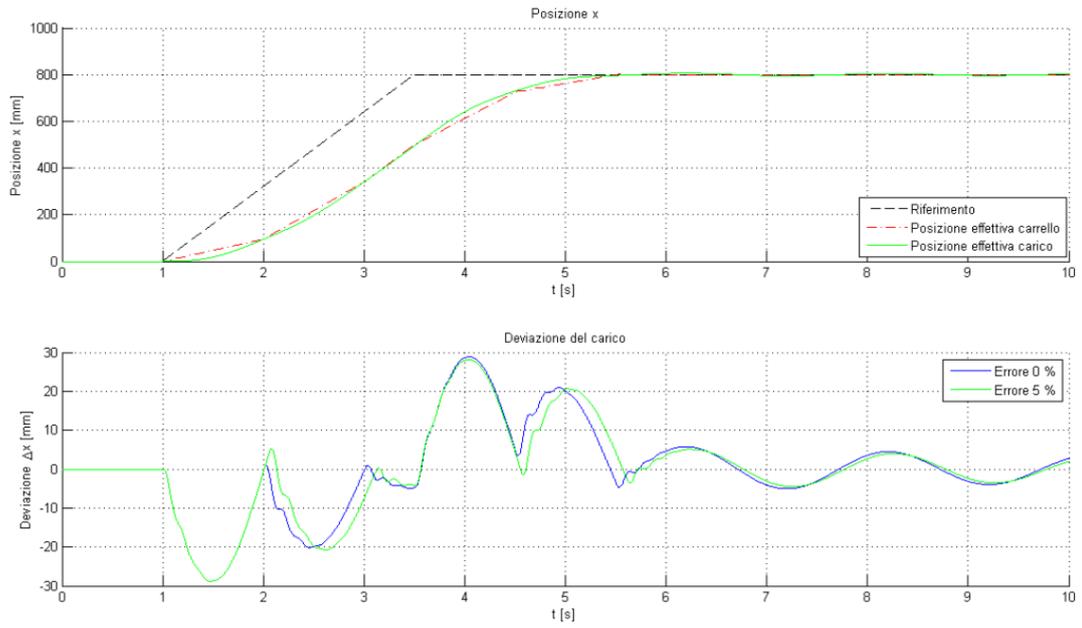
**Fig. 2. Risposta del sistema ad un profilo di moto lineare con filtro ZVD**



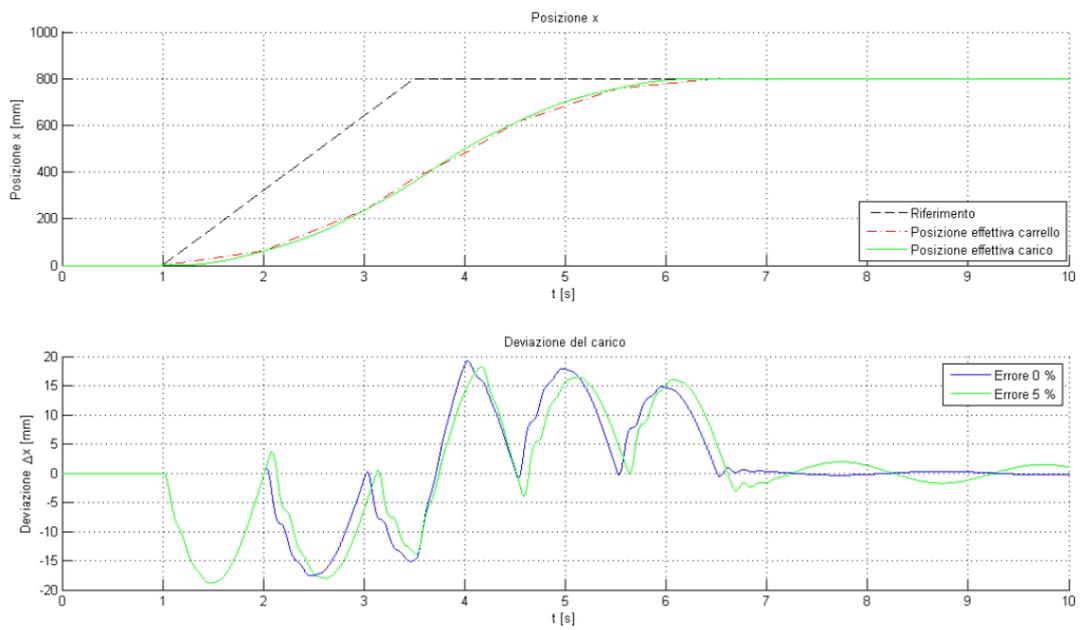
**Fig. 2. Risposta del sistema ad un profilo di moto lineare con filtro ZVDD**



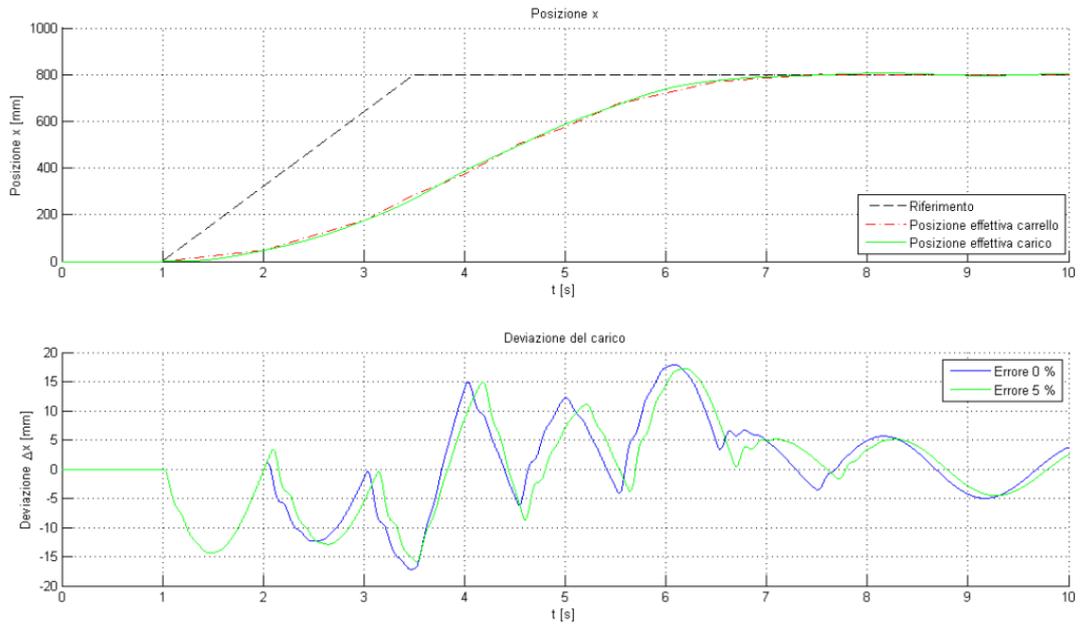
**Fig. 2. Risposta del sistema ad un profilo di moto lineare con filtro ZVDD**



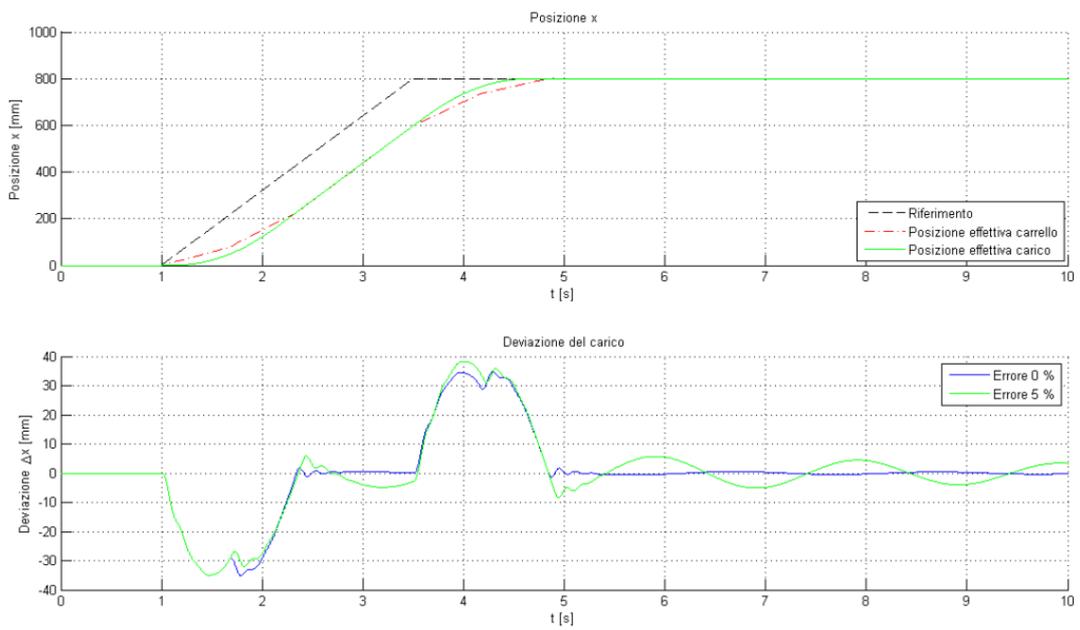
**Fig. 2. Risposta del sistema ad un profilo di moto lineare con filtro EI**



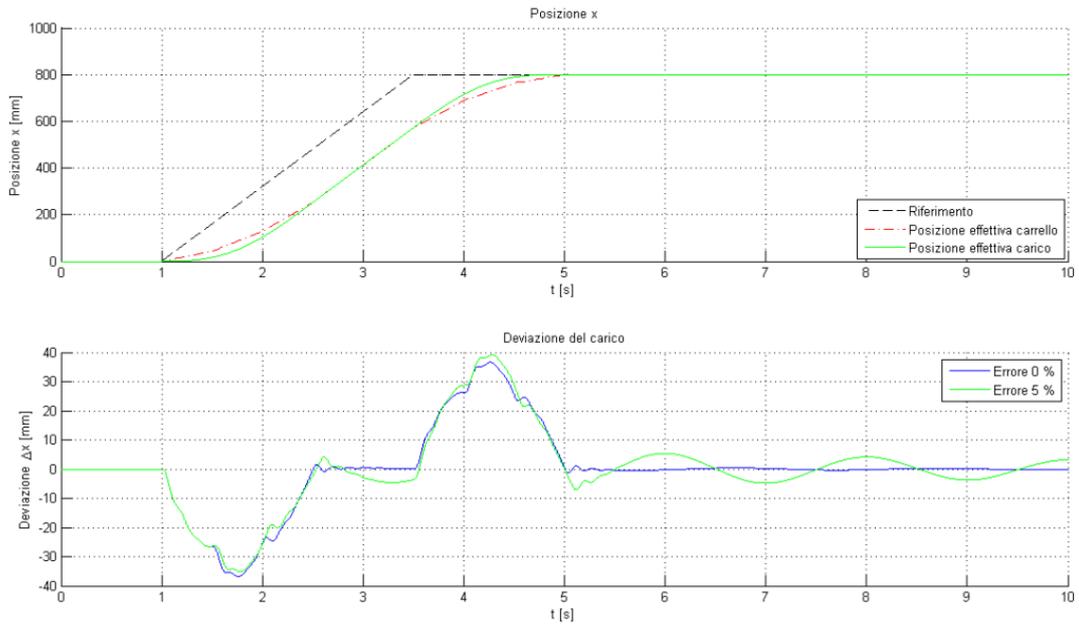
**Fig. 2. Risposta del sistema ad un profilo di moto lineare con filtro two-hump EI**



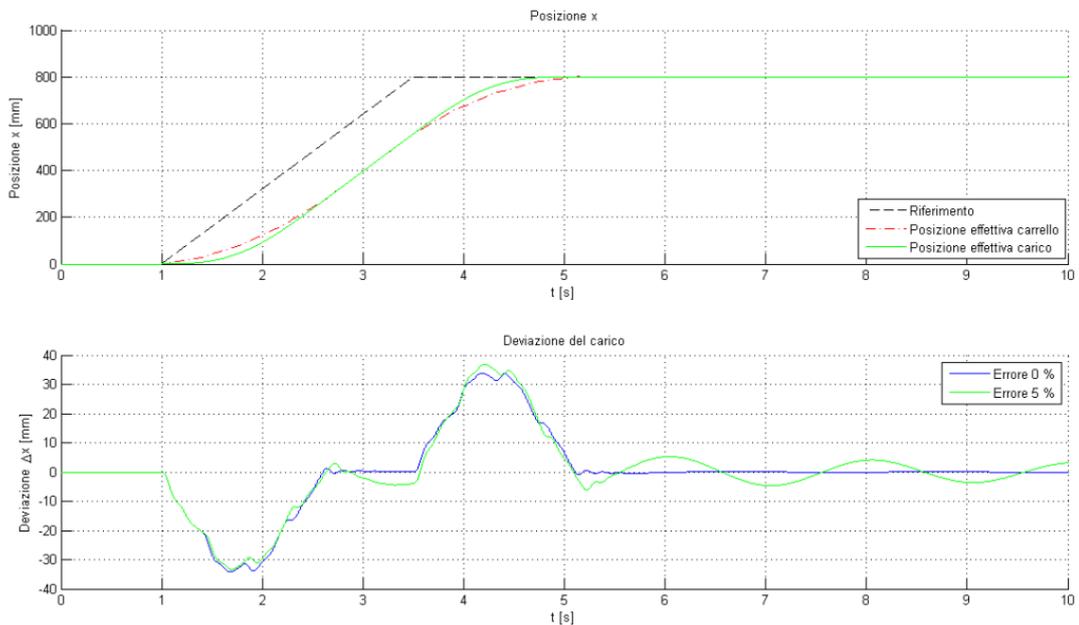
**Fig. 2. Risposta del sistema ad un profilo di moto lineare con filtro three-hump EI**



**Fig. 2. Risposta del sistema ad un profilo di moto lineare con filtro MISZV con 3 impulsi**



**Fig. 2. Risposta del sistema ad un profilo di moto lineare con filtro MISZV con 4 impulsi**



**Fig. 2. Risposta del sistema ad un profilo di moto lineare con filtro MISZV con 5 impulsi**

L'efficacia dei vari shaper è facilmente visibile nei risultati appena illustrati: un segnale di riferimento senza alcuna modifica (Fig. 2.) genera una risposta assai disturbata del sistema, con ampie oscillazioni al termine del moto che portano ad un picco di deviazione del carico superiore ai 100 mm.

Introducendo uno shaper ZV nel controllo del moto (Fig. 2.), si ottengono già risultati molto positivi, abbassando la deviazione massima di ben due ordini di grandezza, portandola al valore di picco di 1 mm. Se però si introduce un errore sulla frequenza di vibrazione per modellare lo ZV shaper, quest'ultimo dato aumenta sensibilmente, indice del fatto che questa tecnica non è robusta.

I metodi derivativi di input shaping (da Fig. 2. a Fig. 2.) permettono tutti di ovviare a questo problema come è facilmente visibile dai risultati ottenuti. Si dimostrano infatti praticamente insensibili alla variazione della frequenza di modellamento dello shaper imposta, anche se introducono ritardi nella generazione del segnale che, soprattutto per quelli di secondo e terzo ordine di derivazione, iniziano ad essere di una certa importanza.

La risposta del sistema apponendo filtri al segnale di riferimento con metodi extra insensitive (da Fig. 2. a Fig. 2.) risponde alle aspettative in quanto, per come sono stati definiti (paragrafo 1.2.2), il solo two-hump EI annulla completamente la vibrazione residua alla frequenza naturale di vibrazione. I restanti due invece, a tale frequenza di modellamento, riducono al valore di  $V_{tol}$  impostato la vibrazione residua: difatti, avendo impostato quest'ultimo dato pari al 5 %, si sono ottenute deviazioni massime dell'ordine dei 5 mm, pari appunto al 5 % della deviazione massima ottenuta per il sistema non filtrato (circa 100 mm).

Infine, i metodi MISZV (da Fig. 2. a Fig. 2.) risultano efficaci qualora sia ben nota la frequenza naturale di oscillazione: aggiungendo un errore sul suo valore infatti si aumenta sensibilmente la vibrazione residua, al pari, quasi, di un semplice filtro ZV.

### **2.2.3. Confronto input shaping – legge di moto ottimizzata**

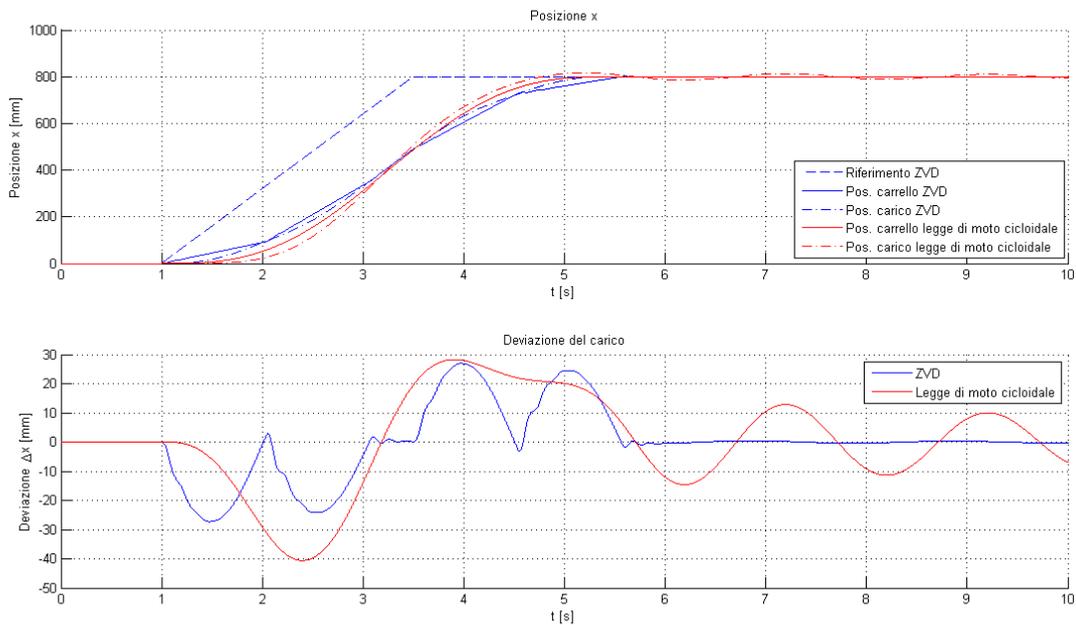
Trattazione interessante risulta essere la comparazione tra la risposta del sistema ad una legge di moto ottimizzata e quella ottenuta filtrando un segnale lineare mediante tecniche di input shaping, come visto nel paragrafo 2.2.2.

Le leggi di moto ottimizzate sono state sviluppate per non accentuare le vibrazioni e cercano dunque di evitare azionamenti che portano a discontinuità fino, in genere, ad un ordine di derivazione maggiore di due. Non sono tuttavia basate sul modello del sistema meccanico che andranno a movimentare, cioè, nel nostro caso, frequenza naturale di vibrazione e smorzamento, parametri che invece caratterizzano pesantemente l'input shaping. Tali leggi sono spesso implementate nei controllori industriali standard.

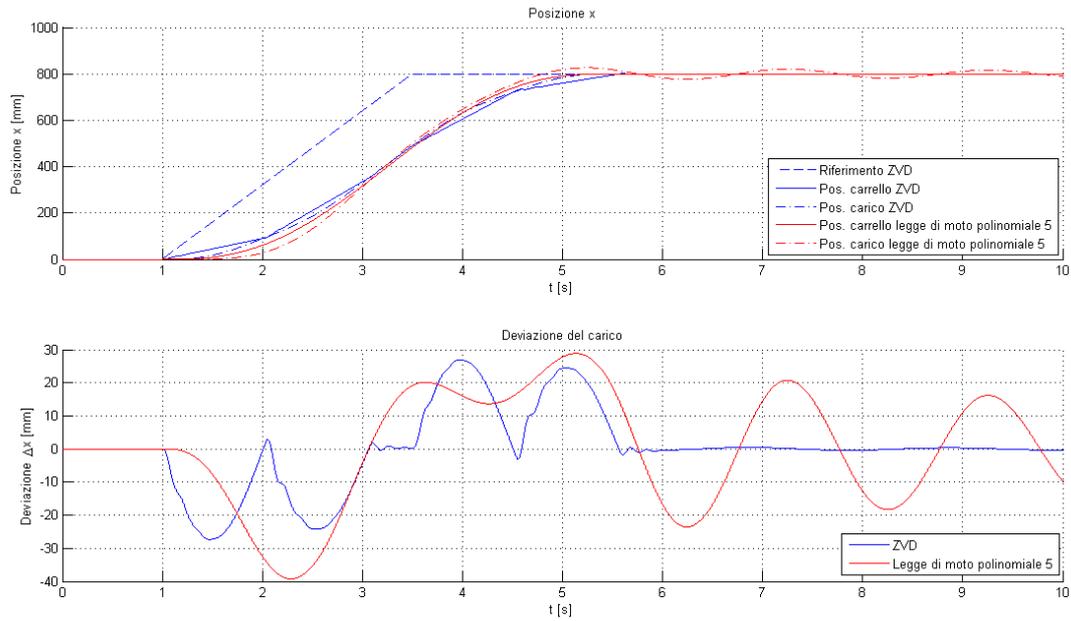
Risulta quindi utile effettuare una comparazione tra i due metodi suddetti per la movimentazione del carrello. Le principali leggi di moto implementate sono descritte in Appendice A: Leggi di moto.

Al fine di poter rendere comparabili i risultati di vibrazione residua nei due casi è necessario, essenzialmente, che il carrello si muova con la stessa velocità media. In altre parole, si impone di percorrere uno stesso spostamento in tempi uguali, tenendo però in considerazione il ritardo introdotto dallo shaper. Per questa trattazione si è scelto di utilizzare come riferimento per la tecnica di input shaping lo ZVD shaper modellato con un errore del 3 % sulla frequenza di oscillazione, essendosi dimostrato molto valido sia come robustezza, sia come tempo di modifica.

