



Università degli Studi di Padova

FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Corso di Laurea in Ingegneria dell'Informazione

TESI DI LAUREA IN INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE

CLASSE L-8 INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE
(DM 270/04)

Controllo del moto ascensionale di una mongolfiera

Candidato:

Luca Mordiero

Matricola 612587-INF

Relatore:

Ch.mo Prof. Mauro Bisiacco

Indice

1 Introduzione: componenti di una mongolfiera e scopo della tesi	3
2 Principio di funzionamento	4
3 Costruzione del modello della mongolfiera	4
3.1 Modello di trasmissione del calore	4
3.2 Modello del moto	5
3.3 Equazioni del sistema non lineare	5
3.4 Calcolo dei punti d'equilibrio	6
3.5 Equazioni del sistema lineare e diagrammi di Bode	7
4 Analisi del sistema in assenza di disturbi esterni	10
4.1 Progetto del compensatore	10
4.2 Modello Simulink ed analisi delle simulazioni	11
5 Analisi del sistema in presenza di disturbi esterni	16
5.1 Progetto del compensatore	16
5.2 Modello Simulink ed analisi delle simulazioni	18
6 Analisi del sistema non lineare	22
Bibliografia	28

1.Introduzione: componenti di una mongolfiera e scopo della tesi

Una mongolfiera costituisce l'esempio più comune di pallone aerostatico, ovvero di un mezzo capace di levarsi da terra grazie al Principio di Archimede, potendone però controllare il solo moto verticale; tuttavia è possibile effettuare un moto diverso da quello puramente ascensionale sfruttando le correnti d'aria della zona in cui si sta effettuando la navigazione.

Una mongolfiera moderna, evoluzione del primo modello capace di trasportare persone, realizzato dai fratelli Joseph Michel e Jacques Etienne Montgolfier (da cui prende il nome) in Francia nel 1783, è costituita da 3 elementi principali (Figura 1):

Un pallone (o involucro), realizzato tramite pannelli di tessuti sintetici (come il nylon e il poliestere) caratterizzati da una notevole leggerezza e resistenza; in particolare, i pannelli alla base del pallone e lo scoop (il tessuto a forma di triangolo che serve da parafiamma) sono realizzati con un materiale resistente al calore chiamato Nomex; all'estremità inferiore è presente un foro, detto gola, attraverso il quale il bruciatore scalda l'aria contenuta all'interno dell'involucro.

Il bruciatore, che deve riscaldare l'aria contenuta all'interno del pallone, mediante l'utilizzo di un gas, il propano, conservato allo stato liquido in alcune bombole (e quindi sottoposto a forte pressione), il cui flusso è regolato da apposite valvole: l'apertura di esse determina lo scorrere all'interno di un tubo del propano il quale, scaldandosi, passa dallo stato liquido a quello gassoso, e giunge a contatto con una fiamma, determinando l'accensione del bruciatore. Da ricordare inoltre la presenza di un'ulteriore valvola, chiamata whisper, che anticipa l'uscita del gas liquido, che di conseguenza non diventa totalmente gassoso, e produce una fiamma meno potente e più silenziosa, utilizzata quando si sorvolano i centri abitati, per rendere meno "rumorosa" la navigazione.

Un cesto, detto gondola, realizzato mediante vimini intrecciati e destinato ad ospitare i passeggeri, il pilota della mongolfiera e le bombole contenenti il propano (di solito costituite di acciaio inossidabile); la struttura è ulteriormente rinforzata mediante tubi in alluminio, collegati al bruciatore e al pallone attraverso cavi d'acciaio.

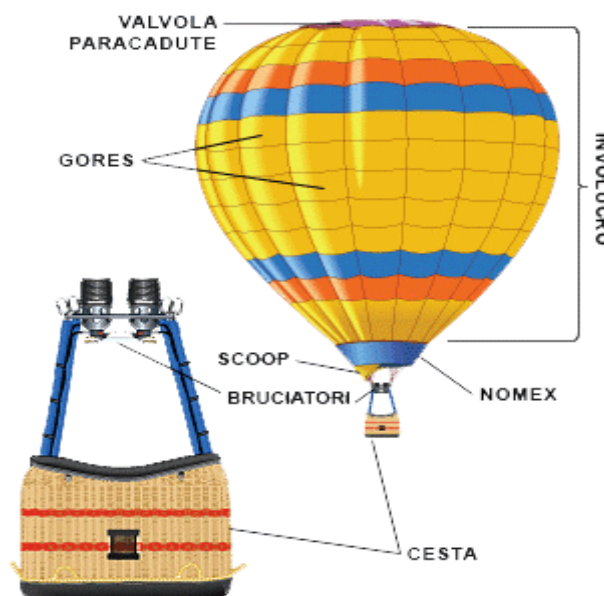


Figura 1 : Componenti principali di una mongolfiera

Obiettivo di questa tesi è la costruzione di un modello di mongolfiera capace di raggiungere una quota di riferimento, che chiameremo z_{RIF} , pari a 400 metri, entro due minuti con una sovralongazione quasi nulla.

2. Principio di funzionamento

Il funzionamento di una mongolfiera si fonda sul cosiddetto Principio di Archimede, secondo il quale un corpo immerso in un fluido riceve una spinta dal basso verso l'alto pari al peso del volume di fluido spostato. Quindi, affinché una mongolfiera possa staccarsi da terra ed aumentare la propria altitudine, è necessario che la forza peso agente su di essa sia inferiore alla forza di Archimede, dovuta al volume d'aria il cui posto è successivamente preso dalla mongolfiera. La spinta di Archimede è definita dalla legge $F_A = V\rho_{ext}g$, dove V è il volume della mongolfiera (cioè del volume d'aria di cui prende il posto), ρ_{ext} la densità dell'aria esterna alla mongolfiera e g è l'accelerazione di gravità, pari a 9.81 m/s^2 , mentre la forza peso della mongolfiera è esprimibile dalla relazione $F_M = (M + \rho_{int}V)g$, dove M è la massa totale della mongolfiera, escludendo l'aria contenuta all'interno del pallone, tenuta in considerazione facendo ricorso alla sua densità ρ_{int} . Nell'equazione appena formulata abbiamo considerato come l'aria contenuta all'interno dell'involucro abbia un volume V pari a quello della mongolfiera, cioè è stato trascurato lo spazio occupato dal cesto e dal bruciatore, una buona approssimazione che ha riscontro anche nella realtà (Figura 1). Come precedentemente affermato, affinché la mongolfiera possa sollevarsi, deve valere la condizione

$$\begin{aligned} F_M &\leq F_A \quad \text{ovvero} \\ (M + \rho_{int}V)g &\leq V\rho_{ext}g \\ \rho_{int} &\leq \rho_{ext} - \frac{M}{V} \end{aligned}$$

Affinché questa situazione si verifichi, è necessaria l'azione del bruciatore: quest'ultimo, infatti, riscaldando l'aria, ne determina il cambiamento della temperatura: a livello microscopico, ciò provoca una diffusione degli atomi di cui è costituita l'aria in una regione di spazio maggiore e quindi una diminuzione della sua densità. Dal punto di vista pratico, ciò spiega perché sia preferibile far decollare una mongolfiera alle prime luci dell'alba quando la temperatura ambientale è di gran lunga inferiore a quella dell'aria contenuta nel pallone di quanto non lo sarebbe, ad esempio, a mezzogiorno.

3. Costruzione del modello della mongolfiera

3.1 Modello di trasmissione del calore

La dinamica che descrive il funzionamento del bruciatore può essere sintetizzata tramite la seguente equazione

$$A) \quad C \cdot \dot{T}_{int} = q - k_T(T_{int} - T_{ext})$$

dove q rappresenta il flusso di calore trasmesso dal bruciatore, C la capacità termica dell'aria contenuta nel pallone, proporzionale al volume dell'aria, alla sua densità ed al suo calore specifico,

k_T il coefficiente di scambio termico tra l'aria interna all'involucro con temperatura T_{int} e quella esterna con temperatura T_{ext} .

Inoltre, dalle leggi dei gas è possibile ricavare la relazione che lega l'aria contenuta all'interno del pallone con quella esterna ad esso, mediante le grandezze fisiche che le caratterizzano, cioè densità e temperatura.

$$\rho_{ext} T_{ext} = \rho_{int} T_{int}$$

Queste relazioni, assieme a quella riguardante la forza archimedeica, mettono in rilievo la condizione fisica che permette l'ascensione della mongolfiera, ovvero la differenza di temperatura tra l'aria esterna ad essa e quella interna all'involucro, sottolineando il ruolo svolto, nel sistema, dal bruciatore.

3.2 Modello del moto

Prendiamo ora in considerazione le forze agenti sulla mongolfiera, le quali determinano il suo moto ascensionale, cioè la sua forza inerziale F_I : la forza peso F_M , la forza di Archimede F_A , l'attrito dell'aria F_{attr} e la forza dovuta al vento F_w (quest'ultima è associata alle correnti d'aria nelle quali si trova la mongolfiera lungo il suo tragitto); l'equazione che regola il moto, nella direzione verticale, espressione del bilancio delle forze agenti sul sistema, è quindi la seguente

$$F_I = F_M + F_A + F_{attr} + F_w$$

Siccome la massa complessiva della mongolfiera è variabile nel tempo, in quanto dipende dalla temperatura dell'aria interna all'involucro (secondo la relazione espressa sopra e ricavata dalle leggi dei gas), deve valere la formula $F_I = \frac{d[(M + \rho_{int} V)\dot{z}]}{dt}$: ne consegue

$$B) \quad (M + \rho_{int} V)\ddot{z} + \dot{\rho}_{int} V \dot{z} = -(M + \rho_{int} V)g + V\rho_{ext}g - a\dot{z} + aw$$

$$\left(M + \rho_{ext} \frac{T_{ext}}{T_{int}} V\right)\ddot{z} + \left(a - V\rho_{ext} \frac{T_{ext}}{(T_{int})^2} \dot{T}_{int}\right)\dot{z} = aw - Mg + Vg\rho_{ext} \left(1 - \frac{T_{ext}}{T_{int}}\right)$$

dove z rappresenta l'altitudine della mongolfiera, a il coefficiente di attrito viscoso e w la velocità del vento, le cui componenti sono variabili in quanto dipendono dallo stato della corrente d'aria in cui si trova la mongolfiera; in questo contesto esso assumerà il ruolo di disturbo.

3.3 Equazioni del sistema non lineare

Partendo dalle equazioni A) e B) possiamo scrivere il sistema di equazioni associato al modello, definendo come ingresso il flusso di calore q trasmesso dal bruciatore (ciò è evidente pensando al funzionamento di una mongolfiera: il pilota, per variane l'altitudine, può agire solo mediante il bruciatore, che quindi costituisce l'input del sistema), come variabili di stato la quota raggiunta dalla mongolfiera z , la sua derivata \dot{z} e la temperatura dell'aria contenuta all'interno del pallone T_{int} , e come uscita la quota raggiunta z . Scrivendo in notazione vettoriale, abbiamo

$$\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]^T = [z \quad \dot{z} \quad T_{int}]^T$$

$$u = q$$

$$y = z$$

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = \frac{V\rho_{ext}g}{\left(M + \rho_{ext} \frac{T_{ext}}{x_3} V\right)} \left(1 - \frac{T_{ext}}{x_3}\right) - \frac{Mg}{\left(M + \rho_{ext} \frac{T_{ext}}{x_3} V\right)} + \frac{a}{\left(M + \rho_{ext} \frac{T_{ext}}{x_3} V\right)} w - x_2 \left(\frac{a}{\left(M + \rho_{ext} \frac{T_{ext}}{x_3} V\right)} - a_2\right) \\ \dot{x}_3 = \tau (T_{ext} - x_3) + \frac{u}{C} \end{cases}$$

$$\text{dove } \tau = \frac{k_T}{C} \text{ e } a_2 = \frac{\tau V \rho_{ext} (T_{ext})^2 - \tau V \rho_{ext} T_{ext} x_3 + V \rho_{ext} T_{ext} \frac{u}{C}}{M(x_3)^2 + V \rho_{ext} T_{ext} x_3}.$$

Al sistema bisogna inoltre aggiungere l'equazione $y = x_1$.

In forma matriciale, si ottiene

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{V\rho_{ext}g}{\left(M + \rho_{ext} \frac{T_{ext}}{x_3} V\right)} \left(1 - \frac{T_{ext}}{x_3}\right) - \frac{Mg}{\left(M + \rho_{ext} \frac{T_{ext}}{x_3} V\right)} - x_2 \left(\frac{a}{\left(M + \rho_{ext} \frac{T_{ext}}{x_3} V\right)} - a_2\right) \\ \tau(T_{ext} - x_3) + \frac{u}{C} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{bmatrix} w \\ y = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Il sistema presenta inoltre le seguenti condizioni iniziali:

$x_1(0) = 0 \text{ m}$, in quanto la mongolfiera parte da terra.

