Università degli Studi di Padova
Dipartimento di Matematica "Tullio Levi-Civita"
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Paper folding: teoria matematica e insegnamento della geometria nella scuola secondaria

Relatore:
Prof. Luigi Tomasi

Correlatore:
Prof. Francesco Ciraulo

Laureanda:
Emma Bazza
Matricola 1242453

21 aprile 2022

Indice

Introduzione

Il *paper-folding*, noto anche con il termine nipponico di *origami*, è una antica pratica orientale che, nel corso dell'ultimo secolo, ha subito una notevole diffusione anche in Occidente. Mentre in Oriente il *paper-folding* svolgeva una funzione celebrativa, decorativa o ludica, in Occidente hanno guadagnato particolare rilevanza gli aspetti pedagogici e matematici legati a tale pratica.

All'interno del mio percorso di Laurea Magistrale in Matematica, gli aspetti matematici coinvolti nella piegatura della carta sono stati brevemente affrontati al termine del corso di Matematiche Complementari, tenuto dal Professor Ciraulo nell'anno accademico 2019/2020. Il Professore ha impiegato le ultime ore di lezione per affrontare una breve presentazione delle potenzialità costruttive del *paper-folding*, al fine di illustrarne le differenze rispetto alla riga e il compasso, ovvero gli strumenti con i quali ci eravamo confrontati per tutto il semestre. Tali lezioni hanno ispirato la realizzazione del presente progetto di Tesi.

L'elaborato si propone di illustrare le potenzialità del *paper-folding*, sia dal punto di vista matematico che didattico, attraverso un'approfondita analisi della teoria matematica alla base del *paper-folding*, una riflessione riguardante i vantaggi dati dall'utilizzo di tale strumento nell'insegnamento della matematica e, infine, la presentazione di un progetto da me ideato, volto a sperimentare l'utilizzo della piegatura della carta nelle Scuole Secondarie di II grado.

Attraverso il primo capitolo viene presentata la teoria assiomatica alla base del *paper-folding*. Dopo un'iniziale panoramica storica riguardante la diffusione della piegatura della cara in Occidente e il suo conseguente impiego in ambito matematico, vengono introdotti i sette assiomi della piegatura della carta, detti *assiomi di Huzita-Hatori*. Il capitolo prosegue affrontando lo studio della completezza e dell'indipendenza di tali assiomi, seguendo l'impostazione data dai matematici Roger C. Alperin e Robert J. Lang [2] [3] nel corso degli ultimi vent'anni.

Il secondo capitolo porta alla scoperta delle potenzialità costruttive del *paper-folding*. Dopo un'iniziale panoramica sulla geometria euclidea e le costruzioni effettuabili per mezzo di riga e compasso, si presentano gli assiomi del *paper-folding* che permettono di effettuare le medesime costruzioni. Infine, vengono approfondite le potenzialità costruttive della piegatura della carta che permettono di indicare tale strumento come "più potente" rispetto alla riga e compasso in termini di potenzialità costruttive; in particolare, viene dimostrato come la piegatura della carta permetta di risolvere i problemi classici della duplicazione del cubo, della trisezione dell'angolo e della costruzione dell'ennagono e dell'ettagono regolari.

Il terzo capitolo è dedicato alla presentazione delle principali teorie dell'intelligenza e sull'apprendimento che sono state sviluppate dagli psicologi nel corso dell'ultimo secolo, al fine di motivare l'impiego del *paper-folding* nell'insegnamento della matematica. Si prende, infatti, visione della letteratura esistente per conoscere le indicazioni fornite da psicologi, studiosi di didattica disciplinare e pedagogisti su come strutturare l'insegnamento affinché avvenga un buon apprendimento da parte degli studenti e si verifica se il *paper-folding* risponde a tali indicazioni. Il capitolo prosegue con la presentazione di alcuni progetti esistenti che prevedono l'utilizzo della piegatura della carta nell'insegnamento della matematica, sia per la Scuola Primaria, sia per la Scuola Secondaria di I e II grado. Si presterà particolare attenzione ai contenuti e alle modalità di esecuzione dei progetti esistenti per la Scuola Secondaria, per verificare se le potenzialità del *paper-folding* risultano sfruttate appieno.

Il quarto capitolo è dedicato alla presentazione del progetto di sperimentazione didattica da me ideato per favorire l'impiego del *paper-folding* nella didattica della geometria all'inizio della Scuola Secondaria di II grado. Tale progetto nasce per verificare se la piegatura della carta può divenire uno strumento di uso quotidiano nella didattica della geometria, considerate le sue caratteristiche, presentate nei capitoli precedenti. Le due domande di ricerca alla base del progetto sono: la piegatura della carta può aiutare gli studenti a raggiungere un più profondo livello di comprensione della natura assiomatico-deduttiva della geometria euclidea? Può essere uno strumento adottato da ciascuno studente per orientarsi all'interno della disciplina e quindi affrontare i quesiti che gli vengono sottoposti? Le sette attività nelle quali è strutturato tale progetto permettono di coprire le seguenti tre fasi: introduzione al software GeoGebra e alla piegatura della carta (attività 1 e 2); scoperta e comprensione degli elementi su cui si fonda il metodo deduttivo (attività da 3 a 6); comprensione e produzione di dimostrazioni (attività 7).

Il quinto capitolo è dedicato alla descrizione della sperimentazione del progetto, presentato nel precedente capitolo, in una classe prima del Liceo Scientifico "E. Fermi" di Padova. Inizialmente, vengono esposte le modalità attraverso le quali sono state attuate le attività e vengono presentati i questionari e le prove cui si è ricorsi per verificare l'esito della sperimentazione. Attraverso l'analisi dei dati raccolti e le considerazioni che sono nate dalla messa in campo del progetto, viene poi effettuato un bilancio della sperimentazione, presentando le conclusioni cui si può giungere, oltre ad alcuni spunti per la realizzazione di ulteriori progetti in futuro.

L'elaborato si conclude con due appendici, che raccolgono rispettivamente i materiali utilizzati nel corso della sperimentazione e i testi completi dei questionari cui sono stati sottoposti gli studenti, con le rispettive tabelle di dati raccolti. Segue, infine, la Bibliografia recante i libri e gli articoli cui ho fatto riferimento nella stesura del presente elaborato.

Capitolo 1

Teoria matematica del *paper-folding*

Iniziamo lo studio della teoria assiomatica del *paper-folding* attraverso una breve panoramica storica, per apprendere come è avvenuta la diffusione della piegatura della carta in Occidente e come si è giunti ad interessarsi delle proprietà matematiche coinvolte in tale attività. Segue la presentazione dei sette assiomi di Huzita-Hatori e lo studio della loro completezza e indipendenza.

1.1 Assiomatica di Huzita-Hatori

1.1.1 Introduzione storica

L'origami è una pratica antica nata in Oriente, presumibilmente nel II secolo d.C., che consiste nella piegatura della carta per ideare figure bi-dimensionali o tri-dimensionali a scopo ornamentale, celebrativo o religioso. Tale arte prende il nome dal giapponese, *oru*, ovvero "piegare" e *kami*, ovvero "carta". La diffusione della piegatura della carta in Occidente ha avuto inizio solamente a partire dai primi anni del XIX secolo; realizzati in principio a scopo ricreativo, gli origami hanno acquisito nel corso degli ultimi secoli sempre maggior spazio in ambito pedagogico e matematico.

Friedrich Fröbel (1782 – 1852), illustre pedagogista tedesco, fu il primo filosofo occidentale a riconoscere le potenzialità della piegatura della carta per la crescita e l'educazione del bambino. Secondo la teoria pedagogica di Fröbel i prodotti dell'attività umana sono frutto di trasformazioni continue della materia, le quali portano ad uno sviluppo sia psichico sia manuale dell'individuo. Per tale motivo Fröbel riteneva si dovesse giungere a convertire l'attività dei giochi infantili, ritenuta infeconda, in attività creativa; l'origami si inseriva naturalmente in tale prospettiva pedagogica.

Dai materiali creati da Fröbel prese ispirazione l'insegnante di matematica indiano T.

Sundara Row (1853 - 1923?)[1] per realizzare nel 1893 il libro *Geometric Exercises in Paper Folding* [28]. Il testo, scritto in lingua inglese, lega piegatura della carta e matematica, in quanto venne ideato per guidare gli studenti nella realizzazione di molteplici figure geometriche senza ricorrere alla riga e al compasso; Row mostrò infatti come realizzare le medesime costruzioni effettuabili con la riga e il compasso ricorrendo a cinque operazioni di piegatura della carta. L'opera, anche se ideata con un chiaro intento didattico, porta per la prima volta l'attenzione sugli aspetti matematici coinvolti nella piegatura della carta; tra tutti spicca l'aver individuato una corrispondenza tra la realizzazione di una piega per un punto A che porta alla sovrapposizione di un punto B con una retta r, e la costruzione della tangente per il punto A alla parabola di fuoco B e direttrice r.