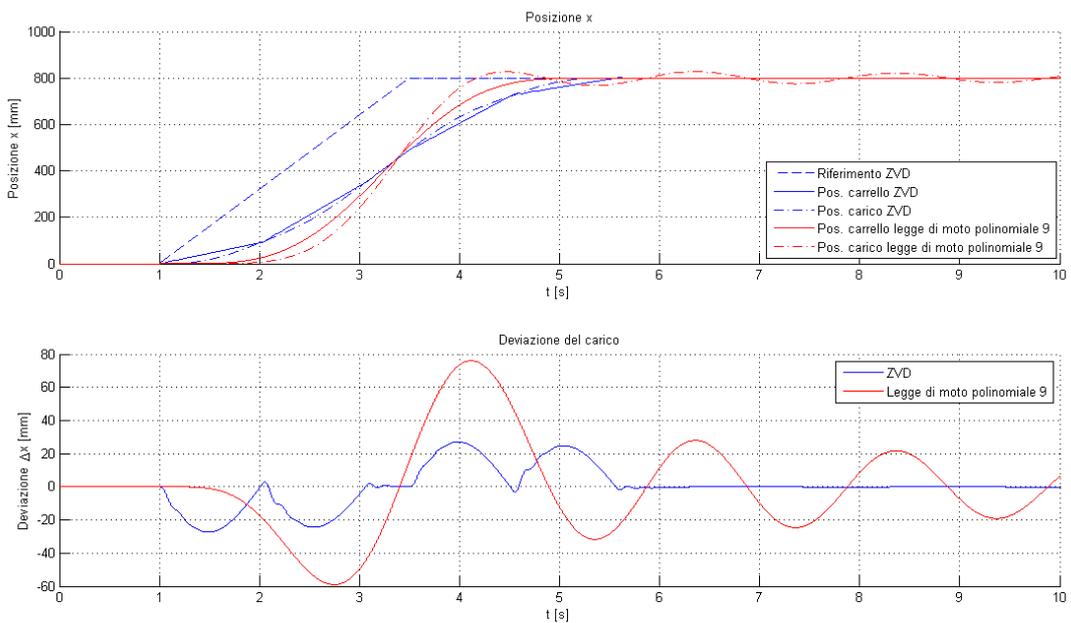
Il ritardo introdotto da questo filtro per il sistema descritto nel paragrafo 2.2.1, secondo la (1.9), risulta essere pari al periodo di oscillazione del carico, ovvero  $t_d = 2$  s. Di conseguenza la durata del moto per la legge ottimizzata dovrà essere più lunga rispetto a quella lineare del riferimento per la tecnica dell'input shaping di un periodo pari a  $t_d$ . Di seguito si riportano alcune comparazioni.



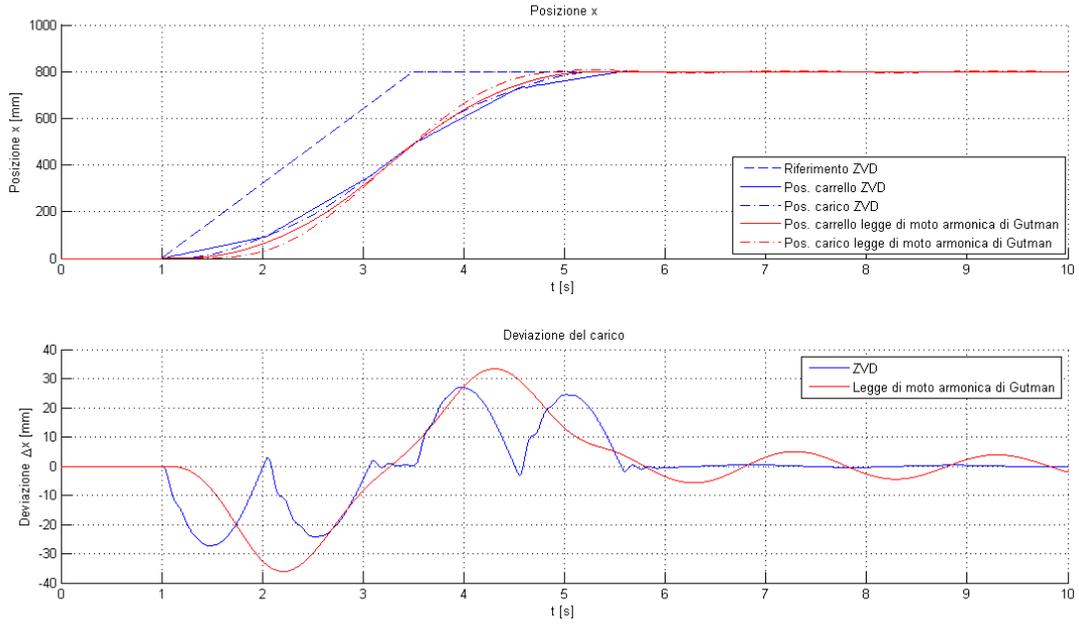
**Fig. 2. Comparazione delle risposta del sistema ad un segnale di riferimento lineare modificato dallo ZVD shaper e un segnale di riferimento con legge di moto cicloidale**



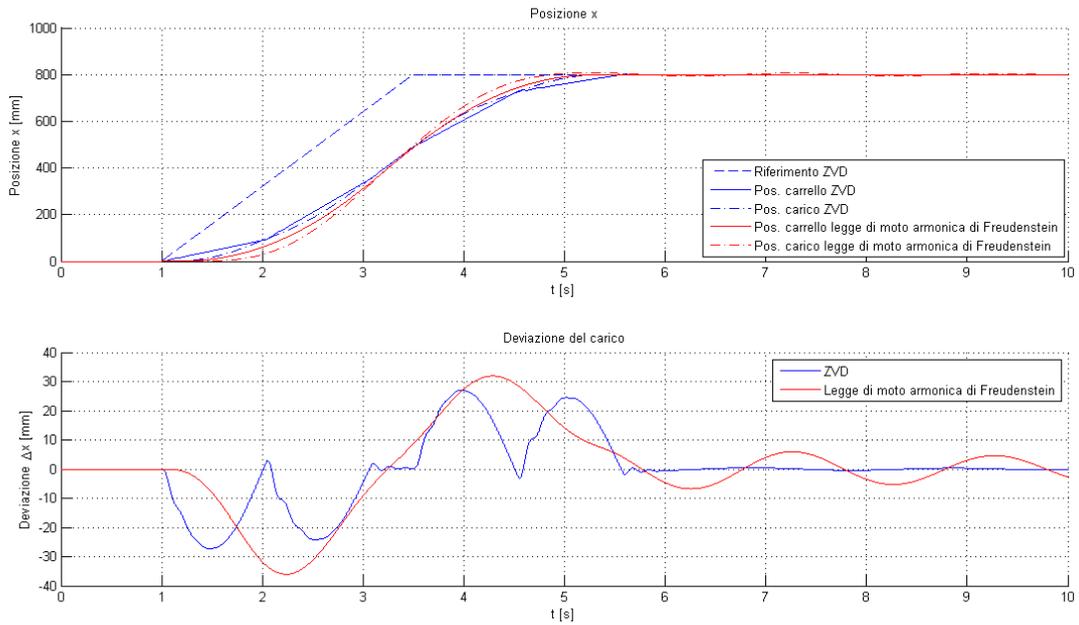
**Fig. 2. Comparazione delle risposte del sistema ad un segnale di riferimento lineare modificato dallo ZVD shaper e un segnale di riferimento con legge di moto polinomiale di 5° grado**



**Fig. 2. Comparazione delle risposte del sistema ad un segnale di riferimento lineare modificato dallo ZVD shaper e un segnale di riferimento con legge di moto polinomiale di 9° grado**

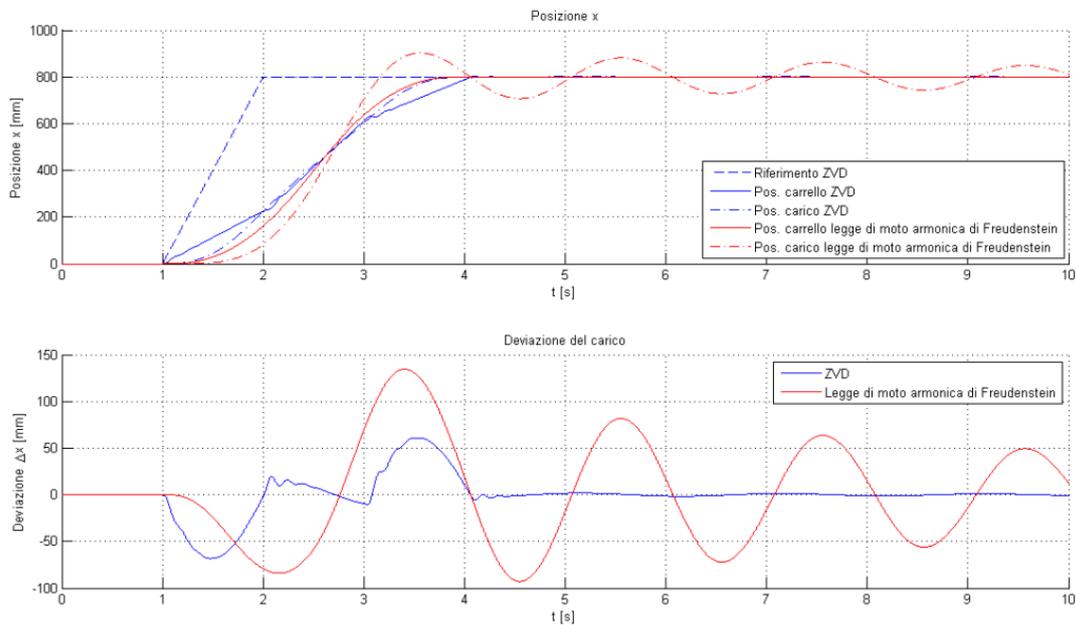


**Fig. 2. Comparazione delle risposte del sistema ad un segnale di riferimento lineare modificato dallo ZVD shaper e un segnale di riferimento con legge di moto armonica di Gutman**



**Fig. 2. Comparazione delle risposte del sistema ad un segnale di riferimento lineare modificato dallo ZVD shaper e un segnale di riferimento con legge di moto armonica di Freudenstein**

Nonostante le leggi di moto ottimizzate non siano sintetizzate in funzione del modello su cui andranno ad agire, si sono rilevati valori di oscillazioni residue al termine del comando sicuramente superiori a quelle ottenute con filtraggio da parte dello shaper ZVD, ma in alcuni casi, comparabili con i valori di vibrazione residua tollerabile.



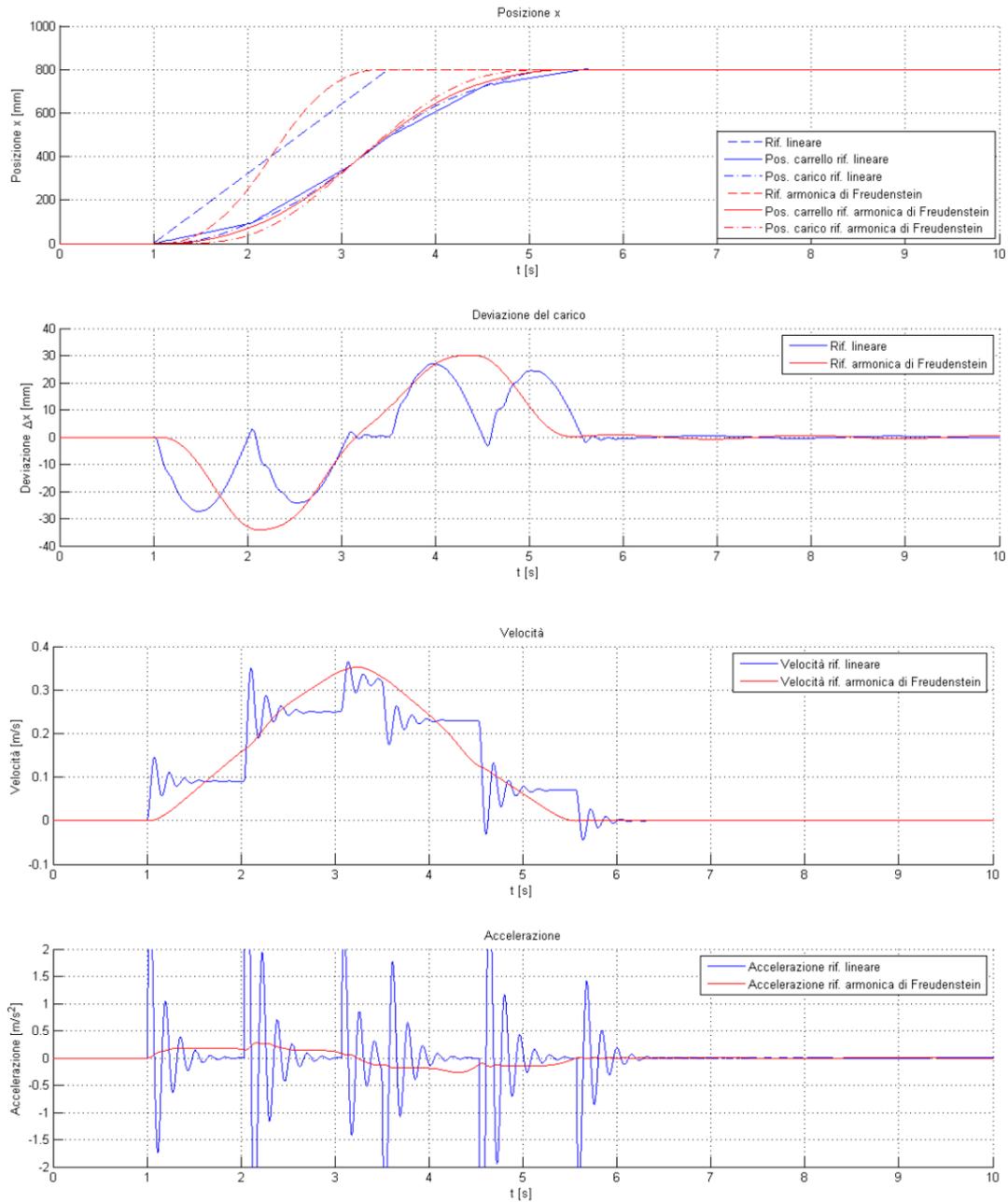
**Fig. 2. Comparazione delle risposte del sistema ad un segnale di riferimento modificato dallo ZVD shaper e un segnale di riferimento con legge di moto armonica di Freudenstein avendo diminuito il tempo di percorrenza**

Molto buone si sono dimostrate infatti le risposte del sistema alle leggi di moto armoniche, sia quella di Gutman, sia quella di Freudenstein facendo rilevare valori di picco di deviazione di soli 6 mm (Fig. 2. e Fig. 2.). È tuttavia da far presente che tale valore dipende fortemente dalla velocità media con cui si fa muovere il carrello: se si aumenta tale valore infatti l'oscillazione residua aumenta notevolmente rivalutando dunque le considerazioni appena fatte. In Fig. 2. è riportata una comparazione analoga alle precedenti, avendo avuto però la cortezza di diminuire il tempo di moto da 2.5 s ad 1 s, così da aver portato la velocità media da 0.32 m/s a 0.8 m/s.

Passo immediatamente successivo è stato quello di unire le due tecniche: prevedere un riferimento del moto del carrello mediante una legge ottimizzata (con tempo di azionamento non dilatato) permette di eliminare le discontinuità sulla velocità e sull'accelerazione mentre l'inserimento di un filtro di shaping permette di modificare il riferimento in funzione delle caratteristiche della dinamica oscillatoria del sistema

movimentato. In tal modo si inseriscono i vantaggi derivanti dalle due metodologie di pianificazione del moto. È importante osservare però che, ponendo uno shaper a valle della legge di moto ottimizzata, si andranno a modificare gli andamenti teorici della posizione, velocità e accelerazione che non assumeranno più gli andamenti ottimali (ad esempio l'armonica di Gutman e quella di Freudenstein sono basate sull'ottenere un ridotto contenuto armonico, che viene modificato per effetto dello shaper).

In Fig. 2. è riportato il confronto tra la risposta del sistema in cui il riferimento di posizione lineare è stato modificato da uno ZVD shaper e la risposta del sistema nel caso in cui, a differenza del primo, il riferimento è una legge di moto ottimizzata, in particolare la armonica di Freudenstein. Si osserva come l'oscillazione residua sia praticamente invariata nei due casi ma le migliorie dell'aver pianificato il moto con una legge opportuna, si visualizzano molto chiaramente negli andamenti della velocità e dell'accelerazione che risultano molto più "morbidi" e con carattere meno oscillatorio.



**Fig. 2. Comparazione delle risposte del sistema tra un segnale di riferimento lineare ed uno con legge di moto armonica di Freudenstein modificati da un filtro ZVD**

### 3. Carroponte a quattro gradi di libertà

Questa sezione è finalizzata ad estendere la problematica vista nel capitolo 2 svincolando il moto del carrello da uno a due assi. Quest'ultimo dunque avrà la possibilità di muoversi lungo le direzioni  $x$  ed  $y$ , potendo dunque generare qualsiasi traiettoria compresa nel piano  $x$ - $y$ . Conseguenza di ciò risulterà essere l'aumento da due a quattro dei gradi di libertà complessivi del sistema: avremo infatti i due spostamenti  $x$  ed  $y$  del carrello e i due angoli  $\theta_x$  e  $\theta_y$  definiti come in Fig. 3..

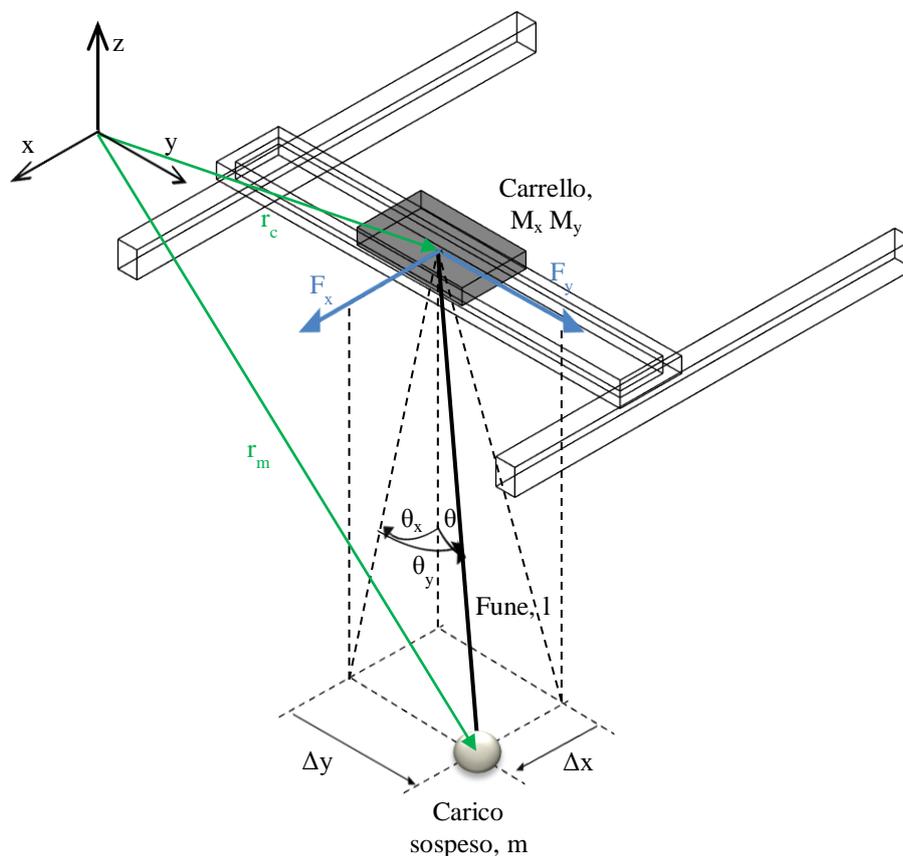


Fig. 3. Schema del carroponte a quattro gradi di libertà

L'approccio con cui si effettua lo studio di questo sistema sarà il medesimo di quello affrontato nel capitolo 2, in quanto, evidentemente, le problematiche sono le stesse ma dovranno essere riportate contemporaneamente sui due assi. Ci si ricaverà

dunque il modello dinamico del sistema sotto forma di matrici state-space e successivamente lo si utilizzerà per far compiere determinate traiettorie al carrello. Si vuole evidenziare come la letteratura sull'input shaping in problemi di questo tipo sia meno sviluppata rispetto al caso lineare.

### 3.1. Modello dinamico

Tenendo conto delle assunzioni viste all'inizio del paragrafo 2.1, il modello matematico che descrive il sistema si ricava a partire dalle equazioni di Lagrange descritte dalla (2.5). Facendo riferimento alla Fig. 3., i vettori che descrivono la posizione del carrello e della massa sospesa sono rispettivamente:

$$r_c = \{x, y, 0\} \quad (3.1)$$

$$r_m = \{x + l \sin \theta_x \cos \theta_y, y + l \sin \theta_y, -l \cos \theta_x \cos \theta_y\} \quad (3.2)$$

L'energia cinetica e potenziale del sistema sono date dalle relazioni:

$$K = \frac{1}{2} \left[ M_x \left( \frac{dr_c(x)}{dt} \right)^2 + M_y \left( \frac{dr_c(y)}{dt} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} m \left( \frac{dr_m(x)}{dt} + \frac{dr_m(y)}{dt} \right)^2 \quad (3.3)$$

$$U = -mgl \cos \theta_x \cos \theta_y \quad (3.4)$$

Il vettore delle coordinate libere, per quanto detto, sarà costituito da:

$$q = \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ x \\ y \end{Bmatrix} \quad (3.5)$$

Si assume poi che le forze  $F_x$  e  $F_y$  siano applicate entrambe al carrello lungo le direzioni  $x$  ed  $y$ . Tali forze muoveranno il sistema seguendo il segnale di riferimento e saranno, inoltre, utilizzate per smorzare eventuali deviazioni durante il moto. Non si considera nessuna forza che agisce direttamente sul carico sospeso. Applicando la

(2.5) per ogni coordinata libera, si ottengono le quattro equazioni che descrivono il sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} (M_x + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta}_x \cos \theta_x \cos \theta_y - ml \sin \theta_x \sin \theta_y + \\ \quad -ml\dot{\theta}_x^2 \sin \theta_x \cos \theta_y - ml\dot{\theta}_y^2 \sin \theta_x \cos \theta_y + \\ \quad \quad -2ml\dot{\theta}_x \dot{\theta}_y \cos \theta_x \sin \theta_y = F_x \\ \\ (M_x + m)\ddot{y} + ml\ddot{\theta}_y \cos \theta_y - ml\dot{\theta}_y^2 \sin \theta_y = F_y \\ \\ ml\ddot{x} \cos \theta_x \cos \theta_y + ml^2\ddot{\theta}_x \cos^2 \theta_y + mgl \sin \theta_x \cos \theta_y + \\ \quad \quad -2ml^2\dot{\theta}_x \dot{\theta}_y \sin \theta_y \cos \theta_y = 0 \\ \\ -ml\ddot{x} \sin \theta_x \sin \theta_y + ml\ddot{y} \cos \theta_y + ml^2\ddot{\theta}_y + \\ \quad \quad + mgl \cos \theta_x \sin \theta_y + ml^2\dot{\theta}_x^2 \sin \theta_y \cos \theta_y = 0 \end{array} \right. \quad (3.6)$$

dove  $M_x$  e  $M_y$  sono rispettivamente la massa equivalente del carrello nella direzione  $x$  ed  $y$  (tenendo dunque conto delle inerzie ridotte al carrello di tutto il sistema in movimento). Sotto l'ipotesi di piccoli spostamenti della massa sospesa rispetto alla verticale, e per analogia con il sistema di cui alla (2.11), si ottiene il seguente sistema di equazioni scritte in forma matriciale comprensivo del fattore di smorzamento  $c$ :

$$\begin{bmatrix} l & 0 & 1 & 0 \\ 0 & l & 0 & 1 \\ ml & 0 & M_x + m & 0 \\ 0 & ml & 0 & M_y + m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_x \\ \ddot{\theta}_y \\ \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{cl}{m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{cl}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_x \\ \dot{\theta}_y \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_x \\ F_y \end{Bmatrix} \quad (3.7)$$

La frequenza naturale di oscillazione della massa sospesa sarà, per analogia, equivalente a quella vista nell'equazione (2.12) per il sistema a due gradi di libertà. Allo stesso modo avremo la medesima espressione anche per lo smorzamento: sarà valida, dunque, anche l'equazione (2.13).