$x_2(0) = 0 \frac{m}{s}$, in quanto la mongolfiera inizialmente è ferma.

$x_3(0) = 298 \text{ K}$ (circa 25°C), ossia la temperatura interna al pallone è pari a quella esterna, non essendo entrato ancora in azione il bruciatore.

Tali condizioni possono essere riassunte nel vettore \mathbf{x}_0 .

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0) = [x_1(0) \quad x_2(0) \quad x_3(0)]^T = [0 \quad 0 \quad 298]^T$$

3.4 Calcolo dei punti d'equilibrio

Per calcolare i punti d'equilibrio del sistema, oltre a considerare nulla la velocità del vento ($w = 0$), ossia considerando nulli i disturbi esterni, bisogna porre, per definizione, $\dot{\mathbf{x}} = 0$.

Dalla prima equazione otteniamo $x_{2,eq} = \dot{z} = 0$, ovvero la mongolfiera deve avere velocità nulla nel suo moto verticale, cioè deve avere altitudine costante: una condizione banale.

Dalla seconda equazione del sistema ricaviamo la temperatura che l'aria all'interno del pallone deve avere all'equilibrio, ovvero $x_{3,eq}$.

$$-Mg + Vg\rho_{ext} \left(1 - \frac{T_{ext}}{x_{3,eq}}\right) = 0$$

$$Mg - Vg\rho_{ext} = -Vg\rho_{ext} \frac{T_{ext}}{x_{3,eq}}$$

$$x_{3,eq} = \frac{T_{ext}}{1 - \frac{M}{V\rho_{ext}}}$$

Dalla terza equazione ricaviamo il flusso di calore uscente dal bruciatore u_{eq} affinché la mongolfiera si porti in una situazione di equilibrio, utilizzando $x_{3,eq}$ calcolato precedentemente, cioè

$$u_{eq} = k_T(x_{3,eq} - T_{ext}) = k_T \left(\frac{T_{ext}}{1 - \frac{M}{V\rho_{ext}}} - T_{ext} \right) = k_T \frac{T_{ext}M}{V\rho_{ext} - M}$$

In forma vettoriale

$$\mathbf{x}_{eq} = \begin{bmatrix} z_{eq} & 0 & \frac{T_{ext}}{1 - \frac{M}{V\rho_{ext}}} \end{bmatrix}^T$$

$$u_{eq} = q_{eq} = k_T \frac{T_{ext}M}{V\rho_{ext} - M}$$

$$y_{eq} = z_{eq}$$

È necessario sottolineare come vi siano infiniti punti d'equilibrio, in quanto la componente verticale z , in questa situazione, non dipende dai parametri del modello, cioè è completamente libera; le variabili che sono strettamente determinate sono invece \dot{z} , la temperatura dell'aria interna all'involucro ed il flusso di calore.

3.5 Equazioni del sistema lineare e diagrammi di Bode

Quello sinora descritto è un modello caratterizzato da equazioni non lineari; per affrontare meglio il suo studio in futuro dal punto di vista del controllo, è necessario linearizzare il sistema che lo descrive; il procedimento da svolgere è il seguente.

Indichiamo in modo generico con una funzione $f_g(x_1, x_2, x_3, u, w)$ la derivata di una delle 3 variabili di stato associate a ciascuna delle equazioni del sistema non lineare (che chiamiamo x_g) e ne effettuiamo l'espansione in serie di Taylor (arrestata al primo ordine), calcolata attorno ad un punto d'equilibrio (fra gli infiniti valori ricavati precedentemente); ovviamente il calcolo andrà ripetuto anche per le altre due variabili di stato. Definendo $\bar{x}_g = x_g - x_{g,eq}$, dove $x_{g,eq}$ rappresenta il valore assunto da x_g nella situazione di equilibrio, si ottiene

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_g = f_g(x_1, x_2, x_3, u, w) &= \frac{\partial f_g(x_{1eq}, x_{2eq}, x_{3eq}, u_{eq}, w_{eq})}{\partial x_1} \bar{x}_1 + \frac{\partial f_g(x_{1eq}, x_{2eq}, x_{3eq}, u_{eq}, w_{eq})}{\partial x_2} \bar{x}_2 + \\ &\frac{\partial f_g(x_{1eq}, x_{2eq}, x_{3eq}, u_{eq}, w_{eq})}{\partial x_3} \bar{x}_3 + \frac{\partial f_g(x_{1eq}, x_{2eq}, x_{3eq}, u_{eq}, w_{eq})}{\partial u} \bar{u} + \frac{\partial f_g(x_{1eq}, x_{2eq}, x_{3eq}, u_{eq}, w_{eq})}{\partial w} \bar{w} \end{aligned}$$

dove $\bar{x}_1 = x_1 - x_{1,eq}$, $\bar{x}_2 = x_2 - x_{2,eq}$, $\bar{x}_3 = x_3 - x_{3,eq}$, $\bar{u} = u - u_{eq}$, $\bar{w} = w - w_{eq} = w$.

Eseguendo i calcoli si ottiene il seguente sistema linearizzato (a cui bisogna aggiungere l'equazione $\bar{y} = \bar{x}_1$)

$$\Sigma_L \begin{cases} \dot{\bar{x}}_1 = \bar{x}_2 \\ \dot{\bar{x}}_2 = -b_2 \bar{x}_2 + b_3 \bar{x}_3 + b_4 \bar{w} \\ \dot{\bar{x}}_3 = -\tau \bar{x}_3 + \frac{\bar{u}}{c} \end{cases}$$

dove

$$b_2 = b_4 = \frac{a}{V\rho_{ext}}$$

$$b_3 = \frac{g(V\rho_{ext} - M)^2}{T_{ext} [M^2 + 2M(V\rho_{ext} - M) + (V\rho_{ext} - M)^2]}$$

Scrivendo in forma matriciale

$$\Sigma_L \begin{cases} \dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 \\ \dot{\bar{x}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & -\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{c} \end{bmatrix} \bar{u} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_4 \\ 0 \end{bmatrix} \bar{w} \\ \bar{y} = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Le condizioni iniziali di Σ_L possono essere ricavate da quelle del sistema non lineare, ossia

$$\bar{x}_1(0) = x_1(0) - x_{1,eq} = 0 - 400 = -400 \text{ m}$$

$$\bar{x}_2(0) = x_2(0) - x_{2,eq} = 0 - 0 = 0 \frac{m}{s}$$

$$\bar{x}_3(0) = x_3(0) - x_{3,eq} = T_{ext} - \frac{T_{ext} M}{1 - V\rho_{ext}} = -79.76 \text{ K}$$

Fra gli infiniti valori d'equilibrio di x_1 è stato scelto il valore 400 in quanto 400 metri è la quota alla quale vogliamo navigare la mongolfiera.

Questi valori possono essere riassunti nel seguente vettore

$$\bar{x}_0 = \bar{x}(0) = [\bar{x}_1(0) \quad \bar{x}_2(0) \quad \bar{x}_3(0)]^T = [-400 \quad 0 \quad -79.76]^T$$

Definendo le matrici del sistema nel seguente modo

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & -\tau \end{bmatrix}, B_u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{c} \end{bmatrix}, H = [1 \quad 0 \quad 0], B_d = \begin{bmatrix} 0 \\ b_4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

possiamo calcolare la funzione di trasferimento tra ingresso e uscita $G(s)$ e quella tra disturbo ed uscita $G_d(s)$ mediante le formule

$$G(s) = H(sI - F)^{-1}B_u$$

$$G_d(s) = H(sI - F)^{-1}B_d$$

Eseguendo i calcoli, otteniamo $G(s) = \frac{\frac{b_3}{c}}{s(s+\tau)(s+b_2)}$ e $G_d(s) = -\frac{b_4}{s(s+b_2)}$.

Definiamo, prima di procedere ulteriormente, anche i valori delle grandezze fisiche che descrivono il modello e disegniamo i diagrammi di Bode di $G(s)$.

$$k_T = 2.5 \frac{W}{K}, \quad C = 718 \frac{J}{K}, \quad M = 500 \text{ kg}, \quad V = 2000 \text{ m}^3, \quad \rho_{ext} = 1.184 \frac{kg}{m^3}, \quad T_{ext} = 298 \text{ K}$$

$$a = 20 \frac{N \cdot s}{m}, \quad \tau = 3.48 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}, \quad b_2 = b_4 = 8.45 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}, \quad b_3 = 0.021 \frac{m}{s^2 K}$$

Dai diagrammi (Figura 2) è possibile notare come la presenza dei due poli posti in $s = -\tau$ e $s = -b_2$ non renda possibile rispettare una delle specifiche fissate, ovvero una sovraelongazione prossima a zero, ottenibile mediante un margine di fase alla frequenza di attraversamento w_A di circa 90° : per raggiungere questo obiettivo sarà necessario progettare un idoneo compensatore; nella sua realizzazione divideremo il procedimento in due sottocasi, a seconda di considerare o meno il fattore di disturbo dovuto al vento.

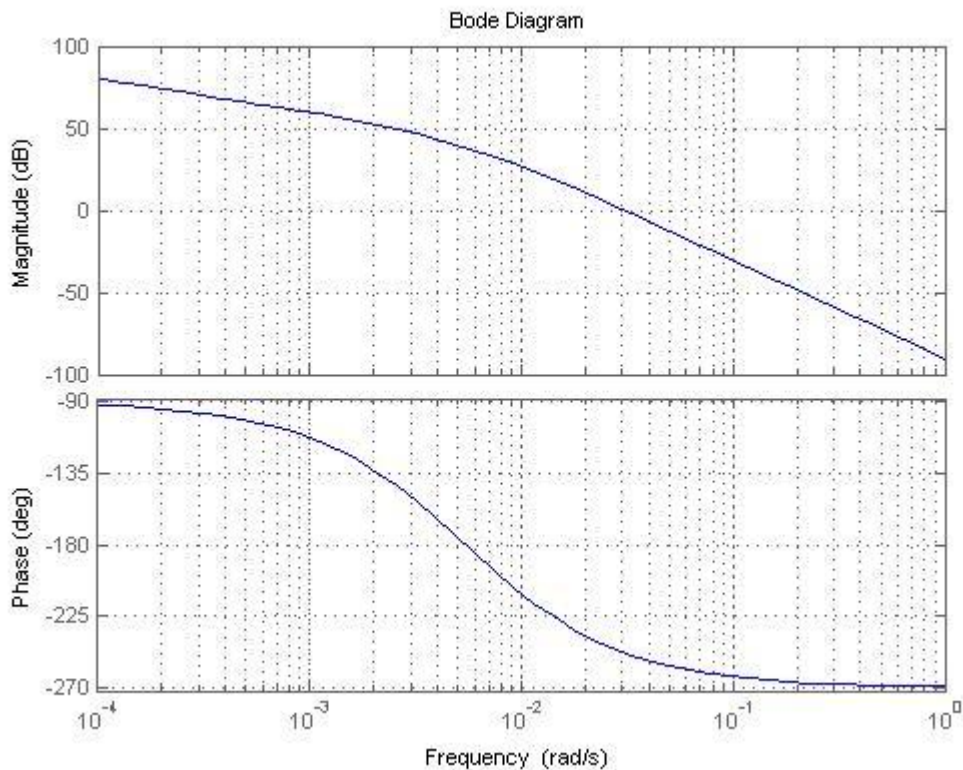


Figura 2 : Diagrammi di Bode di $G(s)$

4. Analisi del sistema in assenza di disturbi esterni

Consideriamo, in questo sottocaso, nulla la velocità del vento w .

4.1 Progetto del compensatore

Lo schema a blocchi del sistema è il seguente

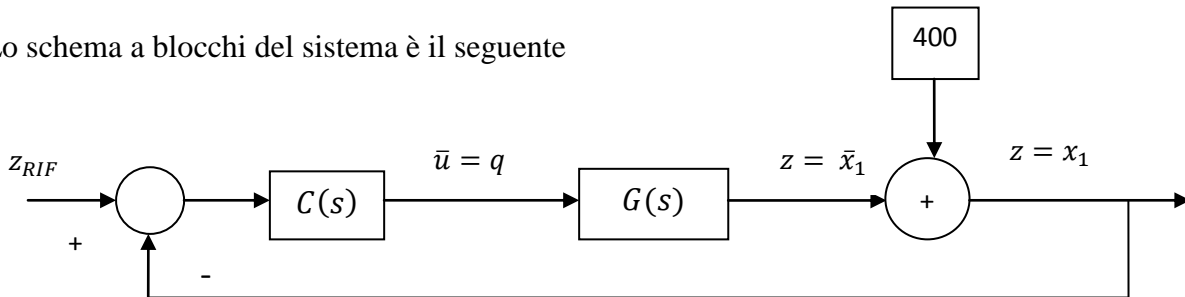


Figura 3 : Schema a blocchi del sistema

La presenza del blocco contenente il valore 400 è dovuto al fatto che vogliamo confrontare z_{RIF} con $z = x_1$, non con $z = \bar{x}_1$ (secondo l'equazione $\bar{x}_1 = x_1 - x_{1,eq}$).