Nel 1895, a soli due anni dalla pubblicazione del libro di Row, Felix Klein (1849 - 1925) citò il lavoro del matematico indiano nel suo libro *Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie*[2]. Ciò permise al testo di raggiungere una significativa diffusione in Europa e contribuì all'avvio di due distinti ambiti di ricerca che coinvolgono la matematica e la piegatura della carta: lo studio della geometria costruibile attraverso il *paper-folding* e la ricerca sui possibili impieghi della piegatura della carta nella didattica della matematica.

Tra i matematici che si occuparono di *paper-folding* agli inizi del XX secolo spicca Margherita Piazzolla Beloch (1879 – 1976), docente di geometria e matematiche complementari presso l'Università di Ferrara. Negli anni Trenta Beloch individuò una sesta operazione di piegatura, distinta da quelle precedentemente proposte da Row, la quale prevede di ideare una piega che porti contemporaneamente due punti A e B a sovrapporsi rispettivamente con due rette r e s. In questo modo Beloch dimostrò che la piegatura della carta permette di risolvere equazioni polinomiali di terzo grado, provando la superiorità degli origami, in termini di potenzialità costruttive, rispetto alla riga e al compasso tradizionalmente impiegati per effettuare le costruzioni della geometria euclidea.

Lungo tutto il XX secolo molti altri autori diedero vari contributi alla teoria della piegatura della carta; tuttavia, è necessario attendere la seconda metà degli anni Ottanta per assistere ai primi tentativi di realizzare un'assiomatizzazione che regoli tale teoria. Nel 1989, grazie alla realizzazione del *First International Meeting of Origami Science and Technology* a Ferrara, il lavoro di tre autori gettò le basi per la creazione dell'odierna teoria assiomatica del *paper-folding*:

1. Humiaki Huzita (1924 - 2005), un fisico e matematico italo-giapponese presentò l'ar-

[1] *A History of Folding in Mathematics: Mathematizing the Margins* di M. Friedman [14] non riporta la data di morte di T. Sundara Row; tuttavia il suo nome è presente in *The Indian Biographical Dictionary* [27], una raccolta di brevi biografie dei funzionari indiani in vita nel 1915: ciò permette di collocare la sua data di morte successivamente al 1915. Invece, secondo il sito web `https://manasataramgini.wordpress.com` [24], l'anno di morte di Row è successivo al 1923.

[2] vers. italiana: *Conferenze sopra alcune questioni di geometria elementare*, Torino, 1896.

ticolo *Axiomatic Development of Origami Geometry* [18]; egli elencò sei operazioni effettuabili attraverso la piegatura della carta, che a suo avviso rappresentavano le costruzioni elementari realizzabili per mezzo del *paper-folding*, ovvero le cinque operazioni utilizzate da Row e la piega proposta da Beloch. Secondo Huzita tale lista poteva essere estesa in modo illimitato; negli anni successivi venne invece provato che, aggiungendo una sola ulteriore costruzione, si ottiene un sistema completo. Huzita, inoltre, non effettuò alcuna considerazione in merito all'indipendenza delle operazioni proposte.

2. Benedetto Scimemi (1938 -), Professore Ordinario presso l'Università degli Studi di Padova, affiancò Huzita nella realizzazione dell'articolo *The Algebra of Paper-Folding (Origami)* [19], nel quale furono presentate cinque operazioni di piegatura senza discuterne l'indipendenza (viene omessa la quarta realizzata da Row). Neppure in tale pubblicazione venne utilizzato il termine "assiomi", tuttavia si deve a tale articolo l'accostamento del termine *paper-folding* con il termine nipponico *origami.*

3. Jacques Justin, un matematico francese, nell'articolo *Résolution par le pliage de l'équation du troisième degré et applications géométrique*[3] [21] presentò una lista di sette operazioni effettuabili attraverso la piegatura della carta, tra le quali configurano le medesime proposte da Huzita, unite ad una piega inedita. Justin fu il primo ricercatore a realizzare una simbologia matematica per esprimere le operazioni di piegatura, oltre ad interrogarsi sull'indipendenza delle costruzioni da lui proposte come elementari. Fu anche il primo ad affermare esplicitamente che alcune costruzioni presentano dei casi impossibili da realizzare. Tuttavia, il suo lavoro venne a lungo ignorato, probabilmente a causa della lingua in cui fu pubblicato; per tale ragione, nel 2001 il matematico giapponese Koshiro Hatori "riscoprì" la settima costruzione, già individuata dal matematico francese.

Nonostante nessuno tra tali autori dichiari di aver prodotto un'assiomatica, le costruzioni da loro individuate iniziano ad essere indicate come gli "assiomi" della teoria del *paper-folding.* Nel presente elaborato faremo loro riferimento attraverso il nome di *assiomi di Huzita-Hatori (H-H)*, anche se alcuni autori fanno loro riferimento con il nome di *assiomi di Huzita-Justin* o *Huzita-Justin-Hatori.* Lo studio che ci apprestiamo a svolgere permetterà di stabilire se sia corretto attribuire a tutti e soli tali enunciati il ruolo di "assiomi". Attraverso questo primo capitolo conosceremo, infatti, tali operazioni e verificheremo la loro completezza e indipendenza, ripercorrendo i passi eseguiti dai matematici Roger C. Alperin e Robert J. Lang [2] [3], cui dobbiamo molti dei risultati conseguiti nello studio dell'assiomatica del *paper-folding.*

[3]L'articolo, pubblicato per la prima volta nel 1986 sulla rivista *Le Pli*, venne riproposto da Justin in occasione del *First International Meeting of Origami Science and Technology.*

1.1.2 Assiomi

Il *paper-folding* moderno prevede l'utilizzo di un foglio di carta quadrato di lato variabile che viene modellato sovrapponendo punti o linee, realizzando quindi una piega che modifica la struttura iniziale e porta alla realizzazione di particolari figure bi-dimensionali o tri-dimensionali.

Il modello matematico, tuttavia, preferisce considerare il foglio ampio come tutto il piano euclideo, così da non doversi porre il problema dello spazio limitato. La teoria del *paper-folding* presenta i medesimi enti primitivi della geometria euclidea: punto, retta e piano. Viene inoltre mantenuta la notazione per cui si utilizzano lettere maiuscole, lettere minuscole e lettere greche per indicare rispettivamente punti, rette e piani. Poiché la teoria del *paper-folding* rappresenta una geometria di tipo costruttivo, si rende necessario stabilire cosa siano un punto e una retta costruibile (o piega costruibile).

Definizione 1.1. *Una* ***retta costruibile*** *è l'asse di una riflessione $\mathcal{F}$ sul piano, tale che esistono due elementi costruibili e_1 ed e_2 sovrapponibili tramite $\mathcal{F}$.*

Definizione 1.2. *Un* ***punto costruibile*** *è il punto di intersezione di due rette costruibili.*

Gli assiomi permettono di stabilire le condizioni in cui è possibile realizzare una riflessione che porta due o più elementi a sovrapporsi, e quindi di costruire una retta. La costruzione di una retta comporta poi la costruzione di tutti i punti che essa individua attraverso la sua intersezione con le rette costruite in precedenza.

Prima di proseguire con la presentazione dell'assiomatica, è però importante osservare come gli assiomi H-H presentino spesso delle piccole differenze nella formalizzazione, a seconda dell'autore. In questa trattazione si ricorrerà ad una formulazione più geometrica, poiché si predilige l'aspetto geometrico-costruttivo della teoria del *paper-folding*. Tale teoria si pone nel piano euclideo, di conseguenza rimangono valide le relazioni di appartenenza e le definizioni degli enti geometrici, come ad esempio le rette parallele o perpendicolari. Verranno inoltre effettuate le seguenti semplificazioni:

- la riflessione di un punto su se stesso verrà indicata attraverso il passaggio della retta costruibile per il punto dato;

- la riflessione di una retta su se stessa comporta la costruzione di una retta ad essa perpendicolare.

Tali assunzioni permettono di alleggerire l'enunciato degli assiomi, oltre ad escludere alcuni casi che non produrrebbero nuovi elementi costruibili. Ad esempio, il secondo punto permette di escludere il caso in cui una retta sia riflessa su se stessa in quanto asse della riflessione.

Assioma 1.1 (O1)**.** *Dati due punti A e B distinti e costruibili, la retta che passa per entrambi è costruibile.*

Il primo assioma, rappresentato in figura 1.1(a) a pagina 16, permette di costruire l'unica retta passante per due punti distinti. Si tratta di uno degli assiomi fondamentali del *paper-folding*, assieme al seguente.