Si osservi come la dinamica linearizzata porti a due schemi "carrello-pendolo a due gdl" disaccoppiati. La sintesi dell'input shaping si può quindi eseguire in modo indipendente per i due sistemi.

### 3.1.1. Matrici state-space

Come visto per il modello del carroponete a due gradi di libertà nel paragrafo 2.1.1, è necessario descrivere il sistema mediante spazio degli stati.

A partire dalle equazioni scritte in forma matriciale nella (3.7), è possibile ricavarsi la formulazione mediante spazio degli stati come visto in (2.14). Lo stato del sistema sarà descritto completamente dal vettore seguente:

$$x(t) = \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ x \\ y \\ \dot{\theta}_x \\ \dot{\theta}_y \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} \quad \dot{x}(t) = \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_x \\ \dot{\theta}_y \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \ddot{\theta}_x \\ \ddot{\theta}_y \\ \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} \quad (3.8)$$

I parametri in ingresso sono le forze lungo le due direzioni principali di movimento del carrello, ovvero:

$$u(t) = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

L'uscita, infine, è rappresentata dalle quattro coordinate libere del sistema:

$$y(t) = \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ x \\ y \end{Bmatrix} \quad (3.10)$$

A questo punto è possibile determinare le matrici A, B, C e D necessarie per la descrizione matematica del sistema. Ciò che ne risulta è riportato dalle matrici della (3.11).

$$\begin{Bmatrix} \dot{\theta}_x \\ \dot{\theta}_y \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \ddot{\theta}_x \\ \ddot{\theta}_y \\ \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -g \frac{M_x+m}{M_x l} & 0 & 0 & 0 & -c \frac{M_x+m}{M_x m} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -g \frac{M_y+m}{M_y l} & 0 & 0 & 0 & -c \frac{M_y+m}{M_y m} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{mg}{M_x} & 0 & 0 & 0 & \frac{cl}{M_x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mg}{M_y} & 0 & 0 & 0 & \frac{cl}{M_y} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ x \\ y \\ \dot{\theta}_x \\ \dot{\theta}_y \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{1}{M_x l} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{M_y l} \\ \frac{1}{M_x} & 0 \\ 0 & \frac{1}{M_y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ x \\ y \\ \dot{\theta}_x \\ \dot{\theta}_y \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix}$$

(3.11)

### 3.2. Simulazioni

Le caratteristiche del sistema utilizzato per effettuare le simulazioni è il medesimo di quello visto nel paragrafo 2.2.1; unico dato aggiuntivo è la massa equivalente lungo la direzione y, considerata equivalente a quella lungo x,  $M_x = M_y = 32$  kg.

L'analisi si concentrerà principalmente nello studio degli effetti dell'input shaping sulla movimentazione del carrello in un piano facendogli seguire traiettorie rettangolari o circolari.

Come per le simulazioni nel pendolo a due gradi di libertà, i risultati di deviazione del carico rispetto alla traiettoria del carrello sono espressi in termini assoluti di  $\Delta x$  e  $\Delta y$ , il primo calcolabile secondo la (2.19) mentre il secondo, in modo analogo, così:

$$\Delta y = l \theta_y \tag{3.12}$$

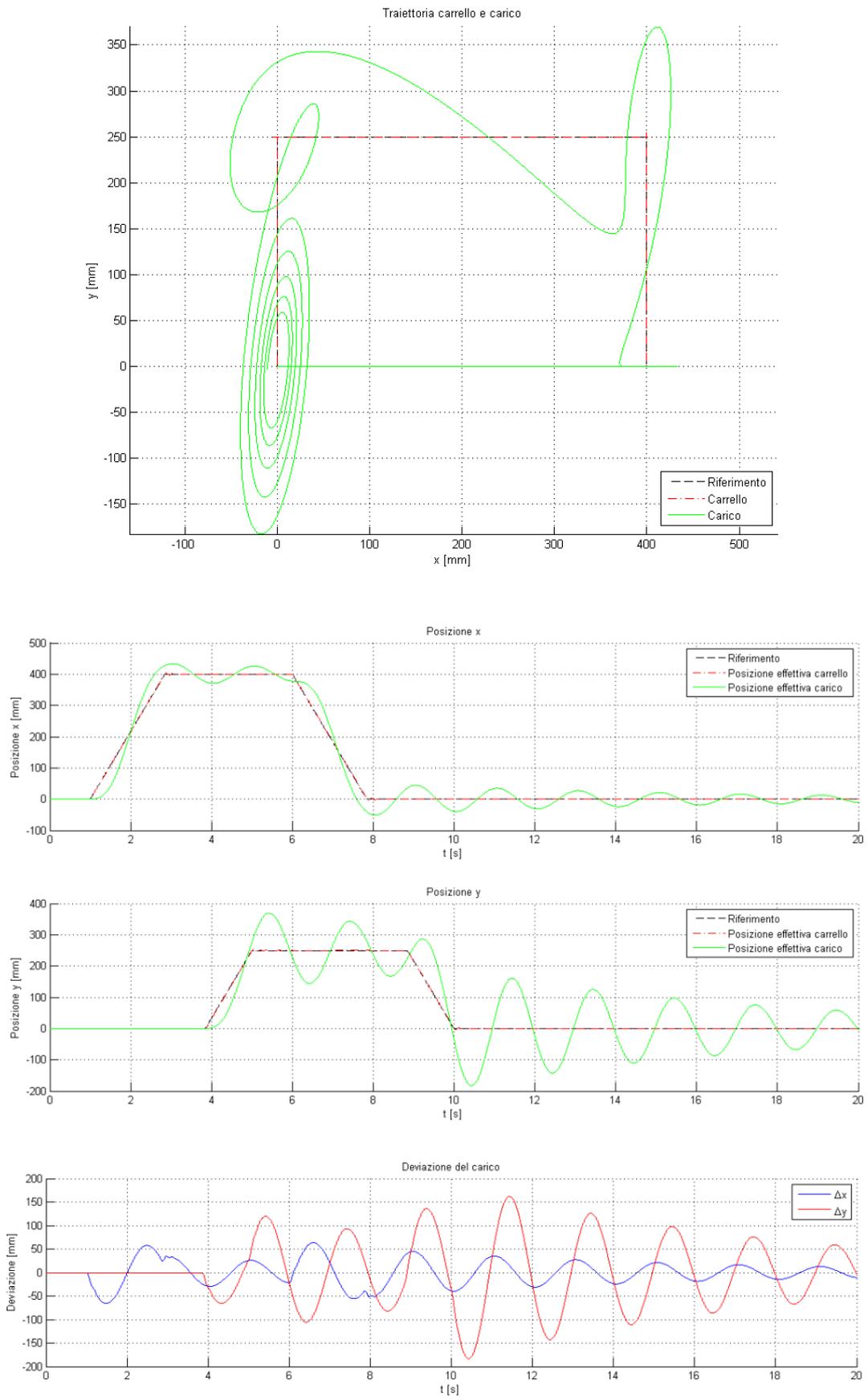
### 3.2.1. Traiettoria rettangolare

Per questo tipo di simulazione si riportano i risultati ottenuti avendo imposto degli spostamenti secondo una legge di moto di tipo rampa con tempi di percorrenza calcolati in modo tale da mantenere costante la velocità media su tutti i lati. I segnali di riferimento lungo gli assi  $x$  ed  $y$  sono generati avendo imposto la lunghezza dei due lati pari a 0.4 m e 0.25 m rispettivamente. Il punto di partenza è stato fissato nel punto (0,0) mentre il verso di percorrenza è antiorario.

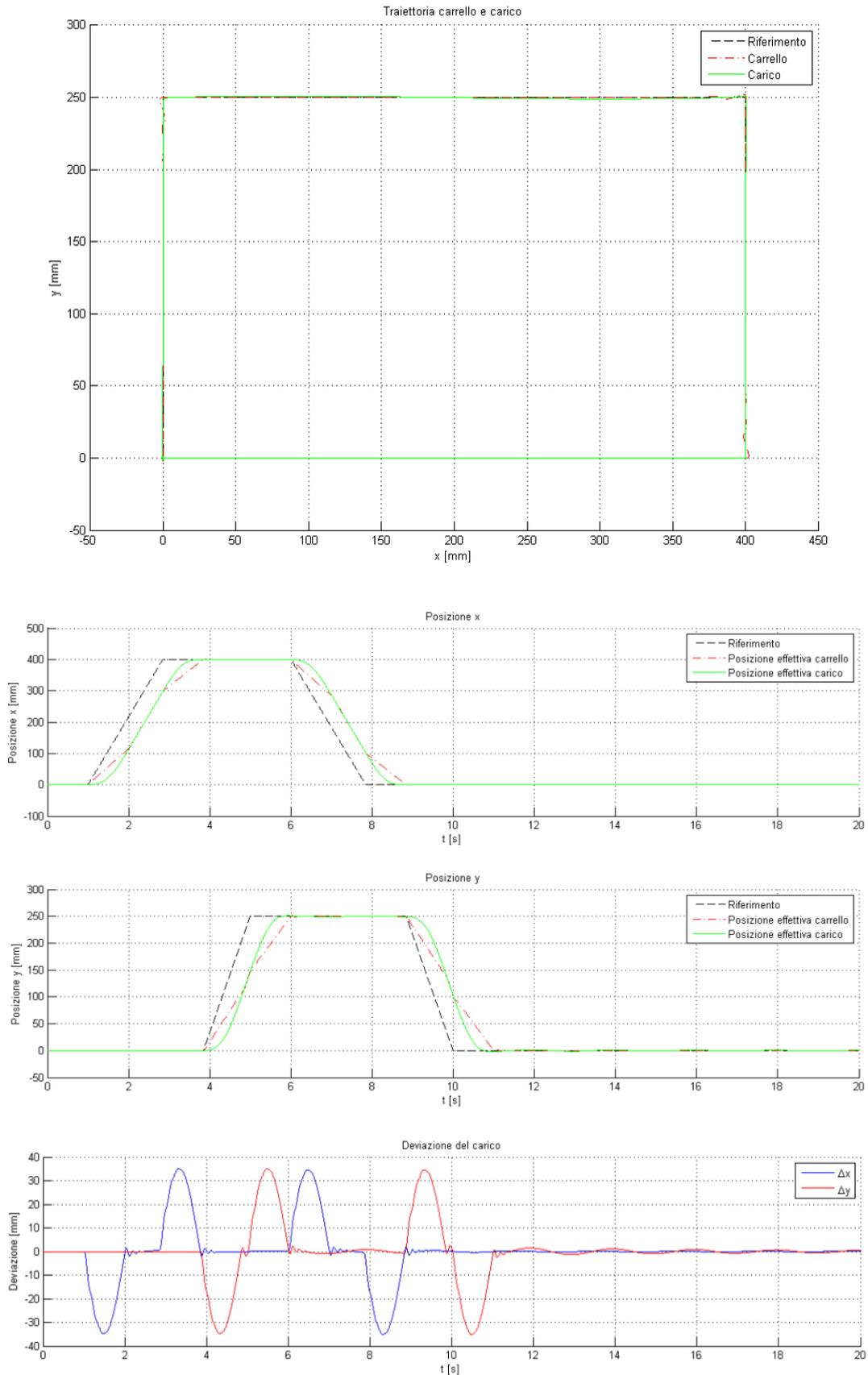
Dalla Fig. 3. si osserva come, senza anteporre alcuno shaper al segnale di riferimento, la traiettoria percorsa dal carico sia completamente errata a causa delle ampie deviazioni che si ottengono alla fine di ogni singola corsa.

Inserendo invece un semplice filtro composto da uno ZV shaper si ottengono già risultati più che soddisfacenti in quanto la traiettoria risultante del carico è pressoché sempre sovrapposta a quella di riferimento. Perché succeda questo, però, è stato necessario prevedere un ritardo tra la fine della corsa lungo un lato e l'inizio della corsa lungo il lato successivo (tempo di sosta) pari, o superiore, al tempo di modifica dello shaper, in questo caso uguale ad 1 s. Nel caso in cui si applichi uno shaper che ha un tempo di modifica maggiore al tempo di sosta imposto, ne risulterà una traiettoria inseguita dal carrello modificata che taglia gli angoli del rettangolo. Un esempio di tale fatto è illustrato in Fig. 3., in cui è stato inserito un filtro ZVD (avente un tempo di modifica pari a 2 s) avendo mantenuto lo stesso riferimento di posizione visto nelle precedenti due simulazioni. Per fare in modo che il carrello, e quindi il carico, percorra l'esatta traiettoria rettangolare, è stato dunque necessario aumentare il tempo di sosta del segnale di riferimento portandolo uguale alla distanza temporale tra il primo e l'ultimo impulso dello shaper, ovvero, in questo caso, 2 s. Il risultato ottenuto è visibile in Fig. 3..

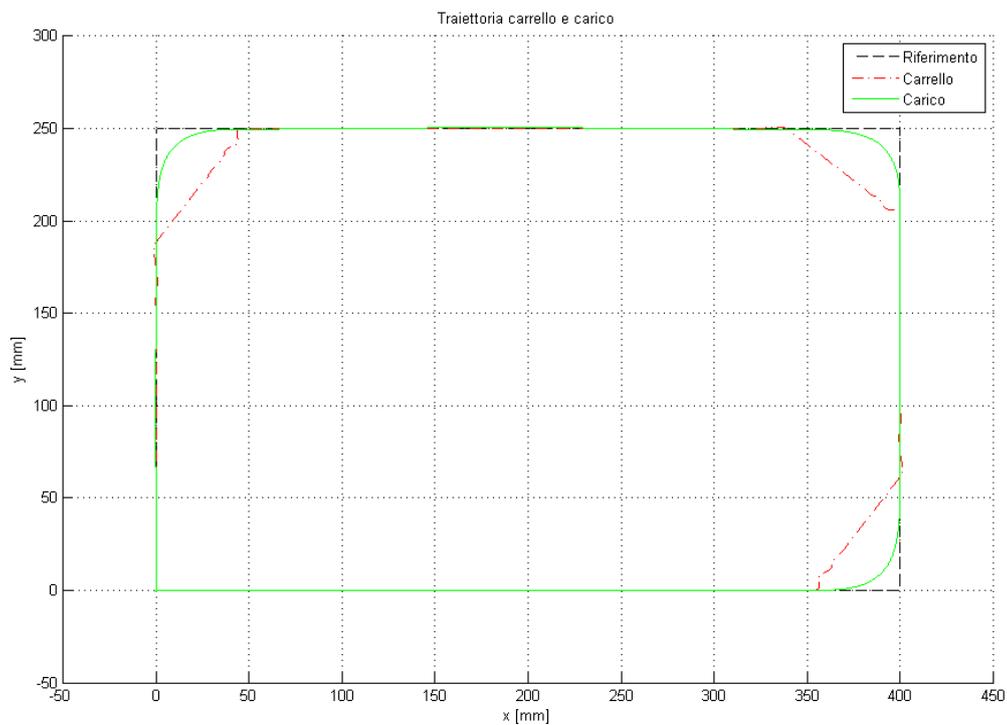
I risultati delle simulazioni dimostrano che anche in condizioni di moto planare l'input shaping ha buone prestazioni: qualitativamente l'errore di posizionamento del carico dalla traiettoria di riferimento può essere visualizzato tramite la curva della deviazione  $\Delta y$  mentre è in corso la movimentazione lungo i lati paralleli all'asse  $x$ , e, viceversa, dalla curva  $\Delta x$  quando il carrello si sta muovendo lungo i lati paralleli all'asse  $y$ .



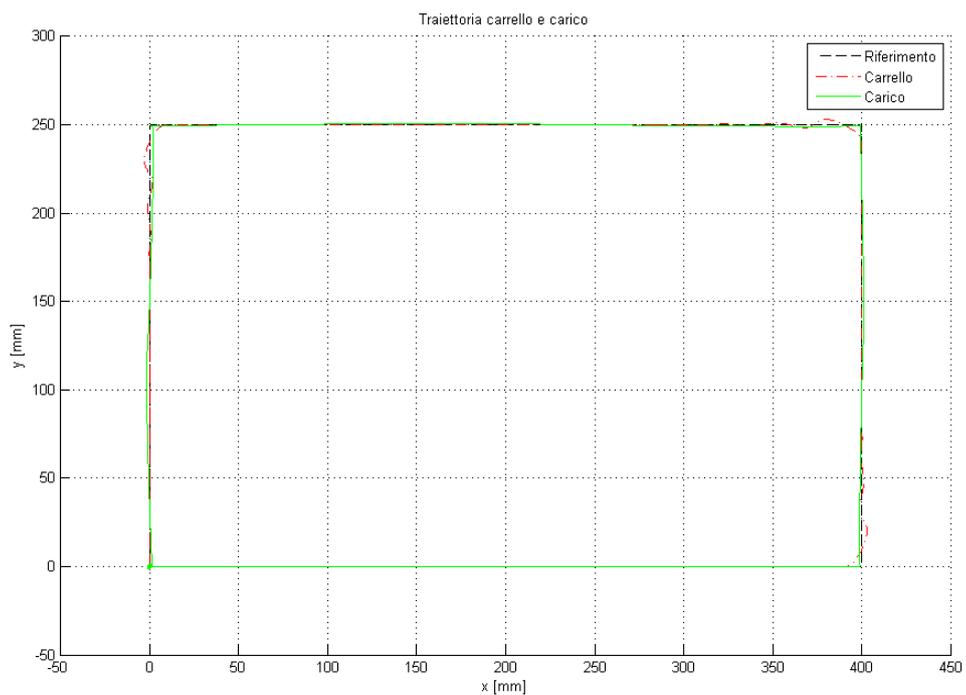
**Fig. 3. Risposta del sistema ad una traiettoria rettangolare con profilo di moto lineare senza il filtraggio del riferimento da uno shaper**



**Fig. 3. Risposta del sistema ad una traiettoria rettangolare con profilo di moto lineare e con interposizione di uno ZV shaper**



**Fig. 3. Risposta del sistema ad una traiettoria rettangolare con profilo di moto lineare e con interposizione di uno ZVD shaper. Tempo si sosta pari 1 s**



**Fig. 3. Risposta del sistema ad una traiettoria rettangolare con profilo di moto lineare e con interposizione di uno ZVD shaper. Tempo di fermo pari a 2 s**

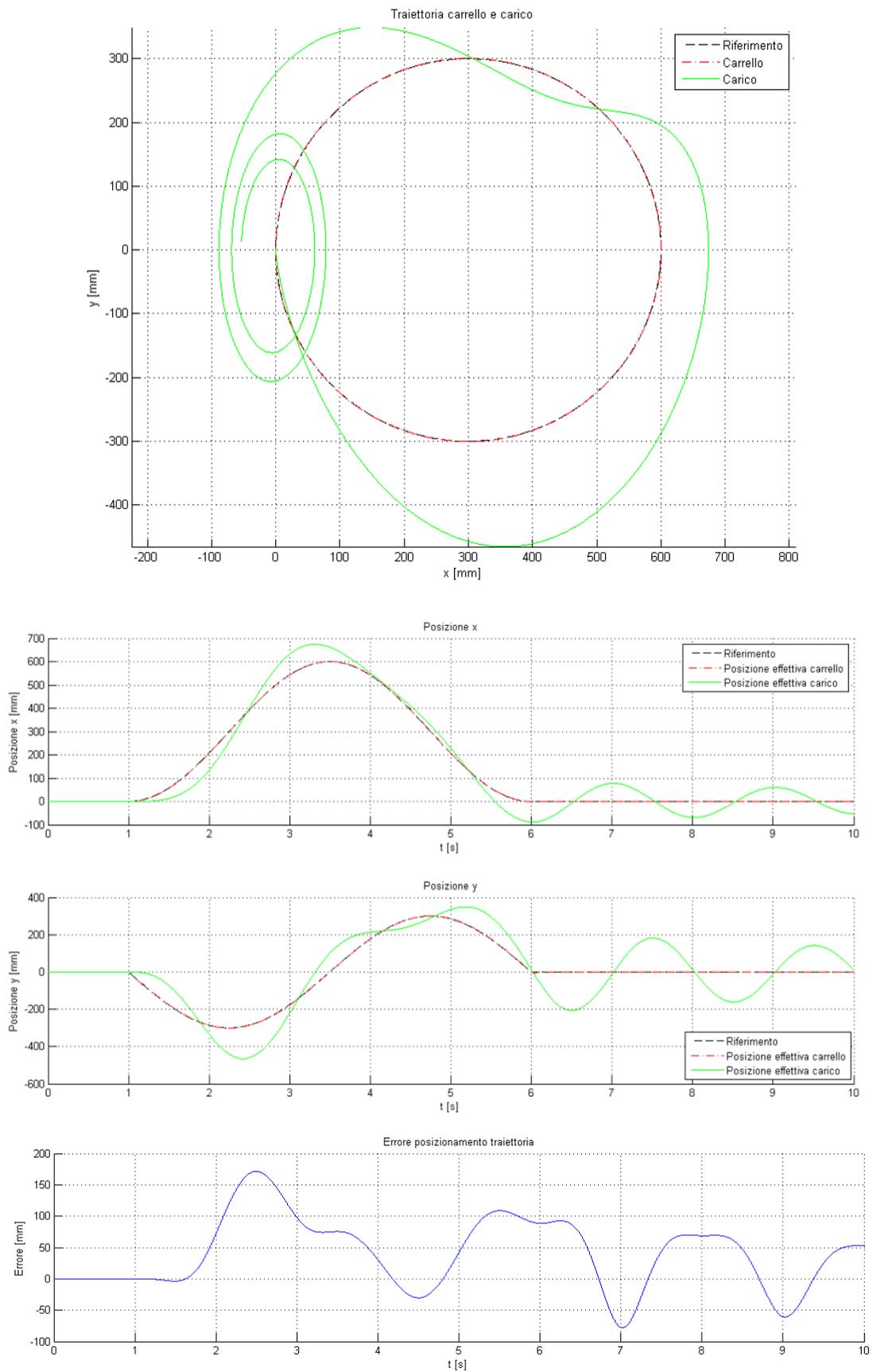
### 3.2.2. Traiettoria circolare

In questa sezione si simula di voler far percorrere al carico una traiettoria circolare di raggio 0.3 m in un tempo di 5 s mantenendo la velocità costante. La posizione iniziale è fissata nel punto (0,0) ed il verso di spostamento è ancora antiorario.

