Scuola di Scienze

Dipartimento di Matematica

Laurea in Matematica

Soluzione numerica di equazioni integrali di Fredholm su domini poligonali

Relatore

Prof. Alvise Sommariva

Laureando

Riccardo Cazzin

Matricola 1201725

Anno Accademico 2022–2023

Scuola di Scienze

Dipartimento di Matematica

Laurea in Matematica

Soluzione numerica di equazioni integrali di Fredholm su domini poligonali

Relatore

Prof. Alvise Sommariva

Laureando

Riccardo Cazzin

Matricola 1201725

Anno Accademico 2022–2023

Ad Ireneo e Luciano.

Indice

Introduzione

Il proposito di questa tesi è studiare equazioni integrali di Fredholm di seconda specie su domini bivariati di natura poligonale D. Questo tema è parzialmente sviluppato nel cap. 5 della classica monografia di Atkinson *The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind*, ovvero *Multivariable interpolation and numerical integration*. In esso sono utilizzate formule di quadratura con basso grado di precisione. Tali formule sono a pesi positivi e nodi interni al dominio; formule di questo tipo prendono talvolta il nome di PI-*type*.

Recentemente, A. L. Laguardia e M. G. Russo hanno presentato il lavoro *Numerical methods for 2D linear Fredholm integral equations on curvilinear polygons*, in cui si studia il problema su poligoni curvilinei, ma con formule di cubatura aventi solo in certi casi pesi positivi e nodi interni al dominio. In questa tesi, il dominio su cui è definito il problema è poligonale e, quindi, più semplice *a priori* rispetto a quanto trattato da Laguardia e Russo.

Differentemente da quanto descritto da Atkinson, le formule di quadratura possono avere un grado di precisione maggiore, pur restando di PI-*type*. La loro cardinalità, inoltre, può essere ridotta utilizzando un algoritmo di compressione. Se si effettua questa scelta, il sistema lineare richiesto dal metodo di Nyström ha ordine inferiore, il che offre vantaggi computazionali.

Dopo una prima introduzione a risultati classici delle equazioni integrali di Fredholm di seconda specie, si presentano le peculiarità del metodo di Nyström e alcuni classici teoremi di convergenza.

Di seguito, si descrive come calcolare le formule di cubatura sopra menzionate e le si utilizza per risolvere equazioni di Fredholm di seconda specie su un dominio concavo, uno non semplice (ovvero con bordo avente autointersezioni) ed uno perfino non semplicemente connesso. Si pone attenzione particolare sul vantaggio computazionale nel caso in cui il dominio poligonale abbia un gran numero di lati.

I codici MATLAB utilizzati sono rilasciati con licenza *open-source* GPL 2.0 e disponibili in una *repository* ospitata su *GitHub* [30].

1

Risultati sulle equazioni integrali

1.1 Notazioni ed esempi

In letteratura, col termine *equazione integrale* si indica un particolare tipo di equazione in cui risulta incognita una funzione all'interno di un'integranda di cui si conosce l'integrale sopra un certo insieme [v. 26, p. 1].

Le equazioni integrali sono spesso una formulazione alternativa di problemi con dato iniziale, come ad esempio i problemi di Cauchy, e problemi con dato al bordo espressi come equazioni differenziali. In particolare, le equazioni integrali sono spesso riformulazioni di problemi con dato al bordo ellittici [3, §4].

Questo scritto è incentrato sulle *equazioni integrali di Fredholm del secondo tipo*, che hanno come forma generale

$$\lambda x(t) - \int_D K(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s = y(t), \qquad t \in D,\ \lambda \neq 0 \tag{1.1}$$

con $D \subseteq \mathbb{R}^m$ chiuso e limitato e $m \in \mathbb{N}^*$; si suppone che la funzione nucleo K sia assolutamente integrabile.

Tipicamente la funzione $K\colon D \times D \to \mathbb{R}$ è chiamata *funzione nucleo*, mentre $y\colon D \to \mathbb{R}$ è chiamata *termine noto*. Entrambi sono dati del problema.

Esempio 1.1. Considerata l'equazione integrale

$$x(t) = \int_0^1 |t-s|\,x(s)\,\mathrm{d}s + y(t), \qquad t \in [\,0,1\,]$$

la funzione nucleo è $K(t,s) = |t-s|$, mentre il termine noto $y(t)$ è una funzione fornita dal problema.

Esempio 1.2. Posto $D = [\,0,1\,] \times [\,0,1\,]$, l'equazione

$$2x(t_1,t_2) - \int_D \mathrm{e}^{s_1 s_2 t_1 t_2} x(s_1,s_2)\,\mathrm{d}s_1\,\mathrm{d}s_2 = \frac{2(1-\mathrm{e}^{t_1 t_2} + t_1 t_2 + t_1^3 t_2^2 + t_1^2 t_2^3)}{t_1^2 t_2^2}$$

con $(s_1,s_2) \in D$ e $(t_1,t_2) \in D$ è un'equazione integrale di Fredholm del secondo tipo, che ammette come soluzione $x(t_1,t_2) = t_1 + t_2$.

Se y non è identicamente nulla, l'unica incognita dell'equazione è la funzione x, mentre $\lambda \in \mathbb{C}$ è un dato del problema. Se, invece, $y \equiv 0$, ossia qualora l'equazione sia *omogenea*, allora anche λ è un'incognita del problema; in tal caso, l'equazione diventa un problema di autovalori.

Come accennato in precedenza, lo studio di equazioni integrali è spesso collegato a quello di alcuni problemi di natura differenziale. Riformulare tali problemi può condurre a risultati teorici di esistenza e unicità della soluzione. L'Esempio seguente è un caso elementare di tale situazione.

Esempio 1.3 ([26, pp. 13–14, 29, p. 4])**.** Si consideri il problema con dato al bordo

$$\begin{cases} x''(t) = F(t,x(t)) & t \in (\,0,1\,) \\ x(0) = x_0 \\ x(1) = x_1 \end{cases}$$

ove F è continua. Integrando una volta, si trova

$$x'(t) = \int_0^t F(s,x(s))\,\mathrm{d}s + A, \qquad t \in [\,0,1\,]$$

e, integrando nuovamente, si ottiene

$$x(t) = \int_0^t \int_0^s F(u,x(u))\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}s + At + x_0 = \int_0^t (t-s)F(s,x(s))\,\mathrm{d}s + At + x_0$$

con A scelto di modo che $x(1) = x_1$, ossia

$$A = x_1 - x_0 - \int_0^1 (1-s)F(s,x(s))\,\mathrm{d}s$$

Ciò permette di affermare che

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t (t-s)F(s,x(s))\,\mathrm{d}s - t\int_0^1 (1-s)F(s,x(s))\,\mathrm{d}s + (x_1-x_0)t + x_0 \\ &= -\int_0^t s(1-t)F(s,x(s))\,\mathrm{d}s - \int_t^1 t(1-s)F(s,x(s))\,\mathrm{d}s + (x_1-x_0)t + x_0 \end{aligned}$$

e, semplificando la notazione,

$$x(t) = -\int_0^1 K(t,s)F(s,x(s))\,\mathrm{d}s + (x_1-x_0)t + x_0$$

con

$$K(t,s) = \begin{cases} s(1-t) & s \le t \\ t(1-s) & t \le s \end{cases}$$

Se si pone $F(t,x(t)) = -\varphi x(t)$, l'equazione diventa

$$x(t) = \varphi\int_0^1 K(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s + f(t), \qquad t \in [\,0,1\,]$$

con $f(t) = (x_1-x_0)t + x_0$. Posto $\lambda = 1/\varphi$, si ottiene

$$\lambda x(t) - \int_0^1 K(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s = y(t), \qquad t \in [\,0,1\,]$$

con $y = \lambda f$. Questa è un'equazione di Fredholm del secondo tipo, le cui soluzioni sono le stesse dell'equazione differenziale da cui si è partiti.

Esistono altri tipi di equazione integrale non equivalenti a quella presa in esame. Si può trovare una classificazione delle principali tipologie di equazione integrale in Porter e Stirling [26, §1.2] e in Atkinson [6, §1.1].

1.2 Note storiche

Il termine "equazione integrale" fu proposto per la prima volta da Paul Du Bois-Reymond nel 1888 [v. 9, p. 1]. Non si tratta, però, del primo caso di studio di un'equazione integrale: Fourier, nella trattazione delle omonime trasformate, delineò di fatto la soluzione di un'equazione integrale del primo tipo.

Dopo Fourier, furono condotti studi più intenzionali delle equazioni integrali da parte di Abel e Liouville, seppure in casi specifici legati alla fisica matematica. In particolare, nel 1823 Abel si interessò a determinare l'equazione di una curva su un piano reale verticale tale che il tempo impiegato da un punto materiale soggetto alla forza di gravità per percorrere suddetta curva da una certa altezza (positiva) all'asse orizzontale sia una determinata funzione monotona dell'altezza; tale problema può essere scritto come una particolare equazione integrale [v. 11, pp. 7–8].

Lo studio di (1.1) fu inquadrato con la dovuta generalità all'inizio del Novecento da Fredholm e Hilbert e, in seguito, semplificato nella trattazione da Schmidt [v. 32, p. 1]. Fredholm e Hilbert cercarono di ottenere soluzioni partendo da un sistema lineare di forma simile a quella dell'equazione integrale: Fredholm si concentrò sul trovare una strategia risolutiva per tale sistema lineare che potesse essere generalizzata a dimensione infinita; Hilbert, invece, generalizzò il concetto di autovalore ed autovettore in modo da poter scrivere una funzione in termini di autofunzioni del nucleo $K(t, s)$. Schmidt, invece, ripercorse i risultati ottenuti in precedenza operando direttamente sull'equazione integrale e dimostrando alcuni dei risultati con ipotesi meno stringenti rispetto alle trattazioni precedenti. Questi saggi racchiudono alcuni risultati rilevanti in altri ambiti più generali della matematica: nell'opera di Fredholm è contenuto il nucleo del Corollario 1.17; nell'opera di Hilbert si consolida l'uso di autovalori e autofunzioni (nonché l'uso di questi termini in particolare); nell'opera di Schmidt è enunciata la decomposizione a valori singolari per funzioni nucleo non simmetriche.

Nel 1930, Nyström pubblicò [22], in cui notava la formula in (2.3). Per quanto riguarda la risoluzione numerica di (1.1), questa formula di interpolazione era di particolare importanza, perché la sua accuratezza dipende da quella della formula di interpolazione utilizzata per approssimare l'integrale. Si consideri, inoltre, che il periodo di scoperta è precedente all'adozione dei calcolatori digitali: come nota Atkinson [3, pp. 6–7], gli stessi manuali di analisi numerica dalla metà degli anni sessanta in poi furono scritti tenendo conto delle capacità aggiuntive fornite dai *computer*, ossia non evitando più algoritmi che richiedessero la risoluzione di sistemi lineari di dimensione alta per un calcolatore umano.

1.3 Operatori integrali compatti

Prima di trattare di particolari metodi di risoluzione approssimata, occorre innanzitutto verificare con un approccio teorico se sia possibile implementare tali metodi, ovverosia verificare le condizioni per cui esista una soluzione a (1.1), per cui essa sia unica e per cui (cosa di particolare interesse per lo scopo di questo scritto) sia esprimibile come limite di una successione di funzioni ottenute da "approssimazioni" dell'equazione — a livello pratico, se sia possibile approssimare l'integrale al membro di sinistra di (1.1) mediante formule di quadratura.

Definizione 1.4. Dati due spazi vettoriali normati $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$, un operatore lineare $\mathcal{K}\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ si dice *compatto* se l'insieme $\{\, \mathcal{K}x : \|x\|_{\mathcal{X}} \leq 1 \,\}$ ammette chiusura compatta in $\mathcal{Y}$, ossia per ogni successione limitata $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{X}$ la successione $(\mathcal{K}x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ammette una sottosuccessione convergente in $\mathcal{Y}$.

D'ora in avanti, si supporrà che gli spazi normati $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ siano spazi di Banach, ossia siano anche completi.

Fissati $m \in \mathbb{N}^*$ e $D \subseteq \mathbb{R}^m$ chiuso e limitato, definiamo l'operatore $\mathcal{K}\colon \mathcal{C}(D) \to \mathcal{C}(D)$ come

$$\mathcal{K}x(t) \coloneqq \int_D K(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s\,, \qquad t \in D, x \in \mathcal{C}(D) \tag{1.2}$$

con $K\colon D \times D \to \mathbb{R}$. In accordo con quanto fatto in [6], spesso si restringe lo studio di tali operatori integrali a quelli che soddisfano le seguenti proprietà:

- $K(t,\cdot)$ sia integrabile secondo Riemann per ogni $t \in D$;
- definito
  $$\omega(h) \coloneqq \max_{t,\tau\in D} \max_{|t-\tau|\leq h} \int_D |K(t,s) - K(\tau,s)|\,\mathrm{d}s$$
  la funzione K verifichi
  $$\lim_{h\to 0} \omega(h) = 0 \tag{K1}$$
- la funzione K verifichi
  $$\max_{t\in D} \int_D |K(t,s)|\,\mathrm{d}s < +\infty \tag{K2}$$

Da (K1) segue che, se x è una funzione limitata e integrabile, allora $\mathcal{K}x$ è una funzione continua, che verifica

$$|\mathcal{K}x(t) - \mathcal{K}x(\tau)| \leq \omega(|t-\tau|)\|x\|_\infty$$

Per (K2), poi, $\mathcal{K}$ è limitato e

$$\|\mathcal{K}\| = \max_{t \in D} \int_D |K(t,s)| \,\mathrm{d}s < +\infty \tag{1.3}$$

Definito $S := \{\, \mathcal{K}x : x \in \mathcal{C}(D), \|x\|_\infty \leq 1 \,\}$, poiché $\|\mathcal{K}x\|_\infty \leq \|\mathcal{K}\| \, \|x\|_\infty \leq \|\mathcal{K}\|$, si può affermare che S è un insieme uniformemente limitato; per quanto visto sopra, poi, S è anche equicontinuo. In base al teorema di Ascoli-Arzelà, S ammette chiusura compatta in $\mathcal{C}(D)$, perciò $\mathcal{K}$ è un operatore compatto.

Una funzione nucleo K che sia continua su $D \times D$ soddisfa certamente le proprietà (K1) e (K2) ed è anche integrabile secondo Riemann relativamente alla seconda variabile.

Definizione 1.5. Dati due spazi vettoriali $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$, un operatore lineare $\mathcal{K}\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ è *a rango finito* se l'immagine $\mathcal{K}(\mathcal{X})$ ha dimensione finita.

Lemma 1.6. *Dati due spazi normati $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$, se $\mathcal{K}\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ è un operatore lineare limitato e a rango finito, allora è compatto.*

Dimostrazione. Poiché lo spazio normato $R = \mathcal{K}(\mathcal{X}) \leq \mathcal{Y}$ ha dimensione finita, esso è completo. L'insieme $\{\, \mathcal{K}x : \|x\|_\mathcal{X} \leq 1 \,\} \subseteq R$, poi, è limitato, perché $\|\mathcal{K}x\|_\mathcal{Y} \leq \|\mathcal{K}\| \, \|x\|_\mathcal{X} \leq \|\mathcal{K}\|$; da ciò segue, in base al teorema di Heine-Borel, che tale insieme ammette chiusura compatta in R. □

Dati due spazi di Banach $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$, si indichi con $L[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$ lo spazio di Banach degli operatori lineari e limitati $\mathcal{X} \to \mathcal{Y}$.

Lemma 1.7. *Dati tre spazi di Banach $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ e $\mathcal{Z}$, se $\mathcal{K} \in L[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$, $\mathcal{L} \in L[\mathcal{Y}, \mathcal{Z}]$ e almeno uno tra $\mathcal{K}$ e $\mathcal{L}$ è compatto, allora $\mathcal{L}\mathcal{K}$ è compatto come operatore $\mathcal{X} \to \mathcal{Z}$.*

Dimostrazione. Sia che sia compatto $\mathcal{K}$ sia che lo sia $\mathcal{L}$, occorre dimostrare che l'insieme $\{\, \mathcal{L}\mathcal{K}x : \|x\|_\mathcal{X} \leq 1 \,\}$ ammette chiusura compatta.

- Se $\mathcal{K}$ è compatto, allora $S_{\mathcal{K}} = \{\, \mathcal{K}x : \|x\|_{\mathcal{X}} \leq 1 \,\}$ ammette chiusura compatta. Poiché $\mathcal{L}$ è lineare e limitata, essa è anche continua; per ogni $Z \subseteq \mathcal{Y}$ compatto, dunque, $\mathcal{L}(Z)$ è compatto. In particolare, $\mathcal{L}(S_{\mathcal{K}})$ ammette chiusura compatta.
- Se $\mathcal{L}$ è compatto, allora $\mathcal{L}(Z)$ ammette chiusura compatta per ogni $Z \subseteq \mathcal{Y}$ limitato. Dato che $S_{\mathcal{K}}$ è limitato per ipotesi, $\mathcal{L}(S_{\mathcal{K}})$ ammette chiusura compatta. □

Lemma 1.8 (Riesz)**.** *Dati $\alpha \in (\,0, 1\,)$ e uno spazio normato $\mathcal{X}$, se $U \subset \mathcal{X}$ è un sottospazio chiuso, allora esiste $x \in \mathcal{X}$ tale che $\|x\| = 1$ e $\|x - y\| \geq \alpha$ per ogni $y \in U$.*

Dimostrazione. Dato che $U \neq \mathcal{X}$, esiste $f \in \mathcal{X} \setminus U$; poiché U è chiuso, si trova

$$\beta \coloneqq \inf_{y \in U} \|f - y\| > 0$$

È possibile, dunque, scegliere $g \in U$ tale che

$$\beta \leq \|f - g\| \leq \frac{\beta}{\alpha}$$

Posto

$$x \coloneqq \frac{f - g}{\|f - g\|}$$

è chiaro che $\|x\| = 1$ e che, scelto un qualunque $y \in U$, vale

$$\|x - y\| = \frac{1}{\|f - g\|} \|f - (g + \|f - g\| y)\| \geq \frac{\beta}{\|f - g\|} \geq \alpha$$

perché $g + \|f - g\| y \in U$. □

Lemma 1.9. *L'identità su uno spazio normato $\mathbf{1} \colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ è un operatore compatto se e solo se $\mathcal{X}$ è di dimensione finita.*

Dimostrazione. Si supponga che $\mathbf{1}$ sia compatto, ma $\mathcal{X}$ sia di dimensione infinita. Scelto $x_1 \in \mathcal{X}$ con $\|x_1\| = 1$, l'insieme $U_1 \coloneqq \langle x_1 \rangle$ è un sottospazio di dimensione finita (quindi chiuso) di $\mathcal{X}$. Per il Lemma 1.8 esiste $x_2 \in \mathcal{X}$ con $\|x_2\| = 1$ e $\|x_2 - x_1\| \geq 1/2$.

Iterando il procedimento di cui sopra sulla base del Lemma 1.8, si può costruire una successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{X}$ tale che $\|x_n\| = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}^*$ e $\|x_n - x_m\| \geq 1/2$ per ogni $n, m \in \mathbb{N}^*$ distinti. Ciò significa che $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ è una successione limitata e priva di una sottosuccessione convergente, il che contraddice la compattezza di $\mathbf{1}$.

L'altra implicazione è un caso particolare del Lemma 1.6. □

1.4 Alternativa di Fredholm

La nozione di operatore lineare compatto su uno spazio normato permette di impostare una teoria di base per discutere di un'equazione operatoriale del secondo tipo, che Kress [18, p. 33] indica come una generalizzazione della (1.1) compiuta da Riesz. Dato uno spazio normato $\mathcal{X}$ e dato $y \in \mathcal{X}$, si consideri l'equazione

$$x - \mathcal{K}x = y \tag{1.4}$$

con $\mathcal{K}\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ operatore lineare compatto e incognita $x \in \mathcal{X}$.

D'ora in avanti in questa § si porrà $\mathcal{L} = \mathbf{1} - \mathcal{K}$, se non diversamente specificato.

Proposizione 1.10 (primo teorema di Riesz). *Dato un operatore lineare compatto $\mathcal{K}\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, l'insieme*

$$\ker \mathcal{L} = \{\, x \in \mathcal{X} : \mathcal{L}x = 0_{\mathcal{X}} \,\}$$

è un sottospazio di $\mathcal{X}$ di dimensione finita.

Dimostrazione. Considerata una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{X}$ tale che $\mathcal{L}x_n = 0_{\mathcal{X}}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $x_n \to x$ per $n \to \infty$, si verifica $\mathcal{L}x = 0_{\mathcal{X}}$. Da ciò segue che $\ker \mathcal{L}$ è un chiuso di $\mathcal{X}$.

Scelto $x \in \ker \mathcal{L}$, esso verifica $\mathcal{K}x = x$, perciò $\mathcal{K}_{|\ker \mathcal{L}} = \mathbf{1}_{\ker \mathcal{L}}$. Poiché l'operatore $\mathcal{K}$ è compatto su $\mathcal{X}$, lo è anche su $\ker \mathcal{L}$, perché quest'ultimo è chiuso. La conclusione segue dal Lemma 1.9. □

Definizione 1.11. Dato uno spazio normato $\mathcal{X}$, siano $U \subseteq \mathcal{X}$ e $y \in \mathcal{X}$. Si dice che $x \in U$ è *di migliore approssimazione per y rispetto a U* se verifica

$$\|x - y\| = \inf_{u \in U} \|u - y\|$$

Lemma 1.12. *Dato uno spazio normato $\mathcal{X}$, se U è un sottospazio di dimensione finita di $\mathcal{X}$, allora per ogni $y \in \mathcal{X}$ esiste un elemento di miglior approssimazione rispetto a U.*

Dimostrazione. Scelto $y \in \mathcal{X}$, si consideri una successione $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq U$ tale che

$$\|y - u_n\| \xrightarrow{n\to\infty} d := \inf_{u\in U} \|y - u\|$$

Poiché $\|u_n\| \leq \|y - u_n\| + \|y\|$, la successione $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata. Dato che U è di dimensione finita, è chiuso, perciò per il teorema di Bolzano-Weierstrass la successione $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ammette una sottosuccessione $(u_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente a un punto $x \in U$. Da ciò segue che

$$\|y - x\| = \lim_{k\to\infty} \left\|y - u_{n(k)}\right\| = d$$

come si voelva. □

Proposizione 1.13 (secondo teorema di Riesz)**.** *Dato un operatore lineare compatto* $\mathcal{K}\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}$*, l'insieme*

$$\operatorname{Im} \mathcal{L} = \{\, \mathcal{L}x : x \in \mathcal{X} \,\}$$

è un sottospazio chiuso di $\mathcal{X}$*.*

Dimostrazione. È ovvio che l'immagine di $\mathcal{L}$ sia un sottospazio di $\mathcal{X}$.

Scelto $y \in \overline{\operatorname{Im} \mathcal{L}}$, esiste una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{X}$ tale che $\mathcal{L}x_n \to y$ per $n \to \infty$. In base al Lemma 1.12, per ogni x_n esiste un elemento di miglior approssimazione ξ_n rispetto a $\ker \mathcal{L}$, ossia tale che

$$\|x_n - \xi_n\| = \inf_{\xi\in\ker\mathcal{L}} \|x_n - \xi\|$$

Si definisca la successione $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tramite

$$z_n := x_n - \xi_n, \qquad n \in \mathbb{N}$$

Supponendo che $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sia illimitata, esiste una sottosuccessione $(z_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ tale che $\left\|z_{n(k)}\right\| \geq k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Si ponga, poi,

$$\zeta_k := \frac{z_{n(k)}}{\left\|z_{n(k)}\right\|}, \qquad k \in \mathbb{N}$$

Poiché $\|\zeta_k\| = 1$ e $\mathcal{K}$ è compatto, esiste una sottosuccessione $(\zeta_{k(j)})_{j\in\mathbb{N}} \subseteq (\zeta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ che verifichi

$$\mathcal{K}\zeta_{k(j)} \xrightarrow{j\to\infty} \zeta \in \mathcal{X}$$

Dato che $(\mathcal{L}x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione convergente, quindi limitata, si trova anche

$$\|\mathcal{L}\zeta_k\| = \frac{\left\|\mathcal{L}z_{n(k)}\right\|}{\left\|z_{n(k)}\right\|} \leq \frac{\left\|\mathcal{L}z_{n(k)}\right\|}{k} \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

e ciò implica che $\lim_{j\to\infty} \mathcal{L}\zeta_{k(j)} = 0$. Si è, dunque, ottenuto

$$\zeta_{k(j)} = \mathcal{L}\zeta_{k(j)} + \mathcal{K}\zeta_{k(j)} \xrightarrow{j\to\infty} \zeta$$

e, visto che $\mathcal{L}$ è limitata, dalle ultime due considerazioni si conclude che $\mathcal{L}\zeta = 0_{\mathcal{X}}$. Dal momento che, però, $\xi_{n(k)} + \left\|z_{n(k)}\zeta \in \ker\mathcal{L}\right\|$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, si trova

$$\begin{aligned}\|\zeta_k - \zeta\| &= \frac{1}{\left\|z_{n(k)}\right\|}\left\|x_{n(k)} - \left(\xi_{n(k)} + \left\|z_{n(k)}\zeta\right\|\right)\right\| \\ &\geq \frac{1}{\left\|z_{n(k)}\right\|} \inf_{\xi\in\ker\mathcal{L}} \left\|x_{n(k)} - \xi\right\| = \frac{\left\|x_{n(k)} - \xi_{n(k)}\right\|}{\left\|z_{n(k)}\right\|} = 1\end{aligned}$$

il che contraddice l'affermazione $\lim_{j\to\infty} \zeta_{k(j)} = \zeta$ fatta precedentemente.

Sulla base di ciò, si può affermare che la successione $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata. Poiché $\mathcal{K}$ è compatto, è possibile estrarre una sottosuccessione $(z_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}} \subseteq (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $(\mathcal{K}z_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converga per $k \to \infty$. Visto che $\lim_{k\to\infty} \mathcal{L}z_{n(k)} = y$, da $z_{n(k)} = \mathcal{L}z_{n(k)} + \mathcal{K}z_{n(k)}$ segue che $\lim_{k\to\infty} z_{n(k)} = z \in \mathcal{X}$, ma anche $\lim_{k\to\infty} \mathcal{L}z_{n(k)} = \mathcal{L}z \in \mathcal{X}$, perciò $y = \mathcal{L}z \in \operatorname{Im}\mathcal{L}$.

Ciò dimostra che $\operatorname{Im}\mathcal{L} = \overline{\operatorname{Im}\mathcal{L}}$. □

Osservazione 1.14. Dato $n \in \mathbb{N}^*$, l'operatore iterato $\mathcal{L}^n$ si può scrivere nella forma

$$\mathcal{L}^n = (\mathbf{1} - \mathcal{K})^n = \mathbf{1} - \mathcal{K}_n$$

con

$$\mathcal{K}_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \mathcal{K}^k$$

Per il Lemma 1.7 e per il fatto che combinazioni lineari di operatori lineari compatti sono a loro volta operatori compatti [v. 13, p. 47, 18, p. 26], i $\mathcal{K}_n$ sono operatori lineari compatti. Ciò significa che, per le Proposizioni 1.10 e 1.13, i nuclei $\ker\mathcal{L}^n$ sono sottospazi di dimensione finita e le immagini $\operatorname{Im}\mathcal{L}^n$ sono sottospazi chiusi.

Proposizione 1.15 (terzo teorema di Riesz)**.** *Per ogni operatore lineare compatto* $\mathcal{K}\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ *esiste uno e un solo* $r \in \mathbb{N}$ *tale che*

$$\langle 0_{\mathcal{X}} \rangle = \ker \mathcal{L}^0 \subset \ker \mathcal{L} \subset \cdots \subset \ker \mathcal{L}^r = \ker \mathcal{L}^{r+1} = \cdots \tag{1.5a}$$

$$\mathcal{X} = \operatorname{Im} \mathcal{L}^0 \supset \operatorname{Im} \mathcal{L} \supset \cdots \supset \operatorname{Im} \mathcal{L}^r = \operatorname{Im} \mathcal{L}^{r+1} = \cdots \tag{1.5b}$$

Per ogni $x \in \mathcal{X}$*, poi, esistono unici* $y \in \operatorname{Im} \mathcal{L}^r$ *e* $z \in \ker \mathcal{L}^r$ *tali che* $x = y + z$*, ovverosia* $\mathcal{X} = \ker \mathcal{L}^r \oplus \operatorname{Im} \mathcal{L}^r$*.*

Dimostrazione. Dato $x \in \ker \mathcal{L}^n$, esso verifica $\mathcal{L}^{n+1}x = \mathcal{L}(\mathcal{L}^n x) = \mathcal{L}0_{\mathcal{X}} = 0_{\mathcal{X}}$. Da ciò segue che $\ker \mathcal{L}^n \subseteq \ker \mathcal{L}^{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Supposto che $\ker \mathcal{L}^n \subset \ker \mathcal{L}^{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, per la Proposizione 1.10 il nucleo $\ker \mathcal{L}^n$ è di dimensione finita, perciò per il Lemma 1.8 esiste $x_n \in \ker \mathcal{L}^{n+1}$ con $\|x_n\| = 1$ e tale che $\|x_n - x\| \geq 1/2$ per ogni $x \in \ker \mathcal{L}^n$. Per $n, m \in \mathbb{N}$ con $n > m$ si consideri $\mathcal{K}x_n - \mathcal{K}x_m = x_n - (x_m + \mathcal{L}x_n - \mathcal{L}x_m)$. Poiché

$$\mathcal{L}^n(x_m + \mathcal{L}x_n - \mathcal{L}x_m) = \mathcal{L}^{n-m-1}\mathcal{L}^{m+1}x_m + \mathcal{L}^{n+1}x_n - \mathcal{L}^{n-m}\mathcal{L}^{m+1}x_m = 0_{\mathcal{X}}$$

si trova $x_m + \mathcal{L}x_n - \mathcal{L}x_m \in \ker \mathcal{L}^n$. Per questo motivo, $\|\mathcal{K}x_n - \mathcal{K}x_m\| \geq 1/2$ per ogni $n > m$, il che significa che la successione $(\mathcal{K}x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non ammette una sottosuccessione convergente — e ciò contraddice la compattezza di $\mathcal{K}$.

Da ciò segue che nella successione $(\ker \mathcal{L}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ esistono due nuclei consecutivi uguali; posto

$$r := \min \left\{ k \in \mathbb{N} : \ker \mathcal{L}^k = \ker \mathcal{L}^{k+1} \right\}$$

occorre dimostrare che $\ker \mathcal{L}^k = \ker \mathcal{L}^{k+1}$ per ogni $k \geq r$. Supponendo di averlo dimostrato per un certo $k \geq r$, per ogni $x \in \ker \mathcal{L}^{k+2}$ si ha $\mathcal{L}^{k+1}\mathcal{L}x = \mathcal{L}^{k+2}x = 0_{\mathcal{X}}$; ciò implica che $\mathcal{L}x \in \ker \mathcal{L}^{k+1} = \ker \mathcal{L}^k$; da ciò segue che $\mathcal{L}^{k+1}x = \mathcal{L}^k\mathcal{L}x = 0_{\mathcal{X}}$, onde $x \in \ker \mathcal{L}^{k+1}$. In base a ciò, si conclude che $\ker \mathcal{L}^{k+2} \subseteq \ker \mathcal{L}^{k+1}$ per $k \geq r$ e, quindi, la (1.5a).

Per ogni $y = \mathcal{L}^{n+1}x \in \operatorname{Im} \mathcal{L}^{n+1}$ è sensato scrivere $y = \mathcal{L}^n\mathcal{L}x$. Da ciò segue che $\operatorname{Im} \mathcal{L}^n \supseteq \operatorname{Im} \mathcal{L}^{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Supposto che $\operatorname{Im} \mathcal{L}^n \supset \operatorname{Im} \mathcal{L}^{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, per la Proposizione 1.13 l'immagine $\operatorname{Im} \mathcal{L}^n$ è un sottospazio chiuso, perciò per il Lemma 1.8 esiste $y_n \in \operatorname{Im} \mathcal{L}^n$ con $\|y_n\| = 1$ e tale che $\|y_n - y\| \geq 1/2$ per ogni $y \in \operatorname{Im} \mathcal{L}^{n+1}$. Scritto $y_n = \mathcal{L}^n x_n$, per ogni $m, n \in \mathbb{N}$ con $m > n$ si consideri

$\mathcal{K}y_n - \mathcal{K}y_m = y_n - (y_m + \mathcal{L}y_n - \mathcal{L}y_m)$. Poiché

$$y_m + \mathcal{L}y_n - \mathcal{L}y_m = \mathcal{L}^{n+1}\big(\mathcal{L}^{m-n-1}x_m + x_n - \mathcal{L}^{m-n}x_m\big)$$

si trova $y_m + \mathcal{L}y_n - \mathcal{L}y_m \in \operatorname{Im}\mathcal{L}^{n+1}$. Per questo motivo, $\|\mathcal{K}y_n - \mathcal{K}y_m\| \geq 1/2$ per ogni $m > n$, cosa che porta a una conclusione analoga a quella di cui sopra.

Da ciò segue che nella successione $(\operatorname{Im}\mathcal{L}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ esistono due immagini consecutive uguali; posto

$$q := \min\left\{\, k \in \mathbb{N} : \operatorname{Im}\mathcal{L}^k = \operatorname{Im}\mathcal{L}^{k+1} \,\right\}$$

occorre dimostrare che $\operatorname{Im}\mathcal{L}^k = \operatorname{Im}\mathcal{L}^{k+1}$ per ogni $k \geq q$. Supponendo di averlo dimostrato per un certo $k \geq q$, per ogni $y = \mathcal{L}^{k+1}x \in \operatorname{Im}\mathcal{L}^{k+1}$ si può scrivere $\mathcal{L}^k x = \mathcal{L}^{k+1}\xi$, perché $\operatorname{Im}\mathcal{L}^k = \operatorname{Im}\mathcal{L}^{k+1}$; da ciò segue che $y = \mathcal{L}^{k+2}\xi \in \operatorname{Im}\mathcal{L}^{k+2}$, ossia $\operatorname{Im}\mathcal{L}^{k+1} \subseteq \operatorname{Im}\mathcal{L}^{k+2}$. Sulla base di ciò, si è dimostrato che esiste $q \in \mathbb{N}$ tale che

$$\mathcal{X} = \operatorname{Im}\mathcal{L}^0 \supset \operatorname{Im}\mathcal{L} \supset \cdots \supset \operatorname{Im}\mathcal{L}^q = \operatorname{Im}\mathcal{L}^{q+1} = \cdots$$

Affinché sia verificata anche la (1.5b), occorre che $r = q$. Supposto $r > q$, si consideri $x \in \ker\mathcal{L}^r$. Dato che $\mathcal{L}^{r-1}x \in \operatorname{Im}\mathcal{L}^{r-1} = \operatorname{Im}\mathcal{L}^r$, esiste $\xi \in \mathcal{X}$ tale che $\mathcal{L}^{r-1}x = \mathcal{L}^r\xi$. Da $\mathcal{L}^{r+1}\xi = \mathcal{L}^r x = 0_{\mathcal{X}}$ segue che $\xi \in \ker\mathcal{L}^{r+1} = \ker\mathcal{L}^r$, ossia $\mathcal{L}^{r-1}x = \mathcal{L}^r\xi = 0_{\mathcal{X}}$. Ciò implica che $x \in \ker\mathcal{L}^{r-1}$ e, quindi, $\ker\mathcal{L}^{r-1} = \ker\mathcal{L}^r$ — in contraddizione con la scelta minima di r effettuata per definizione. Supposto invece $r < q$, sia $y = \mathcal{L}^{q-1}x \in \operatorname{Im}\mathcal{L}^{q-1}$. Poiché $\mathcal{L}y = \mathcal{L}^q x \in \operatorname{Im}\mathcal{L}^q = \operatorname{Im}\mathcal{L}^{q+1}$, esiste $\xi \in \mathcal{X}$ tale che $\mathcal{L}y = \mathcal{L}^{q+1}\xi$. Da ciò segue che $\mathcal{L}^q(x - \mathcal{L}\xi) = \mathcal{L}y - \mathcal{L}^{q+1}\xi = 0_{\mathcal{X}}$ e, quindi, $\mathcal{L}^{q-1}(x - \mathcal{L}\xi) = 0_{\mathcal{X}}$, perché $\ker\mathcal{L}^{q-1} = \ker\mathcal{L}^q$. Ciò implica che $y = \mathcal{L}^q\xi \in \operatorname{Im}\mathcal{L}^q$, ossia $\operatorname{Im}\mathcal{L}^{q-1} = \operatorname{Im}\mathcal{L}^q$ — in contraddizione con la scelta minima di q effettuata per definizione.

Resta da dimostrare la decomposizione di $\mathcal{X}$ come somma diretta di $\ker\mathcal{L}^r$ e $\operatorname{Im}\mathcal{L}^r$. Se $y \in \ker\mathcal{L}^r \cap \operatorname{Im}\mathcal{L}^r$, allora esiste $x \in \mathcal{X}$ tale che $y = \mathcal{L}^r x$ e, inoltre, $\mathcal{L}^r y = 0_{\mathcal{X}}$. Ciò significa che $\mathcal{L}^{2r}x = 0_{\mathcal{X}}$, da cui $x \in \ker\mathcal{L}^{2r} = \ker\mathcal{L}^r$ e, infine, $y = \mathcal{L}^r x = 0_{\mathcal{X}}$. Scelto, poi, $x \in \mathcal{X}$, si ha $\mathcal{L}^r x \in \operatorname{Im}\mathcal{L}^r = \operatorname{Im}\mathcal{L}^{2r}$, perciò esiste $\xi \in \mathcal{X}$ tale che $\mathcal{L}^r x = \mathcal{L}^{2r}\xi$. Definiti $y := \mathcal{L}^r\xi \in \operatorname{Im}\mathcal{L}^r$ e $z := x - y$, si vede che $\mathcal{L}^r z = \mathcal{L}^r x - \mathcal{L}^{2r}\xi = 0_{\mathcal{X}}$, perciò $z \in \ker\mathcal{L}^r$. Si è provata, dunque, la somma diretta $\mathcal{X} = \ker\mathcal{L}^r \oplus \operatorname{Im}\mathcal{L}^r$. □

Teorema 1.16. *Dato uno spazio normato $\mathcal{X}$, sia $\mathcal{K}\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ un operatore lineare compatto. L'operatore $\mathcal{L} = \mathbf{1} - \mathcal{K}$ è iniettivo se e solo se è suriettivo. Se $\mathcal{L}$ è iniettivo,* *allora l'operatore inverso è limitato.*

Dimostrazione. Dalla (1.5a) segue che l'iniettività di $\mathcal{L}$ è equivalente alla condizione $r = 0$; dalla (1.5b) segue che la suriettività di $\mathcal{L}$ è equivalente alla condizione $r = 0$. Ciò dimostra che $\mathcal{L}$ è iniettivo se e solo se è suriettivo.

Resta da dimostrare che $\mathcal{L}^{-1}$ è limitato se $\mathcal{L}$ è iniettivo (in realtà, biiettivo). Supposto che $\mathcal{L}^{-1}$ non sia limitato, esiste una successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{X}$ con $\|f_n\| = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}^*$ e tale che $\|\mathcal{L}^{-1} f_n\| \geq n$ per tali n. Definiti

$$g_n := \frac{f_n}{\|\mathcal{L}^{-1} f_n\|} \qquad\qquad x_n = \frac{\mathcal{L}^{-1} f_n}{\|\mathcal{L}^{-1} f_n\|}$$

per $n \in \mathbb{N}^*$, si ha $\lim_{n\to\infty} g_n = 0_{\mathcal{X}}$ e $\|x_n\| = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}^*$. Dato che $\mathcal{K}$ è compatto, si può estrarre una sottosuccessione $(x_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ tale che $\lim_{k\to\infty} \mathcal{K}x_{n(k)} = x \in \mathcal{X}$. Osservato che $x_n - \mathcal{K}x_n = g_n$, si ha $\lim_{k\to\infty} x_{n(k)} = x$ e $x \in \ker \mathcal{L} = \langle 0 \rangle$, ossia $x = 0$. Ciò contraddice il fatto che $\|x_n\| = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}^*$, perciò contraddice anche il fatto che esista $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. $\square$

Una conseguenza del Teorema 1.16 fornisce condizioni di unicità della soluzione alla (1.1).

Corollario 1.17 (alternativa di Fredholm)**.** *Dato uno spazio di Banach $\mathcal{X}$, sia $\mathcal{K}\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ un operatore lineare compatto. L'equazione $(\lambda - \mathcal{K})x = y$ con $\lambda \neq 0$ ammette soluzione unica se e solo se l'equazione $(\lambda - \mathcal{K})z = 0_{\mathcal{X}}$ ammette come unica soluzione $z = 0_{\mathcal{X}}$. In tal caso, l'operatore $\lambda - \mathcal{K}\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ è biiettivo.*

In Atkinson [6, pp. 13–16] si può trovare un'altra dimostrazione di questo risultato nel caso particolare in cui $\mathcal{K}$ sia ottenuto come limite di una successione di operatori limitati e di rango finito.

2

Il metodo di Nyström

Per la risoluzione approssimata di (1.1) è stato sviluppato il metodo di Nyström, che approssima l'operatore integrale nell'equazione mediante integrazione numerica. La soluzione che risulta da tale approssimazione è posta nella forma di valori nei nodi di quadratura utilizzati nell'integrazione numerica e poi estesa all'intero dominio D secondo una formula di interpolazione che, di solito, si rivela piuttosto accurata [v. 6, p. 100].

Come già accennato nella §1.2, Nyström pubblicò l'omonimo metodo in [22], nel 1930. Dovendo esibire degli esempi calcolati a mano, Nyström utilizzò formule gaussiane con tre nodi di quadratura. La prima analisi dell'errore commesso da questo metodo, o almeno una delle prime [v. 3, p. 11], fu pubblicata prima del 1941 da Kantorovich e Krylov [16, §2.1]; per quanto più complicata rispetto ad altre analisi successive, essa è completa e ricava limiti di errore equivalenti a quanto scoperto in seguito. Nel 1964, Anselone e Moore [2] trovarono una cornice teorica più generale in cui inquadrare l'analisi dell'errore: il risultato, pubblicato anche in [1], faceva uso del concetto di *operatori collettivamente compatti*, che sarà accennato nel corso di questo capitolo.
Nel 1954, Lonseth [19, pp. 418–419] rimarcò che il sistema lineare ottenuto in (2.2) è di difficile risoluzione senza l'ausilio di un *computer*, anche per N non eccessivamente elevato. L'adozione dei calcolatori digitali negli ambienti di ricerca ha mitigato di molto questo problema: nel 1976, Atkinson [4] rilasciò alcune *routine* per FORTRAN per risolvere (1.1) nell'ipotesi che K e x siano funzioni lisce; una versione aggiornata per MATLAB è discussa in [7].

Descritto il metodo nella sua generalità e analizzatone l'errore, si ricorrerà al metodo d'integrazione numerica proposto da Bauman, Sommariva e Vianello [8] in sostituzione di metodi di interpolazione polinomiale a tratti.

2.1 Integrazione numerica

Prima di illustrare il metodo di Nyström, occorre ricordare alcune proprietà fondamentali delle formule di quadratura [v. 5, cap. 5, 18, § 12.1].

Il proposito di una *formula di quadratura* è quello di approssimare l'integrale definito

$$I(g,w) := \int_D g(t)w(t)\,\mathrm{d}t$$

con $D \subseteq \mathbb{R}^m$ dominio di integrazione, w funzione peso e $g \in \mathcal{C}(D)$. Una tecnica comune consiste nel determinare un'opportuna funzione $\tilde{g}$ che approssimi g e per cui sia

$$I(g,w) \approx I(\tilde{g},w)$$

ma di modo che il calcolo di $I(\tilde{g},w)$ sia più facile rispetto a quello di $I(g,w)$.

Indicata con $\mu(D)$ la misura di D, si ricava

$$|I(g,w) - I(\tilde{g},w)| \leq \int_D |g(t) - \tilde{g}(t)|\,|w(t)|\,\mathrm{d}t \leq \mu(D)\|w\|_\infty \|g-\tilde{g}\|_\infty.$$

Se, quindi, l'approssimazione di g mediante $\tilde{g}$ è sufficientemente accurata, lo è pure quella dell'integrale definito.

All'atto pratico, molte formule di quadratura possono essere scritte come

$$I(g) := \sum_{j=1}^{N} w_j g(t_j)$$

con $t_j \in \mathbb{R}^m$ detti *nodi di quadratura* e $w_j \in \mathbb{R}$ noti come *pesi di quadratura*.

Nel caso unidimensionale, l'integrazione numerica si effettua usualmente ricorrendo alle formule di quadratura gaussiane, che hanno come vantaggio il poter integrare esattamente polinomi di grado fino a $2n$ utilizzando n nodi di quadratura. Per domini multivariati, ovvero per i quali $m > 1$, non sono al momento noti tutti gli analoghi di tali formule, talvolta note come minimali [v. 8, §3].

Di una formula di quadratura si indicherà con $\delta \in \mathbb{N}$ il *grado algebrico di precisione* (ADE), ossia quel numero tale che ogni polinomio di grado al più δ sia integrato esattamente dalla formula di quadratura, ma esista un polinomio di grado $\delta + 1$ che non lo sia.

Definizione 2.1. Scelta una funzione peso w, una successione di formule di quadratura $(I_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ si dice *convergente* se $\lim_{N\to\infty} I_N(g) = I(g,w)$ per ogni $g \in \mathcal{C}(D)$.

Teorema 2.2 (Pólya)**.** *Scelta una funzione peso w, la successione di formule di quadratura $(I_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ è convergente se e solo se $\lim_{N\to\infty} I_N(g) = I(g,w)$ per ogni g appartenente a un sottoinsieme denso $U \subseteq \mathcal{C}(D)$ e*

$$\sup_{N\in\mathbb{N}} \sum_{j=1}^{N} |w_j| < \infty$$

Il lettore interessato alla dimostrazione di questo teorema consideri Kress [18, p. 222] e Brass e Petras [10, p. 32].

Corollario 2.3 (Steklov)**.** *Se $\lim_{N\to\infty} I_N(1) = I(1,w)$ e i pesi di quadratura sono tutti non negativi, allora la successione di formule di quadratura $(I_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ è convergente se e solo se $\lim_{N\to\infty} I_N(g) = I(g,w)$ per ogni g appartenente a un sottoinsieme denso $U \subseteq \mathcal{C}(D)$.*

Dimostrazione. Poiché

$$\sum_{j=1}^{N} |w_j| = \sum_{j=1}^{N} w_j = I_N(1) \xrightarrow{N\to\infty} I(1,w)$$

si può concludere per il Teorema 2.2. □

2.2 Formula d'interpolazione di Nyström

Supposto $K \in \mathcal{C}(D \times D)$, si può approssimare l'integrale in (1.1) con una certa formula di quadratura e ottenere

$$\lambda x_N(t) - \sum_{j=1}^{N} w_j K(t, t_j) x_N(t_j) = y(t), \qquad t \in D \tag{2.1}$$

Quest'equazione ha come nuova incognita la funzione $x_N(t)$. Per trovare la soluzione nei nodi di quadratura, è sufficiente sostituire a t i nodi di quadratura t_j; si ottiene il sistema lineare di ordine N

$$\lambda x_N(t_i) - \sum_{j=1}^{N} w_j K(t_i, t_j) x_N(t_j) = y(t_i), \qquad i \in \{1, \dots, N\} \tag{2.2}$$

che ha come incognita un vettore $\vec{x}_N = (x_N(t_1), \dots, x_n(t_N))$. Questo sistema lineare può essere scritto in forma matriciale come $(\lambda \mathbf{1}_N - \mathscr{K})\vec{x}_N = \vec{y}$, con $\mathscr{K}_{i,j} = w_j K(t_i, t_j)$ e $y_i = y(t_i)$ per ogni $i, j \in \{1, \dots, N\}$.

Una soluzione x_N di (2.1) è anche soluzione di (2.2): è sufficiente valutare x_N nei nodi di quadratura. Trovata, invece, una soluzione $\vec{z} = (z_1, \dots, z_N)$ di (2.2), la funzione definita con

$$z(t) = \frac{1}{\lambda}\left[y(t) + \sum_{j=1}^{N} w_j K(t, t_j) z_j\right], \qquad t \in D \tag{2.3}$$

detta *formula d'interpolazione di Nyström*, verifica

$$z(t_i) = \frac{1}{\lambda}\left[y(t_i) + \sum_{j=1}^{N} w_j K(t_i, t_j) z_j\right] = z_i$$

per ogni $i \in \{1, \dots, N\}$. Poiché una soluzione x_n di (2.1) è determinata dai suoi valori nei nodi di quadratura, z è soluzione di (2.1) e la relazione tra $\vec{z}$ e z è soddisfatta in modo unico.

Esempio 2.4 ([6, pp. 102–103])**.** Si consideri l'equazione integrale

$$\lambda x(t) - \int_0^1 \mathrm{e}^{st} x(s)\,\mathrm{d}s = y(t), \qquad t \in [0, 1]$$

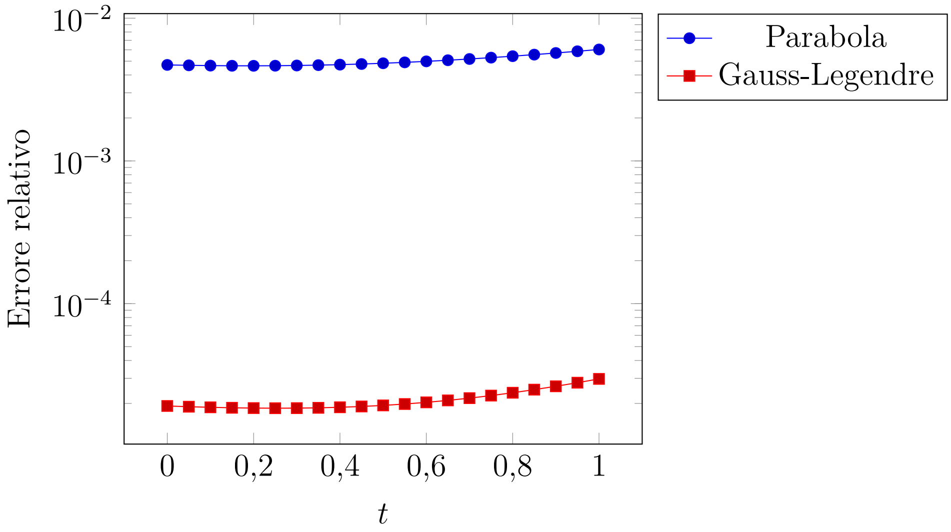

Figura 2.1: Confronto dell'errore relativo commesso con la formula della parabola e con la formula di Gauss-Legendre con tre nodi di quadratura per l'equazione integrale dell'Esempio 2.4.

con $\lambda = 2$. Dato che $K(t, s) = \mathrm{e}^{st} \in \mathcal{C}([0,1] \times [0,1])$, l'operatore $\mathcal{K}$ associato a K secondo la (1.2) è compatto per quanto visto nella § 1.3. Sulla base del Corollario 1.17, l'equazione di cui sopra ammette una e una sola soluzione se e solo se l'equazione omogenea associata ammette come unica soluzione $x(t) \equiv 0$. Ciò è verificato per il teorema delle contrazioni [v. 27, p. 222]: poiché

$$\|\mathcal{K}\| = \max_{t\in[0,1]} \int_0^1 \mathrm{e}^{st}\,\mathrm{d}s = \max_{t\in[0,1]} \frac{\mathrm{e}^t - 1}{t} = \mathrm{e} - 1 < 2$$

l'equazione $\mathcal{K}x = 2x$ ammette una e una sola soluzione, che in questo caso è proprio $x(t) \equiv 0$. Per ogni $y \in \mathcal{C}([0,1])$, dunque, l'equazione integrale in esame ammette una e una sola soluzione.

Affinché $x(t) = \mathrm{e}^t$ sia la soluzione dell'equazione, si pone

$$y(t) = 2\mathrm{e}^t + \frac{1 - \mathrm{e}^{1+t}}{1 + t}$$

Facendo questa scelta, è possibile calcolare facilmente l'errore commesso applicando la (2.3) ai risultati del sistema (2.2), scelta una certa formula di quadratura. La Figura 2.1 mostra che, in questo caso, utilizzare la formula di quadratura di Gauss-Legendre porge un risultato due ordini di grandezza migliore rispetto a quello ottenuto con la formula della parabola — il tutto a parità di nodi di quadratura.

2.3 Convergenza del metodo di Nyström

Per brevità di notazione, si indicherà con $(\lambda - \mathcal{K})x = y$ l'equazione in (1.1) e con $(\lambda - \mathcal{K}_N)x_N = y$ l'equazione in (2.1), ossia si porrà

$$\mathcal{K}_N x(t) = \sum_{j=1}^{N} w_j K(t, t_j) x(t_j) \tag{2.4}$$

Definizione 2.5. Un insieme $\mathcal{A}$ di operatori lineari $\mathcal{K}\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ tra spazi normati si dice *collettivamente compatto* se per ogni $U \subseteq \mathcal{X}$ limitato l'insieme $\mathcal{A}(U) = \{\, \mathcal{K}x : \mathcal{K} \in \mathcal{A}, x \in U \,\}$ ammette chiusura compatta.

Teorema 2.6. *Se la successione $(I_N)_{N\in\mathbb{N}}$ delle formule di quadratura usate in (2.1) è convergente, allora la successione $(\mathcal{K}_N)_{N\in\mathbb{N}}$ è collettivamente compatta e converge puntualmente, ossia $\lim_{N\to\infty} \mathcal{K}_N x = \mathcal{K}x$ per ogni $x \in \mathcal{C}(D)$, ma non converge in norma.*

La dimostrazione di questo Teorema si trova in Kress [18, p. 226], come anche il seguente Corollario.

Corollario 2.7. *Se (1.1) ammette una e una sola soluzione e K e y sono continue, allora il metodo di Nyström con una successione convergente di formule di quadratura è uniformemente convergente.*

Oltre a verificare che il metodo di Nyström converga alla soluzione desiderata, occorre ricavare delle stime dell'errore commesso dalla n-esima formula di quadratura. Per fare ciò, va esplicitata la norma per gli operatori approssimati

$$\|\mathcal{K}_N\| = \max_{t\in D} \sum_{j=1}^{N} |w_j K(t, t_j)| \tag{2.5}$$

ed è comodo definire

$$E_N(t, s) \coloneqq \int_D K(t, v) K(v, s)\, \mathrm{d}v - \sum_{j=1}^{N} w_j K(t, t_j) K(t_j, s) \tag{2.6}$$

per $t, s \in D$ e $N \in \mathbb{N}^*$; quest'ultimo corrisponde all'errore di integrazione della funzione $\tau \mapsto K(t,\tau)K(\tau,s)$ fissati $t, s \in D$.