Affinché siano rispettate le specifiche, il compensatore può avere la seguente struttura

$$C(s) = K_B \cdot \frac{(s + \tau)(s + b_2)}{\left(\frac{s}{10^3} + 1\right)\left(\frac{s}{10^4} + 1\right)}$$

Infatti i due zeri del compensatore determinano una cancellazione dei poli di $G(s)$, mentre la presenza di due poli in alta frequenza, necessari affinché $C(s)$ sia propria, non influisce sul funzionamento complessivo del sistema. La funzione di trasferimento ad anello aperto, ovvero $\tilde{G}(s) = C(s)G(s)$ presenta finalmente, alla frequenza d'attraversamento, un margine di fase prossimo ai 90° ; inoltre la costante moltiplicativa $K_B = 2000$ permette alla mongolfiera di raggiungere quota 400 metri in due minuti, come avevamo desiderato (Figure 4 e 5).

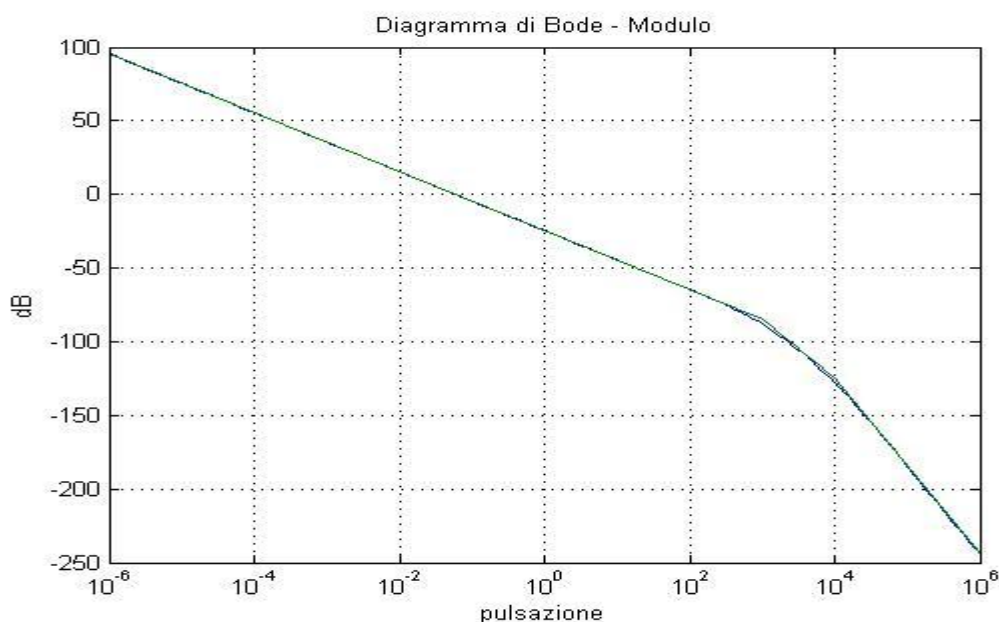


Figura 4 : Diagramma di Bode del modulo di $\tilde{G}(s)$

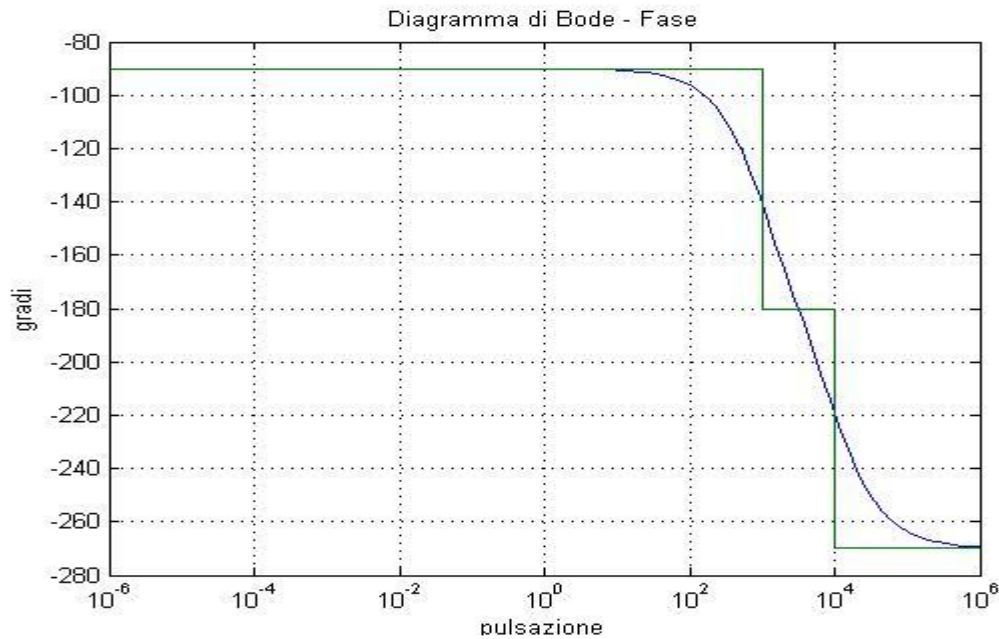


Figura 5 : Diagramma di Bode della fase di $\tilde{G}(s)$

4.2 Modello Simulink ed analisi delle simulazioni

La mongolfiera può essere rappresentata tramite un modello Simulink, ottenuto partendo dalle equazioni del sistema linearizzato, mediante l'utilizzo di blocchi di guadagno ed integratori (Figura 6).

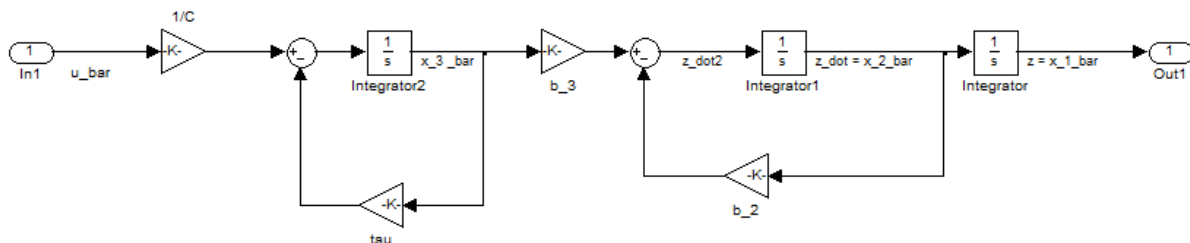


Figura 6 : Modello Simulink della mongolfiera

dove $\tau = \tau$, $b_2 = b_2$, $b_3 = b_3$, $u_{\text{bar}} = \bar{u}$, $z_{\text{dot2}} = \ddot{z}$, $z_{\text{dot}} = \dot{z} = x_{2_bar} = \bar{x}_2$, $z = x_{1_bar} = \bar{x}_1$, $x_{3_bar} = \bar{x}_3$; inoltre all'interno degli integratori sono state poste le condizioni iniziali contenute nel vettore \bar{x}_0 .

A sua volta, anche lo schema a blocchi di Figura 3 può essere rappresentato mediante questo strumento di MATLAB: per costruire z_{RIF} viene utilizzato un gradino (il cui valore massimo corrisponde all'altitudine a cui vogliamo far volare la mongolfiera, ovvero 400 m), il blocco

Mongolfiera contiene il sistema di Figura 6, il blocco Compensatore la funzione di trasferimento $C(s)$ ricavata in precedenza e lo Scope visualizza il moto della mongolfiera al variare del tempo (Figura 7).

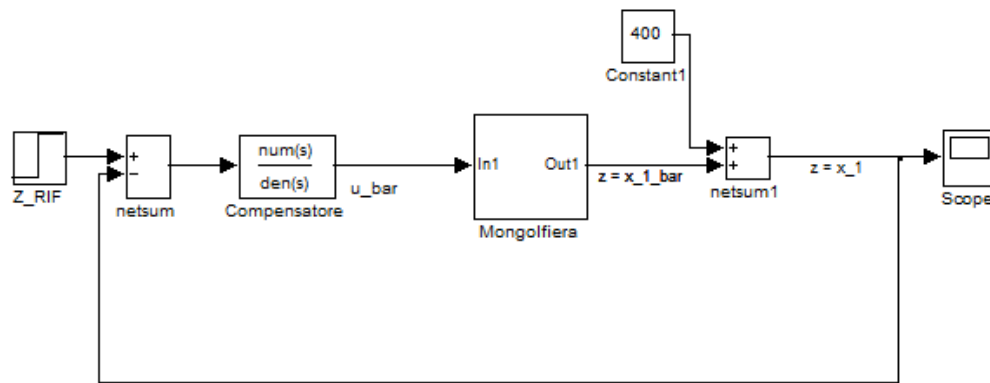


Figura 7: Modello Simulink del sistema

La presenza del blocco Constant1 (contenente il valore 400) è stata giustificata nella costruzione dello schema a blocchi del sistema in Figura 3; inoltre esso permette di visualizzare sull'oscilloscopio il grafico di $z = x_1 = x_1$, sempre in ragione dell'equazione $\bar{x}_1 = x_1 - x_{1,eq}$.

Effettuando una simulazione, otteniamo la seguente immagine dell'oscilloscopio, ovviamente relativa al moto della mongolfiera, cioè all'altitudine che raggiunge al variare del tempo

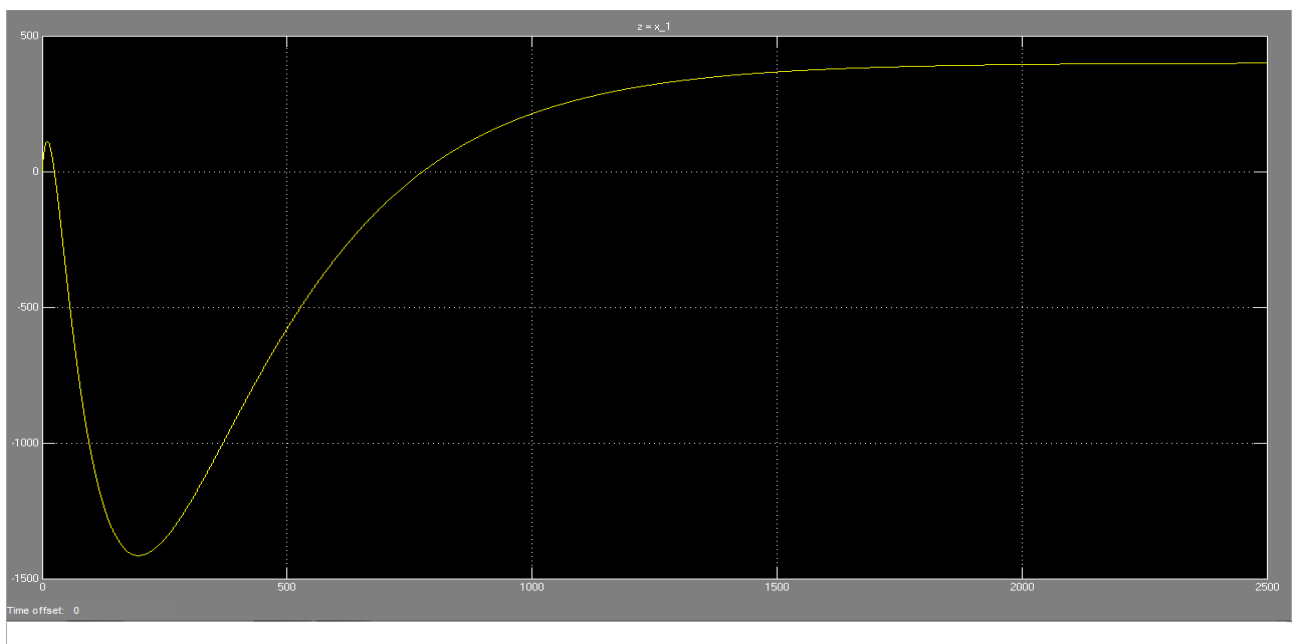


Figura 8 : Analisi del moto della mongolfiera al variare del tempo (volo di circa 42 minuti)

Osservando l'immagine, ci accorgiamo immediatamente come la mongolfiera non esegua il moto che avevamo previsto; in particolare notiamo la presenza di un overshoot (di circa 110 metri) nei primissimi secondi di volo e, successivamente, di un undershoot consistente. Cerchiamo quindi di comprendere e risolvere questi due problemi.