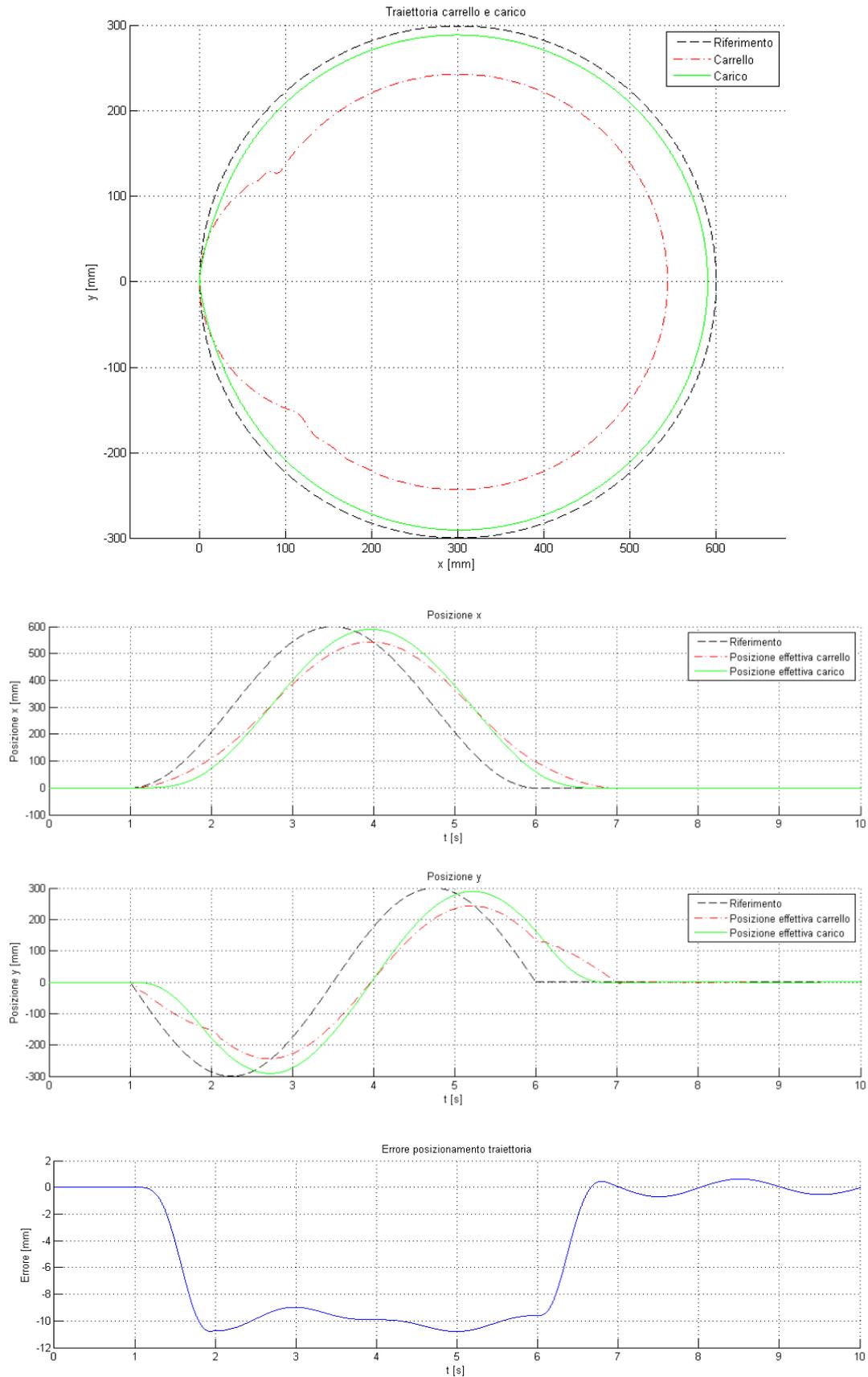
Si suppone inizialmente di non aver inserito alcun filtro di shaping per il controllo del moto del carico: la risposta di quest'ultimo, visualizzata in Fig. 3. , è del tutto erronea in quanto le ampie oscillazioni dovute al moto del carrello sommate alla forza centrifuga, deviano, in modo tanto più marcato quanto più elevata è la velocità di percorrenza, il carico dalla traiettoria ideale.

Per avere dei parametri di confronto tra le varie soluzioni adottate, si può quantificare l'errore di posizionamento del carico rispetto alla traiettoria desiderata semplicemente facendone la differenza dei raggi istantanei (per la traiettoria di riferimento, evidentemente, è costante e pari a 0.3 m). Riportando tale funzione piuttosto che le deviazioni  $\Delta x$  e  $\Delta y$ , si ha dunque un'immediata concezione dell'errore di posizionamento commesso.

Con l'implementazione di un filtro ZV (Fig. 3.) si osservano risultati molto soddisfacenti. Il riferimento modificato, ad esclusione degli istanti iniziali e finali in cui deve essere ancora completata la sequenza degli N impulsi da parte dello shaper, assume la forma di una circonferenza con raggio inferiore a quello desiderato. Tale differenza è però parzialmente compensata dall'azione della forza centrifuga sul carico sospeso che tenderà a fargli seguire una traiettoria più ampia. Avendo utilizzato per una prima analisi uno shaper con un ridotto tempo di modifica ne è scaturito quanto visualizzato sopra, ovvero una ridotta differenza tra traiettoria ideale e traiettoria effettiva del carico (errore).



**Fig. 3. Risposta del sistema ad una traiettoria circolare con profilo di moto lineare senza il filtraggio del riferimento da uno shaper**



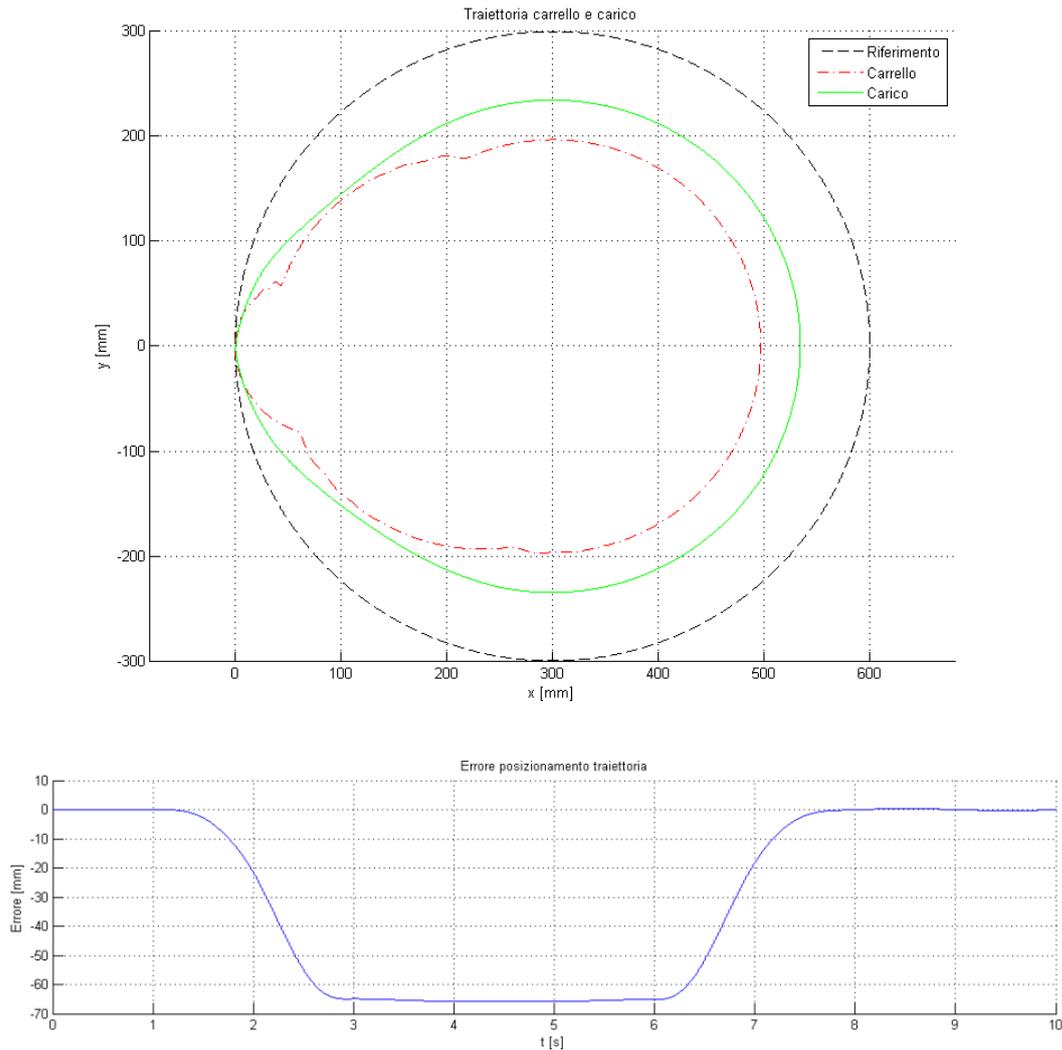
**Fig. 3. Risposta del sistema ad una traiettoria circolare con profilo di moto lineare e con filtraggio del riferimento mediante uno ZV shaper**

Se si introduce però un filtro di shaping avente un tempo di modifica maggiore, come ad esempio lo ZVD, si riesce a visualizzare molto meglio l'errore commesso. Quest'ultimo è imputabile a due principali fenomeni: la riduzione eccessiva del raggio della traiettoria seguita dal carrello e la sua distorsione rispetto ad una traiettoria circolare perfetta (Fig. 3.). Mentre il primo fenomeno può essere compensato scegliendo una traiettoria di riferimento circolare di raggio opportunamente aumentato, per il secondo problema non vi è soluzione se non quella di cambiare i tempi di percorrenza. Infatti, aumentandoli, si riduce la velocità media e dunque lo spazio percorso nel periodo di tempo in cui agisce lo shaper, rendendone meno evidente la distorsione ma al contempo riducendo le prestazioni del sistema. In Tabella sono riportati i valori del raggio minimo, massimo e medio della traiettoria del carico, e sulla base di questi è calcolata l'ampiezza della corona circolare di involuppo in cui è contenuta l'intera traiettoria. Questo parametro, unito alla deviazione standard dell'errore di posizionamento del carico rispetto alla traiettoria ideale, è indice della capacità di un metodo di seguire correttamente il riferimento.

**Tabella Comparazione degli errori ottenuti nell'inseguimento di una traiettoria circolare mediante più tecniche di input shaping**

Legge di moto	Profilo ideale -	Senza shaper lin.	ZV			ZVD		
			lin.	lin.	arm.	lin.	lin.	arm.
Raggio rif. [mm]	-	300	300	305	320	300	350	450
Raggio min. [mm]	300	222	289	290	293	234	247	261
Raggio max. [mm]	300	471	301	301	303	300	323	311
Raggio med. [mm]	300	340	295	298	299	270	291	294
Inviluppo [mm]	0	250	11	11	11	66	77	50
Dev. st. [mm]	0	56	5	3	2	30	20	12

È possibile migliorare i risultati ottenuti innanzitutto aumentando il raggio della circonferenza di riferimento. Si è riscontrato un minimo sul valore della deviazione standard dell'errore per la prova con filtro ZV impostando un raggio sulla traiettoria di riferimento pari a 0.305 m. Per il filtro ZVD invece il minimo si è riscontrato per un raggio di riferimento pari a 0.350 m.

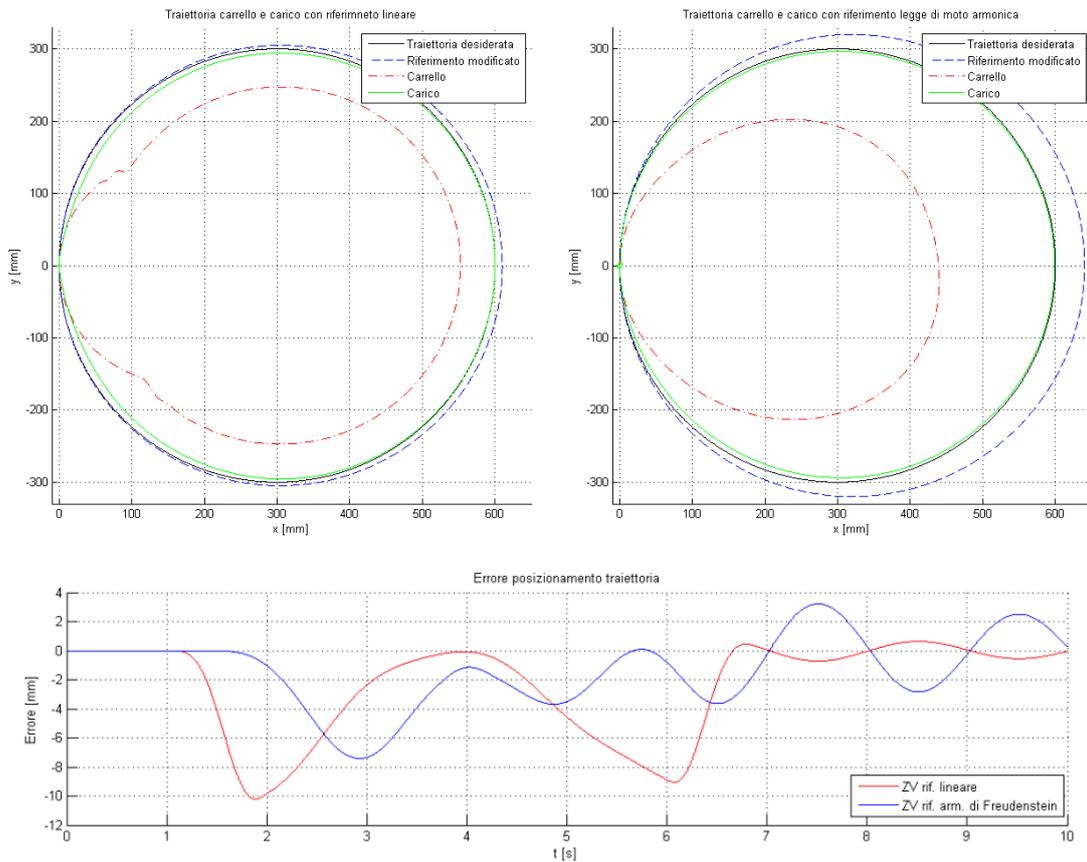


**Fig. 3. Risposta del sistema ad una traiettoria circolare con profilo di moto lineare con filtraggio del riferimento mediante uno ZVD shaper**

Ulteriori migliorie possono essere effettuate impostando una legge di moto ottimizzata in ingresso al sistema. Facendo, dunque, in modo di variare la velocità del carrello lungo la circonferenza si ottiene innanzitutto una modifica del percorso seguito dello stesso ed inoltre una diminuzione sensibile dell'errore commesso nell'inseguimento della traiettoria. Unico svantaggio introdotto variando la legge di moto deriva dalla necessità di aumentare notevolmente il raggio della traiettoria di riferimento in modo tanto più marcato quanto maggiore è il tempo di modifica del comando introdotto dallo shaper.

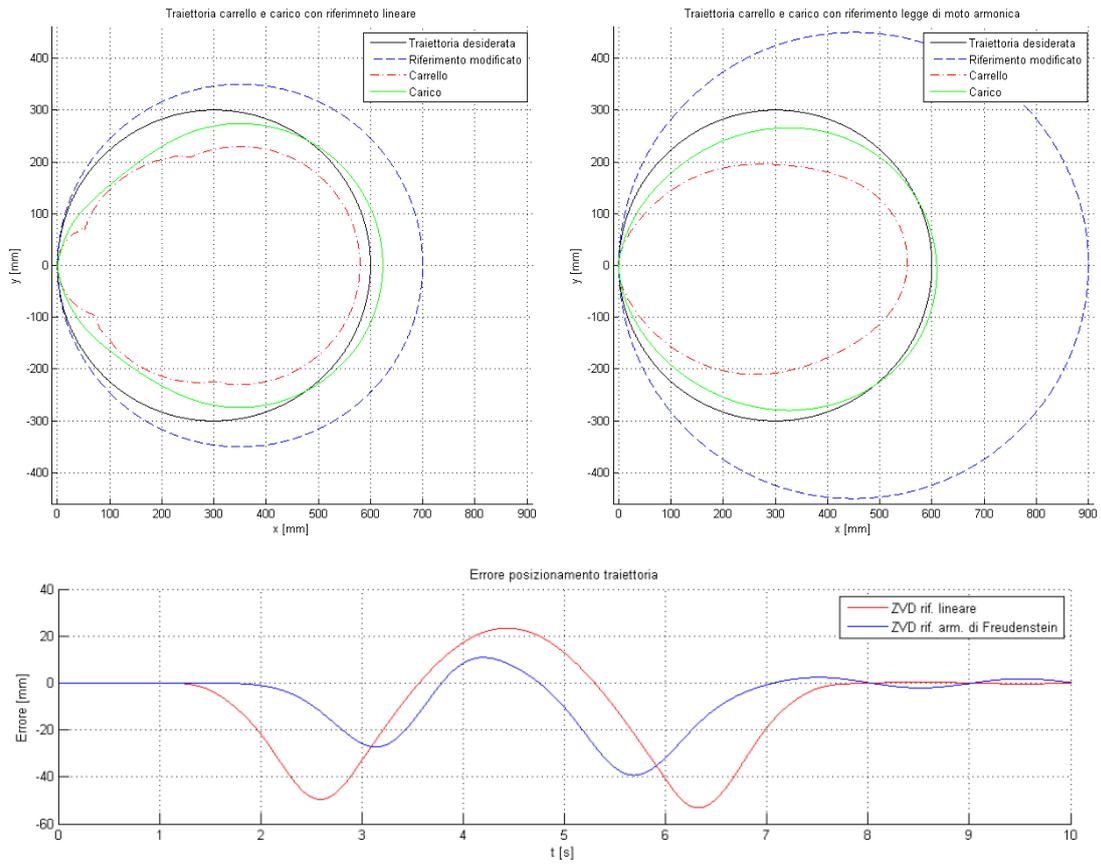
Nella Fig. 3. e nella Fig. 3. sono illustrati i risultati delle simulazioni sopracitate e permettono di mettere a confronto le migliorie che si ottengono impostando, a monte dello shaper (ZV e ZVD), un profilo di moto secondo l'armonica di Freudenstein

rispetto ad un andamento delle velocità costante (profilo di moto lineare). I valori numerici di tali simulazioni sono riportati in Tabella .



**Fig. 3. Comparazione delle risposte del sistema con filtro ZV tra un profilo di moto lineare e una legge armonica di Freudenstein, avendo imposto dei riferimenti circolari di raggio aumentato**

Queste problematiche sono evidenziate anche nell'articolo [3], in cui viene proposta l'applicazione dell'input shaping per problemi di inseguimento di traiettorie in presenza di dinamiche oscillatorie perpendicolari. Tuttavia non esiste un metodo esatto e sistematico per modificare il raggio o il tempo di percorrenza per effettuare un inseguimento preciso della traiettoria dal carico.



**Fig. 3. Comparazione delle risposte del sistema con filtro ZVD tra un profilo di moto lineare e una legge armonica di Freudenstein, avendo imposto dei riferimenti circolari di raggio aumentato**

## 4. Risultati sperimentali

In questo capitolo vengono riportati e descritti i risultati ottenuti in modo sperimentale, applicando i concetti visti nei precedenti capitoli.

### 4.1. Setup sperimentale

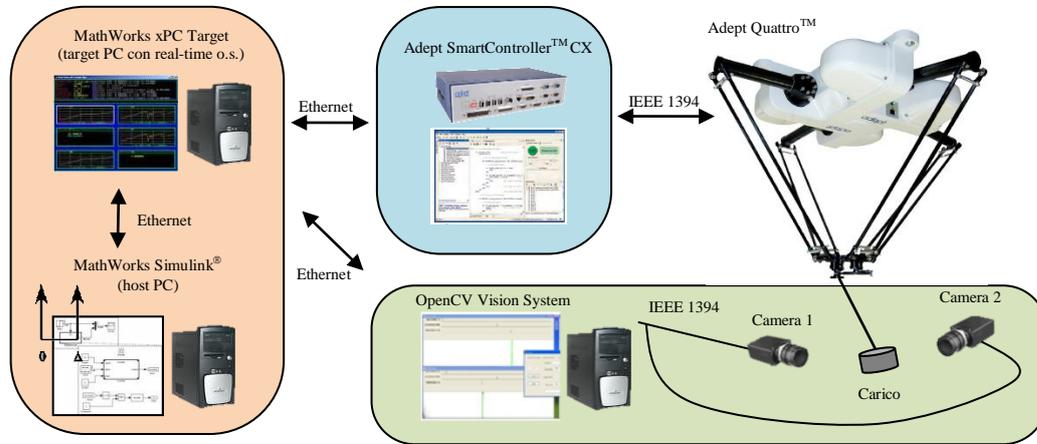
L'applicazione della teoria vista fino ad ora è stata possibile mediante l'installazione del setup illustrato in Fig. 4.. Tale configurazione è costituita da quattro elementi principali:

- Un robot *Adept Quattro™ s650H*: è un robot industriale parallelo (o “delta robot”) specificatamente progettato per applicazioni di elevata velocità in impacchettamento, assemblaggio, produzione e spostamento materiale. La comunicazione con l'esterno del robot è gestita mediante il proprio controller real-time *Adept SmartController™ CX*. Si osservi come questo componente (che è un controllore PID modificato) non è modificabile per introdurre azioni di controllo delle oscillazioni (Fig. 4.). Al robot sarà poi collegato un carico di massa nota mediante un cavo in nylon (di lunghezza nota).
- Un *target PC* con un sistema operativo real-time xPC che ha il compito di far comunicare tra loro tutti i componenti della configurazione sperimentale;
- Un sistema di visione (VS = Vision System) composto da due videocamere ed un software dedicato per la visualizzazione ed il calcolo degli angoli di deviazione del filo. Questo sistema si basa sulla libreria open source di computer vision chiamata *OpenCV*.
- Un PC host in cui viene eseguito il programma Matlab permette la gestione e la programmazione del moto che dovrà essere seguita dal robot. In questo terminale è inoltre installato il software di controllo dell'Adept Quattro.