Lemma 2.8. *Considerata la (1.1) nelle ipotesi specificate, se K è continua e $(\mathcal{K}_N)_{N\in\mathbb{N}}$ è associata a una successione di formule di quadratura convergente, allora*

$$\lim_{N\to\infty} \|(\mathcal{K}-\mathcal{K}_N)\mathcal{K}\| = 0 \tag{2.7a}$$

$$\lim_{N\to\infty} \|(\mathcal{K}-\mathcal{K}_N)\mathcal{K}_N\| = 0 \tag{2.7b}$$

Dimostrazione. Con un calcolo diretto si può ottenere

$$(\mathcal{K}-\mathcal{K}_N)\mathcal{K}z(t) = \int_D E_N(t,s)z(s)\,\mathrm{d}s \tag{2.8a}$$

$$(\mathcal{K}-\mathcal{K}_N)\mathcal{K}_N z(t) = \sum_{j=1}^{N} w_j E_N(t,t_j)z(t_j) \tag{2.8b}$$

per ogni $z \in \mathcal{C}(D)$. Notando che il membro di destra in (2.8a) è un operatore integrale del tipo in (1.2) e che il membro di destra in (2.8b) è un operatore integrale del tipo in (2.4), valgono

$$\|(\mathcal{K}-\mathcal{K}_N)\mathcal{K}\| = \max_{t\in D}\int_D |E_N(t,s)|\,\mathrm{d}s \tag{2.9a}$$

$$\|(\mathcal{K}-\mathcal{K}_N)\mathcal{K}_N\| = \max_{t\in D}\sum_{j=1}^{N} |w_j E_N(t,t_j)| \tag{2.9b}$$

Posti

$$c_D := \int_D \mathrm{d}s \qquad c_I := \sup_{N\in\mathbb{N}^*}\sum_{j=1}^{N}|w_j| \qquad c_K := \max_{t,s\in D}|K(t,s)|$$

si trova $|E_N(t,s)| \le (c_D + c_I)c_K^2$, perciò la successione di funzioni $(E_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ è uniformemente limitata. Si ha, poi,

$$|E_N(t,s) - E_N(\tau,\sigma)| \le |E_N(t,s) - E_N(\tau,s)| + |E_N(\tau,s) - E_N(\tau,\sigma)|$$

e dalle stime

$$|E_N(t,s) - E_N(\tau,s)| \leq c_K(c_D + c_I) \max_{s \in D} |K(t,s) - K(\tau,s)|$$
$$|E_N(\tau,s) - E_N(\tau,\sigma)| \leq c_K(c_D + c_I) \max_{t \in D} |K(t,s) - K(t,\sigma)|$$

segue per uniforme continuità di K su $D \times D$ [v. 27, p. 88, 28, p. 107] che $(E_N)_{N \in \mathbb{N}^*}$ è un insieme equicontinuo. Le funzioni in questione, poi, convergono puntualmente a 0 per ogni $t, s \in D$; per il teorema di Ascoli-Arzelà, si può concludere che E_N converge a 0 uniformemente in (t,s), ossia

$$\lim_{N \to \infty} \max_{t,s \in D} |E_N(t,s)| = 0 \tag{2.10}$$

Sulla base di ciò, si può concludere che

$$\|(\mathcal{K} - \mathcal{K}_N)\mathcal{K}\| \leq c_D \max_{t,s \in D} |E_N(t,s)| \xrightarrow{N \to \infty} 0$$
$$\|(\mathcal{K} - \mathcal{K}_N)\mathcal{K}_N\| \leq c_I \max_{t,s \in D} |E_N(t,s)| \xrightarrow{N \to \infty} 0 \qquad \square$$

Teorema 2.9. *Considerata la (1.1) nelle ipotesi specificate e con $\lambda \neq 0$, se K è continua, $(\mathcal{K}_N)_{N \in \mathbb{N}}$ è associata a una successione di formule di quadratura convergente e (1.1) ammette una e una sola soluzione per qualsiasi termine noto $y \in \mathcal{C}(D)$, allora esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}^*$ tale che per ogni $N \in \mathbb{N}^*$ con $N \geq \bar{n}$ l'operatore $(\lambda - \mathcal{K}_N)^{-1}$ esiste e*

$$\left\|(\lambda - \mathcal{K}_N)^{-1}\right\| \leq \frac{1 + \|(\lambda - \mathcal{K})^{-1}\| \|\mathcal{K}_N\|}{|\lambda| - \|(\lambda - \mathcal{K})^{-1}\| \, \|(\mathcal{K} - \mathcal{K}_N)\mathcal{K}_N\|} < +\infty \tag{2.11}$$

Quanto alle soluzioni di (1.1) e (2.1),

$$\|x - x_N\|_\infty \leq \left\|(\lambda - \mathcal{K}_N)^{-1}\right\| \|(\mathcal{K} - \mathcal{K}_N)x\|_\infty \tag{2.12}$$

La dimostrazione di questo Teorema si può trovare in Atkinson [6, pp. 106–108]; in Kress [18, §10.4], la (2.11) è formulata in modo più generale, ricorrendo nuovamente alla nozione di operatori collettivamente compatti.

Osservato che

$$\begin{aligned}(\lambda - \mathcal{K}_N)(x - x_N) &= (\lambda - \mathcal{K} + \mathcal{K} - \mathcal{K}_N)x - (\lambda - \mathcal{K}_N)x_N \\ &= (\lambda - \mathcal{K})x + (\mathcal{K} - \mathcal{K}_N)x - y \\ &= \cancel{y} + (\mathcal{K} - \mathcal{K}_N)x - \cancel{y}\end{aligned}$$

si trova

$$\|(\mathcal{K} - \mathcal{K}_N)x\|_\infty \leq \|\lambda - \mathcal{K}_N\| \, \|x - x_N\|_\infty \tag{2.13}$$

che, unita alla (2.12), dimostra che $\|x - x_N\|_\infty$ e $\|(\mathcal{K} - \mathcal{K}_N)x\|_\infty$ hanno la stessa velocità di convergenza, ovverosia che l'errore nel computo della soluzione è asintotico a quello nel computo dell'integrale.

3

Esperimenti numerici

Come già anticipato nella §2.1, a differenza del caso univariato non sono note in generale le formule di quadratura minimali di grado arbitrario su domini multivariati. Benché, infatti, esistano delle stime sul numero di nodi che una formula di quadratura minimale debba avere [v. 15, §2, 17, §2.3], rimane tuttavia difficile ottenere nodi e pesi nel concreto.

In [8], gli autori propongono un metodo, chiamato *Carathéodory-Tchakaloff subsampling* (CaTch), per ottenere formule di quadratura su poligoni generalizzati con grado di precisione δ avente nodi interni, pesi positivi e bassa cardinalità.

Tale metodo calcola dapprima una triangolazione *minimale* del poligono generalizzato in questione (resa più facile dalla funzione integrata `polyshape` di MATLAB [25]) e in seguito applica su ogni triangolo una formula di cubatura a bassa cardinalità, nodi interni e pesi positivi. A partire da quest'ultima formula, indicata con $N_\delta = (\delta+1)(\delta+2)/2$ la dimensione dello spazio dei polinomi in due variabili di grado al più δ, ne viene estratta un'altra, che utilizza al più N_δ nodi della precedente ed ha anch'essa pesi positivi.

In questo capitolo si prenderanno in esame alcune equazioni integrali su domini poligonali di vario tipo e si confronteranno i risultati ottenuti applicando il metodo di Nyström con e senza la compressione CaTch. Saranno riportati sia gli errori relativi commessi sia i tempi di calcolo.

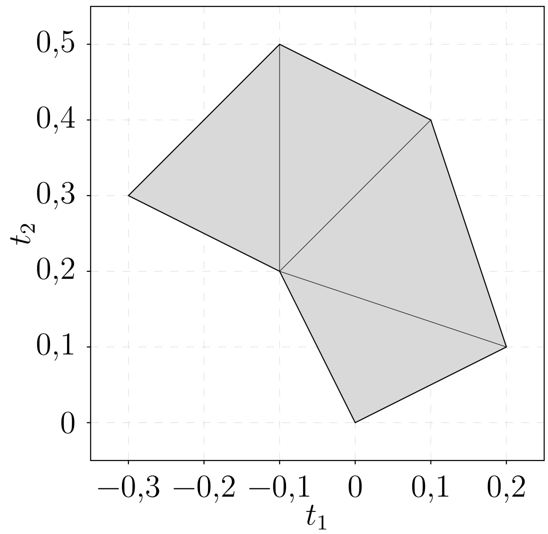

Figura 3.1: L'esagono D_1 come triangolato da MATLAB.

3.1 Un poligono concavo

Si consideri l'esagono D_1 riportato in Figura 3.1. Si nota innanzitutto che D_1 non è un poligono convesso; la sua triangolazione, quindi, necessita di un algoritmo non banale, perché tracciare tutti i segmenti tra vertici non consecutivi potrebbe portare a una triangolazione errata.

La Tabella 3.1 riporta il numero di nodi di cubatura trovati da ciascuno dei due metodi adoperati, al variare dell'ADE richiesta. Sulla base di questi risultati numerici, comprimere le formule di quadratura permette in questo caso di utilizzare circa il 75% dei nodi. Il sistema lineare in (2.2) avrà, quindi, una dimensione minore, con un potenziale vantaggio in tempi di calcolo. Questo dato, però, non fornisce alcuna stima *a priori* né della differenza di risultato tra i due metodi né tantomeno dell'errore effettivo compiuto dal metodo con compressione.

Quale esempio, si consideri la seguente equazione integrale su D_1, parametrizzata da λ

$$\lambda x(t_1,t_2) - \int_{D_1} \mathrm{e}^{t_1t_2+s_1s_2} x(s_1,s_2)\,\mathrm{d}s_1\,\mathrm{d}s_2 = y(t_1,t_2) \tag{3.1}$$

La funzione nucleo $K(t_1,t_2,s_1,s_2) = \exp(t_1t_2+s_1s_2)$ è continua su $D_1 \times D_1$, perciò l'operatore $\mathcal{K}$ associato a K secondo la (1.2) è compatto. Come nel caso dell'Esempio 2.4, è possibile ricorrere al teorema delle contrazioni: dato che $\exp(t_1t_2+s_1s_2) \leq$

Tabella 3.1: Numero di nodi di cubatura su D_1 al variare dell'ADE.

ADE	N_{nodi}	$N_{\text{nodi}}^{\text{CaTch}}$	$N_{\text{nodi}}^{\text{CaTch}}/N_{\text{nodi}}$
2	12	6	0,5
4	24	15	0,625
6	44	28	0,636 36
8	64	45	0,703 12
10	96	66	0,687 5
12	128	91	0,710 94
14	168	120	0,714 29
16	208	153	0,735 58
18	264	190	0,719 7
20	312	231	0,740 38
22	372	276	0,741 94
24	436	325	0,745 41
26	520	378	0,726 92
28	600	435	0,725
30	684	496	0,725 15
32	772	561	0,726 68
34	856	630	0,735 98
36	972	703	0,723 25
38	1 068	780	0,730 34
40	1 180	861	0,729 66
42	1 296	946	0,729 94
44	1 416	1 035	0,730 93
46	1 540	1 128	0,732 47
48	1 692	1 225	0,724
50	1 812	1 326	0,731 79

$\exp(1 + s_1 s_2)$ per ogni $t, s \in D_1$, per la monotonia dell'integrale segue che

$$\|\mathcal{K}\| \leq \int_{D_1} \mathrm{e}^{1+s_1 s_2}\, \mathrm{d}s_1\, \mathrm{d}s_2 \approx 0{,}336\,323\,409\,884\,190$$

il che garantisce esistenza e unicità della soluzione per qualsiasi $y \in \mathcal{C}(D_1)$ ed ogni $\lambda > 0{,}336\,323\,409\,884\,190$, sulla base del Teorema 1.16.

È possibile raffinare la stima del minimo λ per cui valga il teorema delle contrazioni calcolando numericamente in alcuni punti di D_1 l'integrale di cui si estrae l'estremo superiore nella (1.3). Effettuando tale calcolo in un numero abbastanza grande di punti, si può ottenere una stima affidabile, perché la funzione nucleo è continua, perciò

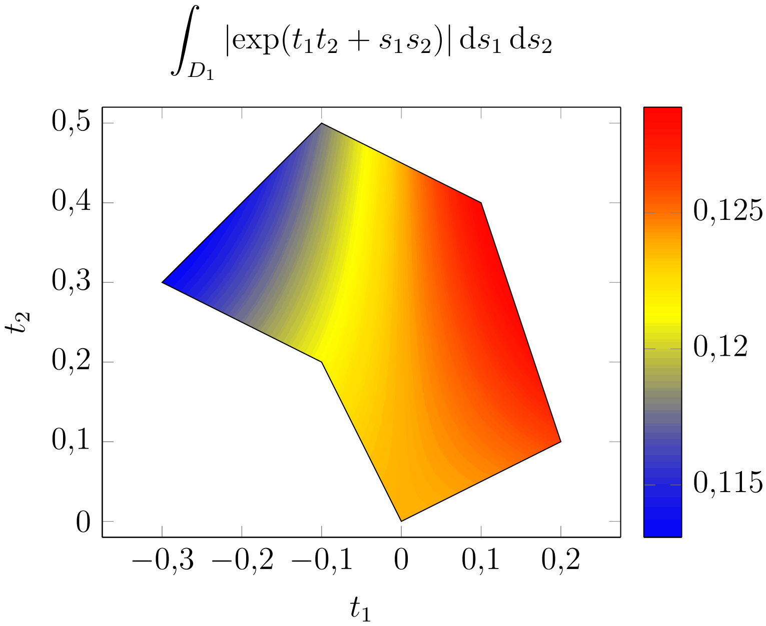

Figura 3.2: Curve di livello di $\int_{D_1} |\exp(t_1 t_2 + s_1 s_2)| \, \mathrm{d}s_1 \, \mathrm{d}s_2$. Ciò permette un'approssimazione più precisa di $\|\mathcal{K}\|$ relativamente a (3.1).

la quantità in esame è sufficientemente regolare in (t_1, t_2). Da questi campionamenti numerici, visibili nella Figura 3.2, risulta che $\|\mathcal{K}\| \approx 0{,}13$, perciò il teorema è applicabile per λ strettamente maggiore di tale cifra.

Mediante il *Wolfram Language*, è possibile scegliere con alta precisione y di modo che $x(t_1, t_2) = t_1 + t_2$. Ad esempio, nel caso $\lambda = 2$ si ha

```
In[1]:= integrale01 = Integrate[
          Exp[s1 s2 + t1 t2] (s1 + s2),
          {s1, s2} ∈ Polygon[{
            {0, 0},
            {1/5, 1/10},
            {1/10, 2/5},
            {-1/10, 1/2},
            {-3/10, 3/10},
            {-1/10, 1/5}
          }]
        ];
        lambda = 2;
        (* y[t1, t2] = *)
        N[lambda (t1 + t2) - Factor[Expand[integrale01]], 16]
```

```
Out[1]= -0.03022286918687376 × 2.718281828459045^(t1 t2) +
         2.000000000000000 (t1 + t2)
```

Questo approccio si può facilmente adattare a MATLAB per misurare gli errori commessi.

In un primo momento, ci si è concentrati sul caso $\lambda = 2$. Il primo confronto tra i due metodi è stato condotto sull'errore relativo commesso, calcolato prendendo in considerazione il vettore $\tilde{x}$ che risulta dalla risoluzione di (2.2) e confrontandolo con la soluzione effettiva x nei nodi di cubatura; al vettore differenza sono state applicate le norme euclidea e del sup. In definitiva, si sono misurate le grandezze

$$E_2^{\text{rel}} := \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^{N}(\tilde{x}_j - x(t_j))^2}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{N}(x(t_j))^2}} \qquad E_\infty^{\text{rel}} := \frac{\max_{j\in\{1,\ldots,N\}} |\tilde{x}_j - x(t_j)|}{\max_{j\in\{1,\ldots,N\}} |x(t_j)|} \tag{3.2}$$

La Tabella 3.2 mostra queste due quantità in funzione dell'ADE. Si nota che il metodo con compressione richiede un ADE leggermente più alto per raggiungere lo stesso errore relativo per entrambe le norme. Dato che, però, si raggiunge un errore relativo comparabile con la precisione di macchina per $\delta = 12$, la compressione CATCH offre un vantaggio netto in termini computazionali già a gradi non troppo elevati:

- si ottiene un risultato praticamente identico a quello senza compressione risolvendo un sistema lineare di dimensione minore (come mostrato nella Tabella 3.1);
- poiché la compressione non dipende dalla funzione nucleo scelta, i suoi nodi e pesi possono essere salvati e riutilizzati per risolvere altre equazioni integrali sullo stesso dominio.

Un altro parametro di interesse è il condizionamento della matrice associata al sistema lineare in (2.2). Come si può vedere nella Figura 3.3, il metodo con compressione CATCH richiede la risoluzione di un sistema lineare condizionato peggio rispetto a quello senza compressione. Si noti, però, che anche il condizionamento più elevato in figura è nell'ordine di grandezza di 1, perciò l'effetto sul risultato è, in questo caso, impercettibile.

Variando il parametro λ nell'equazione, si possono ottenere altri risultati sul metodo. Le Figure 3.4 e 3.5 mostrano rispettivamente l'errore relativo E_∞^{rel} e il condizionamento della matrice associata al sistema lineare col parametro λ uguale

Tabella 3.2: Confronto tra metodi senza compressione e con compressione degli errori relativi calcolati a partire dal vettore soluzione del sistema lineare in (2.2). Si è risolta l'equazione (3.1) con $\lambda = 2$.

	Senza compressione		**Con compressione**	
δ	E_2^{rel}	E_∞^{rel}	E_2^{rel}	E_∞^{rel}
2	$5{,}279\,85 \cdot 10^{-7}$	$3{,}429\,55 \cdot 10^{-7}$	$7{,}847\,42 \cdot 10^{-5}$	$4{,}854\,60 \cdot 10^{-5}$
4	$8{,}880\,30 \cdot 10^{-10}$	$5{,}390\,18 \cdot 10^{-10}$	$2{,}833\,41 \cdot 10^{-7}$	$1{,}722\,83 \cdot 10^{-7}$
6	$1{,}788\,16 \cdot 10^{-12}$	$1{,}069\,49 \cdot 10^{-12}$	$2{,}871\,34 \cdot 10^{-10}$	$1{,}747\,95 \cdot 10^{-10}$
8	$1{,}275\,84 \cdot 10^{-15}$	$1{,}286\,26 \cdot 10^{-15}$	$2{,}613\,00 \cdot 10^{-13}$	$1{,}593\,35 \cdot 10^{-13}$
10	$3{,}846\,02 \cdot 10^{-16}$	$6{,}926\,94 \cdot 10^{-16}$	$1{,}297\,50 \cdot 10^{-15}$	$1{,}154\,49 \cdot 10^{-15}$
12	$5{,}586\,25 \cdot 10^{-16}$	$1{,}141\,40 \cdot 10^{-15}$	$3{,}302\,24 \cdot 10^{-16}$	$5{,}706\,99 \cdot 10^{-16}$
14	$5{,}675\,97 \cdot 10^{-16}$	$1{,}132\,18 \cdot 10^{-15}$	$4{,}676\,70 \cdot 10^{-16}$	$7{,}925\,24 \cdot 10^{-16}$
16	$6{,}217\,68 \cdot 10^{-16}$	$1{,}241\,98 \cdot 10^{-15}$	$4{,}998\,21 \cdot 10^{-16}$	$9{,}032\,62 \cdot 10^{-16}$
18	$7{,}117\,07 \cdot 10^{-16}$	$1{,}463\,69 \cdot 10^{-15}$	$5{,}602\,47 \cdot 10^{-16}$	$1{,}355\,87 \cdot 10^{-15}$
20	$7{,}519\,67 \cdot 10^{-16}$	$1{,}458\,30 \cdot 10^{-15}$	$6{,}667\,52 \cdot 10^{-16}$	$1{,}570\,48 \cdot 10^{-15}$

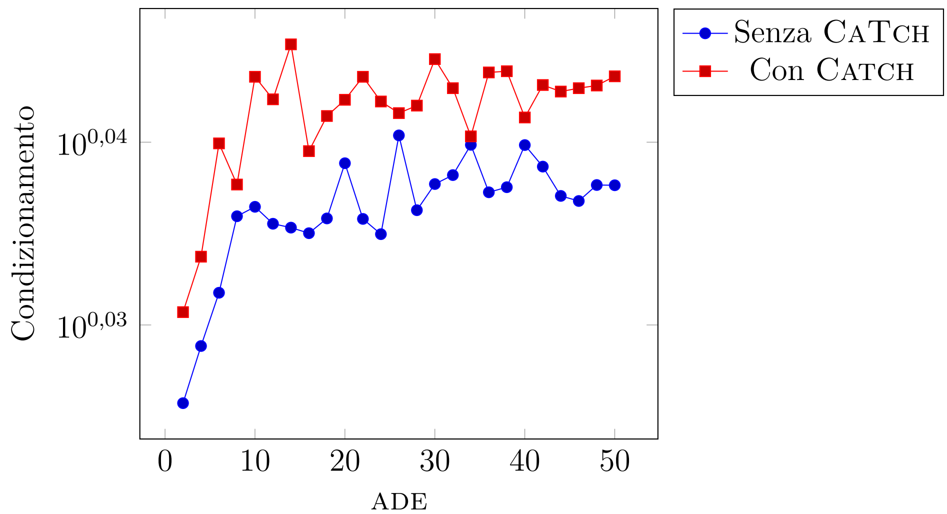

Figura 3.3: Confronto tra metodi con e senza compressione del condizionamento della matrice associata al sistema lineare in (2.2). Si è risolta l'equazione (3.1) con $\lambda = 2$.

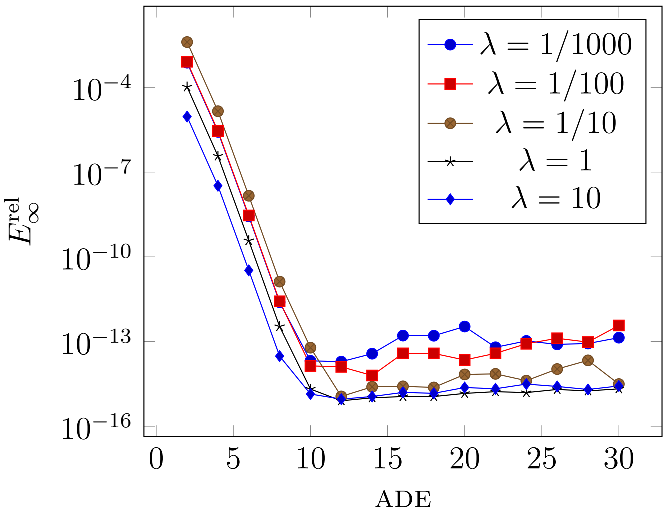

Figura 3.4: Confronto dei massimi errori relativi commessi dal metodo con compressione CaTch nei nodi di quadratura per risolvere (3.1) al variare di λ e in funzione dell'ADE.

a $1/1000, 1/100, 1/10, 1, 10$. Ricordando che solo per gli ultimi due si può ricorrere al teorema delle contrazioni, si nota che il condizionamento della matrice non è più trascurabile nei casi in cui λ è abbastanza piccolo. Ciò si riflette anche sugli errori relativi, che non scendono fino all'ordine di grandezza della precisione di macchina se $\lambda \ll \|\mathcal{K}\|$. Si noti che si tratta, comunque, di errori molto piccoli.

Dato che i due metodi porgono una soluzione con errore comparabile, è interessante confrontarne i tempi di calcolo: benché, infatti, sia plausibile che risolvere un sistema lineare di dimensione minore richieda in generale meno tempo a parità di condizionamento (ossia come è in questo caso), non è detto che il tempo impiegato per comprimere la formula di cubatura sia inferiore al tempo guadagnato nella risoluzione del sistema più piccolo. Il tempo del metodo senza compressione è calcolato sommando i tempi di ricerca di una formula di cubatura e di risoluzione del sistema lineare, mentre il tempo del metodo con compressione è calcolato sommando i tempi di ricerca di una formula di cubatura, di compressione CaTch e di risoluzione del sistema lineare di dimensione inferiore. Dalle misurazioni effettuate, riportate nella Figura 3.6 nel caso $\lambda = 1$, risulta evidente che la compressione CaTch richiede quasi sempre un tempo maggiore. Analizzando i singoli addendi che costituiscono i tempi mostrati in figura, si vede che il tempo impiegato per la compressione CaTch è, in generale, sempre maggiore di quello guadagnato nella risoluzione di un sistema lineare di dimensione minore.

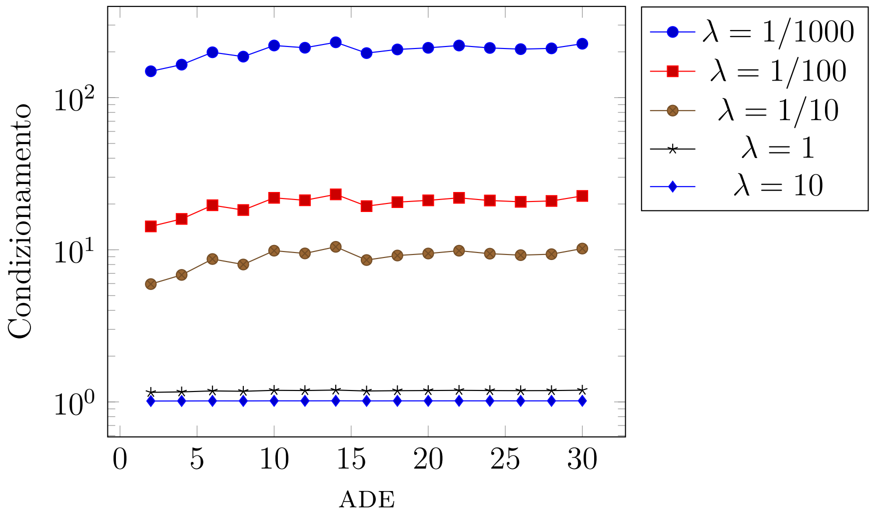

Figura 3.5: Confronto del condizionamento della matrice associata al sistema lineare porto dal metodo di Nyström per risolvere (3.1) al variare di λ e in funzione dell'ADE (con metodo di compressione CaTch).

Con un solo esempio su questo dominio, non è possibile dire se tutte le equazioni integrali su D_1 presentino un comportamento simile per quanto riguarda errori e condizionamento. Si consideri, dunque, la seguente equazione integrale su D_1

$$\lambda x(t_1, t_2) - \int_{D_1} \sin(t_1 + t_2 + s_1 + s_2) x(s_1, s_2) \, \mathrm{d}s_1 \, \mathrm{d}s_2 = y(t_1, t_2) \tag{3.3}$$

Come per la (3.1), la funzione nucleo è continua su $D_1 \times D_1$, perciò l'operatore associato è compatto. In questo caso, la stima di $\|\mathcal{K}\|$ è stata fatta usando le curve di livello nella Figura 3.7 per semplicità; con questo metodo, risulta che $\|\mathcal{K}\| \approx 0{,}085$.

In questo caso, si è scelta y di modo che $x(t_1, t_2) = t_1^2 - t_2^2$. Come si può notare nella Figura 3.8, anche per questa equazione i massimi errori relativi tendono a decadere in funzione dell'ADE. Dato che, però, il termine noto dell'equazione consta di numerose operazioni non banali, come ad esempio alcune funzioni trigonometriche, per λ piccoli l'errore relativo risulta maggiore della precisione di macchina in modo non trascurabile.

Per quanto riguarda il condizionamento del sistema lineare in (2.2), invece, il comportamento della cubatura rispetto all'ADE rimane pressoché invariato: gli andamenti della Figura 3.9 sono gli stessi mostrati nella Figura 3.3, seppur scalati in ragione del rapporto tra le norme dei rispettivi operatori integrali.

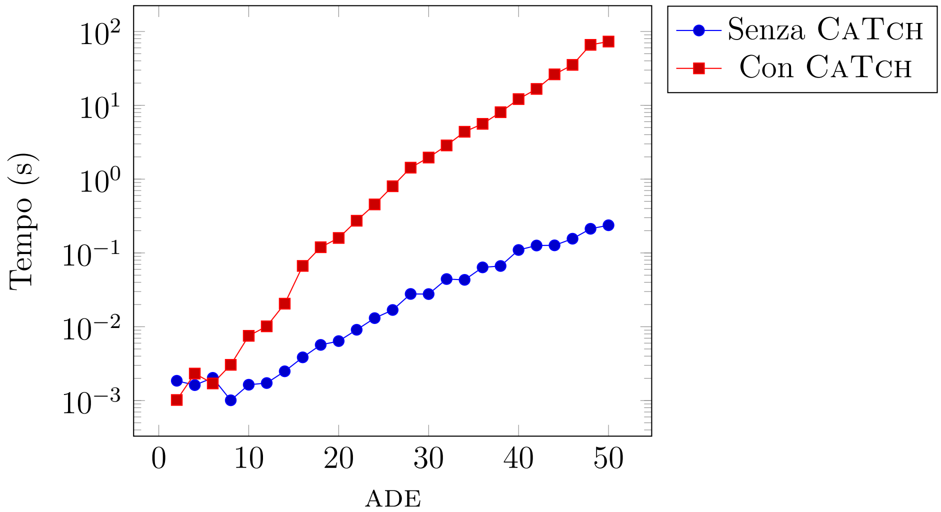

Figura 3.6: Confronto del tempo totale per risolvere (3.1) con $\lambda = 1$ tra il metodo senza compressione e quello con compressione.

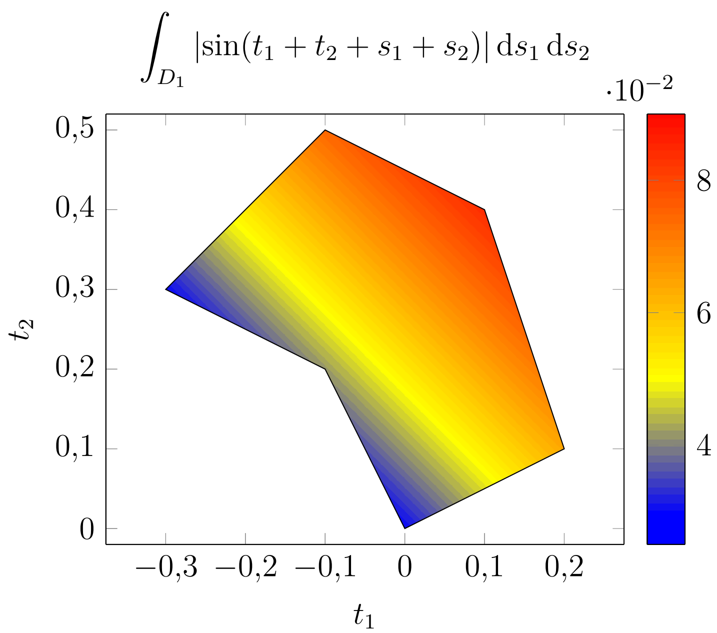

Figura 3.7: Curve di livello di $\int_{D_1} |\sin(t_1 + t_2 + s_1 + s_2)| \,\mathrm{d}s_1 \,\mathrm{d}s_2$. Ciò permette un'approssimazione di $\|\mathcal{K}\|$ relativamente a (3.3).

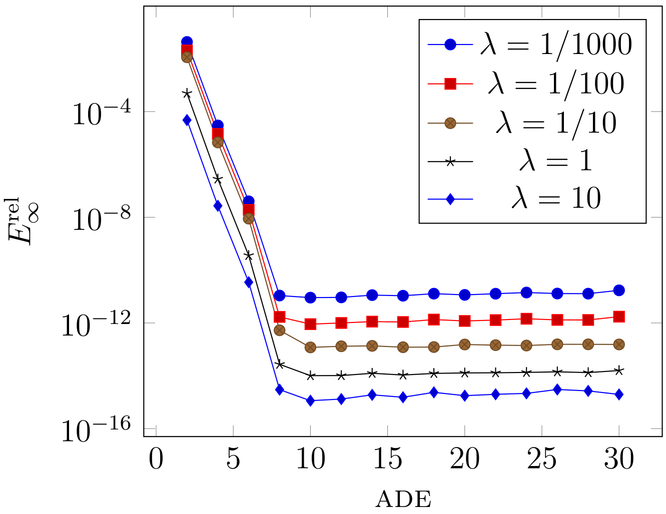

Figura 3.8: Confronto dei massimi errori relativi commessi dal metodo con compressione CaTch nei nodi di quadratura per risolvere (3.3) al variare di λ e in funzione dell'ADE.

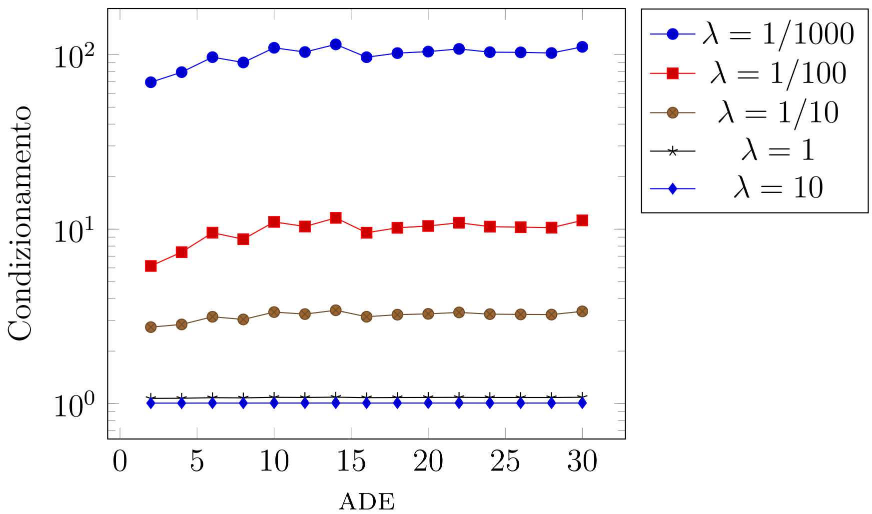

Figura 3.9: Confronto del condizionamento della matrice associata al sistema lineare porto dal metodo di Nyström per risolvere (3.3) al variare di λ e in funzione dell'ADE (con metodo di compressione CaTch).

3.2 Un poligono generalizzato con autointersezioni

Si consideri il poligono generalizzato D_2 rappresentato nella Figura 3.10. Questo dominio ammette due autointersezioni nei punti $(-1/5, 0)$ e $(1/5, 0)$. La compressione CaTch riesce a ridurre di circa il 25% il numero di nodi di cubatura da utilizzare, con gli stessi risultati ottenuti nel caso di D_1 e riportati nella Tabella 3.1. Ciò accade perché il numero di triangoli in cui è suddiviso D_2 è lo stesso di D_1.

Si consideri l'equazione integrale su D_2

$$\lambda x(t_1, t_2) - \int_{D_2} s_1 s_2 \sin(t_1 + t_2) x(s_1, s_2) \, \mathrm{d}s_1 \, \mathrm{d}s_2 = y(t_1, t_2) \tag{3.4}$$

Anche in questo caso, l'operatore associato alla funzione nucleo $K(t_1, t_2, s_1, s_2) = s_1 s_2 \sin(t_1 + t_2)$ è compatto, perché K è continua. Dalle approssimazioni numeriche si evince che $\|\mathcal{K}\| \approx 1{,}204\,57 \cdot 10^{-3}$.

Si è scelta y di modo che $x(t_1, t_2) = (t_1 + t_2)^2$. Come si può vedere dalla Tabella 3.3, il metodo senza compressione e quello con compressione CaTch si dimostrano egualmente efficaci per quanto riguarda l'andamento degli errori relativi. Questo comportamento è dovuto al fatto che

$$\int_{D_2} s_1 s_2 x(s_1, s_2) \sin(t_1 + t_2) \, \mathrm{d}s_1 \, \mathrm{d}s_2 = \sin(t_1 + t_2) \int_{D_2} s_1 s_2 x(s_1, s_2) \, \mathrm{d}s_1 \, \mathrm{d}s_2 \tag{3.5}$$

e, dato che come x è stato scelto un polinomio di grado 2, una formula con grado di precisione 3 o superiore dovrebbe integrare esattamente l'espressione di cui sopra. È sensato, quindi, concentrarsi sui risultati del metodo con compressione.

I risultati degli esperimenti numerici per quanto riguarda gli errori relativi sono riportati nella Figura 3.11. L'errore decade molto velocemente alla precisione di macchina per $\lambda \gg \|\mathcal{K}\|$, mentre negli altri casi rimane maggiore di qualche ordine di grandezza; ciò è particolarmente evidente nel caso $\lambda = 1/1000$: dato che $\lambda < \|\mathcal{K}\|$, non è neanche possibile applicare il teorema delle contrazioni.

Ciò trova una corrispondenza nel condizionamento della matrice associata al sistema lineare in (2.2): come è possibile vedere nella Figura 3.12, il sistema lineare è malcondizionato già con $\lambda = 1/10$; per $\lambda = 1/1000$, il condizionamento raggiunge l'ordine di 10^6, il che spiega il comportamento dell'errore relativo corrispondente.

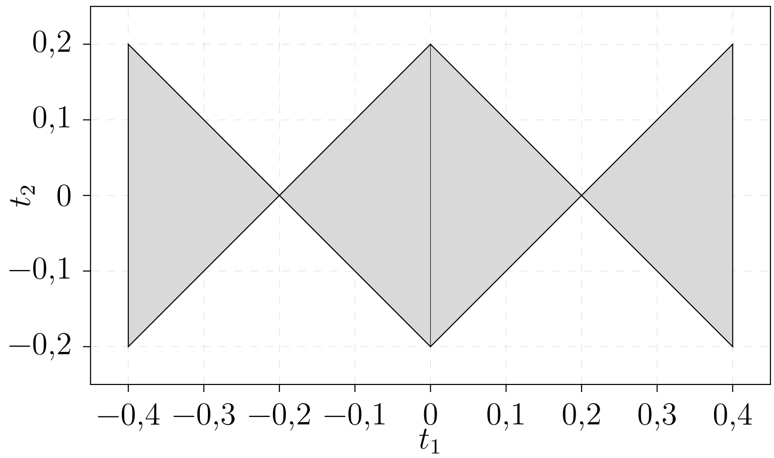

Figura 3.10: Il poligono generalizzato D_2 come triangolato da MATLAB.

Tabella 3.3: Confronto tra metodi senza compressione e con compressione degli errori relativi calcolati a partire dal vettore soluzione del sistema lineare in (2.2). Si è risolta l'equazione (3.4) con $\lambda = 1$.

	Senza compressione		**Con compressione**	
δ	E_2^{rel}	E_∞^{rel}	E_2^{rel}	E_∞^{rel}
2	0,015 04	0,011 25	1,368 32	0,977 90
4	$3{,}139\,31 \cdot 10^{-16}$	$2{,}560\,93 \cdot 10^{-16}$	$3{,}825\,73 \cdot 10^{-16}$	$3{,}841\,40 \cdot 10^{-16}$
6	$3{,}663\,06 \cdot 10^{-16}$	$4{,}560\,80 \cdot 10^{-16}$	$2{,}702\,08 \cdot 10^{-16}$	$3{,}420\,60 \cdot 10^{-16}$
8	$5{,}366\,63 \cdot 10^{-16}$	$6{,}807\,92 \cdot 10^{-16}$	$5{,}372\,01 \cdot 10^{-16}$	$6{,}807\,92 \cdot 10^{-16}$
10	$6{,}328\,44 \cdot 10^{-16}$	$1{,}302\,10 \cdot 10^{-15}$	$4{,}518\,10 \cdot 10^{-16}$	$7{,}595\,62 \cdot 10^{-16}$
12	$6{,}774\,96 \cdot 10^{-16}$	$1{,}806\,62 \cdot 10^{-15}$	$5{,}202\,14 \cdot 10^{-16}$	$9{,}564\,48 \cdot 10^{-16}$
14	$6{,}639\,58 \cdot 10^{-16}$	$9{,}359\,50 \cdot 10^{-16}$	$2{,}559\,72 \cdot 10^{-15}$	$2{,}079\,88 \cdot 10^{-15}$
16	$6{,}598\,27 \cdot 10^{-16}$	$1{,}341\,00 \cdot 10^{-15}$	$9{,}329\,66 \cdot 10^{-16}$	$1{,}341\,00 \cdot 10^{-15}$
18	$9{,}368\,87 \cdot 10^{-16}$	$2{,}256\,33 \cdot 10^{-15}$	$2{,}619\,31 \cdot 10^{-15}$	$2{,}461\,46 \cdot 10^{-15}$
20	$1{,}368\,11 \cdot 10^{-15}$	$4{,}655\,52 \cdot 10^{-15}$	$1{,}564\,28 \cdot 10^{-15}$	$1{,}619\,31 \cdot 10^{-15}$

La Figura 3.13 riporta i tempi di calcolo per i metodi con e senza compressione CaTch. Risulta, come nel caso della (3.1), analizzato similmente nella Figura 3.6, che la compressione Catch richiede troppo tempo per offrire un vantaggio in termini di tempo computazionale.

Si consideri, invece, il poligono generalizzato $\tilde{D}_2$ mostrato in Figura 3.14 e si voglia risolvere (3.4) su di esso. Rispetto a D_2, $\tilde{D}_2$ ha la stessa forma generale, con le due autointersezioni nei medesimi punti, ma ha molti più lati, i quali sono posti in modo da approssimare archi di circonferenza nel "corpo centrale" e sulle parti rivolte

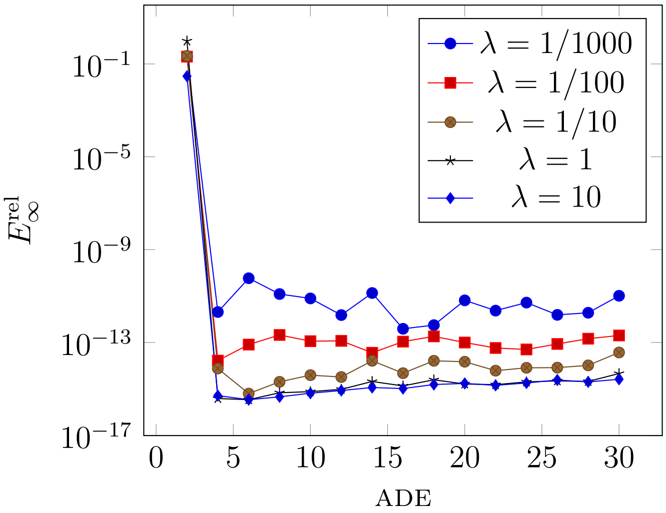

Figura 3.11: Confronto dei massimi errori relativi commessi dal metodo con compressione CATCH nei nodi di quadratura per risolvere (3.4) al variare di λ e in funzione dell'ADE.

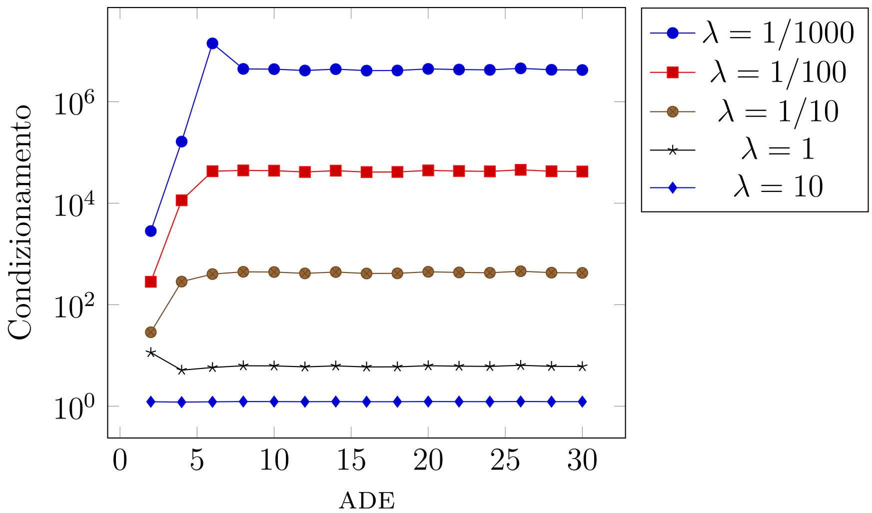

Figura 3.12: Confronto del condizionamento della matrice associata al sistema lineare porto dal metodo di Nyström per risolvere (3.4) al variare di λ e in funzione dell'ADE (con metodo di compressione CATCH).

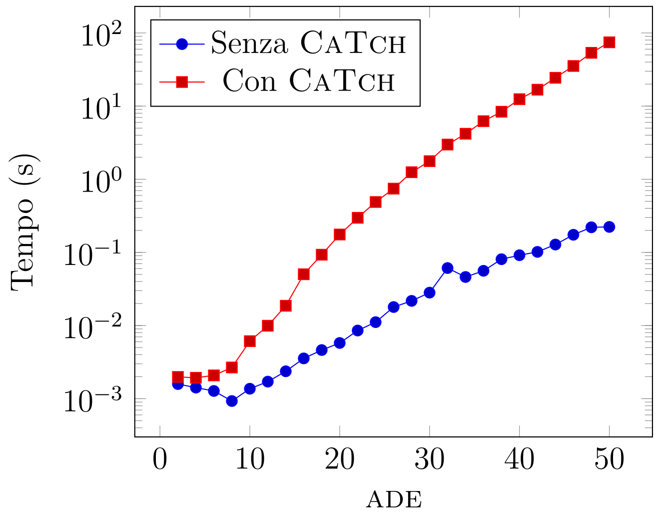

Figura 3.13: Confronto dei tempi di calcolo per la risoluzione di (3.4) su D_2 applicando o meno la compressione CaTch.

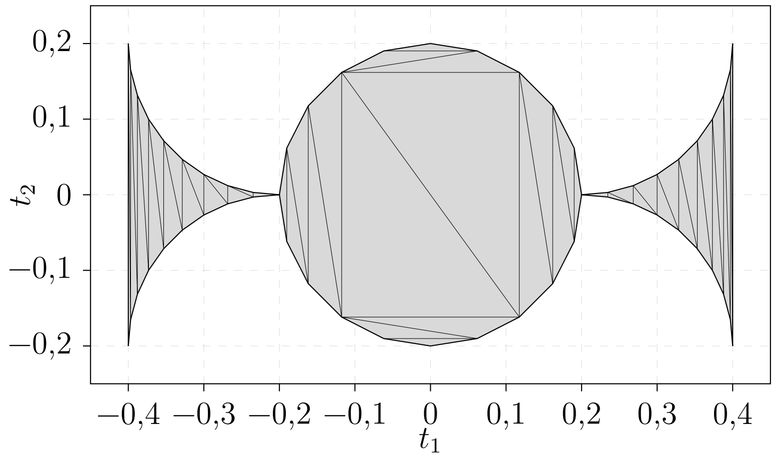

Figura 3.14: Il poligono generalizzato $\tilde{D}_2$ come triangolato da matlab.

verso l'alto o il basso delle componenti laterali.

La Tabella 3.4 riporta il numero di nodi di cubatura trovati dai due metodi applicati su $\tilde{D}_2$. Si può vedere che, in questo caso, la compressione CaTch permette di utilizzare circa il 94% di nodi in meno rispetto al metodo senza compressione.

Nella Tabella 3.5, invece, si può vedere che entrambi i metodi convergono alla soluzione anche a un grado di precisione molto basso nel caso $\lambda = 1$; l'errore decade alla precisione di macchina già per $\delta = 4$. Se si considera il solo metodo con compressione CaTch e si varia λ, tenendo presente che $\|\mathcal{K}\| \approx 7{,}705\,83 \cdot 10^{-4}$ perché è cambiato il dominio di integrazione, si nota che la convergenza di cui sopra

Tabella 3.4: Numero di nodi di cubatura su $\tilde{D}_2$ al variare dell'ADE.

ADE	N_{nodi}	$N_{\text{nodi}}^{\text{CaTch}}$	$N_{\text{nodi}}^{\text{CaTch}}/N_{\text{nodi}}$
2	156	6	0,038 46
4	312	15	0,048 07
6	572	28	0,048 95
8	832	45	0,054 08
10	1 248	66	0,052 88
12	1 664	91	0,054 68
14	2 184	120	0,054 94
16	2 704	153	0,056 58
18	3 432	190	0,055 36
20	4 056	231	0,056 95
22	4 836	276	0,057 07
24	5 668	325	0,057 33
26	6 760	378	0,055 91
28	7 800	435	0,055 76
30	8 892	496	0,055 78

Tabella 3.5: Confronto tra metodi senza compressione e con compressione degli errori relativi calcolati a partire dal vettore soluzione del sistema lineare in (2.2). Si è risolta l'equazione (3.4) su $\tilde{D}_2$ con $\lambda = 1$.

	Senza compressione		**Con compressione**	
δ	E_2^{rel}	E_∞^{rel}	E_2^{rel}	E_∞^{rel}
2	$3{,}162\,37 \cdot 10^{-8}$	$2{,}128\,60 \cdot 10^{-8}$	$0{,}000\,28$	$0{,}000\,24$
4	$9{,}412\,73 \cdot 10^{-16}$	$1{,}947\,75 \cdot 10^{-15}$	$1{,}730\,95 \cdot 10^{-16}$	$1{,}770\,68 \cdot 10^{-16}$
6	$1{,}193\,30 \cdot 10^{-15}$	$2{,}800\,03 \cdot 10^{-15}$	$2{,}931\,77 \cdot 10^{-16}$	$5{,}065\,22 \cdot 10^{-16}$
8	$1{,}493\,00 \cdot 10^{-15}$	$3{,}386\,57 \cdot 10^{-15}$	$2{,}998\,22 \cdot 10^{-16}$	$3{,}225\,30 \cdot 10^{-16}$
10	$1{,}701\,95 \cdot 10^{-15}$	$4{,}641\,21 \cdot 10^{-15}$	$4{,}019\,20 \cdot 10^{-16}$	$6{,}532\,27 \cdot 10^{-16}$
12	$1{,}910\,76 \cdot 10^{-15}$	$4{,}716\,97 \cdot 10^{-15}$	$5{,}574\,17 \cdot 10^{-16}$	$1{,}113\,86 \cdot 10^{-15}$
14	$2{,}438\,09 \cdot 10^{-15}$	$6{,}899\,22 \cdot 10^{-15}$	$5{,}345\,74 \cdot 10^{-16}$	$9{,}408\,02 \cdot 10^{-16}$
16	$2{,}445\,56 \cdot 10^{-15}$	$4{,}710\,09 \cdot 10^{-15}$	$6{,}312\,70 \cdot 10^{-16}$	$9{,}420\,19 \cdot 10^{-16}$
18	$2{,}965\,16 \cdot 10^{-15}$	$7{,}867\,47 \cdot 10^{-15}$	$9{,}029\,67 \cdot 10^{-16}$	$1{,}888\,19 \cdot 10^{-15}$
20	$3{,}529\,24 \cdot 10^{-15}$	$9{,}240\,50 \cdot 10^{-15}$	$7{,}737\,40 \cdot 10^{-16}$	$1{,}722\,80 \cdot 10^{-15}$

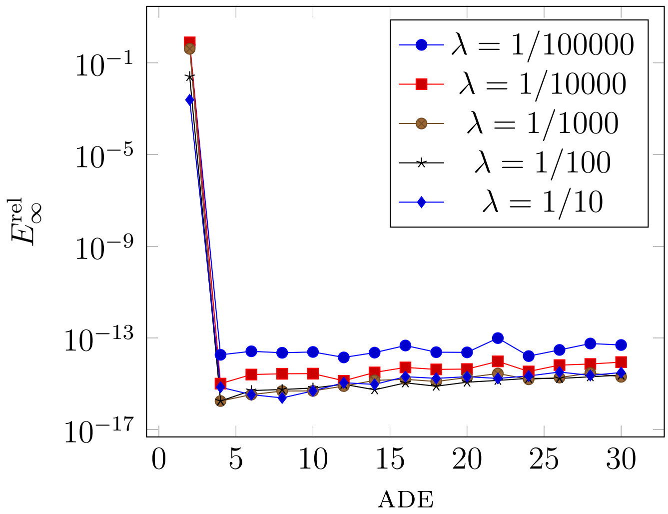

Figura 3.15: Confronto dei massimi errori relativi commessi dal metodo con compressione CaTch nei nodi di quadratura per risolvere (3.4) su $\tilde{D}_2$ al variare di λ e in funzione dell'ADE.

si ritrova praticamente identica. Questi risultati sono mostrati nella Figura 3.15; per consentire un confronto di maggior significato, si sono scelti λ di ordini di grandezza più piccoli.

Nonostante si siano usati λ più piccoli, anche il condizionamento del sistema è minore, come si può vedere nella Figura 3.16. Per $\lambda = 1/100000$, infatti, il condizionamento è dell'ordine di 10^3, ben al di sotto del 10^6 visto integrando su D_2.

La differenza maggiore registrata rispetto al caso di D_2 è il confronto tra i due metodi per quanto riguarda il tempo necessario a ottenere una soluzione approssimata. Come si può vedere nella Figura 3.17, la compressione CaTch si dimostra più veloce per la maggior parte degli ADE testati. Poiché la triangolazione di $\tilde{D}_2$ è molto complicata, ridurre del 94% i nodi di cubatura permette di ottenere sistemi lineari di dimensione molto bassa rispetto a quelli ottenuti senza compressione.

Si consideri ora la seguente equazione integrale su D_2

$$\lambda x(t_1, t_2) - \int_{D_2} (s_1^2 - s_2^2) \mathrm{e}^{t_1+t_2+s_1+s_2} x(s_1, s_2) \, \mathrm{d}s_1 \, \mathrm{d}s_2 = y(t_1, t_2) \tag{3.6}$$

Poiché la funzione nucleo $K(t_1, t_2, s_1, s_2) = (s_1^2 - s_2^2) \exp(t_1 + t_2 + s_1 + s_2)$ è continua, l'operatore $\mathcal{K}$ associato è compatto. Dalle approssimazioni numeriche risulta che $\|\mathcal{K}\| \approx 0{,}012\,085\,9$.