Assioma 1.2 (O2)**.** *Dati due punti A e B distinti e costruibili, la retta che riflette A su B è costruibile.*

L'assioma, illustrato in figura 1.1(b) pagina 16, permette di costruire l'asse del segmento avente per estremi i due punti dati. Anche questo è un assioma di esistenza e unicità, come il precedente.

Assioma 1.3 (O3)**.** *Date due rette r e s distinte e costruibili, una retta che riflette r su s è costruibile.*

Tale assioma, produce due risultati distinti a seconda della posizione reciproca delle rette di partenza. Nel caso in cui $r \parallel s$, si ottiene la retta parallela ed equidistante da entrambe; se invece $r \nparallel s$, si costruiscono le bisettrici degli angoli formati dalle rette di partenza. In figura 1.1(c), pagina 16, è possibile osservare la costruzione di una delle bisettrici in questione.

Assioma 1.4 (O4)**.** *Dati un punto costruibile A e una retta costruibile r, la retta passante per A e perpendicolare ad r è costruibile.*

Per questo assioma, rappresentato in figura 1.1(d) pagina 16, risulta indifferente se il punto A appartiene o meno alla retta r: in entrambi i casi la costruzione della retta perpendicolare alla retta data risulta unica.

Assioma 1.5 (O5)**.** *Data una retta costruibile r e due punti costruibili A e B, se esiste una retta passante per A e che riflette B su r, allora essa è costruibile.*

Tale assioma porta a due situazioni distinte, a seconda della posizione del punto B. Nel caso in cui $B \in r$, tale assioma porta alla costruzione di al più due rette: la retta perpendicolare a r passante per il punto A e la retta AB. Se, invece, $B \notin r$, l'assioma comporta la costruzione della retta t asse di un segmento BB', con B' un punto appartenente alla retta r tale che l'asse t passi per il punto A. Secondo quanto individuato da Row [28], ciò equivale a costruire la retta passante per il punto A e tangente alla parabola avente il punto B per fuoco e la retta r come direttrice. Di conseguenza, si potranno ottenere da 0 a 2 rette al variare della posizione del punto A:

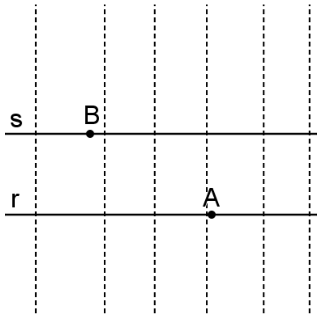
- se il punto appartiene alla zona di piano delimitata dalla parabola non vi saranno rette tangenti;

- se il punto appartiene alla parabola vi sarà un'unica tangente;
- se il punto appartiene alla zona di piano che non è delimitata dalla parabola vi saranno due rette tangenti.

È possibile stabilire quale situazione si andrà a verificare, senza tracciare la parabola, osservando se la distanza del punto A dal punto B è rispettivamente minore, uguale o maggiore della sua distanza dalla retta r. La figura 1.1(e) a pagina 16 mostra la costruzione di una tangente nel caso in cui $\mathrm{d}(A,B)>\mathrm{d}(A,r)$.

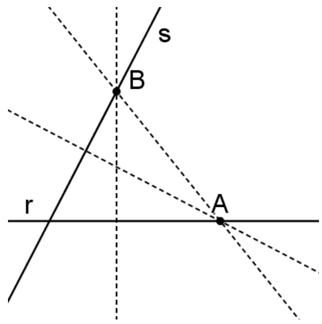
Assioma 1.6 (O6). *Dati due punti A e B distinti e costruibili e due rette r e s costruibili, se esiste un numero finito di rette che riflettono A su r e B su s, allora ciascuna di esse è costruibile.*

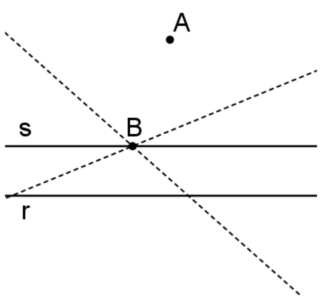
Secondo quanto suggerito dal testo *Geometric Constructions* di George E. Martin [25], esaminiamo cosa comporta tale assioma al variare delle posizioni di A, B, r e s:



Se $A \in r$, $B \in s$ e $r \parallel s$, esistono infinite rette che mandano A su r e B su s, ovvero tutte le rette perpendicolari a r e s; tale situazione risulta quindi esclusa in quanto l'assioma richiede che le rette siano in numero finito.

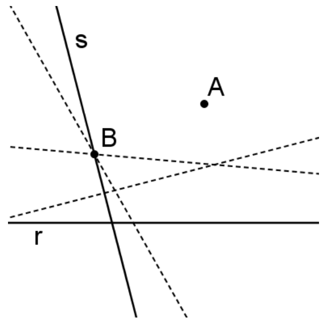
Se $A \in r$, $B \in s$ e $r \nparallel s$, vi sono al più tre rette che soddisfano la condizione posta dall'assioma: la retta per A perpendicolare a s, la retta per B perpendicolare a r e la retta AB.





Se $A \notin r$, $B \in s$ e $r \parallel s$, le rette che soddisfano la condizione data sono, se esistono, le rette passanti per B e tangenti alla parabola di fuoco A e direttrice r. Secondo quanto detto in precedenza, non esiste alcuna tangente se la distanza del punto B dal punto A è minore della sua distanza dalla retta r. Il caso $A \in r$, $B \notin s$ e $r \parallel s$ è analogo.

Se $A \notin r$, $B \in s$ e $r \nparallel s$, le rette che soddisfano quanto richiesto dall'assioma sono al più tre: le rette passanti per B e tangenti alla parabola di fuoco A e direttrice r, se esistono, e la retta perpendicolare a s e tangente alla medesima parabola. Il caso $A \in r$, $B \notin s$ e $r \nparallel s$ è analogo.



Se, infine, $A \notin r$, $B \notin s$, l'assioma porta alla costruzione delle rette tangenti contemporaneamente a due parabole: la parabola di fuoco A e direttrice r e la parabola di fuoco B e direttrice s. Per motivi geometrici, vi possono essere da 0 a 3 tangenti comuni alle due parabole. Nei casi particolari in cui:

- $r \perp s$, le tangenti comuni variano da un minimo di 1 fino ad un massimo di 3;
- $r \parallel s$, vi possono essere da 0 a 2 tangenti comuni;
- $r = s$, le tangenti comuni possono essere 1 o 2.

In figura 1.1(f), pagina 16, viene illustrato un caso generico $A \notin r$, $B \notin s$ in cui almeno una tangente comune esiste. Questo assioma è noto anche come "assioma di Beloch", in quanto è stato individuato per la prima volta da Margherita Piazzolla Beloch (1879 – 1976).

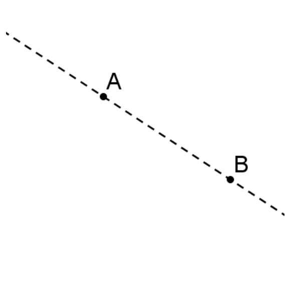
Assioma 1.7 (O7). *Dato un punto costruibile A e due rette r e s distinte e costruibili, se esiste un numero finito di rette perpendicolari ad s che riflettono A su r, allora ciascuna di esse è costruibile.*

Anche tale assioma produce due risultati distinti a seconda della posizione degli elementi di partenza:

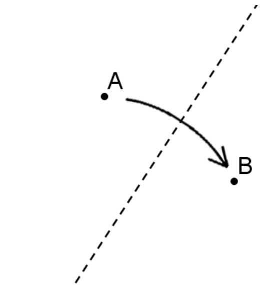
- se $r \parallel s$ e $A \in r$, esistono infinite rette perpendicolari a s che mandano A su r; tale situazione risulta quindi esclusa in quanto l'assioma richiede che le rette siano in numero finito;
- se $r \parallel s$ e $A \notin r$, non esiste alcuna retta perpendicolare a s che mandi A su r;
- se $r \nparallel s$, esiste un'unica retta che realizza quanto richiesto dall'assioma.

La figura 1.1(g) a pagina 16 mostra la costruzione della retta nel caso in cui r e s sono incidenti.

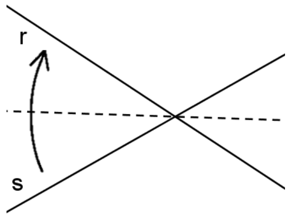
Chiarita la natura dei sette assiomi proposti da Huzita-Hatori, ci occupiamo di verificarne l'indipendenza e la completezza.