La comunicazione tra tutti i componenti è gestita tramite una connessione ethernet.

In prima battuta la creazione del programma di moto del robot è gestita interamente nel PC host in cui viene eseguito un programma Matlab per la creazioni dei dati che

poi andranno ad interagire con il simulatore in Simulink, in cui sono implementati gli algoritmi per la comunicazione e gestione dei flussi di dati in ingresso ed in uscita. In ambiente Simulink è stato inoltre utilizzato un solutore del quarto ordine Runge-Kutta con un sampling time di 1 ms.



**Fig. 4. Componenti principali del setup sperimentale**

Il carico sospeso è costituito da un corpo cilindrico di massa calibrata collegato alla base del robot mediante un filo in nylon. La velocità di oscillazione ma, soprattutto, gli angoli di deviazione del carico sono determinati dall'osservazione dell'inclinazione del filo. Per minimizzare gli errori di lettura del sistema di visione si è cercato di aumentare il più possibile il contrasto tra il filo e lo sfondo: per fare ciò si è colorato di nero il cavo e si sono disposti due monitor che proiettavano un'immagine di colore giallo uniforme per fare da sfondo. In tal modo si sono ridotti sensibilmente i problemi derivanti da errori di elaborazione dell'immagine. Le videocamere e gli schermi, come visibile in Fig. 4., sono disposti in modo tale da determinare gli angoli  $\theta_{x,l}$  e  $\theta_{y,l}$  come proiezioni del filo nei piani x-z e y-z rispettivamente. Sono dunque definiti in modo diverso da come lo era stato fatto in Fig. 3., ed è opportuno riportarli a tale notazione secondo la seguente conversione:

$$\begin{aligned} \theta_x &= \theta_{x,l} \\ \theta_y &= \arctan \left[ \left( \frac{\cos \theta_{x,l}}{\cos \theta_{y,l}} \right)^2 \sin \theta_{y,l} \right] \end{aligned} \quad (4.1)$$

Il modello linearizzato sviluppato nel paragrafo 3.1 (Equazione (3.7)) è ancora valido utilizzando la nuova definizione degli angoli. La medesima teoria dell'input shaping può pertanto essere applicata.



Fig. 4. Setup sperimentale per il sistema di controllo visivo

Le immagini acquisite dalle due videocamere sono trasmesse via cavo FireWire (standard IEEE 1394) al PC nel quale è installato il software di gestione ed elaborazione immagine. Il collo di bottiglia del sistema di visione sta nella velocità di acquisizione delle immagini (circa 50 Hz). I valori di angoli calcolati sono poi trasmessi mediante protocollo UDP in tempo reale al target PC. L'intero processo, inclusi quindi acquisizione, calcolo e trasmissione dati, introduce un ritardo di circa 35 ms.

Al fine di gestire il movimento del robot e di seguire la pianificazione esterna del moto, sono eseguiti contemporaneamente nel suo controllore, lo SmartController<sup>TM</sup> CX, tre task (threads): il task di *ricezione comunicazione*, il task di *invio comunicazione* ed il task di *controllo*.

Il task di *ricezione comunicazione* ha la massima priorità e manipola i dati in ingresso trasmessi dal target PC. Tali dati consistono nella posizione di riferimento del robot elaborati appunto da quest'ultimo. Il ruolo principale di questo task è quello di fornire l'ultimo riferimento di posizione al task di controllo che lavora ad una più bassa frequenza. Il protocollo UDP è quello utilizzato per la ricezione dei dati ed è settato per acquisire 250 pacchetti di dati al secondo.

Il task di *invio comunicazione* gestisce i dati in uscita trasmessi anch'essi al target PC. Esso raccoglie i dati sulla posizione attuale dell'Adept Quattro mediante analisi cinematica e li spedisce con una velocità di 200 pacchetti al secondo al target PC.

Infine il task di *controllo* interpola il riferimento esterno e muove gli attuatori del robot. Generalmente, quando la teleoperazione è ottimizzata, il controller del robot riceve la posizione di riferimento da un dispositivo remoto ad una velocità

predefinita e costante. L'informazione più aggiornata messa a disposizione del task di controllo è la posizione corrente e dunque l'interpolazione del movimento non può essere fatta facilmente. Questo porta ad un moto discontinuo e a scatti del robot nel caso in cui si raggiunge la posizione corrente prima che la prossima posizione da inseguire sia stata ricevuta. Nel processo di controllo del riferimento con l'attuale posizione si introduce inoltre un ritardo pari a circa 30 ms.

Terminata la simulazione tutti i pacchetti di dati ricevuti dal sistema di visione e dal controller del robot al target PC sono scaricati sul PC host in cui potranno poi essere elaborati.

## **4.2. Determinazione dei parametri del sistema**

Il primo passo per impostare il lavoro è stato quello di determinare i valori delle principali grandezze che lo caratterizzano: tra queste vi sono essenzialmente la frequenza naturale di oscillazione della massa sospesa, lo smorzamento cui è sottoposta e la lunghezza del filo del pendolo ideale. Quest'ultimo dato, inoltre, risulta anche verificabile con un errore ridotto a partire dalla formulazione (2.12) una volta nota la frequenza naturale di vibrazione.

La conoscenza dello smorzamento è sempre il fattore più critico per la modellazione di un sistema meccanico: mentre per la misura della frequenza naturale di vibrazione esistono più tecniche, e di elevata precisione, spesso l'identificazione del valore dello smorzamento con un errore massimo del 10% costituisce un risultato più che soddisfacente.

Si considerino due massimi relativi consecutivi della soluzione del moto libero. Tali massimi si avranno in corrispondenza degli istanti in cui la funzione armonica (seno o coseno) raggiunge il valore massimo, ovvero il valore unitario.

In realtà la presenza dell'esponenziale negativa comporta uno spostamento dei massimi verso sinistra rispetto all'istante in cui il seno (o il coseno) assume il valore unitario. Tuttavia tale spostamento è quasi sempre di entità trascurabile, ed è tanto più piccolo quanto minore è lo smorzamento del sistema.

Se si suppone che il primo massimo si ha in corrispondenza dell'istante  $t_1$ , allora il secondo massimo si avrà in corrispondenza del tempo:

$$t_2 = t_1 + \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \quad (4.2)$$

Il logaritmo del rapporto dei valori assunti dalle funzioni agli istanti  $t_1$  e  $t_2$ , detto decremento logaritmico, è esprimibile in funzione del solo fattore di smorzamento viscoso  $\zeta$  secondo la seguente relazione:

$$\ln\left(\frac{x(t_1)}{x(t_2)}\right) = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (4.3)$$

in cui  $x(t)$  è la funzione che descrive la vibrazione.

Noto quindi il valore del decremento logaritmico da prove sperimentali, è possibile ricavare il fattore di smorzamento viscoso con la precisione desiderata attraverso tecniche di calcolo numerico.

Tuttavia per smorzamenti ridotti il termine  $\sqrt{1-\zeta^2}$  può essere confuso con l'unità. In tal modo il calcolo del fattore di smorzamento viscoso si riduce alla semplice relazione seguente:

$$\zeta = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{x(t_1)}{x(t_2)}\right) \quad (4.4)$$

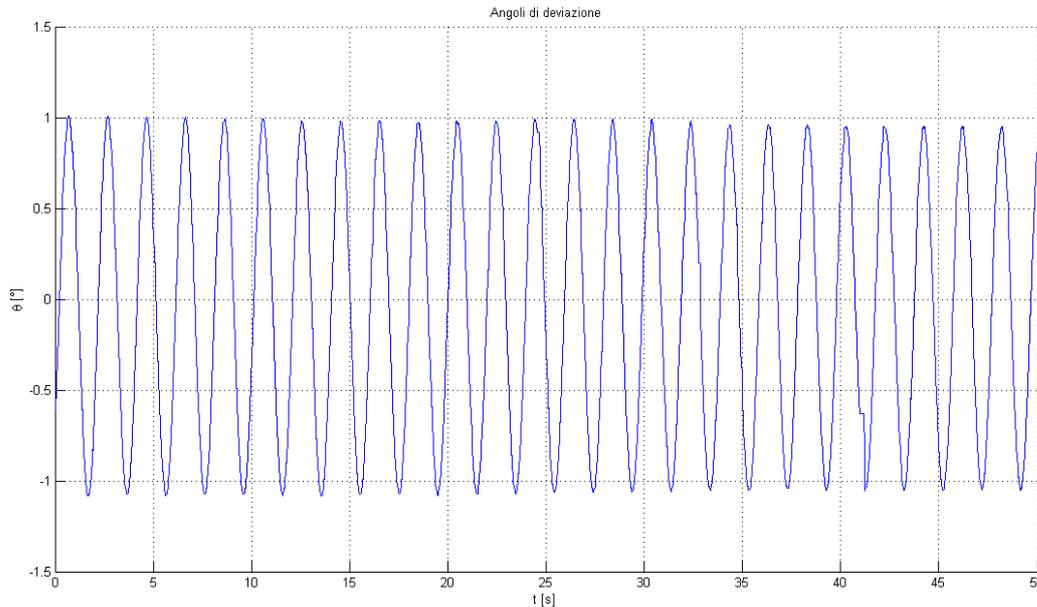
Mediante la formulazione inversa della (2.13) è poi possibile determinare la costante di smorzamento viscoso  $c$ .

La misura del valore del decremento logaritmico semplice, ovvero del rapporto delle ampiezze delle vibrazioni in corrispondenza di due massimi successivi, spesso è affetta, nei sistemi con poco smorzamento, da una notevole imprecisione. Infatti, se il sistema è poco smorzato, le ampiezze delle vibrazioni in corrispondenza di due massimi successivi sono molto simili tra loro, e gli errori che inevitabilmente si commettono quando si vanno ad effettuare le misure possono influenzare pesantemente il risultato. In questo caso è sufficiente considerare un massimo ad un istante  $t_1$  ed un altro massimo in corrispondenza dell'istante  $t_n$  distanziato dal primo di  $n$  periodi. Maggiore sarà  $n$  minore sarà l'errore commesso sulla valutazione dello smorzamento.

La formulazione per il calcolo del fattore di smorzamento a valle di tali considerazioni sarà data da:

$$\zeta = \frac{1}{2n\pi} \ln \left( \frac{x(t_1)}{x(t_n)} \right) \quad (4.5)$$

La prima prova eseguita ha avuto dunque lo scopo di registrare le oscillazioni libere del carico sospeso per un periodo relativamente lungo di circa 50 s.



**Fig. 4. Angoli di oscillazione registrati nel piano x-z**

Lo smorzamento del sistema, come visibile in Fig. 4., è praticamente nullo. Ciò comporta un elevato errore, anche del 100 %, nel calcolo del fattore di smorzamento a causa di componenti armoniche presenti nelle rilevazioni sperimentali dell'oscillazione. È tuttavia priva di effetti pratici la presenza di questo errore in quanto tutti gli shaper risultano molto insensibili al fattore di smorzamento. Dall'analisi dei risultati dello smorzamento di cui alla Fig. 4. per un numero elevato di periodi di campionamento  $n$ , applicando la (4.5), ci si è calcolati il fattore di smorzamento  $\zeta$  e la frequenza naturale di vibrazione  $\omega_n$ . I valori medi riscontrati sono:

- $\omega_n = 3.17 \text{ rad/s}$
- $\zeta = 0.003$

A partire da tali valori è stato poi possibile determinare il coefficiente di smorzamento  $c$  e la lunghezza libera del pendolo ideale  $l$ , secondo la (2.12) e (2.13), pari a:

- $c = 0.0133 \text{ Ns/m}$
- $l = 0.9762 \text{ m}$

L'effettiva lunghezza del filo misurata dal punto di attacco al robot al baricentro del carico sospeso coincide effettivamente con il valore appena calcolato (a meno di piccoli errori). La massa del carico risulta pari a 0.70 kg.

Questi ultimi parametri saranno utilizzati per la definizione del modello state-space per la comparazione dei risultati sperimentali.

### 4.3. Note tecniche

Prima di procedere con la visualizzazione dei risultati ottenuti sperimentalmente, è bene fare alcune osservazioni di carattere tecnico in merito all'apparato a disposizione per poter comprendere appieno il motivo dell'ottenimento di certe risposte.

La maggiore difficoltà che si incontra durante l'investigazione sulle tecniche dell'input shaping, è quella di determinare con precisione l'angolo di deviazione del carico sospeso. Esistono svariate tecniche per la misurazione o il calcolo di quest'ultima, ciascuna con i suoi vantaggi e svantaggi. Il sistema di visione utilizzato nel setup sperimentale porta con se alcune anomalie di misurazione.

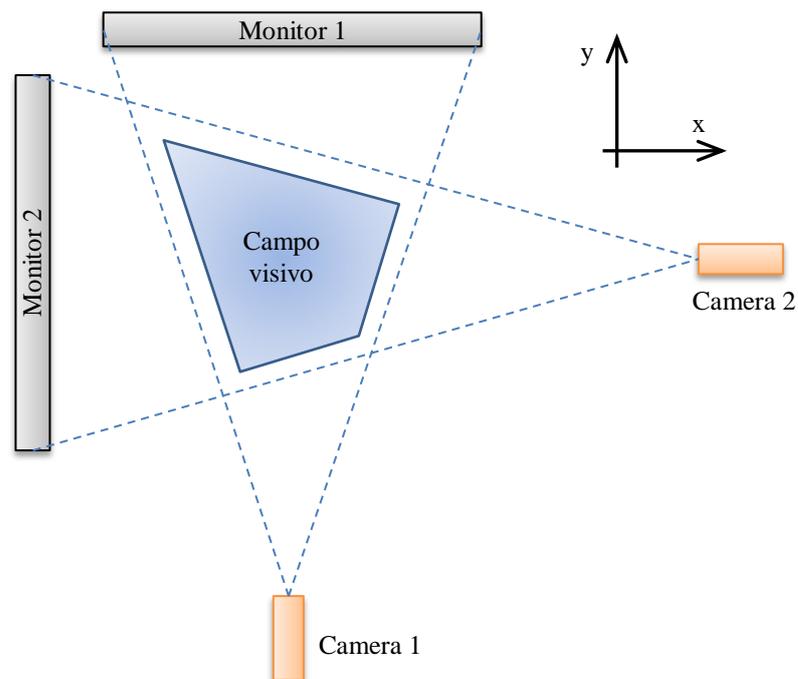
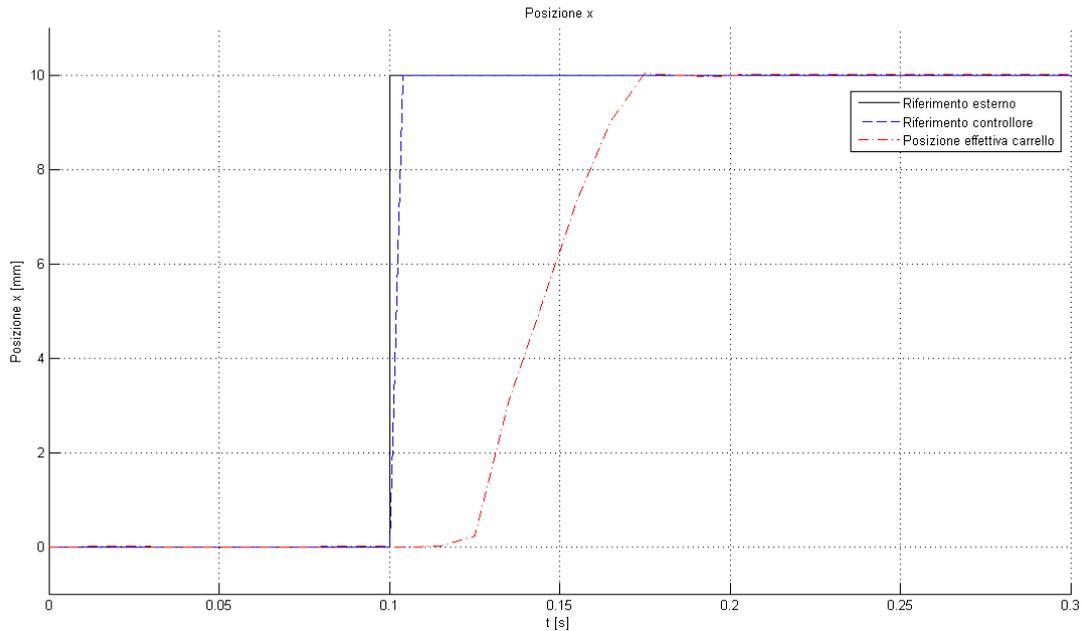


Fig. 4. Campo visivo con il setup sperimentale utilizzato

Innanzitutto, il software di elaborazione dell'immagine comunicante con le due telecamere, calcola l'angolo di deviazione prendendo a riferimento due punti del filo. Perché ciò avvenga è necessario che vi sia un elevato contrasto del filo con lo sfondo e che questo sia ben messo a fuoco in modo tale riuscire a visualizzarlo con i bordi ben definiti ed il più fine possibile. Anche piccole variazioni dalle condizioni ottimali possono ingenerare errori nell'elaborazione dell'immagine e dunque mancanza di trasmissione dei valori degli angoli per piccole frazioni di secondo.

Altra considerazione va fatta in merito al range disponibile per la misurazione degli angoli: in Fig. 4. è illustrato schematicamente la conformazione del campo visivo a disposizione e che si è reso necessario determinare a monte di tutte le prove. Ogni traiettoria percorsa dovrà dunque essere tale da rientrare nel campo visivo delle due telecamere. Purtroppo gli effetti prospettici che nascono durante lo spostamento del carrello si ripercuotono sul calcolo dell'angolo come un errore sistematico. È stato tuttavia possibile modificare tale errore agendo a posteriori in ambiente Matlab e applicando opportuni filtri al segnale originale.

Un secondo ambito in cui bisogna far chiarezza riguarda il controllo del robot: questo infatti non è in grado di seguire pedissequamente il riferimento di posizione generato sia a causa del tipo di controllore impiegato, sia a causa delle prestazioni massime rese disponibili dallo stesso. Questo è stato possibile da visualizzare molto chiaramente dando come riferimento esterno un segnale di posizione a gradino: il segnale acquisito dal controllore e l'effettiva risposta del robot sono riportate in Fig. 4.. La differenza tra il segnale originato esternamente e quello rilevato dal controllore del robot è da imputare alla velocità di aggiornamento dei dati di posizione, ovvero alla frequenza cui funziona il task di ricezione comunicazione del controller. Essendo tale valore pari a 250 Hz, si avrà un ritardo del segnale acquisito pari a 0.004 s. Molto più rilevante è invece il ritardo che si avverte nella posizione del robot: esso infatti dipende dal tipo di azione di controllo implementata, che assume la forma di un PID modificato, ma anche dalle prestazioni di velocità, accelerazione massima e dalla presenza di un interpolatore all'interno del controllore del robot. Essendo tale periodo di valore non sempre trascurabile, sarà quindi necessario fare delle dovute osservazioni sui risultati ottenuti qualora i tempi di spostamento siano molto brevi. Questo, infine, risulta essere il motivo per cui non siano state effettuate prove dando come riferimento esterno dei gradini.



**Fig. 4. Risposta del robot-carrello ad un riferimento di posizione a gradino di 10 mm**

## **4.1. Risultati sperimentali**

In questo paragrafo vengono riportati i risultati ottenuti sperimentalmente riproponendo alcune prove e confronti visti nei capitoli 2 e 3.

### **4.1.1. Traiettoria lineare**

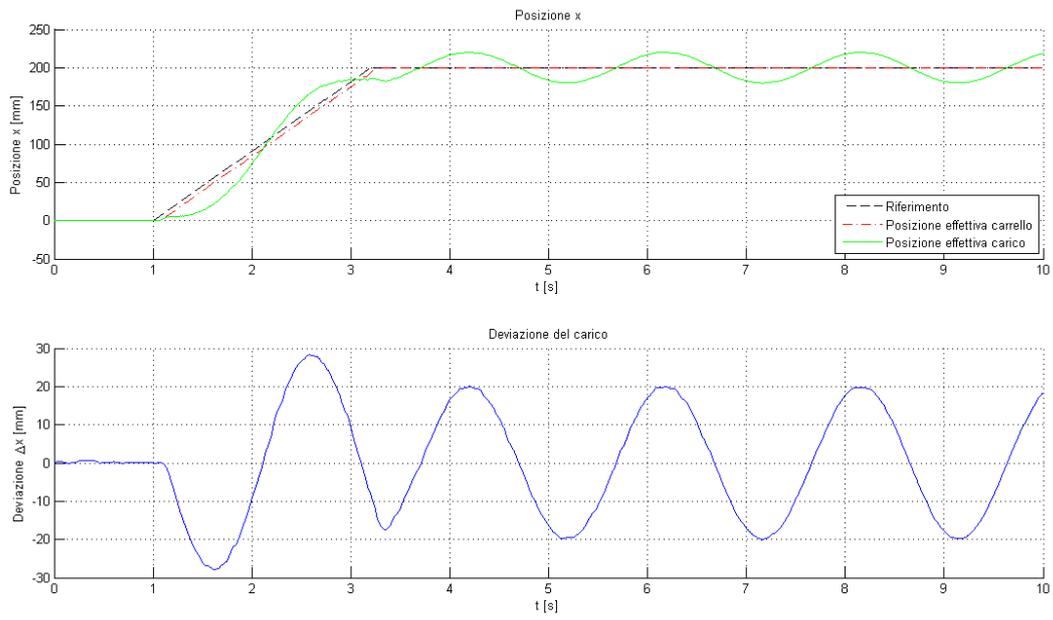
L'input shaping nasce come applicazione per spostamenti lungo una sola direzione. La maggior parte delle prove viene dunque eseguita sotto tale ipotesi, nel nostro caso ci si è proposti di esaminare il caso di spostamento lungo la direzione  $x$  del robot utilizzando come riferimento un profilo di moto lineare. I valori di spostamento concessi, come spiegato nel paragrafo 4.3, sono limitati a causa del sistema di visione. Si è scelto dunque di impostare, per il riferimento, uno spostamento lungo  $x$  pari a 0.2 m da percorrere in un tempo di 2.2 s. Per tutte le prove è stato inoltre scelto di far partire l'azionamento dopo un tempo di 1 s; ciò da modo di verificare le condizioni iniziali di oscillazione del carico, che, data la notevole lunghezza del filo, non risultano mai perfettamente nulle a causa di una difficoltà pratica di arrestare completamente la vibrazione all'inizio di ogni prova.

Di seguito (Fig. 4.) è illustrata la risposta del sistema in cui il riferimento rimane inalterato. Si rilevano ampiezze di oscillazione residua pari a circa 20 mm.