Anche in questo caso si è scelta y di modo che $x(t_1, t_2) = (t_1 + t_2)^2$. Ciò è reso

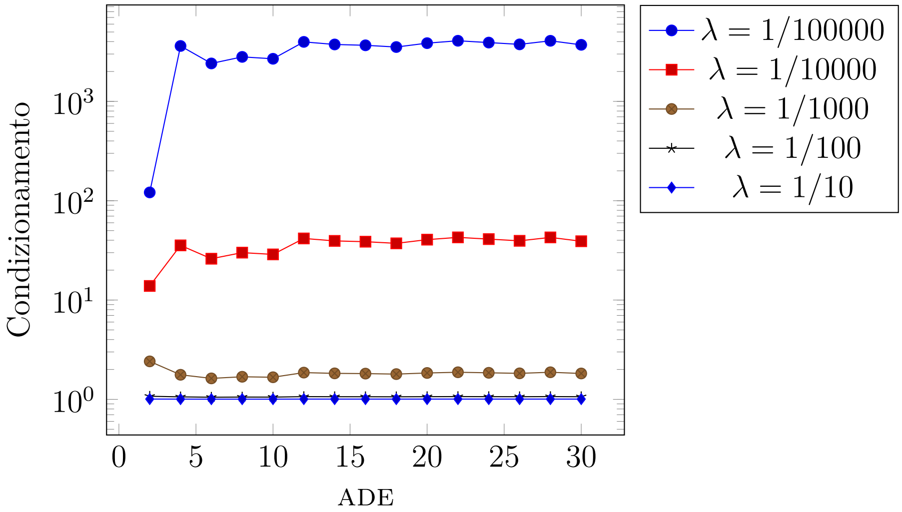

Figura 3.16: Confronto del condizionamento della matrice associata al sistema lineare porto dal metodo di Nyström per risolvere (3.4) su $\tilde{D}_2$ al variare di λ e in funzione dell'ADE (con metodo di compressione CaTch).

più facile dal fatto che

$$\int_{D_2} e^{t_1+t_2+s_1+s_2}(s_1^2 - s_2^2)x(s_1, s_2)\, ds_1\, ds_2 = e^{t_1+t_2} \int_{D_2} e^{s_1+s_2}(s_1^2 - s_2^2)x(s_1, s_2)\, ds_1\, ds_2 \tag{3.7}$$

e, quindi, si può scegliere il termine noto anche in modo esatto risolvendo l'integrale al secondo membro.

Come si può vedere nella Figura 3.18, l'errore relativo dapprima decade all'aumentare dell'ADE, dopo si stabilizza su valori prossimi alla precisione di macchina per $\lambda \gg \|\mathcal{K}\|$ e superiori altrimenti. In questo caso, si nota che i valori della soluzione nei nodi di cubatura sono dell'ordine di 10^{-2}, perciò è arduo che gli errori relativi calcolati abbiano lo stesso ordine di grandezza della precisione di macchina.[1]

Oltre a ciò, occorre considerare il condizionamento del sistema lineare al variare di λ, riportato nella Figura 3.19. Dagli esperimenti risulta che il condizionamento sia sempre maggiore di 1 in modo apprezzabile, anche nei casi in cui $\lambda > \|\mathcal{K}\|$; per di più, come si è già visto, esso tende a crescere se λ tende a 0.

Se, invece, si sceglie y tale che $x(t_1, t_2) = |t_1 + t_2|$, la convergenza è molto più lenta: come riportato nella Figura 3.20, il decadimento degli errori relativi non è sufficientemente rapido per arrivare alla precisione di macchina entro il grado di

[1] Questo comportamento degli errori relativi, che compare anche in casi mostrati in seguito, sarà argomento di ricerca in futuro.

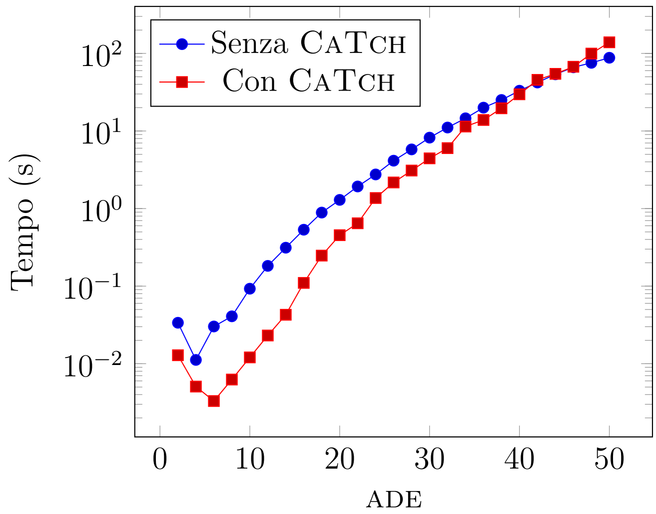

Figura 3.17: Confronto dei tempi di calcolo per la risoluzione di (3.4) su $\tilde{D}_2$ applicando o meno la compressione CaTch.

precisione preso in esame. Si noti, poi, che i λ utilizzati sono molto più grandi di quelli che compaiono nel caso precedente. Ciò succede nonostante i condizionamenti dei sistemi lineari, visibili nella Figura 3.21, non siano particolarmente elevati.

Se si vuole risolvere (3.6) sul dominio $\tilde{D}_2$, scegliendo sempre y di modo che $x(t_1, t_2) = (t_1 + t_2)^2$ e tenendo conto del fatto che $\|\mathcal{K}\| \approx 0{,}011\,294$, si ottengono risultati di natura diversa. Mentre, infatti, l'errore relativo decade per gradi di precisione inferiori a 10 e si stabilizza da quel punto in poi, come si vede nella Figura 3.22, il condizionamento dei sistemi lineari non è particolarmente elevato nei casi presi in esame; già per $\lambda = 1/10$ esso è molto vicino a 1, come si vede nella Figura 3.23.

Scelta, invece, y per cui $x(t_1, t_2) = |t_1 + t_2|$ su $\tilde{D}_2$, si osserva un comportamento simile a quanto visto per il caso di D_2: poiché la funzione sotto l'integrale e, quindi, il termine noto sono meno regolari, la convergenza del metodo è più lenta. La Figura 3.24, però, mostra che, in questo caso, il decadimento degli errori relativi è leggermente più rapido rispetto a quanto visto su D_2, sebbene l'andamento generale rimanga lo stesso. Anche in questo caso, il condizionamento dei sistemi lineari non risulta particolarmente elevato.

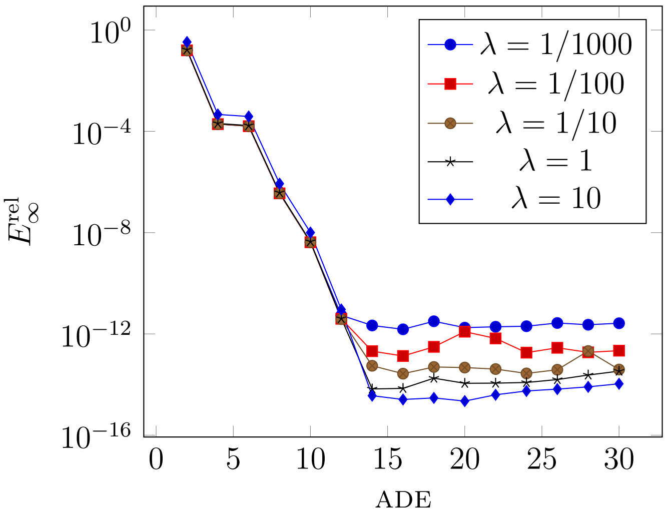

Figura 3.18: Confronto dei massimi errori relativi commessi dal metodo con compressione CaTch nei nodi di quadratura per risolvere (3.6) al variare di λ e in funzione dell'ADE.

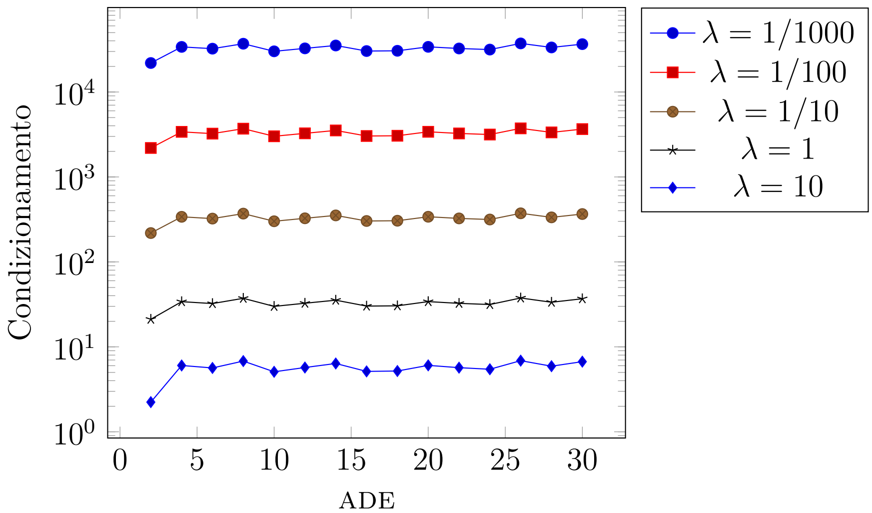

Figura 3.19: Confronto del condizionamento della matrice associata al sistema lineare porto dal metodo di Nyström per risolvere (3.6) al variare di λ e in funzione dell'ADE (con metodo di compressione CaTch).

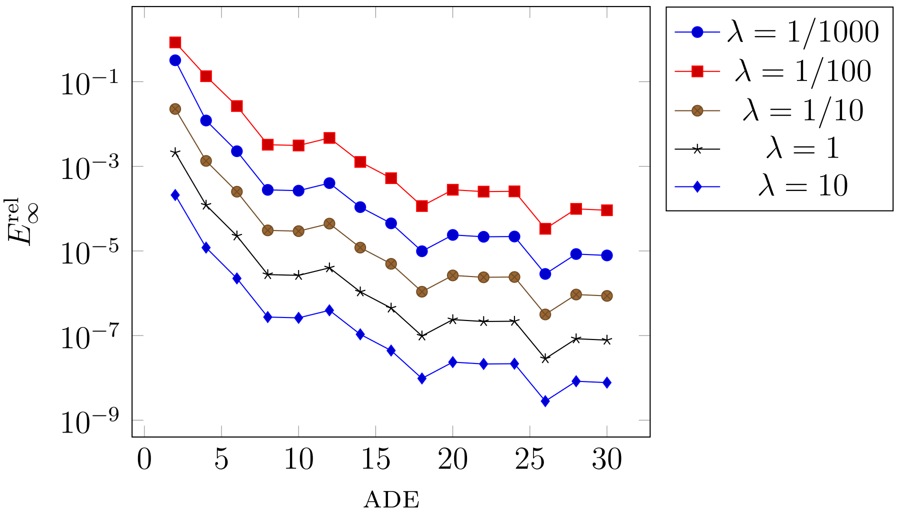

Figura 3.20: Confronto dei massimi errori relativi commessi dal metodo con compressione CaTch nei nodi di quadratura per risolvere (3.6) con soluzione $x(t_1, t_2) = |t_1 + t_2|$ al variare di λ e in funzione dell'ADE.

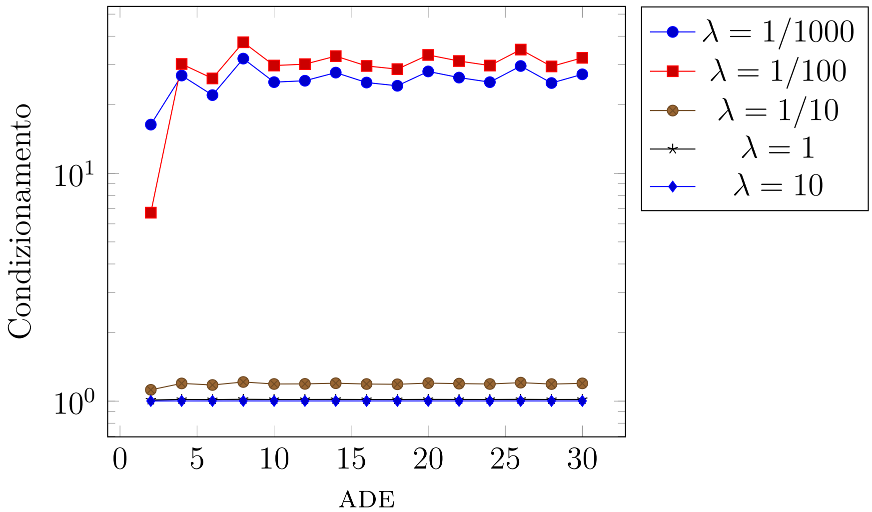

Figura 3.21: Confronto del condizionamento della matrice associata al sistema lineare porto dal metodo di Nyström per risolvere (3.6) con soluzione $x(t_1, t_2) = |t_1 + t_2|$ al variare di λ e in funzione dell'ADE (con metodo di compressione CaTch).

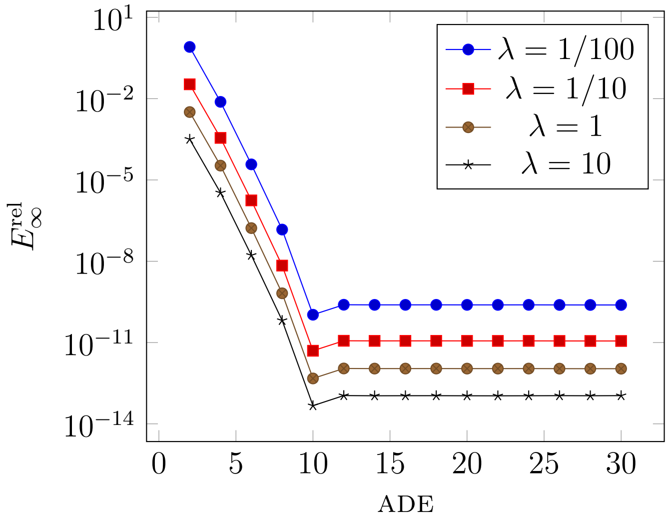

Figura 3.22: Confronto dei massimi errori relativi commessi dal metodo con compressione CaTch nei nodi di quadratura per risolvere (3.6) su $\tilde{D}_2$ al variare di λ e in funzione dell'ADE.

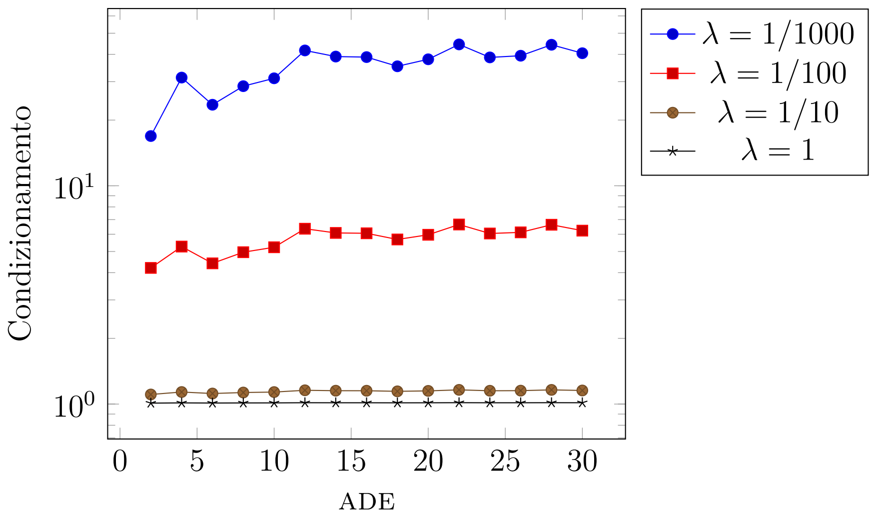

Figura 3.23: Confronto del condizionamento della matrice associata al sistema lineare porto dal metodo di Nyström per risolvere (3.6) su $\tilde{D}_2$ al variare di λ e in funzione dell'ADE (con metodo di compressione CaTch).

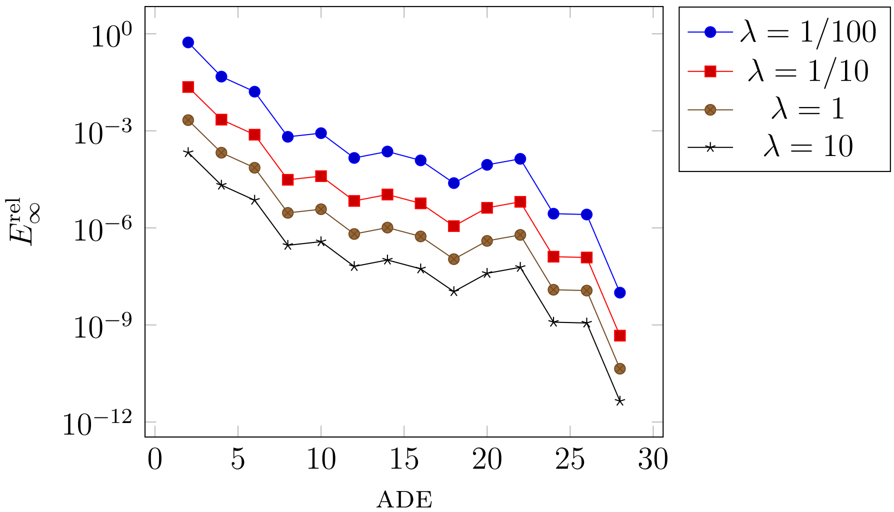

Figura 3.24: Confronto dei massimi errori relativi commessi dal metodo con compressione CaTch nei nodi di quadratura per risolvere (3.6) su $\tilde{D}_2$ con soluzione $x(t_1, t_2) = |t_1 + t_2|$ al variare di λ e in funzione dell'ADE.

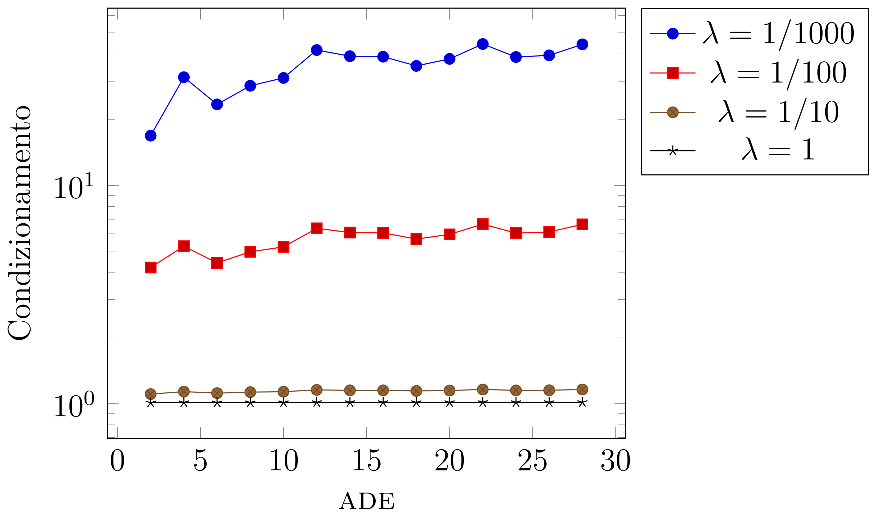

Figura 3.25: Confronto del condizionamento della matrice associata al sistema lineare porto dal metodo di Nyström per risolvere (3.6) su $\tilde{D}_2$ con soluzione $x(t_1, t_2) = |t_1 + t_2|$ al variare di λ e in funzione dell'ADE (con metodo di compressione CaTch).

3.3 Un poligono generalizzato non semplicemente connesso

Si considerі il poligono generalizzato D_3 rappresentato nella Figura 3.26. Questo dominio non è semplicemente connesso: si notino, infatti, i tre "buchi" tra l'icosagono esterno e il triangolo all'interno. La compressione CaTch riesce, in questo caso, a ridurre di circa l'85% il numero di nodi di cubatura utilizzati; nella Tabella 3.6 sono riportati i risultati al variare del grado di precisione.

Si consideri la seguente equazione integrale su D_3

$$\lambda x(t_1, t_2) - \int_{D_3} s_1 s_2 \sin(t_1 + t_2) x(s_1, s_2) \, \mathrm{d}s_1 \, \mathrm{d}s_2 = y(t_1, t_2) \tag{3.8}$$

che ha la stessa funzione nucleo della (3.4); grazie a ciò, è già noto che l'operatore $\mathcal{K}$ associato all'integrale è compatto. Con approssimazioni numeriche si trova $\|\mathcal{K}\| \approx 0{,}228\,14$.

Si è di nuovo scelta y di modo che $x(t_1, t_2) = (t_1 + t_2)^2$. La Tabella 3.7 riporta gli errori relativi commessi dai metodi senza compressione e con compressione nel risolvere (3.8) con $\lambda = 1$; con entrambi i metodi, l'errore raggiunge la precisione di macchina già a grado di precisione molto basso, per lo stesso motivo visto nella (3.5).

Come si può vedere nella Figura 3.27, questo comportamento si verifica anche se $\lambda < \|\mathcal{K}\|$, benché gli errori relativi non giungano sempre all'ordine di grandezza della precisione di macchina. La Figura 3.28 mostra che i sistemi lineari diventano malcondizionati per λ piccolo.

Si consideri, ora, la seguente equazione integrale su D_3

$$\lambda x(t_1, t_2) - \int_{D_2} \left(s_1^2 - s_2^2\right) \mathrm{e}^{t_1 + t_2 + s_1 + s_2} x(s_1, s_2) \, \mathrm{d}s_1 \, \mathrm{d}s_2 = y(t_1, t_2) \tag{3.9}$$

che ha la stessa forma di (3.6); sulla base di ciò, è già noto che l'operatore integrale è compatto. Dalle approssimazioni numeriche risulta che $\|\mathcal{K}\| \approx 2{,}264\,31$.

Si è scelta di nuovo y di modo che $x(t_1, t_2) = (t_1 + t_2)^2$. Valgono, dunque, gli stessi ragionamenti fatti in (3.7). Occorre tenere conto, però, del fatto che negli esperimenti che seguono il valore dell'integrale per calcolare la soluzione è stato inserito in matlab già approssimato, perché la sua forma esatta è molto complicata.

Nella Figura 3.29 sono riportati gli errori relativi commessi al variare dell'ade

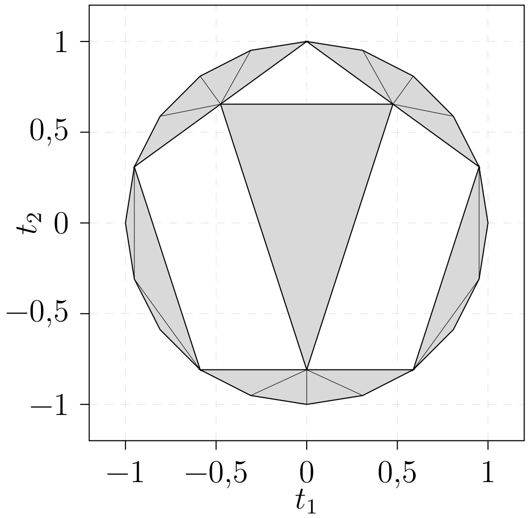

Figura 3.26: Il poligono generalizzato D_3 come triangolato da MATLAB.

Tabella 3.6: Numero di nodi di cubatura su D_3 al variare dell'ADE.

ADE	N_{nodi}	$N_{\text{nodi}}^{\text{CaTch}}$	$N_{\text{nodi}}^{\text{CaTch}}/N_{\text{nodi}}$
2	57	6	0,105 26
4	114	15	0,131 57
6	209	28	0,133 97
8	304	45	0,148 02
10	456	66	0,144 73
12	608	91	0,149 67
14	798	120	0,150 37
16	988	153	0,154 85
18	1 254	190	0,151 51
20	1 482	231	0,155 87
22	1 767	276	0,156 19
24	2 071	325	0,156 92
26	2 470	378	0,153 03
28	2 850	435	0,152 63
30	3 249	496	0,152 66

Tabella 3.7: Confronto tra metodi senza compressione e con compressione degli errori relativi calcolati a partire dal vettore soluzione del sistema lineare in (2.2). Si è risolta l'equazione (3.8) con $\lambda = 1$.

	Senza compressione		**Con compressione**	
δ	E_2^{rel}	E_∞^{rel}	E_2^{rel}	E_∞^{rel}
2	$9{,}160\,59 \cdot 10^{-4}$	$6{,}840\,58 \cdot 10^{-4}$	$1{,}415\,96 \cdot 10^{-2}$	$1{,}152\,02 \cdot 10^{-2}$
4	$4{,}879\,22 \cdot 10^{-16}$	$8{,}111\,28 \cdot 10^{-16}$	$2{,}694\,15 \cdot 10^{-16}$	$3{,}476\,26 \cdot 10^{-16}$
6	$5{,}899\,24 \cdot 10^{-16}$	$1{,}028\,96 \cdot 10^{-15}$	$2{,}794\,58 \cdot 10^{-16}$	$3{,}454\,70 \cdot 10^{-16}$
8	$7{,}319\,85 \cdot 10^{-16}$	$2{,}051\,90 \cdot 10^{-15}$	$3{,}569\,85 \cdot 10^{-16}$	$4{,}559\,78 \cdot 10^{-16}$
10	$9{,}698\,12 \cdot 10^{-16}$	$2{,}389\,95 \cdot 10^{-15}$	$3{,}125\,84 \cdot 10^{-16}$	$4{,}552\,29 \cdot 10^{-16}$
12	$1{,}110\,79 \cdot 10^{-15}$	$2{,}845\,18 \cdot 10^{-15}$	$4{,}372\,66 \cdot 10^{-16}$	$7{,}966\,51 \cdot 10^{-16}$
14	$1{,}242\,38 \cdot 10^{-15}$	$3{,}415\,06 \cdot 10^{-15}$	$4{,}969\,07 \cdot 10^{-16}$	$7{,}968\,49 \cdot 10^{-16}$
16	$1{,}332\,46 \cdot 10^{-15}$	$3{,}530\,66 \cdot 10^{-15}$	$5{,}240\,29 \cdot 10^{-16}$	$7{,}980\,89 \cdot 10^{-16}$
18	$1{,}622\,35 \cdot 10^{-15}$	$4{,}439\,96 \cdot 10^{-15}$	$7{,}323\,58 \cdot 10^{-16}$	$1{,}367\,55 \cdot 10^{-15}$
20	$1{,}715\,13 \cdot 10^{-15}$	$4{,}212\,33 \cdot 10^{-15}$	$6{,}300\,86 \cdot 10^{-16}$	$1{,}707\,70 \cdot 10^{-15}$

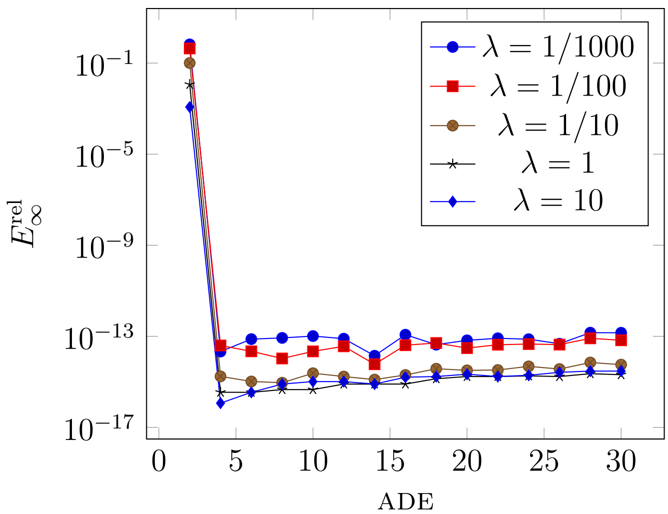

Figura 3.27: Confronto dei massimi errori relativi commessi dal metodo con compressione CaTch nei nodi di quadratura per risolvere (3.8) al variare di λ e in funzione dell'ADE.

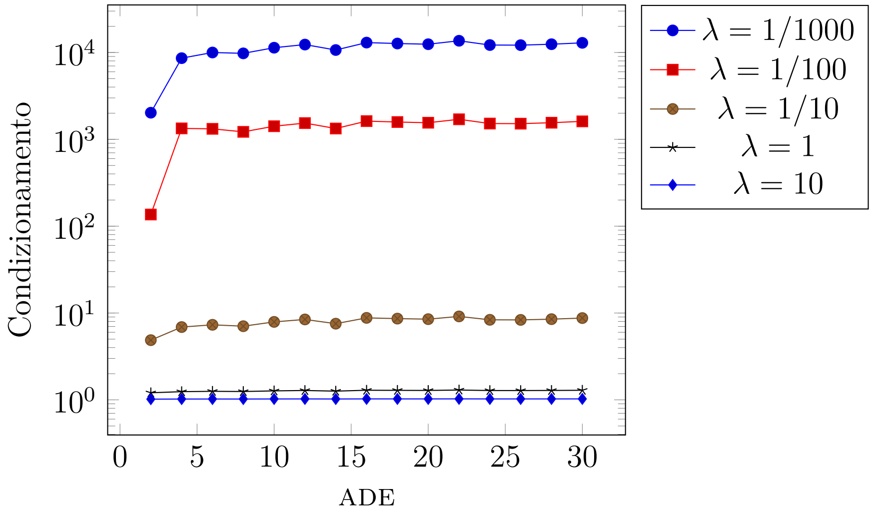

Figura 3.28: Confronto del condizionamento della matrice associata al sistema lineare porto dal metodo di Nyström per risolvere (3.8) al variare di λ e in funzione dell'ADE (con metodo di compressione CATCH).

e per diversi λ. Si nota che tali errori decadono fino a $\delta = 12$ e poi si stabilizzano su un valore pressoché costante e inversamente proporzionale a λ, in modo simile a quanto visto nelle Figure 3.18 e 3.22.

Per contro, il condizionamento dei sistemi lineari utilizzati per estrarre le soluzioni è relativamente basso, come è possibile vedere nella Figura 3.30. Si consideri, ad esempio, il caso $\lambda = 100$: benché il condizionamento del sistema lineare in (2.2) sia all'incirca 1,02 per ogni grado di precisione preso in considerazione, l'errore relativo in norma del sup non scende al di sotto di $5{,}6 \cdot 10^{-12}$.

Nella Figura 3.31, invece, si trovano i tempi totali di calcolo della soluzione della (3.9) utilizzando i metodi senza compressione e con compressione. Questo caso è "intermedio" rispetto a quelli visti rispettivamente per D_2 e $\tilde{D}_2$, perché il numero di triangoli di cui è composto D_3 è maggiore di quello di D_2 e minore di quello di $\tilde{D}_2$. Si nota, infatti, che per gradi di precisione inferiori a 18 la formula di cubatura compressa permette di risparmiare tempo, mentre per ADE più alti la compressione della formula di cubatura richiede più tempo di quello guadagnato nel risolvere il sistema lineare.

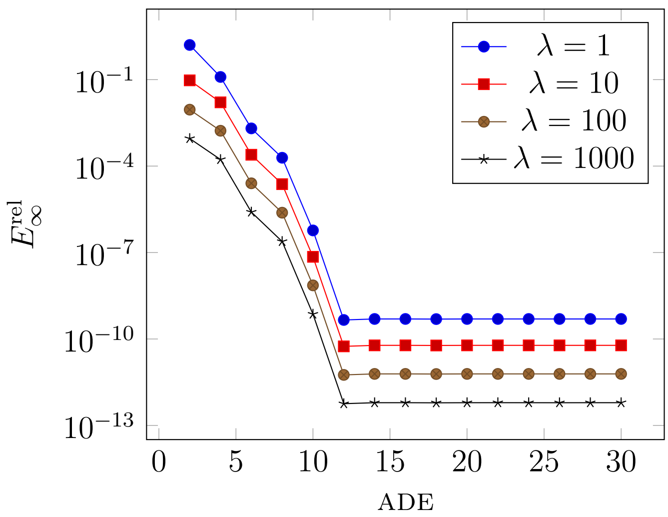

Figura 3.29: Confronto dei massimi errori relativi commessi dal metodo con compressione CaTch nei nodi di quadratura per risolvere (3.9) al variare di λ e in funzione dell'ADE.

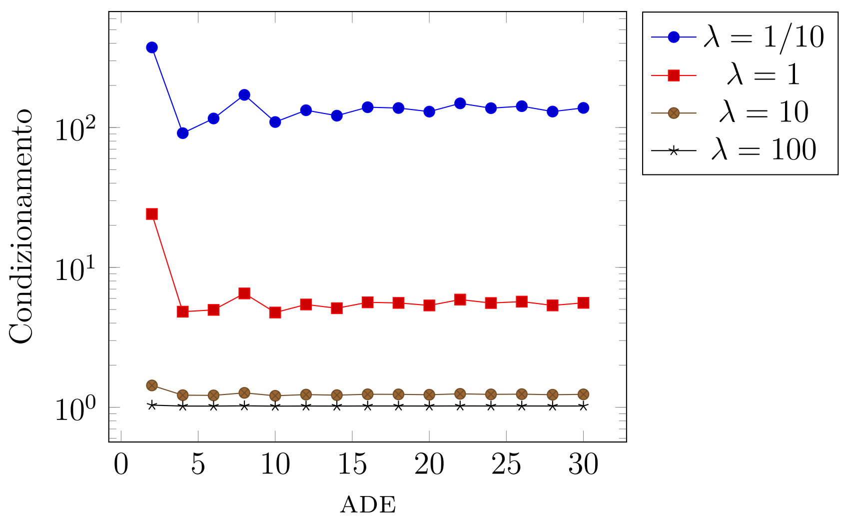

Figura 3.30: Confronto del condizionamento della matrice associata al sistema lineare porto dal metodo di Nyström per risolvere (3.9) al variare di λ e in funzione dell'ADE (con metodo di compressione CaTch).

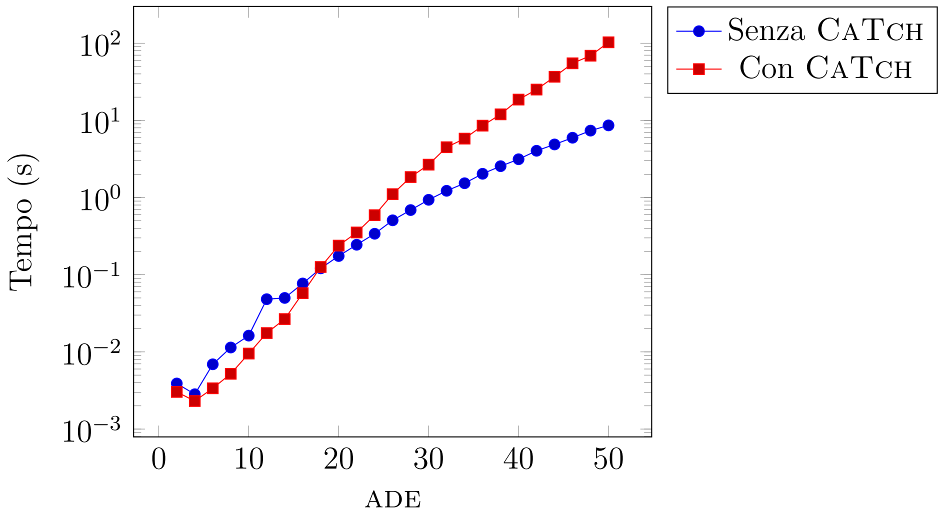

Figura 3.31: Confronto del tempo totale per risolvere (3.9) con $\lambda = 1$ tra il metodo senza compressione e quello con compressione.

3.4 Soluzioni e funzioni nucleo non lisce

Fino ad ora si sono scelti problemi le cui funzioni nucleo e soluzioni, sulla base delle quali si è scelto anche il termine noto, sono lisce sul rispettivo dominio. Questa scelta è stata fatta per rendere più facile la ricerca di un termine noto adeguato e l'analisi dell'errore. La regolarità di tutte le funzioni in gioco, però, non consente di saggiare in modo completo il decadimento dell'errore in un caso più generale, ovverosia quando non sia possibile scegliere *ad hoc* il termine noto.

Si consideri, dunque, l'equazione integrale

$$\lambda x(t_1, t_2) - \int_D (t_1 + t_2 + s_1 + s_2) x(s_1, s_2) \, \mathrm{d}s_1 \, \mathrm{d}s_2 = y(t_1, t_2) \tag{3.10}$$

con y scelta di modo che $x(t_1, t_2) = (t_1^2 + t_2^2)^{5/2}$. Con questa scelta, la regolarità della funzione integranda è $\mathcal{C}^2(D)$, ma non $\mathcal{C}^3(D)$. Al contrario degli esempi precedenti, l'integrale all'interno dell'equazione è stato calcolato interpolando i valori nei singoli punti (t_1, t_2) e tenendo conto del fatto che deve essere della forma $\alpha + \beta(t_1 + t_2)$. Si rimanda alle §§A.2.2–A.2.3 per ulteriori dettagli.

Posto $D = \tilde{D}_2$ come nella Figura 3.14, si trova $\|\mathcal{K}\| \approx 0{,}095\,14$. La Figura 3.32 mostra che il decadimento degli errori relativi è più graduale rispetto a quanto visto nella §3.2: mentre nella Figura 3.22 si può notare un andamento con velocità di decadimento più che esponenziale nella prima parte, in questo caso l'errore sembra

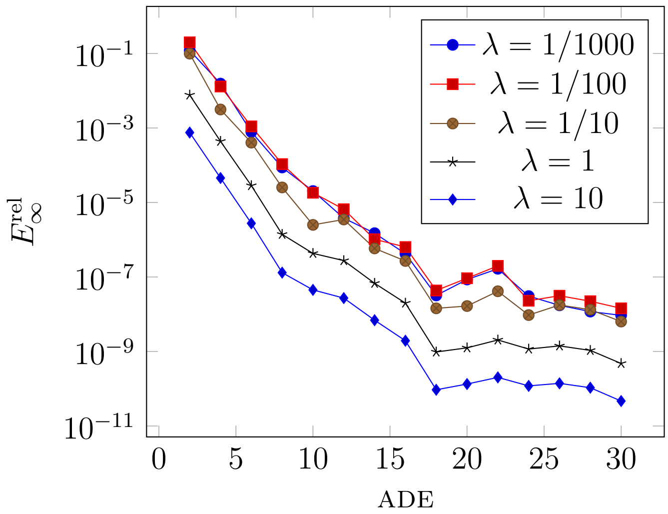

Figura 3.32: Confronto dei massimi errori relativi commessi dal metodo con compressione CaTch nei nodi di quadratura per risolvere (3.10) su $\tilde{D}_2$ al variare di λ e in funzione dell'ADE.

assumere un decadimento polinomiale.

Confrontando i condizionamenti riportati in Figura 3.33 con quelli nella Figura 3.23, si può vedere che essi paiono non essere correlati al fenomeno appena descritto. Ciò è dovuto al fatto che il sistema lineare è costruito senza sapere nulla su x, perché lo scopo del sistema è proprio di approssimare x a partire da K e y.

Se, invece, si pone $D = D_3$ come rappresentato nella Figura 3.26, si trova $\|\mathcal{K}\| \approx 1{,}883\,04$. Anche in questo caso, gli errori relativi decadono più lentamente rispetto agli esempi visti nella §3.3, come si può vedere nella Figura 3.34. I condizionamenti, riportati nella Figura 3.35, appaiono di simile andamento rispetto a quelli trovati nella risoluzione di (3.9).

Si consideri, invece, la seguente equazione integrale su D_2, rappresentato nella Figura 3.10

$$\lambda x(t_1, t_2) - \int_{D_2} \left(\sqrt{|t_1 t_2|} + \sqrt{|s_1 s_2|}\right) x(s_1, s_2)\, \mathrm{d}s_1\, \mathrm{d}s_2 = y(t_1, t_2) \tag{3.11}$$

con y scelta di modo che $x(t_1, t_2) = |t_1 + t_2|$. In questo caso, sia la funzione nucleo sia la soluzione scelta sono continue, ma non ovunque differenziabili. Si ha $\|\mathcal{K}\| \approx 0{,}053\,17$.

Come è possibile vedere nella Figura 3.36, gli errori relativi decadono in modo quasi impercettibile; nei casi in cui $\lambda < \|\mathcal{K}\|$, poi, tale errore relativo resta sopra

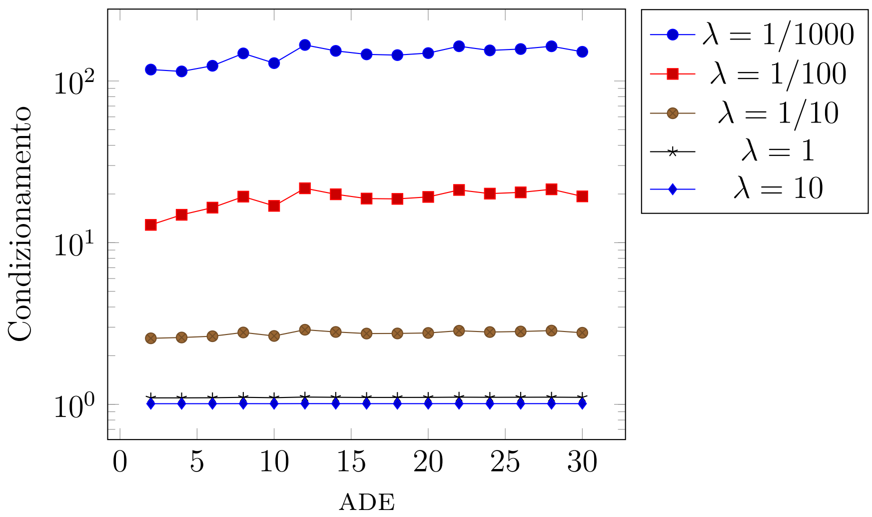

Figura 3.33: Confronto del condizionamento della matrice associata al sistema lineare porto dal metodo di Nyström per risolvere (3.10) su $\tilde{D}_2$ al variare di λ e in funzione dell'ADE (con metodo di compressione CaTch).

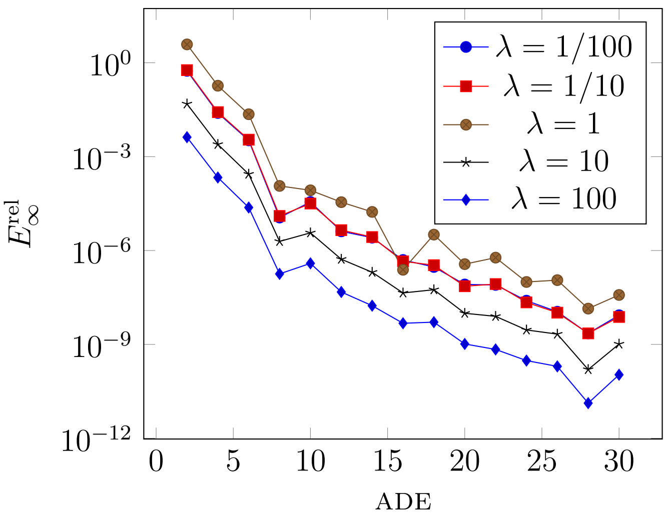

Figura 3.34: Confronto dei massimi errori relativi commessi dal metodo con compressione CaTch nei nodi di quadratura per risolvere (3.10) su D_3 al variare di λ e in funzione dell'ADE.

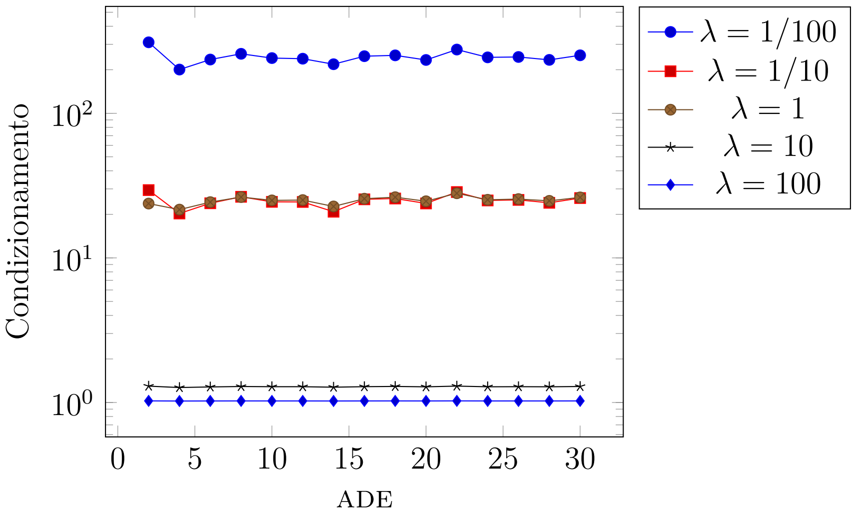

Figura 3.35: Confronto del condizionamento della matrice associata al sistema lineare porto dal metodo di Nyström per risolvere (3.10) su D_3 al variare di λ e in funzione dell'ADE (con metodo di compressione CaTch).

l'ordine di grandezza di 10^{-1} per i gradi di precisione presi in esame. Ciò accade nonostante i condizionamenti dei sistemi lineari non siano particolarmente elevati.

Questo comportamento si può spiegare col fatto che la funzione $|t_1 + t_2|$ non è facilmente riconducibile a funzioni che includano somme e prodotti di $\sqrt{|t_1 t_2|}$, le quali sono restituite come soluzioni dal metodo di Nyström in questo caso.

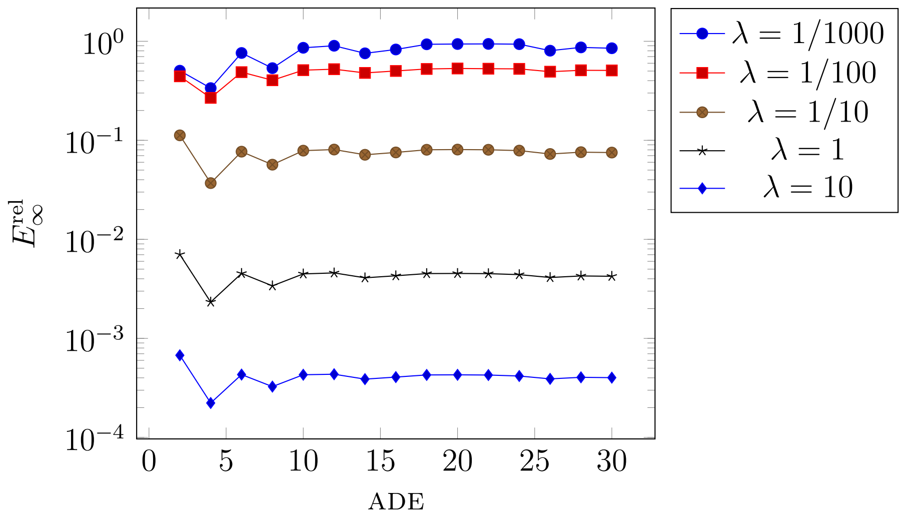

Figura 3.36: Confronto dei massimi errori relativi commessi dal metodo con compressione CaTch nei nodi di quadratura per risolvere (3.11) al variare di λ e in funzione dell'ADE.

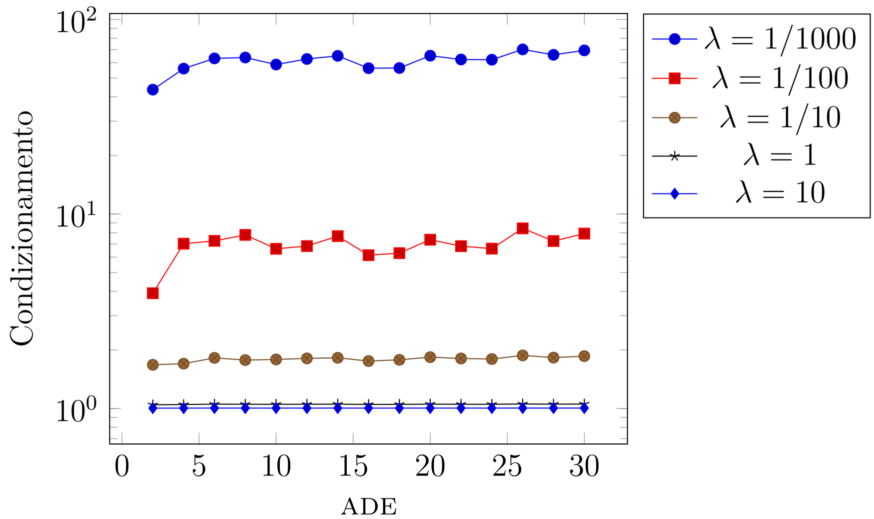

Figura 3.37: Confronto del condizionamento della matrice associata al sistema lineare porto dal metodo di Nyström per risolvere (3.11) al variare di λ e in funzione dell'ADE (con metodo di compressione CaTch).

A

Listati

Nell'apposita *repository* su *GitHub* [30] sono disponibili tutti i codici utilizzati per ottenere risultati discussi nel cap. 3. In quest'appendice se ne riporta una parte per facilità di consultazione.

A.1 Metodo di Nyström

Utilizzando gli *script* reperibili su [31], è possibile implementare in MATLAB il metodo di Nyström descritto al cap. 2 con formule di cubatura che abbiano alto grado di precisione, pochi nodi di cubatura interni e pesi positivi.

Si programma innanzitutto una funzione che, dati nodi e pesi di cubatura e le funzioni e i parametri noti del problema in (1.1), restituisce la soluzione del sistema lineare in (2.2), che poi può essere usata in (2.3) per ottenere una soluzione approssimata di (1.1).

Listato A.1: Funzione per la risoluzione del sistema lineare descritto in (2.2).

```
function [soluzione, matrice, numero_nodi] =
sistema_lineare_nystrom(XY, W, K, y, lambda)

numero_nodi = length(W);
matrice = zeros(numero_nodi, numero_nodi);

for riga = 1:numero_nodi
  for colonna = 1:numero_nodi
    matrice(riga,colonna) = lambda * (riga == colonna)
- W(colonna) * K(XY(riga,1), XY(riga,2), XY(colonna,1),
XY(colonna,2));
```

```
  end
end

termine_noto = y(XY(:,1), XY(:,2));
soluzione = matrice \ termine_noto;
```

A partire da ciò, si può scrivere una funzione che calcoli il tempo t_{cub} per estrarre una formula di cubatura, il tempo t_{comp} per comprimerla e i tempi t_s e t_s^{CATCH} per risolvere i sistemi lineari senza e con compressione rispettivamente. Chiamati $t_{\text{nC}} = t_{\text{cub}} + t_s$ e $t_{\text{C}} = t_{\text{cub}} + t_{\text{comp}} + t_s^{\text{CATCH}}$, si vuole sapere quando e se $t_{\text{C}} < t_{\text{nC}}$, ossia se la compressione CATCH fornisca un vantaggio in termini di tempo di computazione.

Listato A.2: Funzione che registra i tempi effettivi di calcolo per l'estrazione delle formule di cubatura e la risoluzione dei sistemi lineari in (2.2).

```
function [t_cubatura, t_compressione, t_sys, t_sys_c] =
cronometro_nystrom(ade, poligono, K, y, lambda)
tic;
xyw = polygauss_2018(ade, poligono);
t_cubatura = toc;

tic;
[xyc, wc] = comprexcub(ade, xyw(:, 1:2), xyw(:, 3), 1);
t_compressione = toc;

tic;
[~, ~, ~] = sistema_lineare_nystrom(xyw(:, 1:2), xyw(:,
3), K, y, lambda);
t_sys = toc;

tic;
[~, ~, ~] = sistema_lineare_nystrom(xyc, wc, K, y,
lambda);
t_sys_c = toc;
```

Si programma, poi, la raccolta degli errori assoluti in norma euclidea e in norma del sup e dei condizionamenti delle matrici dei sistemi lineari in (2.2). Si è voluto per ciascun caso valutare i risultati sia nel caso in cui si comprima la formula di cubatura porta da `polygauss_2018` sia nel caso in cui non la si comprima: in questo modo, è possibile confrontare i risultati e notare eventuali discrepanze.

Listato A.3: Funzione per il calcolo degli errori in norma euclidea e del sup sui nodi di cubatura.

```
function [err, err_c, numero_nodi, numero_nodi_c, condiz, condiz_c, x_controllo, x_controllo_c] = errori_nystrom(ade, poligono, K, y, lambda, x_vera)

xyw = polygauss_2018(ade, poligono);
[xyc, wc] = comprexcub(ade, xyw(:, 1:2), xyw(:, 3), 1);

[soluzione, matrice, numero_nodi] = sistema_lineare_nystrom(xyw(:, 1:2), xyw(:, 3), K, y, lambda);
[soluzione_c, matrice_c, numero_nodi_c] = sistema_lineare_nystrom(xyc, wc, K, y, lambda);

condiz = cond(matrice);
condiz_c = cond(matrice_c);

x_controllo = x_vera(xyw(:,1), xyw(:,2));
x_controllo_c = x_vera(xyc(:,1), xyc(:,2));
err = abs(x_controllo - soluzione);
err_c = abs(x_controllo_c - soluzione_c);
```

Utilizzando queste tre funzioni, si sono costruite *demo* per ogni esempio trattato nel cap. 3. Riportiamo solo quelli relativi alla (3.3) per brevità. Si noti l'utilizzo della funzione `polyshape` [25] per ottenere un oggetto con le proprietà di un poligono generalizzato; ciò è particolarmente importante nei casi in cui il poligono ammetta autointersezioni o non sia semplicemente connesso.

Listato A.4: *Demo* per gli errori relativi commessi nella risoluzione di (3.3).

```
coord_poligono = [0 0; 0.2 0.1; 0.1 0.4; -0.1 0.5; -0.3 0.3; -0.1 0.2];
```

```
poligono = polyshape(coord_poligono);
K = @(t1, t2, s1, s2) sin(s1 + s2 + t1 + t2);
x_vera = @(t1, t2) t1.^2 - t2.^2;

for lambda = [0.001 0.01 0.1 1 10]
  y = @(t1, t2) (1/600).*((-1080).*cos(t1+t2) + 1080.*cos((1/10)+t1+t2) + 210.*cos((3/10)+t1+t2) + (-150).*cos((1/2)+t1+t2) + (-100).*sin(t1+t2) + 54.*sin((1/10)+t1+t2) + (-3521).*sin((3/10)+t1+t2) + 8316.*sin((2/5)+t1+t2) + (-4725).*sin((1/2)+t1+t2)) ...
  + lambda .* x_vera(t1, t2);

  fprintf('%3s %6s %16s %16s %16s %6s %16s %16s %16s\n', 'ADE', 'nodi', 'err-2', 'err-inf', 'cond', 'nodi_c', 'err-2-c', 'err-inf-c', 'cond-c');

  for ade = 2:2:30
    [err, err_c, numero_nodi, numero_nodi_c, condiz, condiz_c, x_controllo, x_controllo_c] = errori_nystrom(ade, poligono, K, y, lambda, x_vera);

    err_2 = norm(err) / norm(x_controllo);
    err_2_c = norm(err_c) / norm(x_controllo_c);
    err_inf = norm(err, Inf) / norm(x_controllo, Inf);
    err_inf_c = norm(err_c, Inf) / norm(x_controllo_c, Inf);

    fprintf('%3d %6d %16.10e %16.10e %16.10e %6d %16.10e %16.10e %16.10e\n', ade, numero_nodi, err_2, err_inf, condiz, numero_nodi_c, err_2_c, err_inf_c, condiz_c);
  end
end
```

Listato A.5: *Demo* per i tempi di calcolo impiegati nella risoluzione di (3.3).

```
coord_poligono = [0 0; 0.2 0.1; 0.1 0.4; -0.1 0.5; -0.3 0.3; -0.1 0.2];
poligono = polyshape(coord_poligono);

K = @(t1, t2, s1, s2) sin(s1 + s2 + t1 + t2);
x_vera = @(t1, t2) t1.^2 - t2.^2;
lambda = 1;

y = @(t1, t2) (1/600).*((-1080).*cos(t1+t2) + 1080.*cos((1/10)+t1+t2) + 210.*cos((3/10)+t1+t2) + (-150).*cos((1/2)+t1+t2) + (-100).*sin(t1+t2) + 54.*sin((1/10)+t1+t2) + (-3521).*sin((3/10)+t1+t2) + 8316.*sin((2/5)+t1+t2) + (-4725).*sin((1/2)+t1+t2)) ...
+ lambda .* x_vera(t1, t2);

fprintf('%3s %16s %16s %16s %16s %16s %16s\n', 'ADE', 't_cubatura', 't_compressione', 't_sys', 't_sys_c', 'tot_senza', 'tot_catch');

for ade = 2:2:30
  [t_cubatura, t_compressione, t_sys, t_sys_c] = cronometro_nystrom(ade, poligono, K, y, lambda);
  fprintf('%3d %16.10e %16.10e %16.10e %16.10e %16.10e %16.10e\n', ade, t_cubatura, t_compressione, t_sys, t_sys_c, t_cubatura + t_sys, t_cubatura + t_compressione + t_sys_c);
end
```

A.2 Calcolo dei termini noti

Negli esempi trattati nel cap. 3, si è sempre scelta la funzione termine noto y in modo da ottenere una certa soluzione x. Per raggiungere questo obiettivo, si sono sfruttate le capacità di calcolo simbolico e numerico del *Wolfram Language*.