Analisi dell'overshoot

La presenza dell'overshoot sta ad indicare come il gas contenuto all'interno del pallone si scaldi molto velocemente, per poi raffreddarsi altrettanto rapidamente; per avere conferma di ciò, visualizziamo l'andamento di \bar{x}_3 , ponendo un oscilloscopio all'uscita di x_3_bar nel modello di Figura 6, ottenendo il seguente risultato

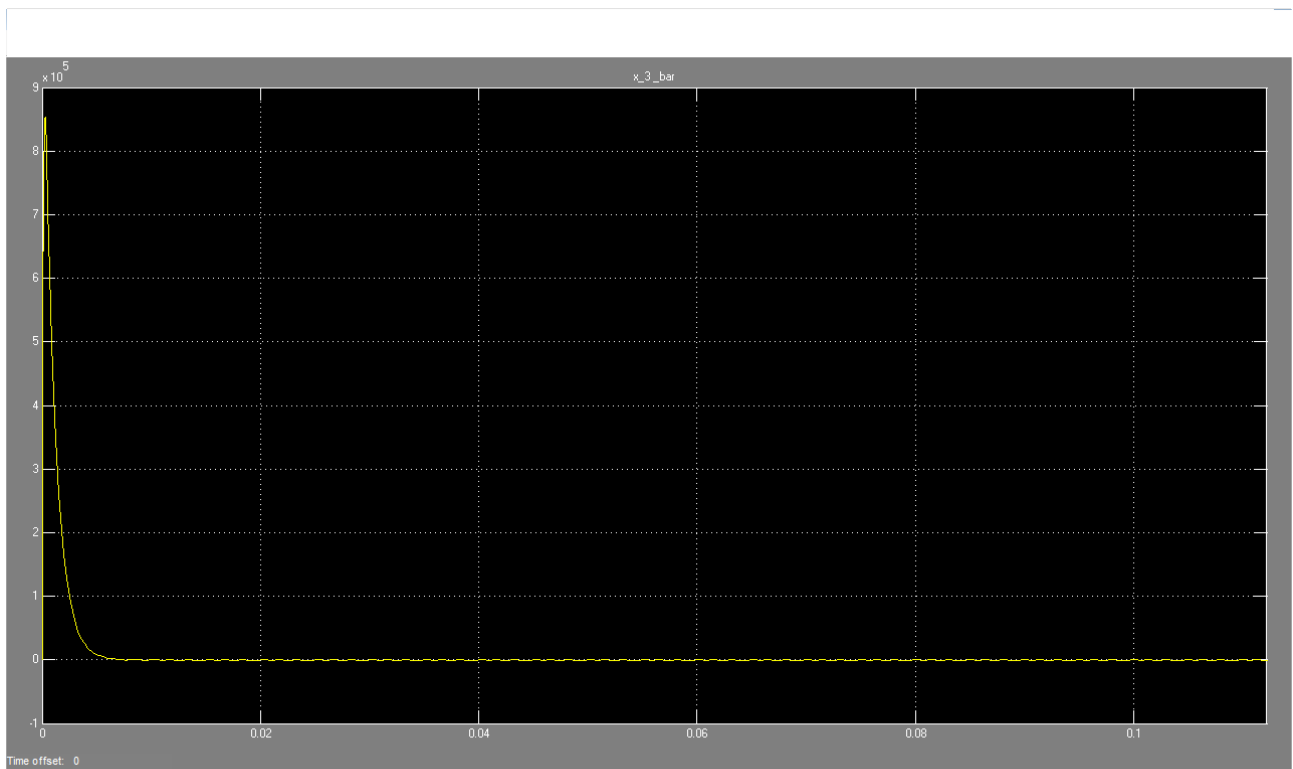


Figura 9 : Analisi di $x_3_bar = \bar{x}_3$

\bar{x}_3 comincia a salire dal valore iniziale di -79.76 K , dopo soli 7 ns raggiunge valori positivi (fino ad un picco di 10^5), per poi riassumere valori negativi dopo 7 ms dall'inizio, per infine assestarsi attorno ad un valore di -500 K ; questa simulazione conferma l'ipotesi riguardante la variazione della temperatura del gas.

La presenza di un ingresso così elevato è dovuta all'azione del compensatore; infatti esso svolge un'azione prevalentemente derivativa, considerando come gli zeri (collocati in $s = -\tau$ e $s = -b_2$) siano molto più piccoli dei poli, i quali non interagiscono sul sistema, essendo posizionati in alta frequenza con il solo scopo di rendere $C(s)$ propria; avendo come ingresso un gradino, il quale presenta derivata infinita (ossia un impulso, chiamato anche delta di Dirac), il sistema subisce inizialmente delle grosse sollecitazioni, determinando perciò un ingresso elevato nella mongolfiera (nella realtà esiste un limite al flusso di calore che può essere fornito, per cui $C(s)$ saturerebbe); per

risolvere questo problema è quindi necessario cambiare l'andamento di z_{RIF} , sostituendo cioè il gradino con un ingresso più "dolce", come ad esempio un trapezio (che presenta derivata finita), realizzato con i seguenti blocchi

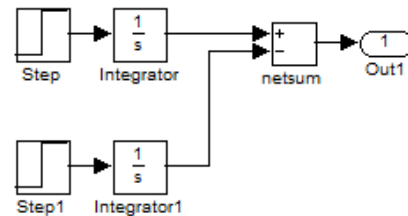


Figura 10 : Costruzione dell'onda trapezoidale

Il trapezio è assemblato partendo da due gradini di ampiezza 20 ma che iniziano a 20 secondi di distanza uno dall'altro, in modo da ottenere due rampe diverse che, sottratte tra loro, producano il segnale desiderato; infine questo insieme di blocchi viene racchiuso in un sistema che chiamiamo Z_{RIF} . Il modello Simulink di Figura 7 risulta perciò modificato.

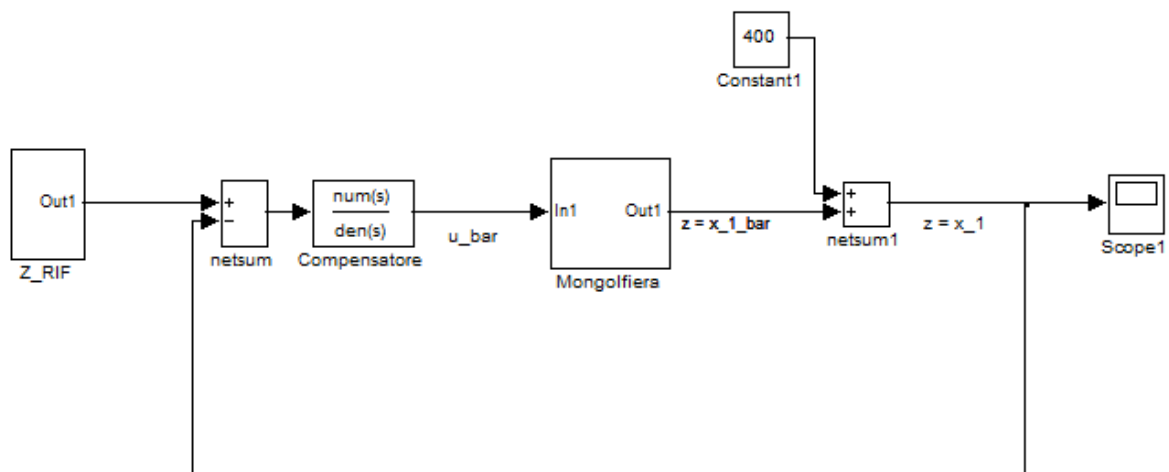


Figura 11: Modello Simulink del sistema con ingresso l'onda trapezoidale

Effettuando la simulazione, otteniamo il seguente risultato

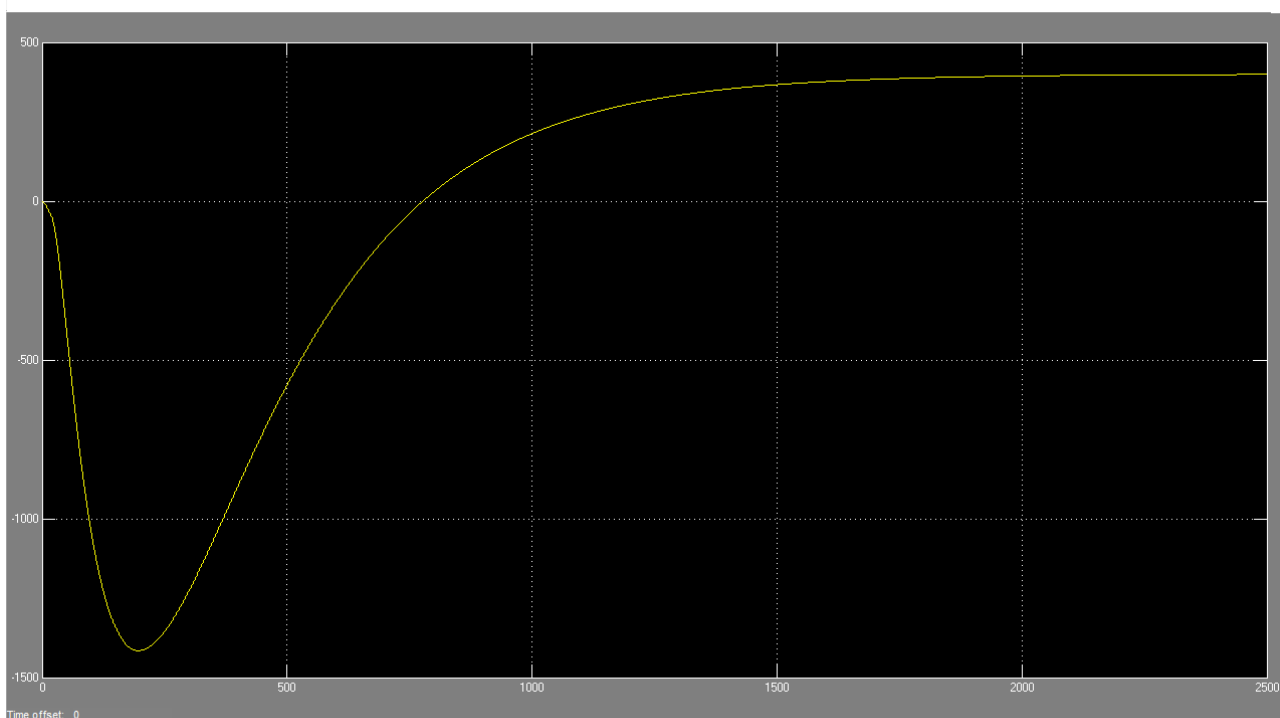


Figura 12 : Analisi del moto della mongolfiera al variare del tempo (volo di circa 42 minuti)

Possiamo notare come l'overshoot sia sparito; consideriamo ora la presenza dell'undershoot.

Analisi dell'undershoot

La presenza della sottoelongazione è dovuta al non aver considerato finora la presenza di un'ulteriore forza agente sulla mongolfiera, che però esiste solo quando il sistema è a terra: essa prende il nome di “reazione vincolare”, in quanto è legata alla presenza di un vincolo sul quale si appoggia l'oggetto su cui esercita la propria azione, contrapponendosi così alla forza peso; essa deve necessariamente esistere per il terzo principio della dinamica (chiamato anche “principio di azione e reazione”), secondo il quale “ad ogni azione deve corrispondere una reazione uguale e contraria” ed il non averla considerata determina quindi la mancanza del vincolo e causa perciò lo “sprofondamento” della mongolfiera (ciò accadrebbe anche qualora la mongolfiera non fosse poggiata a terra ma già in alto, con una temperatura del gas troppo bassa: finché il gas non si scalda sufficientemente la mongolfiera cadrebbe verso terra, in accordo all'undershoot); questo fatto nella realtà non si verifica in quanto la mongolfiera non incomincia subito il proprio volo (cioè quando viene acceso il bruciatore) ma bisogna aspettare che l'aria contenuta all'interno del pallone sia sufficientemente calda affinché la forza di Archimede possa uguagliare e successivamente superare la forza peso; bisogna considerare quindi come temperatura iniziale dell'aria interna questa temperatura limite, ed è perciò necessario sfruttare il ragionamento illustrato nel secondo paragrafo di questa tesi, ovvero

$$F_M = F_A$$

$$(M + \rho_{int}V)g = V\rho_{ext}g$$

$$\rho_{int} = \rho_{ext} - \frac{M}{V}$$

Dalla relazione $\rho_{ext}T_{ext} = \rho_{int}T_{int}$ possiamo infine ottenere la temperatura desiderata, cioè

$$T_{int}^* = \frac{\rho_{ext}T_{ext}}{\rho_{ext} - \frac{M}{V}} = 377.76 \text{ K}$$