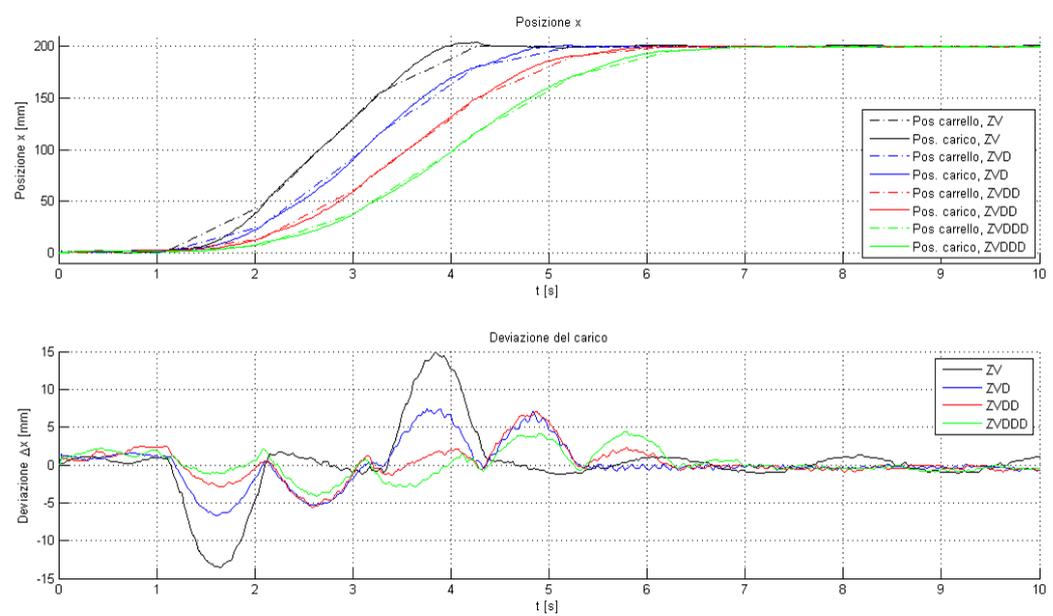
Si sono introdotti in un secondo momento i vari shaper sul riferimento di posizione: le oscillazioni risultanti sono effettivamente molto prossime allo zero. Si osservano comunque sostanziali differenze di comportamento tra i vari metodi già avendo modellato gli shaper con la frequenza di oscillazione corretta. Queste nascono in quanto vi è un errore di inseguimento del robot sul riferimento di posizione, che modifica di fatto la capacità di uno shaper di modificare correttamente la dinamica oscillatoria del sistema. Questo ha importanti conseguenze negli shaper poco robusti quali il ZV e i metodi MISZV che fanno rilevare ampiezze delle oscillazioni al termine della movimentazione dell'ordine dei 2 o 3 mm. Diverso è il fatto per i metodi EI che terminano con ampiezze pari a circa 1.5 mm; esse, a meno di errori accidentali, corrispondono infatti al valore di vibrazione residua imposta durante la loro sintesi.

Sono inoltre riportate in Fig. 4. le deviazioni del carico ottenute a partire dalla modifica del segnale di posizione mediante gli shaper ZV, ZVD, EI e MISZV con 3 impulsi modellati imponendo un errore sulla frequenza naturale di oscillazione pari al 5 %. I risultati rispecchiano evidentemente le simulazioni viste nel paragrafo 312.2.2 in cui si nota un aumento sensibile delle ampiezze delle oscillazioni per i soli metodi poco robusti, al contrario di quelli maggiormente insensibili, come lo ZVD e l'EI, che non presentano particolari differenze rispetto al caso nominale.

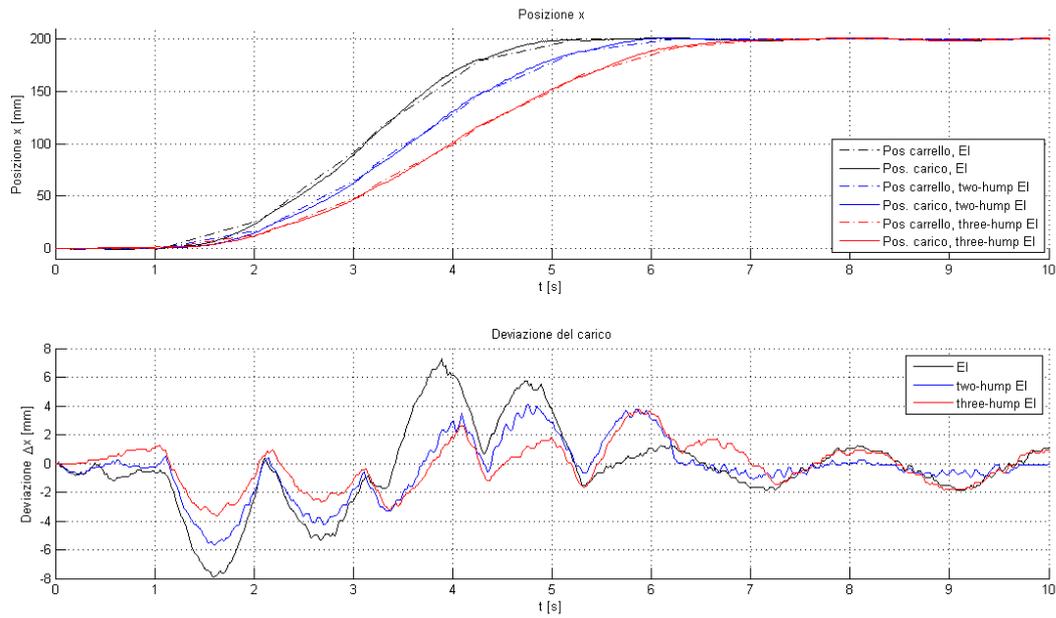
Sono infine riportate alcune comparazioni tra le risposte del sistema a dei riferimenti descritti da leggi di moto ottimizzate in alternativa alla prova con riferimento di posizione lineare modificato dallo shaper ZV. Il risultato è riportato in Fig. 4.: si osserva come le due leggi di moto ottimizzate riportate, l'armonica di Freudenstein e la polinomiale di 9° grado, non introducano alcun miglioramento dal punto di vista delle ampiezze delle oscillazioni residue. Anzi, al contrario, fanno registrare valori, soprattutto per la seconda legge citata, ben superiori a quelli ottenuti con un semplice riferimento lineare.



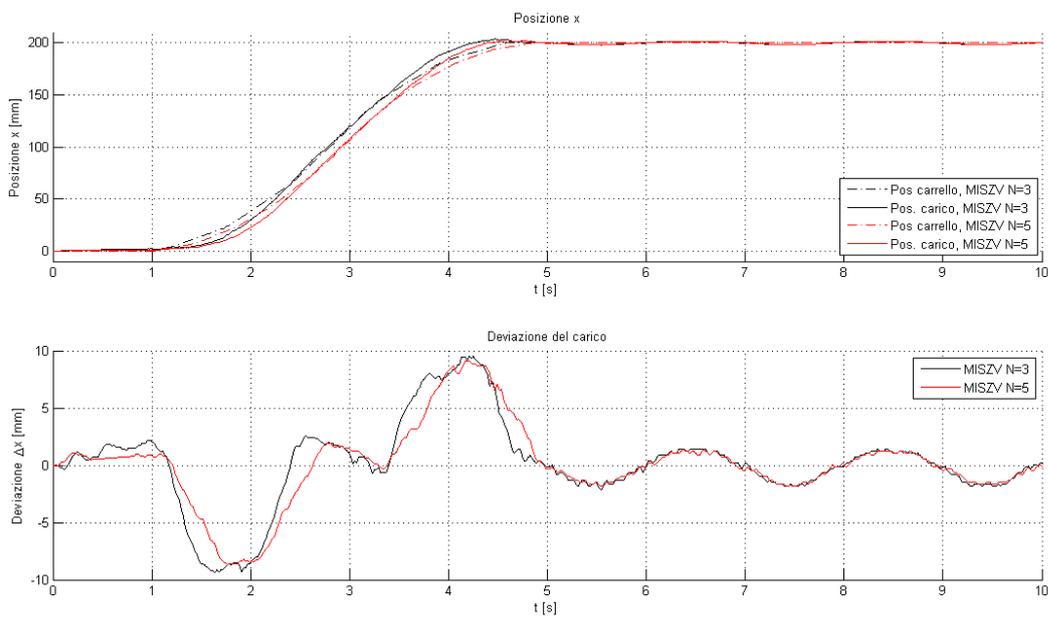
**Fig. 4. Risposta del sistema sperimentale ad un profilo di moto lineare**



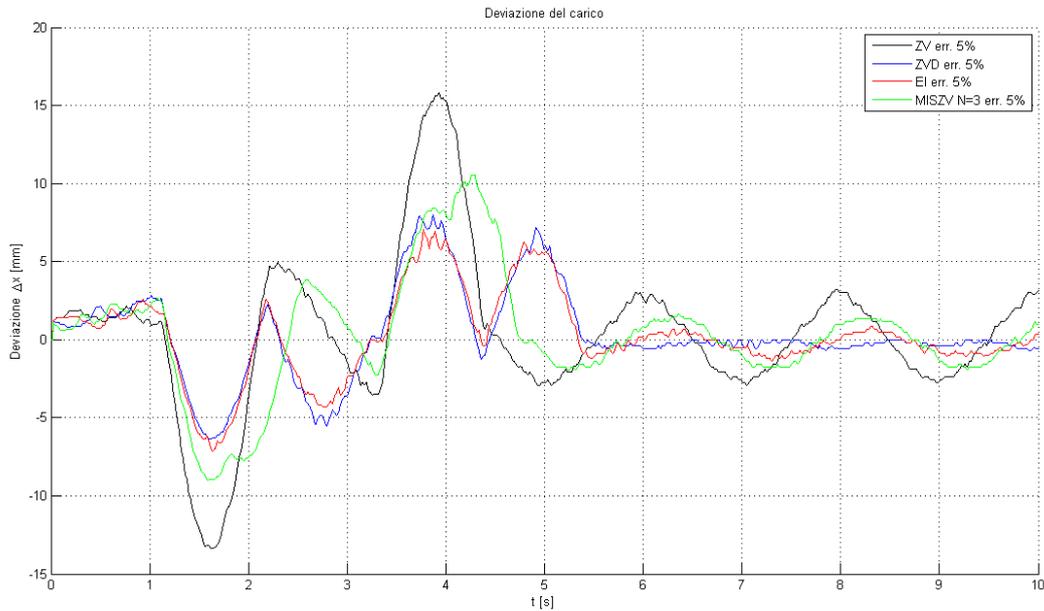
**Fig. 4. Confronto delle risposte del sistema sperimentale in cui il riferimento lineare è modificato secondo gli shaper ZV, ZVD, ZVDD e ZVDDD**



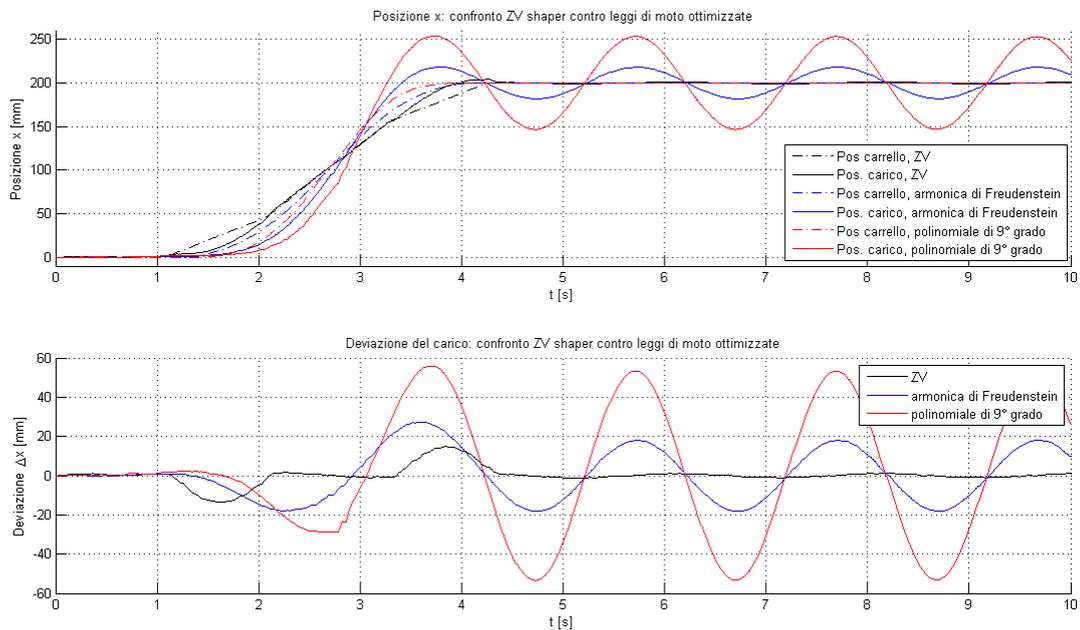
**Fig. 4. Confronto delle risposte del sistema sperimentale in cui il riferimento lineare è modificato secondo gli shaper EI, two-hump EI e three-hump EI**



**Fig. 4. Confronto delle risposte del sistema sperimentale in cui il riferimento lineare è modificato secondo gli shaper MISZV N=3 e MISZV N=5**



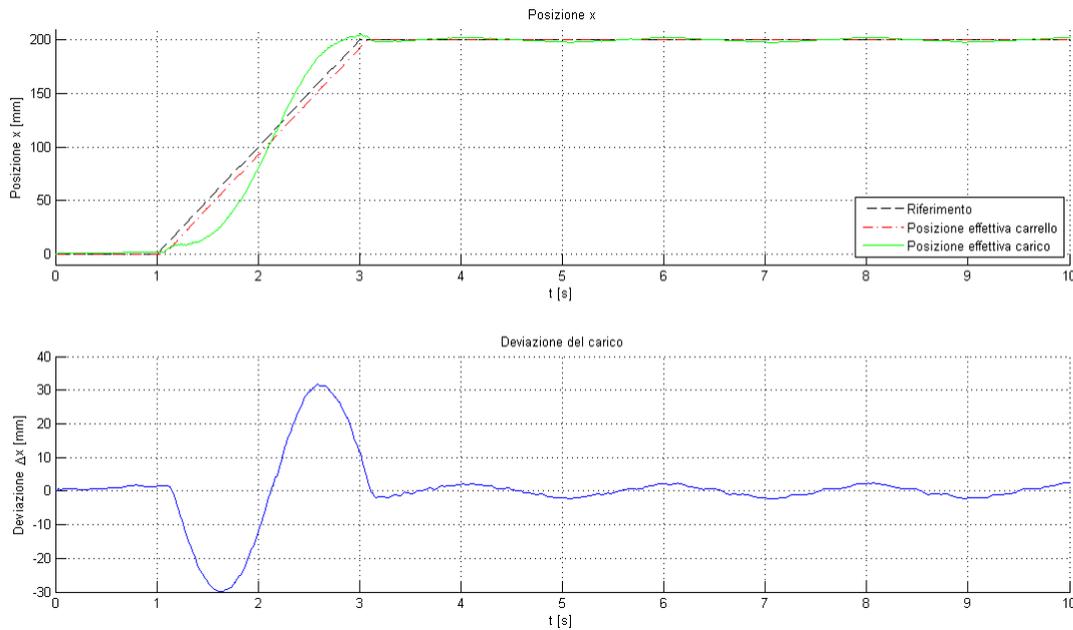
**Fig. 4. Deviazioni del carico ottenute sperimentalmente per gli shaper ZV, ZVD, EI e MISZV con N=3, inserendo un errore sulla frequenza naturale di oscillazione del 5 %**



**Fig. 4. Confronto delle risposte del sistema sperimentalmente tra un segnale di riferimento sulla posizione lineare modificato dallo ZV shaper e due leggi di moto ottimizzate: l'armonica di Freudenstein e la polinomiale di 9° grado impostando gli stessi tempi di salita**

A titolo esemplificativo si riporta in Fig. 4. la dimostrazione della possibilità di ottenere una risposta in frequenza molto prossima allo zero con un semplice riferimento lineare. È sufficiente infatti imporre il tempo di moto pari al periodo di oscillazione del carico, o ad un suo multiplo, così da far cadere i due scalini di

posizione, generati dal robot mediante due impulsi uguali ed opposti, esattamente in fase all'onda d'oscillazione, ricadendo dunque nella teoria per la sintesi degli shaper.

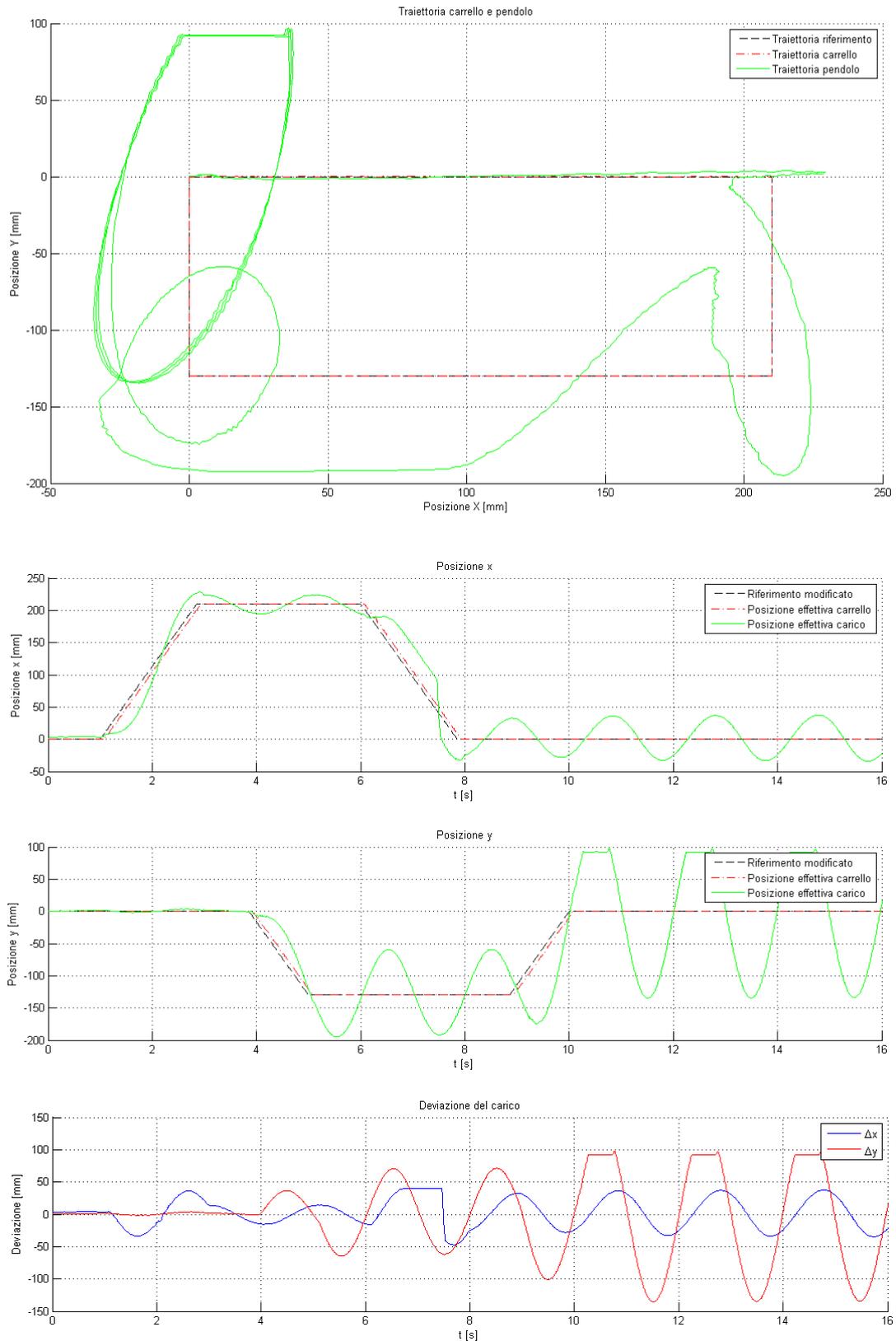


**Fig. 4. Risposta del sistema sperimentale sottoposto ad un riferimento lineare in cui il tempo di moto coincide con il periodo di oscillazione del carico**

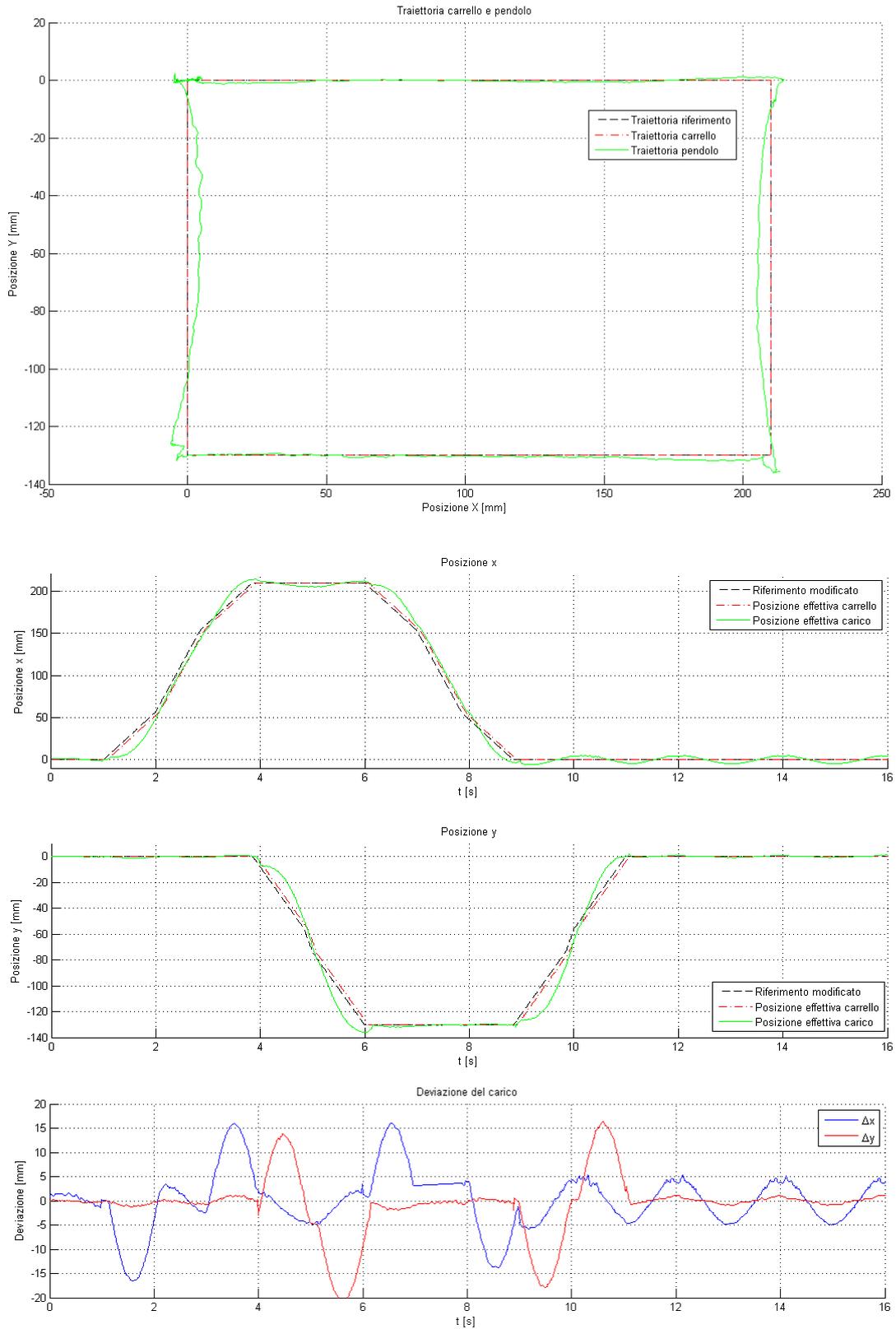
#### 4.1.2. Traiettoria rettangolare

In questo paragrafo si analizza l'effetto dell'input shaping per l'ottenimento di traiettorie rettangolari. Il riferimento di posizione originale è tale da far compiere al carrello un rettangolo avente il lato maggiore in direzione  $x$  pari a 0.21 m e il secondo lato in direzione  $y$  di lunghezza 0.13 m. Il tempo di percorrenza totale è stato imposto uguale a 10 s, a cui va però tolto il tempo di sosta di 1 s nei quattro vertici per ottenere il tempo in cui il carrello è effettivamente in movimento, ovvero di 6 s. Come per la simulazione nel modello dinamico, i tempi di percorrenza di ciascun lato sono calcolati automaticamente in modo tale da mantenere la velocità media costante lungo gli stessi.