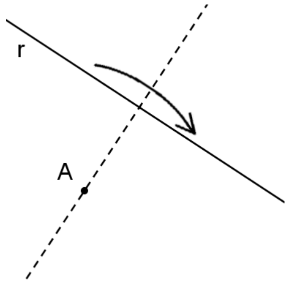
(a) Dati due punti A e B distinti e costruibili, la retta che passa per entrambi è costruibile.



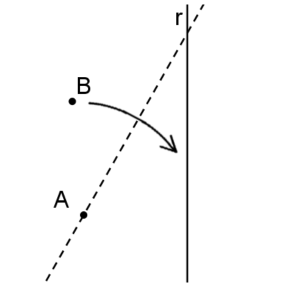
(b) Dati due punti A e B distinti e costruibili, la retta che riflette A su B è costruibile.



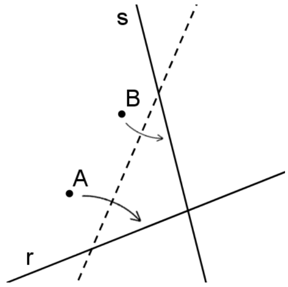
(c) Date due rette r e s distinte e costruibili, una retta che riflette r su s è costruibile.



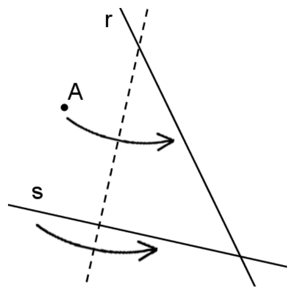
(d) Dati un punto costruibile A e una retta costruibile r, la retta passante per A e perpendicolare ad r è costruibile.



(e) Data una retta costruibile r e due punti costruibili A e B, se esiste una retta passante per A e che riflette B su r, allora essa è costruibile.



(f) Dati due punti A e B distinti e costruibili e due rette r e s costruibili, se esiste un numero finito di rette che riflettono A su r e B su s, allora ciascuna di esse è costruibile.



(g) Dato un punto costruibile A e due rette r e s distinte e costruibili, se esiste un numero finito di rette perpendicolari ad s che riflettono A su r, allora ciascuna di esse è costruibile.

Figura 1.1: Una possibile rappresentazione per ciascuno dei sette assiomi H-H.

1.2 Analisi della teoria assiomatica H-H

1.2.1 Completezza

I matematici Roger C. Alperin e Robert J. Lang nell'articolo *"One-, Two-, and Multi-Fold Origami Axioms "* [3] affrontano lo studio della completezza degli assiomi H-H della teoria del *paper-folding*. Il loro lavoro permette di stabilire se il sistema assiomatico formulato a partire dal lavoro di Huzita, Scimemi e Justin necessita di un ampliamento o meno.

La strategia individuata per effettuare la verifica della completezza del sistema assiomatico è costituita da tre fasi:

1. vengono introdotti gli *allineamenti* e gli assiomi *one-fold*, ovvero un sistema alternativo per individuare e descrivere le rette di piegatura;

2. si mostra che ciascun assioma H-H è anche un assioma *one-fold*;

3. si identificano tutti i possibili assiomi *one-fold* che permettono di individuare una retta di piegatura e si mostra che essi coincidono con i sette assiomi H-H.

Per iniziare, ci si pone nel piano cartesiano sui cui è quindi dato un sistema di riferimento. Un punto verrà indicato attraverso la coppia ordinata (x, y), con x e y che rappresentano le coordinate cartesiane del punto; chiediamo che entrambi siano non nulli. Una retta verrà invece indicata attraverso la coppia ordinata (X, Y), con X e Y numeri reali non nulli tali che tutti i punti appartenenti a tale retta soddisfino l'equazione $X \cdot x + Y \cdot y + 1 = 0$.

La notazione presentata non permette di descrivere l'origine del sistema di riferimento e tutte le rette passanti per essa; sapendo che ci sono rette non costruibili, è possibile risolvere tale problema traslando il sistema di riferimento in modo che nessuna retta costruibile passi per l'origine. Inoltre, dal momento che sia i punti sia le rette sono rappresentati attraverso una coppia ordinata, si adotta la convenzione di indicare i punti in stampatello minuscolo e le rette in stampatello maiuscolo.

Definiamo ora l'immagine di piegatura di punti e rette come la loro riflessione rispetto alla retta di piegatura; si ottengono le seguenti definizioni:

Definizione 1.3. *L'immagine* $\mathbf{F_r(P)}$ *di un punto* $P = (x, y)$ *ottenuto dalla piegatura lungo la retta* $r = (X, Y)$ *è la riflessione del punto* P *rispetto alla retta* r.

Definizione 1.4. *L'immagine* $\mathbf{F_r(l)}$ *di una retta* $l = (X', Y')$ *ottenuta dalla piegatura lungo la retta* $r = (X, Y)$ *è la riflessione della retta* l *rispetto alla retta* r.

Chiameremo *allineamento* la coincidenza di due oggetti A e B, punti o rette, e l'appartenenza di un punto ad una retta; l'allineamento di due oggetti verrà indicato attraverso la notazione $A \leftrightarrow B$. Si possono quindi verificare i seguenti tre possibili allineamenti:

- **Allineamento punto-punto**: Dati due punti $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$, l'allineamento $P_1 \leftrightarrow P_2$ si verifica se $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$.

- **Allineamento retta-retta**: Date due rette $l_1 = (X_1, Y_1)$ e $l_2 = (X_2, Y_2)$, l'allineamento $l_1 \leftrightarrow l_2$ si verifica se $X_1 = X_2$ e $Y_1 = Y_2$.

- **Allineamento punto-retta**: Dato un punto $P = (x, y)$ e una retta $l = (X, Y)$, l'allineamento $P \leftrightarrow l$ si verifica se $X \cdot x + Y \cdot y + 1 = 0$.

Gli allineamenti che coinvolgono le immagini di punti o rette permettono di individuare una retta di piegatura. Chiameremo *assioma one-fold* per la teoria del *paper-folding* qualsiasi insieme formato dal minor numero di allineamenti, aventi un numero finito di soluzioni, che permettono di individuare una retta di piegatura in una regione finita del piano euclideo.

È possibile osservare che ciascun assioma H-H può essere letto come la realizzazione di uno o due degli allineamenti presentati in precedenza; gli assiomi di Huzita-Hatori risultano quindi essere anche degli assiomi *one-fold*. Verificare la completezza del sistema assiomatico proposto da Huzita-Hatori equivale quindi a verificare che non vi siano assiomi *one-fold* che non corrispondono ad alcun assioma H-H.

Ricordando le definizioni date in precedenza in merito alle tipologie di allineamento esistenti, emergono cinque possibili condizioni che concorrono a determinare una retta di piegatura:

A1. $\mathbf{F}_r(P_1) \leftrightarrow P_2$, in figura 1.2(a);

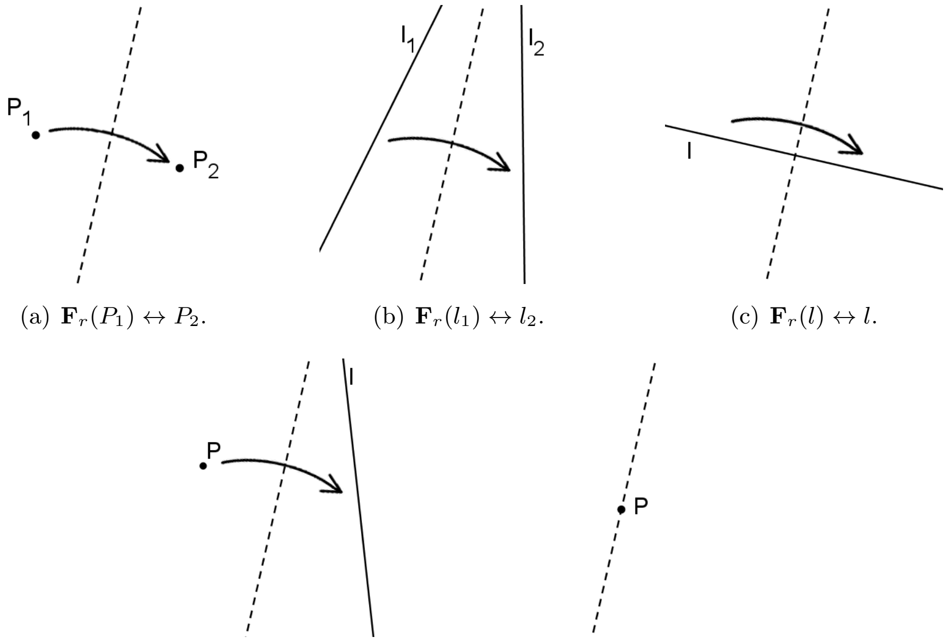
A2. $\mathbf{F}_r(l_1) \leftrightarrow l_2$, in figura 1.2(b);

A3. $\mathbf{F}_r(l) \leftrightarrow l$, in figura 1.2(c);

A4. $\mathbf{F}_r(P) \leftrightarrow l$, in figura 1.2(d);

A5. $\mathbf{F}_r(P) \leftrightarrow P$, in figura 1.2(e).