$T_{int}^* = x_3(0)$ è la nuova condizione iniziale di x_3 nel sistema non lineare; quindi nel sistema lineare la nuova condizione iniziale relativa a \bar{x}_3 è

$$\bar{x}_3(0) = x_3(0) - x_{3,eq} = T_{int}^* - \frac{T_{ext}}{1 - \frac{M}{V\rho_{ext}}} = 0 \text{ K}$$

Applicando questa modifica (cioè inserendo la nuova condizione iniziale nel blocco Integrator2 del modello Simulink di Figura 6), otteniamo la seguente simulazione

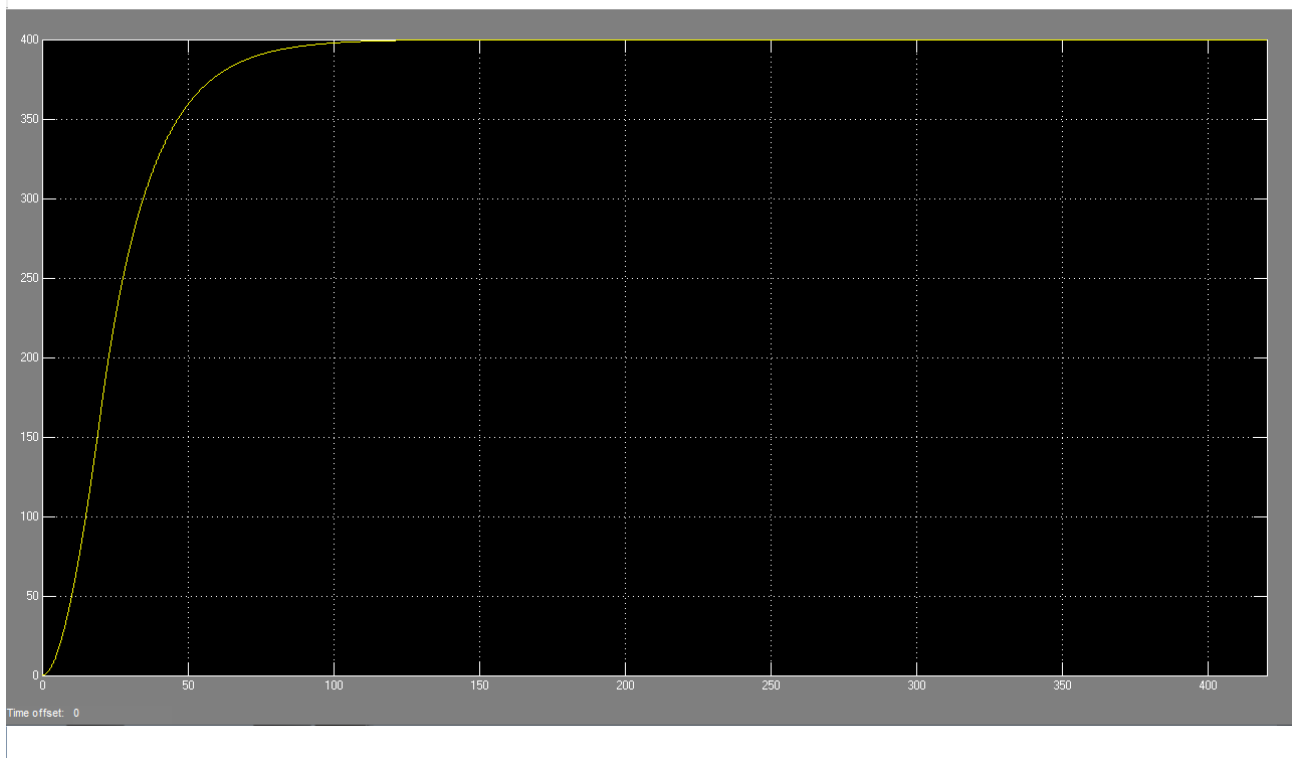


Figura 13 : Analisi del moto della mongolfiera al variare del tempo (volo di 7 minuti)

È possibile notare come finalmente siano stati raggiunti gli obiettivi prefissati: la mongolfiera raggiunge, senza sovraelongazione, la quota di riferimento di 400 metri in circa 2 minuti (l'analisi è stata fatta terminare al raggiungimento dei 7 minuti di volo, rispetto ai 42 precedenti, per poter far notare meglio la fase di salita della mongolfiera).

5. Analisi del sistema in presenza di disturbi esterni

5.1 Progetto del compensatore

Considerando non nulla la velocità del vento, lo schema a blocchi di Figura 3 risulta modificato come segue

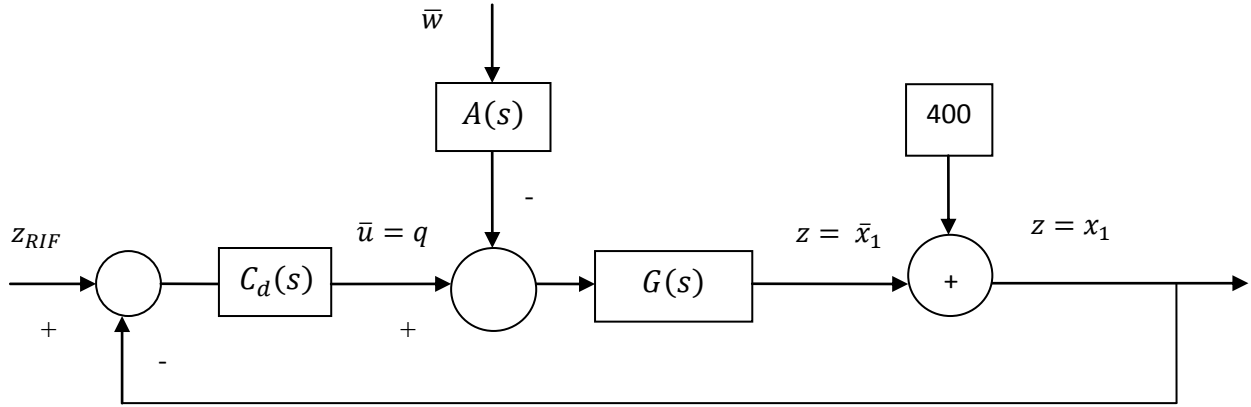


Figura 14 : Schema a blocchi del sistema

dove $A(s) = \frac{b_4(s+\tau)}{\frac{b_3}{C}(\frac{s}{10^3}+1)}$ (sfruttiamo la somiglianza tra $G(s)$ e $G_d(s)$ per inserire il vento w nello schema; inoltre abbiamo posizionato un polo in alta frequenza per rendere $A(s)$ propria, senza modificare il comportamento complessivo del sistema).

Affinché siano rispettate le specifiche è sufficiente realizzare il compensatore nel seguente modo

$$C_d(s) = K'_B \cdot \frac{(s+\tau)(s+b_2)}{\left(\frac{s}{10^3}+1\right)\left(\frac{s}{10^4}+1\right)}$$

Questo non è altro che il compensatore $C(s)$ leggermente modificato in quanto abbiamo variato il guadagno, che ora vale $K'_B = 3200$ (questa costante vale per una determinata simulazione, non per tutte, a causa dell'aleatorietà del vento, che potrebbe sia diminuire che aumentare); infatti, per rispettare la specifica riguardante il tempo di salita, abbiamo dovuto traslare la frequenza di attraversamento w_A per velocizzare il sistema e far raggiungere alla mongolfiera la quota prefissata di 400 metri entro 2 minuti; questa lieve modifica, senza l'inserimento di ulteriori poli e zeri, non altera il margine di fase (prossimo ai 90°) e la sovraelongazione (quasi nulla), come si può notare nelle Figure 15 e 16.

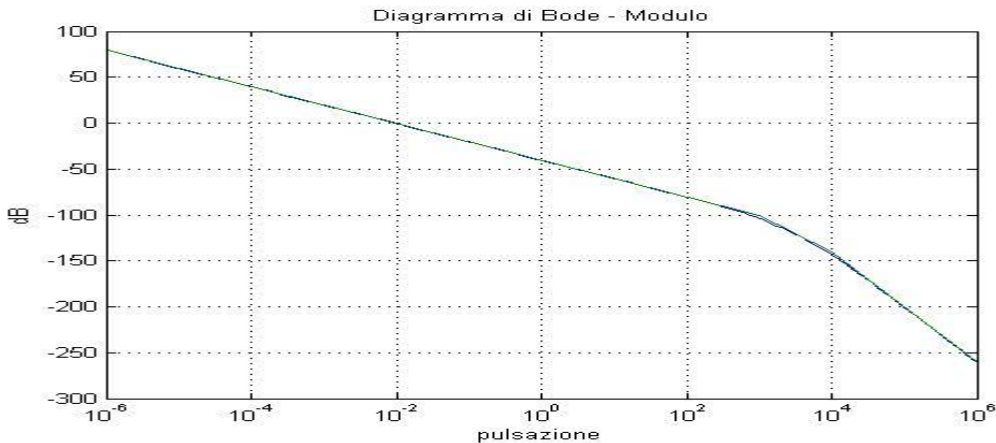


Figura 15 : Diagramma di Bode del modulo di $\tilde{G}(s) = C_d(s)G(s)$

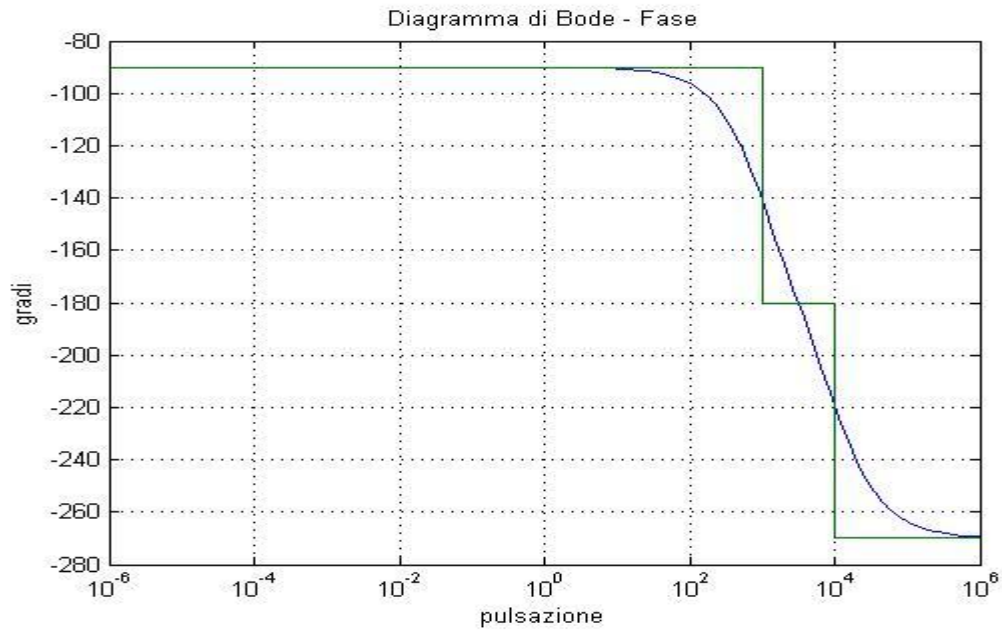


Figura 16 : Diagramma di Bode della fase di $\tilde{G}(s) = C_d(s)G(s)$

5.2 Modello Simulink ed analisi delle simulazioni

Come nel caso precedente (Paragrafo 4), la mongolfiera può essere rappresentata tramite un modello Simulink, ottenuto partendo dalle equazioni del sistema linearizzato (Figura 17).

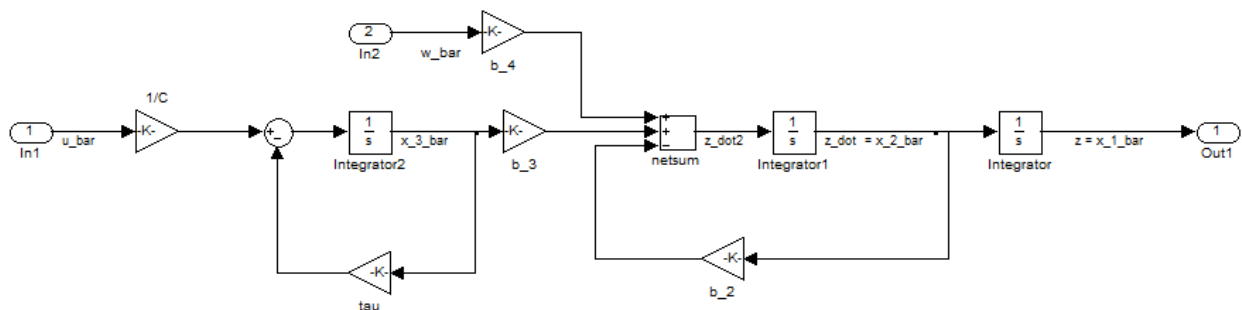


Figura 17 : Modello Simulink della mongolfiera

Il modello è simile a quello di Figura 6, tranne che per l'aggiunta di un ulteriore ingresso, ovvero il vento w , rappresentato con la variabile w_bar e legato al sistema da un coefficiente $b_4 = b_4$; inoltre all'interno degli integratori sono state poste le stesse condizioni iniziali, cioè quelle contenute nel vettore \bar{x}_0 .