Supponendo di aver calcolato l'integrale in (1.1) con una funzione x determinata e di aver ottenuto nel *Wolfram Language* il risultato in funzione delle variabili `t1` e `t2`, il termine noto si ottiene col codice seguente.

```
In[2]:= y[λ_, x_, integrale_] := λ x[t1, t2] - integrale
```

Il termine noto desiderato, dunque, si può trovare se si riesce a ottenere, in forma esatta o approssimata, il termine `integrale`. Calcolate le espressioni per tale termine, sono state esportate mediante lo *script* di conversione in [23].

A.2.1 Dominio esagonale

Dato che il dominio D_1 è usato in più situazioni, lo si definisce preliminarmente mediante la funzione integrata `Polygon` [24]:

```
In[3]:= esagono = Polygon[{
          {0, 0},
          {1/5, 1/10},
          {1/10, 2/5},
          {-1/10, 1/2},
          {-3/10, 3/10},
          {-1/10, 1/5}
        }];
```

Si calcola, poi, l'integrale su D_1 che compare in (3.1) ricorrendo alla funzione `Integrate` inclusa nel *Wolfram Language* [14]:

```
In[4]:= integraleEsagonoExp = Integrate[
          Exp[s1 s2 + t1 t2] (s1 + s2),
          {s1, s2} ∈ esagono
        ]
```

$$\text{Out[4]=}\ 2\, e^{\frac{1}{48}+t1\,t2}\sqrt{\frac{\pi}{3}}\ \Big(\mathrm{Erf}\Big[\frac{1}{20\sqrt{3}}\Big]+ e^{1/50}\ \Big(\mathrm{Erf}\Big[\frac{1}{20\sqrt{3}}\Big]+\mathrm{Erf}\Big[\frac{1}{4\sqrt{3}}\Big]\Big)-\mathrm{Erf}\Big[\frac{7}{20\sqrt{3}}\Big]\Big)+$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{3}{4}\ \mathtt{e}^{-\frac{9}{64}+\mathtt{t1\ t2}}\ \sqrt{\pi}\ \left(\sqrt{2}\ \mathtt{e}^{243/1600}\ \left(\mathtt{Erf}\left[\frac{1}{4\ \sqrt{2}}\right]-\mathtt{Erf}\left[\frac{9}{20\ \sqrt{2}}\right]\right)-\right.\\
&\quad\left.\mathtt{Erfi}\left[\frac{9}{40}\right]+\mathtt{Erfi}\left[\frac{17}{40}\right]\right)-\\
&\frac{3}{4}\ \mathtt{e}^{-\frac{9}{64}+\mathtt{t1\ t2}}\ \sqrt{\pi}\ \left(\sqrt{2}\ \mathtt{e}^{387/1600}\ \left(\mathtt{Erf}\left[\frac{7}{20\ \sqrt{2}}\right]-\mathtt{Erf}\left[\frac{11}{20\ \sqrt{2}}\right]\right)-\right.\\
&\quad\left.\mathtt{Erfi}\left[\frac{9}{40}\right]+\mathtt{Erfi}\left[\frac{17}{40}\right]\right)-\\
&\frac{1}{12}\ \mathtt{e}^{\mathtt{t1\ t2}}\ \sqrt{\pi}\ \left(8\ \sqrt{3}\ \mathtt{e}^{1/48}\ \left(\mathtt{Erf}\left[\frac{1}{20\ \sqrt{3}}\right]-\mathtt{Erf}\left[\frac{7}{20\ \sqrt{3}}\right]\right)+\right.\\
&\quad\left.3\ \sqrt{2}\ \left(3\ \mathtt{Erf}\left[\frac{1}{5\ \sqrt{2}}\right]+\mathtt{Erfi}\left[\frac{1}{5\ \sqrt{2}}\right]\right)\right)
\end{aligned}
$$

Per calcolare l'integrale su D_1 che compare in (3.3), il codice è quasi identico:

```
In[5]:= integraleEsagonoSin = Integrate[
          Sin[s1 + s2 + t1 + t2] (s1^2 - s2^2),
          {s1, s2} ∈ esagono
        ]
```

Out[5]=

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{120}\\
&\left(-210\ \mathtt{Cos}\left[\frac{1}{10}+\mathtt{t1+t2}\right]-90\ \mathtt{Cos}\left[\frac{3}{10}+\mathtt{t1+t2}\right]-1600\ \mathtt{Sin[t1+t2]}+\right.\\
&\quad\left.891\ \mathtt{Sin}\left[\frac{1}{10}+\mathtt{t1+t2}\right]+697\ \mathtt{Sin}\left[\frac{3}{10}+\mathtt{t1+t2}\right]\right)+\\
&\frac{1}{50}\ \left(90\ \mathtt{Cos[t1+t2]}-40\ \mathtt{Cos}\left[\frac{1}{10}+\mathtt{t1+t2}\right]+40\ \mathtt{Cos}\left[\frac{2}{5}+\mathtt{t1+t2}\right]+\right.\\
&\quad\left.675\ \mathtt{Sin[t1+t2]}-603\ \mathtt{Sin}\left[\frac{1}{10}+\mathtt{t1+t2}\right]-69\ \mathtt{Sin}\left[\frac{2}{5}+\mathtt{t1+t2}\right]\right)+\\
&\frac{1}{200}\ \left(70\ \mathtt{Cos}\left[\frac{1}{10}+\mathtt{t1+t2}\right]-160\ \mathtt{Cos}\left[\frac{2}{5}+\mathtt{t1+t2}\right]-\right.\\
&\quad3\ \left(90\ \mathtt{Cos}\left[\frac{1}{2}+\mathtt{t1+t2}\right]+99\ \mathtt{Sin}\left[\frac{1}{10}+\mathtt{t1+t2}\right]+\right.\\
&\qquad\left.\left.832\ \mathtt{Sin}\left[\frac{2}{5}+\mathtt{t1+t2}\right]-915\ \mathtt{Sin}\left[\frac{1}{2}+\mathtt{t1+t2}\right]\right)\right)+\\
&\frac{2}{25}\ \left(5\ \mathtt{Cos}\left[\frac{1}{10}+\mathtt{t1+t2}\right]+5\ \mathtt{Cos}\left[\frac{3}{10}+\mathtt{t1+t2}\right]+\right.\\
&\quad20\ \mathtt{Cos}\left[\frac{1}{2}+\mathtt{t1+t2}\right]+\frac{603}{8}\ \mathtt{Sin}\left[\frac{1}{10}+\mathtt{t1+t2}\right]+\\
&\qquad\left.\frac{3}{4}\ \mathtt{Sin}\left[\frac{3}{10}+\mathtt{t1+t2}\right]-\frac{585}{8}\ \mathtt{Sin}\left[\frac{1}{2}+\mathtt{t1+t2}\right]\right)
\end{aligned}
$$

A.2.2 Domini con autointersezioni

Dato che i due domini D_2 e $\tilde{D}_2$ seguono la stessa *ratio* di costruzione, si è definita innanzitutto una funzione per generare l'intera famiglia di domini siffatti, ossia con un corpo centrale che approssimi un cerchio e due parti esterne.

```
In[6]:= caramella[n_] := {
          Polygon[
```

```
    Drop[
      Table[{Cos[t],Sin[t]}/5, {t,Subdivide[0,2π,2n]}],
      -1
    ]
  ],
  Polygon[Join[
    {-1/5,1/5} + # & /@ Table[{Cos[t],Sin[t]}/5,
      {t,Subdivide[-π/2,-π,n-1]}],
    Drop[{-1/5,-1/5} + # & /@
      Table[{Cos[t],Sin[t]}/5,{t,Subdivide[π,π/2,n-1]}],
    -1]
  ]],
  Polygon[Join[
    {1/5,1/5} + # & /@ Table[{Cos[t],Sin[t]}/5,
      {t,Subdivide[-π/2,0,n-1]}],
    Drop[{1/5,-1/5} + # & /@
      Table[{Cos[t],Sin[t]}/5,{t,Subdivide[0,π/2,n-1]}],
    -1]
  ]]
}
```

Con questa definizione, si ottiene D_2 con `caramella[2]` e $\tilde{D}_2$ con `caramella[10]`. Si è deciso di definire D_2 e $\tilde{D}_2$ come liste di poligoni anziché come poligoni con autointersezioni per facilitare – e, talvolta, rendere possibili *tout court* – i calcoli che seguono.

Per risolvere la (3.4), l'integrazione su D_2 è molto simile alle precedenti:

```
In[7]:= integraleCaramellaSin = ParallelSum[
          Integrate[
            s1 s2 Sin[t1 + t2 + s1 + s2] (s1 + s2)^2,
            {s1, s2} ∈ X
          ],
          {X, caramella[2]}
        ]
```

$$\text{Out[7]=}\quad \frac{4\ \text{Sin[t1 + t2]}}{28125}$$

Per quanto riguarda $\tilde{D}_2$, si è rivelato utile rifinire il primo risultato ottenuto dal calcolo diretto dell'integrale; ciò è stato fatto con alcune funzioni integrate:

```
In[8]:= integraleCaramelloneSin = ParallelSum[
          Integrate[
```

```
      s1 s2 Sin[t1 + t2 + s1 + s2] (s1 + s2)^2,
      {s1, s2} ∈ X
    ],
    {X, caramella[10]}
  ] // Expand // Factor // Together
```

L'*output* di quest'ultima cella è particolarmente lungo e lo si omette per brevità; è possibile trovarlo all'indirizzo `https://pastebin.com/MMX5tK4B`.

Si è fatta una cosa simile per l'integrale su D_2 in (3.6):

```
In[9]:= ParallelSum[
          Integrate[
            (s1^2 - s2^2) Exp[s1 + s2 + t1 + t2] (s1 + s2)^2,
            {s1,s2} ∈ X],
          {X, caramella[2]}
        ] // Together
```

$$\text{Out[9]=} -\frac{e^{-\frac{3}{5}+t1+t2}\ (242565-162599\ e^{2/5}-207241\ e^{4/5}+138915\ e^{6/5})}{6250}$$

Cambiare la funzione scelta come soluzione in una meno regolare non presenta grosse difficoltà:

```
In[10]:= integraleCaramellaExpAbs = ParallelSum[
           Integrate[
             (s1^2 - s2^2) Exp[t1 + t2 + s1 + s2] Abs[s1 + s2],
             {s1, s2} ∈ X
           ],
           {X, caramella[2]}
         ] // Together
```

$$\text{Out[10]=} \frac{1}{625}\ e^{-\frac{3}{5}+t1+t2}\ (-4440+2977\ e^{2/5}-4452\ e^{4/5}+2985\ e^{6/5})$$

Per $\tilde{D}_2$, invece, non è stato possibile calcolare l'integrale in modo esatto. Ricorrendo a funzioni integrate di triangolazione di regioni piane [20, 33], è stato possibile ottenere un risultato approssimato dell'integrale [v. anche 21].

```
In[11]:= triangolazioneCaramellone =
           Flatten[MeshPrimitives[TriangulateMesh[#], 2] & /@
             caramella[10]];
         integraleCaramelloneExp = Exp[t1+t2]
           ParallelSum[
             NIntegrate[(s1^2 - s2^2) Exp[s1 + s2] (s1 + s2)^2,
               {s1,s2} ∈ X], {X, triangolazioneCaramellone}]
```

```
Out[11]= 0.000636 e^(t1+t2)
```

La stessa strategia ha permesso di calcolare anche l'integrale con una soluzione meno regolare.

```
In[12]:= integraleCaramelloneExpAbs = ParallelSum[
           NIntegrate[
             (s1^2 - s2^2) Exp[s1 + s2] Abs[s1 + s2],
             {s1, s2} ∈ X
           ],
           {X, triangolazioneCaramellone}
         ] Exp[t1 + t2]

Out[12]= 0.001684 e^(t1+t2)
```

Si è attuata una strategia diversa per la risoluzione di (3.10) su $\tilde{D}_2$. Scelta $x(t_1, t_2) = (t_1^2 + t_2^2)^{5/2}$, l'integrale che compare nell'equazione deve prendere la forma $\alpha + \beta(t_1 + t_2)$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dato che questa forma non richiede esplicitamente che $(t_1, t_2) \in \tilde{D}_2$, anche se la si vuole considerare solo nei casi in cui ciò avviene, si può campionare in molti punti (t_1, t_2) il valore approssimato dell'integrale e usare una funzione di interpolazione [12].

```
In[13]:= campioniIntegraleCaramelloneLin = Flatten[
           ParallelTable[{t1, t2,
             Sum[
               NIntegrate[(s1 + s2 + t1 + t2) (s1^2 + s2^2)^(5/2),
               {s1,s2} ∈ X], {X, caramella[10]}
             ]},
             {t1, -.4, .4, .05}, {t2, -.2, .2, .05}
           ],
         1];

In[14]:= integraleCaramelloneLin = (a1 + a2 t1 + a3 t2) /.
           FindFit[
             campioniIntegraleCaramelloneLin,
             a1 + a2 t1 + a3 t2,
             {a1, a2, a3},
             {t1, t2}
           ]

Out[14]= 7.24082 × 10^-15 + 0.000246609 t1 + 0.000246609 t2
```

Si nota che il termine noto di questa espressione è molto piccolo. Una prova empirica conferma che questo termine è trascurabile e, anzi, peggiora gli errori misurati se inserito nel termine noto per la risoluzione del sistema lineare.

Per quanto concerne la (3.11), non si è presentato il bisogno di trattamenti particolari, data la relativa semplicità del dominio, una volta che lo si è scomposto come fatto sopra.

```
In[15]:= integraleCaramellaSqrt = ParallelSum[
           Integrate[
             (√Abs[t1 t2] + √Abs[s1 s2]) Abs[s1 + s2],
             {s1, s2} ∈ X
           ],
           {X, caramella[2]}
         ] // Together

Out[15]= 1/30000 (4+39 √2+6 √3-5 π+
           1040 √Abs[t1 t2]-3 ArcCsch[√2]+3 ArcSinh[1])
```

A.2.3 Dominio non semplicemente connesso

L'implementazione del dominio D_3 si avvale della seguente proprietà degli integrali: dati due insiemi misurabili $A, B \subseteq \mathbb{R}^m$ se $A \subseteq B$, allora

$$\int_{B\setminus A} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_B f(x)\,\mathrm{d}x - \int_A f(x)\,\mathrm{d}x$$

per ogni f integrabile su B. Ciò permette di lavorare sull'icosagono, sul pentagono e sul triangolo separatamente e poi sommare e sottrarre in modo opportuno.

Si definiscono le tre "componenti" del dominio separatamente:

```
In[16]:= cPseudocerchio = Drop[Table[{Cos[t], Sin[t]},
           {t, Subdivide[0, 2π, 20]}], -1];
         cPentagono = Drop[
           Table[
             {Cos[t + π / 10], Sin[t + π / 10]},
             {t, Subdivide[0, 2π, 5]}],
         -1];
         cTriangolo = {
           {0, -Cos[π/5]},
           {Cos[π/10]+Cos[5π/10], Sin[π/10]+Sin[5π/10]} / 2,
```

```
    {-Cos[π/10]-Cos[5π/10], Sin[π/10]+Sin[5π/10]} / 2
  };
```

```
In[17]:= pseudocerchio = Polygon[cPseudocerchio];
         pentagono = Polygon[cPentagono];
         triangolo = Polygon[cTriangolo];
```

Per calcolare l'integrale in (3.8) è sufficiente applicare il metodo descritto sopra all'integrale esatto e sommare:

```
In[18]:= integraleConcerchioSin = Factor[Expand[
           Integrate[#, {s1,s2} ∈ pseudocerchio] -
           Integrate[#, {s1,s2} ∈ pentagono] +
           Integrate[#, {s1,s2} ∈ triangolo]
         ]]&[Sin[t1 + t2] s1 s2 (s1 + s2)^2]
```

Out[18]= $-\frac{1}{368640}\Big(35840-40960\sqrt{5}-22720\sqrt{2\,(5-\sqrt{5})}+7104\sqrt{10\,(5-\sqrt{5})}-13915\sqrt{2\,(5+\sqrt{5})}+8617\sqrt{10\,(5+\sqrt{5})}\Big)\ \text{Sin[t1+t2]}$

Per quanto riguarda l'integrale in (3.9), l'approccio mediante approssimazione si è dimostrato più agile ed è associato a errori relativi più bassi nella risoluzione del sistema lineare.

```
In[19]:= integraleConcerchioExp = (
           NIntegrate[#, {s1,s2} ∈ pseudocerchio] -
           NIntegrate[#, {s1,s2} ∈ pentagono] +
           NIntegrate[#, {s1,s2} ∈ triangolo]
         )&[Exp[s1 + s2] (s1^2 - s2^2)(s1 + s2)^2] Exp[t1 + t2]
```

Out[19]= -0.08131737588823632` $e^{t1\ +\ t2}$

Di seguito è riportato il metodo che fornisce la soluzione esatta direttamente.

```
In[20]:= iT = Integrate[
           Exp[s1 + s2] (s1^2 - s2^2) (s1 + s2)^2,
           {s1,s2} ∈ triangolo
         ];
         iP = Integrate[
           Exp[s1 + s2] (s1^2 - s2^2) (s1 + s2)^2,
           {s1,s2} ∈ pentagono
```

```
];
iC = ParallelSum[
  Integrate[
    Exp[s1 + s2] (s1^2 - s2^2) (s1 + s2)^2,
    {s1,s2} ∈ X
  ],
  {X, Triangle[Join[{{1,0}}, #]]& /@
    Partition[cPseudocerchio[[2;;]],2,1]}
];
integraleConcerchioExp = (iC - iP + iT) Exp[t1 + t2]
```

Dato che il coefficiente `iC - iP + iT` è particolarmente lungo, il risultato è stato omesso. Tale coefficiente si può trovare come restituito dal *Wolfram Language* su `https://pastebin.com/hTiW60S4`.

Per quanto riguarda l'integrale contenuto in (3.10), si è agito come per $\tilde{D}_2$:

```
In[21]:= campioniIntegraleConcerchioLin = Flatten[
  ParallelTable[
    {t1, t2,
      (NIntegrate[#, {s1,s2} ∈ pseudocerchio]-
      NIntegrate[#, {s1,s2} ∈ pentagono]+
      NIntegrate[#, {s1,s2} ∈ triangolo])& @ (
        (t1 + t2 + s1 + s2) (s1^2 + s2^2)^(5/2)
      )
    },
    {t1,-1,1,.05},
    {t2,-1,1,.05}
  ],
1];

In[22]:= integraleConcerchioLin = (a1 + a2 t1 + a3 t2) /.
  FindFit[
    campioniIntegraleConcerchioLin,
    a1 + a2 t1 + a3 t2,
    {a1, a2, a3},
    {t1, t2}
  ]

Out[22]= 0.00899586 + 0.506148 t1 + 0.506148 t2
```

A.3 Calcolo delle norme operatoriali

Negli esempi del cap. 3 si è usata la norma $\|\mathcal{K}\|$ dell'operatore integrale per usare il teorema delle contrazioni e avere la certezza dell'esistenza e unicità della soluzione.

Il calcolo delle norme è stato fatto in due modi:

- in modo esatto, calcolando esplicitamente $\max_D \int_D |K(t,s)|\,\mathrm{d}s$, come da definizione;
- in modo approssimato, ricorrendo a metodi numerici per trovare un massimo di una funzione in due variabili;
- in modo approssimato, campionando in un numero congruo di punti (t_1, t_2) il valore dell'integrale di cui sopra ed estraendo il massimo appartenente al dominio.

A.3.1 Dominio esagonale

Per le due norme integrali calcolate su D_1 si è usato l'approccio approssimato. Per la norma dell'operatore integrale in (3.1), il codice è il seguente:

```
In[23]:= grigliaEsagonoExp = Flatten[
           ParallelTable[
             {t1, t2, NIntegrate[Abs @ Exp[s1 s2 + t1 t2],
               {s1,s2} ∈ esagono]},
             {t1,-.3,.2,.01}, {t2,0.,.5,.01}
           ],
         1];
         normaEsagonoExp = Last[Last[SortBy[
           Cases[
             grigliaEsagonoExp,
             {x_,y_,w_} /; RegionMember[esagono,{x,y}]
           ],
         Last]]]

Out[23]= 0.128879
```

Per la (3.3) il codice è quasi identico, e lo si omette per brevità.

A.3.2 Domini con autointersezioni

Per il calcolo della norma dell'operatore integrale in (3.4) su D_2 si può usare il codice seguente.

```
In[24]:= normaCaramellaSin = Max[
           (Sum[Integrate[Abs[s1 s2], {s1,s2} ∈ X], {X, caramella[2]}])
           NMaxValue[Abs[Sin[t1 + t2]],{t1,t2} ∈ #]& /@ caramella[2]
         ]

Out[24]= 0.00120457
```

Si può usare lo stesso approccio anche per $\tilde{D}_2$:

```
In[25]:= normaCaramelloneSin = Max[ParallelSum[
           NIntegrate[Abs[s1 s2], {s1,s2} ∈ Y], {Y,caramella[10]}]
           ParallelMap[
             NMaxValue[Abs[Sin[t1+t2]],{t1,t2}∈#]&,
             triangolazioneCaramellone
           ]
         ]

Out[25]= 0.0012067
```

Quanto alla norma dell'operatore integrale in (3.6) su D_2, è possibile calcolarne esplicitamente il valore.

```
In[26]:= normaCaramellaExp = Max[MaxValue[
           Assuming[
             {t1 ∈ Reals, t2 ∈ Reals},
             Sum[
               Integrate[
                 Abs[(s1^2 - s2^2) Exp[s1 + s2 + t1 + t2]],
                 {s1,s2} ∈ X
               ],
               {X, caramella[2]}
             ]
           ],
           {t1,t2} ∈ #]& /@ caramella[2]
         ]
```

$$\text{Out[26]=}\ \frac{-385+253\ e^{2/5}+10\ e^{3/5}+497\ e^{4/5}-335\ e^{6/5}}{250\ e^{2/5}}$$

Nel caso di $\tilde{D}_2$, invece, si è optato per un'approssimazione.

In[27]:=
```
normaCaramelloneExp = Max[ParallelSum[
  NIntegrate[Abs[Exp[s1 + s2] (s1^2 - s2^2)], {s1,s2} ∈ Y],
  {Y,caramella[10]}]
ParallelMap[
  NMaxValue[Abs[Exp[t1 + t2]],{t1,t2} ∈ #]&,
  triangolazioneCaramellone
  ]
]
```

Out[27]= `0.0112947`

Un'ulteriore approssimazione si è resa necessaria per calcolare la norma dell'integrale in (3.10) su $\tilde{D}_2$:

In[28]:=
```
grigliaCaramelloneLin = Flatten[
  Table[{t1, t2, ParallelSum[
    NIntegrate[Abs[s1+s2+t1+t2],{s1,s2} ∈ X],
    {X, triangolazioneCaramellone}]},
    {t1,-.4,.4,.1}, {t2,-.2,.2,.1}
  ],
1];
normaCaramelloneLin = Last[Last[SortBy[
  Parallelize@Cases[
    grigliaCaramelloneLin,
    {x_,y_,w_}/;
    Or @@ (RegionMember[#,{x,y}]& /@ caramella[10])
  ],
Last]]]
```

Out[28]= `0.0951481`

Dell'integrale su D_2 in (3.11) è possibile calcolare la norma in modo esatto:

In[29]:=
```
normaCaramellaSqrt = Max[MaxValue[ParallelSum[
  Integrate[
    √Abs[t1 t2] + √Abs[s1 s2],
    {s1, s2} ∈ X
  ],
  {X, caramella[2]}
], {t1, t2} ∈ #] & /@ caramella[2]]
```

```
Out[29]=   1
         ────(316 √2+24 √3-7 π-6 ArcCot[2 √2]-18 ArcCsch[√2]+
         9000
           18 ArcSinh[1]+12 ArcTan[√2]-3 Log[3+2 √2]+3 Log[2+√3])
```

A.3.3 Dominio non semplicemente connesso

Il calcolo delle norme integrali su D_3 necessita di qualche accortezza, perché alcuni algoritmi integrati al *Wolfram Language* non risultano ben ottimizzati per gestire regioni con "buchi" al proprio interno.

Per la (3.9), si è scelto il metodo numerico per campionamenti:

```
In[30]:= intConcerchioExp = (NIntegrate[#,{s1,s2}∈ pseudocerchio]-
           NIntegrate[#,{s1,s2}∈ pentagono]+
           NIntegrate[#,{s1,s2}∈ triangolo]
         )&[Abs[(s1^2-s2^2) Exp[s1+s2]]];
         grigliaConcerchioExp = Flatten[
           ParallelTable[
             {t1,t2,Abs[Exp[t1+t2]] intConcerchioExp},
             {t1,-1,1,.01},{t2,-1,1,.01}
           ],
         1];
         normaConcerchioExp = Last[Last[SortBy[
           Parallelize@Cases[
             grigliaConcerchioExp,
             {x_,y_,w_}/;
             RegionMember[concerchio, {x,y}]
           ],
         Last]]]

Out[30]= 2.26431
```

Per la (3.8) il codice è quasi identico, e lo si omette per brevità.

Quanto alla (3.10), invece, si è applicato il metodo con approssimazioni in modo simile a quanto fatto su $\tilde{D}_2$:

```
In[31]:= grigliaConcerchioLin = Flatten[
           ParallelTable[
             {t1, t2,
             NIntegrate[Abs[s1+s2+t1+t2],{s1,s2}∈pseudocerchio]-
             NIntegrate[Abs[s1+s2+t1+t2],{s1,s2}∈pentagono]+
             NIntegrate[Abs[s1+s2+t1+t2],{s1,s2}∈triangolo]},
```

```
    {t1,-1,1,.025},{t2,-1,1,.025}
  ],
1];
normaConcerchioLin = Last[Last[SortBy[
  Cases[
    grigliaConcerchioLin,
    {x_,y_,w_}/;RegionMember[concerchio,{x,y}]
  ],
Last]]]
```

Out[31]= 1.88304

B

Dati degli esperimenti numerici

Di tutti gli esempi presi in esame nel cap. 3 sono stati raccolti i dati riguardo errori relativi, condizionamento delle matrici associate ai sistemi lineari e numero di nodi della formula di cubatura, secondo il metodo utilizzato. In questa appendice si riportano in forma tabulare alcuni di questi dati, nonché le prove di tempo di calcolo per alcuni casi specifici. Per queste ultime, si è utilizzato un PC con processore *Intel Core* i7–8750H a 2,20 GHz e 16 GB di RAM DDR4.

Tutti i dati riportati sono calcolati facendo riferimento alle soluzioni scelte nel cap. 3; sono esplicitate solo se la stessa equazione è stata analizzata con soluzioni distinte. Dei casi mancanti è possibile vedere i risultati su [30].

Tabella B.1: Confronto tra metodi senza compressione e con compressione degli errori relativi calcolati a partire dal vettore soluzione del sistema lineare in (2.2). Si è risolta l'equazione (3.1) con $\lambda = 1/1000$.

	Senza compressione		Con compressione	
δ	E_2^{rel}	E_∞^{rel}	E_2^{rel}	E_∞^{rel}
1	$2{,}684\,25 \cdot 10^{-3}$	$2{,}054\,58 \cdot 10^{-3}$	$8{,}402\,06 \cdot 10^{-3}$	$5{,}901\,26 \cdot 10^{-3}$
2	$8{,}153\,41 \cdot 10^{-6}$	$5{,}296\,08 \cdot 10^{-6}$	$1{,}211\,14 \cdot 10^{-3}$	$7{,}492\,38 \cdot 10^{-4}$
3	$4{,}714\,06 \cdot 10^{-6}$	$3{,}168\,59 \cdot 10^{-6}$	$4{,}639\,18 \cdot 10^{-5}$	$3{,}241\,47 \cdot 10^{-5}$
4	$1{,}371\,32 \cdot 10^{-8}$	$8{,}323\,66 \cdot 10^{-9}$	$4{,}375\,43 \cdot 10^{-6}$	$2{,}660\,43 \cdot 10^{-6}$
5	$7{,}174\,03 \cdot 10^{-9}$	$4{,}374\,95 \cdot 10^{-9}$	$9{,}392\,11 \cdot 10^{-8}$	$5{,}794\,85 \cdot 10^{-8}$
6	$2{,}761\,24 \cdot 10^{-11}$	$1{,}650\,93 \cdot 10^{-11}$	$4{,}434\,00 \cdot 10^{-9}$	$2{,}699\,22 \cdot 10^{-9}$
7	$3{,}114\,26 \cdot 10^{-12}$	$1{,}855\,67 \cdot 10^{-12}$	$1{,}872\,98 \cdot 10^{-11}$	$1{,}115\,64 \cdot 10^{-11}$
8	$2{,}150\,02 \cdot 10^{-14}$	$2{,}151\,57 \cdot 10^{-14}$	$4{,}034\,45 \cdot 10^{-12}$	$2{,}464\,97 \cdot 10^{-12}$
9	$9{,}207\,29 \cdot 10^{-15}$	$2{,}161\,71 \cdot 10^{-14}$	$3{,}210\,21 \cdot 10^{-13}$	$1{,}989\,70 \cdot 10^{-13}$
10	$8{,}921\,61 \cdot 10^{-15}$	$1{,}373\,84 \cdot 10^{-14}$	$1{,}922\,01 \cdot 10^{-14}$	$2{,}078\,08 \cdot 10^{-14}$
11	$9{,}723\,50 \cdot 10^{-15}$	$2{,}355\,97 \cdot 10^{-14}$	$8{,}022\,13 \cdot 10^{-15}$	$1{,}034\,33 \cdot 10^{-14}$
12	$9{,}398\,27 \cdot 10^{-15}$	$1{,}403\,92 \cdot 10^{-14}$	$9{,}560\,35 \cdot 10^{-15}$	$1{,}940\,38 \cdot 10^{-14}$
13	$3{,}484\,86 \cdot 10^{-14}$	$1{,}069\,88 \cdot 10^{-13}$	$2{,}147\,72 \cdot 10^{-14}$	$6{,}419\,83 \cdot 10^{-14}$
14	$1{,}402\,57 \cdot 10^{-14}$	$5{,}004\,22 \cdot 10^{-14}$	$1{,}177\,28 \cdot 10^{-14}$	$3{,}719\,20 \cdot 10^{-14}$
15	$8{,}834\,86 \cdot 10^{-15}$	$2{,}924\,33 \cdot 10^{-14}$	$9{,}132\,87 \cdot 10^{-15}$	$2{,}918\,67 \cdot 10^{-14}$
16	$1{,}465\,80 \cdot 10^{-14}$	$7{,}090\,60 \cdot 10^{-14}$	$4{,}454\,57 \cdot 10^{-14}$	$1{,}624\,74 \cdot 10^{-13}$
17	$5{,}935\,77 \cdot 10^{-14}$	$2{,}147\,16 \cdot 10^{-13}$	$1{,}449\,91 \cdot 10^{-14}$	$3{,}453\,41 \cdot 10^{-14}$
18	$9{,}471\,05 \cdot 10^{-14}$	$3{,}530\,02 \cdot 10^{-13}$	$5{,}630\,78 \cdot 10^{-14}$	$1{,}607\,13 \cdot 10^{-13}$
19	$1{,}165\,49 \cdot 10^{-14}$	$5{,}886\,88 \cdot 10^{-14}$	$9{,}740\,18 \cdot 10^{-15}$	$1{,}823\,47 \cdot 10^{-14}$
20	$1{,}377\,32 \cdot 10^{-13}$	$4{,}484\,00 \cdot 10^{-13}$	$1{,}022\,18 \cdot 10^{-13}$	$3{,}400\,93 \cdot 10^{-13}$
21	$1{,}152\,94 \cdot 10^{-13}$	$3{,}449\,14 \cdot 10^{-13}$	$6{,}303\,65 \cdot 10^{-14}$	$2{,}037\,72 \cdot 10^{-13}$
22	$1{,}959\,09 \cdot 10^{-13}$	$6{,}557\,00 \cdot 10^{-13}$	$2{,}094\,59 \cdot 10^{-14}$	$6{,}268\,38 \cdot 10^{-14}$
23	$1{,}878\,43 \cdot 10^{-14}$	$1{,}614\,03 \cdot 10^{-13}$	$1{,}207\,30 \cdot 10^{-14}$	$6{,}300\,45 \cdot 10^{-14}$
24	$1{,}231\,32 \cdot 10^{-13}$	$4{,}007\,53 \cdot 10^{-13}$	$1{,}496\,98 \cdot 10^{-14}$	$1{,}049\,48 \cdot 10^{-13}$
25	$1{,}947\,88 \cdot 10^{-13}$	$4{,}961\,36 \cdot 10^{-13}$	$2{,}819\,07 \cdot 10^{-14}$	$9{,}375\,09 \cdot 10^{-14}$
26	$1{,}265\,28 \cdot 10^{-14}$	$1{,}127\,36 \cdot 10^{-13}$	$1{,}434\,13 \cdot 10^{-14}$	$7{,}944\,05 \cdot 10^{-14}$
27	$4{,}712\,71 \cdot 10^{-14}$	$4{,}554\,96 \cdot 10^{-13}$	$2{,}811\,84 \cdot 10^{-14}$	$1{,}503\,23 \cdot 10^{-13}$
28	$2{,}443\,42 \cdot 10^{-14}$	$2{,}063\,83 \cdot 10^{-13}$	$1{,}636\,41 \cdot 10^{-14}$	$8{,}517\,47 \cdot 10^{-14}$
29	$3{,}758\,06 \cdot 10^{-14}$	$2{,}778\,11 \cdot 10^{-13}$	$2{,}593\,23 \cdot 10^{-14}$	$1{,}026\,12 \cdot 10^{-13}$
30	$3{,}201\,01 \cdot 10^{-14}$	$1{,}673\,66 \cdot 10^{-13}$	$2{,}097\,35 \cdot 10^{-14}$	$1{,}372\,35 \cdot 10^{-13}$

Tabella B.2: Confronto tra metodi senza compressione e con compressione dei condizionamenti del sistema lineare in (2.2). Si è risolta l'equazione (3.1) con $\lambda = 1/1000$.

	Condizionamento	
δ	Senza compressione	Con compressione
1	$1{,}254\,50 \cdot 10^2$	$1{,}561\,60 \cdot 10^2$
2	$1{,}254\,69 \cdot 10^2$	$1{,}491\,04 \cdot 10^2$
3	$1{,}348\,16 \cdot 10^2$	$2{,}013\,75 \cdot 10^2$
4	$1{,}402\,37 \cdot 10^2$	$1{,}648\,22 \cdot 10^2$
5	$1{,}325\,52 \cdot 10^2$	$1{,}700\,85 \cdot 10^2$
6	$1{,}545\,55 \cdot 10^2$	$1{,}987\,47 \cdot 10^2$
7	$1{,}450\,73 \cdot 10^2$	$1{,}977\,38 \cdot 10^2$
8	$1{,}765\,24 \cdot 10^2$	$1{,}860\,77 \cdot 10^2$
9	$1{,}500\,74 \cdot 10^2$	$1{,}973\,96 \cdot 10^2$
10	$1{,}793\,12 \cdot 10^2$	$2{,}202\,24 \cdot 10^2$
11	$1{,}550\,89 \cdot 10^2$	$2{,}109\,30 \cdot 10^2$
12	$1{,}743\,15 \cdot 10^2$	$2{,}128\,82 \cdot 10^2$
13	$1{,}527\,67 \cdot 10^2$	$2{,}124\,81 \cdot 10^2$
14	$1{,}731\,52 \cdot 10^2$	$2{,}311\,39 \cdot 10^2$
15	$1{,}630\,64 \cdot 10^2$	$2{,}133\,35 \cdot 10^2$
16	$1{,}715\,17 \cdot 10^2$	$1{,}962\,97 \cdot 10^2$
17	$1{,}660\,32 \cdot 10^2$	$2{,}037\,35 \cdot 10^2$
18	$1{,}759\,61 \cdot 10^2$	$2{,}074\,42 \cdot 10^2$
19	$1{,}717\,62 \cdot 10^2$	$1{,}953\,32 \cdot 10^2$
20	$1{,}926\,12 \cdot 10^2$	$2{,}126\,31 \cdot 10^2$
21	$1{,}668\,30 \cdot 10^2$	$2{,}061\,35 \cdot 10^2$
22	$1{,}757\,78 \cdot 10^2$	$2{,}201\,65 \cdot 10^2$
23	$1{,}884\,25 \cdot 10^2$	$2{,}061\,03 \cdot 10^2$
24	$1{,}712\,95 \cdot 10^2$	$2{,}121\,78 \cdot 10^2$
25	$1{,}843\,24 \cdot 10^2$	$2{,}066\,73 \cdot 10^2$
26	$2{,}012\,82 \cdot 10^2$	$2{,}083\,92 \cdot 10^2$
27	$1{,}707\,38 \cdot 10^2$	$2{,}197\,04 \cdot 10^2$
28	$1{,}784\,31 \cdot 10^2$	$2{,}108\,45 \cdot 10^2$
29	$1{,}887\,76 \cdot 10^2$	$2{,}030\,40 \cdot 10^2$
30	$1{,}861\,61 \cdot 10^2$	$2{,}261\,23 \cdot 10^2$

Tabella B.3: Confronto tra metodi senza compressione e con compressione degli errori relativi calcolati a partire dal vettore soluzione del sistema lineare in (2.2). Si è risolta l'equazione (3.1) con $\lambda = 10$.

	Senza compressione		**Con compressione**	
δ	E_2^{rel}	E_∞^{rel}	E_2^{rel}	E_∞^{rel}
1	$3{,}303\,24 \cdot 10^{-5}$	$2{,}528\,37 \cdot 10^{-5}$	$1{,}033\,82 \cdot 10^{-4}$	$7{,}261\,14 \cdot 10^{-5}$
2	$1{,}003\,55 \cdot 10^{-7}$	$6{,}518\,62 \cdot 10^{-8}$	$1{,}491\,53 \cdot 10^{-5}$	$9{,}226\,99 \cdot 10^{-6}$
3	$5{,}802\,30 \cdot 10^{-8}$	$3{,}900\,06 \cdot 10^{-8}$	$5{,}709\,76 \cdot 10^{-7}$	$3{,}989\,50 \cdot 10^{-7}$
4	$1{,}687\,90 \cdot 10^{-10}$	$1{,}024\,53 \cdot 10^{-10}$	$5{,}385\,52 \cdot 10^{-8}$	$3{,}274\,61 \cdot 10^{-8}$
5	$8{,}830\,20 \cdot 10^{-11}$	$5{,}384\,94 \cdot 10^{-11}$	$1{,}156\,03 \cdot 10^{-9}$	$7{,}132\,64 \cdot 10^{-10}$
6	$3{,}397\,82 \cdot 10^{-13}$	$2{,}034\,13 \cdot 10^{-13}$	$5{,}457\,63 \cdot 10^{-11}$	$3{,}322\,42 \cdot 10^{-11}$
7	$3{,}832\,58 \cdot 10^{-14}$	$2{,}295\,35 \cdot 10^{-14}$	$2{,}304\,90 \cdot 10^{-13}$	$1{,}379\,59 \cdot 10^{-13}$
8	$4{,}675\,60 \cdot 10^{-16}$	$9{,}354\,64 \cdot 10^{-16}$	$4{,}959\,92 \cdot 10^{-14}$	$3{,}045\,06 \cdot 10^{-14}$
9	$3{,}968\,14 \cdot 10^{-16}$	$6{,}973\,25 \cdot 10^{-16}$	$3{,}890\,22 \cdot 10^{-15}$	$2{,}673\,08 \cdot 10^{-15}$
10	$5{,}328\,49 \cdot 10^{-16}$	$1{,}385\,39 \cdot 10^{-15}$	$5{,}718\,12 \cdot 10^{-16}$	$1{,}385\,39 \cdot 10^{-15}$
11	$5{,}442\,28 \cdot 10^{-16}$	$1{,}034\,33 \cdot 10^{-15}$	$4{,}452\,97 \cdot 10^{-16}$	$6{,}895\,52 \cdot 10^{-16}$
12	$5{,}529\,98 \cdot 10^{-16}$	$1{,}141\,40 \cdot 10^{-15}$	$4{,}728\,35 \cdot 10^{-16}$	$9{,}131\,18 \cdot 10^{-16}$
13	$6{,}247\,70 \cdot 10^{-16}$	$1{,}479\,42 \cdot 10^{-15}$	$4{,}614\,37 \cdot 10^{-16}$	$6{,}828\,09 \cdot 10^{-16}$
14	$6{,}878\,15 \cdot 10^{-16}$	$1{,}585\,05 \cdot 10^{-15}$	$4{,}917\,76 \cdot 10^{-16}$	$1{,}132\,18 \cdot 10^{-15}$
15	$7{,}533\,73 \cdot 10^{-16}$	$2{,}606\,96 \cdot 10^{-15}$	$6{,}713\,61 \cdot 10^{-16}$	$1{,}700\,19 \cdot 10^{-15}$
16	$6{,}934\,38 \cdot 10^{-16}$	$1{,}693\,62 \cdot 10^{-15}$	$5{,}888\,31 \cdot 10^{-16}$	$1{,}580\,71 \cdot 10^{-15}$
17	$8{,}293\,80 \cdot 10^{-16}$	$2{,}033\,08 \cdot 10^{-15}$	$6{,}797\,98 \cdot 10^{-16}$	$1{,}694\,23 \cdot 10^{-15}$
18	$7{,}451\,46 \cdot 10^{-16}$	$2{,}251\,83 \cdot 10^{-15}$	$6{,}917\,22 \cdot 10^{-16}$	$1{,}468\,86 \cdot 10^{-15}$
19	$8{,}157\,40 \cdot 10^{-16}$	$2{,}251\,20 \cdot 10^{-15}$	$6{,}562\,90 \cdot 10^{-16}$	$1{,}575\,84 \cdot 10^{-15}$
20	$8{,}487\,03 \cdot 10^{-16}$	$1{,}907\,01 \cdot 10^{-15}$	$7{,}961\,10 \cdot 10^{-16}$	$2{,}355\,72 \cdot 10^{-15}$
21	$8{,}635\,23 \cdot 10^{-16}$	$2{,}581\,53 \cdot 10^{-15}$	$8{,}315\,02 \cdot 10^{-16}$	$2{,}020\,33 \cdot 10^{-15}$
22	$9{,}353\,10 \cdot 10^{-16}$	$2{,}690\,05 \cdot 10^{-15}$	$7{,}432\,52 \cdot 10^{-16}$	$2{,}129\,62 \cdot 10^{-15}$
23	$9{,}318\,85 \cdot 10^{-16}$	$2{,}240\,16 \cdot 10^{-15}$	$1{,}000\,17 \cdot 10^{-15}$	$2{,}464\,18 \cdot 10^{-15}$
24	$9{,}703\,69 \cdot 10^{-16}$	$2{,}338\,37 \cdot 10^{-15}$	$8{,}888\,14 \cdot 10^{-16}$	$3{,}117\,83 \cdot 10^{-15}$
25	$1{,}008\,83 \cdot 10^{-15}$	$2{,}176\,04 \cdot 10^{-15}$	$8{,}729\,35 \cdot 10^{-16}$	$2{,}120\,24 \cdot 10^{-15}$
26	$1{,}120\,39 \cdot 10^{-15}$	$2{,}905\,00 \cdot 10^{-15}$	$9{,}053\,00 \cdot 10^{-16}$	$2{,}569\,81 \cdot 10^{-15}$
27	$1{,}230\,63 \cdot 10^{-15}$	$4{,}582\,34 \cdot 10^{-15}$	$1{,}056\,27 \cdot 10^{-15}$	$3{,}576\,46 \cdot 10^{-15}$
28	$1{,}157\,56 \cdot 10^{-15}$	$3{,}458\,31 \cdot 10^{-15}$	$9{,}838\,61 \cdot 10^{-16}$	$2{,}008\,05 \cdot 10^{-15}$
29	$1{,}330\,69 \cdot 10^{-15}$	$5{,}570\,70 \cdot 10^{-15}$	$1{,}112\,73 \cdot 10^{-15}$	$3{,}008\,18 \cdot 10^{-15}$
30	$1{,}308\,30 \cdot 10^{-15}$	$3{,}787\,33 \cdot 10^{-15}$	$1{,}066\,03 \cdot 10^{-15}$	$2{,}673\,41 \cdot 10^{-15}$

Tabella B.4: Confronto tra metodi senza compressione e con compressione dei condizionamenti del sistema lineare in (2.2). Si è risolta l'equazione (3.1) con $\lambda = 10$.

	Condizionamento	
δ	Senza compressione	Con compressione
1	1,012 60	1,014 05
2	1,012 60	1,013 74
3	1,013 06	1,015 95
4	1,013 32	1,014 43
5	1,012 95	1,014 66
6	1,013 98	1,015 84
7	1,013 55	1,015 80
8	1,014 93	1,015 33
9	1,013 78	1,015 79
10	1,015 05	1,016 68
11	1,014 00	1,016 32
12	1,014 84	1,016 40
13	1,013 90	1,016 38
14	1,014 79	1,017 08
15	1,014 36	1,016 41
16	1,014 72	1,015 75
17	1,014 49	1,016 04
18	1,014 91	1,016 19
19	1,014 73	1,015 71
20	1,015 60	1,016 39
21	1,014 52	1,016 13
22	1,014 90	1,016 67
23	1,015 43	1,016 13
24	1,014 71	1,016 37
25	1,015 26	1,016 16
26	1,015 94	1,016 22
27	1,014 69	1,016 66
28	1,015 01	1,016 32
29	1,015 44	1,016 01
30	1,015 33	1,016 90

Tabella B.5: Confronto tra metodi senza compressione e con compressione dei tempi di calcolo per alcune fasi del metodo di Nyström. Si è risolta l'equazione (3.1) con $\lambda = 1$.

	Tempi totali	
δ	t_{nC}	t_{C}
2	$2{,}666\,60 \cdot 10^{-3}$	$1{,}537\,00 \cdot 10^{-3}$
4	$9{,}881\,00 \cdot 10^{-4}$	$1{,}298\,90 \cdot 10^{-3}$
6	$1{,}737\,90 \cdot 10^{-3}$	$1{,}496\,20 \cdot 10^{-3}$
8	$1{,}062\,10 \cdot 10^{-3}$	$2{,}945\,50 \cdot 10^{-3}$
10	$1{,}640\,80 \cdot 10^{-3}$	$7{,}653\,30 \cdot 10^{-3}$
12	$1{,}892\,90 \cdot 10^{-3}$	$1{,}151\,62 \cdot 10^{-2}$
14	$3{,}665\,00 \cdot 10^{-3}$	$2{,}728\,38 \cdot 10^{-2}$
16	$6{,}232\,50 \cdot 10^{-3}$	$7{,}506\,20 \cdot 10^{-2}$
18	$7{,}243\,40 \cdot 10^{-3}$	$1{,}615\,86 \cdot 10^{-1}$
20	$7{,}720\,50 \cdot 10^{-3}$	$2{,}506\,59 \cdot 10^{-1}$
22	$1{,}178\,55 \cdot 10^{-2}$	$3{,}867\,38 \cdot 10^{-1}$
24	$3{,}201\,08 \cdot 10^{-2}$	$9{,}199\,01 \cdot 10^{-1}$
26	$3{,}127\,44 \cdot 10^{-2}$	$1{,}624\,60$
28	$3{,}650\,16 \cdot 10^{-2}$	$2{,}093\,92$
30	$4{,}218\,38 \cdot 10^{-2}$	$3{,}161\,61$
32	$4{,}363\,57 \cdot 10^{-2}$	$4{,}743\,12$
34	$4{,}778\,92 \cdot 10^{-2}$	$6{,}220\,55$
36	$6{,}453\,08 \cdot 10^{-2}$	$8{,}302\,64$
38	$7{,}633\,10 \cdot 10^{-2}$	$1{,}220\,48 \cdot 10^{1}$
40	$1{,}135\,07 \cdot 10^{-1}$	$1{,}770\,47 \cdot 10^{1}$
42	$1{,}249\,85 \cdot 10^{-1}$	$2{,}589\,40 \cdot 10^{1}$
44	$1{,}460\,33 \cdot 10^{-1}$	$4{,}074\,91 \cdot 10^{1}$
46	$4{,}621\,05 \cdot 10^{-1}$	$4{,}738\,35 \cdot 10^{1}$
48	$2{,}120\,81 \cdot 10^{-1}$	$8{,}740\,07 \cdot 10^{1}$
50	$2{,}850\,88 \cdot 10^{-1}$	$9{,}799\,90 \cdot 10^{1}$

Tabella B.6: Confronto tra metodi senza compressione e con compressione degli errori relativi calcolati a partire dal vettore soluzione del sistema lineare in (2.2). Si è risolta l'equazione (3.3) con $\lambda = 1/1000$.

	Senza compressione		**Con compressione**	
δ	E_2^{rel}	E_∞^{rel}	E_2^{rel}	E_∞^{rel}
1	$2{,}181\,39 \cdot 10^{-1}$	$1{,}620\,40 \cdot 10^{-1}$	$1{,}393\,54 \cdot 10^{-1}$	$1{,}588\,99 \cdot 10^{-1}$
2	$1{,}683\,79 \cdot 10^{-3}$	$1{,}304\,60 \cdot 10^{-3}$	$5{,}860\,02 \cdot 10^{-2}$	$4{,}310\,77 \cdot 10^{-2}$
3	$2{,}071\,19 \cdot 10^{-4}$	$1{,}537\,90 \cdot 10^{-4}$	$3{,}146\,19 \cdot 10^{-4}$	$1{,}856\,82 \cdot 10^{-4}$
4	$2{,}918\,19 \cdot 10^{-6}$	$2{,}329\,81 \cdot 10^{-6}$	$3{,}884\,30 \cdot 10^{-5}$	$2{,}987\,16 \cdot 10^{-5}$
5	$8{,}200\,07 \cdot 10^{-8}$	$6{,}984\,13 \cdot 10^{-8}$	$1{,}201\,25 \cdot 10^{-8}$	$9{,}861\,78 \cdot 10^{-9}$
6	$6{,}786\,96 \cdot 10^{-10}$	$5{,}507\,37 \cdot 10^{-10}$	$5{,}057\,47 \cdot 10^{-8}$	$4{,}016\,61 \cdot 10^{-8}$
7	$1{,}697\,38 \cdot 10^{-11}$	$1{,}507\,86 \cdot 10^{-11}$	$3{,}738\,59 \cdot 10^{-11}$	$2{,}661\,06 \cdot 10^{-11}$
8	$1{,}046\,16 \cdot 10^{-11}$	$9{,}882\,76 \cdot 10^{-12}$	$1{,}118\,40 \cdot 10^{-11}$	$1{,}088\,96 \cdot 10^{-11}$
9	$1{,}000\,73 \cdot 10^{-11}$	$1{,}096\,47 \cdot 10^{-11}$	$1{,}028\,72 \cdot 10^{-11}$	$1{,}217\,97 \cdot 10^{-11}$
10	$8{,}837\,37 \cdot 10^{-12}$	$9{,}915\,82 \cdot 10^{-12}$	$9{,}234\,43 \cdot 10^{-12}$	$9{,}080\,83 \cdot 10^{-12}$
11	$8{,}772\,05 \cdot 10^{-12}$	$1{,}113\,19 \cdot 10^{-11}$	$8{,}320\,89 \cdot 10^{-12}$	$1{,}196\,23 \cdot 10^{-11}$
12	$1{,}045\,61 \cdot 10^{-11}$	$1{,}288\,30 \cdot 10^{-11}$	$9{,}751\,32 \cdot 10^{-12}$	$9{,}280\,80 \cdot 10^{-12}$
13	$9{,}583\,91 \cdot 10^{-12}$	$1{,}092\,40 \cdot 10^{-11}$	$9{,}001\,22 \cdot 10^{-12}$	$1{,}101\,27 \cdot 10^{-11}$
14	$9{,}837\,29 \cdot 10^{-12}$	$1{,}071\,64 \cdot 10^{-11}$	$9{,}580\,25 \cdot 10^{-12}$	$1{,}130\,25 \cdot 10^{-11}$
15	$1{,}044\,47 \cdot 10^{-11}$	$1{,}139\,81 \cdot 10^{-11}$	$9{,}110\,14 \cdot 10^{-12}$	$1{,}181\,53 \cdot 10^{-11}$
16	$9{,}818\,62 \cdot 10^{-12}$	$1{,}136\,90 \cdot 10^{-11}$	$9{,}120\,74 \cdot 10^{-12}$	$1{,}071\,42 \cdot 10^{-11}$
17	$1{,}034\,41 \cdot 10^{-11}$	$1{,}296\,97 \cdot 10^{-11}$	$9{,}798\,38 \cdot 10^{-12}$	$1{,}287\,07 \cdot 10^{-11}$
18	$9{,}349\,50 \cdot 10^{-12}$	$1{,}269\,51 \cdot 10^{-11}$	$8{,}922\,38 \cdot 10^{-12}$	$1{,}282\,91 \cdot 10^{-11}$
19	$9{,}864\,93 \cdot 10^{-12}$	$1{,}509\,80 \cdot 10^{-11}$	$9{,}392\,50 \cdot 10^{-12}$	$1{,}167\,02 \cdot 10^{-11}$
20	$9{,}933\,13 \cdot 10^{-12}$	$1{,}259\,45 \cdot 10^{-11}$	$9{,}548\,60 \cdot 10^{-12}$	$1{,}153\,95 \cdot 10^{-11}$
21	$9{,}877\,20 \cdot 10^{-12}$	$1{,}210\,34 \cdot 10^{-11}$	$9{,}321\,85 \cdot 10^{-12}$	$1{,}216\,94 \cdot 10^{-11}$
22	$9{,}835\,23 \cdot 10^{-12}$	$1{,}292\,27 \cdot 10^{-11}$	$9{,}397\,92 \cdot 10^{-12}$	$1{,}277\,80 \cdot 10^{-11}$
23	$9{,}851\,73 \cdot 10^{-12}$	$1{,}269\,59 \cdot 10^{-11}$	$9{,}818\,35 \cdot 10^{-12}$	$1{,}281\,84 \cdot 10^{-11}$
24	$9{,}976\,45 \cdot 10^{-12}$	$1{,}404\,97 \cdot 10^{-11}$	$9{,}639\,95 \cdot 10^{-12}$	$1{,}415\,97 \cdot 10^{-11}$
25	$9{,}819\,63 \cdot 10^{-12}$	$1{,}225\,79 \cdot 10^{-11}$	$9{,}511\,06 \cdot 10^{-12}$	$1{,}214\,02 \cdot 10^{-11}$
26	$1{,}031\,24 \cdot 10^{-11}$	$1{,}289\,82 \cdot 10^{-11}$	$1{,}019\,13 \cdot 10^{-11}$	$1{,}296\,78 \cdot 10^{-11}$
27	$1{,}018\,00 \cdot 10^{-11}$	$1{,}288\,05 \cdot 10^{-11}$	$9{,}854\,32 \cdot 10^{-12}$	$1{,}295\,12 \cdot 10^{-11}$
28	$1{,}009\,93 \cdot 10^{-11}$	$1{,}305\,47 \cdot 10^{-11}$	$9{,}737\,31 \cdot 10^{-12}$	$1{,}284\,03 \cdot 10^{-11}$
29	$1{,}006\,94 \cdot 10^{-11}$	$1{,}140\,30 \cdot 10^{-11}$	$9{,}326\,42 \cdot 10^{-12}$	$1{,}130\,38 \cdot 10^{-11}$
30	$9{,}925\,57 \cdot 10^{-12}$	$1{,}726\,30 \cdot 10^{-11}$	$9{,}347\,14 \cdot 10^{-12}$	$1{,}716\,78 \cdot 10^{-11}$

Tabella B.7: Confronto tra metodi senza compressione e con compressione dei condizionamenti del sistema lineare in (2.2). Si è risolta l'equazione (3.3) con $\lambda = 1/1000$.