Gli allineamenti A1-A5 portano alla creazione di una o due equazioni ciascuno, a seconda della tipologia di allineamento coinvolta. Si noti che l'allineamento A5, secondo il quale l'immagine di un punto è allineata con il punto stesso, è equivalente ad avere l'allineamento tra le retta di piegatura e il punto (ovvero $r \leftrightarrow P$). Inoltre, gli allineamenti di un punto con l'immagine di una retta ($\mathbf{F}_r(l) \leftrightarrow P$) e di una retta con l'immagine di un punto ($\mathbf{F}_r(P) \leftrightarrow l$) producono le medesime equazioni, risultando quindi equivalenti. Infine, non viene considerato il caso di una retta coincidente con la retta di piegatura poiché siamo interessati a costruire tramite il *paper-folding* unicamente delle rette non esistenti in precedenza.



(a) $\mathbf{F}_r(P_1) \leftrightarrow P_2$. (b) $\mathbf{F}_r(l_1) \leftrightarrow l_2$. (c) $\mathbf{F}_r(l) \leftrightarrow l$.

(d) $\mathbf{F}_r(P) \leftrightarrow l$. (e) $\mathbf{F}_r(P) \leftrightarrow P$.

Figura 1.2: Cinque possibili allineamenti per determinare una retta di piegatura.

Una retta di piegatura $r = (X, Y)$ presenta due incognite e, di conseguenza, due gradi di libertà; sono quindi necessarie due equazione per definirla. Gli allineamenti A1 ed A2 portano alla creazione di due equazioni ciascuno; risultano quindi sufficienti per determinare r. L'allineamento A1 corrisponda all'assioma O2 della teoria assiomatica H-H, mentre A2 è equivalente all'assioma O3.

Gli allineamenti A3, A4 e A5 forniscono invece unicamente un'equazione ciascuno; per poter definire la retta di piegatura r è quindi necessario disporre di una coppia di tali allineamenti. Le possibili combinazioni sono rappresentate in tabella 1.1; si assume $l_1 \neq l_2$ e $P_1 \neq P_2$. La tabella mostra inoltre l'assioma nella formulazione di Huzita-Hatori che corrisponde a ciascuna coppia di allineamenti.

	$\mathbf{F}_r(l_1) \leftrightarrow l_1$	$\mathbf{F}_r(P_1) \leftrightarrow l_1$	$\mathbf{F}_r(P_1) \leftrightarrow P_1$
$\mathbf{F}_r(l_2) \leftrightarrow l_2$	/	O7	O4
$\mathbf{F}_r(P_2) \leftrightarrow l_2$	O7	O6	O5
$\mathbf{F}_r(P_2) \leftrightarrow P_2$	O4	O5	O1

Tabella 1.1: Le possibili coppie di allineamenti che producono due equazioni per determinare r e gli assiomi H-H corrispondenti.

Si presti attenzione al fatto che non risulta definito alcun assioma dalla coppia di allineamenti $\mathbf{F}_r(l_1) \leftrightarrow l_1$ e $\mathbf{F}_r(l_2) \leftrightarrow l_2$, in quanto:

- se le rette l_1 e l_2 non sono parallele, il sistema di equazioni risulta impossibile;
- se le rette l_1 e l_2 sono parallele, il sistema risulta indeterminato.

Tutte le restanti combinazioni di allineamenti corrispondono invece ad un assioma H-H esistente. Ciò prova la completezza del sistema assiomatico proposto da Huzita-Hatori, in quanto non sono stati individuati degli assiomi *one-fold* che non hanno un corrispettivo nell'assiomatica H-H. Rimane da verificare l'indipendenza di tale sistema assiomatico.

1.2.2 Indipendenza

Un'attenta analisi degli assiomi della teoria del *paper-folding* è stata svolta dal matematico Roger C. Alperin nell'articolo *"A Mathematical Theory of Origami Constructions and Numbers"* [2]. Scopo della trattazione era stabilire quali strutture geometriche e quali numeri fossero costruibili assumendo validi parte degli assiomi illustrati in precedenza; tale lavoro ha permesso inoltre di dimostrare che unicamente due tra i sette assiomi proposti da Huzita-Hatori sono tra loro indipendenti.

Presentiamo quindi l'analisi dell'indipendenza degli assiomi H-H. Per svolgere tale studio, faremo riferimento alle seguenti definizioni.

Definizione 1.5. *Una* ***teoria assiomatica del paper-folding*** $\mathcal{T}$ *è un sottoinsieme* $\mathcal{S}$ *dell'insieme di assiomi del paper-folding che contiene il primo e il secondo assioma, ovvero O1,O2* $\in \mathcal{S}$ *e* $\mathcal{S} \subseteq \{O1, O2, O3, O4, O5, O6, O7\}$.

Supponendo siano dati tre punti X, Y e Z, detti **punti base** di $\mathcal{T}$, diamo la seguente definizione:

Definizione 1.6. *Un elemento* $\mathcal{P}$ *è* ***costruibile*** *in* $\mathcal{T}$ *se:*

- *è un punto base di* $\mathcal{T}$*;*
- *esiste una successione finita di operazioni* $e_1, e_2, ..., e_n \in \mathcal{S}$ *tali che:*
  - e_1 *è l'applicazione di uno degli assiomi di* $\mathcal{T}$ *ai punti base;*
  - e_i *è l'applicazione di uno degli assiomi di* $\mathcal{T}$ *ad alcuni elementi appartenenti all'insieme formato dai punti base e dagli elementi costruiti attraverso le operazioni* $e_1, e_2, ..., e_{i-1} \quad \forall i = 2, ..., n-1$*;*
  - e_n *è l'applicazione di uno degli assiomi di* $\mathcal{T}$*, che porta alla costruzione dell'elemento* $\mathcal{P}$*, ad alcuni elementi appartenenti all'insieme formato dai punti base e dagli elementi costruiti attraverso le operazioni* $e_1, e_2, ..., e_{n-1}$.

Alcuni risultati preliminari

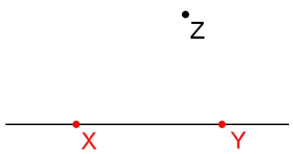
Per poter dimostrare la dipendenza di alcuni assiomi, dovremo servici di alcuni fondamentali risultati aventi validità in una qualsiasi teoria $\mathcal{T}$. Presentiamo quindi i seguenti quattro lemmi, ponendoci all'interno di una qualsiasi teoria assiomatica del *paper-folding*.

Lemma 1.1. *Per ogni punto costruibile in $\mathcal{T}$ passano almeno due rette costruibili in $\mathcal{T}$.*

Dimostrazione. Sia P un punto costruibile di $\mathcal{T}$.
Se P è uno dei punti base della teoria, ovvero è uno dei punti X, Y e Z, è sufficiente osservare che per ciascun punto base passano esattamente due rette tra XY, XZ e YZ grazie all'assioma O1 (O1 $\in \mathcal{S} \quad \forall \mathcal{T}$). Ogni altro punto costruibile è, invece, intersezione di due rette costruibili per definizione di punto costruibile. □

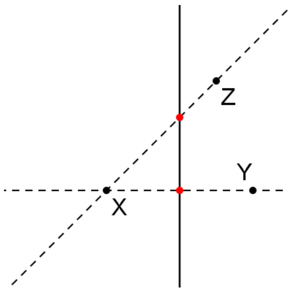
Lemma 1.2. *Ogni retta costruibile in $\mathcal{T}$ passa per almeno due punti costruibili in $\mathcal{T}$.*

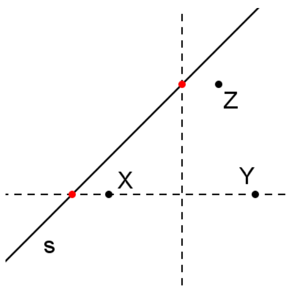
Dimostrazione. Dati X, Y e Z punti base di $\mathcal{T}$, è sempre possibile costruire la retta XY e l'asse del segmento XY, tra loro perpendicolari, poiché O1,O2 $\in \mathcal{S}\ \forall \mathcal{T}$



La retta XY passa per due punti costruibili: i punti base X e Y.