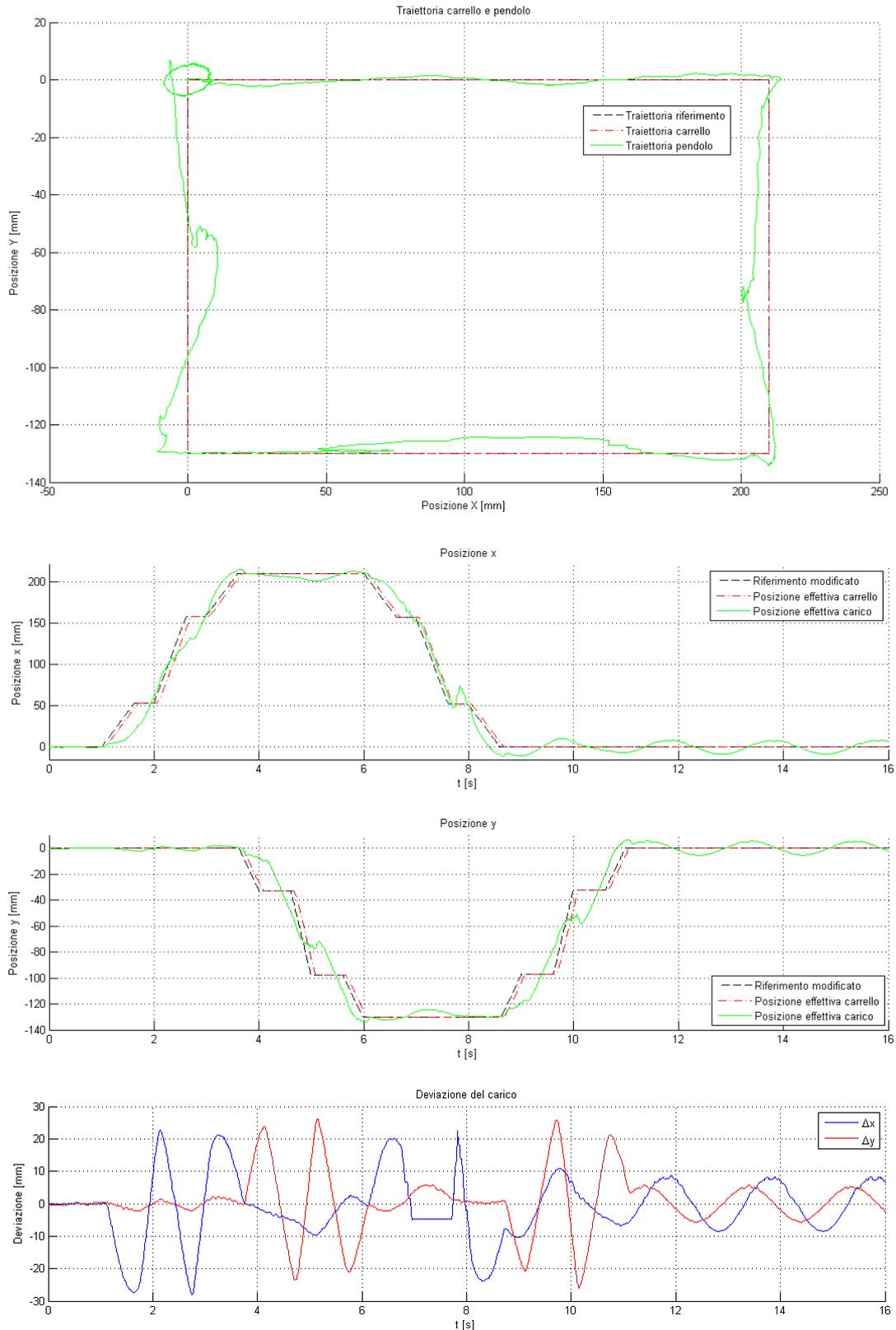
La prima prova effettuata è consistita nel far seguire al carrello il riferimento originale senza alcuna modifica. La risposta del sistema è visibile in Fig. 4.. Si osservi come, al di là delle ampie oscillazioni ottenute che erano prevedibili, come il segnale acquisito dell'angolo (ultimo grafico di Fig. 4.) sia andato perso durante i picchi positivi di oscillazione massima in direzione  $y$ . Ciò è stato causato dall'uscita del filo dal campo visivo della telecamera 2 (che registra, appunto,  $\theta_y$ ) e che dunque non ha permesso il calcolo corretto dell'angolo.



**Fig. 4. Risposta del sistema sperimentale ad una traiettoria rettangolare con profilo di moto lineare senza il filtraggio del riferimento da uno shaper, tempo di sosta di 1 s**



**Fig. 4. Risposta del sistema sperimentale ad una traiettoria rettangolare con profilo di moto lineare mediante l'interposizione di un filtro ZV, tempo di sosta di 1 s**



**Fig. 4. Risposta del sistema sperimentale ad una traiettoria rettangolare con profilo di moto lineare mediante l'interposizione di un filtro ZVD, tempo di sosta di 2 s**

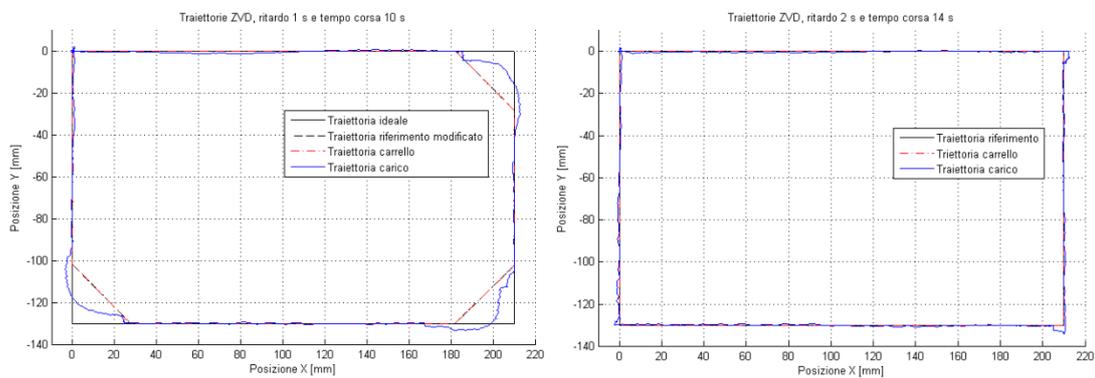
Si osservi anche una sensibile perdita di dati di  $\theta_x$  nell'intervallo di tempo che va dall'istante 6.7 s all'istante 7.3 s in cui, probabilmente, ci si è discostati dalle condizioni ottimali di lettura. Tutto ciò, comunque, non influenza di fatto il risultato che si voleva evidenziare, ovvero della presenza di ampiezze di oscillazioni residue al compimento della traiettoria pari a circa 32 mm lungo x e 135 mm lungo y.

Inserendo nel controllo del moto del carrello uno shaper ZV si ottiene quanto raffigurato in Fig. 4.: la risposta del sistema è buona anche se al termine del comando l'ampiezza dell'oscillazione residua lungo x è dell'ordine dei 5 mm. Osservando attentamente i dati, però, è possibile notare come già in partenza vi sia una lieve oscillazione lungo tale direzione, influenzando sicuramente il risultato finale. A riprova di tale fatto, si può confrontare con la risposta lungo y che genera una oscillazione residua praticamente nulla.

Una terza prova significativa è stata eseguita implementando lo shaper ZVD (Fig. 4.). Per fare in modo che il carrello percorra una traiettoria rettangolare, come descritto nel paragrafo 3.2.1, si è dovuto aumentare il tempo di sosta nel riferimento a 2 s mantenendo inalterato il tempo totale di percorrenza. In questo modo però il tempo a disposizione per l'effettiva corsa del carrello si è limitato a soli 2 s e dunque la velocità media è triplicata rispetto al caso precedente. Oltretutto, l'errore che si commette nel posizionamento del robot-carrello rispetto al riferimento sarà molto più influente sul buon esito della modifica del comando in confronto a tempi di corsa più lunghi visti precedentemente. È dunque questa la causa nella quale bisogna ricercare il motivo per cui, anche lo ZVD, non riesce ad ottenere vibrazioni residue nulle. Si sono riscontrate infatti ampiezze di oscillazioni residue pari a 8 mm in direzione x e 5 mm in direzione y. Si osservi infine come il riferimento lineare modificato assomigli molto al segnale di forza a gradino sottoposto ad un filtro di shaping. Infatti, la pendenza del riferimento è tale da ingenerare una convoluzione con la sequenza dei tre impulsi del ZVD shaper molto prossima a quella ottenibile con un gradino di posizione. Il moto risultante del carrello è apparso, di conseguenza, vistosamente discontinuo, con movimentazioni rapide intervallate da "soste" (in realtà non vi è un vero e proprio arresto del carrello, che si otterrebbe solo con un effettivo riferimento a gradino, ma la velocità è molto ridotta tale da far apparire il robot quasi fermo) anche relativamente lunghe.

A titolo di confronto, si sono riportate altre due prove effettuate con lo shaper ZVD modificando però il riferimento di posizione:

- nel primo caso si è considerato il medesimo riferimento utilizzato per le prime due prove, ovvero tempo di percorrenza di 10 s, tempo di sosta di 1 s e dunque un tempo di moto effettivo di 6 s. Il risultato è visibile nel grafico di sinistra della Fig. 4. e si osserva la mancata esecuzione degli spigoli del rettangolo da parte del carrello come già fatto notare nella Fig. 3.;
- nel secondo caso si è considerato un riferimento di posizione tale da mantenere inalterata la velocità media rispetto al primo ma che permetta di tracciare anche gli spigoli del rettangolo. Si è aumentato dunque il tempo di sosta a 2 s, che sommato al tempo effettivo di moto di 6 s, ha generato un tempo di percorrenza di 14 s. L'inseguimento della traiettoria ideale da parte del carico è praticamente perfetta, a differenza di quella rilevata per tempi di moto inferiori (sempre con lo shaper ZVD, Fig. 4.).



**Fig. 4. Risposte del sistema sperimentale sottoposto ai riferimenti di posizione (modificati dallo shaper ZVD) seguenti: a) riferimento di posizione inalterato, b) riferimento di posizione prolungato ad un tempo di moto di 14 s con una sosta di 2 s**

### 4.1.3. Traiettoria circolare

In questa sezione si riportano i risultati ottenuti dando come riferimento di posizione una traiettoria circolare di raggio 0.07 m da percorrere a velocità costante. Il tempo di percorrenza impostato è di 5 s.

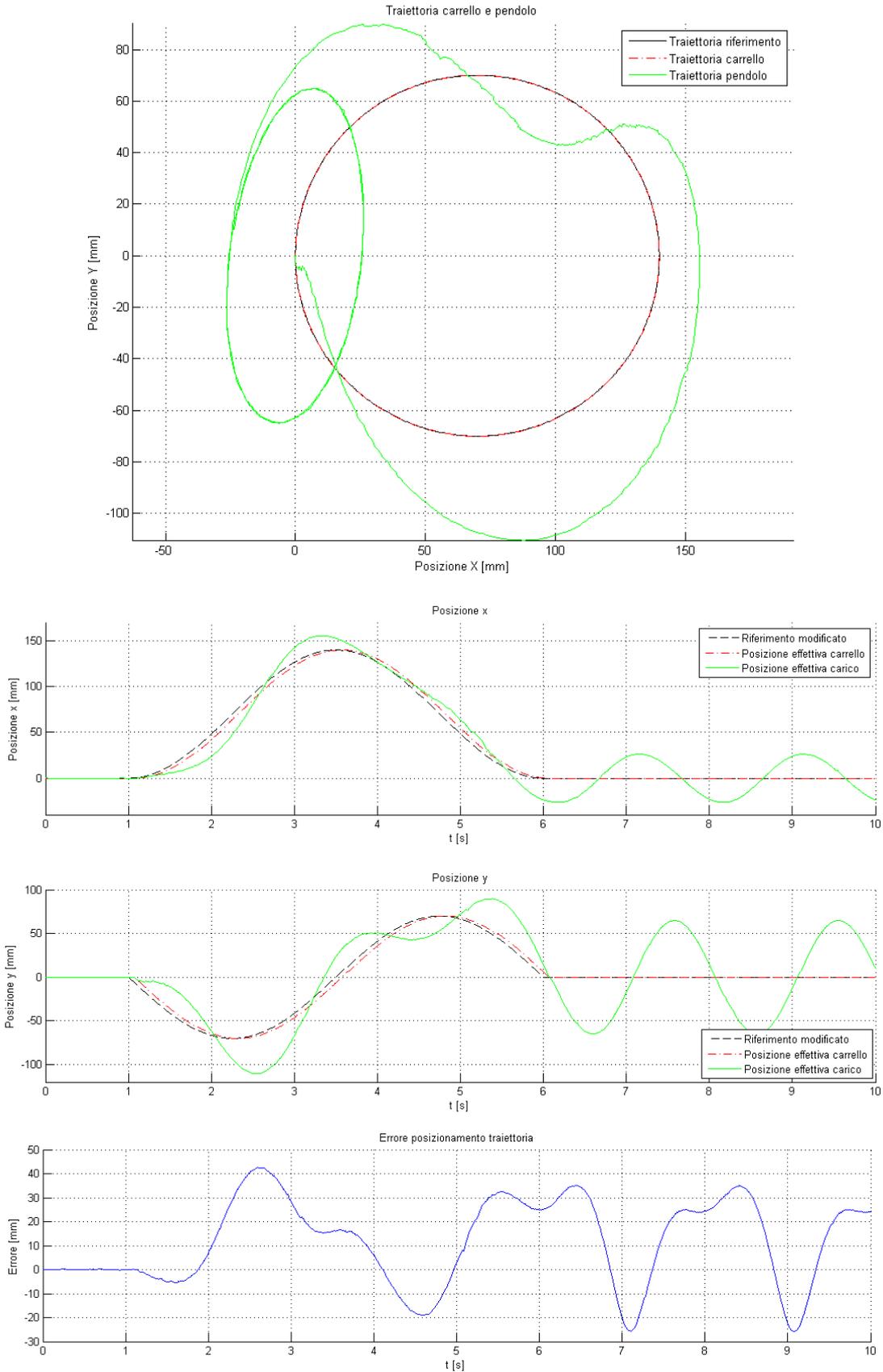
Come visto per le precedenti tipologie di prova, si è scelto inizialmente di visualizzare l'effetto di tale riferimento senza alcuna modifica. Il risultato ottenuto è riportato in Fig. 4.. Come per i precedenti casi, anche in questa prova l'inseguimento del carico rispetto alla traiettoria impostata è pessima facendo registrare picchi di errore di oltre 40 mm.

Come primo shaper implementato si è scelto di utilizzare lo ZV che, nell'analisi dinamica, si era dimostrato di una certa efficacia. Anche sperimentalmente questo ha risposto molto bene, si sono registrate infatti deviazioni massime dalla traiettoria ideale di soli 6 mm e le oscillazioni al termine del comando sono praticamente nulle. Sono tuttavia più significativi per valutare l'effettivo inseguimento della traiettoria ideale i valori modesti di ampiezza della corona circolare di involuppo e la deviazione standard dell'errore calcolati, risultanti pari, rispettivamente, a 7 mm e a 2 mm.

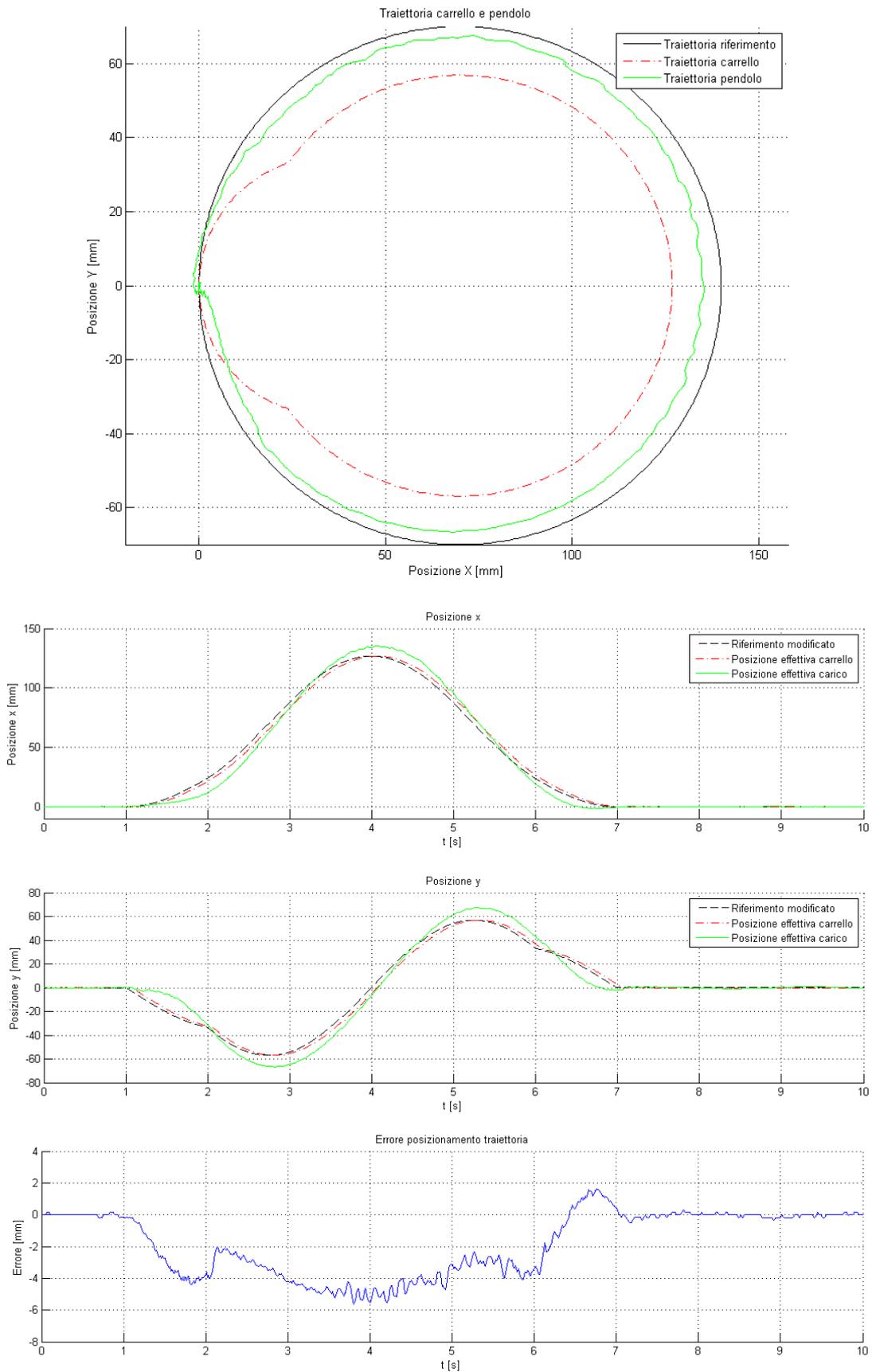
Una prova analoga alla precedente è stata eseguita cambiando la tecnica di shaping a valle del riferimento e passando quindi ad un metodo di modifica più robusto quale il ZVD shaper. L'esecuzione della stessa (Fig. 4.) ha portato evidentemente a risultati molto simili a quelli ottenuti dal modello dinamico. Si osserva infatti una distorsione rilevante del profilo ideale cui si vuole seguire, che comporta un errore altrettanto rilevante di posizionamento del carico, seppur eliminando ogni dinamica oscillatoria del sistema.

I valori che permettono un'analisi quantitativa dell'efficacia degli shaper di queste e delle successive prove, sono riportati in Tabella .