Lo schema a blocchi di Figura 14 può, a sua volta, essere rappresentato mediante il seguente modello Simulink

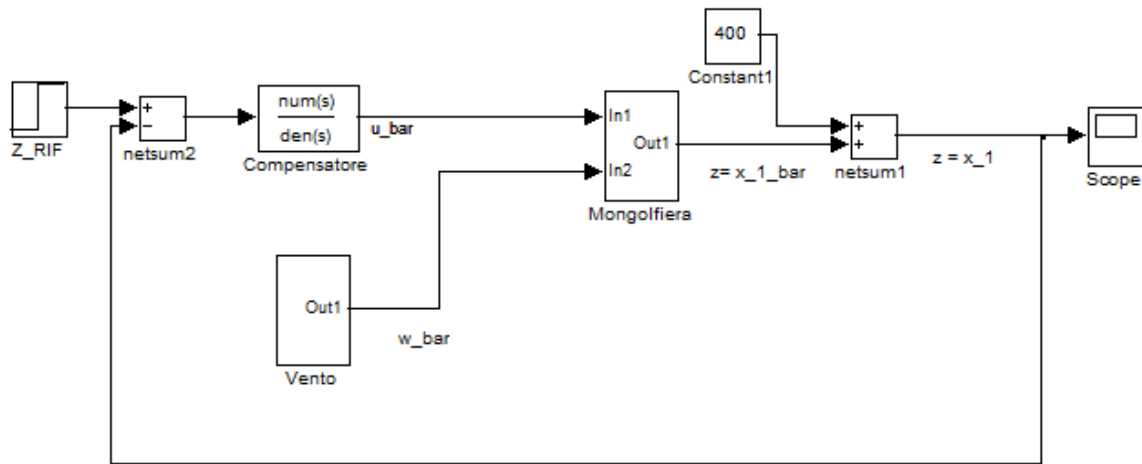


Figura 18: Modello Simulink del sistema

Il modello è simile a quello descritto in Figura 7, ad eccezione del blocco Compensatore (al suo interno è inserita la funzione di trasferimento $C_d(s)$) e del blocco Mongolfiera (che contiene il modello di Figura 17); è stato inoltre aggiunto un blocco denominato “Vento”, che realizza il disturbo mediante l’utilizzo di un blocco Band-Limited White Noise, ovvero una sorgente di rumore bianco, opportunamente filtrato con un filtro passa-basso; nella costruzione di quest’ultimo possiamo agire su due parametri, ovvero la posizione del polo in bassa frequenza (in questo caso in $s = -10^{-1}$), per cambiare la velocità di variazione del vento, cioè per renderlo più o meno “dolce”, ed il guadagno in bassa frequenza (in questo caso uguale ad 10), per modificare l’ampiezza, l’entità del vento (Figura 19).



Figura 19: Modello Simulink del blocco Vento

Effettuando una simulazione, otteniamo la seguente immagine dell’oscilloscopio

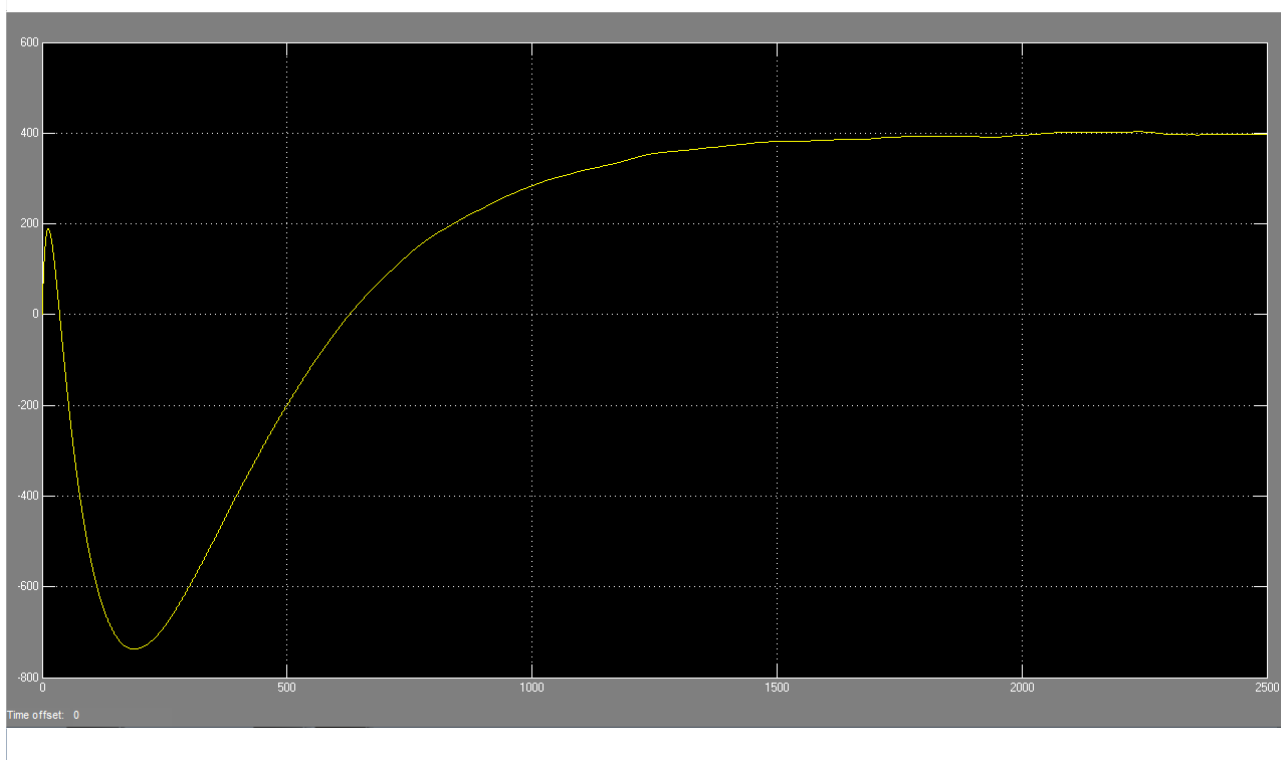


Figura 20: Analisi del moto della mongolfiera al variare del tempo (volo di circa 42 minuti)

Anche in questo caso sono presenti l'overshoot iniziale (superiore di circa 80 metri a quello riscontrato nell'analisi del sistema in assenza di disturbi) ed il successivo undershoot (inferiore); le differenze, in termini di picchi, sono dovute alla diversa natura dei compensatori $C(s)$ e $C_d(s)$ (quest'ultimo ha infatti un guadagno maggiore); tuttavia, le cause che li determinano sono le stesse individuate precedentemente e quindi il procedimento da eseguire per poter giungere alla specifica prefissata è identico.

Analisi dell'overshoot

La sovraelongazione è dovuta, come nel caso precedente, al fatto che in ingresso è posto un gradino; è quindi necessario sostituirlo con un trapezio, avente però una pendenza minore all'inizio (in quanto l'overshoot da attenuare è maggiore); perciò utilizzeremo due gradini di ampiezza 10 e distanziati di 40 secondi. Il modello Simulink risulta perciò modificato.

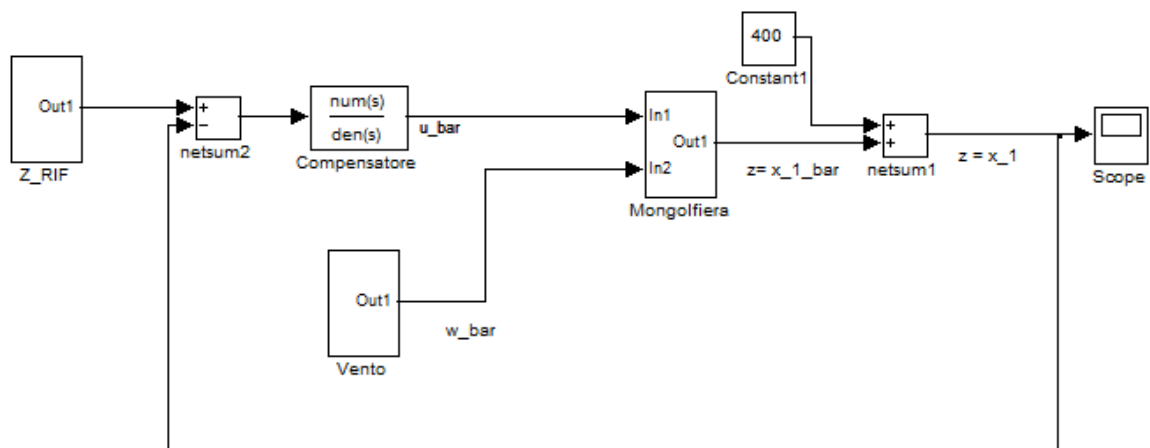


Figura 21: Modello Simulink del sistema con ingresso l'onda trapezoidale

Effettuando la simulazione, si può notare come l'overshoot sparisca.

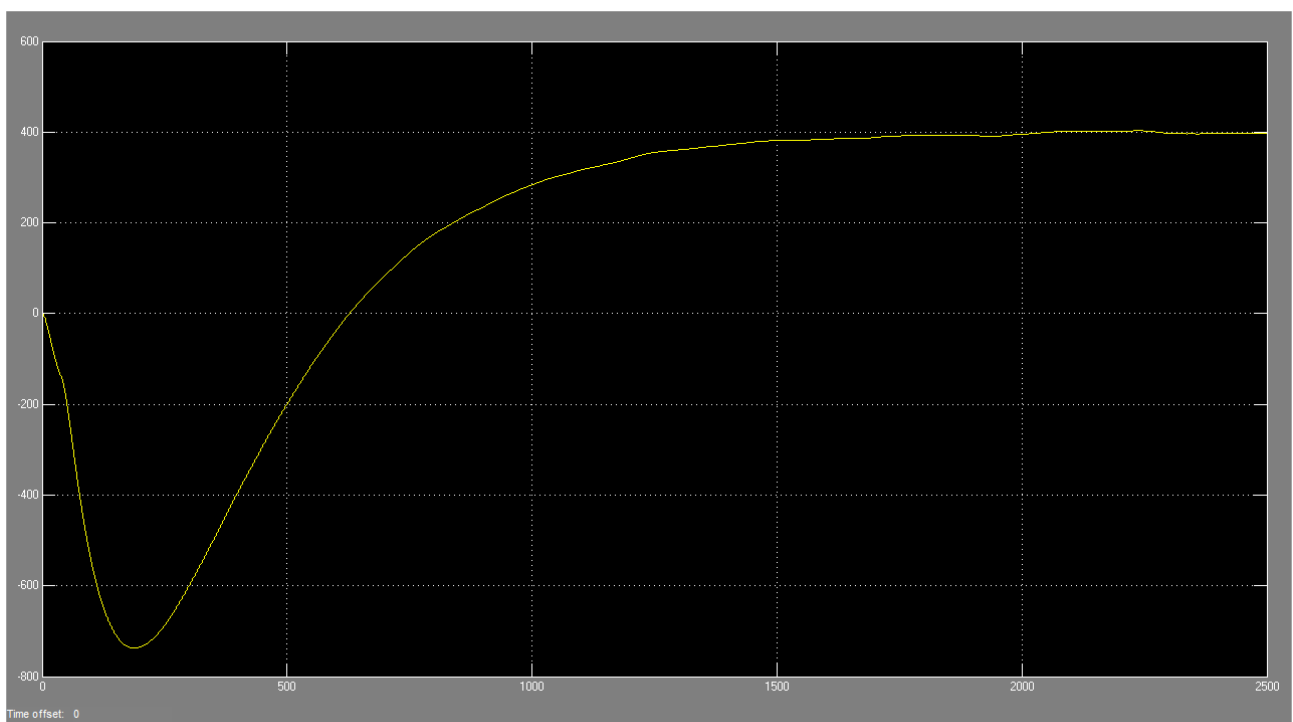


Figura 22 : Analisi del moto della mongolfiera al variare del tempo (volo di circa 42 minuti)

Analisi dell'undershoot

La presenza della sottoelongazione è dovuta alla stessa ragione illustrata nell'analisi del sistema in assenza di disturbi, cioè al fatto di non aver considerato la reazione vincolare nel bilancio delle forze complessive agenti sul sistema, con il conseguente ricalcolo della temperatura iniziale

dell'aria contenuta all'interno del pallone, adesso fissata al valore $x_3(0) = 377.76 \text{ K}$ per il sistema non lineare e $\bar{x}_3(0) = 0 \text{ K}$ per il sistema lineare.