	Condizionamento	
δ	Senza compressione	Con compressione
1	$5{,}978\,60 \cdot 10^{1}$	$7{,}352\,02 \cdot 10^{1}$
2	$6{,}074\,93 \cdot 10^{1}$	$6{,}951\,50 \cdot 10^{1}$
3	$6{,}524\,76 \cdot 10^{1}$	$9{,}845\,91 \cdot 10^{1}$
4	$6{,}819\,95 \cdot 10^{1}$	$7{,}941\,89 \cdot 10^{1}$
5	$6{,}426\,00 \cdot 10^{1}$	$8{,}231\,07 \cdot 10^{1}$
6	$7{,}526\,62 \cdot 10^{1}$	$9{,}678\,82 \cdot 10^{1}$
7	$7{,}053\,82 \cdot 10^{1}$	$9{,}880\,35 \cdot 10^{1}$
8	$8{,}626\,06 \cdot 10^{1}$	$9{,}023\,16 \cdot 10^{1}$
9	$7{,}305\,74 \cdot 10^{1}$	$9{,}681\,45 \cdot 10^{1}$
10	$8{,}752\,48 \cdot 10^{1}$	$1{,}095\,53 \cdot 10^{2}$
11	$7{,}584\,01 \cdot 10^{1}$	$1{,}057\,99 \cdot 10^{2}$
12	$8{,}574\,93 \cdot 10^{1}$	$1{,}035\,68 \cdot 10^{2}$
13	$7{,}455\,13 \cdot 10^{1}$	$1{,}037\,45 \cdot 10^{2}$
14	$8{,}495\,84 \cdot 10^{1}$	$1{,}145\,59 \cdot 10^{2}$
15	$7{,}967\,74 \cdot 10^{1}$	$1{,}028\,24 \cdot 10^{2}$
16	$8{,}413\,83 \cdot 10^{1}$	$9{,}672\,19 \cdot 10^{1}$
17	$8{,}120\,62 \cdot 10^{1}$	$9{,}847\,37 \cdot 10^{1}$
18	$8{,}622\,95 \cdot 10^{1}$	$1{,}021\,06 \cdot 10^{2}$
19	$8{,}414\,88 \cdot 10^{1}$	$9{,}691\,24 \cdot 10^{1}$
20	$9{,}470\,72 \cdot 10^{1}$	$1{,}041\,72 \cdot 10^{2}$
21	$8{,}167\,20 \cdot 10^{1}$	$9{,}925\,46 \cdot 10^{1}$
22	$8{,}617\,56 \cdot 10^{1}$	$1{,}079\,20 \cdot 10^{2}$
23	$9{,}240\,41 \cdot 10^{1}$	$1{,}011\,81 \cdot 10^{2}$
24	$8{,}398\,87 \cdot 10^{1}$	$1{,}033\,84 \cdot 10^{2}$
25	$9{,}043\,85 \cdot 10^{1}$	$1{,}011\,28 \cdot 10^{2}$
26	$9{,}908\,57 \cdot 10^{1}$	$1{,}031\,30 \cdot 10^{2}$
27	$8{,}370\,44 \cdot 10^{1}$	$1{,}076\,40 \cdot 10^{2}$
28	$8{,}762\,75 \cdot 10^{1}$	$1{,}022\,37 \cdot 10^{2}$
29	$9{,}282\,28 \cdot 10^{1}$	$9{,}842\,85 \cdot 10^{1}$
30	$9{,}132\,68 \cdot 10^{1}$	$1{,}108\,78 \cdot 10^{2}$

Tabella B.8: Confronto tra metodi senza compressione e con compressione degli errori relativi calcolati a partire dal vettore soluzione del sistema lineare in (2.2). Si è risolta l'equazione (3.3) con $\lambda = 10$.

	Senza compressione		**Con compressione**	
δ	E_2^{rel}	E_∞^{rel}	E_2^{rel}	E_∞^{rel}
1	$3{,}042\,81 \cdot 10^{-4}$	$1{,}968\,83 \cdot 10^{-4}$	$8{,}629\,69 \cdot 10^{-4}$	$6{,}966\,28 \cdot 10^{-4}$
2	$2{,}595\,37 \cdot 10^{-6}$	$1{,}421\,36 \cdot 10^{-6}$	$8{,}622\,17 \cdot 10^{-5}$	$4{,}768\,25 \cdot 10^{-5}$
3	$4{,}184\,41 \cdot 10^{-7}$	$2{,}004\,50 \cdot 10^{-7}$	$1{,}872\,19 \cdot 10^{-6}$	$1{,}109\,31 \cdot 10^{-6}$
4	$4{,}272\,28 \cdot 10^{-9}$	$2{,}136\,32 \cdot 10^{-9}$	$5{,}331\,19 \cdot 10^{-8}$	$2{,}722\,67 \cdot 10^{-8}$
5	$1{,}709\,81 \cdot 10^{-10}$	$7{,}871\,90 \cdot 10^{-11}$	$4{,}043\,44 \cdot 10^{-11}$	$2{,}883\,75 \cdot 10^{-11}$
6	$9{,}487\,00 \cdot 10^{-13}$	$4{,}692\,56 \cdot 10^{-13}$	$6{,}922\,37 \cdot 10^{-11}$	$3{,}485\,33 \cdot 10^{-11}$
7	$2{,}139\,41 \cdot 10^{-14}$	$1{,}028\,32 \cdot 10^{-14}$	$2{,}082\,78 \cdot 10^{-13}$	$1{,}232\,87 \cdot 10^{-13}$
8	$1{,}168\,41 \cdot 10^{-15}$	$1{,}249\,63 \cdot 10^{-15}$	$3{,}853\,71 \cdot 10^{-15}$	$2{,}999\,12 \cdot 10^{-15}$
9	$1{,}086\,80 \cdot 10^{-15}$	$1{,}362\,16 \cdot 10^{-15}$	$1{,}191\,15 \cdot 10^{-15}$	$1{,}540\,08 \cdot 10^{-15}$
10	$1{,}080\,15 \cdot 10^{-15}$	$1{,}263\,04 \cdot 10^{-15}$	$9{,}227\,67 \cdot 10^{-16}$	$1{,}142\,75 \cdot 10^{-15}$
11	$1{,}111\,67 \cdot 10^{-15}$	$1{,}215\,20 \cdot 10^{-15}$	$1{,}117\,72 \cdot 10^{-15}$	$1{,}579\,76 \cdot 10^{-15}$
12	$1{,}351\,72 \cdot 10^{-15}$	$1{,}916\,41 \cdot 10^{-15}$	$1{,}248\,71 \cdot 10^{-15}$	$1{,}317\,53 \cdot 10^{-15}$
13	$1{,}216\,79 \cdot 10^{-15}$	$1{,}322\,64 \cdot 10^{-15}$	$1{,}123\,27 \cdot 10^{-15}$	$1{,}563\,12 \cdot 10^{-15}$
14	$1{,}142\,64 \cdot 10^{-15}$	$1{,}429\,08 \cdot 10^{-15}$	$1{,}153\,24 \cdot 10^{-15}$	$1{,}905\,44 \cdot 10^{-15}$
15	$1{,}305\,87 \cdot 10^{-15}$	$1{,}546\,94 \cdot 10^{-15}$	$1{,}030\,75 \cdot 10^{-15}$	$1{,}427\,95 \cdot 10^{-15}$
16	$1{,}265\,48 \cdot 10^{-15}$	$1{,}658\,96 \cdot 10^{-15}$	$1{,}112\,92 \cdot 10^{-15}$	$1{,}540\,47 \cdot 10^{-15}$
17	$1{,}258\,42 \cdot 10^{-15}$	$1{,}715\,86 \cdot 10^{-15}$	$1{,}323\,38 \cdot 10^{-15}$	$1{,}775\,02 \cdot 10^{-15}$
18	$1{,}168\,33 \cdot 10^{-15}$	$1{,}418\,93 \cdot 10^{-15}$	$1{,}099\,38 \cdot 10^{-15}$	$2{,}364\,88 \cdot 10^{-15}$
19	$1{,}376\,27 \cdot 10^{-15}$	$2{,}116\,68 \cdot 10^{-15}$	$1{,}250\,54 \cdot 10^{-15}$	$1{,}881\,49 \cdot 10^{-15}$
20	$1{,}333\,84 \cdot 10^{-15}$	$2{,}108\,17 \cdot 10^{-15}$	$1{,}249\,13 \cdot 10^{-15}$	$1{,}768\,65 \cdot 10^{-15}$
21	$1{,}459\,19 \cdot 10^{-15}$	$3{,}174\,10 \cdot 10^{-15}$	$1{,}257\,44 \cdot 10^{-15}$	$2{,}074\,32 \cdot 10^{-15}$
22	$1{,}287\,10 \cdot 10^{-15}$	$2{,}345\,09 \cdot 10^{-15}$	$1{,}236\,04 \cdot 10^{-15}$	$1{,}993\,32 \cdot 10^{-15}$
23	$1{,}494\,12 \cdot 10^{-15}$	$2{,}580\,09 \cdot 10^{-15}$	$1{,}338\,10 \cdot 10^{-15}$	$2{,}169\,62 \cdot 10^{-15}$
24	$1{,}439\,10 \cdot 10^{-15}$	$2{,}802\,30 \cdot 10^{-15}$	$1{,}258\,69 \cdot 10^{-15}$	$2{,}160\,25 \cdot 10^{-15}$
25	$1{,}411\,60 \cdot 10^{-15}$	$2{,}680\,56 \cdot 10^{-15}$	$1{,}337\,89 \cdot 10^{-15}$	$2{,}680\,56 \cdot 10^{-15}$
26	$1{,}593\,38 \cdot 10^{-15}$	$3{,}619\,44 \cdot 10^{-15}$	$1{,}476\,06 \cdot 10^{-15}$	$3{,}035\,66 \cdot 10^{-15}$
27	$1{,}656\,45 \cdot 10^{-15}$	$3{,}737\,89 \cdot 10^{-15}$	$1{,}402\,13 \cdot 10^{-15}$	$2{,}347\,95 \cdot 10^{-15}$
28	$1{,}731\,62 \cdot 10^{-15}$	$3{,}611\,08 \cdot 10^{-15}$	$1{,}528\,60 \cdot 10^{-15}$	$2{,}679\,19 \cdot 10^{-15}$
29	$1{,}647\,39 \cdot 10^{-15}$	$3{,}253\,79 \cdot 10^{-15}$	$1{,}435\,04 \cdot 10^{-15}$	$3{,}137\,58 \cdot 10^{-15}$
30	$1{,}646\,70 \cdot 10^{-15}$	$5{,}927\,53 \cdot 10^{-15}$	$1{,}329\,91 \cdot 10^{-15}$	$1{,}975\,84 \cdot 10^{-15}$

Tabella B.9: Confronto tra metodi senza compressione e con compressione dei condizionamenti del sistema lineare in (2.2). Si è risolta l'equazione (3.3) con $\lambda = 10$.

	Condizionamento	
δ	Senza compressione	Con compressione
1	1,006 21	1,006 84
2	1,006 44	1,006 79
3	1,006 54	1,007 78
4	1,006 62	1,006 95
5	1,006 52	1,006 97
6	1,006 81	1,007 70
7	1,006 68	1,007 75
8	1,007 28	1,007 44
9	1,006 76	1,007 69
10	1,007 33	1,008 16
11	1,006 84	1,008 01
12	1,007 24	1,007 96
13	1,006 80	1,007 97
14	1,007 21	1,008 34
15	1,007 00	1,007 92
16	1,007 18	1,007 70
17	1,007 06	1,007 76
18	1,007 27	1,007 90
19	1,007 18	1,007 69
20	1,007 60	1,007 99
21	1,007 08	1,007 77
22	1,007 27	1,008 13
23	1,007 52	1,007 87
24	1,007 17	1,007 96
25	1,007 44	1,007 88
26	1,007 77	1,007 93
27	1,007 16	1,008 11
28	1,007 32	1,007 91
29	1,007 53	1,007 77
30	1,007 47	1,008 24

Tabella B.10: Confronto tra metodi senza compressione e con compressione dei tempi di calcolo per alcune fasi del metodo di Nyström. Si è risolta l'equazione (3.3) con $\lambda = 1$.

	Tempi totali	
δ	t_{nC}	t_{C}
2	$3{,}009\,30 \cdot 10^{-3}$	$1{,}091\,10 \cdot 10^{-3}$
4	$1{,}180\,40 \cdot 10^{-3}$	$1{,}962\,50 \cdot 10^{-3}$
6	$4{,}066\,70 \cdot 10^{-3}$	$2{,}154\,80 \cdot 10^{-3}$
8	$1{,}146\,90 \cdot 10^{-3}$	$3{,}228\,30 \cdot 10^{-3}$
10	$1{,}457\,00 \cdot 10^{-3}$	$9{,}085\,10 \cdot 10^{-3}$
12	$2{,}024\,50 \cdot 10^{-3}$	$1{,}431\,91 \cdot 10^{-2}$
14	$3{,}032\,60 \cdot 10^{-3}$	$2{,}961\,99 \cdot 10^{-2}$
16	$3{,}551\,20 \cdot 10^{-3}$	$5{,}117\,08 \cdot 10^{-2}$
18	$5{,}860\,80 \cdot 10^{-3}$	$1{,}192\,97 \cdot 10^{-1}$
20	$7{,}123\,30 \cdot 10^{-3}$	$2{,}049\,72 \cdot 10^{-1}$
22	$1{,}057\,02 \cdot 10^{-2}$	$3{,}779\,39 \cdot 10^{-1}$
24	$1{,}263\,29 \cdot 10^{-2}$	$5{,}237\,37 \cdot 10^{-1}$
26	$2{,}238\,92 \cdot 10^{-2}$	$8{,}552\,69 \cdot 10^{-1}$
28	$2{,}674\,55 \cdot 10^{-2}$	$1{,}602\,75$
30	$3{,}416\,80 \cdot 10^{-2}$	$2{,}457\,65$
32	$3{,}905\,36 \cdot 10^{-2}$	$3{,}550\,71$
34	$4{,}411\,29 \cdot 10^{-2}$	$5{,}634\,57$
36	$6{,}747\,90 \cdot 10^{-2}$	$7{,}168\,65$
38	$6{,}607\,43 \cdot 10^{-2}$	$1{,}014\,78 \cdot 10^{1}$
40	$9{,}032\,64 \cdot 10^{-2}$	$1{,}493\,52 \cdot 10^{1}$
42	$1{,}212\,90 \cdot 10^{-1}$	$2{,}169\,78 \cdot 10^{1}$
44	$1{,}366\,40 \cdot 10^{-1}$	$3{,}196\,77 \cdot 10^{1}$
46	$1{,}597\,06 \cdot 10^{-1}$	$4{,}690\,77 \cdot 10^{1}$
48	$2{,}070\,07 \cdot 10^{-1}$	$9{,}548\,65 \cdot 10^{1}$
50	$2{,}793\,34 \cdot 10^{-1}$	$9{,}318\,48 \cdot 10^{1}$

Tabella B.11: Confronto tra metodi senza compressione e con compressione degli errori relativi calcolati a partire dal vettore soluzione del sistema lineare in (2.2). Si è risolta l'equazione (3.4) su D_2 con $\lambda = 1/1000$.

	Senza compressione		Con compressione	
δ	E_2^{rel}	E_∞^{rel}	E_2^{rel}	E_∞^{rel}
1	$4{,}270\,60 \cdot 10^{-1}$	$4{,}188\,09 \cdot 10^{-1}$	$4{,}229\,58 \cdot 10^{-1}$	$4{,}188\,09 \cdot 10^{-1}$
2	$6{,}065\,89 \cdot 10^{-3}$	$4{,}897\,00 \cdot 10^{-3}$	$2{,}348\,82 \cdot 10^{-2}$	$1{,}896\,21 \cdot 10^{-2}$
3	$3{,}229\,13 \cdot 10^{-3}$	$2{,}498\,09 \cdot 10^{-3}$	$4{,}931\,76 \cdot 10^{-2}$	$4{,}115\,94 \cdot 10^{-2}$
4	$4{,}362\,34 \cdot 10^{-16}$	$6{,}002\,20 \cdot 10^{-16}$	$3{,}940\,93 \cdot 10^{-16}$	$6{,}002\,20 \cdot 10^{-16}$
5	$5{,}274\,88 \cdot 10^{-16}$	$4{,}122\,16 \cdot 10^{-16}$	$6{,}017\,52 \cdot 10^{-16}$	$6{,}183\,23 \cdot 10^{-16}$
6	$3{,}296\,80 \cdot 10^{-16}$	$3{,}563\,13 \cdot 10^{-16}$	$3{,}795\,88 \cdot 10^{-16}$	$5{,}344\,70 \cdot 10^{-16}$
7	$4{,}538\,79 \cdot 10^{-16}$	$7{,}392\,92 \cdot 10^{-16}$	$3{,}290\,61 \cdot 10^{-16}$	$3{,}696\,46 \cdot 10^{-16}$
8	$3{,}358\,04 \cdot 10^{-16}$	$3{,}545\,79 \cdot 10^{-16}$	$5{,}257\,86 \cdot 10^{-16}$	$6{,}205\,14 \cdot 10^{-16}$
9	$5{,}419\,08 \cdot 10^{-16}$	$1{,}220\,64 \cdot 10^{-15}$	$4{,}840\,40 \cdot 10^{-16}$	$6{,}975\,07 \cdot 10^{-16}$
10	$4{,}168\,92 \cdot 10^{-16}$	$4{,}238\,63 \cdot 10^{-16}$	$4{,}029\,48 \cdot 10^{-16}$	$5{,}934\,08 \cdot 10^{-16}$
11	$5{,}841\,01 \cdot 10^{-16}$	$1{,}178\,54 \cdot 10^{-15}$	$5{,}848\,49 \cdot 10^{-16}$	$1{,}515\,26 \cdot 10^{-15}$
12	$7{,}062\,85 \cdot 10^{-16}$	$9{,}963\,00 \cdot 10^{-16}$	$5{,}504\,72 \cdot 10^{-16}$	$8{,}302\,50 \cdot 10^{-16}$
13	$7{,}188\,14 \cdot 10^{-16}$	$1{,}155\,17 \cdot 10^{-15}$	$6{,}936\,21 \cdot 10^{-16}$	$1{,}155\,17 \cdot 10^{-15}$
14	$7{,}263\,11 \cdot 10^{-16}$	$1{,}137\,44 \cdot 10^{-15}$	$5{,}876\,68 \cdot 10^{-16}$	$8{,}124\,57 \cdot 10^{-16}$
15	$7{,}100\,39 \cdot 10^{-16}$	$1{,}951\,69 \cdot 10^{-15}$	$7{,}754\,18 \cdot 10^{-16}$	$1{,}789\,05 \cdot 10^{-15}$
16	$7{,}276\,40 \cdot 10^{-16}$	$1{,}289\,43 \cdot 10^{-15}$	$8{,}090\,54 \cdot 10^{-16}$	$1{,}289\,43 \cdot 10^{-15}$
17	$9{,}296\,87 \cdot 10^{-16}$	$2{,}255\,02 \cdot 10^{-15}$	$6{,}737\,43 \cdot 10^{-16}$	$9{,}664\,36 \cdot 10^{-16}$
18	$8{,}193\,20 \cdot 10^{-16}$	$1{,}923\,02 \cdot 10^{-15}$	$9{,}210\,28 \cdot 10^{-16}$	$1{,}602\,51 \cdot 10^{-15}$
19	$9{,}564\,54 \cdot 10^{-16}$	$1{,}753\,82 \cdot 10^{-15}$	$7{,}420\,66 \cdot 10^{-16}$	$1{,}275\,51 \cdot 10^{-15}$
20	$1{,}126\,57 \cdot 10^{-15}$	$2{,}688\,31 \cdot 10^{-15}$	$1{,}110\,93 \cdot 10^{-15}$	$2{,}372\,04 \cdot 10^{-15}$
21	$1{,}121\,78 \cdot 10^{-15}$	$2{,}063\,93 \cdot 10^{-15}$	$1{,}009\,72 \cdot 10^{-15}$	$2{,}222\,69 \cdot 10^{-15}$
22	$1{,}148\,89 \cdot 10^{-15}$	$1{,}742\,57 \cdot 10^{-15}$	$9{,}623\,03 \cdot 10^{-16}$	$1{,}584\,15 \cdot 10^{-15}$
23	$1{,}151\,13 \cdot 10^{-15}$	$2{,}369\,68 \cdot 10^{-15}$	$1{,}034\,75 \cdot 10^{-15}$	$2{,}211\,71 \cdot 10^{-15}$
24	$1{,}160\,96 \cdot 10^{-15}$	$2{,}653\,63 \cdot 10^{-15}$	$9{,}531\,78 \cdot 10^{-16}$	$2{,}497\,54 \cdot 10^{-15}$
25	$1{,}141\,89 \cdot 10^{-15}$	$2{,}363\,96 \cdot 10^{-15}$	$9{,}371\,28 \cdot 10^{-16}$	$1{,}575\,97 \cdot 10^{-15}$
26	$1{,}194\,86 \cdot 10^{-15}$	$3{,}293\,60 \cdot 10^{-15}$	$9{,}292\,18 \cdot 10^{-16}$	$2{,}038\,90 \cdot 10^{-15}$
27	$1{,}382\,62 \cdot 10^{-15}$	$2{,}982\,32 \cdot 10^{-15}$	$1{,}087\,86 \cdot 10^{-15}$	$2{,}354\,46 \cdot 10^{-15}$
28	$1{,}316\,52 \cdot 10^{-15}$	$2{,}499\,08 \cdot 10^{-15}$	$9{,}891\,10 \cdot 10^{-16}$	$1{,}718\,11 \cdot 10^{-15}$
29	$1{,}368\,23 \cdot 10^{-15}$	$2{,}666\,57 \cdot 10^{-15}$	$9{,}626\,52 \cdot 10^{-16}$	$2{,}039\,14 \cdot 10^{-15}$
30	$1{,}307\,43 \cdot 10^{-15}$	$2{,}644\,71 \cdot 10^{-15}$	$1{,}079\,55 \cdot 10^{-15}$	$2{,}178\,00 \cdot 10^{-15}$

Tabella B.12: Confronto tra metodi senza compressione e con compressione dei condizionamenti del sistema lineare in (2.2). Si è risolta l'equazione (3.4) su D_2 con $\lambda = 1/1000$.

	Condizionamento	
δ	Senza compressione	Con compressione
2	2,299 90	2,005 22
3	2,313 44	2,373 77
4	2,149 49	2,101 50
5	2,198 25	2,232 18
6	2,172 20	2,227 90
7	2,182 27	2,548 79
8	2,296 44	2,335 99
9	2,215 66	2,163 86
10	2,342 01	2,323 29
11	2,239 56	2,239 70
12	2,315 39	2,265 70
13	2,238 25	2,247 60
14	2,333 57	2,334 10
15	2,253 16	2,343 66
16	2,319 70	2,263 54
17	2,286 06	2,292 70
18	2,321 41	2,268 72
19	2,309 43	2,299 75
20	2,398 75	2,338 56
21	2,307 12	2,275 64
22	2,350 28	2,303 19
23	2,352 59	2,322 05
24	2,336 67	2,289 06
25	2,337 15	2,274 91
26	2,414 06	2,366 40
27	2,336 40	2,314 02
28	2,352 42	2,299 52
29	2,391 98	2,337 65
30	2,335 10	2,290 88

Tabella B.13: Confronto tra metodi senza compressione e con compressione degli errori relativi calcolati a partire dal vettore soluzione del sistema lineare in (2.2). Si è risolta l'equazione (3.4) su D_2 con $\lambda = 10$.

	Senza compressione		**Con compressione**	
δ	E_2^{rel}	E_∞^{rel}	E_2^{rel}	E_∞^{rel}
1	$4{,}270\,60 \cdot 10^{-5}$	$4{,}188\,09 \cdot 10^{-5}$	$4{,}229\,58 \cdot 10^{-5}$	$4{,}188\,09 \cdot 10^{-5}$
2	$6{,}065\,89 \cdot 10^{-7}$	$4{,}897\,00 \cdot 10^{-7}$	$3{,}639\,33 \cdot 10^{-6}$	$2{,}938\,04 \cdot 10^{-6}$
3	$3{,}229\,15 \cdot 10^{-7}$	$2{,}498\,11 \cdot 10^{-7}$	$4{,}938\,89 \cdot 10^{-6}$	$4{,}121\,89 \cdot 10^{-6}$
4	$1{,}474\,91 \cdot 10^{-16}$	$1{,}250\,46 \cdot 10^{-16}$	$2{,}456\,48 \cdot 10^{-16}$	$2{,}000\,73 \cdot 10^{-16}$
5	$2{,}832\,88 \cdot 10^{-16}$	$3{,}091\,62 \cdot 10^{-16}$	$2{,}143\,89 \cdot 10^{-16}$	$2{,}061\,08 \cdot 10^{-16}$
6	$3{,}827\,62 \cdot 10^{-16}$	$7{,}126\,26 \cdot 10^{-16}$	$3{,}140\,64 \cdot 10^{-16}$	$3{,}563\,13 \cdot 10^{-16}$
7	$3{,}635\,13 \cdot 10^{-16}$	$4{,}620\,57 \cdot 10^{-16}$	$3{,}302\,73 \cdot 10^{-16}$	$4{,}620\,57 \cdot 10^{-16}$
8	$4{,}269\,78 \cdot 10^{-16}$	$5{,}318\,69 \cdot 10^{-16}$	$4{,}047\,29 \cdot 10^{-16}$	$5{,}318\,69 \cdot 10^{-16}$
9	$3{,}500\,71 \cdot 10^{-16}$	$5{,}231\,31 \cdot 10^{-16}$	$4{,}141\,47 \cdot 10^{-16}$	$5{,}231\,31 \cdot 10^{-16}$
10	$4{,}323\,67 \cdot 10^{-16}$	$6{,}781\,81 \cdot 10^{-16}$	$3{,}725\,15 \cdot 10^{-16}$	$5{,}086\,36 \cdot 10^{-16}$
11	$5{,}294\,45 \cdot 10^{-16}$	$8{,}418\,12 \cdot 10^{-16}$	$3{,}275\,94 \cdot 10^{-16}$	$5{,}050\,87 \cdot 10^{-16}$
12	$5{,}906\,91 \cdot 10^{-16}$	$1{,}245\,38 \cdot 10^{-15}$	$4{,}030\,08 \cdot 10^{-16}$	$4{,}981\,50 \cdot 10^{-16}$
13	$5{,}803\,77 \cdot 10^{-16}$	$9{,}901\,45 \cdot 10^{-16}$	$5{,}796\,97 \cdot 10^{-16}$	$8{,}251\,21 \cdot 10^{-16}$
14	$5{,}491\,00 \cdot 10^{-16}$	$1{,}218\,68 \cdot 10^{-15}$	$5{,}134\,98 \cdot 10^{-16}$	$8{,}124\,57 \cdot 10^{-16}$
15	$6{,}483\,58 \cdot 10^{-16}$	$9{,}758\,47 \cdot 10^{-16}$	$5{,}310\,39 \cdot 10^{-16}$	$1{,}138\,49 \cdot 10^{-15}$
16	$7{,}078\,36 \cdot 10^{-16}$	$9{,}670\,72 \cdot 10^{-16}$	$5{,}418\,71 \cdot 10^{-16}$	$9{,}670\,72 \cdot 10^{-16}$
17	$9{,}837\,84 \cdot 10^{-16}$	$1{,}449\,65 \cdot 10^{-15}$	$5{,}863\,28 \cdot 10^{-16}$	$1{,}288\,58 \cdot 10^{-15}$
18	$9{,}548\,55 \cdot 10^{-16}$	$1{,}842\,89 \cdot 10^{-15}$	$6{,}542\,99 \cdot 10^{-16}$	$1{,}282\,01 \cdot 10^{-15}$
19	$7{,}861\,35 \cdot 10^{-16}$	$1{,}275\,51 \cdot 10^{-15}$	$6{,}308\,19 \cdot 10^{-16}$	$1{,}275\,51 \cdot 10^{-15}$
20	$1{,}026\,13 \cdot 10^{-15}$	$2{,}688\,31 \cdot 10^{-15}$	$6{,}693\,57 \cdot 10^{-16}$	$1{,}423\,22 \cdot 10^{-15}$
21	$1{,}035\,00 \cdot 10^{-15}$	$1{,}746\,40 \cdot 10^{-15}$	$7{,}400\,99 \cdot 10^{-16}$	$1{,}667\,02 \cdot 10^{-15}$
22	$1{,}011\,81 \cdot 10^{-15}$	$1{,}742\,57 \cdot 10^{-15}$	$7{,}716\,33 \cdot 10^{-16}$	$1{,}425\,74 \cdot 10^{-15}$
23	$1{,}041\,92 \cdot 10^{-15}$	$2{,}053\,73 \cdot 10^{-15}$	$7{,}936\,71 \cdot 10^{-16}$	$1{,}579\,79 \cdot 10^{-15}$
24	$1{,}235\,66 \cdot 10^{-15}$	$2{,}809\,73 \cdot 10^{-15}$	$8{,}373\,51 \cdot 10^{-16}$	$1{,}404\,86 \cdot 10^{-15}$
25	$1{,}139\,02 \cdot 10^{-15}$	$2{,}757\,96 \cdot 10^{-15}$	$8{,}640\,40 \cdot 10^{-16}$	$1{,}891\,17 \cdot 10^{-15}$
26	$1{,}277\,05 \cdot 10^{-15}$	$2{,}509\,41 \cdot 10^{-15}$	$8{,}854\,02 \cdot 10^{-16}$	$1{,}568\,38 \cdot 10^{-15}$
27	$1{,}243\,26 \cdot 10^{-15}$	$2{,}197\,50 \cdot 10^{-15}$	$9{,}269\,49 \cdot 10^{-16}$	$1{,}569\,64 \cdot 10^{-15}$
28	$1{,}279\,15 \cdot 10^{-15}$	$3{,}826\,71 \cdot 10^{-15}$	$9{,}549\,95 \cdot 10^{-16}$	$1{,}718\,11 \cdot 10^{-15}$
29	$1{,}214\,08 \cdot 10^{-15}$	$2{,}588\,14 \cdot 10^{-15}$	$9{,}595\,87 \cdot 10^{-16}$	$2{,}509\,71 \cdot 10^{-15}$
30	$1{,}377\,58 \cdot 10^{-15}$	$2{,}644\,71 \cdot 10^{-15}$	$1{,}054\,15 \cdot 10^{-15}$	$2{,}489\,14 \cdot 10^{-15}$

Tabella B.14: Confronto tra metodi senza compressione e con compressione dei condizionamenti del sistema lineare in (2.2). Si è risolta l'equazione (3.4) su D_2 con $\lambda = 10$.

	Condizionamento	
δ	Senza compressione	Con compressione
2	1,000 09	1,000 09
3	1,000 09	1,000 09
4	1,000 08	1,000 08
5	1,000 08	1,000 08
6	1,000 08	1,000 08
7	1,000 08	1,000 10
8	1,000 09	1,000 09
9	1,000 08	1,000 08
10	1,000 09	1,000 09
11	1,000 08	1,000 08
12	1,000 09	1,000 08
13	1,000 08	1,000 08
14	1,000 09	1,000 09
15	1,000 08	1,000 09
16	1,000 09	1,000 08
17	1,000 09	1,000 09
18	1,000 09	1,000 08
19	1,000 09	1,000 09
20	1,000 09	1,000 09
21	1,000 09	1,000 08
22	1,000 09	1,000 09
23	1,000 09	1,000 09
24	1,000 09	1,000 09
25	1,000 09	1,000 08
26	1,000 09	1,000 09
27	1,000 09	1,000 09
28	1,000 09	1,000 09
29	1,000 09	1,000 09
30	1,000 09	1,000 09

Tabella B.15: Confronto tra metodi senza compressione e con compressione dei tempi di calcolo per alcune fasi del metodo di Nyström. Si è risolta l'equazione (3.4) su D_2 con $\lambda = 1$.

	Tempi totali	
δ	t_{nC}	t_{C}
2	$2{,}970\,50 \cdot 10^{-3}$	$2{,}902\,90 \cdot 10^{-3}$
4	$1{,}224\,60 \cdot 10^{-3}$	$1{,}719\,50 \cdot 10^{-3}$
6	$1{,}763\,70 \cdot 10^{-3}$	$1{,}508\,30 \cdot 10^{-3}$
8	$1{,}082\,50 \cdot 10^{-3}$	$2{,}748\,20 \cdot 10^{-3}$
10	$1{,}289\,60 \cdot 10^{-3}$	$5{,}086\,90 \cdot 10^{-3}$
12	$1{,}555\,10 \cdot 10^{-3}$	$1{,}015\,41 \cdot 10^{-2}$
14	$2{,}731\,30 \cdot 10^{-3}$	$2{,}584\,17 \cdot 10^{-2}$
16	$3{,}487\,40 \cdot 10^{-3}$	$5{,}692\,29 \cdot 10^{-2}$
18	$4{,}813\,20 \cdot 10^{-3}$	$1{,}118\,63 \cdot 10^{-1}$
20	$5{,}692\,60 \cdot 10^{-3}$	$1{,}716\,49 \cdot 10^{-1}$
22	$9{,}621\,90 \cdot 10^{-3}$	$3{,}084\,60 \cdot 10^{-1}$
24	$1{,}081\,19 \cdot 10^{-2}$	$4{,}926\,19 \cdot 10^{-1}$
26	$1{,}496\,50 \cdot 10^{-2}$	$7{,}648\,77 \cdot 10^{-1}$
28	$2{,}281\,81 \cdot 10^{-2}$	$1{,}273\,57$
30	$3{,}134\,58 \cdot 10^{-2}$	$1{,}838\,94$
32	$4{,}075\,37 \cdot 10^{-2}$	$3{,}113\,21$
34	$4{,}978\,44 \cdot 10^{-2}$	$4{,}347\,81$
36	$5{,}653\,32 \cdot 10^{-2}$	$6{,}530\,72$
38	$7{,}746\,22 \cdot 10^{-2}$	$8{,}786\,78$
40	$8{,}327\,50 \cdot 10^{-2}$	$1{,}246\,95 \cdot 10^{1}$
42	$1{,}048\,66 \cdot 10^{-1}$	$1{,}806\,42 \cdot 10^{1}$
44	$1{,}287\,68 \cdot 10^{-1}$	$2{,}647\,85 \cdot 10^{1}$
46	$1{,}670\,59 \cdot 10^{-1}$	$3{,}576\,39 \cdot 10^{1}$
48	$1{,}881\,12 \cdot 10^{-1}$	$5{,}398\,80 \cdot 10^{1}$
50	$2{,}168\,24 \cdot 10^{-1}$	$7{,}369\,21 \cdot 10^{1}$

Tabella B.16: Confronto tra metodi senza compressione e con compressione degli errori relativi calcolati a partire dal vettore soluzione del sistema lineare in (2.2). Si è risolta l'equazione (3.6) su D_2 con $\lambda = 1/1000$ e $x(t_1, t_2) = (t_1 + t_2)^2$.

	Senza compressione		**Con compressione**	
δ	E_2^{rel}	E_∞^{rel}	E_2^{rel}	E_∞^{rel}
1	$1{,}828\,02 \cdot 10^{-1}$	$1{,}706\,16 \cdot 10^{-1}$	$2{,}417\,98 \cdot 10^{-2}$	$2{,}514\,94 \cdot 10^{-2}$
2	$6{,}198\,58 \cdot 10^{-3}$	$4{,}186\,60 \cdot 10^{-3}$	$5{,}234\,86 \cdot 10^{-1}$	$3{,}047\,64 \cdot 10^{-1}$
3	$6{,}273\,85 \cdot 10^{-3}$	$3{,}895\,66 \cdot 10^{-3}$	$1{,}241\,15 \cdot 10^{-1}$	$9{,}298\,51 \cdot 10^{-2}$
4	$3{,}447\,88 \cdot 10^{-5}$	$2{,}046\,51 \cdot 10^{-5}$	$2{,}825\,66 \cdot 10^{-2}$	$2{,}052\,27 \cdot 10^{-2}$
5	$3{,}068\,84 \cdot 10^{-5}$	$1{,}803\,53 \cdot 10^{-5}$	$2{,}595\,78 \cdot 10^{-3}$	$1{,}704\,77 \cdot 10^{-3}$
6	$1{,}459\,11 \cdot 10^{-7}$	$7{,}801\,02 \cdot 10^{-8}$	$3{,}679\,27 \cdot 10^{-4}$	$2{,}332\,27 \cdot 10^{-4}$
7	$2{,}559\,49 \cdot 10^{-8}$	$1{,}426\,62 \cdot 10^{-8}$	$1{,}474\,18 \cdot 10^{-5}$	$9{,}476\,43 \cdot 10^{-6}$
8	$4{,}082\,83 \cdot 10^{-11}$	$2{,}266\,79 \cdot 10^{-11}$	$3{,}734\,21 \cdot 10^{-7}$	$2{,}341\,31 \cdot 10^{-7}$
9	$3{,}536\,46 \cdot 10^{-12}$	$1{,}900\,88 \cdot 10^{-12}$	$3{,}581\,80 \cdot 10^{-9}$	$2{,}212\,99 \cdot 10^{-9}$
10	$9{,}154\,44 \cdot 10^{-12}$	$4{,}964\,28 \cdot 10^{-12}$	$9{,}878\,09 \cdot 10^{-10}$	$6{,}236\,47 \cdot 10^{-10}$
11	$9{,}309\,92 \cdot 10^{-12}$	$4{,}928\,64 \cdot 10^{-12}$	$2{,}638\,18 \cdot 10^{-12}$	$1{,}592\,54 \cdot 10^{-12}$
12	$9{,}141\,11 \cdot 10^{-12}$	$4{,}881\,71 \cdot 10^{-12}$	$7{,}813\,82 \cdot 10^{-12}$	$4{,}804\,49 \cdot 10^{-12}$
13	$9{,}265\,59 \cdot 10^{-12}$	$4{,}862\,27 \cdot 10^{-12}$	$8{,}224\,92 \cdot 10^{-12}$	$4{,}866\,40 \cdot 10^{-12}$
14	$9{,}021\,77 \cdot 10^{-12}$	$4{,}806\,33 \cdot 10^{-12}$	$7{,}905\,56 \cdot 10^{-12}$	$4{,}808\,28 \cdot 10^{-12}$
15	$9{,}175\,84 \cdot 10^{-12}$	$4{,}812\,55 \cdot 10^{-12}$	$8{,}075\,10 \cdot 10^{-12}$	$4{,}815\,16 \cdot 10^{-12}$
16	$9{,}023\,91 \cdot 10^{-12}$	$4{,}783\,30 \cdot 10^{-12}$	$7{,}960\,23 \cdot 10^{-12}$	$4{,}778\,95 \cdot 10^{-12}$
17	$9{,}150\,39 \cdot 10^{-12}$	$4{,}783\,37 \cdot 10^{-12}$	$8{,}160\,49 \cdot 10^{-12}$	$4{,}779\,51 \cdot 10^{-12}$
18	$9{,}053\,75 \cdot 10^{-12}$	$4{,}761\,39 \cdot 10^{-12}$	$7{,}868\,72 \cdot 10^{-12}$	$4{,}758\,02 \cdot 10^{-12}$
19	$9{,}059\,57 \cdot 10^{-12}$	$4{,}742\,33 \cdot 10^{-12}$	$8{,}065\,09 \cdot 10^{-12}$	$4{,}842\,30 \cdot 10^{-12}$
20	$8{,}907\,85 \cdot 10^{-12}$	$4{,}712\,61 \cdot 10^{-12}$	$7{,}903\,99 \cdot 10^{-12}$	$4{,}717\,99 \cdot 10^{-12}$
21	$9{,}128\,49 \cdot 10^{-12}$	$4{,}725\,76 \cdot 10^{-12}$	$8{,}068\,40 \cdot 10^{-12}$	$4{,}724\,81 \cdot 10^{-12}$
22	$9{,}065\,73 \cdot 10^{-12}$	$4{,}709\,69 \cdot 10^{-12}$	$8{,}033\,65 \cdot 10^{-12}$	$4{,}724\,74 \cdot 10^{-12}$
23	$9{,}009\,56 \cdot 10^{-12}$	$4{,}712\,83 \cdot 10^{-12}$	$8{,}035\,68 \cdot 10^{-12}$	$4{,}714\,88 \cdot 10^{-12}$
24	$9{,}069\,77 \cdot 10^{-12}$	$4{,}678\,20 \cdot 10^{-12}$	$8{,}025\,36 \cdot 10^{-12}$	$4{,}674\,76 \cdot 10^{-12}$
25	$8{,}964\,55 \cdot 10^{-12}$	$4{,}699\,87 \cdot 10^{-12}$	$7{,}967\,14 \cdot 10^{-12}$	$4{,}702\,87 \cdot 10^{-12}$
26	$8{,}818\,88 \cdot 10^{-12}$	$4{,}686\,17 \cdot 10^{-12}$	$7{,}730\,96 \cdot 10^{-12}$	$4{,}694\,01 \cdot 10^{-12}$
27	$9{,}075\,47 \cdot 10^{-12}$	$4{,}678\,79 \cdot 10^{-12}$	$7{,}942\,43 \cdot 10^{-12}$	$4{,}679\,11 \cdot 10^{-12}$
28	$8{,}972\,71 \cdot 10^{-12}$	$4{,}665\,77 \cdot 10^{-12}$	$7{,}859\,55 \cdot 10^{-12}$	$4{,}671\,40 \cdot 10^{-12}$
29	$8{,}919\,34 \cdot 10^{-12}$	$4{,}691\,59 \cdot 10^{-12}$	$1{,}213\,20 \cdot 10^{-11}$	$7{,}340\,28 \cdot 10^{-12}$
30	$8{,}961\,51 \cdot 10^{-12}$	$4{,}665\,90 \cdot 10^{-12}$	$7{,}871\,47 \cdot 10^{-12}$	$4{,}661\,54 \cdot 10^{-12}$

Tabella B.17: Confronto tra metodi senza compressione e con compressione dei condizionamenti del sistema lineare in (2.2). Si è risolta l'equazione (3.6) su D_2 con $\lambda = 1/1000$ e $x(t_1, t_2) = (t_1 + t_2)^2$.

	Condizionamento	
δ	Senza compressione	Con compressione
1	$1{,}91216 \cdot 10^1$	$1{,}64201 \cdot 10^1$
2	$2{,}10360 \cdot 10^1$	$1{,}63630 \cdot 10^1$
3	$2{,}30867 \cdot 10^1$	$1{,}92446 \cdot 10^1$
4	$2{,}41355 \cdot 10^1$	$2{,}68742 \cdot 10^1$
5	$2{,}25462 \cdot 10^1$	$2{,}74957 \cdot 10^1$
6	$2{,}67862 \cdot 10^1$	$2{,}20445 \cdot 10^1$
7	$2{,}48925 \cdot 10^1$	$4{,}07688 \cdot 10^1$
8	$3{,}06732 \cdot 10^1$	$3{,}18896 \cdot 10^1$
9	$2{,}57862 \cdot 10^1$	$2{,}67851 \cdot 10^1$
10	$3{,}16070 \cdot 10^1$	$2{,}51383 \cdot 10^1$
11	$2{,}70193 \cdot 10^1$	$2{,}66055 \cdot 10^1$
12	$3{,}09739 \cdot 10^1$	$2{,}54952 \cdot 10^1$
13	$2{,}63408 \cdot 10^1$	$2{,}91327 \cdot 10^1$
14	$3{,}01543 \cdot 10^1$	$2{,}76808 \cdot 10^1$
15	$2{,}82505 \cdot 10^1$	$3{,}19067 \cdot 10^1$
16	$2{,}98565 \cdot 10^1$	$2{,}50321 \cdot 10^1$
17	$2{,}88024 \cdot 10^1$	$2{,}74373 \cdot 10^1$
18	$3{,}06518 \cdot 10^1$	$2{,}42320 \cdot 10^1$
19	$2{,}98650 \cdot 10^1$	$2{,}62399 \cdot 10^1$
20	$3{,}37520 \cdot 10^1$	$2{,}80127 \cdot 10^1$
21	$2{,}89617 \cdot 10^1$	$2{,}46369 \cdot 10^1$
22	$3{,}06247 \cdot 10^1$	$2{,}63259 \cdot 10^1$
23	$3{,}29349 \cdot 10^1$	$2{,}90852 \cdot 10^1$
24	$2{,}98203 \cdot 10^1$	$2{,}51326 \cdot 10^1$
25	$3{,}21756 \cdot 10^1$	$2{,}52971 \cdot 10^1$
26	$3{,}53736 \cdot 10^1$	$2{,}95926 \cdot 10^1$
27	$2{,}96973 \cdot 10^1$	$2{,}56903 \cdot 10^1$
28	$3{,}11321 \cdot 10^1$	$2{,}49117 \cdot 10^1$
29	$3{,}30510 \cdot 10^1$	$2{,}73302 \cdot 10^1$
30	$3{,}25018 \cdot 10^1$	$2{,}72104 \cdot 10^1$

Tabella B.18: Confronto tra metodi senza compressione e con compressione degli errori relativi calcolati a partire dal vettore soluzione del sistema lineare in (2.2). Si è risolta l'equazione (3.6) su D_2 con $\lambda = 10$ e $x(t_1, t_2) = (t_1 + t_2)^2$.

	Senza compressione		**Con compressione**	
δ	E_2^{rel}	E_∞^{rel}	E_2^{rel}	E_∞^{rel}
1	$1{,}88447 \cdot 10^{-4}$	$1{,}75885 \cdot 10^{-4}$	$2{,}67209 \cdot 10^{-5}$	$2{,}77924 \cdot 10^{-5}$
2	$6{,}11380 \cdot 10^{-6}$	$4{,}12934 \cdot 10^{-6}$	$3{,}42041 \cdot 10^{-4}$	$1{,}99130 \cdot 10^{-4}$
3	$6{,}18833 \cdot 10^{-6}$	$3{,}84256 \cdot 10^{-6}$	$1{,}25192 \cdot 10^{-4}$	$9{,}37919 \cdot 10^{-5}$
4	$3{,}39710 \cdot 10^{-8}$	$2{,}01637 \cdot 10^{-8}$	$2{,}79669 \cdot 10^{-5}$	$2{,}03123 \cdot 10^{-5}$
5	$3{,}02367 \cdot 10^{-8}$	$1{,}77698 \cdot 10^{-8}$	$2{,}55853 \cdot 10^{-6}$	$1{,}68031 \cdot 10^{-6}$
6	$1{,}43763 \cdot 10^{-10}$	$7{,}68612 \cdot 10^{-11}$	$3{,}62534 \cdot 10^{-7}$	$2{,}29809 \cdot 10^{-7}$
7	$2{,}52181 \cdot 10^{-11}$	$1{,}40563 \cdot 10^{-11}$	$1{,}45247 \cdot 10^{-8}$	$9{,}33687 \cdot 10^{-9}$
8	$4{,}00999 \cdot 10^{-14}$	$2{,}19839 \cdot 10^{-14}$	$3{,}67923 \cdot 10^{-10}$	$2{,}30684 \cdot 10^{-10}$
9	$3{,}47011 \cdot 10^{-15}$	$2{,}09252 \cdot 10^{-15}$	$3{,}52915 \cdot 10^{-12}$	$2{,}18111 \cdot 10^{-12}$
10	$8{,}93669 \cdot 10^{-15}$	$5{,}00158 \cdot 10^{-15}$	$9{,}73214 \cdot 10^{-13}$	$6{,}14093 \cdot 10^{-13}$
11	$9{,}18309 \cdot 10^{-15}$	$4{,}88251 \cdot 10^{-15}$	$2{,}58627 \cdot 10^{-15}$	$1{,}85199 \cdot 10^{-15}$
12	$8{,}95728 \cdot 10^{-15}$	$5{,}06453 \cdot 10^{-15}$	$7{,}67550 \cdot 10^{-15}$	$4{,}98150 \cdot 10^{-15}$
13	$9{,}10294 \cdot 10^{-15}$	$4{,}95073 \cdot 10^{-15}$	$8{,}10732 \cdot 10^{-15}$	$5{,}11575 \cdot 10^{-15}$
14	$8{,}87081 \cdot 10^{-15}$	$5{,}03723 \cdot 10^{-15}$	$7{,}75656 \cdot 10^{-15}$	$4{,}87474 \cdot 10^{-15}$
15	$9{,}10313 \cdot 10^{-15}$	$5{,}20452 \cdot 10^{-15}$	$7{,}99456 \cdot 10^{-15}$	$5{,}04188 \cdot 10^{-15}$
16	$8{,}89276 \cdot 10^{-15}$	$5{,}15772 \cdot 10^{-15}$	$7{,}83252 \cdot 10^{-15}$	$5{,}31890 \cdot 10^{-15}$
17	$9{,}00383 \cdot 10^{-15}$	$5{,}23486 \cdot 10^{-15}$	$8{,}04511 \cdot 10^{-15}$	$5{,}15432 \cdot 10^{-15}$
18	$8{,}93450 \cdot 10^{-15}$	$5{,}44855 \cdot 10^{-15}$	$7{,}73922 \cdot 10^{-15}$	$5{,}20817 \cdot 10^{-15}$
19	$8{,}92607 \cdot 10^{-15}$	$5{,}26146 \cdot 10^{-15}$	$7{,}93837 \cdot 10^{-15}$	$5{,}26146 \cdot 10^{-15}$
20	$8{,}75255 \cdot 10^{-15}$	$6{,}00917 \cdot 10^{-15}$	$7{,}84014 \cdot 10^{-15}$	$6{,}00917 \cdot 10^{-15}$
21	$9{,}05544 \cdot 10^{-15}$	$5{,}23920 \cdot 10^{-15}$	$8{,}03028 \cdot 10^{-15}$	$5{,}39796 \cdot 10^{-15}$
22	$8{,}98418 \cdot 10^{-15}$	$5{,}70295 \cdot 10^{-15}$	$8{,}05586 \cdot 10^{-15}$	$5{,}38612 \cdot 10^{-15}$
23	$8{,}96187 \cdot 10^{-15}$	$5{,}52926 \cdot 10^{-15}$	$8{,}03377 \cdot 10^{-15}$	$6{,}16118 \cdot 10^{-15}$
24	$8{,}97507 \cdot 10^{-15}$	$5{,}61946 \cdot 10^{-15}$	$7{,}89471 \cdot 10^{-15}$	$5{,}30727 \cdot 10^{-15}$
25	$8{,}86296 \cdot 10^{-15}$	$5{,}98870 \cdot 10^{-15}$	$7{,}92142 \cdot 10^{-15}$	$5{,}51591 \cdot 10^{-15}$
26	$8{,}74241 \cdot 10^{-15}$	$5{,}48933 \cdot 10^{-15}$	$7{,}69018 \cdot 10^{-15}$	$6{,}27352 \cdot 10^{-15}$
27	$8{,}97902 \cdot 10^{-15}$	$5{,}33679 \cdot 10^{-15}$	$7{,}92268 \cdot 10^{-15}$	$5{,}88616 \cdot 10^{-15}$
28	$8{,}89243 \cdot 10^{-15}$	$5{,}77911 \cdot 10^{-15}$	$7{,}84035 \cdot 10^{-15}$	$5{,}93530 \cdot 10^{-15}$
29	$8{,}82266 \cdot 10^{-15}$	$5{,}80371 \cdot 10^{-15}$	$1{,}19532 \cdot 10^{-14}$	$8{,}15656 \cdot 10^{-15}$
30	$8{,}93510 \cdot 10^{-15}$	$6{,}06728 \cdot 10^{-15}$	$7{,}77873 \cdot 10^{-15}$	$5{,}44500 \cdot 10^{-15}$

Tabella B.19: Confronto tra metodi senza compressione e con compressione dei condizionamenti del sistema lineare in (2.2). Si è risolta l'equazione (3.6) su D_2 con $\lambda = 10$ e $x(t_1, t_2) = (t_1 + t_2)^2$.