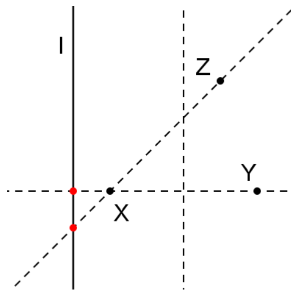
L'asse del segmento XY interseca la retta XY in un punto e una tra la retta XZ e l'asse del segmento XZ (entrambi costruibili poiché O1, O2 $\in \mathcal{S}\ \forall \mathcal{T}$) in un altro punto; anche tale retta passa quindi per due punti costruibili.





Ogni retta s costruibile in $\mathcal{T}$ che non sia parallela o perpendicolare alla retta XY, incontra le rette XY e l'asse del segmento XY in due punti; tali punti di intersezione sono quindi punti costruibili per i quali passa s.

Ogni retta l costruibile in $\mathcal{T}$ che sia parallela o perpendicolare a XY, incontra necessariamente due tra le rette XY, XZ e gli assi dei segmenti XY e XZ; si hanno così due punti costruibili per i quali passa l.



La tesi è così provata per tutte le rette costruibili in $\mathcal{T}$. $\square$

Lemma 1.3. *Il punto medio tra due punti costruibili in $\mathcal{T}$ è sempre costruibile in $\mathcal{T}$.*

Dimostrazione. Dati due punti costruibili A e B in $\mathcal{T}$, è sempre possibile costruire la retta AB e l'asse del segmento AB in quanto O1,O2 $\in \mathcal{S}$ $\forall \mathcal{T}$. Il punto di intersezione tra tali rette è il punto medio ed è costruibile per definizione. $\square$

Lemma 1.4. *Dato un punto P costruibile in $\mathcal{T}$ e un segmento AB, è possibile costruire un segmento parallelo e con la stessa lunghezza e orientamento di AB e di cui P occupa uno dei due estremi.*

Dimostrazione. Ipotizziamo che il punto P non sia sulla retta per A e B (figura 1.3.) Tramite l'assioma O1 si costruiscono le rette AB, AP e BP e, attraverso il Lemma 1.3, i punti medi dei sementi AB, AP e BP, chiamati rispettivamente M, A' e B'. Per un noto fatto geometrico, il quadrilatero $AMB'A'$ è un parallelogramma, in quanto si può dimostrare che $AB \parallel A'B'$, $AP \parallel MB'$; di conseguenza $AM \simeq A'B'$ e $AA' \simeq MB'$. Per il Lemma 1.3 si costruisce il punto medio di $B'P$, chiamato C e, per l'assioma O1 si tracciano le rette $A'C$ e MB', le quali si incontrano nel punto D.
I triangoli $A'CP$ e $B'CD$ sono congruenti per il secondo criterio di congruenza dei triangoli, in quanto:

- $A'\hat{C}P \simeq B'\hat{C}D$ in quanto angoli opposti al vertice;
- $B'C \simeq CP$ poiché C punto medio del segmento $B'P$,
- $A'\hat{P}C \simeq B'\hat{D}C$ in quanto angoli alterni interni delle rette $AP \parallel MB'$ tagliate trasversalmente da $B'P$.

Ne consegue che $A'C \simeq CD$, per cui il quadrilatero $A'B'DP$ è un parallelogramma in quanto le diagonali si incontrano nel loro punto medio. Per congruenza di lati opposti in un parallelogramma si ottiene quindi $AM \simeq A'B' \simeq PD \simeq \frac{1}{2}AB$ e $AM \parallel PD$.
Ripetendo tale costruzione sui punto A, B e D si ottiene un punto E tale che $MB \simeq DE$ e $MB \parallel DE$; di conseguenza $AB \simeq PE$ e $AB \parallel PE$.

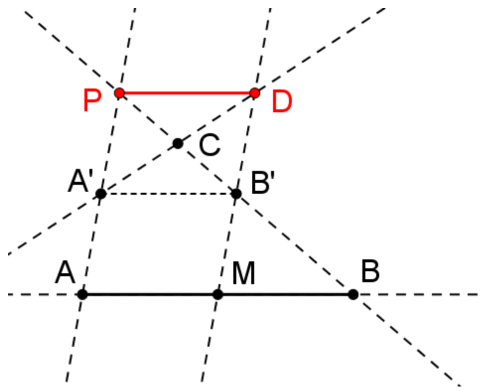


Figura 1.3: Costruzione del segmento PD tale che $AM \simeq PD \simeq \frac{1}{2}AB$ e $AM \parallel PD$.

Nel caso in cui P appartenga alla retta AB, si esegue la traslazione su un punto costruibile non appartenente alla retta e successivamente un'ulteriore traslazione su P. □

Tali risultati sono validi in ogni teoria assiomatica del *paper-folding* $\mathcal{T}$, in quanto provati impiegando unicamente gli assiomi O1 e O2, i quali appartengono a tutte le teorie $\mathcal{T}$ per definizione.

Assiomi O4 e O7

Presentiamo ora due fondamentali teoremi aventi a loro volta validità in tutte le teorie assiomatiche del *paper-folding* $\mathcal{T}$.

Teorema 1.5. *Dati un punto P costruibile in $\mathcal{T}$ e una retta l costruibile in $\mathcal{T}$, è possibile costruire in $\mathcal{T}$ una retta passante per P e perpendicolare ad l.*

Dimostrazione. Per il Lemma 1.2 esistono due punti A e B costruibili in $\mathcal{T}$ per i quali passa la retta l. Per il Lemma 1.4 è possibile traslare due volte il segmento AB sul punto P, così che P sia il punto medio di un nuovo segmento $A'B'$ parallelo ad AB. Tramite l'assioma O2 applicato ai punti A' e B' si ottiene una retta passante per P e perpendicolare ad $A'B'$, e quindi anche ad AB. □

Teorema 1.6. *Dato un punto P costruibile in $\mathcal{T}$ e due rette r e s non parallele e costruibili in $\mathcal{T}$, allora è possibile costruire in $\mathcal{T}$ una retta perpendicolare a s e che riflette P su r.*

Dimostrazione. Per il Lemma 1.2 esistono due punti A e B costruibili in $\mathcal{T}$ per i quali passa la retta s. Per il Lemma 1.4 è possibile traslare il segmento AB sul punto P, ottenendo un nuovo segmento $A'B'$ parallelo ad AB. Applicando l'assioma O1 sui punti

A' e B' si ottiene la retta s' passante per P e parallela alla retta s.
La retta s' interseca necessariamente la retta r in un punto costruibile Q. Per il Lemma 1.3 è possibile costruire il punto medio M del segmento PQ e, per il Teorema 1.5, è possibile costruire la retta perpendicolare ad s' passante per M. Tale retta è quindi perpendicolare anche ad s e riflette P su r. □

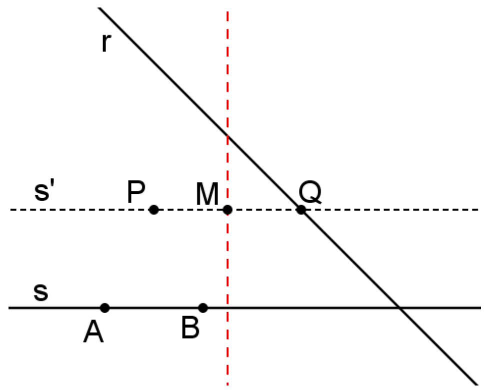


Figura 1.4: Costruzione della retta perpendicolare a s che riflette P su r.

Il Teorema 1.5 corrisponde chiaramente all'assioma O4; è possibile inoltre affermare che il Teorema 1.6 corrisponde all'assioma O7, in quanto è stato già osservato che, in caso di parallelismo tra le rette r ed s, non è possibile costruire alcuna retta ricorrendo all'assioma O7. Il Teorema 1.6 permette quindi di effettuare le medesime costruzioni dell'assioma O7. Abbiamo quindi provato che gli assiomi O4 e O7 non sono indipendenti dai restanti assiomi del *paper-folding*.

Grazie ai precedenti teoremi, è possibile inoltre dimostrare il seguente lemma valido in ogni teoria assiomatica del *paper-folding* $\mathcal{T}$:

Lemma 1.7. *Sia l una retta costruibile in $\mathcal{T}$; qualsiasi punto o retta costruibile in $\mathcal{T}$ può essere riflessa rispetto alla retta l.*

Dimostrazione. Sia P un punto costruibile in $\mathcal{T}$:

- se $P \in l$, allora la sua riflessione coincide con il punto stesso ed è banalmente costruibile;
- se $P \notin l$, allora per il Teorema 1.5 è possibile costruire la retta perpendicolare ad l e passante per P. Chiamato Q il punto di intersezione tra le due rette, per il Lemma 1.4 è possibile traslare il segmento PQ su Q per ottenere il riflesso di P.