Inserendo la nuova condizione iniziale nell'integratore relativo a \bar{x}_3 e facendo partire la simulazione, si ottiene il seguente risultato

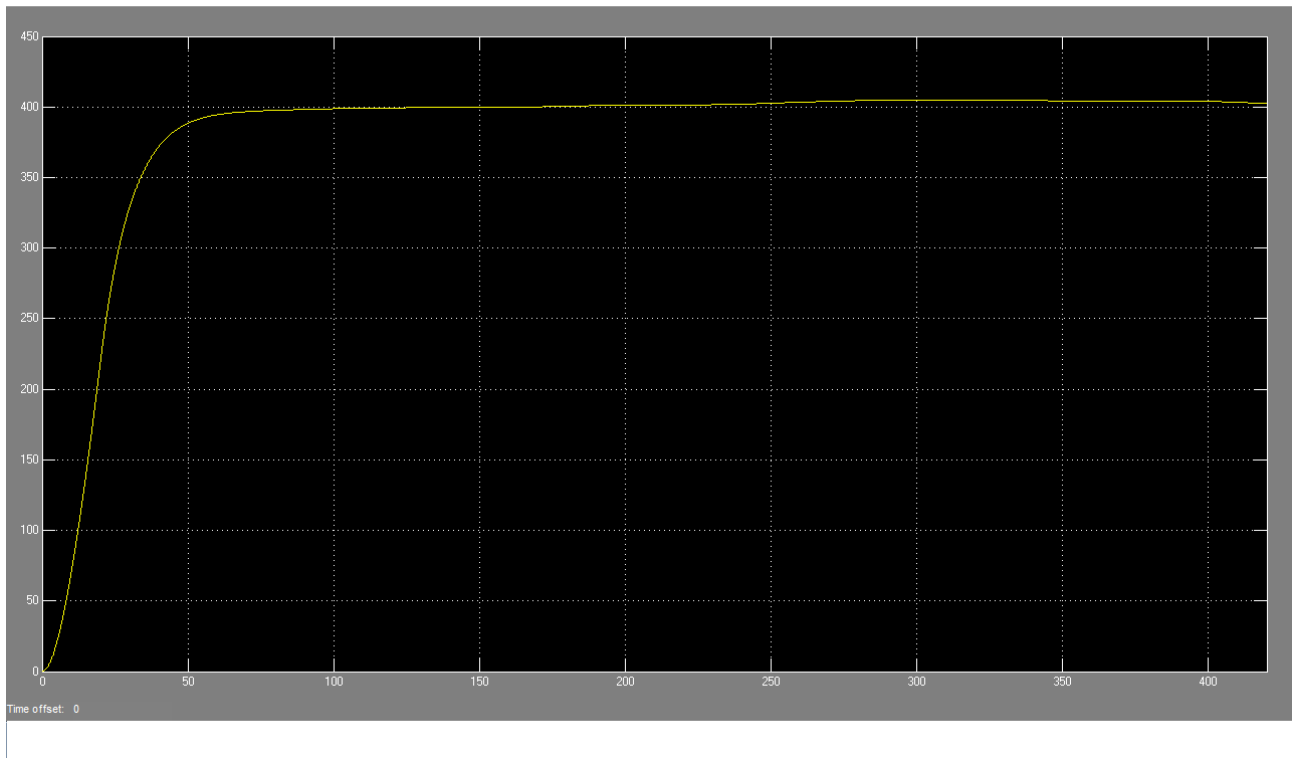


Figura 23 : Analisi del moto della mongolfiera al variare del tempo (volo di 7 minuti)

È possibile notare come la specifica fissata all'inizio sia stata raggiunta; inoltre è osservabile, rispetto all'analisi effettuata senza considerare i disturbi esterni, la differenza dovuta alla presenza del vento: vi sono infatti, attorno a quota 400 metri, delle oscillazioni di una certa ampiezza (di circa 4 metri); ovviamente tutto dipende dall'entità del vento. Ricordiamo come la scelta effettuata nei confronti di K'_B valga solo per questa simulazione, in quanto il vento ha un comportamento aleatorio (può aumentare o diminuire) e come quindi, in generale, la struttura del compensatore $C(s)$ sia valida, a meno di una costante, per entrambi i casi presi in considerazione (con o senza disturbi esterni).

La simulazione riguarda solo i primi 7 minuti del volo per far vedere in modo netto la salita della mongolfiera.

6. Analisi del sistema non lineare

Memori di quanto visualizzato considerando il sistema lineare, concentriamo adesso la nostra attenzione su quello non lineare, il quale si fonda direttamente sulle due equazioni del modello della mongolfiera, ovvero quelle che abbiamo denominato A) e B) nel Paragrafo 3; inoltre effettueremo

l'analisi del sistema del solo caso in cui vi sia del vento ad ostacolare (o favorire) il moto della mongolfiera, in quanto più aderente alla realtà.

Il modello Simulink corrispondente alle equazioni del sistema non lineare è il seguente

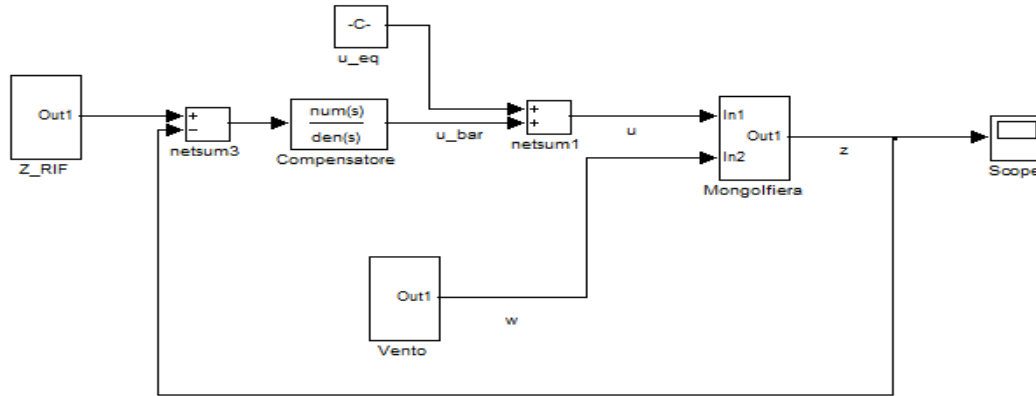


Figura 24: Modello Simulink del sistema

Il modello presenta all'ingresso del nodo sommatore netsum3 il blocco Z_RIF, che al suo interno contiene l'onda trapezoidale identica a quella realizzata per l'analisi del sistema lineare in presenza di disturbi (Paragrafo 5), per evitare il ripetersi di un overshoot; il blocco Compensatore presenta la funzione di trasferimento $C_d(s)$ già discussa, il blocco Vento è immutato rispetto a quello rappresentato in Figura 19 e la presenza del blocco u_{eq} , che contiene il valore $u_{eq} = k_T \frac{T_{ext}M}{V\rho_{ext}-M}$, è necessaria in quanto il blocco Mongolfiera pretende di avere al suo ingresso la variabile u ; le maggiori modifiche riguardano proprio quest'ultimo blocco (Figura 25).

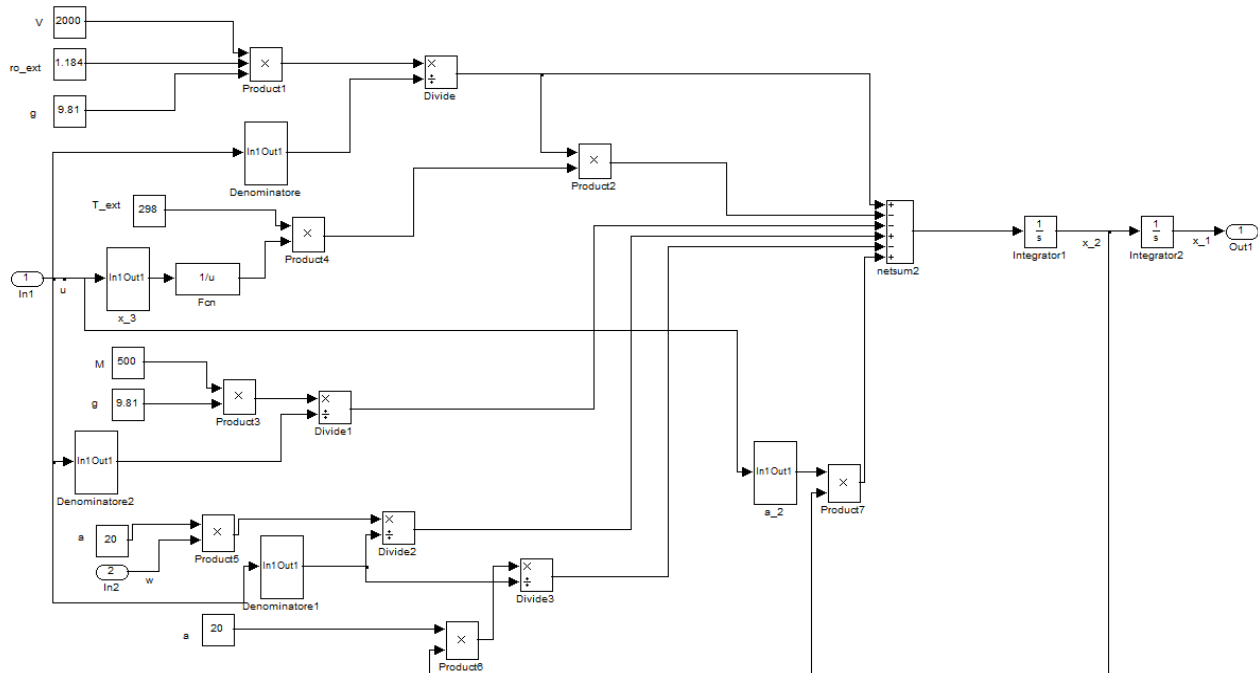


Figura 25: Modello Simulink della mongolfiera

dove $\rho_{ext} = \rho_{ext}$, $T_{ext} = T_{ext}$, $x_1 = x_1$, $x_2 = x_2$, $x_3 = x_3$, $a_2 = a_2$ ed il blocco Denominatore realizza la funzione $\left\{M + \rho_{ext} \frac{T_{ext}}{x_3} V\right\}$ (stessa cosa per i blocchi Denominatore1 e Denominatore2); in particolare, gli ultimi tre blocchi che abbiamo citato sono realizzati come segue