	Condizionamento	
δ	Senza compressione	Con compressione
1	1,001 48	1,001 43
2	1,001 51	1,001 10
3	1,001 58	1,001 47
4	1,001 61	1,001 69
5	1,001 56	1,001 71
6	1,001 69	1,001 54
7	1,001 63	1,002 06
8	1,001 80	1,001 83
9	1,001 66	1,001 69
10	1,001 82	1,001 64
11	1,001 69	1,001 68
12	1,001 80	1,001 65
13	1,001 67	1,001 75
14	1,001 78	1,001 71
15	1,001 73	1,001 83
16	1,001 77	1,001 63
17	1,001 74	1,001 71
18	1,001 80	1,001 61
19	1,001 77	1,001 67
20	1,001 88	1,001 72
21	1,001 75	1,001 62
22	1,001 80	1,001 67
23	1,001 86	1,001 75
24	1,001 77	1,001 64
25	1,001 84	1,001 64
26	1,001 92	1,001 77
27	1,001 77	1,001 65
28	1,001 81	1,001 63
29	1,001 86	1,001 70
30	1,001 85	1,001 70

Tabella B.20: Confronto tra metodi senza compressione e con compressione degli errori relativi calcolati a partire dal vettore soluzione del sistema lineare in (2.2). Si è risolta l'equazione (3.6) su D_2 con $\lambda = 1/1000$ e $x(t_1, t_2) = |t_1 + t_2|$.

	Senza compressione		**Con compressione**	
δ	E_2^{rel}	E_∞^{rel}	E_2^{rel}	E_∞^{rel}
1	$4{,}645\,37 \cdot 10^{-3}$	$4{,}418\,03 \cdot 10^{-3}$	$1{,}229\,47 \cdot 10^{-1}$	$1{,}290\,97 \cdot 10^{-1}$
2	$5{,}470\,58 \cdot 10^{-3}$	$4{,}520\,70 \cdot 10^{-3}$	$4{,}512\,90 \cdot 10^{-1}$	$3{,}214\,53 \cdot 10^{-1}$
3	$7{,}094\,15 \cdot 10^{-3}$	$5{,}613\,58 \cdot 10^{-3}$	$7{,}339\,49 \cdot 10^{-2}$	$6{,}518\,31 \cdot 10^{-2}$
4	$1{,}449\,18 \cdot 10^{-3}$	$1{,}144\,63 \cdot 10^{-3}$	$1{,}310\,76 \cdot 10^{-2}$	$1{,}211\,30 \cdot 10^{-2}$
5	$1{,}157\,51 \cdot 10^{-3}$	$9{,}125\,31 \cdot 10^{-4}$	$6{,}112\,57 \cdot 10^{-3}$	$5{,}218\,76 \cdot 10^{-3}$
6	$5{,}618\,72 \cdot 10^{-4}$	$4{,}251\,21 \cdot 10^{-4}$	$2{,}687\,78 \cdot 10^{-3}$	$2{,}277\,03 \cdot 10^{-3}$
7	$3{,}489\,02 \cdot 10^{-4}$	$2{,}703\,56 \cdot 10^{-4}$	$7{,}859\,49 \cdot 10^{-3}$	$6{,}629\,39 \cdot 10^{-3}$
8	$2{,}035\,20 \cdot 10^{-4}$	$1{,}576\,22 \cdot 10^{-4}$	$3{,}326\,35 \cdot 10^{-4}$	$2{,}778\,85 \cdot 10^{-4}$
9	$1{,}761\,51 \cdot 10^{-4}$	$1{,}349\,88 \cdot 10^{-4}$	$4{,}221\,59 \cdot 10^{-4}$	$3{,}564\,37 \cdot 10^{-4}$
10	$1{,}072\,37 \cdot 10^{-4}$	$8{,}244\,21 \cdot 10^{-5}$	$3{,}108\,62 \cdot 10^{-4}$	$2{,}661\,29 \cdot 10^{-4}$
11	$5{,}673\,21 \cdot 10^{-5}$	$4{,}327\,85 \cdot 10^{-5}$	$5{,}002\,81 \cdot 10^{-4}$	$4{,}202\,86 \cdot 10^{-4}$
12	$4{,}623\,78 \cdot 10^{-5}$	$3{,}531\,83 \cdot 10^{-5}$	$4{,}754\,68 \cdot 10^{-4}$	$4{,}013\,47 \cdot 10^{-4}$
13	$5{,}426\,35 \cdot 10^{-5}$	$4{,}127\,00 \cdot 10^{-5}$	$3{,}449\,27 \cdot 10^{-4}$	$2{,}851\,87 \cdot 10^{-4}$
14	$1{,}676\,56 \cdot 10^{-5}$	$1{,}281\,56 \cdot 10^{-5}$	$1{,}295\,13 \cdot 10^{-4}$	$1{,}086\,53 \cdot 10^{-4}$
15	$1{,}992\,77 \cdot 10^{-5}$	$1{,}515\,86 \cdot 10^{-5}$	$1{,}002\,79 \cdot 10^{-4}$	$8{,}372\,05 \cdot 10^{-5}$
16	$3{,}859\,60 \cdot 10^{-6}$	$2{,}944\,78 \cdot 10^{-6}$	$5{,}396\,26 \cdot 10^{-5}$	$4{,}493\,47 \cdot 10^{-5}$
17	$6{,}601\,72 \cdot 10^{-6}$	$5{,}015\,56 \cdot 10^{-6}$	$2{,}531\,55 \cdot 10^{-7}$	$2{,}082\,96 \cdot 10^{-7}$
18	$1{,}673\,00 \cdot 10^{-5}$	$1{,}274\,15 \cdot 10^{-5}$	$1{,}168\,95 \cdot 10^{-5}$	$9{,}845\,18 \cdot 10^{-6}$
19	$2{,}282\,51 \cdot 10^{-6}$	$1{,}735\,49 \cdot 10^{-6}$	$1{,}431\,04 \cdot 10^{-5}$	$1{,}196\,63 \cdot 10^{-5}$
20	$1{,}374\,09 \cdot 10^{-6}$	$1{,}049\,06 \cdot 10^{-6}$	$2{,}890\,14 \cdot 10^{-5}$	$2{,}392\,65 \cdot 10^{-5}$
21	$1{,}527\,92 \cdot 10^{-5}$	$1{,}158\,23 \cdot 10^{-5}$	$1{,}137\,46 \cdot 10^{-4}$	$9{,}432\,15 \cdot 10^{-5}$
22	$1{,}937\,68 \cdot 10^{-5}$	$1{,}471\,45 \cdot 10^{-5}$	$2{,}610\,67 \cdot 10^{-5}$	$2{,}161\,13 \cdot 10^{-5}$
23	$6{,}412\,68 \cdot 10^{-6}$	$4{,}878\,37 \cdot 10^{-6}$	$2{,}615\,60 \cdot 10^{-5}$	$2{,}151\,84 \cdot 10^{-5}$
24	$5{,}322\,07 \cdot 10^{-6}$	$4{,}028\,86 \cdot 10^{-6}$	$2{,}657\,15 \cdot 10^{-5}$	$2{,}193\,83 \cdot 10^{-5}$
25	$1{,}362\,62 \cdot 10^{-5}$	$1{,}037\,22 \cdot 10^{-5}$	$1{,}278\,78 \cdot 10^{-5}$	$1{,}058\,97 \cdot 10^{-5}$
26	$4{,}590\,38 \cdot 10^{-7}$	$3{,}507\,88 \cdot 10^{-7}$	$3{,}406\,80 \cdot 10^{-6}$	$2{,}859\,87 \cdot 10^{-6}$
27	$2{,}971\,65 \cdot 10^{-6}$	$2{,}251\,36 \cdot 10^{-6}$	$1{,}543\,57 \cdot 10^{-5}$	$1{,}285\,59 \cdot 10^{-5}$
28	$4{,}996\,70 \cdot 10^{-6}$	$3{,}795\,12 \cdot 10^{-6}$	$1{,}012\,57 \cdot 10^{-5}$	$8{,}451\,19 \cdot 10^{-6}$
29	$7{,}531\,58 \cdot 10^{-6}$	$5{,}738\,21 \cdot 10^{-6}$	$2{,}485\,94 \cdot 10^{-5}$	$2{,}091\,96 \cdot 10^{-5}$
30	$2{,}756\,26 \cdot 10^{-6}$	$2{,}093\,01 \cdot 10^{-6}$	$9{,}431\,39 \cdot 10^{-6}$	$7{,}842\,25 \cdot 10^{-6}$

Tabella B.21: Confronto tra metodi senza compressione e con compressione dei condizionamenti del sistema lineare in (2.2). Si è risolta l'equazione (3.6) su D_2 con $\lambda = 1/1000$ e $x(t_1, t_2) = |t_1 + t_2|$.

	Condizionamento	
δ	Senza compressione	Con compressione
1	$1{,}912\,16 \cdot 10^1$	$1{,}642\,01 \cdot 10^1$
2	$2{,}103\,60 \cdot 10^1$	$1{,}636\,30 \cdot 10^1$
3	$2{,}308\,67 \cdot 10^1$	$1{,}924\,46 \cdot 10^1$
4	$2{,}413\,55 \cdot 10^1$	$2{,}687\,42 \cdot 10^1$
5	$2{,}254\,62 \cdot 10^1$	$2{,}749\,57 \cdot 10^1$
6	$2{,}678\,62 \cdot 10^1$	$2{,}204\,45 \cdot 10^1$
7	$2{,}489\,25 \cdot 10^1$	$4{,}076\,88 \cdot 10^1$
8	$3{,}067\,32 \cdot 10^1$	$3{,}188\,96 \cdot 10^1$
9	$2{,}578\,62 \cdot 10^1$	$2{,}678\,51 \cdot 10^1$
10	$3{,}160\,70 \cdot 10^1$	$2{,}513\,83 \cdot 10^1$
11	$2{,}701\,93 \cdot 10^1$	$2{,}660\,55 \cdot 10^1$
12	$3{,}097\,39 \cdot 10^1$	$2{,}549\,52 \cdot 10^1$
13	$2{,}634\,08 \cdot 10^1$	$2{,}913\,27 \cdot 10^1$
14	$3{,}015\,43 \cdot 10^1$	$2{,}768\,08 \cdot 10^1$
15	$2{,}825\,05 \cdot 10^1$	$3{,}190\,67 \cdot 10^1$
16	$2{,}985\,65 \cdot 10^1$	$2{,}503\,21 \cdot 10^1$
17	$2{,}880\,24 \cdot 10^1$	$2{,}743\,73 \cdot 10^1$
18	$3{,}065\,18 \cdot 10^1$	$2{,}423\,20 \cdot 10^1$
19	$2{,}986\,50 \cdot 10^1$	$2{,}623\,99 \cdot 10^1$
20	$3{,}375\,20 \cdot 10^1$	$2{,}801\,27 \cdot 10^1$
21	$2{,}896\,17 \cdot 10^1$	$2{,}463\,69 \cdot 10^1$
22	$3{,}062\,47 \cdot 10^1$	$2{,}632\,59 \cdot 10^1$
23	$3{,}293\,49 \cdot 10^1$	$2{,}908\,52 \cdot 10^1$
24	$2{,}982\,03 \cdot 10^1$	$2{,}513\,26 \cdot 10^1$
25	$3{,}217\,56 \cdot 10^1$	$2{,}529\,71 \cdot 10^1$
26	$3{,}537\,36 \cdot 10^1$	$2{,}959\,26 \cdot 10^1$
27	$2{,}969\,73 \cdot 10^1$	$2{,}569\,03 \cdot 10^1$
28	$3{,}113\,21 \cdot 10^1$	$2{,}491\,17 \cdot 10^1$
29	$3{,}305\,10 \cdot 10^1$	$2{,}733\,02 \cdot 10^1$
30	$3{,}250\,18 \cdot 10^1$	$2{,}721\,04 \cdot 10^1$

Tabella B.22: Confronto tra metodi senza compressione e con compressione degli errori relativi calcolati a partire dal vettore soluzione del sistema lineare in (2.2). Si è risolta l'equazione (3.6) su D_2 con $\lambda = 10$ e $x(t_1, t_2) = |t_1 + t_2|$.

	Senza compressione		**Con compressione**	
δ	E_2^{rel}	E_∞^{rel}	E_2^{rel}	E_∞^{rel}
1	$4{,}788\,82 \cdot 10^{-6}$	$4{,}554\,46 \cdot 10^{-6}$	$1{,}358\,67 \cdot 10^{-4}$	$1{,}426\,65 \cdot 10^{-4}$
2	$5{,}395\,76 \cdot 10^{-6}$	$4{,}458\,87 \cdot 10^{-6}$	$2{,}948\,68 \cdot 10^{-4}$	$2{,}100\,34 \cdot 10^{-4}$
3	$6{,}997\,45 \cdot 10^{-6}$	$5{,}537\,06 \cdot 10^{-6}$	$7{,}403\,18 \cdot 10^{-5}$	$6{,}574\,87 \cdot 10^{-5}$
4	$1{,}427\,84 \cdot 10^{-6}$	$1{,}127\,77 \cdot 10^{-6}$	$1{,}297\,32 \cdot 10^{-5}$	$1{,}198\,88 \cdot 10^{-5}$
5	$1{,}140\,47 \cdot 10^{-6}$	$8{,}990\,99 \cdot 10^{-7}$	$6{,}024\,85 \cdot 10^{-6}$	$5{,}143\,87 \cdot 10^{-6}$
6	$5{,}535\,99 \cdot 10^{-7}$	$4{,}188\,61 \cdot 10^{-7}$	$2{,}648\,39 \cdot 10^{-6}$	$2{,}243\,65 \cdot 10^{-6}$
7	$3{,}437\,65 \cdot 10^{-7}$	$2{,}663\,75 \cdot 10^{-7}$	$7{,}743\,74 \cdot 10^{-6}$	$6{,}531\,76 \cdot 10^{-6}$
8	$2{,}005\,23 \cdot 10^{-7}$	$1{,}553\,01 \cdot 10^{-7}$	$3{,}277\,37 \cdot 10^{-7}$	$2{,}737\,93 \cdot 10^{-7}$
9	$1{,}735\,57 \cdot 10^{-7}$	$1{,}330\,01 \cdot 10^{-7}$	$4{,}159\,43 \cdot 10^{-7}$	$3{,}511\,89 \cdot 10^{-7}$
10	$1{,}056\,58 \cdot 10^{-7}$	$8{,}122\,83 \cdot 10^{-8}$	$3{,}062\,85 \cdot 10^{-7}$	$2{,}622\,10 \cdot 10^{-7}$
11	$5{,}589\,67 \cdot 10^{-8}$	$4{,}264\,13 \cdot 10^{-8}$	$4{,}929\,15 \cdot 10^{-7}$	$4{,}140\,97 \cdot 10^{-7}$
12	$4{,}555\,70 \cdot 10^{-8}$	$3{,}479\,83 \cdot 10^{-8}$	$4{,}684\,68 \cdot 10^{-7}$	$3{,}954\,37 \cdot 10^{-7}$
13	$5{,}346\,46 \cdot 10^{-8}$	$4{,}066\,24 \cdot 10^{-8}$	$3{,}398\,49 \cdot 10^{-7}$	$2{,}809\,88 \cdot 10^{-7}$
14	$1{,}651\,87 \cdot 10^{-8}$	$1{,}262\,69 \cdot 10^{-8}$	$1{,}276\,06 \cdot 10^{-7}$	$1{,}070\,53 \cdot 10^{-7}$
15	$1{,}963\,43 \cdot 10^{-8}$	$1{,}493\,54 \cdot 10^{-8}$	$9{,}880\,24 \cdot 10^{-8}$	$8{,}248\,78 \cdot 10^{-8}$
16	$3{,}802\,77 \cdot 10^{-9}$	$2{,}901\,42 \cdot 10^{-9}$	$5{,}316\,81 \cdot 10^{-8}$	$4{,}427\,31 \cdot 10^{-8}$
17	$6{,}504\,52 \cdot 10^{-9}$	$4{,}941\,71 \cdot 10^{-9}$	$2{,}494\,27 \cdot 10^{-10}$	$2{,}052\,29 \cdot 10^{-10}$
18	$1{,}648\,37 \cdot 10^{-8}$	$1{,}255\,39 \cdot 10^{-8}$	$1{,}151\,74 \cdot 10^{-8}$	$9{,}700\,22 \cdot 10^{-9}$
19	$2{,}248\,90 \cdot 10^{-9}$	$1{,}709\,94 \cdot 10^{-9}$	$1{,}409\,97 \cdot 10^{-8}$	$1{,}179\,01 \cdot 10^{-8}$
20	$1{,}353\,86 \cdot 10^{-9}$	$1{,}033\,62 \cdot 10^{-9}$	$2{,}847\,58 \cdot 10^{-8}$	$2{,}357\,43 \cdot 10^{-8}$
21	$1{,}505\,42 \cdot 10^{-8}$	$1{,}141\,17 \cdot 10^{-8}$	$1{,}120\,71 \cdot 10^{-7}$	$9{,}293\,28 \cdot 10^{-8}$
22	$1{,}909\,15 \cdot 10^{-8}$	$1{,}449\,78 \cdot 10^{-8}$	$2{,}572\,23 \cdot 10^{-8}$	$2{,}129\,31 \cdot 10^{-8}$
23	$6{,}318\,26 \cdot 10^{-9}$	$4{,}806\,54 \cdot 10^{-9}$	$2{,}577\,09 \cdot 10^{-8}$	$2{,}120\,16 \cdot 10^{-8}$
24	$5{,}243\,70 \cdot 10^{-9}$	$3{,}969\,54 \cdot 10^{-9}$	$2{,}618\,02 \cdot 10^{-8}$	$2{,}161\,52 \cdot 10^{-8}$
25	$1{,}342\,56 \cdot 10^{-8}$	$1{,}021\,95 \cdot 10^{-8}$	$1{,}259\,95 \cdot 10^{-8}$	$1{,}043\,38 \cdot 10^{-8}$
26	$4{,}522\,80 \cdot 10^{-10}$	$3{,}456\,24 \cdot 10^{-10}$	$3{,}356\,64 \cdot 10^{-9}$	$2{,}817\,76 \cdot 10^{-9}$
27	$2{,}927\,90 \cdot 10^{-9}$	$2{,}218\,21 \cdot 10^{-9}$	$1{,}520\,85 \cdot 10^{-8}$	$1{,}266\,66 \cdot 10^{-8}$
28	$4{,}923\,13 \cdot 10^{-9}$	$3{,}739\,24 \cdot 10^{-9}$	$9{,}976\,58 \cdot 10^{-9}$	$8{,}326\,76 \cdot 10^{-9}$
29	$7{,}420\,69 \cdot 10^{-9}$	$5{,}653\,72 \cdot 10^{-9}$	$2{,}449\,34 \cdot 10^{-8}$	$2{,}061\,16 \cdot 10^{-8}$
30	$2{,}715\,68 \cdot 10^{-9}$	$2{,}062\,19 \cdot 10^{-9}$	$9{,}292\,53 \cdot 10^{-9}$	$7{,}726\,78 \cdot 10^{-9}$

Tabella B.23: Confronto tra metodi senza compressione e con compressione dei condizionamenti del sistema lineare in (2.2). Si è risolta l'equazione (3.6) su D_2 con $\lambda = 10$ e $x(t_1, t_2) = |t_1 + t_2|$.

	Condizionamento	
δ	Senza compressione	Con compressione
1	1,001 48	1,001 43
2	1,001 51	1,001 10
3	1,001 58	1,001 47
4	1,001 61	1,001 69
5	1,001 56	1,001 71
6	1,001 69	1,001 54
7	1,001 63	1,002 06
8	1,001 80	1,001 83
9	1,001 66	1,001 69
10	1,001 82	1,001 64
11	1,001 69	1,001 68
12	1,001 80	1,001 65
13	1,001 67	1,001 75
14	1,001 78	1,001 71
15	1,001 73	1,001 83
16	1,001 77	1,001 63
17	1,001 74	1,001 71
18	1,001 80	1,001 61
19	1,001 77	1,001 67
20	1,001 88	1,001 72
21	1,001 75	1,001 62
22	1,001 80	1,001 67
23	1,001 86	1,001 75
24	1,001 77	1,001 64
25	1,001 84	1,001 64
26	1,001 92	1,001 77
27	1,001 77	1,001 65
28	1,001 81	1,001 63
29	1,001 86	1,001 70
30	1,001 85	1,001 70

Tabella B.24: Confronto tra metodi senza compressione e con compressione degli errori relativi calcolati a partire dal vettore soluzione del sistema lineare in (2.2). Si è risolta l'equazione (3.11) con $\lambda = 1/1000$.

	Senza compressione		Con compressione	
δ	E_2^{rel}	E_∞^{rel}	E_2^{rel}	E_∞^{rel}
1	7,558 81	5,450 74	6,609 99	5,450 74
2	$5{,}699\,68 \cdot 10^{-1}$	$4{,}597\,63 \cdot 10^{-1}$	$7{,}137\,26 \cdot 10^{-1}$	$5{,}042\,28 \cdot 10^{-1}$
3	$8{,}061\,11 \cdot 10^{-1}$	$7{,}164\,81 \cdot 10^{-1}$	$8{,}649\,39 \cdot 10^{-1}$	$7{,}426\,00 \cdot 10^{-1}$
4	$5{,}237\,94 \cdot 10^{-1}$	$4{,}945\,94 \cdot 10^{-1}$	$3{,}371\,71 \cdot 10^{-1}$	$3{,}364\,84 \cdot 10^{-1}$
5	$3{,}521\,56 \cdot 10^{-1}$	$3{,}493\,70 \cdot 10^{-1}$	$2{,}311\,46 \cdot 10^{-1}$	$2{,}385\,66 \cdot 10^{-1}$
6	$7{,}589\,20 \cdot 10^{-1}$	$7{,}931\,14 \cdot 10^{-1}$	$7{,}325\,78 \cdot 10^{-1}$	$7{,}614\,03 \cdot 10^{-1}$
7	$8{,}401\,36 \cdot 10^{-1}$	$8{,}942\,98 \cdot 10^{-1}$	$9{,}685\,70 \cdot 10^{-1}$	1,028 75
8	$4{,}864\,40 \cdot 10^{-1}$	$4{,}954\,06 \cdot 10^{-1}$	$5{,}290\,68 \cdot 10^{-1}$	$5{,}351\,00 \cdot 10^{-1}$
9	$5{,}361\,16 \cdot 10^{-1}$	$5{,}617\,62 \cdot 10^{-1}$	$5{,}215\,58 \cdot 10^{-1}$	$5{,}470\,80 \cdot 10^{-1}$
10	$8{,}511\,88 \cdot 10^{-1}$	$9{,}084\,45 \cdot 10^{-1}$	$7{,}996\,36 \cdot 10^{-1}$	$8{,}590\,52 \cdot 10^{-1}$
11	$8{,}302\,28 \cdot 10^{-1}$	$9{,}186\,93 \cdot 10^{-1}$	$8{,}406\,08 \cdot 10^{-1}$	$9{,}640\,80 \cdot 10^{-1}$
12	$8{,}339\,56 \cdot 10^{-1}$	$8{,}955\,80 \cdot 10^{-1}$	$8{,}267\,95 \cdot 10^{-1}$	$9{,}004\,37 \cdot 10^{-1}$
13	$7{,}618\,82 \cdot 10^{-1}$	$8{,}400\,48 \cdot 10^{-1}$	$8{,}131\,69 \cdot 10^{-1}$	$9{,}082\,00 \cdot 10^{-1}$
14	$7{,}214\,58 \cdot 10^{-1}$	$7{,}567\,64 \cdot 10^{-1}$	$7{,}107\,76 \cdot 10^{-1}$	$7{,}552\,69 \cdot 10^{-1}$
15	$8{,}057\,20 \cdot 10^{-1}$	$8{,}905\,53 \cdot 10^{-1}$	$7{,}923\,19 \cdot 10^{-1}$	$9{,}023\,46 \cdot 10^{-1}$
16	$7{,}862\,80 \cdot 10^{-1}$	$8{,}451\,39 \cdot 10^{-1}$	$7{,}646\,22 \cdot 10^{-1}$	$8{,}256\,71 \cdot 10^{-1}$
17	$8{,}258\,35 \cdot 10^{-1}$	$9{,}134\,13 \cdot 10^{-1}$	$8{,}290\,76 \cdot 10^{-1}$	$9{,}317\,75 \cdot 10^{-1}$
18	$8{,}543\,12 \cdot 10^{-1}$	$9{,}308\,72 \cdot 10^{-1}$	$8{,}419\,42 \cdot 10^{-1}$	$9{,}317\,60 \cdot 10^{-1}$
19	$8{,}194\,42 \cdot 10^{-1}$	$9{,}013\,53 \cdot 10^{-1}$	$7{,}894\,13 \cdot 10^{-1}$	$8{,}699\,92 \cdot 10^{-1}$
20	$9{,}005\,97 \cdot 10^{-1}$	$9{,}725\,16 \cdot 10^{-1}$	$8{,}654\,40 \cdot 10^{-1}$	$9{,}376\,36 \cdot 10^{-1}$
21	$8{,}012\,69 \cdot 10^{-1}$	$8{,}807\,30 \cdot 10^{-1}$	$7{,}620\,34 \cdot 10^{-1}$	$8{,}519\,85 \cdot 10^{-1}$
22	$8{,}545\,47 \cdot 10^{-1}$	$9{,}444\,69 \cdot 10^{-1}$	$8{,}376\,48 \cdot 10^{-1}$	$9{,}397\,94 \cdot 10^{-1}$
23	$8{,}142\,80 \cdot 10^{-1}$	$8{,}863\,61 \cdot 10^{-1}$	$7{,}796\,74 \cdot 10^{-1}$	$8{,}510\,39 \cdot 10^{-1}$
24	$8{,}400\,06 \cdot 10^{-1}$	$9{,}307\,14 \cdot 10^{-1}$	$8{,}294\,58 \cdot 10^{-1}$	$9{,}345\,30 \cdot 10^{-1}$
25	$8{,}411\,16 \cdot 10^{-1}$	$9{,}166\,26 \cdot 10^{-1}$	$8{,}379\,81 \cdot 10^{-1}$	$9{,}288\,74 \cdot 10^{-1}$
26	$7{,}664\,57 \cdot 10^{-1}$	$8{,}054\,35 \cdot 10^{-1}$	$7{,}561\,35 \cdot 10^{-1}$	$8{,}030\,52 \cdot 10^{-1}$
27	$7{,}805\,31 \cdot 10^{-1}$	$8{,}522\,00 \cdot 10^{-1}$	$7{,}576\,49 \cdot 10^{-1}$	$8{,}391\,64 \cdot 10^{-1}$
28	$7{,}858\,76 \cdot 10^{-1}$	$8{,}505\,53 \cdot 10^{-1}$	$7{,}892\,00 \cdot 10^{-1}$	$8{,}668\,77 \cdot 10^{-1}$
29	$7{,}912\,95 \cdot 10^{-1}$	$8{,}468\,62 \cdot 10^{-1}$	$7{,}785\,97 \cdot 10^{-1}$	$8{,}411\,02 \cdot 10^{-1}$
30	$8{,}084\,04 \cdot 10^{-1}$	$8{,}749\,76 \cdot 10^{-1}$	$7{,}778\,52 \cdot 10^{-1}$	$8{,}500\,16 \cdot 10^{-1}$

Tabella B.25: Confronto tra metodi senza compressione e con compressione dei condizionamenti del sistema lineare in (2.2). Si è risolta l'equazione (3.11) con $\lambda = 1/1000$.

	Condizionamento	
δ	Senza compressione	Con compressione
1	$1{,}000\,00$	$1{,}000\,00$
2	$3{,}076\,70 \cdot 10^1$	$4{,}358\,75 \cdot 10^1$
3	$3{,}726\,75 \cdot 10^1$	$4{,}771\,29 \cdot 10^1$
4	$3{,}378\,17 \cdot 10^1$	$5{,}591\,32 \cdot 10^1$
5	$2{,}816\,92 \cdot 10^1$	$3{,}864\,55 \cdot 10^1$
6	$3{,}944\,20 \cdot 10^1$	$6{,}308\,23 \cdot 10^1$
7	$3{,}853\,64 \cdot 10^1$	$7{,}381\,23 \cdot 10^1$
8	$4{,}214\,00 \cdot 10^1$	$6{,}375\,31 \cdot 10^1$
9	$3{,}575\,43 \cdot 10^1$	$4{,}871\,79 \cdot 10^1$
10	$4{,}870\,82 \cdot 10^1$	$5{,}866\,83 \cdot 10^1$
11	$4{,}128\,94 \cdot 10^1$	$5{,}833\,64 \cdot 10^1$
12	$4{,}693\,82 \cdot 10^1$	$6{,}264\,98 \cdot 10^1$
13	$4{,}004\,66 \cdot 10^1$	$6{,}249\,07 \cdot 10^1$
14	$4{,}626\,24 \cdot 10^1$	$6{,}502\,64 \cdot 10^1$
15	$4{,}304\,89 \cdot 10^1$	$6{,}734\,48 \cdot 10^1$
16	$4{,}643\,68 \cdot 10^1$	$5{,}618\,50 \cdot 10^1$
17	$4{,}429\,62 \cdot 10^1$	$6{,}425\,82 \cdot 10^1$
18	$4{,}755\,92 \cdot 10^1$	$5{,}630\,90 \cdot 10^1$
19	$4{,}610\,01 \cdot 10^1$	$6{,}452\,80 \cdot 10^1$
20	$5{,}303\,18 \cdot 10^1$	$6{,}513\,89 \cdot 10^1$
21	$4{,}489\,68 \cdot 10^1$	$6{,}524\,38 \cdot 10^1$
22	$4{,}796\,62 \cdot 10^1$	$6{,}228\,26 \cdot 10^1$
23	$5{,}030\,46 \cdot 10^1$	$6{,}545\,01 \cdot 10^1$
24	$4{,}659\,52 \cdot 10^1$	$6{,}211\,08 \cdot 10^1$
25	$4{,}939\,64 \cdot 10^1$	$6{,}178\,17 \cdot 10^1$
26	$5{,}432\,12 \cdot 10^1$	$7{,}019\,19 \cdot 10^1$
27	$4{,}620\,39 \cdot 10^1$	$6{,}359\,55 \cdot 10^1$
28	$4{,}839\,21 \cdot 10^1$	$6{,}581\,57 \cdot 10^1$
29	$5{,}123\,40 \cdot 10^1$	$6{,}630\,95 \cdot 10^1$
30	$4{,}916\,24 \cdot 10^1$	$6{,}936\,19 \cdot 10^1$

Tabella B.26: Confronto tra metodi senza compressione e con compressione degli errori relativi calcolati a partire dal vettore soluzione del sistema lineare in (2.2). Si è risolta l'equazione (3.11) con $\lambda = 10$.

	Senza compressione		**Con compressione**	
δ	E_2^{rel}	E_∞^{rel}	E_2^{rel}	E_∞^{rel}
1	$7{,}558\,81 \cdot 10^{-4}$	$5{,}450\,74 \cdot 10^{-4}$	$6{,}609\,99 \cdot 10^{-4}$	$5{,}450\,74 \cdot 10^{-4}$
2	$8{,}973\,30 \cdot 10^{-4}$	$5{,}177\,33 \cdot 10^{-4}$	$1{,}187\,38 \cdot 10^{-3}$	$6{,}752\,28 \cdot 10^{-4}$
3	$1{,}174\,18 \cdot 10^{-3}$	$6{,}401\,50 \cdot 10^{-4}$	$1{,}086\,88 \cdot 10^{-3}$	$6{,}771\,10 \cdot 10^{-4}$
4	$6{,}539\,12 \cdot 10^{-4}$	$3{,}330\,08 \cdot 10^{-4}$	$3{,}647\,50 \cdot 10^{-4}$	$2{,}227\,13 \cdot 10^{-4}$
5	$4{,}904\,58 \cdot 10^{-4}$	$2{,}495\,45 \cdot 10^{-4}$	$2{,}876\,49 \cdot 10^{-4}$	$1{,}589\,63 \cdot 10^{-4}$
6	$9{,}243\,53 \cdot 10^{-4}$	$4{,}389\,30 \cdot 10^{-4}$	$7{,}860\,43 \cdot 10^{-4}$	$4{,}312\,23 \cdot 10^{-4}$
7	$9{,}930\,44 \cdot 10^{-4}$	$4{,}775\,06 \cdot 10^{-4}$	$1{,}021\,18 \cdot 10^{-3}$	$5{,}585\,44 \cdot 10^{-4}$
8	$6{,}503\,47 \cdot 10^{-4}$	$3{,}095\,25 \cdot 10^{-4}$	$6{,}141\,35 \cdot 10^{-4}$	$3{,}260\,02 \cdot 10^{-4}$
9	$7{,}143\,57 \cdot 10^{-4}$	$3{,}334\,04 \cdot 10^{-4}$	$6{,}308\,08 \cdot 10^{-4}$	$3{,}324\,37 \cdot 10^{-4}$
10	$9{,}406\,44 \cdot 10^{-4}$	$4{,}381\,56 \cdot 10^{-4}$	$8{,}160\,98 \cdot 10^{-4}$	$4{,}295\,10 \cdot 10^{-4}$
11	$9{,}621\,75 \cdot 10^{-4}$	$4{,}437\,30 \cdot 10^{-4}$	$8{,}890\,08 \cdot 10^{-4}$	$4{,}561\,50 \cdot 10^{-4}$
12	$9{,}297\,26 \cdot 10^{-4}$	$4{,}284\,63 \cdot 10^{-4}$	$8{,}355\,91 \cdot 10^{-4}$	$4{,}347\,77 \cdot 10^{-4}$
13	$8{,}976\,94 \cdot 10^{-4}$	$4{,}105\,92 \cdot 10^{-4}$	$8{,}487\,39 \cdot 10^{-4}$	$4{,}273\,23 \cdot 10^{-4}$
14	$8{,}511\,30 \cdot 10^{-4}$	$3{,}904\,02 \cdot 10^{-4}$	$7{,}550\,43 \cdot 10^{-4}$	$3{,}879\,68 \cdot 10^{-4}$
15	$9{,}294\,81 \cdot 10^{-4}$	$4{,}238\,96 \cdot 10^{-4}$	$8{,}311\,83 \cdot 10^{-4}$	$4{,}213\,15 \cdot 10^{-4}$
16	$8{,}956\,86 \cdot 10^{-4}$	$4{,}093\,03 \cdot 10^{-4}$	$8{,}046\,12 \cdot 10^{-4}$	$4{,}067\,94 \cdot 10^{-4}$
17	$9{,}318\,57 \cdot 10^{-4}$	$4{,}235\,32 \cdot 10^{-4}$	$8{,}591\,68 \cdot 10^{-4}$	$4{,}309\,22 \cdot 10^{-4}$
18	$9{,}372\,83 \cdot 10^{-4}$	$4{,}260\,40 \cdot 10^{-4}$	$8{,}402\,97 \cdot 10^{-4}$	$4{,}276\,82 \cdot 10^{-4}$
19	$9{,}221\,13 \cdot 10^{-4}$	$4{,}179\,04 \cdot 10^{-4}$	$8{,}179\,53 \cdot 10^{-4}$	$4{,}142\,08 \cdot 10^{-4}$
20	$9{,}473\,44 \cdot 10^{-4}$	$4{,}307\,00 \cdot 10^{-4}$	$8{,}540\,85 \cdot 10^{-4}$	$4{,}287\,36 \cdot 10^{-4}$
21	$9{,}120\,81 \cdot 10^{-4}$	$4{,}118\,92 \cdot 10^{-4}$	$8{,}146\,12 \cdot 10^{-4}$	$4{,}059\,66 \cdot 10^{-4}$
22	$9{,}406\,82 \cdot 10^{-4}$	$4{,}250\,94 \cdot 10^{-4}$	$8{,}502\,67 \cdot 10^{-4}$	$4{,}267\,49 \cdot 10^{-4}$
23	$9{,}106\,81 \cdot 10^{-4}$	$4{,}123\,08 \cdot 10^{-4}$	$8{,}208\,48 \cdot 10^{-4}$	$4{,}079\,28 \cdot 10^{-4}$
24	$9{,}308\,17 \cdot 10^{-4}$	$4{,}172\,25 \cdot 10^{-4}$	$8{,}423\,44 \cdot 10^{-4}$	$4{,}169\,69 \cdot 10^{-4}$
25	$9{,}218\,40 \cdot 10^{-4}$	$4{,}172\,93 \cdot 10^{-4}$	$8{,}395\,31 \cdot 10^{-4}$	$4{,}195\,24 \cdot 10^{-4}$
26	$8{,}625\,95 \cdot 10^{-4}$	$3{,}916\,27 \cdot 10^{-4}$	$7{,}724\,63 \cdot 10^{-4}$	$3{,}903\,46 \cdot 10^{-4}$
27	$8{,}982\,58 \cdot 10^{-4}$	$4{,}039\,95 \cdot 10^{-4}$	$8{,}008\,95 \cdot 10^{-4}$	$4{,}027\,95 \cdot 10^{-4}$
28	$8{,}914\,82 \cdot 10^{-4}$	$4{,}016\,08 \cdot 10^{-4}$	$8{,}043\,62 \cdot 10^{-4}$	$4{,}046\,15 \cdot 10^{-4}$
29	$8{,}866\,64 \cdot 10^{-4}$	$4{,}009\,14 \cdot 10^{-4}$	$7{,}908\,17 \cdot 10^{-4}$	$4{,}026\,79 \cdot 10^{-4}$
30	$9{,}033\,02 \cdot 10^{-4}$	$4{,}067\,02 \cdot 10^{-4}$	$8{,}015\,00 \cdot 10^{-4}$	$4{,}013\,73 \cdot 10^{-4}$

Tabella B.27: Confronto tra metodi senza compressione e con compressione dei condizionamenti del sistema lineare in (2.2). Si è risolta l'equazione (3.11) con $\lambda = 10$.

	Condizionamento	
δ	Senza compressione	Con compressione
1	1,000 00	1,000 00
2	1,003 71	1,004 35
3	1,003 94	1,004 54
4	1,003 70	1,004 63
5	1,003 45	1,003 79
6	1,003 91	1,005 09
7	1,003 91	1,005 33
8	1,003 95	1,004 95
9	1,003 78	1,004 38
10	1,004 22	1,004 88
11	1,003 98	1,004 83
12	1,004 15	1,004 99
13	1,003 92	1,004 92
14	1,004 11	1,005 08
15	1,004 04	1,005 18
16	1,004 12	1,004 73
17	1,004 07	1,005 01
18	1,004 18	1,004 83
19	1,004 13	1,005 01
20	1,004 38	1,005 10
21	1,004 07	1,004 99
22	1,004 19	1,004 96
23	1,004 28	1,005 06
24	1,004 13	1,004 91
25	1,004 26	1,004 91
26	1,004 39	1,005 31
27	1,004 11	1,005 05
28	1,004 19	1,005 08
29	1,004 29	1,005 15
30	1,004 25	1,005 23

Tabella B.28: Confronto tra metodi senza compressione e con compressione degli errori relativi calcolati a partire dal vettore soluzione del sistema lineare in (2.2). Si è risolta l'equazione (3.4) su $\tilde{D}_2$ con $\lambda = 1/100000$ e $x(t_1, t_2) = (t_1+t_2)^2$.

	Senza compressione		**Con compressione**	
δ	E_2^{rel}	E_∞^{rel}	E_2^{rel}	E_∞^{rel}
1	$7{,}867\,15$	$5{,}926\,21$	$1{,}418\,37 \cdot 10^{2}$	$1{,}418\,37 \cdot 10^{2}$
2	$3{,}159\,03 \cdot 10^{-3}$	$2{,}126\,36 \cdot 10^{-3}$	$7{,}102\,41 \cdot 10^{-1}$	$6{,}106\,02 \cdot 10^{-1}$
3	$6{,}533\,19 \cdot 10^{-2}$	$4{,}128\,62 \cdot 10^{-2}$	$3{,}815\,69 \cdot 10^{1}$	$3{,}136\,96 \cdot 10^{1}$
4	$2{,}564\,91 \cdot 10^{-14}$	$1{,}859\,22 \cdot 10^{-14}$	$2{,}472\,93 \cdot 10^{-14}$	$1{,}841\,52 \cdot 10^{-14}$
5	$4{,}859\,26 \cdot 10^{-14}$	$3{,}098\,17 \cdot 10^{-14}$	$3{,}716\,60 \cdot 10^{-14}$	$2{,}688\,64 \cdot 10^{-14}$
6	$5{,}179\,47 \cdot 10^{-14}$	$3{,}689\,45 \cdot 10^{-14}$	$3{,}839\,13 \cdot 10^{-14}$	$2{,}617\,03 \cdot 10^{-14}$
7	$3{,}111\,13 \cdot 10^{-14}$	$3{,}226\,31 \cdot 10^{-14}$	$2{,}203\,68 \cdot 10^{-14}$	$1{,}461\,92 \cdot 10^{-14}$
8	$5{,}569\,36 \cdot 10^{-14}$	$3{,}531\,71 \cdot 10^{-14}$	$3{,}074\,42 \cdot 10^{-14}$	$2{,}257\,71 \cdot 10^{-14}$
9	$4{,}009\,51 \cdot 10^{-14}$	$2{,}768\,26 \cdot 10^{-14}$	$4{,}895\,18 \cdot 10^{-14}$	$3{,}658\,05 \cdot 10^{-14}$
10	$6{,}401\,82 \cdot 10^{-14}$	$4{,}273\,12 \cdot 10^{-14}$	$3{,}322\,03 \cdot 10^{-14}$	$2{,}449\,60 \cdot 10^{-14}$
11	$4{,}740\,35 \cdot 10^{-14}$	$5{,}581\,98 \cdot 10^{-14}$	$1{,}112\,11 \cdot 10^{-14}$	$8{,}767\,39 \cdot 10^{-15}$
12	$3{,}925\,71 \cdot 10^{-14}$	$4{,}467\,12 \cdot 10^{-14}$	$1{,}740\,36 \cdot 10^{-14}$	$1{,}416\,21 \cdot 10^{-14}$
13	$4{,}809\,06 \cdot 10^{-14}$	$8{,}227\,15 \cdot 10^{-14}$	$3{,}597\,18 \cdot 10^{-14}$	$2{,}620\,54 \cdot 10^{-14}$
14	$8{,}188\,19 \cdot 10^{-14}$	$1{,}926\,10 \cdot 10^{-13}$	$3{,}123\,98 \cdot 10^{-14}$	$2{,}289\,29 \cdot 10^{-14}$
15	$4{,}154\,91 \cdot 10^{-14}$	$1{,}661\,92 \cdot 10^{-13}$	$4{,}954\,25 \cdot 10^{-15}$	$4{,}133\,64 \cdot 10^{-15}$
16	$2{,}191\,40 \cdot 10^{-14}$	$6{,}713\,85 \cdot 10^{-14}$	$6{,}593\,58 \cdot 10^{-14}$	$4{,}678\,70 \cdot 10^{-14}$
17	$3{,}020\,82 \cdot 10^{-14}$	$2{,}287\,31 \cdot 10^{-13}$	$2{,}488\,81 \cdot 10^{-14}$	$1{,}903\,31 \cdot 10^{-14}$
18	$5{,}400\,27 \cdot 10^{-14}$	$1{,}268\,83 \cdot 10^{-13}$	$3{,}100\,93 \cdot 10^{-14}$	$2{,}391\,71 \cdot 10^{-14}$
19	$6{,}941\,95 \cdot 10^{-14}$	$2{,}081\,77 \cdot 10^{-13}$	$1{,}754\,21 \cdot 10^{-14}$	$1{,}385\,35 \cdot 10^{-14}$
20	$2{,}563\,01 \cdot 10^{-14}$	$6{,}115\,89 \cdot 10^{-14}$	$3{,}223\,17 \cdot 10^{-14}$	$2{,}349\,28 \cdot 10^{-14}$
21	$8{,}934\,46 \cdot 10^{-14}$	$2{,}114\,62 \cdot 10^{-13}$	$2{,}099\,93 \cdot 10^{-6}$	$1{,}485\,25 \cdot 10^{-6}$
22	$9{,}937\,29 \cdot 10^{-14}$	$3{,}556\,53 \cdot 10^{-13}$	$1{,}388\,89 \cdot 10^{-13}$	$9{,}847\,22 \cdot 10^{-14}$
23	$6{,}218\,33 \cdot 10^{-14}$	$2{,}090\,61 \cdot 10^{-13}$	$1{,}108\,20 \cdot 10^{-14}$	$1{,}108\,86 \cdot 10^{-14}$
24	$4{,}185\,73 \cdot 10^{-14}$	$2{,}470\,47 \cdot 10^{-13}$	$1{,}625\,77 \cdot 10^{-14}$	$1{,}617\,56 \cdot 10^{-14}$
25	$1{,}348\,34 \cdot 10^{-13}$	$5{,}522\,58 \cdot 10^{-13}$	$4{,}497\,06 \cdot 10^{-14}$	$3{,}396\,49 \cdot 10^{-14}$
26	$5{,}725\,89 \cdot 10^{-14}$	$4{,}565\,53 \cdot 10^{-13}$	$4{,}059\,13 \cdot 10^{-14}$	$3{,}003\,74 \cdot 10^{-14}$
27	$5{,}371\,85 \cdot 10^{-14}$	$2{,}406\,18 \cdot 10^{-13}$	$4{,}056\,30 \cdot 10^{-14}$	$3{,}254\,18 \cdot 10^{-14}$
28	$8{,}521\,13 \cdot 10^{-14}$	$4{,}313\,41 \cdot 10^{-13}$	$7{,}868\,66 \cdot 10^{-14}$	$5{,}714\,46 \cdot 10^{-14}$
29	$1{,}008\,49 \cdot 10^{-13}$	$3{,}041\,91 \cdot 10^{-13}$	$1{,}658\,38 \cdot 10^{-13}$	$1{,}180\,71 \cdot 10^{-13}$
30	$8{,}192\,94 \cdot 10^{-14}$	$4{,}916\,73 \cdot 10^{-13}$	$6{,}523\,22 \cdot 10^{-14}$	$4{,}925\,25 \cdot 10^{-14}$

Tabella B.29: Confronto tra metodi senza compressione e con compressione dei condizionamenti del sistema lineare in (2.2). Si è risolta l'equazione (3.4) su $\tilde{D}_2$ con $\lambda = 1/100000$ e $x(t_1, t_2) = (t_1 + t_2)^2$.

	Condizionamento	
δ	Senza compressione	Con compressione
1	$1{,}266\,44 \cdot 10^3$	$2{,}337\,78 \cdot 10^4$
2	$5{,}169\,22 \cdot 10^3$	$1{,}212\,34 \cdot 10^2$
3	$5{,}886\,71 \cdot 10^3$	$7{,}027\,63 \cdot 10^3$
4	$5{,}448\,08 \cdot 10^3$	$3{,}615\,27 \cdot 10^3$
5	$5{,}266\,30 \cdot 10^3$	$2{,}730\,01 \cdot 10^3$
6	$5{,}584\,11 \cdot 10^3$	$2{,}411\,11 \cdot 10^3$
7	$5{,}388\,00 \cdot 10^3$	$2{,}219\,44 \cdot 10^3$
8	$6{,}208\,66 \cdot 10^3$	$2{,}806\,96 \cdot 10^3$
9	$5{,}525\,81 \cdot 10^3$	$2{,}601\,45 \cdot 10^3$
10	$6{,}399\,28 \cdot 10^3$	$2{,}685\,95 \cdot 10^3$
11	$5{,}678\,79 \cdot 10^3$	$3{,}442\,00 \cdot 10^3$
12	$6{,}219\,64 \cdot 10^3$	$3{,}974\,10 \cdot 10^3$
13	$5{,}676\,80 \cdot 10^3$	$3{,}838\,17 \cdot 10^3$
14	$6{,}307\,86 \cdot 10^3$	$3{,}744\,24 \cdot 10^3$
15	$5{,}877\,78 \cdot 10^3$	$3{,}648\,59 \cdot 10^3$
16	$6{,}251\,71 \cdot 10^3$	$3{,}671\,90 \cdot 10^3$
17	$6{,}040\,91 \cdot 10^3$	$3{,}676\,90 \cdot 10^3$
18	$6{,}305\,43 \cdot 10^3$	$3{,}527\,26 \cdot 10^3$
19	$6{,}173\,44 \cdot 10^3$	$3{,}862\,10 \cdot 10^3$
20	$6{,}812\,03 \cdot 10^3$	$3{,}859\,75 \cdot 10^3$
21	$6{,}130\,48 \cdot 10^3$	$3{,}842\,81 \cdot 10^3$
22	$6{,}415\,23 \cdot 10^3$	$4{,}078\,82 \cdot 10^3$
23	$6{,}588\,16 \cdot 10^3$	$3{,}876\,20 \cdot 10^3$
24	$6{,}318\,63 \cdot 10^3$	$3{,}910\,82 \cdot 10^3$
25	$6{,}431\,36 \cdot 10^3$	$3{,}737\,70 \cdot 10^3$
26	$7{,}005\,10 \cdot 10^3$	$3{,}751\,75 \cdot 10^3$
27	$6{,}287\,57 \cdot 10^3$	$4{,}113\,63 \cdot 10^3$
28	$6{,}441\,19 \cdot 10^3$	$4{,}075\,85 \cdot 10^3$
29	$6{,}736\,88 \cdot 10^3$	$4{,}039\,16 \cdot 10^3$
30	$6{,}427\,92 \cdot 10^3$	$3{,}713\,44 \cdot 10^3$

Tabella B.30: Confronto tra metodi senza compressione e con compressione degli errori relativi calcolati a partire dal vettore soluzione del sistema lineare in (2.2). Si è risolta l'equazione (3.4) su $\tilde{D}_2$ con $\lambda = 1/10$ e $x(t_1, t_2) = (t_1 + t_2)^2$.

	Senza compressione		**Con compressione**	
δ	E_2^{rel}	E_∞^{rel}	E_2^{rel}	E_∞^{rel}
1	$7{,}834\,46 \cdot 10^{-4}$	$5{,}901\,58 \cdot 10^{-4}$	$1{,}418\,37 \cdot 10^{-2}$	$1{,}418\,37 \cdot 10^{-2}$
2	$3{,}162\,37 \cdot 10^{-7}$	$2{,}128\,61 \cdot 10^{-7}$	$2{,}834\,73 \cdot 10^{-3}$	$2{,}437\,05 \cdot 10^{-3}$
3	$6{,}531\,69 \cdot 10^{-6}$	$4{,}127\,68 \cdot 10^{-6}$	$4{,}007\,51 \cdot 10^{-3}$	$3{,}294\,66 \cdot 10^{-3}$
4	$9{,}457\,92 \cdot 10^{-16}$	$1{,}593\,62 \cdot 10^{-15}$	$4{,}722\,18 \cdot 10^{-16}$	$7{,}082\,76 \cdot 10^{-16}$
5	$8{,}681\,96 \cdot 10^{-16}$	$1{,}424\,45 \cdot 10^{-15}$	$2{,}769\,08 \cdot 10^{-16}$	$2{,}670\,84 \cdot 10^{-16}$
6	$1{,}143\,17 \cdot 10^{-15}$	$2{,}305\,91 \cdot 10^{-15}$	$2{,}531\,54 \cdot 10^{-16}$	$3{,}376\,82 \cdot 10^{-16}$
7	$1{,}469\,14 \cdot 10^{-15}$	$2{,}772\,61 \cdot 10^{-15}$	$4{,}573\,75 \cdot 10^{-16}$	$6{,}721\,48 \cdot 10^{-16}$
8	$1{,}582\,51 \cdot 10^{-15}$	$5{,}483\,02 \cdot 10^{-15}$	$2{,}005\,33 \cdot 10^{-16}$	$2{,}418\,98 \cdot 10^{-16}$
9	$1{,}779\,84 \cdot 10^{-15}$	$5{,}272\,87 \cdot 10^{-15}$	$3{,}937\,12 \cdot 10^{-16}$	$6{,}591\,09 \cdot 10^{-16}$
10	$1{,}669\,73 \cdot 10^{-15}$	$5{,}441\,43 \cdot 10^{-15}$	$4{,}146\,64 \cdot 10^{-16}$	$4{,}899\,20 \cdot 10^{-16}$
11	$1{,}715\,95 \cdot 10^{-15}$	$5{,}166\,26 \cdot 10^{-15}$	$5{,}199\,40 \cdot 10^{-16}$	$8{,}117\,95 \cdot 10^{-16}$
12	$1{,}868\,43 \cdot 10^{-15}$	$4{,}245\,28 \cdot 10^{-15}$	$6{,}023\,64 \cdot 10^{-16}$	$1{,}113\,87 \cdot 10^{-15}$
13	$2{,}048\,02 \cdot 10^{-15}$	$6{,}231\,78 \cdot 10^{-15}$	$5{,}607\,35 \cdot 10^{-16}$	$9{,}587\,35 \cdot 10^{-16}$
14	$2{,}311\,15 \cdot 10^{-15}$	$4{,}860\,82 \cdot 10^{-15}$	$5{,}707\,50 \cdot 10^{-16}$	$9{,}408\,03 \cdot 10^{-16}$
15	$2{,}368\,88 \cdot 10^{-15}$	$5{,}882\,48 \cdot 10^{-15}$	$7{,}360\,37 \cdot 10^{-16}$	$1{,}430\,87 \cdot 10^{-15}$
16	$2{,}466\,79 \cdot 10^{-15}$	$5{,}495\,12 \cdot 10^{-15}$	$6{,}952\,31 \cdot 10^{-16}$	$2{,}041\,04 \cdot 10^{-15}$
17	$2{,}686\,28 \cdot 10^{-15}$	$7{,}864\,91 \cdot 10^{-15}$	$7{,}021\,42 \cdot 10^{-16}$	$1{,}415\,68 \cdot 10^{-15}$
18	$2{,}865\,78 \cdot 10^{-15}$	$7{,}552\,78 \cdot 10^{-15}$	$6{,}770\,44 \cdot 10^{-16}$	$1{,}730\,84 \cdot 10^{-15}$
19	$3{,}123\,32 \cdot 10^{-15}$	$1{,}021\,15 \cdot 10^{-14}$	$6{,}268\,14 \cdot 10^{-16}$	$9{,}445\,57 \cdot 10^{-16}$
20	$3{,}250\,64 \cdot 10^{-15}$	$7{,}204\,46 \cdot 10^{-15}$	$8{,}311\,77 \cdot 10^{-16}$	$2{,}036\,04 \cdot 10^{-15}$
21	$3{,}409\,49 \cdot 10^{-15}$	$1{,}206\,34 \cdot 10^{-14}$	$2{,}099\,93 \cdot 10^{-10}$	$1{,}485\,27 \cdot 10^{-10}$
22	$3{,}476\,30 \cdot 10^{-15}$	$8{,}440\,48 \cdot 10^{-15}$	$7{,}335\,41 \cdot 10^{-16}$	$1{,}719\,36 \cdot 10^{-15}$
23	$3{,}710\,54 \cdot 10^{-15}$	$9{,}526\,79 \cdot 10^{-15}$	$7{,}585\,59 \cdot 10^{-16}$	$1{,}561\,77 \cdot 10^{-15}$
24	$3{,}779\,14 \cdot 10^{-15}$	$1{,}160\,44 \cdot 10^{-14}$	$9{,}003\,31 \cdot 10^{-16}$	$2{,}198\,63 \cdot 10^{-15}$
25	$4{,}103\,71 \cdot 10^{-15}$	$1{,}612\,94 \cdot 10^{-14}$	$6{,}806\,80 \cdot 10^{-16}$	$1{,}550\,91 \cdot 10^{-15}$
26	$4{,}284\,38 \cdot 10^{-15}$	$1{,}354\,02 \cdot 10^{-14}$	$1{,}016\,58 \cdot 10^{-15}$	$3{,}268\,32 \cdot 10^{-15}$
27	$4{,}359\,74 \cdot 10^{-15}$	$1{,}401\,32 \cdot 10^{-14}$	$1{,}145\,86 \cdot 10^{-15}$	$2{,}646\,94 \cdot 10^{-15}$
28	$4{,}684\,44 \cdot 10^{-15}$	$1{,}583\,90 \cdot 10^{-14}$	$9{,}108\,80 \cdot 10^{-16}$	$2{,}329\,26 \cdot 10^{-15}$
29	$4{,}698\,11 \cdot 10^{-15}$	$1{,}439\,13 \cdot 10^{-14}$	$9{,}972\,93 \cdot 10^{-16}$	$2{,}940\,17 \cdot 10^{-15}$
30	$4{,}752\,91 \cdot 10^{-15}$	$1{,}517\,84 \cdot 10^{-14}$	$1{,}117\,65 \cdot 10^{-15}$	$3{,}097\,64 \cdot 10^{-15}$

Tabella B.31: Confronto tra metodi senza compressione e con compressione dei condizionamenti del sistema lineare in (2.2). Si è risolta l'equazione (3.4) su $\tilde{D}_2$ con $\lambda = 1/10$ e $x(t_1, t_2) = (t_1 + t_2)^2$.