Sia r una retta costruibile in $\mathcal{T}$, per il Lemma 1.2 tale retta ha almeno due punti costruibili; è quindi possibile effettuare la riflessione di tali punti e in seguito ottenere la riflessione della retta tramite l'assioma O1. □

Assiomi O2, O3 e O5

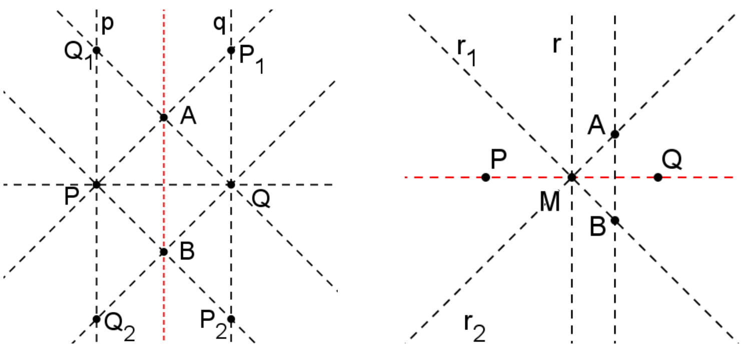
Proseguiamo lo studio dell'indipendenza assumendo di star adottando una teoria assiomatica del *paper-folding* $\mathcal{T}'$ formata dal sottoinsieme di assiomi $\mathcal{S}'$ tale che $\mathcal{S}' = \{O1,O6\}$. Non inseriamo O2 tra gli assiomi di $\mathcal{T}'$, in quanto risulta valida la seguente proposizione:

Proposizione 1.8. *In una teoria assiomatica del paper-folding $\mathcal{T}$ in cui vale l'assioma O6 le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

i. vale l'assioma O1;

ii. vale l'assioma O2.

Dimostrazione. (i. $\Rightarrow$ ii.) Siano P e Q due punti costruibili in $\mathcal{T}$, allora per l'assioma O1 è possibile costruire la retta PQ. Si applica quindi l'assioma O4 ai punti P, Q e alla retta PQ, costruendo quindi le rette p e q perpendicolari alla retta data e passanti rispettivamente per i punti P e Q.
Si utilizza l'assioma O6 per costruire le rette che mandano contemporaneamente i punti P e Q sulla retta p; tali rette incontrano la retta q in due punti appartenenti ai semipiani opposti individuati da PQ, che chiameremo P_1 e P_2. Analogamente si costruiscono i punti Q_1 e Q_2 applicando l'assioma O6 ai punti P e Q e alla retta q.
Per costruzione, si ha $P_1Q \cong PQ \cong PQ_1$ e $p \parallel q$, per cui il quadrilatero P_1QPQ_1 è un quadrato. Analogamente si mostra che P_2QPQ_2 è un quadrato. Le diagonali PP_1 e QQ_1 si incontrano nel punto medio A che quindi appartiene all'asse del segmento PQ. Anche le diagonali PP_2 e QQ_2 si incontrano nel loro punto medio B che a sua volta appartiene all'asse di PQ. Applicando l'assioma O1 ai punti A e B si costruisce tale asse.



(a) (i. $\Rightarrow$ ii.) Costruzione asse del segmento PQ dati gli assiomi O1 e O6.

(b) (ii. $\Rightarrow$ i.) Costruzione retta PQ dati gli assiomi O2 e O6.

Figura 1.5: Dimostrazione Proposizione 1.8.

(ii. $\Rightarrow$ i.) Siano P e Q due punti costruibili in $\mathcal{T}$ e sia r l'asse del segmento PQ. Le due bisettrici r_1 e r_2 tra la retta PQ e la retta r sono costruibili per l'assioma O6, in quanto entrambe le rette riflettono contemporaneamente i punti P e Q sulla retta r. Il punto medio M del segmento PQ sarà quindi costruibile in quanto intersezione delle tre rette r, r_1 e r_2.
Per l'assioma O2 è possibile costruire l'asse del segmento MQ, il quale intersecherà le rette r_1 e r_2 in due punti costruibili A e B. La retta AB risulta quindi parallela alla retta r, di conseguenza il suo asse sarà perpendicolare alla retta r e passante per M e Q, ovvero coinciderà con la retta PQ. □

Infine, dimostriamo il seguente teorema:

Teorema 1.9. *In una teoria assiomatica del paper-folding $\mathcal{T}$ in cui vale l'assioma O6 e uno tra gli assiomi O1 e O2, valgono anche gli assiomi O3, O4, O5 e O7.*

Dimostrazione. (O4 e O7) Grazie alla Proposizione 1.8 si ha che la validità dell'assioma O6 assieme ad uno degli assiomi tra O1 e O2 implica la validità anche dell'altro assioma. Per i Teoremi 1.5 e 1.6 si ha quindi la validità degli assiomi O4 e O7.
(O5) Si considerino P, Q e r due punti e una retta costruibili; si costruisce la retta s passante per Q e parallela ad r applicando due volte l'assioma O4. Per l'assioma O6 è possibile costruire una retta t che riflette contemporaneamente il punto P sulla retta r e il punto Q sulla retta s. Per lo studio sull'assioma O6 svolto in precedenza, è stata quindi costruita una retta per Q che riflette P su r, ovvero è possibile effettuare la costruzione dell'assioma O5.
(O3) Si considerino due rette r e s incidenti in un punto costruibile Q; sia P un punto costruibile di r (tale punto esiste per il Lemma 1.2). Per l'assioma O5 risulta costruibile la retta passante per Q e che riflette il punto P sulla retta s, ovvero la bisettrice dell'angolo tra le rette r e s.
Se, invece, le due rette r e s sono parallele, si considerino due punti costruibili su r (tali punti esistono per il Lemma 1.2); per l'assioma O2, l'asse t del segmento avente tali punti per estremi risulta costruibile. La retta t interseca r e s in due punti il cui asse è la retta cercata. □

Abbiamo quindi dimostrato come, a partire dagli assiomi O1 e O6, sia possibile dimostrare i restanti cinque enunciati; si può quindi affermare che dei sette enunciati comunemente denominati "assiomi" per la teoria del *paper-folding*, cinque risultano sovrabbondanti e potrebbero essere omessi. Ciò conclude lo studio dell'indipendenza delle operazioni di piegatura della carta proposte da Huzita-Hatori.

Capitolo 2

Teoremi e costruzioni geometriche

Proseguiamo lo studio iniziato nel precedente capitolo presentando le costruzioni che è possibile realizzare ricorrendo al *paper-folding*. Per poter effettuare un confronto tra le potenzialità costruttive della piegatura della carta e quelle della riga e del compasso, è necessario inserire un breve richiamo alle costruzioni geometriche classiche. Nel presente capitolo viene quindi proposta una sintetica trattazione della geometria euclidea, cui seguirà lo studio degli elementi costruibili per mezzo del *paper-folding*.

2.1 Geometria Euclidea

2.1.1 Postulati di Euclide e assiomi di Hilbert

La geometria nasce come una scienza pratica, che ha poi subito un processo di sistemazione ad opera di numerosi matematici, culminato con la scrittura degli *Elementi* da parte di Euclide. Il testo, rimasto un riferimento per oltre due millenni, raccoglie i principali risultati geometrici conseguiti fino al 300 a.C. e li riordina adottando un punto di vista ipotetico-deduttivo.

Nel primo libro degli *Elementi* sono riportati cinque assiomi (o nozioni comuni), ovvero alcune proposizioni matematiche considerate vere senza essere dimostrate, e cinque postulati, le proposizioni prettamente geometriche considerate vere senza essere dimostrate. Li presentiamo attraverso la traduzione di Fabio Acerbi, consultabile presso il testo *Euclide, tutte le opere* [1].

Assiomi (o nozioni comuni)

1. *Gli uguali allo stesso sono anche uguali tra loro.*

2. *Qualora a uguali siano sommati uguali, i totali sono uguali.*

3. *Qualora da uguali siano sottratti uguali, i resti sono uguali.*

4. *I sovrapponentisi tra loro sono uguali tra loro.*

5. *Il totale* [*è*] *maggiore della parte.*

Postulati

1. *Sia stato richiesto di condurre una linea retta da ogni punto a ogni punto.*

2. [*Sia stato richiesto*] *di prolungare senza soluzione di continuità una retta limitata in* [*linea*] *retta.*

3. [*Sia stato richiesto*] *che con ogni centro e intervallo sia tracciato un cerchio.*

4. [*Sia stato richiesto*] *che tutti gli angoli retti siano uguali tra loro.*

5. [*Sia stato richiesto*] *che, qualora una retta che incide su due rette faccia minori di due retti gli angoli all'interno e dalla stessa parte, le due rette prolungate illimitatamente incidano dalla parte in cui sono gli* [*angoli*] *minori dei due retti.*

L'assiomatica realizzata da Euclide è rimasta immutata per due millenni, durante i quali, tuttavia, si sono susseguiti numerosi tentativi di trovare una nuova formulazione per il V postulato che rendesse evidente la sua appartenenza al gruppo dei postulati, oppure di produrre una sua dimostrazione, così da poterlo escludere da tale gruppo. Ogni tentativo effettuato si è però rivelato fallimentare.