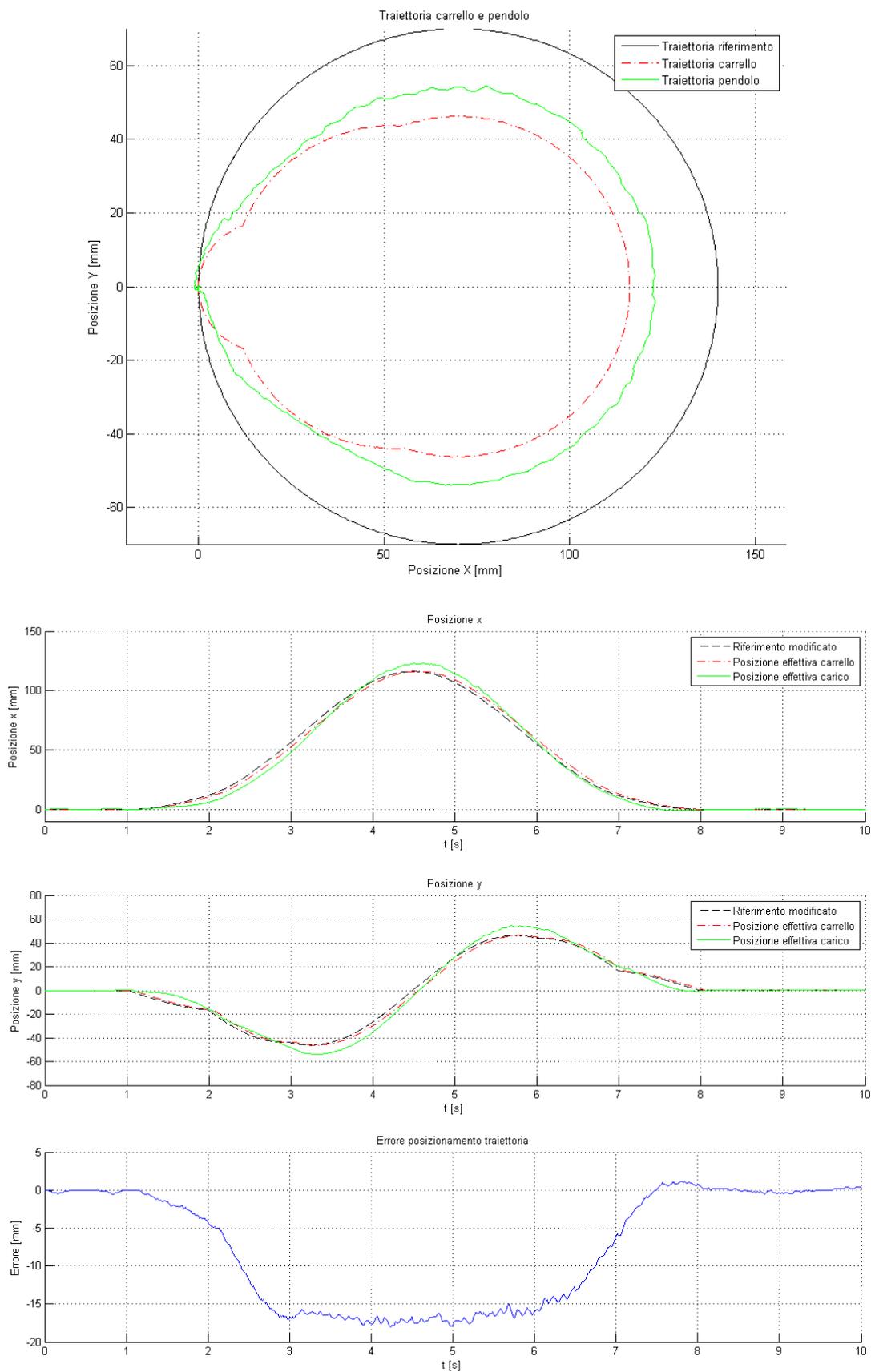
Sono illustrati in Fig. 4., infine, i risultati ottenuti cercando di minimizzare la deviazione standard dell'errore di posizionamento per entrambi gli shaper ZV e ZVD, modificando il raggio della traiettoria circolare di riferimento in modo adeguato. Tali valori di raggio sono stati determinati in modo iterativo e senza l'ausilio di alcun supporto matematico che descrivesse l'andamento dell'errore in funzione dell'aumento del raggio stesso. I valori così ottenuti risultano essere di 73 mm per il riferimento modificato dallo ZV shaper, mentre di 82 mm per quanto riguarda il raggio della circonferenza di riferimento se è modificata dallo ZVD shaper. In questo modo il raggio medio di percorrenza del carico si è spostato in una posizione prossima a quella ideale. Sebbene la traiettoria riscontrata con il filtro ZVD sia visibilmente ancora distorta (tale concetto è facilmente esprimibile osservando il valore della corona di involuppo), si sono comunque riscontrati sensibili miglioramenti in quest'ultima analisi: il raggio medio è molto prossimo a quello ideale e la deviazione standard dell'errore di posizionamento si è ridotta di quasi il 50 % in entrambi i casi.



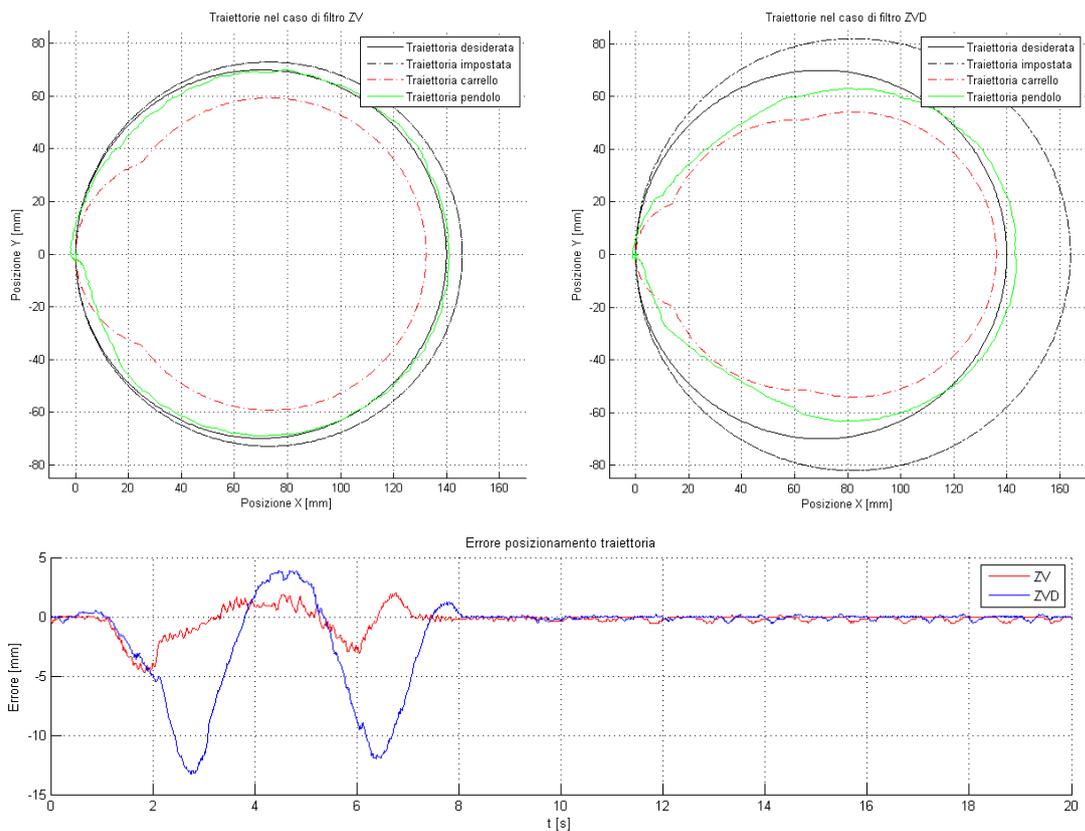
**Fig. 4. Risposta del sistema sperimentale ad una traiettoria circolare con profilo di moto lineare senza il filtraggio del riferimento da uno shaper**



**Fig. 4. Risposta del sistema sperimentale ad una traiettoria circolare con profilo di moto lineare e con filtraggio del riferimento mediante uno ZV shaper**



**Fig. 4. Risposta del sistema sperimentale ad una traiettoria circolare con profilo di moto lineare e con filtraggio del riferimento mediante uno ZVD shaper**



**Fig. 4. Comparazione delle risposte del sistema sperimentale avendo imposto traiettorie di riferimento maggiorate:  $r = 73$  mm per il filtro ZV e  $r = 82$  mm per il filtro ZVD**

**Tabella Comparazione degli errori ottenuti sperimentalmente nell'inseguimento di una traiettoria circolare mediante i metodi ZV e ZVD**

Legge di moto	Profilo ideale	Senza shaper lin.	ZV		ZVD	
			lin.	lin.	lin.	lin.
Raggio rif. [mm]	-	70	70	73	70	82
Raggio min. [mm]	70	44	64	65	52	57
Raggio max. [mm]	70	113	72	72	71	74
Raggio med. [mm]	70	83	69	70	66	69
Inviluppo [mm]	0	68	7	7	19	17
Dev. st. [mm]	0	18	2	1	7	4

## 5. Conclusioni

Il presente lavoro di tesi si è proposto di studiare ed analizzare in simulazione e sperimentalmente l'applicazione delle tecniche di input shaping per il controllo della dinamica oscillatoria di un sistema carro ponte a due e a quattro gradi di libertà.

La conoscenza della risposta del sistema ad un impulso di forza ha permesso la sintesi di una moltitudine di tecniche di input shaping. Sono state analizzate, dunque, le principali di tali tecniche, riportandone le caratteristiche di robustezza e di insensibilità alla presenza di errori nella stima dei parametri che caratterizzano una dinamica oscillatoria, ovvero frequenza e smorzamento. In luogo di una modifica del segnale di forza applicata al carrello, la necessità di dover movimentare accuratamente il carrello, ha reso necessario l'implementazione di una tecnica di controllo in feedback e applicare quindi lo shaping al riferimento di posizione. Si è preso in considerazione il controllore PID, il più noto a livello industriale. Il completamento del quadro per il controllo del carro ponte si è infine chiuso introducendo alcune leggi di moto ottimizzate per compararne l'efficacia con l'input shaping e per analizzarne il simultaneo utilizzo.

L'analisi delle tecniche di input shaping si è focalizzata, in un primo momento, nel verificarne l'efficacia su un segnale di riferimento di forza a gradino applicato al sistema. Tale applicazione permette solamente di constatare l'effettivo funzionamento degli shaper, in quanto riproduce il medesimo segnale di ingresso sul quale è stata basata la teoria per la loro sintesi. Mediante l'analisi dinamica si sono ottenuti infatti i risultati previsti, ovvero valori di oscillazioni residue nulle o pari al valore imposto durante la fase di progetto.

Con l'inserimento del controllore PID, il riferimento generato e successivamente modificato dallo shaper, risulta essere di posizione. In questo caso, l'efficacia della tecnica di modifica del comando, ovvero dell'input shaping, non risulta più essere funzione del solo metodo utilizzato per la modifica stessa, ma derivante dalla somma di molte più variabili, legate anche allo schema di controllo del moto del carrello.

Primi tra tutte sono i guadagni impostati per il controllore PID: si è osservato infatti che le differenze sostanziali ottenute tra le simulazioni con modello dinamico e le prove sperimentali, sono da imputare proprio al modo di interpolare il riferimento con la posizione effettiva del carrello. Mentre nel primo caso è stato possibile impostare guadagni del controllore PID opportunamente elevati così da rendere la risposta del carrello immediata e, quindi, permettere un inseguimento della traiettoria di riferimento quasi perfetto, nel secondo caso non lo è stato. Strettamente collegato a ciò, vi è inoltre il fatto che le accelerazioni e le velocità richieste al riferimento non sempre si è in grado di generarle realmente, essendo esse funzione delle prestazioni dinamiche massime messe a disposizione dal sistema movimentato e dal funzionamento dell'interpolatore. Di conseguenza con profili di moto relativamente ripidi, in cui la prontezza del controllo sul moto del carrello gioca un ruolo fondamentale, l'efficacia dello shaping viene meno.

Tali considerazioni sono state poi utilizzate per effettuare prove di inseguimento di traiettorie planari e si sono analizzati i casi in cui queste siano di forma rettangolare e circolare. L'inserimento di un secondo asse di movimentazione ha reso necessario adottare particolari accorgimenti per fare in modo che la traiettoria inseguita dal carico sia effettivamente quella desiderata. Per quanto riguarda la traiettoria rettangolare la presenza del tempo di modifica del comando, allungando i tempi di percorrenza, obbliga di fatto a creare un segnale di riferimento che preveda l'interposizione di un tempo di sosta adeguato al termine di ogni lato. Inoltre, la presenza di oscillazioni residue al termine di un lato, spesso porta ad un degrado delle prestazioni negli ultimi tratti. Per quanto riguarda invece la traiettoria circolare i problemi derivanti dalla modifica del segnale originale si enfatizzano ancor più in quanto le movimentazioni lungo i due assi non sono più disaccoppiate come accade per il rettangolo. Ne risulterà una distorsione della traiettoria di riferimento tanto maggiore quanto più alto è il tempo di modifica dello shaper. Nel particolare caso di traiettoria circolare, inoltre, si è osservato che dando come riferimento una circonferenza di pari dimensioni a quella desiderata per il carico, la traiettoria risultante sarà in tutti i casi interna a quella voluta. Un metodo per ridurre tale gap è stato quello di aumentare le dimensioni della circonferenza di base; metodo che però non ha, per ora, sistematicità di applicazione, essendo basato su prove e successive approssimazioni.

L'efficacia dell'input shaping è stata dunque ben dimostrata mediante le simulazioni nel modello dinamico nel caso di moto unidirezionale a patto di garantire condizioni iniziali quasi nulle, ma trova alcune limitazioni nelle applicazioni reali e soprattutto nei casi di implementazione per l'inseguimento di traiettorie planari. L'utilizzo di tecniche di controllo del carico di tipo ibrido feedforward (Input shaping) più feedback (basate sulla misura o stima della posizione del carico) rappresentano quindi la naturale evoluzione dell'input shaping, allo stato attuale solo parzialmente discussa in letteratura.



## Appendice A: Leggi di moto

Le leggi di moto qui riportate sono state ricavate dalle note leggi ottimizzate per ricavare i profili delle camme [4].

Lo spazio percorso è funzione del tempo,  $s = f(t)$ , secondo le equazioni descritte per ciascun profilo di moto. La simbologia introdotta comprende:

- $t$  tempo adimensionale  $0 \leq t \leq 1$
- $s$  spazio adimensionale
- $s' = \frac{\partial s}{\partial t}$  velocità adimensionale
- $s'' = \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$  accelerazione adimensionale

La procedura per il calcolo di un generico profilo di moto consiste essenzialmente di tre passi.

Nel primo ci si calcola i valori di tempo adimensionali  $t$  di ciascun istante  $t_r$  avendo noti gli istanti iniziali  $T_i$  e finali  $T_f$ :

$$t = \frac{t_r - T_i}{T_f - T_i} \quad (\text{A.1})$$

Successivamente ci si determina lo spazio adimensionale  $s$  secondo il profilo di moto desiderato:

$$s = f(t) \quad (\text{A.2})$$

ed infine ci si ricava la posizione  $x_r$  effettiva a partire dalle posizioni iniziali  $X_i$  e finali  $X_f$  secondo una relazione analoga alla (A.1) ma invertita:

$$x_r = X_i + s(X_f - X_i) \quad (\text{A.3})$$

Le velocità e le accelerazioni reali, per derivazione, corrispondono a quelle adimensionali moltiplicate per il fattore  $(X_f - X_i)$ .

Le leggi di moto implementate per lo svolgimento della tesi sono le seguenti:

### Lineare

$$s = t$$

$$s' = 1$$

$$s'' = 0$$

### Cicloidale

$$s = \frac{1}{\pi} \left[ \pi t - \frac{1}{2} \sin(2\pi t) \right]$$

$$s' = 1 - \cos(2\pi t)$$

$$s'' = 2\pi \sin(2\pi t)$$

### Polinomiale 5° grado

$$s = 10t^3 - 15t^4 + 6t^5$$

$$s' = 30t^2 - 60t^3 + 30t^4$$

$$s'' = 60t - 180t^2 + 120t^3$$

### Polinomiale 9° grado

$$s = 126t^5 - 420t^6 + 540t^7 - 315t^8 + 70t^9$$

$$s' = 630t^4 - 2520t^5 + 3780t^6 - 2520t^7 + 630t^8$$

$$s'' = 2520t^3 - 12600t^4 + 22680t^5 - 17640t^6 + 5040t^7$$

### Armonica di Gutman (1-3)

$$s = t - \frac{15}{32\pi} \sin(2\pi t) - \frac{1}{96\pi} \sin(6\pi t)$$

$$s' = 1 - \frac{15}{16} \cos(2\pi t) - \frac{1}{16} \cos(6\pi t)$$

$$s'' = \frac{15\pi}{8} \sin(2\pi t) - \frac{3\pi}{8} \sin(6\pi t)$$

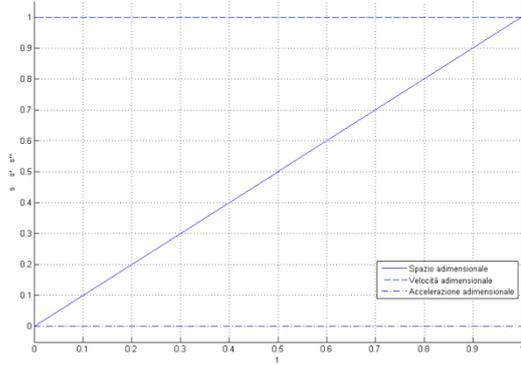
### Armonica di Freudenstein (1-3-5)

$$s = t - \frac{1125}{2384\pi} \left[ \sin(2\pi t) + \frac{1}{54} \sin(6\pi t) + \frac{1}{1250} \sin(10\pi t) \right]$$

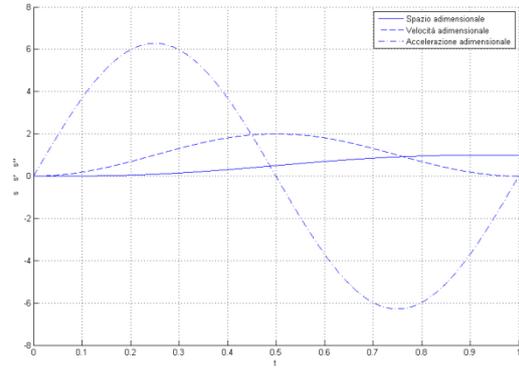
$$s' = 1 - \frac{1125}{1192} \left[ \cos(2\pi t) + \frac{1}{18} \cos(6\pi t) + \frac{1}{250} \cos(10\pi t) \right]$$

$$s'' = \frac{1125\pi}{596} \left[ \sin(2\pi t) + \frac{1}{6} \sin(6\pi t) + \frac{1}{50} \sin(10\pi t) \right]$$

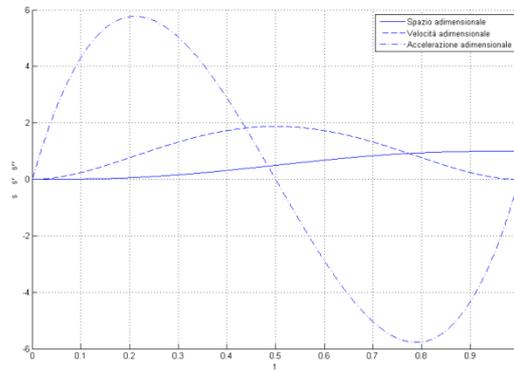
In seguito si riportano gli andamenti delle posizioni, velocità e accelerazioni adimensionali



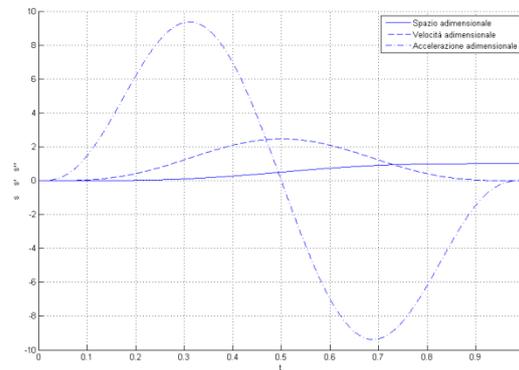
- Lineare



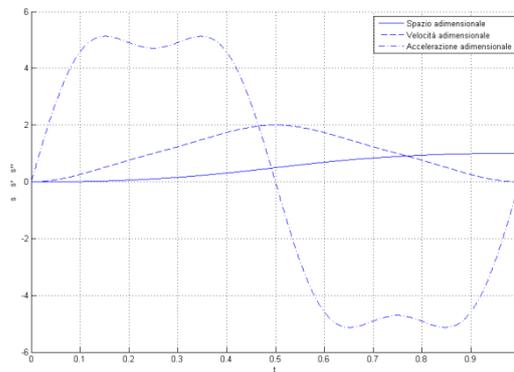
- Cicloidale



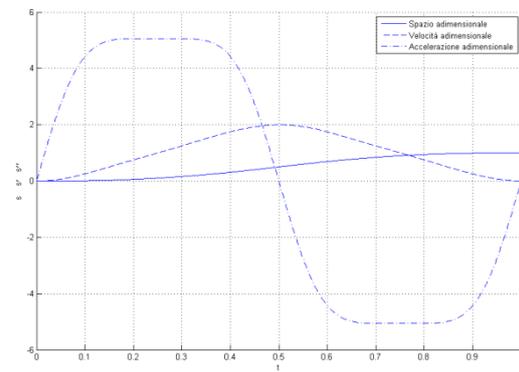
- Polinomiale 5° grado



- Polinomiale 9° grado



- Armonica di Gutman



- Armonica di Freudenstein



## Bibliografia

- [1] J. Vaughan, A. Yano and W. Singhose, "Comparison of robust input shapers," *Journal of Sound and Vibration*, pp. 797-815, 2008.
- [2] N. Capobianco, «Controllori PID».
- [3] W. Singhose and N. Singer, "Effects of Input Shaping on Two-Dimensional Trajectory Following," *Ieee transactions on robotics and automation*, vol. 12, no. 6, pp. 881-887, December 1996.
- [4] M. Turci, «Leggi di moto per meccanismi a camme,» Studio Tecnico Turci, [Online]. Available: <http://xoomer.virgilio.it/camma/camme.htm>.
- [5] S. Tarunrj and W. Singhose, "Tutorial on Input Shaping/Time Delay Control of Maneuvering Flexible Structures".
- [6] J. R. Huey, *The Intelligent Combination of Input Shaping and PID Feedback Control*, 2006, p. 320.
- [7] M. Kenison e W. Singhose, «Concurrent design of input shaping and feedback control for insensitivity to parameter variations,» pp. 372-377.
- [8] M. Kenison e W. Singhose, «Concurrent Design of Input Shaping and Proportional Plus Derivative Feedback Control,» *Journal of Dynamic System, Measurement, and Control*, vol. 124, pp. 398-405, September 2002.
- [9] G. Pelàez, G. Pelaez, J. M. Perez, A. Vizàn and E. Bautista, "Input shaping reference commands for trajectory following Cartesian machines," *Control Engineering Practice*, vol. 13, pp. 941-958, September 2003.
- [10] W. Singhose, A. Shenouda and M. Kontz, "Advanced Control System Design and Implementation," 2003.
- [11] W. Singhose e N. Singer, «Initial Investigation into the Effects of Input Shaping on Trajectory Following».