	Condizionamento	
δ	Senza compressione	Con compressione
1	1,003 55	1,015 41
2	1,007 22	1,007 04
3	1,007 70	1,008 63
4	1,007 41	1,005 79
5	1,007 28	1,005 24
6	1,007 50	1,004 92
7	1,007 37	1,004 72
8	1,007 91	1,005 31
9	1,007 46	1,005 11
10	1,008 03	1,005 19
11	1,007 56	1,005 88
12	1,007 92	1,006 32
13	1,007 56	1,006 21
14	1,007 97	1,006 14
15	1,007 69	1,006 06
16	1,007 94	1,006 08
17	1,007 80	1,006 08
18	1,007 97	1,005 96
19	1,007 89	1,006 23
20	1,008 29	1,006 23
21	1,007 86	1,006 22
22	1,008 04	1,006 41
23	1,008 15	1,006 24
24	1,007 98	1,006 27
25	1,008 05	1,006 13
26	1,008 40	1,006 14
27	1,007 96	1,006 43
28	1,008 06	1,006 40
29	1,008 24	1,006 37
30	1,008 05	1,006 11

Tabella B.32: Confronto tra metodi senza compressione e con compressione dei tempi di calcolo per alcune fasi del metodo di Nyström. Si è risolta l'equazione (3.4) su $\tilde{D}_2$ con $\lambda = 1/100$ e $x(t_1, t_2) = (t_1 + t_2)^2$.

	Tempi totali	
δ	t_{nC}	t_{C}
2	$1{,}130\,18 \cdot 10^{-2}$	$8{,}914\,90 \cdot 10^{-3}$
4	$9{,}977\,40 \cdot 10^{-3}$	$5{,}691\,50 \cdot 10^{-3}$
6	$2{,}864\,81 \cdot 10^{-2}$	$4{,}424\,20 \cdot 10^{-3}$
8	$4{,}253\,21 \cdot 10^{-2}$	$6{,}970\,60 \cdot 10^{-3}$
10	$9{,}385\,89 \cdot 10^{-2}$	$1{,}169\,18 \cdot 10^{-2}$
12	$1{,}811\,09 \cdot 10^{-1}$	$2{,}790\,48 \cdot 10^{-2}$
14	$3{,}320\,05 \cdot 10^{-1}$	$5{,}517\,68 \cdot 10^{-2}$
16	$5{,}164\,21 \cdot 10^{-1}$	$1{,}297\,74 \cdot 10^{-1}$
18	$9{,}215\,21 \cdot 10^{-1}$	$2{,}564\,66 \cdot 10^{-1}$
20	$1{,}372\,26$	$4{,}655\,01 \cdot 10^{-1}$
22	$2{,}071\,16$	$6{,}953\,68 \cdot 10^{-1}$
24	$2{,}892\,31$	$1{,}447\,17$
26	$4{,}403\,76$	$2{,}291\,02$
28	$6{,}125\,20$	$3{,}424\,02$
30	$8{,}550\,43$	$5{,}030\,85$
32	$1{,}229\,38 \cdot 10^{1}$	$7{,}016\,54$
34	$1{,}572\,92 \cdot 10^{1}$	$1{,}343\,18 \cdot 10^{1}$
36	$2{,}122\,36 \cdot 10^{1}$	$1{,}627\,68 \cdot 10^{1}$
38	$2{,}724\,91 \cdot 10^{1}$	$2{,}251\,17 \cdot 10^{1}$
40	$3{,}560\,05 \cdot 10^{1}$	$3{,}490\,81 \cdot 10^{1}$
42	$5{,}502\,32 \cdot 10^{1}$	$5{,}287\,24 \cdot 10^{1}$
44	$5{,}961\,91 \cdot 10^{1}$	$6{,}485\,94 \cdot 10^{1}$
46	$8{,}366\,91 \cdot 10^{1}$	$8{,}820\,96 \cdot 10^{1}$
48	$8{,}998\,75 \cdot 10^{1}$	$1{,}303\,71 \cdot 10^{2}$
50	$1{,}200\,81 \cdot 10^{2}$	$2{,}000\,09 \cdot 10^{2}$

Tabella B.33: Confronto tra metodi senza compressione e con compressione degli errori relativi calcolati a partire dal vettore soluzione del sistema lineare in (2.2). Si è risolta l'equazione (3.6) su $\tilde{D}_2$ con $\lambda = 1/1000$ e $x(t_1, t_2) = |t_1 + t_2|$.

	Senza compressione		Con compressione	
δ	E_2^{rel}	E_∞^{rel}	E_2^{rel}	E_∞^{rel}
1	$2{,}914\,37 \cdot 10^{-2}$	$2{,}072\,68 \cdot 10^{-2}$	$8{,}400\,34 \cdot 10^{-1}$	$1{,}101\,77$
2	$1{,}135\,59 \cdot 10^{-2}$	$6{,}824\,94 \cdot 10^{-3}$	$7{,}935\,80 \cdot 10^{-1}$	$6{,}272\,36 \cdot 10^{-1}$
3	$9{,}628\,65 \cdot 10^{-3}$	$5{,}332\,37 \cdot 10^{-3}$	$4{,}702\,80 \cdot 10^{-1}$	$3{,}775\,92 \cdot 10^{-1}$
4	$4{,}659\,69 \cdot 10^{-5}$	$2{,}603\,72 \cdot 10^{-5}$	$1{,}163\,62 \cdot 10^{-2}$	$7{,}335\,06 \cdot 10^{-3}$
5	$3{,}281\,81 \cdot 10^{-5}$	$1{,}826\,13 \cdot 10^{-5}$	$1{,}246\,97 \cdot 10^{-2}$	$7{,}311\,64 \cdot 10^{-3}$
6	$3{,}894\,47 \cdot 10^{-8}$	$2{,}082\,70 \cdot 10^{-8}$	$6{,}150\,62 \cdot 10^{-5}$	$3{,}634\,32 \cdot 10^{-5}$
7	$1{,}772\,74 \cdot 10^{-8}$	$9{,}537\,23 \cdot 10^{-9}$	$2{,}701\,24 \cdot 10^{-5}$	$1{,}471\,93 \cdot 10^{-5}$
8	$4{,}643\,63 \cdot 10^{-10}$	$2{,}447\,21 \cdot 10^{-10}$	$2{,}260\,26 \cdot 10^{-7}$	$1{,}428\,24 \cdot 10^{-7}$
9	$4{,}589\,07 \cdot 10^{-10}$	$2{,}440\,71 \cdot 10^{-10}$	$5{,}428\,30 \cdot 10^{-8}$	$3{,}504\,74 \cdot 10^{-8}$
10	$4{,}597\,95 \cdot 10^{-10}$	$2{,}414\,82 \cdot 10^{-10}$	$1{,}758\,30 \cdot 10^{-10}$	$1{,}028\,55 \cdot 10^{-10}$
11	$4{,}626\,54 \cdot 10^{-10}$	$2{,}430\,31 \cdot 10^{-10}$	$3{,}826\,12 \cdot 10^{-10}$	$2{,}359\,73 \cdot 10^{-10}$
12	$4{,}586\,13 \cdot 10^{-10}$	$2{,}383\,40 \cdot 10^{-10}$	$3{,}880\,98 \cdot 10^{-10}$	$2{,}403\,15 \cdot 10^{-10}$
13	$4{,}620\,80 \cdot 10^{-10}$	$2{,}412\,80 \cdot 10^{-10}$	$3{,}876\,92 \cdot 10^{-10}$	$2{,}412\,47 \cdot 10^{-10}$
14	$4{,}587\,11 \cdot 10^{-10}$	$2{,}380\,30 \cdot 10^{-10}$	$3{,}824\,92 \cdot 10^{-10}$	$2{,}380\,71 \cdot 10^{-10}$
15	$4{,}607\,71 \cdot 10^{-10}$	$2{,}404\,28 \cdot 10^{-10}$	$3{,}859\,89 \cdot 10^{-10}$	$2{,}403\,96 \cdot 10^{-10}$
16	$4{,}586\,83 \cdot 10^{-10}$	$2{,}382\,62 \cdot 10^{-10}$	$3{,}866\,98 \cdot 10^{-10}$	$2{,}382\,85 \cdot 10^{-10}$
17	$4{,}609\,00 \cdot 10^{-10}$	$2{,}387\,12 \cdot 10^{-10}$	$3{,}844\,06 \cdot 10^{-10}$	$2{,}385\,97 \cdot 10^{-10}$
18	$4{,}586\,86 \cdot 10^{-10}$	$2{,}386\,85 \cdot 10^{-10}$	$3{,}923\,95 \cdot 10^{-10}$	$2{,}386\,56 \cdot 10^{-10}$
19	$4{,}576\,42 \cdot 10^{-10}$	$2{,}384\,34 \cdot 10^{-10}$	$3{,}807\,12 \cdot 10^{-10}$	$2{,}387\,29 \cdot 10^{-10}$
20	$4{,}560\,46 \cdot 10^{-10}$	$2{,}377\,91 \cdot 10^{-10}$	$3{,}830\,90 \cdot 10^{-10}$	$2{,}378\,75 \cdot 10^{-10}$
21	$4{,}597\,92 \cdot 10^{-10}$	$2{,}380\,49 \cdot 10^{-10}$	$2{,}734\,06 \cdot 10^{-7}$	$1{,}684\,36 \cdot 10^{-7}$
22	$4{,}588\,48 \cdot 10^{-10}$	$2{,}375\,08 \cdot 10^{-10}$	$3{,}869\,02 \cdot 10^{-10}$	$2{,}375\,47 \cdot 10^{-10}$
23	$4{,}587\,52 \cdot 10^{-10}$	$2{,}374\,95 \cdot 10^{-10}$	$3{,}885\,78 \cdot 10^{-10}$	$2{,}364\,50 \cdot 10^{-10}$
24	$4{,}586\,42 \cdot 10^{-10}$	$2{,}356\,71 \cdot 10^{-10}$	$3{,}936\,67 \cdot 10^{-10}$	$2{,}383\,29 \cdot 10^{-10}$
25	$4{,}578\,81 \cdot 10^{-10}$	$2{,}361\,55 \cdot 10^{-10}$	$3{,}804\,64 \cdot 10^{-10}$	$2{,}350\,14 \cdot 10^{-10}$
26	$4{,}606\,97 \cdot 10^{-10}$	$2{,}370\,25 \cdot 10^{-10}$	$3{,}880\,53 \cdot 10^{-10}$	$2{,}368\,18 \cdot 10^{-10}$
27	$4{,}630\,67 \cdot 10^{-10}$	$2{,}374\,57 \cdot 10^{-10}$	$3{,}847\,21 \cdot 10^{-10}$	$2{,}368\,91 \cdot 10^{-10}$
28	$4{,}585\,83 \cdot 10^{-10}$	$2{,}365\,57 \cdot 10^{-10}$	$3{,}801\,23 \cdot 10^{-10}$	$2{,}362\,09 \cdot 10^{-10}$
29	$4{,}593\,74 \cdot 10^{-10}$	$2{,}358\,01 \cdot 10^{-10}$	$3{,}794\,42 \cdot 10^{-10}$	$2{,}358\,78 \cdot 10^{-10}$
30	$4{,}464\,38 \cdot 10^{-10}$	$2{,}363\,71 \cdot 10^{-10}$	$3{,}818\,45 \cdot 10^{-10}$	$2{,}360\,25 \cdot 10^{-10}$

Tabella B.34: Confronto tra metodi senza compressione e con compressione dei condizionamenti del sistema lineare in (2.2). Si è risolta l'equazione (3.6) su $\tilde{D}_2$ con $\lambda = 1/1000$ e $x(t_1, t_2) = |t_1 + t_2|$.

	Condizionamento	
δ	Senza compressione	Con compressione
1	$1{,}263\,99 \cdot 10^1$	$3{,}469\,63 \cdot 10^1$
2	$1{,}754\,07 \cdot 10^1$	$1{,}690\,03 \cdot 10^1$
3	$1{,}905\,11 \cdot 10^1$	$1{,}122\,25 \cdot 10^1$
4	$2{,}070\,49 \cdot 10^1$	$3{,}131\,49 \cdot 10^1$
5	$1{,}983\,38 \cdot 10^1$	$3{,}292\,15 \cdot 10^1$
6	$2{,}250\,62 \cdot 10^1$	$2{,}351\,06 \cdot 10^1$
7	$2{,}110\,68 \cdot 10^1$	$2{,}278\,08 \cdot 10^1$
8	$2{,}564\,46 \cdot 10^1$	$2{,}860\,05 \cdot 10^1$
9	$2{,}184\,56 \cdot 10^1$	$3{,}237\,57 \cdot 10^1$
10	$2{,}611\,06 \cdot 10^1$	$3{,}107\,69 \cdot 10^1$
11	$2{,}253\,79 \cdot 10^1$	$2{,}937\,50 \cdot 10^1$
12	$2{,}526\,60 \cdot 10^1$	$4{,}168\,88 \cdot 10^1$
13	$2{,}230\,86 \cdot 10^1$	$3{,}328\,82 \cdot 10^1$
14	$2{,}531\,51 \cdot 10^1$	$3{,}908\,84 \cdot 10^1$
15	$2{,}368\,84 \cdot 10^1$	$3{,}868\,15 \cdot 10^1$
16	$2{,}509\,17 \cdot 10^1$	$3{,}886\,92 \cdot 10^1$
17	$2{,}425\,67 \cdot 10^1$	$3{,}576\,39 \cdot 10^1$
18	$2{,}567\,86 \cdot 10^1$	$3{,}527\,34 \cdot 10^1$
19	$2{,}502\,47 \cdot 10^1$	$3{,}729\,94 \cdot 10^1$
20	$2{,}816\,32 \cdot 10^1$	$3{,}798\,14 \cdot 10^1$
21	$2{,}440\,39 \cdot 10^1$	$4{,}001\,63 \cdot 10^1$
22	$2{,}576\,46 \cdot 10^1$	$4{,}442\,95 \cdot 10^1$
23	$2{,}743\,93 \cdot 10^1$	$4{,}170\,20 \cdot 10^1$
24	$2{,}511\,64 \cdot 10^1$	$3{,}874\,61 \cdot 10^1$
25	$2{,}685\,61 \cdot 10^1$	$4{,}278\,41 \cdot 10^1$
26	$2{,}936\,74 \cdot 10^1$	$3{,}943\,48 \cdot 10^1$
27	$2{,}503\,31 \cdot 10^1$	$4{,}047\,10 \cdot 10^1$
28	$2{,}611\,19 \cdot 10^1$	$4{,}426\,81 \cdot 10^1$
29	$2{,}764\,90 \cdot 10^1$	$4{,}205\,70 \cdot 10^1$
30	$2{,}707\,37 \cdot 10^1$	$4{,}048\,99 \cdot 10^1$

Tabella B.35: Confronto tra metodi senza compressione e con compressione degli errori relativi calcolati a partire dal vettore soluzione del sistema lineare in (2.2). Si è risolta l'equazione (3.6) su $\tilde{D}_2$ con $\lambda = 10$ e $x(t_1, t_2) = |t_1 + t_2|$.

	Senza compressione		**Con compressione**	
δ	E_2^{rel}	E_∞^{rel}	E_2^{rel}	E_∞^{rel}
1	$1{,}548\,92 \cdot 10^{-5}$	$1{,}101\,58 \cdot 10^{-5}$	$2{,}925\,05 \cdot 10^{-3}$	$3{,}836\,44 \cdot 10^{-3}$
2	$5{,}206\,97 \cdot 10^{-6}$	$3{,}129\,42 \cdot 10^{-6}$	$4{,}023\,54 \cdot 10^{-4}$	$3{,}180\,16 \cdot 10^{-4}$
3	$4{,}413\,50 \cdot 10^{-6}$	$2{,}444\,21 \cdot 10^{-6}$	$2{,}466\,53 \cdot 10^{-4}$	$1{,}980\,41 \cdot 10^{-4}$
4	$2{,}131\,92 \cdot 10^{-8}$	$1{,}191\,26 \cdot 10^{-8}$	$5{,}333\,08 \cdot 10^{-6}$	$3{,}361\,79 \cdot 10^{-6}$
5	$1{,}501\,50 \cdot 10^{-8}$	$8{,}354\,96 \cdot 10^{-9}$	$5{,}695\,01 \cdot 10^{-6}$	$3{,}339\,30 \cdot 10^{-6}$
6	$1{,}781\,81 \cdot 10^{-11}$	$9{,}529\,00 \cdot 10^{-12}$	$2{,}814\,01 \cdot 10^{-8}$	$1{,}662\,76 \cdot 10^{-8}$
7	$8{,}110\,60 \cdot 10^{-12}$	$4{,}362\,91 \cdot 10^{-12}$	$1{,}235\,88 \cdot 10^{-8}$	$6{,}734\,42 \cdot 10^{-9}$
8	$2{,}125\,01 \cdot 10^{-13}$	$1{,}117\,57 \cdot 10^{-13}$	$1{,}034\,12 \cdot 10^{-10}$	$6{,}534\,52 \cdot 10^{-11}$
9	$2{,}101\,05 \cdot 10^{-13}$	$1{,}117\,19 \cdot 10^{-13}$	$2{,}483\,57 \cdot 10^{-11}$	$1{,}603\,46 \cdot 10^{-11}$
10	$2{,}105\,25 \cdot 10^{-13}$	$1{,}097\,89 \cdot 10^{-13}$	$8{,}037\,00 \cdot 10^{-14}$	$4{,}686\,90 \cdot 10^{-14}$
11	$2{,}117\,40 \cdot 10^{-13}$	$1{,}115\,59 \cdot 10^{-13}$	$1{,}750\,50 \cdot 10^{-13}$	$1{,}086\,18 \cdot 10^{-13}$
12	$2{,}099\,02 \cdot 10^{-13}$	$1{,}083\,33 \cdot 10^{-13}$	$1{,}775\,58 \cdot 10^{-13}$	$1{,}105\,91 \cdot 10^{-13}$
13	$2{,}114\,67 \cdot 10^{-13}$	$1{,}100\,95 \cdot 10^{-13}$	$1{,}774\,88 \cdot 10^{-13}$	$1{,}100\,95 \cdot 10^{-13}$
14	$2{,}099\,03 \cdot 10^{-13}$	$1{,}097\,60 \cdot 10^{-13}$	$1{,}749\,38 \cdot 10^{-13}$	$1{,}086\,63 \cdot 10^{-13}$
15	$2{,}108\,00 \cdot 10^{-13}$	$1{,}128\,80 \cdot 10^{-13}$	$1{,}766\,57 \cdot 10^{-13}$	$1{,}100\,18 \cdot 10^{-13}$
16	$2{,}098\,49 \cdot 10^{-13}$	$1{,}111\,58 \cdot 10^{-13}$	$1{,}769\,00 \cdot 10^{-13}$	$1{,}092\,74 \cdot 10^{-13}$
17	$2{,}106\,58 \cdot 10^{-13}$	$1{,}116\,82 \cdot 10^{-13}$	$1{,}758\,37 \cdot 10^{-13}$	$1{,}096\,37 \cdot 10^{-13}$
18	$2{,}099\,30 \cdot 10^{-13}$	$1{,}112\,46 \cdot 10^{-13}$	$1{,}796\,58 \cdot 10^{-13}$	$1{,}095\,15 \cdot 10^{-13}$
19	$2{,}100\,82 \cdot 10^{-13}$	$1{,}107\,56 \cdot 10^{-13}$	$1{,}741\,66 \cdot 10^{-13}$	$1{,}092\,54 \cdot 10^{-13}$
20	$2{,}089\,27 \cdot 10^{-13}$	$1{,}116\,69 \cdot 10^{-13}$	$1{,}753\,39 \cdot 10^{-13}$	$1{,}086\,93 \cdot 10^{-13}$
21	$2{,}103\,46 \cdot 10^{-13}$	$1{,}131\,14 \cdot 10^{-13}$	$1{,}250\,89 \cdot 10^{-10}$	$7{,}706\,25 \cdot 10^{-11}$
22	$2{,}100\,35 \cdot 10^{-13}$	$1{,}125\,40 \cdot 10^{-13}$	$1{,}769\,62 \cdot 10^{-13}$	$1{,}083\,19 \cdot 10^{-13}$
23	$2{,}095\,91 \cdot 10^{-13}$	$1{,}116\,67 \cdot 10^{-13}$	$1{,}777\,41 \cdot 10^{-13}$	$1{,}077\,62 \cdot 10^{-13}$
24	$2{,}101\,06 \cdot 10^{-13}$	$1{,}098\,55 \cdot 10^{-13}$	$1{,}800\,13 \cdot 10^{-13}$	$1{,}088\,32 \cdot 10^{-13}$
25	$2{,}093\,68 \cdot 10^{-13}$	$1{,}124\,41 \cdot 10^{-13}$	$1{,}741\,80 \cdot 10^{-13}$	$1{,}079\,43 \cdot 10^{-13}$
26	$2{,}084\,21 \cdot 10^{-13}$	$1{,}122\,12 \cdot 10^{-13}$	$1{,}775\,57 \cdot 10^{-13}$	$1{,}097\,22 \cdot 10^{-13}$
27	$2{,}102\,49 \cdot 10^{-13}$	$1{,}119\,50 \cdot 10^{-13}$	$1{,}760\,58 \cdot 10^{-13}$	$1{,}085\,25 \cdot 10^{-13}$
28	$2{,}095\,50 \cdot 10^{-13}$	$1{,}132\,02 \cdot 10^{-13}$	$1{,}738\,72 \cdot 10^{-13}$	$1{,}088\,54 \cdot 10^{-13}$
29	$2{,}090\,82 \cdot 10^{-13}$	$1{,}109\,53 \cdot 10^{-13}$	$1{,}736\,39 \cdot 10^{-13}$	$1{,}083\,22 \cdot 10^{-13}$
30	$2{,}093\,02 \cdot 10^{-13}$	$1{,}121\,35 \cdot 10^{-13}$	$1{,}747\,32 \cdot 10^{-13}$	$1{,}099\,66 \cdot 10^{-13}$

Tabella B.36: Confronto tra metodi senza compressione e con compressione dei condizionamenti del sistema lineare in (2.2). Si è risolta l'equazione (3.6) su $\tilde{D}_2$ con $\lambda = 10$ e $x(t_1, t_2) = |t_1 + t_2|$.

	Condizionamento	
δ	Senza compressione	Con compressione
1	1,000 88	1,003 58
2	1,000 95	1,000 98
3	1,000 98	1,000 84
4	1,001 02	1,001 24
5	1,001 00	1,001 26
6	1,001 06	1,001 08
7	1,001 03	1,001 07
8	1,001 13	1,001 18
9	1,001 05	1,001 26
10	1,001 14	1,001 23
11	1,001 06	1,001 20
12	1,001 12	1,001 42
13	1,001 06	1,001 27
14	1,001 12	1,001 37
15	1,001 09	1,001 37
16	1,001 11	1,001 37
17	1,001 10	1,001 32
18	1,001 13	1,001 31
19	1,001 11	1,001 34
20	1,001 18	1,001 35
21	1,001 10	1,001 39
22	1,001 13	1,001 46
23	1,001 16	1,001 42
24	1,001 12	1,001 37
25	1,001 15	1,001 43
26	1,001 20	1,001 38
27	1,001 11	1,001 40
28	1,001 14	1,001 46
29	1,001 17	1,001 42
30	1,001 15	1,001 40

Tabella B.37: Confronto tra metodi senza compressione e con compressione degli errori relativi calcolati a partire dal vettore soluzione del sistema lineare in (2.2). Si è risolta l'equazione (3.10) su $\tilde{D}_2$ con $\lambda = 1/1000$.

	Senza compressione		**Con compressione**	
δ	E_2^{rel}	E_∞^{rel}	E_2^{rel}	E_∞^{rel}
1	$2{,}268\,14 \cdot 10^{-2}$	$1{,}183\,53 \cdot 10^{-2}$	$8{,}535\,36 \cdot 10^{-1}$	$8{,}653\,06 \cdot 10^{-1}$
2	$2{,}294\,92 \cdot 10^{-3}$	$1{,}056\,26 \cdot 10^{-3}$	$1{,}349\,77 \cdot 10^{-1}$	$1{,}206\,75 \cdot 10^{-1}$
3	$1{,}798\,71 \cdot 10^{-3}$	$8{,}935\,90 \cdot 10^{-4}$	$9{,}797\,39 \cdot 10^{-2}$	$6{,}328\,31 \cdot 10^{-2}$
4	$1{,}676\,31 \cdot 10^{-4}$	$7{,}004\,28 \cdot 10^{-5}$	$1{,}524\,60 \cdot 10^{-2}$	$1{,}551\,51 \cdot 10^{-2}$
5	$1{,}150\,27 \cdot 10^{-4}$	$4{,}826\,01 \cdot 10^{-5}$	$7{,}355\,83 \cdot 10^{-3}$	$6{,}243\,27 \cdot 10^{-3}$
6	$1{,}084\,94 \cdot 10^{-5}$	$4{,}757\,92 \cdot 10^{-6}$	$7{,}361\,64 \cdot 10^{-4}$	$7{,}829\,50 \cdot 10^{-4}$
7	$6{,}476\,38 \cdot 10^{-6}$	$2{,}567\,38 \cdot 10^{-6}$	$4{,}787\,93 \cdot 10^{-4}$	$2{,}940\,16 \cdot 10^{-4}$
8	$1{,}819\,78 \cdot 10^{-7}$	$6{,}919\,12 \cdot 10^{-8}$	$9{,}117\,06 \cdot 10^{-5}$	$8{,}710\,02 \cdot 10^{-5}$
9	$8{,}924\,67 \cdot 10^{-7}$	$3{,}430\,38 \cdot 10^{-7}$	$5{,}544\,12 \cdot 10^{-5}$	$3{,}366\,76 \cdot 10^{-5}$
10	$9{,}585\,72 \cdot 10^{-8}$	$7{,}140\,73 \cdot 10^{-8}$	$2{,}040\,41 \cdot 10^{-5}$	$2{,}029\,77 \cdot 10^{-5}$
11	$1{,}536\,22 \cdot 10^{-7}$	$5{,}419\,87 \cdot 10^{-8}$	$5{,}408\,05 \cdot 10^{-6}$	$4{,}419\,74 \cdot 10^{-6}$
12	$5{,}814\,47 \cdot 10^{-8}$	$4{,}318\,75 \cdot 10^{-8}$	$6{,}269\,28 \cdot 10^{-6}$	$3{,}798\,05 \cdot 10^{-6}$
13	$3{,}973\,26 \cdot 10^{-8}$	$1{,}481\,99 \cdot 10^{-8}$	$1{,}672\,83 \cdot 10^{-6}$	$1{,}458\,26 \cdot 10^{-6}$
14	$1{,}050\,33 \cdot 10^{-8}$	$3{,}866\,49 \cdot 10^{-9}$	$1{,}656\,94 \cdot 10^{-6}$	$1{,}498\,51 \cdot 10^{-6}$
15	$3{,}185\,56 \cdot 10^{-8}$	$1{,}176\,99 \cdot 10^{-8}$	$1{,}069\,31 \cdot 10^{-6}$	$9{,}984\,07 \cdot 10^{-7}$
16	$4{,}806\,22 \cdot 10^{-9}$	$1{,}769\,96 \cdot 10^{-9}$	$4{,}751\,43 \cdot 10^{-7}$	$4{,}223\,14 \cdot 10^{-7}$
17	$1{,}569\,18 \cdot 10^{-8}$	$5{,}764\,79 \cdot 10^{-9}$	$1{,}860\,03 \cdot 10^{-7}$	$1{,}758\,40 \cdot 10^{-7}$
18	$2{,}474\,12 \cdot 10^{-9}$	$9{,}055\,42 \cdot 10^{-10}$	$3{,}221\,97 \cdot 10^{-8}$	$3{,}197\,49 \cdot 10^{-8}$
19	$7{,}352\,30 \cdot 10^{-9}$	$2{,}689\,78 \cdot 10^{-9}$	$1{,}414\,88 \cdot 10^{-7}$	$1{,}270\,25 \cdot 10^{-7}$
20	$1{,}462\,25 \cdot 10^{-9}$	$5{,}368\,05 \cdot 10^{-10}$	$9{,}424\,61 \cdot 10^{-8}$	$8{,}548\,69 \cdot 10^{-8}$
21	$2{,}013\,55 \cdot 10^{-9}$	$7{,}345\,79 \cdot 10^{-10}$	$1{,}039\,24 \cdot 10^{-7}$	$9{,}046\,16 \cdot 10^{-8}$
22	$7{,}361\,76 \cdot 10^{-10}$	$2{,}667\,36 \cdot 10^{-10}$	$1{,}845\,04 \cdot 10^{-7}$	$1{,}660\,98 \cdot 10^{-7}$
23	$2{,}229\,18 \cdot 10^{-10}$	$8{,}160\,50 \cdot 10^{-11}$	$1{,}334\,52 \cdot 10^{-7}$	$8{,}657\,01 \cdot 10^{-8}$
24	$1{,}359\,80 \cdot 10^{-9}$	$4{,}895\,15 \cdot 10^{-10}$	$3{,}194\,83 \cdot 10^{-8}$	$3{,}067\,99 \cdot 10^{-8}$
25	$6{,}333\,45 \cdot 10^{-10}$	$2{,}298\,85 \cdot 10^{-10}$	$7{,}919\,37 \cdot 10^{-8}$	$4{,}583\,72 \cdot 10^{-8}$
26	$2{,}290\,80 \cdot 10^{-10}$	$8{,}409\,77 \cdot 10^{-11}$	$3{,}231\,53 \cdot 10^{-8}$	$1{,}730\,44 \cdot 10^{-8}$
27	$3{,}024\,96 \cdot 10^{-10}$	$1{,}097\,20 \cdot 10^{-10}$	$1{,}600\,17 \cdot 10^{-8}$	$1{,}582\,19 \cdot 10^{-8}$
28	$3{,}150\,66 \cdot 10^{-10}$	$1{,}144\,66 \cdot 10^{-10}$	$2{,}459\,45 \cdot 10^{-8}$	$1{,}179\,70 \cdot 10^{-8}$
29	$4{,}010\,88 \cdot 10^{-11}$	$1{,}455\,77 \cdot 10^{-11}$	$9{,}531\,09 \cdot 10^{-9}$	$5{,}310\,09 \cdot 10^{-9}$
30	$4{,}611\,65 \cdot 10^{-10}$	$1{,}671\,87 \cdot 10^{-10}$	$1{,}118\,36 \cdot 10^{-8}$	$9{,}339\,97 \cdot 10^{-9}$

Tabella B.38: Confronto tra metodi senza compressione e con compressione dei condizionamenti del sistema lineare in (2.2). Si è risolta l'equazione (3.10) su $\tilde{D}_2$ con $\lambda = 1/1000$.

	Condizionamento	
δ	Senza compressione	Con compressione
1	$2{,}379\,90 \cdot 10^2$	$1{,}028\,17$
2	$2{,}412\,74 \cdot 10^2$	$1{,}176\,46 \cdot 10^2$
3	$2{,}621\,73 \cdot 10^2$	$1{,}517\,61 \cdot 10^2$
4	$2{,}699\,33 \cdot 10^2$	$1{,}146\,07 \cdot 10^2$
5	$2{,}548\,96 \cdot 10^2$	$1{,}337\,64 \cdot 10^2$
6	$2{,}981\,08 \cdot 10^2$	$1{,}241\,86 \cdot 10^2$
7	$2{,}790\,60 \cdot 10^2$	$1{,}378\,19 \cdot 10^2$
8	$3{,}394\,18 \cdot 10^2$	$1{,}481\,45 \cdot 10^2$
9	$2{,}886\,79 \cdot 10^2$	$1{,}434\,29 \cdot 10^2$
10	$3{,}455\,82 \cdot 10^2$	$1{,}289\,33 \cdot 10^2$
11	$2{,}984\,46 \cdot 10^2$	$1{,}482\,34 \cdot 10^2$
12	$3{,}360\,29 \cdot 10^2$	$1{,}670\,45 \cdot 10^2$
13	$2{,}940\,79 \cdot 10^2$	$1{,}448\,88 \cdot 10^2$
14	$3{,}334\,58 \cdot 10^2$	$1{,}535\,48 \cdot 10^2$
15	$3{,}138\,52 \cdot 10^2$	$1{,}542\,85 \cdot 10^2$
16	$3{,}303\,27 \cdot 10^2$	$1{,}460\,97 \cdot 10^2$
17	$3{,}195\,74 \cdot 10^2$	$1{,}488\,28 \cdot 10^2$
18	$3{,}387\,27 \cdot 10^2$	$1{,}445\,46 \cdot 10^2$
19	$3{,}306\,88 \cdot 10^2$	$1{,}469\,27 \cdot 10^2$
20	$3{,}708\,76 \cdot 10^2$	$1{,}487\,85 \cdot 10^2$
21	$3{,}211\,62 \cdot 10^2$	$1{,}522\,59 \cdot 10^2$
22	$3{,}383\,64 \cdot 10^2$	$1{,}640\,03 \cdot 10^2$
23	$3{,}625\,92 \cdot 10^2$	$1{,}526\,15 \cdot 10^2$
24	$3{,}298\,21 \cdot 10^2$	$1{,}545\,95 \cdot 10^2$
25	$3{,}548\,63 \cdot 10^2$	$1{,}553\,05 \cdot 10^2$
26	$3{,}876\,22 \cdot 10^2$	$1{,}576\,18 \cdot 10^2$
27	$3{,}287\,40 \cdot 10^2$	$1{,}620\,49 \cdot 10^2$
28	$3{,}436\,42 \cdot 10^2$	$1{,}639\,37 \cdot 10^2$
29	$3{,}635\,36 \cdot 10^2$	$1{,}626\,45 \cdot 10^2$
30	$3{,}583\,71 \cdot 10^2$	$1{,}515\,37 \cdot 10^2$

Tabella B.39: Confronto tra metodi senza compressione e con compressione degli errori relativi calcolati a partire dal vettore soluzione del sistema lineare in (2.2). Si è risolta l'equazione (3.10) su $\tilde{D}_2$ con $\lambda = 10$.

	Senza compressione		Con compressione	
δ	E_2^{rel}	E_∞^{rel}	E_2^{rel}	E_∞^{rel}
1	$1{,}043\,55 \cdot 10^{-4}$	$7{,}942\,26 \cdot 10^{-5}$	$6{,}144\,81 \cdot 10^{-3}$	$6{,}188\,90 \cdot 10^{-3}$
2	$1{,}069\,09 \cdot 10^{-5}$	$8{,}196\,53 \cdot 10^{-6}$	$6{,}506\,98 \cdot 10^{-4}$	$7{,}539\,69 \cdot 10^{-4}$
3	$8{,}281\,12 \cdot 10^{-6}$	$6{,}198\,24 \cdot 10^{-6}$	$5{,}271\,72 \cdot 10^{-4}$	$5{,}291\,27 \cdot 10^{-4}$
4	$7{,}835\,58 \cdot 10^{-7}$	$5{,}750\,89 \cdot 10^{-7}$	$4{,}517\,07 \cdot 10^{-5}$	$4{,}539\,11 \cdot 10^{-5}$
5	$5{,}366\,71 \cdot 10^{-7}$	$3{,}959\,01 \cdot 10^{-7}$	$3{,}177\,01 \cdot 10^{-5}$	$3{,}124\,92 \cdot 10^{-5}$
6	$5{,}050\,43 \cdot 10^{-8}$	$3{,}632\,49 \cdot 10^{-8}$	$2{,}540\,88 \cdot 10^{-6}$	$2{,}756\,45 \cdot 10^{-6}$
7	$3{,}026\,94 \cdot 10^{-8}$	$2{,}163\,40 \cdot 10^{-8}$	$2{,}162\,77 \cdot 10^{-6}$	$2{,}121\,16 \cdot 10^{-6}$
8	$8{,}521\,54 \cdot 10^{-10}$	$5{,}941\,43 \cdot 10^{-10}$	$2{,}092\,53 \cdot 10^{-7}$	$1{,}307\,51 \cdot 10^{-7}$
9	$4{,}172\,87 \cdot 10^{-9}$	$2{,}916\,86 \cdot 10^{-9}$	$2{,}642\,16 \cdot 10^{-7}$	$2{,}393\,25 \cdot 10^{-7}$
10	$3{,}326\,08 \cdot 10^{-10}$	$2{,}493\,00 \cdot 10^{-10}$	$5{,}316\,10 \cdot 10^{-8}$	$4{,}502\,48 \cdot 10^{-8}$
11	$7{,}197\,46 \cdot 10^{-10}$	$5{,}005\,21 \cdot 10^{-10}$	$2{,}464\,95 \cdot 10^{-8}$	$2{,}382\,50 \cdot 10^{-8}$
12	$1{,}996\,86 \cdot 10^{-10}$	$1{,}520\,95 \cdot 10^{-10}$	$2{,}964\,42 \cdot 10^{-8}$	$2{,}713\,28 \cdot 10^{-8}$
13	$1{,}859\,48 \cdot 10^{-10}$	$1{,}278\,14 \cdot 10^{-10}$	$7{,}086\,90 \cdot 10^{-9}$	$7{,}028\,82 \cdot 10^{-9}$
14	$4{,}924\,54 \cdot 10^{-11}$	$3{,}363\,72 \cdot 10^{-11}$	$6{,}946\,01 \cdot 10^{-9}$	$6{,}917\,67 \cdot 10^{-9}$
15	$1{,}491\,88 \cdot 10^{-10}$	$1{,}017\,42 \cdot 10^{-10}$	$2{,}479\,96 \cdot 10^{-9}$	$1{,}499\,89 \cdot 10^{-9}$
16	$2{,}253\,33 \cdot 10^{-11}$	$1{,}539\,01 \cdot 10^{-11}$	$1{,}956\,51 \cdot 10^{-9}$	$1{,}945\,30 \cdot 10^{-9}$
17	$7{,}350\,17 \cdot 10^{-11}$	$5{,}007\,83 \cdot 10^{-11}$	$7{,}093\,06 \cdot 10^{-10}$	$7{,}124\,20 \cdot 10^{-10}$
18	$1{,}159\,80 \cdot 10^{-11}$	$7{,}864\,58 \cdot 10^{-12}$	$9{,}729\,46 \cdot 10^{-11}$	$9{,}375\,19 \cdot 10^{-11}$
19	$3{,}446\,10 \cdot 10^{-11}$	$2{,}338\,27 \cdot 10^{-11}$	$5{,}894\,03 \cdot 10^{-10}$	$5{,}819\,24 \cdot 10^{-10}$
20	$6{,}862\,56 \cdot 10^{-12}$	$4{,}677\,69 \cdot 10^{-12}$	$2{,}199\,35 \cdot 10^{-10}$	$1{,}337\,13 \cdot 10^{-10}$
21	$9{,}433\,04 \cdot 10^{-12}$	$6{,}394\,37 \cdot 10^{-12}$	$4{,}284\,30 \cdot 10^{-10}$	$4{,}183\,13 \cdot 10^{-10}$
22	$3{,}450\,60 \cdot 10^{-12}$	$2{,}324\,05 \cdot 10^{-12}$	$4{,}277\,16 \cdot 10^{-10}$	$2{,}016\,39 \cdot 10^{-10}$
23	$1{,}045\,51 \cdot 10^{-12}$	$7{,}164\,27 \cdot 10^{-13}$	$6{,}246\,58 \cdot 10^{-10}$	$5{,}810\,70 \cdot 10^{-10}$
24	$6{,}373\,33 \cdot 10^{-12}$	$4{,}283\,93 \cdot 10^{-12}$	$1{,}198\,91 \cdot 10^{-10}$	$1{,}193\,11 \cdot 10^{-10}$
25	$2{,}970\,83 \cdot 10^{-12}$	$2{,}012\,24 \cdot 10^{-12}$	$3{,}808\,88 \cdot 10^{-10}$	$3{,}510\,43 \cdot 10^{-10}$
26	$1{,}075\,73 \cdot 10^{-12}$	$7{,}358\,53 \cdot 10^{-13}$	$1{,}546\,07 \cdot 10^{-10}$	$1{,}395\,09 \cdot 10^{-10}$
27	$1{,}417\,66 \cdot 10^{-12}$	$9{,}626\,01 \cdot 10^{-13}$	$5{,}176\,22 \cdot 10^{-11}$	$5{,}112\,76 \cdot 10^{-11}$
28	$1{,}477\,73 \cdot 10^{-12}$	$1{,}004\,24 \cdot 10^{-12}$	$1{,}190\,66 \cdot 10^{-10}$	$1{,}065\,91 \cdot 10^{-10}$
29	$1{,}883\,17 \cdot 10^{-13}$	$1{,}343\,33 \cdot 10^{-13}$	$4{,}612\,61 \cdot 10^{-11}$	$4{,}258\,58 \cdot 10^{-11}$
30	$2{,}163\,22 \cdot 10^{-12}$	$1{,}464\,57 \cdot 10^{-12}$	$4{,}791\,63 \cdot 10^{-11}$	$4{,}675\,37 \cdot 10^{-11}$

Tabella B.40: Confronto tra metodi senza compressione e con compressione dei condizionamenti del sistema lineare in (2.2). Si è risolta l'equazione (3.10) su $\tilde{D}_2$ con $\lambda = 1/1000$.

	Condizionamento	
δ	Senza compressione	Con compressione
1	1,011 81	1,014 51
2	1,012 18	1,009 28
3	1,012 53	1,010 45
4	1,012 73	1,009 28
5	1,012 43	1,009 72
6	1,013 25	1,009 44
7	1,012 90	1,009 82
8	1,013 99	1,010 03
9	1,013 08	1,009 89
10	1,014 09	1,009 48
11	1,013 26	1,010 06
12	1,013 93	1,010 44
13	1,013 18	1,009 90
14	1,013 90	1,010 09
15	1,013 54	1,010 09
16	1,013 84	1,009 86
17	1,013 65	1,010 02
18	1,013 99	1,009 88
19	1,013 85	1,009 87
20	1,014 54	1,009 94
21	1,013 68	1,010 00
22	1,013 98	1,010 27
23	1,014 40	1,009 96
24	1,013 83	1,010 07
25	1,014 27	1,010 03
26	1,014 82	1,010 16
27	1,013 81	1,010 28
28	1,014 08	1,010 28
29	1,014 42	1,010 20
30	1,014 32	1,009 99

Tabella B.41: Confronto tra metodi senza compressione e con compressione degli errori relativi calcolati a partire dal vettore soluzione del sistema lineare in (2.2). Si è risolta l'equazione (3.8) con $\lambda = 1/1000$.

	Senza compressione		Con compressione	
δ	E_2^{rel}	E_∞^{rel}	E_2^{rel}	E_∞^{rel}
1	1,737 85	1,315 80	2,039 08 $\cdot\ 10^{1}$	1,667 20 $\cdot\ 10^{1}$
2	1,357 02 $\cdot\ 10^{-1}$	1,013 34 $\cdot\ 10^{-1}$	8,114 18 $\cdot\ 10^{-1}$	6,601 67 $\cdot\ 10^{-1}$
3	2,521 26 $\cdot\ 10^{-1}$	1,847 31 $\cdot\ 10^{-1}$	7,811 43	5,600 43
4	1,843 99 $\cdot\ 10^{-14}$	3,172 41 $\cdot\ 10^{-14}$	1,635 47 $\cdot\ 10^{-14}$	2,137 90 $\cdot\ 10^{-14}$
5	2,386 98 $\cdot\ 10^{-14}$	3,972 66 $\cdot\ 10^{-14}$	1,393 42 $\cdot\ 10^{-13}$	1,111 06 $\cdot\ 10^{-13}$
6	4,987 60 $\cdot\ 10^{-14}$	6,802 59 $\cdot\ 10^{-14}$	9,305 23 $\cdot\ 10^{-14}$	7,508 22 $\cdot\ 10^{-14}$
7	2,619 17 $\cdot\ 10^{-14}$	5,591 31 $\cdot\ 10^{-14}$	9,749 46 $\cdot\ 10^{-14}$	7,940 12 $\cdot\ 10^{-14}$
8	1,114 35 $\cdot\ 10^{-13}$	1,331 46 $\cdot\ 10^{-13}$	9,291 57 $\cdot\ 10^{-14}$	8,481 20 $\cdot\ 10^{-14}$
9	2,895 85 $\cdot\ 10^{-14}$	7,164 64 $\cdot\ 10^{-14}$	1,159 42 $\cdot\ 10^{-13}$	9,104 48 $\cdot\ 10^{-14}$
10	5,280 46 $\cdot\ 10^{-14}$	8,637 98 $\cdot\ 10^{-14}$	1,355 05 $\cdot\ 10^{-13}$	1,021 99 $\cdot\ 10^{-13}$
11	8,386 55 $\cdot\ 10^{-14}$	1,034 00 $\cdot\ 10^{-13}$	6,325 05 $\cdot\ 10^{-14}$	5,795 10 $\cdot\ 10^{-14}$
12	3,602 95 $\cdot\ 10^{-14}$	6,839 82 $\cdot\ 10^{-14}$	8,993 64 $\cdot\ 10^{-14}$	7,852 71 $\cdot\ 10^{-14}$
13	4,426 14 $\cdot\ 10^{-14}$	9,091 98 $\cdot\ 10^{-14}$	3,317 97 $\cdot\ 10^{-14}$	4,944 67 $\cdot\ 10^{-14}$
14	4,632 85 $\cdot\ 10^{-14}$	9,505 28 $\cdot\ 10^{-14}$	7,871 84 $\cdot\ 10^{-15}$	1,400 18 $\cdot\ 10^{-14}$
15	9,311 11 $\cdot\ 10^{-14}$	1,604 37 $\cdot\ 10^{-13}$	1,310 63 $\cdot\ 10^{-14}$	1,953 15 $\cdot\ 10^{-14}$
16	1,948 90 $\cdot\ 10^{-13}$	2,246 53 $\cdot\ 10^{-13}$	7,780 17 $\cdot\ 10^{-14}$	1,174 33 $\cdot\ 10^{-13}$
17	5,714 45 $\cdot\ 10^{-14}$	1,545 56 $\cdot\ 10^{-13}$	1,710 79 $\cdot\ 10^{-14}$	3,217 13 $\cdot\ 10^{-14}$
18	7,643 86 $\cdot\ 10^{-14}$	1,736 14 $\cdot\ 10^{-13}$	2,206 17 $\cdot\ 10^{-14}$	4,285 01 $\cdot\ 10^{-14}$
19	1,261 25 $\cdot\ 10^{-13}$	2,119 47 $\cdot\ 10^{-13}$	3,503 56 $\cdot\ 10^{-14}$	4,356 22 $\cdot\ 10^{-14}$
20	8,736 93 $\cdot\ 10^{-14}$	1,836 35 $\cdot\ 10^{-13}$	5,056 35 $\cdot\ 10^{-14}$	6,648 66 $\cdot\ 10^{-14}$
21	9,632 56 $\cdot\ 10^{-14}$	1,819 39 $\cdot\ 10^{-13}$	5,899 00 $\cdot\ 10^{-14}$	7,216 23 $\cdot\ 10^{-14}$
22	9,036 84 $\cdot\ 10^{-14}$	2,109 29 $\cdot\ 10^{-13}$	9,507 66 $\cdot\ 10^{-14}$	8,186 09 $\cdot\ 10^{-14}$
23	1,324 33 $\cdot\ 10^{-13}$	2,840 84 $\cdot\ 10^{-13}$	5,108 24 $\cdot\ 10^{-14}$	1,263 44 $\cdot\ 10^{-13}$
24	1,271 17 $\cdot\ 10^{-13}$	2,742 62 $\cdot\ 10^{-13}$	1,967 55 $\cdot\ 10^{-14}$	7,457 11 $\cdot\ 10^{-14}$
25	8,666 70 $\cdot\ 10^{-14}$	2,068 98 $\cdot\ 10^{-13}$	6,248 56 $\cdot\ 10^{-14}$	6,232 59 $\cdot\ 10^{-14}$
26	2,124 66 $\cdot\ 10^{-13}$	3,038 93 $\cdot\ 10^{-13}$	3,081 69 $\cdot\ 10^{-14}$	4,712 05 $\cdot\ 10^{-14}$
27	2,082 48 $\cdot\ 10^{-13}$	3,867 55 $\cdot\ 10^{-13}$	6,376 15 $\cdot\ 10^{-14}$	9,401 39 $\cdot\ 10^{-14}$
28	1,834 68 $\cdot\ 10^{-13}$	3,248 83 $\cdot\ 10^{-13}$	1,444 03 $\cdot\ 10^{-13}$	1,440 32 $\cdot\ 10^{-13}$
29	1,044 48 $\cdot\ 10^{-13}$	2,391 15 $\cdot\ 10^{-13}$	7,298 61 $\cdot\ 10^{-14}$	1,188 20 $\cdot\ 10^{-13}$
30	9,112 98 $\cdot\ 10^{-14}$	4,574 40 $\cdot\ 10^{-13}$	6,571 79 $\cdot\ 10^{-14}$	1,427 44 $\cdot\ 10^{-13}$

Tabella B.42: Confronto tra metodi senza compressione e con compressione dei condizionamenti del sistema lineare in (2.2). Si è risolta l'equazione (3.8) con $\lambda = 1/1000$.

	Condizionamento	
δ	Senza compressione	Con compressione
1	$3{,}127\,26 \cdot 10^3$	$5{,}417\,24 \cdot 10^3$
2	$9{,}804\,00 \cdot 10^3$	$2{,}025\,49 \cdot 10^3$
3	$1{,}106\,33 \cdot 10^4$	$2{,}094\,15 \cdot 10^3$
4	$1{,}225\,02 \cdot 10^4$	$8{,}606\,36 \cdot 10^3$
5	$1{,}332\,07 \cdot 10^4$	$8{,}988\,05 \cdot 10^3$
6	$1{,}290\,64 \cdot 10^4$	$9{,}998\,08 \cdot 10^3$
7	$1{,}298\,32 \cdot 10^4$	$9{,}599\,93 \cdot 10^3$
8	$1{,}487\,21 \cdot 10^4$	$9{,}775\,24 \cdot 10^3$
9	$1{,}341\,53 \cdot 10^4$	$9{,}831\,06 \cdot 10^3$
10	$1{,}523\,78 \cdot 10^4$	$1{,}135\,24 \cdot 10^4$
11	$1{,}377\,50 \cdot 10^4$	$1{,}304\,73 \cdot 10^4$
12	$1{,}496\,79 \cdot 10^4$	$1{,}233\,71 \cdot 10^4$
13	$1{,}356\,53 \cdot 10^4$	$1{,}257\,66 \cdot 10^4$
14	$1{,}497\,85 \cdot 10^4$	$1{,}067\,78 \cdot 10^4$
15	$1{,}402\,37 \cdot 10^4$	$1{,}354\,52 \cdot 10^4$
16	$1{,}473\,52 \cdot 10^4$	$1{,}300\,43 \cdot 10^4$
17	$1{,}443\,85 \cdot 10^4$	$1{,}214\,33 \cdot 10^4$
18	$1{,}504\,17 \cdot 10^4$	$1{,}268\,74 \cdot 10^4$
19	$1{,}480\,17 \cdot 10^4$	$1{,}128\,77 \cdot 10^4$
20	$1{,}623\,03 \cdot 10^4$	$1{,}245\,50 \cdot 10^4$
21	$1{,}458\,78 \cdot 10^4$	$1{,}284\,01 \cdot 10^4$
22	$1{,}533\,74 \cdot 10^4$	$1{,}364\,94 \cdot 10^4$
23	$1{,}569\,67 \cdot 10^4$	$1{,}184\,90 \cdot 10^4$
24	$1{,}505\,62 \cdot 10^4$	$1{,}218\,50 \cdot 10^4$
25	$1{,}546\,92 \cdot 10^4$	$1{,}281\,73 \cdot 10^4$
26	$1{,}653\,98 \cdot 10^4$	$1{,}214\,99 \cdot 10^4$
27	$1{,}500\,55 \cdot 10^4$	$1{,}332\,75 \cdot 10^4$
28	$1{,}536\,74 \cdot 10^4$	$1{,}245\,72 \cdot 10^4$
29	$1{,}606\,09 \cdot 10^4$	$1{,}317\,88 \cdot 10^4$
30	$1{,}558\,20 \cdot 10^4$	$1{,}291\,76 \cdot 10^4$

Tabella B.43: Confronto tra metodi senza compressione e con compressione degli errori relativi calcolati a partire dal vettore soluzione del sistema lineare in (2.2). Si è risolta l'equazione (3.8) con $\lambda = 10$.