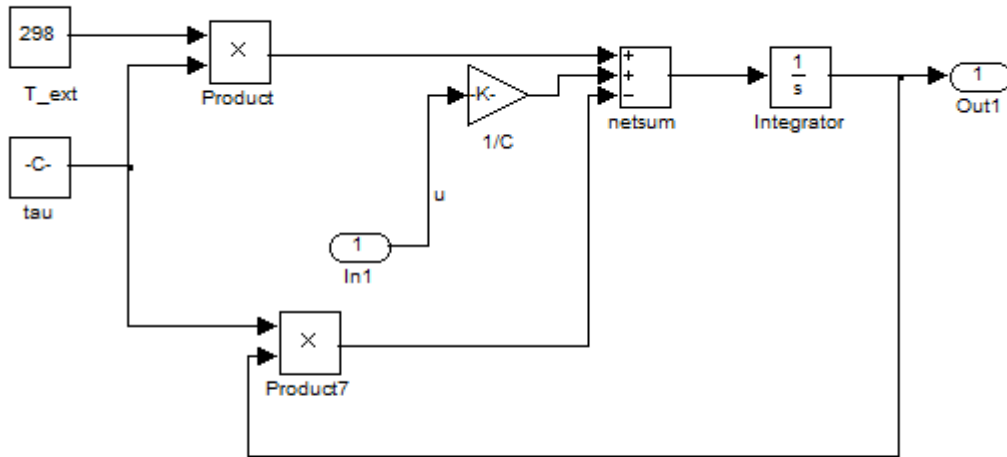


Figura 26: Modello Simulink del blocco x_3

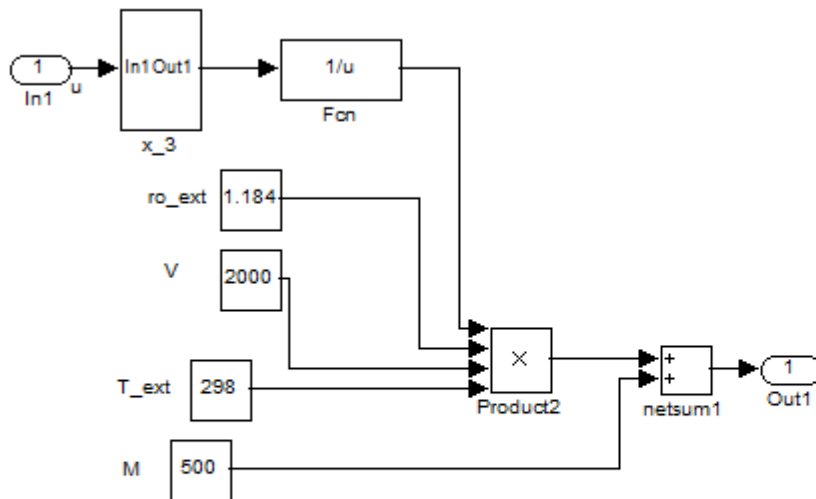


Figura 27: Modello Simulink del blocco Denominatore

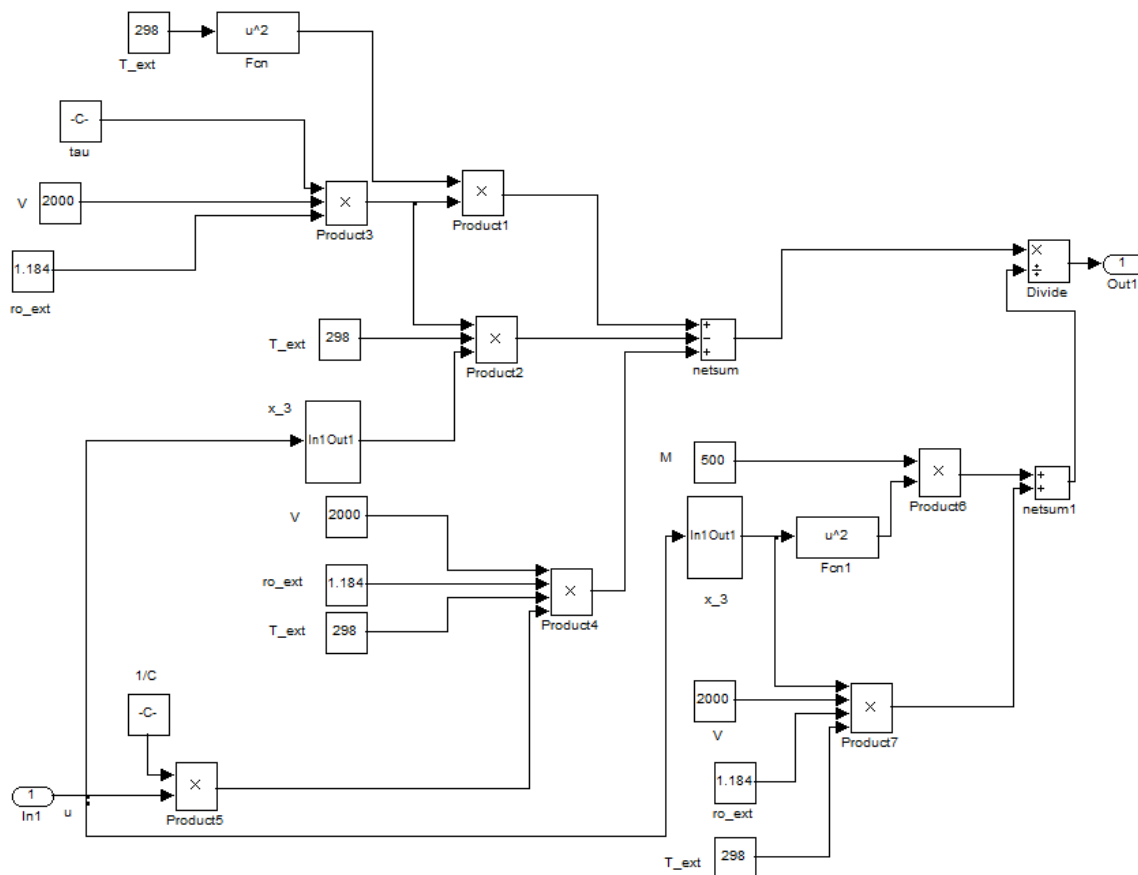


Figura 28 : Modello Simulink del blocco a_2

Nei blocchi integratori sono state impostate le seguenti condizioni iniziali, le stesse indicate nel Paragrafo 3.3, ad eccezione di $x_3(0)$:

$$x_1(0) = 0$$

$$x_2(0) = 0$$

$$x_3(0) = 377.76 \text{ K (per quanto spiegato nell'analisi dell'undershoot effettuata nel Paragrafo 4.2)}$$

Effettuando una simulazione, si ottiene il seguente grafico del moto

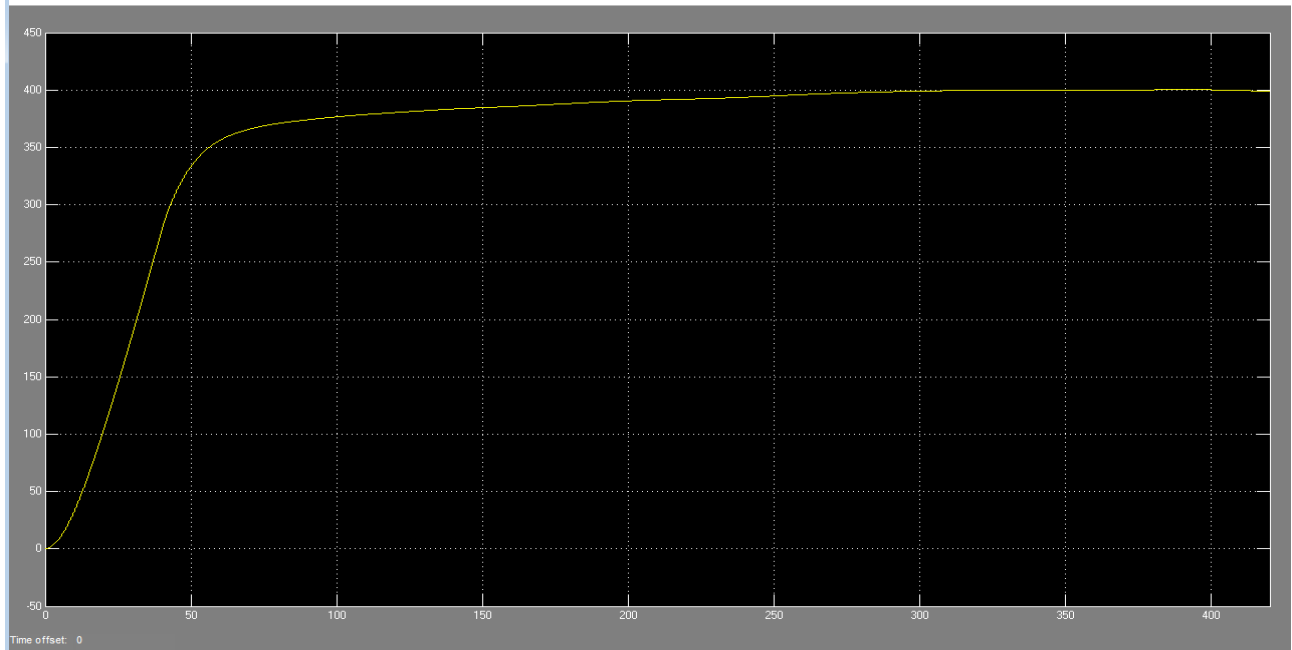


Figura 29 : Analisi del moto della mongolfiera al variare del tempo (volo di 7 minuti)

È possibile notare come la mongolfiera, pur stabilizzandosi attorno a quota 400 metri (le oscillazioni sono dovute al vento), abbia un tempo di salita superiore ai 2 minuti; per rendere più veloce il sistema dobbiamo perciò agire sul compensatore, ovvero dobbiamo aumentarne il guadagno, operazione analoga a quella effettuata nel modificare $C(s)$ in $C_d(s)$, senza ripercussioni sul margine di fase e quindi sulla sovraelongazione.

Inserendo nel blocco Compensatore la funzione di trasferimento $C_d(s)$ avente guadagno non più $K'_B = 3200$ ma $K''_B = 5 \cdot 10^5$ ed effettuando una simulazione, otteniamo il seguente risultato

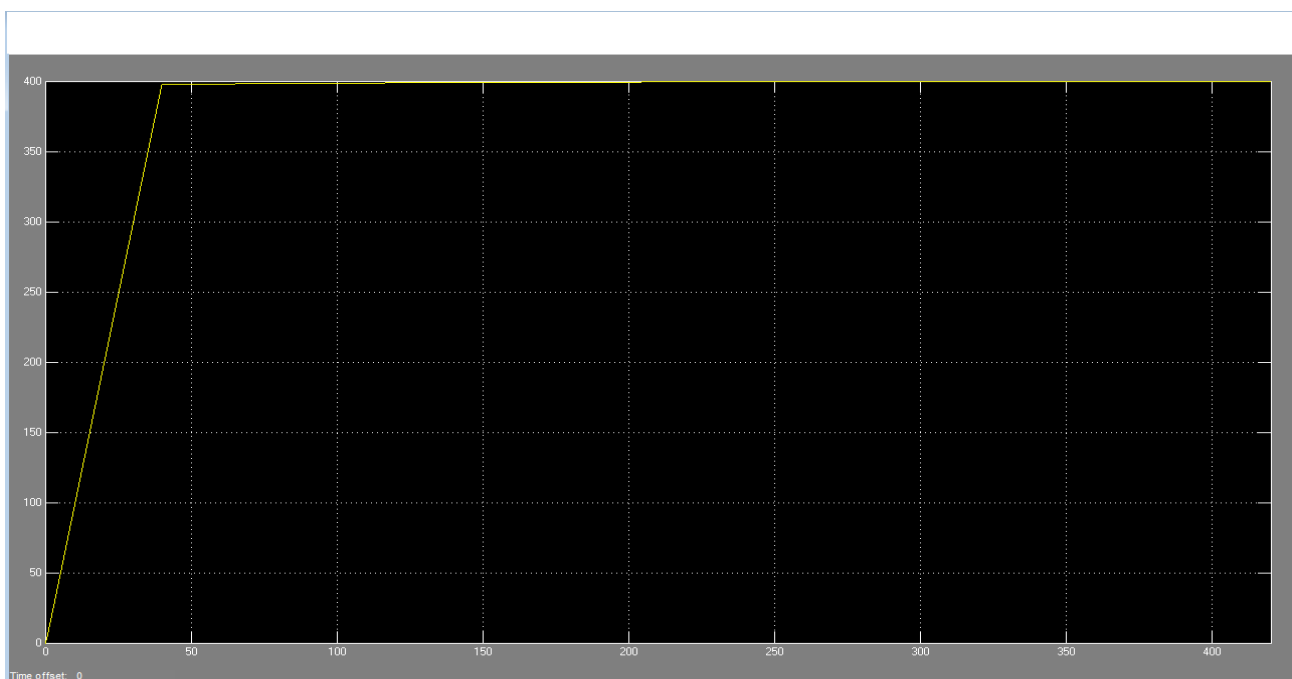


Figura 30 : Analisi del moto della mongolfiera al variare del tempo (volo di 7 minuti)

Finalmente lo scopo prefissatoci è stato raggiunto: la mongolfiera raggiunge l'altitudine di 400 m in circa due minuti, con una sovraelongazione quasi nulla; inoltre possiamo osservare come, rispetto al caso lineare, la mongolfiera salga in modo più ripido fino a pochi metri dalla quota z_{RIF} (questo a causa dell'elevato, e poco "ragionevole", guadagno scelto), per poi rallentare ed impiegare molto più tempo per compiere quest'ultimo tratto, cioè per completare l'ascesa. La scelta del valore di K''_B è puramente teorica e strettamente legata a questa simulazione; nella realtà infatti un guadagno così elevato porterebbe alla saturazione del compensatore e per evitare ciò dovremmo quindi prendere una K''_B più piccola ed accontentarci di tempi di salita superiori, ma non troppo, ai 2 minuti prefissati.

La simulazione riguarda sempre i primi 7 minuti di volo per consentire, come già detto precedentemente, di poter visualizzare in maniera ottimale l'evoluzione del sistema nella sua fase iniziale, fino a che il valore a regime viene raggiunto.

Bibliografia

- Mauro Bisiacco, Simonetta Braghetto *Teoria dei sistemi dinamici* collana Progetto Leonardo Società Editrice Esculapio Bologna 2011
- Mauro Bisiacco, Maria Elena Valcher *Controlli automatici* Libreria Progetto Padova 2008
- Antonio Bicchi *Tema d'esame di Fondamenti di Automatica (Regolazione e Controllo dei Sistemi Meccanici)* 08-06-2012 Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica Università di Pisa, nel sito www.centropiaggio.unipi.it/sites/default/files/course/material/20120608.pdf
- Mauro Darida *Aerodinamica digitale* ITIS “Arturo Malignani” Udine 2009-2010, nel sito www.premioinnovascuola.it/wp-content/uploads/piscuola/PDTF05000A_82/PDTF05000A_82.pdf