	Senza compressione		Con compressione	
δ	E_2^{rel}	E_∞^{rel}	E_2^{rel}	E_∞^{rel}
1	$1{,}565\,94 \cdot 10^{-3}$	$1{,}185\,64 \cdot 10^{-3}$	$2{,}730\,60 \cdot 10^{-2}$	$2{,}232\,61 \cdot 10^{-2}$
2	$9{,}097\,07 \cdot 10^{-5}$	$6{,}793\,15 \cdot 10^{-5}$	$1{,}437\,26 \cdot 10^{-3}$	$1{,}169\,35 \cdot 10^{-3}$
3	$1{,}412\,56 \cdot 10^{-4}$	$1{,}034\,97 \cdot 10^{-4}$	$4{,}845\,01 \cdot 10^{-3}$	$3{,}473\,65 \cdot 10^{-3}$
4	$6{,}404\,42 \cdot 10^{-16}$	$2{,}317\,51 \cdot 10^{-15}$	$1{,}468\,24 \cdot 10^{-16}$	$1{,}158\,75 \cdot 10^{-16}$
5	$6{,}984\,26 \cdot 10^{-16}$	$2{,}533\,29 \cdot 10^{-15}$	$3{,}897\,57 \cdot 10^{-16}$	$6{,}965\,89 \cdot 10^{-16}$
6	$7{,}183\,48 \cdot 10^{-16}$	$1{,}829\,27 \cdot 10^{-15}$	$2{,}372\,48 \cdot 10^{-16}$	$3{,}454\,70 \cdot 10^{-16}$
7	$7{,}513\,00 \cdot 10^{-16}$	$2{,}062\,37 \cdot 10^{-15}$	$2{,}657\,29 \cdot 10^{-16}$	$4{,}583\,04 \cdot 10^{-16}$
8	$8{,}743\,58 \cdot 10^{-16}$	$2{,}621\,88 \cdot 10^{-15}$	$4{,}038\,46 \cdot 10^{-16}$	$7{,}979\,62 \cdot 10^{-16}$
9	$9{,}449\,31 \cdot 10^{-16}$	$2{,}171\,10 \cdot 10^{-15}$	$4{,}973\,35 \cdot 10^{-16}$	$9{,}184\,84 \cdot 10^{-16}$
10	$9{,}826\,90 \cdot 10^{-16}$	$2{,}389\,95 \cdot 10^{-15}$	$4{,}960\,22 \cdot 10^{-16}$	$1{,}024\,27 \cdot 10^{-15}$
11	$1{,}161\,67 \cdot 10^{-15}$	$3{,}081\,45 \cdot 10^{-15}$	$4{,}219\,11 \cdot 10^{-16}$	$9{,}144\,15 \cdot 10^{-16}$
12	$1{,}203\,70 \cdot 10^{-15}$	$3{,}072\,80 \cdot 10^{-15}$	$4{,}901\,46 \cdot 10^{-16}$	$1{,}024\,27 \cdot 10^{-15}$
13	$1{,}201\,41 \cdot 10^{-15}$	$3{,}312\,40 \cdot 10^{-15}$	$4{,}790\,40 \cdot 10^{-16}$	$8{,}040\,12 \cdot 10^{-16}$
14	$1{,}306\,36 \cdot 10^{-15}$	$3{,}756\,58 \cdot 10^{-15}$	$4{,}333\,30 \cdot 10^{-16}$	$7{,}968\,49 \cdot 10^{-16}$
15	$1{,}538\,60 \cdot 10^{-15}$	$3{,}993\,81 \cdot 10^{-15}$	$6{,}432\,71 \cdot 10^{-16}$	$1{,}256\,41 \cdot 10^{-15}$
16	$1{,}721\,44 \cdot 10^{-15}$	$6{,}491\,88 \cdot 10^{-15}$	$6{,}480\,18 \cdot 10^{-16}$	$1{,}596\,18 \cdot 10^{-15}$
17	$1{,}622\,77 \cdot 10^{-15}$	$5{,}584\,97 \cdot 10^{-15}$	$5{,}920\,00 \cdot 10^{-16}$	$1{,}368\,99 \cdot 10^{-15}$
18	$1{,}717\,95 \cdot 10^{-15}$	$4{,}781\,50 \cdot 10^{-15}$	$6{,}492\,55 \cdot 10^{-16}$	$1{,}709\,44 \cdot 10^{-15}$
19	$1{,}842\,73 \cdot 10^{-15}$	$5{,}925\,40 \cdot 10^{-15}$	$7{,}104\,95 \cdot 10^{-16}$	$1{,}824\,60 \cdot 10^{-15}$
20	$1{,}920\,67 \cdot 10^{-15}$	$6{,}261\,58 \cdot 10^{-15}$	$7{,}226\,10 \cdot 10^{-16}$	$2{,}163\,09 \cdot 10^{-15}$
21	$1{,}989\,42 \cdot 10^{-15}$	$5{,}810\,20 \cdot 10^{-15}$	$7{,}092\,92 \cdot 10^{-16}$	$1{,}596\,01 \cdot 10^{-15}$
22	$2{,}008\,97 \cdot 10^{-15}$	$6{,}488\,38 \cdot 10^{-15}$	$7{,}847\,82 \cdot 10^{-16}$	$1{,}707\,81 \cdot 10^{-15}$
23	$2{,}167\,75 \cdot 10^{-15}$	$7{,}056\,57 \cdot 10^{-15}$	$9{,}453\,88 \cdot 10^{-16}$	$2{,}162\,65 \cdot 10^{-15}$
24	$2{,}175\,28 \cdot 10^{-15}$	$7{,}627\,89 \cdot 10^{-15}$	$8{,}661\,20 \cdot 10^{-16}$	$1{,}935\,43 \cdot 10^{-15}$
25	$2{,}387\,12 \cdot 10^{-15}$	$6{,}832\,09 \cdot 10^{-15}$	$9{,}577\,13 \cdot 10^{-16}$	$2{,}050\,94 \cdot 10^{-15}$
26	$2{,}542\,97 \cdot 10^{-15}$	$7{,}853\,42 \cdot 10^{-15}$	$1{,}003\,43 \cdot 10^{-15}$	$2{,}617\,81 \cdot 10^{-15}$
27	$2{,}609\,53 \cdot 10^{-15}$	$1{,}024\,36 \cdot 10^{-14}$	$9{,}839\,46 \cdot 10^{-16}$	$2{,}959\,28 \cdot 10^{-15}$
28	$2{,}684\,65 \cdot 10^{-15}$	$8{,}992\,90 \cdot 10^{-15}$	$1{,}057\,43 \cdot 10^{-15}$	$2{,}960\,35 \cdot 10^{-15}$
29	$2{,}700\,03 \cdot 10^{-15}$	$9{,}332\,43 \cdot 10^{-15}$	$1{,}071\,88 \cdot 10^{-15}$	$2{,}617\,69 \cdot 10^{-15}$
30	$2{,}874\,01 \cdot 10^{-15}$	$1{,}035\,76 \cdot 10^{-14}$	$1{,}167\,80 \cdot 10^{-15}$	$2{,}959\,59 \cdot 10^{-15}$

Tabella B.44: Confronto tra metodi senza compressione e con compressione dei condizionamenti del sistema lineare in (2.2). Si è risolta l'equazione (3.8) con $\lambda = 10$.

	Condizionamento	
δ	Senza compressione	Con compressione
1	1,016 92	1,027 29
2	1,025 97	1,019 11
3	1,025 21	1,011 47
4	1,024 92	1,021 95
5	1,026 11	1,021 37
6	1,025 72	1,022 89
7	1,025 79	1,022 14
8	1,027 63	1,022 34
9	1,026 23	1,022 41
10	1,027 97	1,024 10
11	1,026 58	1,025 86
12	1,027 72	1,025 14
13	1,026 37	1,025 38
14	1,027 73	1,023 36
15	1,026 82	1,026 35
16	1,027 50	1,025 82
17	1,027 22	1,024 94
18	1,027 79	1,025 49
19	1,027 56	1,024 03
20	1,028 88	1,025 26
21	1,027 36	1,025 65
22	1,028 07	1,026 46
23	1,028 40	1,024 63
24	1,027 80	1,024 98
25	1,028 19	1,025 63
26	1,029 16	1,024 94
27	1,027 76	1,026 14
28	1,028 09	1,025 26
29	1,028 73	1,025 99
30	1,028 29	1,025 73

Tabella B.45: Confronto tra metodi senza compressione e con compressione dei tempi di calcolo per alcune fasi del metodo di Nyström. Si è risolta l'equazione (3.8) con $\lambda = 1$.

	Tempi totali	
δ	t_{nC}	t_{C}
2	$5{,}699\,90 \cdot 10^{-3}$	$6{,}501\,40 \cdot 10^{-3}$
4	$5{,}804\,90 \cdot 10^{-3}$	$9{,}998\,50 \cdot 10^{-3}$
6	$1{,}004\,10 \cdot 10^{-2}$	$1{,}020\,50 \cdot 10^{-2}$
8	$7{,}780\,60 \cdot 10^{-3}$	$6{,}132\,30 \cdot 10^{-3}$
10	$2{,}199\,61 \cdot 10^{-2}$	$2{,}627\,15 \cdot 10^{-2}$
12	$2{,}416\,50 \cdot 10^{-2}$	$2{,}265\,33 \cdot 10^{-2}$
14	$4{,}071\,11 \cdot 10^{-2}$	$3{,}010\,11 \cdot 10^{-2}$
16	$6{,}181\,62 \cdot 10^{-2}$	$5{,}571\,64 \cdot 10^{-2}$
18	$1{,}188\,14 \cdot 10^{-1}$	$1{,}359\,66 \cdot 10^{-1}$
20	$1{,}563\,84 \cdot 10^{-1}$	$2{,}219\,16 \cdot 10^{-1}$
22	$2{,}299\,72 \cdot 10^{-1}$	$3{,}499\,69 \cdot 10^{-1}$
24	$3{,}405\,15 \cdot 10^{-1}$	$6{,}601\,82 \cdot 10^{-1}$
26	$4{,}845\,68 \cdot 10^{-1}$	$1{,}319\,91$
28	$6{,}708\,99 \cdot 10^{-1}$	$2{,}086\,14$
30	$9{,}197\,69 \cdot 10^{-1}$	$2{,}963\,09$
32	$1{,}254\,57$	$4{,}789\,15$
34	$1{,}443\,60$	$6{,}076\,49$
36	$2{,}062\,38$	$9{,}240\,06$
38	$2{,}400\,38$	$1{,}275\,43 \cdot 10^{1}$
40	$2{,}995\,92$	$2{,}001\,86 \cdot 10^{1}$
42	$3{,}729\,02$	$2{,}635\,51 \cdot 10^{1}$
44	$5{,}195\,15$	$3{,}832\,66 \cdot 10^{1}$
46	$5{,}764\,17$	$6{,}143\,77 \cdot 10^{1}$
48	$6{,}931\,09$	$7{,}354\,26 \cdot 10^{1}$
50	$8{,}183\,04$	$1{,}219\,83 \cdot 10^{2}$

Tabella B.46: Confronto tra metodi senza compressione e con compressione degli errori relativi calcolati a partire dal vettore soluzione del sistema lineare in (2.2). Si è risolta l'equazione (3.9) con $\lambda = 1/1000$.

	Senza compressione		**Con compressione**	
δ	E_2^{rel}	E_∞^{rel}	E_2^{rel}	E_∞^{rel}
1	$2{,}503\,19 \cdot 10^{-2}$	$2{,}712\,91 \cdot 10^{-2}$	$5{,}464\,70 \cdot 10^{-1}$	$4{,}963\,39 \cdot 10^{-1}$
2	$1{,}594\,25 \cdot 10^{-1}$	$1{,}767\,16 \cdot 10^{-1}$	$1{,}810\,29$	$2{,}086\,73$
3	$3{,}783\,63 \cdot 10^{-2}$	$4{,}132\,93 \cdot 10^{-2}$	$2{,}576\,32 \cdot 10^{-2}$	$2{,}372\,50 \cdot 10^{-2}$
4	$1{,}933\,23 \cdot 10^{-2}$	$2{,}162\,32 \cdot 10^{-2}$	$3{,}956\,34 \cdot 10^{-1}$	$4{,}621\,87 \cdot 10^{-1}$
5	$8{,}938\,52 \cdot 10^{-3}$	$1{,}000\,13 \cdot 10^{-2}$	$2{,}128\,62 \cdot 10^{-1}$	$2{,}406\,50 \cdot 10^{-1}$
6	$1{,}968\,55 \cdot 10^{-4}$	$2{,}193\,84 \cdot 10^{-4}$	$9{,}170\,05 \cdot 10^{-3}$	$1{,}023\,35 \cdot 10^{-2}$
7	$1{,}129\,92 \cdot 10^{-4}$	$1{,}268\,74 \cdot 10^{-4}$	$3{,}950\,80 \cdot 10^{-3}$	$4{,}574\,79 \cdot 10^{-3}$
8	$1{,}985\,95 \cdot 10^{-6}$	$2{,}238\,43 \cdot 10^{-6}$	$9{,}065\,00 \cdot 10^{-4}$	$9{,}899\,99 \cdot 10^{-4}$
9	$8{,}324\,59 \cdot 10^{-7}$	$9{,}361\,11 \cdot 10^{-7}$	$3{,}408\,87 \cdot 10^{-5}$	$3{,}706\,88 \cdot 10^{-5}$
10	$1{,}913\,59 \cdot 10^{-8}$	$2{,}160\,00 \cdot 10^{-8}$	$2{,}650\,57 \cdot 10^{-6}$	$2{,}975\,10 \cdot 10^{-6}$
11	$5{,}031\,51 \cdot 10^{-9}$	$5{,}655\,58 \cdot 10^{-9}$	$2{,}226\,37 \cdot 10^{-7}$	$2{,}495\,14 \cdot 10^{-7}$
12	$2{,}142\,93 \cdot 10^{-9}$	$2{,}422\,05 \cdot 10^{-9}$	$2{,}116\,02 \cdot 10^{-9}$	$2{,}324\,25 \cdot 10^{-9}$
13	$2{,}240\,72 \cdot 10^{-9}$	$2{,}522\,55 \cdot 10^{-9}$	$1{,}755\,07 \cdot 10^{-9}$	$1{,}930\,51 \cdot 10^{-9}$
14	$2{,}229\,78 \cdot 10^{-9}$	$2{,}517\,97 \cdot 10^{-9}$	$2{,}302\,51 \cdot 10^{-9}$	$2{,}517\,69 \cdot 10^{-9}$
15	$2{,}232\,53 \cdot 10^{-9}$	$2{,}515\,87 \cdot 10^{-9}$	$2{,}243\,82 \cdot 10^{-9}$	$2{,}507\,40 \cdot 10^{-9}$
16	$2{,}229\,90 \cdot 10^{-9}$	$2{,}517\,56 \cdot 10^{-9}$	$2{,}308\,35 \cdot 10^{-9}$	$2{,}519\,91 \cdot 10^{-9}$
17	$2{,}232\,06 \cdot 10^{-9}$	$2{,}516\,90 \cdot 10^{-9}$	$2{,}284\,76 \cdot 10^{-9}$	$2{,}519\,21 \cdot 10^{-9}$
18	$2{,}230\,24 \cdot 10^{-9}$	$2{,}517\,91 \cdot 10^{-9}$	$2{,}329\,69 \cdot 10^{-9}$	$2{,}493\,70 \cdot 10^{-9}$
19	$2{,}230\,53 \cdot 10^{-9}$	$2{,}517\,05 \cdot 10^{-9}$	$2{,}305\,53 \cdot 10^{-9}$	$2{,}516\,13 \cdot 10^{-9}$
20	$2{,}227\,52 \cdot 10^{-9}$	$2{,}517\,81 \cdot 10^{-9}$	$2{,}265\,00 \cdot 10^{-9}$	$2{,}518\,06 \cdot 10^{-9}$
21	$2{,}231\,58 \cdot 10^{-9}$	$2{,}517\,27 \cdot 10^{-9}$	$2{,}294\,13 \cdot 10^{-9}$	$2{,}516\,68 \cdot 10^{-9}$
22	$2{,}230\,43 \cdot 10^{-9}$	$2{,}518\,18 \cdot 10^{-9}$	$2{,}293\,36 \cdot 10^{-9}$	$2{,}518\,58 \cdot 10^{-9}$
23	$2{,}229\,32 \cdot 10^{-9}$	$2{,}518\,16 \cdot 10^{-9}$	$2{,}291\,51 \cdot 10^{-9}$	$2{,}518\,30 \cdot 10^{-9}$
24	$2{,}230\,54 \cdot 10^{-9}$	$2{,}517\,87 \cdot 10^{-9}$	$2{,}287\,00 \cdot 10^{-9}$	$2{,}517\,84 \cdot 10^{-9}$
25	$2{,}228\,67 \cdot 10^{-9}$	$2{,}517\,73 \cdot 10^{-9}$	$2{,}303\,45 \cdot 10^{-9}$	$2{,}519\,15 \cdot 10^{-9}$
26	$2{,}226\,26 \cdot 10^{-9}$	$2{,}518\,14 \cdot 10^{-9}$	$2{,}294\,14 \cdot 10^{-9}$	$2{,}514\,59 \cdot 10^{-9}$
27	$2{,}230\,64 \cdot 10^{-9}$	$2{,}518\,10 \cdot 10^{-9}$	$2{,}280\,79 \cdot 10^{-9}$	$2{,}518\,16 \cdot 10^{-9}$
28	$2{,}229\,03 \cdot 10^{-9}$	$2{,}518\,29 \cdot 10^{-9}$	$2{,}278\,82 \cdot 10^{-9}$	$2{,}518\,54 \cdot 10^{-9}$
29	$2{,}227\,79 \cdot 10^{-9}$	$2{,}518\,34 \cdot 10^{-9}$	$2{,}287\,11 \cdot 10^{-9}$	$2{,}518\,31 \cdot 10^{-9}$
30	$2{,}228\,55 \cdot 10^{-9}$	$2{,}518\,10 \cdot 10^{-9}$	$2{,}301\,03 \cdot 10^{-9}$	$2{,}518\,43 \cdot 10^{-9}$

Tabella B.47: Confronto tra metodi senza compressione e con compressione dei condizionamenti del sistema lineare in (2.2). Si è risolta l'equazione (3.9) con $\lambda = 1/1000$.

	Condizionamento	
δ	Senza compressione	Con compressione
1	$1{,}459\,26 \cdot 10^4$	$5{,}641\,05 \cdot 10^3$
2	$1{,}938\,25 \cdot 10^4$	$2{,}898\,54 \cdot 10^4$
3	$2{,}115\,56 \cdot 10^4$	$2{,}878\,18 \cdot 10^4$
4	$2{,}322\,67 \cdot 10^4$	$1{,}133\,74 \cdot 10^4$
5	$2{,}171\,40 \cdot 10^4$	$1{,}682\,55 \cdot 10^4$
6	$2{,}378\,24 \cdot 10^4$	$1{,}597\,57 \cdot 10^4$
7	$2{,}251\,89 \cdot 10^4$	$1{,}811\,63 \cdot 10^4$
8	$2{,}626\,05 \cdot 10^4$	$2{,}378\,56 \cdot 10^4$
9	$2{,}317\,00 \cdot 10^4$	$1{,}694\,84 \cdot 10^4$
10	$2{,}734\,02 \cdot 10^4$	$1{,}510\,10 \cdot 10^4$
11	$2{,}474\,99 \cdot 10^4$	$1{,}868\,31 \cdot 10^4$
12	$2{,}721\,65 \cdot 10^4$	$1{,}839\,26 \cdot 10^4$
13	$2{,}402\,20 \cdot 10^4$	$1{,}791\,34 \cdot 10^4$
14	$2{,}678\,05 \cdot 10^4$	$1{,}679\,77 \cdot 10^4$
15	$2{,}481\,60 \cdot 10^4$	$2{,}069\,38 \cdot 10^4$
16	$2{,}678\,17 \cdot 10^4$	$1{,}934\,83 \cdot 10^4$
17	$2{,}564\,42 \cdot 10^4$	$1{,}925\,24 \cdot 10^4$
18	$2{,}679\,65 \cdot 10^4$	$1{,}909\,24 \cdot 10^4$
19	$2{,}607\,65 \cdot 10^4$	$1{,}820\,80 \cdot 10^4$
20	$2{,}913\,39 \cdot 10^4$	$1{,}797\,84 \cdot 10^4$
21	$2{,}589\,76 \cdot 10^4$	$2{,}041\,52 \cdot 10^4$
22	$2{,}703\,15 \cdot 10^4$	$2{,}064\,28 \cdot 10^4$
23	$2{,}822\,66 \cdot 10^4$	$1{,}802\,31 \cdot 10^4$
24	$2{,}650\,79 \cdot 10^4$	$1{,}904\,70 \cdot 10^4$
25	$2{,}771\,21 \cdot 10^4$	$2{,}030\,98 \cdot 10^4$
26	$3{,}033\,13 \cdot 10^4$	$1{,}968\,36 \cdot 10^4$
27	$2{,}651\,76 \cdot 10^4$	$1{,}785\,67 \cdot 10^4$
28	$2{,}736\,32 \cdot 10^4$	$1{,}799\,11 \cdot 10^4$
29	$2{,}882\,34 \cdot 10^4$	$1{,}943\,14 \cdot 10^4$
30	$2{,}758\,17 \cdot 10^4$	$1{,}912\,68 \cdot 10^4$

Tabella B.48: Confronto tra metodi senza compressione e con compressione degli errori relativi calcolati a partire dal vettore soluzione del sistema lineare in (2.2). Si è risolta l'equazione (3.9) con $\lambda = 10$.

	Senza compressione		Con compressione	
δ	E_2^{rel}	E_∞^{rel}	E_2^{rel}	E_∞^{rel}
1	$3{,}830\,95 \cdot 10^{-4}$	$4{,}151\,92 \cdot 10^{-4}$	$8{,}481\,62 \cdot 10^{-2}$	$7{,}703\,55 \cdot 10^{-2}$
2	$3{,}176\,05 \cdot 10^{-3}$	$3{,}520\,51 \cdot 10^{-3}$	$8{,}184\,22 \cdot 10^{-2}$	$9{,}434\,00 \cdot 10^{-2}$
3	$8{,}677\,58 \cdot 10^{-4}$	$9{,}478\,69 \cdot 10^{-4}$	$6{,}360\,18 \cdot 10^{-4}$	$5{,}857\,02 \cdot 10^{-4}$
4	$4{,}550\,63 \cdot 10^{-4}$	$5{,}089\,88 \cdot 10^{-4}$	$1{,}393\,40 \cdot 10^{-2}$	$1{,}627\,79 \cdot 10^{-2}$
5	$2{,}119\,40 \cdot 10^{-4}$	$2{,}371\,40 \cdot 10^{-4}$	$4{,}357\,79 \cdot 10^{-3}$	$4{,}926\,68 \cdot 10^{-3}$
6	$4{,}700\,85 \cdot 10^{-6}$	$5{,}238\,86 \cdot 10^{-6}$	$2{,}213\,74 \cdot 10^{-4}$	$2{,}470\,48 \cdot 10^{-4}$
7	$2{,}697\,36 \cdot 10^{-6}$	$3{,}028\,74 \cdot 10^{-6}$	$9{,}383\,55 \cdot 10^{-5}$	$1{,}086\,56 \cdot 10^{-4}$
8	$4{,}741\,59 \cdot 10^{-8}$	$5{,}344\,42 \cdot 10^{-8}$	$2{,}160\,76 \cdot 10^{-5}$	$2{,}359\,79 \cdot 10^{-5}$
9	$1{,}987\,55 \cdot 10^{-8}$	$2{,}235\,02 \cdot 10^{-8}$	$8{,}139\,60 \cdot 10^{-7}$	$8{,}851\,18 \cdot 10^{-7}$
10	$4{,}568\,81 \cdot 10^{-10}$	$5{,}157\,15 \cdot 10^{-10}$	$6{,}328\,34 \cdot 10^{-8}$	$7{,}103\,17 \cdot 10^{-8}$
11	$1{,}201\,30 \cdot 10^{-10}$	$1{,}350\,30 \cdot 10^{-10}$	$5{,}315\,61 \cdot 10^{-9}$	$5{,}957\,31 \cdot 10^{-9}$
12	$5{,}116\,37 \cdot 10^{-11}$	$5{,}782\,64 \cdot 10^{-11}$	$5{,}052\,22 \cdot 10^{-11}$	$5{,}549\,29 \cdot 10^{-11}$
13	$5{,}349\,87 \cdot 10^{-11}$	$6{,}022\,93 \cdot 10^{-11}$	$4{,}190\,52 \cdot 10^{-11}$	$4{,}609\,58 \cdot 10^{-11}$
14	$5{,}323\,75 \cdot 10^{-11}$	$6{,}011\,61 \cdot 10^{-11}$	$5{,}497\,65 \cdot 10^{-11}$	$6{,}011\,23 \cdot 10^{-11}$
15	$5{,}330\,25 \cdot 10^{-11}$	$6{,}006\,80 \cdot 10^{-11}$	$5{,}357\,50 \cdot 10^{-11}$	$5{,}986\,73 \cdot 10^{-11}$
16	$5{,}324\,03 \cdot 10^{-11}$	$6{,}010\,95 \cdot 10^{-11}$	$5{,}511\,56 \cdot 10^{-11}$	$6{,}016\,61 \cdot 10^{-11}$
17	$5{,}329\,13 \cdot 10^{-11}$	$6{,}009\,25 \cdot 10^{-11}$	$5{,}455\,02 \cdot 10^{-11}$	$6{,}014\,69 \cdot 10^{-11}$
18	$5{,}324\,85 \cdot 10^{-11}$	$6{,}011\,62 \cdot 10^{-11}$	$5{,}562\,34 \cdot 10^{-11}$	$5{,}953\,87 \cdot 10^{-11}$
19	$5{,}325\,61 \cdot 10^{-11}$	$6{,}009\,84 \cdot 10^{-11}$	$5{,}504\,62 \cdot 10^{-11}$	$6{,}007\,44 \cdot 10^{-11}$
20	$5{,}318\,43 \cdot 10^{-11}$	$6{,}011\,35 \cdot 10^{-11}$	$5{,}407\,74 \cdot 10^{-11}$	$6{,}011\,68 \cdot 10^{-11}$
21	$5{,}328\,05 \cdot 10^{-11}$	$6{,}010\,72 \cdot 10^{-11}$	$5{,}477\,33 \cdot 10^{-11}$	$6{,}008\,69 \cdot 10^{-11}$
22	$5{,}325\,27 \cdot 10^{-11}$	$6{,}011\,95 \cdot 10^{-11}$	$5{,}475\,55 \cdot 10^{-11}$	$6{,}013\,08 \cdot 10^{-11}$
23	$5{,}322\,68 \cdot 10^{-11}$	$6{,}012\,30 \cdot 10^{-11}$	$5{,}471\,20 \cdot 10^{-11}$	$6{,}012\,78 \cdot 10^{-11}$
24	$5{,}325\,58 \cdot 10^{-11}$	$6{,}012\,15 \cdot 10^{-11}$	$5{,}460\,41 \cdot 10^{-11}$	$6{,}011\,60 \cdot 10^{-11}$
25	$5{,}321\,09 \cdot 10^{-11}$	$6{,}011\,41 \cdot 10^{-11}$	$5{,}499\,65 \cdot 10^{-11}$	$6{,}014\,85 \cdot 10^{-11}$
26	$5{,}315\,34 \cdot 10^{-11}$	$6{,}012\,10 \cdot 10^{-11}$	$5{,}477\,46 \cdot 10^{-11}$	$6{,}003\,90 \cdot 10^{-11}$
27	$5{,}325\,89 \cdot 10^{-11}$	$6{,}012\,71 \cdot 10^{-11}$	$5{,}445\,58 \cdot 10^{-11}$	$6{,}012\,45 \cdot 10^{-11}$
28	$5{,}321\,60 \cdot 10^{-11}$	$6{,}011\,83 \cdot 10^{-11}$	$5{,}440\,83 \cdot 10^{-11}$	$6{,}013\,20 \cdot 10^{-11}$
29	$5{,}318\,86 \cdot 10^{-11}$	$6{,}012\,24 \cdot 10^{-11}$	$5{,}460\,68 \cdot 10^{-11}$	$6{,}012\,54 \cdot 10^{-11}$
30	$5{,}320\,89 \cdot 10^{-11}$	$6{,}012\,12 \cdot 10^{-11}$	$5{,}493\,87 \cdot 10^{-11}$	$6{,}012\,70 \cdot 10^{-11}$

Tabella B.49: Confronto tra metodi senza compressione e con compressione dei condizionamenti del sistema lineare in (2.2). Si è risolta l'equazione (3.9) con $\lambda = 10$.

	Condizionamento	
δ	Senza compressione	Con compressione
1	1,161 01	1,342 82
2	1,216 74	1,433 42
3	1,245 85	1,304 43
4	1,262 74	1,220 76
5	1,254 09	1,203 60
6	1,268 38	1,216 60
7	1,260 28	1,230 04
8	1,283 69	1,268 13
9	1,264 47	1,222 40
10	1,290 20	1,208 75
11	1,274 41	1,234 67
12	1,289 46	1,232 65
13	1,269 86	1,229 28
14	1,286 83	1,221 30
15	1,274 82	1,248 34
16	1,286 84	1,239 25
17	1,279 93	1,238 60
18	1,286 93	1,237 50
19	1,282 57	1,231 35
20	1,300 79	1,229 74
21	1,281 48	1,246 48
22	1,288 35	1,248 00
23	1,295 46	1,230 05
24	1,285 19	1,237 18
25	1,292 41	1,245 77
26	1,307 73	1,241 54
27	1,285 25	1,228 88
28	1,290 33	1,229 83
29	1,298 98	1,239 82
30	1,291 64	1,237 73

Tabella B.50: Confronto tra metodi senza compressione e con compressione degli errori relativi calcolati a partire dal vettore soluzione del sistema lineare in (2.2). Si è risolta l'equazione (3.10) su D_3 con $\lambda = 1/1000$.

	Senza compressione		Con compressione	
δ	E_2^{rel}	E_∞^{rel}	E_2^{rel}	E_∞^{rel}
1	$7{,}165\,55 \cdot 10^{-2}$	$5{,}962\,49 \cdot 10^{-2}$	$3{,}981\,97 \cdot 10^{-1}$	$3{,}784\,35 \cdot 10^{-1}$
2	$1{,}442\,39 \cdot 10^{-2}$	$1{,}652\,66 \cdot 10^{-2}$	$4{,}565\,70 \cdot 10^{-1}$	$5{,}484\,07 \cdot 10^{-1}$
3	$1{,}119\,44 \cdot 10^{-2}$	$1{,}149\,93 \cdot 10^{-2}$	$7{,}114\,41 \cdot 10^{-2}$	$6{,}194\,27 \cdot 10^{-2}$
4	$1{,}863\,31 \cdot 10^{-3}$	$2{,}519\,65 \cdot 10^{-3}$	$1{,}817\,73 \cdot 10^{-2}$	$2{,}468\,80 \cdot 10^{-2}$
5	$1{,}080\,18 \cdot 10^{-3}$	$1{,}231\,10 \cdot 10^{-3}$	$6{,}143\,75 \cdot 10^{-3}$	$7{,}527\,46 \cdot 10^{-3}$
6	$3{,}610\,66 \cdot 10^{-5}$	$3{,}123\,11 \cdot 10^{-5}$	$2{,}875\,40 \cdot 10^{-3}$	$3{,}300\,14 \cdot 10^{-3}$
7	$6{,}355\,91 \cdot 10^{-5}$	$7{,}116\,02 \cdot 10^{-5}$	$1{,}403\,39 \cdot 10^{-4}$	$9{,}930\,71 \cdot 10^{-5}$
8	$1{,}966\,05 \cdot 10^{-5}$	$2{,}451\,16 \cdot 10^{-5}$	$1{,}130\,53 \cdot 10^{-5}$	$1{,}117\,01 \cdot 10^{-5}$
9	$8{,}387\,92 \cdot 10^{-6}$	$1{,}038\,63 \cdot 10^{-5}$	$1{,}279\,56 \cdot 10^{-5}$	$1{,}648\,42 \cdot 10^{-5}$
10	$4{,}350\,92 \cdot 10^{-6}$	$5{,}847\,00 \cdot 10^{-6}$	$3{,}017\,49 \cdot 10^{-5}$	$3{,}589\,65 \cdot 10^{-5}$
11	$2{,}285\,11 \cdot 10^{-6}$	$2{,}262\,57 \cdot 10^{-6}$	$5{,}164\,29 \cdot 10^{-6}$	$5{,}322\,64 \cdot 10^{-6}$
12	$7{,}164\,02 \cdot 10^{-7}$	$9{,}144\,79 \cdot 10^{-7}$	$3{,}250\,37 \cdot 10^{-6}$	$4{,}070\,67 \cdot 10^{-6}$
13	$5{,}474\,34 \cdot 10^{-7}$	$7{,}127\,97 \cdot 10^{-7}$	$2{,}869\,73 \cdot 10^{-6}$	$3{,}714\,20 \cdot 10^{-6}$
14	$5{,}248\,14 \cdot 10^{-7}$	$5{,}550\,26 \cdot 10^{-7}$	$2{,}284\,89 \cdot 10^{-6}$	$2{,}562\,23 \cdot 10^{-6}$
15	$2{,}542\,04 \cdot 10^{-7}$	$1{,}932\,21 \cdot 10^{-7}$	$3{,}619\,73 \cdot 10^{-7}$	$4{,}608\,46 \cdot 10^{-7}$
16	$1{,}463\,23 \cdot 10^{-7}$	$1{,}322\,85 \cdot 10^{-7}$	$4{,}072\,52 \cdot 10^{-7}$	$5{,}035\,51 \cdot 10^{-7}$
17	$1{,}496\,02 \cdot 10^{-7}$	$1{,}287\,63 \cdot 10^{-7}$	$7{,}432\,59 \cdot 10^{-7}$	$7{,}434\,03 \cdot 10^{-7}$
18	$5{,}149\,44 \cdot 10^{-8}$	$6{,}399\,96 \cdot 10^{-8}$	$3{,}530\,60 \cdot 10^{-7}$	$2{,}942\,16 \cdot 10^{-7}$
19	$5{,}085\,44 \cdot 10^{-8}$	$5{,}076\,72 \cdot 10^{-8}$	$1{,}278\,24 \cdot 10^{-7}$	$1{,}323\,33 \cdot 10^{-7}$
20	$1{,}023\,63 \cdot 10^{-8}$	$1{,}257\,17 \cdot 10^{-8}$	$8{,}054\,12 \cdot 10^{-8}$	$8{,}327\,41 \cdot 10^{-8}$
21	$3{,}925\,67 \cdot 10^{-8}$	$3{,}203\,05 \cdot 10^{-8}$	$3{,}200\,89 \cdot 10^{-8}$	$2{,}851\,80 \cdot 10^{-8}$
22	$1{,}560\,65 \cdot 10^{-8}$	$1{,}219\,49 \cdot 10^{-8}$	$6{,}510\,31 \cdot 10^{-8}$	$7{,}922\,65 \cdot 10^{-8}$
23	$4{,}696\,96 \cdot 10^{-9}$	$5{,}460\,51 \cdot 10^{-9}$	$3{,}395\,59 \cdot 10^{-8}$	$3{,}503\,26 \cdot 10^{-8}$
24	$6{,}066\,95 \cdot 10^{-9}$	$7{,}807\,03 \cdot 10^{-9}$	$2{,}367\,52 \cdot 10^{-8}$	$2{,}525\,79 \cdot 10^{-8}$
25	$6{,}030\,06 \cdot 10^{-9}$	$7{,}292\,79 \cdot 10^{-9}$	$1{,}181\,37 \cdot 10^{-8}$	$1{,}357\,86 \cdot 10^{-8}$
26	$3{,}725\,50 \cdot 10^{-9}$	$4{,}419\,97 \cdot 10^{-9}$	$1{,}518\,57 \cdot 10^{-8}$	$1{,}125\,45 \cdot 10^{-8}$
27	$4{,}732\,99 \cdot 10^{-9}$	$4{,}589\,93 \cdot 10^{-9}$	$9{,}438\,06 \cdot 10^{-9}$	$9{,}607\,37 \cdot 10^{-9}$
28	$4{,}576\,94 \cdot 10^{-9}$	$4{,}160\,91 \cdot 10^{-9}$	$2{,}035\,30 \cdot 10^{-9}$	$2{,}257\,18 \cdot 10^{-9}$
29	$6{,}806\,74 \cdot 10^{-9}$	$5{,}363\,52 \cdot 10^{-9}$	$9{,}825\,39 \cdot 10^{-9}$	$6{,}910\,28 \cdot 10^{-9}$
30	$6{,}422\,90 \cdot 10^{-9}$	$6{,}675\,72 \cdot 10^{-9}$	$8{,}334\,81 \cdot 10^{-9}$	$8{,}661\,20 \cdot 10^{-9}$

Tabella B.51: Confronto tra metodi senza compressione e con compressione dei condizionamenti del sistema lineare in (2.2). Si è risolta l'equazione (3.10) su D_3 con $\lambda = 1/1000$.

	Condizionamento	
δ	Senza compressione	Con compressione
1	$6{,}543\,62 \cdot 10^3$	$2{,}517\,92 \cdot 10^3$
2	$6{,}676\,17 \cdot 10^3$	$3{,}116\,37 \cdot 10^3$
3	$7{,}033\,05 \cdot 10^3$	$1{,}697\,72 \cdot 10^3$
4	$7{,}460\,69 \cdot 10^3$	$2{,}012\,35 \cdot 10^3$
5	$7{,}046\,24 \cdot 10^3$	$2{,}643\,45 \cdot 10^3$
6	$8{,}117\,71 \cdot 10^3$	$2{,}356\,13 \cdot 10^3$
7	$7{,}711\,55 \cdot 10^3$	$2{,}260\,12 \cdot 10^3$
8	$9{,}377\,61 \cdot 10^3$	$2{,}576\,28 \cdot 10^3$
9	$7{,}977\,63 \cdot 10^3$	$2{,}425\,93 \cdot 10^3$
10	$9{,}554\,98 \cdot 10^3$	$2{,}421\,45 \cdot 10^3$
11	$8{,}294\,18 \cdot 10^3$	$2{,}933\,75 \cdot 10^3$
12	$9{,}369\,54 \cdot 10^3$	$2{,}398\,83 \cdot 10^3$
13	$8{,}128\,32 \cdot 10^3$	$2{,}542\,91 \cdot 10^3$
14	$9{,}217\,16 \cdot 10^3$	$2{,}199\,90 \cdot 10^3$
15	$8{,}673\,29 \cdot 10^3$	$2{,}830\,42 \cdot 10^3$
16	$9{,}130\,58 \cdot 10^3$	$2{,}479\,84 \cdot 10^3$
17	$8{,}832\,12 \cdot 10^3$	$2{,}696\,84 \cdot 10^3$
18	$9{,}361\,19 \cdot 10^3$	$2{,}532\,68 \cdot 10^3$
19	$9{,}139\,44 \cdot 10^3$	$2{,}361\,55 \cdot 10^3$
20	$1{,}025\,01 \cdot 10^4$	$2{,}345\,96 \cdot 10^3$
21	$8{,}876\,89 \cdot 10^3$	$2{,}887\,71 \cdot 10^3$
22	$9{,}352\,14 \cdot 10^3$	$2{,}753\,96 \cdot 10^3$
23	$1{,}001\,93 \cdot 10^4$	$2{,}373\,18 \cdot 10^3$
24	$9{,}116\,73 \cdot 10^3$	$2{,}433\,78 \cdot 10^3$
25	$9{,}806\,49 \cdot 10^3$	$2{,}512\,68 \cdot 10^3$
26	$1{,}071\,25 \cdot 10^4$	$2{,}447\,58 \cdot 10^3$
27	$9{,}086\,88 \cdot 10^3$	$2{,}631\,05 \cdot 10^3$
28	$9{,}498\,42 \cdot 10^3$	$2{,}341\,94 \cdot 10^3$
29	$1{,}004\,78 \cdot 10^4$	$2{,}469\,43 \cdot 10^3$
30	$9{,}902\,86 \cdot 10^3$	$2{,}513\,13 \cdot 10^3$

Tabella B.52: Confronto tra metodi senza compressione e con compressione degli errori relativi calcolati a partire dal vettore soluzione del sistema lineare in (2.2). Si è risolta l'equazione (3.10) su D_3 con $\lambda = 10$.

	Senza compressione		**Con compressione**	
δ	E_2^{rel}	E_∞^{rel}	E_2^{rel}	E_∞^{rel}
1	$9{,}462\,03 \cdot 10^{-3}$	$1{,}165\,83 \cdot 10^{-2}$	$4{,}621\,96 \cdot 10^{-2}$	$5{,}289\,72 \cdot 10^{-2}$
2	$2{,}041\,82 \cdot 10^{-3}$	$2{,}737\,09 \cdot 10^{-3}$	$4{,}006\,78 \cdot 10^{-2}$	$4{,}837\,32 \cdot 10^{-2}$
3	$1{,}575\,95 \cdot 10^{-3}$	$2{,}093\,68 \cdot 10^{-3}$	$8{,}598\,15 \cdot 10^{-3}$	$1{,}046\,25 \cdot 10^{-2}$
4	$2{,}195\,76 \cdot 10^{-4}$	$2{,}913\,85 \cdot 10^{-4}$	$1{,}896\,36 \cdot 10^{-3}$	$2{,}459\,19 \cdot 10^{-3}$
5	$1{,}530\,40 \cdot 10^{-4}$	$2{,}044\,78 \cdot 10^{-4}$	$5{,}109\,28 \cdot 10^{-4}$	$3{,}738\,44 \cdot 10^{-4}$
6	$5{,}023\,96 \cdot 10^{-6}$	$6{,}391\,67 \cdot 10^{-6}$	$2{,}779\,52 \cdot 10^{-4}$	$2{,}756\,77 \cdot 10^{-4}$
7	$9{,}025\,14 \cdot 10^{-6}$	$1{,}197\,70 \cdot 10^{-5}$	$1{,}695\,15 \cdot 10^{-5}$	$2{,}142\,15 \cdot 10^{-5}$
8	$1{,}877\,72 \cdot 10^{-6}$	$2{,}205\,30 \cdot 10^{-6}$	$1{,}485\,45 \cdot 10^{-6}$	$1{,}954\,94 \cdot 10^{-6}$
9	$1{,}167\,24 \cdot 10^{-6}$	$1{,}562\,63 \cdot 10^{-6}$	$1{,}126\,19 \cdot 10^{-6}$	$1{,}518\,69 \cdot 10^{-6}$
10	$3{,}238\,95 \cdot 10^{-7}$	$3{,}373\,92 \cdot 10^{-7}$	$2{,}896\,93 \cdot 10^{-6}$	$3{,}672\,60 \cdot 10^{-6}$
11	$3{,}238\,94 \cdot 10^{-7}$	$4{,}193\,53 \cdot 10^{-7}$	$5{,}647\,00 \cdot 10^{-7}$	$6{,}495\,85 \cdot 10^{-7}$
12	$5{,}564\,84 \cdot 10^{-8}$	$4{,}349\,25 \cdot 10^{-8}$	$4{,}172\,79 \cdot 10^{-7}$	$5{,}265\,39 \cdot 10^{-7}$
13	$7{,}320\,26 \cdot 10^{-8}$	$9{,}785\,84 \cdot 10^{-8}$	$2{,}288\,59 \cdot 10^{-7}$	$2{,}802\,96 \cdot 10^{-7}$
14	$6{,}493\,00 \cdot 10^{-8}$	$7{,}507\,41 \cdot 10^{-8}$	$2{,}204\,73 \cdot 10^{-7}$	$2{,}023\,76 \cdot 10^{-7}$
15	$3{,}481\,24 \cdot 10^{-8}$	$4{,}318\,93 \cdot 10^{-8}$	$2{,}845\,55 \cdot 10^{-8}$	$3{,}210\,64 \cdot 10^{-8}$
16	$1{,}924\,96 \cdot 10^{-8}$	$2{,}311\,24 \cdot 10^{-8}$	$3{,}467\,82 \cdot 10^{-8}$	$4{,}408\,56 \cdot 10^{-8}$
17	$1{,}989\,42 \cdot 10^{-8}$	$2{,}402\,44 \cdot 10^{-8}$	$9{,}837\,85 \cdot 10^{-8}$	$1{,}256\,69 \cdot 10^{-7}$
18	$5{,}578\,99 \cdot 10^{-9}$	$7{,}143\,11 \cdot 10^{-9}$	$4{,}537\,54 \cdot 10^{-8}$	$5{,}584\,25 \cdot 10^{-8}$
19	$6{,}449\,01 \cdot 10^{-9}$	$7{,}466\,26 \cdot 10^{-9}$	$1{,}343\,62 \cdot 10^{-8}$	$1{,}581\,50 \cdot 10^{-8}$
20	$1{,}131\,50 \cdot 10^{-9}$	$1{,}435\,94 \cdot 10^{-9}$	$8{,}441\,21 \cdot 10^{-9}$	$9{,}876\,95 \cdot 10^{-9}$
21	$5{,}284\,10 \cdot 10^{-9}$	$6{,}441\,99 \cdot 10^{-9}$	$4{,}212\,32 \cdot 10^{-9}$	$5{,}220\,83 \cdot 10^{-9}$
22	$2{,}148\,75 \cdot 10^{-9}$	$2{,}681\,86 \cdot 10^{-9}$	$7{,}087\,98 \cdot 10^{-9}$	$7{,}878\,94 \cdot 10^{-9}$
23	$3{,}979\,75 \cdot 10^{-10}$	$3{,}910\,45 \cdot 10^{-10}$	$3{,}564\,47 \cdot 10^{-9}$	$4{,}174\,04 \cdot 10^{-9}$
24	$8{,}226\,23 \cdot 10^{-10}$	$1{,}099\,95 \cdot 10^{-9}$	$2{,}421\,01 \cdot 10^{-9}$	$2{,}896\,24 \cdot 10^{-9}$
25	$4{,}907\,73 \cdot 10^{-10}$	$4{,}369\,08 \cdot 10^{-10}$	$1{,}172\,26 \cdot 10^{-9}$	$1{,}165\,33 \cdot 10^{-9}$
26	$4{,}272\,77 \cdot 10^{-10}$	$5{,}291\,67 \cdot 10^{-10}$	$1{,}829\,59 \cdot 10^{-9}$	$2{,}129\,76 \cdot 10^{-9}$
27	$6{,}064\,98 \cdot 10^{-10}$	$7{,}075\,09 \cdot 10^{-10}$	$1{,}261\,15 \cdot 10^{-9}$	$1{,}585\,53 \cdot 10^{-9}$
28	$6{,}445\,72 \cdot 10^{-10}$	$8{,}240\,97 \cdot 10^{-10}$	$1{,}862\,29 \cdot 10^{-10}$	$1{,}573\,64 \cdot 10^{-10}$
29	$9{,}389\,78 \cdot 10^{-10}$	$1{,}177\,11 \cdot 10^{-9}$	$1{,}200\,11 \cdot 10^{-9}$	$1{,}401\,76 \cdot 10^{-9}$
30	$8{,}004\,59 \cdot 10^{-10}$	$9{,}145\,46 \cdot 10^{-10}$	$8{,}674\,65 \cdot 10^{-10}$	$1{,}025\,51 \cdot 10^{-9}$

Tabella B.53: Confronto tra metodi senza compressione e con compressione dei condizionamenti del sistema lineare in (2.2). Si è risolta l'equazione (3.10) su D_3 con $\lambda = 10$.

	Condizionamento	
δ	Senza compressione	Con compressione
1	1,389 87	1,222 52
2	1,418 33	1,297 49
3	1,425 73	1,253 01
4	1,438 49	1,268 83
5	1,427 36	1,290 24
6	1,455 97	1,281 18
7	1,445 16	1,278 46
8	1,489 24	1,290 11
9	1,452 48	1,285 53
10	1,493 74	1,285 81
11	1,460 74	1,305 15
12	1,488 18	1,285 76
13	1,456 79	1,290 19
14	1,485 74	1,275 83
15	1,471 07	1,301 45
16	1,483 47	1,286 47
17	1,475 43	1,293 59
18	1,489 23	1,291 33
19	1,483 51	1,281 30
20	1,512 11	1,283 33
21	1,476 78	1,301 32
22	1,489 20	1,298 15
23	1,505 94	1,283 82
24	1,483 16	1,284 13
25	1,500 58	1,288 70
26	1,523 67	1,286 21
27	1,482 40	1,292 82
28	1,493 01	1,283 96
29	1,507 06	1,288 02
30	1,502 95	1,290 20

Bibliografia

[1] Philip M. Anselone e Joel Davis. *Collectively compact operator approximation theory and applications to integral equations*. Englewood Cliffs (New Jersey): Prentice-Hall, 1971.

[2] Philip M. Anselone e Robert H. Moore. «Approximate solutions of integral and operator equations». In: *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 9.2 (1964), pp. 268–277. ISSN: 0022-247X. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0022247X64900423 (visitato il 30/10/2023).

[3] Kendall E. Atkinson. *A Personal Perspective on the History of the Numerical Analysis of Fredholm Integral Equations of the Second Kind*. 25 Lug. 2008. URL: https://homepage.divms.uiowa.edu/~atkinson/ftp/IE_history.pdf (visitato il 08/10/2023).

[4] Kendall E. Atkinson. «An Automatic Program for Linear Fredholm Integral Equations of the Second Kind». In: *ACM Transactions on Mathematical Software* 2.2 (1976). ISSN: 0098-3500. URL: https://doi.org/10.1145/355681.355686 (visitato il 30/10/2023).

[5] Kendall E. Atkinson. *An Introduction to Numerical Analysis*. New York: Wiley, 1989. ISBN: 978-0-471-62489-9.

[6] Kendall E. Atkinson. *The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind*. Cambridge: Cambridge University Press, 1997. ISBN: 978-0-521-58391-6.

[7] Kendall E. Atkinson e Lawrence F. Shampine. «Algorithm 876: Solving Fredholm Integral Equations of the Second Kind in MATLAB». In: *ACM Transactions on Mathematical Software* 34.4 (2008). ISSN: 0098-3500. URL: https://doi.org/10.1145/1377596.1377601 (visitato il 30/10/2023).

[8] Brian J. Bauman, Alvise Sommariva e Marco Vianello. «Compressed algebraic cubature over polygons with applications to optical design». In: *Journal of Computational and Applied Mathematics* 370 (15 mag. 2020). ISSN: 0377-0427. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377042719306636 (visitato il 15/09/2023).

[9] Maxime Bôcher. *An Introduction to the Study of Integral Equations*. Cambridge: Cambridge University Press, 1909.

[10] Helmut Brass e Knut Petras. *Quadrature Theory. The Theory of Numerical Integration on a Compact Interval*. Providence (Rhode Island): American Mathematical Society, 2011. isbn: 978-0-8218-5361-0.

[11] Hermann Brunner e Pieter J. van der Houwen. *The Numerical Solution of Volterra Equations*. Amsterdam: CWI monographs, 1986. isbn: 978-0-444-70073-5.

[12] *FindFit*. Wolfram Research. 2019. url: https://reference.wolfram.com/language/ref/FindFit.html (visitato il 25/11/2023).

[13] Harry Hochstadt. *Integral Equations*. New York: Wiley, 1989. isbn: 978-0-471-40165-0.

[14] *Integrate*. Wolfram Research. 2019. url: https://reference.wolfram.com/language/ref/Integrate.html (visitato il 27/11/2023).

[15] John D. Jakeman e Akil Narayan. «Generation and application of multivariate polynomial quadrature rules». In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 338 (2018), pp. 134–161. issn: 0045-7825. url: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782518301798 (visitato il 06/11/2023).

[16] Leonid V. Kantorovich e Vladimir I. Krylov. *Approximate Methods of Higher Analysis*. Trad. da Curtis D. Benster. New York: Interscience Publishers, 1958.

[17] Vahid Keshavarzzadeh, Robert M. Kirby e Akil Narayan. «Numerical Integration in Multiple Dimensions with Designed Quadrature». In: *SIAM Journal on Scientific Computing* 40.4 (2018), A2033–A2061. url: https://epubs.siam.org/doi/10.1137/17M1137875 (visitato il 07/11/2023).

[18] Rainer Kress. *Linear Integral Equations*. Berlin: Springer, 2014. isbn: 978-1-4614-9592-5.

[19] Arvid T. Lonseth. «Approximate solutions of Fredholm-type integral equations». In: *Bulletin of the American Mathematical Society* 60 (1954), pp. 415–430. url: https://api.semanticscholar.org/CorpusID:123684236 (visitato il 30/10/2023).

[20] *MeshPrimitives*. Wolfram Research. 2014. URL: https://reference.wolfram.com/language/ref/MeshPrimitives.html (visitato il 27/11/2023).

[21] *NIntegrate*. Wolfram Research. 2014. URL: https://reference.wolfram.com/language/ref/NIntegrate.html (visitato il 27/11/2023).

[22] Evert Johannes Nyström. «Über Die Praktische Auflösung von Integralgleichungen mit Anwendungen auf Randwertaufgaben». In: *Acta Mathematica* 54 (1930), pp. 185–204. URL: https://api.semanticscholar.org/CorpusID:122921569 (visitato il 30/10/2023).

[23] Harri Ojanen. *Mathematica Expression to MATLAB m-file Converter*. Rutgers University. 24 Apr. 1999. URL: https://library.wolfram.com/infocenter/MathSource/577/ (visitato il 27/11/2023).

[24] *Polygon*. Wolfram Research. 2019. URL: https://reference.wolfram.com/language/ref/Polygon.html (visitato il 27/11/2023).

[25] ***polyshape**. 2-D polygonal shapes*. MathWorks. 2017. URL: https://it.mathworks.com/help/matlab/ref/polyshape.html (visitato il 01/10/2023).

[26] David Porter e David S. G. Stirling. *Integral Equations. A practical treatment, from spectral theory to applications*. New York: Springer, 2014. ISBN: 978-1-4614-9592-5.

[27] Walter Rudin. *Principi di Analisi Matematica*. Milano: McGraw-Hill, 1991. ISBN: 978-88-386-0647-2.

[28] Edoardo Sernesi. *Geometria 2*. Torino: Bollati Boringhieri, 1994. ISBN: 978-88-339-5548-3.

[29] Frank Smithies. *Integral Equations*. Cambridge: Cambridge University Press, 1958. ISBN: 978-0-521-06502-3.

[30] Alvise Sommariva e Riccardo Cazzin. *Codici MATLAB e Wolfram Language per risoluzione di equazioni integrali di Fredholm del secondo tipo con metodo di Nyström*. 2023. URL: https://github.com/ZinRicky/fredholm-nystrom.

[31] Alvise Sommariva e Marco Vianello. *Polygauss. Fast algebraic cubature over polygons*. URL: http://www.math.unipd.it/~alvise/SOFTWARE_2019/POLYGONS_2019/POLYGONS_2019.zip (visitato il 30/11/2023).

[32] G. W. Stewart, comp. *Fredholm, Hilbert, Schmidt. Three Fundamental Papers on Integral Equations*. Traduzione e commento di G. W. Stewart. 15 Dic. 2011. URL: http://www.umiacs.umd.edu/~stewart/FHS.pdf (visitato il 08/10/2023).

[33] *TriangulateMesh*. Wolfram Research. 2020. URL: https://reference.wolfram.com/language/ref/TriangulateMesh.html (visitato il 27/11/2023).

QUESTA tesi è stata composta con LaTeX. Il *layout* è stato ispirato dalla bellezza, dalla qualità e dalla varietà delle tesi condivise dalla comunità TeX nel corso degli anni. I colori e la copertina seguono il manuale di identità visiva dell'Università di Padova.
La versione originale del tema utilizzato per questa tesi è disponibile gratuitamente sul sito `https://github.com/AlphaJack/masterthesis`.