Il V postulato non rappresenta l'unico problema riscontrabile nell'assiomatica proposta da Euclide. Nei libri successivi degli *Elementi* Euclide utilizza alcune assunzioni che non sono presenti tra i dieci enunciati nel primo libro; ad esempio, vengono utilizzati degli assiomi riguardanti l'ordine dei punti in una retta sebbene non vi sia alcun postulato o assioma che ne faccia cenno. L'assiomatica proposta da Euclide risulta quindi incompleta.

Per risolvere tali problemi e formulare di conseguenza un'assiomatica completa, nel 1899 David Hilbert (1862 - 1943) rifondò la geometria euclidea nel primo capitolo del testo *Fondamenti della Geometria*. Egli eliminò la distinzione tra *assiomi* e *postulati* e li riorganizzò nei seguenti cinque gruppi:

1) Assiomi di collegamento (8),

2) Assiomi di ordinamento (4),

3) Assiomi di congruenza (5),

4) Assioma delle parallele (1),

5) Assiomi di continuità (2).

Ci apprestiamo ora ad indagare quali elementi siano costruibili per la geometria euclidea.

2.1.2 Numeri e poligoni regolari costruibili

Le costruzioni sono l'atto attraverso il quale si verifica l'esistenza degli oggetti definiti in una teoria geometrica. Per quanto riguarda la geometria euclidea, storicamente le costruzioni sono state effettuate con l'uso di due strumenti "ideali": una riga non graduata e un compasso che non può riportare le distanze. Ciò ha portato ad interpretare i primi tre postulati di Euclide come le regole con cui è possibile utilizzare tali strumenti ideali. Con riga e compasso è di conseguenza possibile tracciare un segmento congiungente due punti, estendere indefinitamente un segmento e tracciare un cerchio di raggio e centro qualsiasi.

Ogni costruzione con riga e compasso è quindi effettuata attraverso una serie di passaggi successivi del tipo: congiungere due punti con una retta, trovare il punto di intersezione di due rette, tracciare un cerchio di dati centro e raggio, intersecare un cerchio con un altro cerchio o una retta. Possiamo quindi dare la seguente definizione informale, supponendo che sia dato un segmento unitario o, equivalentemente, che siano dati due punti (i suoi estremi):

Definizione 2.1. *Si dice che:*

- *un segmento è costruibile se i suoi estremi sono punti costruibili;*
- *una retta è costruibile se passa per due punti costruibili;*
- *una circonferenza è costruibile se ha centro in un punto costruibile e raggio un segmento costruibile.*
- *un punto è costruibile se uno degli estremi del segmento unitario, o si ottiene per intersezione di:*
  - *due rette costruibili,*
  - *un cerchio e una retta costruibili,*
  - *due cerchi costruibili.*

Abbiamo così fornito una definizione induttiva di punto costruibile, a partire dal segmento unitario. Proseguiamo presentando la definizione di numero reale costruibile.

Definizione 2.2. *Un numero reale α è costruibile se, con riga, compasso e unità di misura fissata, si riesce a costruire il segmento di misura $|\alpha|$.*

Proposizione 2.1. *Indichiamo con $\mathbb{E}$ l'insieme dei numeri reali costruibili con riga e compasso a partire dal segmento unitario. $\mathbb{E}$ è un campo che contiene i razionali.*

Dimostrazione. (Cenni) La proposizione si prova in due passaggi: a partire dal segmento unitario, si costruisce l'insieme dei numeri interi $\mathbb{Z}$; dati due numeri interi a e b non nulli si costruiscono $a+b$, $a-b$, $\frac{1}{a}$ $a \cdot b$, $\frac{a}{b}$. □

L'insieme dei numeri reali costruibili con riga e compasso $\mathbb{E}$ è quindi un sottocampo di $\mathbb{R}$ che contiene il campo $\mathbb{Q}$, ovvero $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{E} \subseteq \mathbb{R}$.

Attraverso il seguente teorema stabiliamo la relazione tra punti costruibili e numeri reali costruibili con riga e compasso.

Teorema 2.2. *Un punto P è geometricamente costruibile se e solo se ha coordinate numericamente costruibili.*

Dimostrazione. Ovvio. □

Attraverso lo studio dei punti costruibili è quindi possibile ricavare ulteriori informazioni circa i numeri reali costruibili. Si indagano le proprietà di $\mathbb{E} \times \mathbb{E}$, piano dei punti costruibili, lavorando con un generico sottocampo dei numeri reali F e analizzando quali nuovi punti del piano reale si possano costruire a partire dai punti del piano di F.

Come si è visto in precedenza, vi sono tre modi per ottenere dei nuovi punti con costruzioni euclidee: intersecando due rette, una retta e una circonferenza oppure due circonferenze. Lo studio di queste tre situazioni permette di giungere alla seguente conclusione: posto $\alpha = \sqrt{a}$, i soli punti del piano reale costruibili in un solo passo a partire dal piano di F sono i punti le cui coordinate stanno in campi del tipo $\mathrm{F}(\alpha)$[1], con $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha^2 \in F$. Vale infatti la seguente proposizione:

Proposizione 2.3. *Sia a un numero reale positivo costruibile, allora $\alpha = \sqrt{a}$ è costruibile con riga e compasso.*

Dimostrazione. (Cenni) Si ricorre al Secondo Teorema di Euclide con le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa aventi lunghezza pari a 1 e a; l'altezza relativa all'ipotenusa e costruibile e risulta avere lunghezza pari a α. □

È quindi possibile dare la seguente definizione:

Definizione 2.3. *I numeri reali costruibili sono quelli appartenenti al minimo campo contenente i razionali e chiuso rispetto all'estrazione di radici quadrate di elementi positivi.*

[1]Dato un campo F, si dice estensione quadratica di F ogni insieme del tipo:

$$F(\sqrt{c}) = \{a + b\sqrt{c} : a, b \in F\} \quad c \in F \quad \sqrt{c} \notin F.$$

. Un'estensione quadratica di un campo F è un campo.

Di conseguenza, vale il seguente teorema:

Teorema 2.4. *Un numero reale* c *è costruibile se e solo se esiste un numero finito di numeri reali* α_1,α_2,...,α_n *tali che*

$$\alpha_1^2 \in \mathbb{Q} \quad \alpha_i^2 \in \mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2 ..., \alpha_{i-1}) \quad \forall i \in \{2, ..., n\}$$

e in modo che $c \in \mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$.

Dimostrazione. Ovvio per quanto detto in precedenza. □

Ci interroghiamo ora su quale sia il grado dell'estensione $\mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ in cui si trova l'elemento c, rispetto a $\mathbb{Q}$. A tale domanda risponde il seguente teorema:

Teorema 2.5. *Se c è un numero reale costruibile, allora esso appartiene ad un campo K che è un estensione di* $\mathbb{Q}$*, di grado* 2^h *per un qualche* $h \in \mathbb{N}$.

Dimostrazione. Per via della costruzione dell'estensione si ha:

$$[\mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) : \mathbb{Q}]$$

che equivale a:

$$[\mathbb{Q}(\alpha_1, ..., \alpha_n) : \mathbb{Q}(\alpha_1, ..., \alpha_{n-1})] \cdot [\mathbb{Q}(\alpha_1, ..., \alpha_{n-1}) : \mathbb{Q}(\alpha_1, ..., \alpha_{n-2})] \cdot ... \cdot [\mathbb{Q}(\alpha_1) : \mathbb{Q}]$$

Ogni fattore ha grado 1 o 2, per cui si ottiene: $[\mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) : \mathbb{Q}] = 2^h \; \exists h \in \mathbb{N}$. □

Disponiamo quindi di tutti gli elementi per presentare i seguenti due importanti risultati, la cui dimostrazione viene omessa.

Proposizione 2.6. *I numeri trascendenti non sono costruibili con riga e compasso.*

Proposizione 2.7. *Se un numero reale soddisfa un polinomio irriducibile in* $\mathbb{Q}$*, di grado n che non è una potenza di 2, allora tale numero non è costruibile con riga e compasso.*

Di conseguenza, attraverso riga e compasso non è possibile costruire le soluzioni di equazioni di terzo grado. Ciò comporta l'impossibilità di risolvere i due problemi classici della duplicazione del cubo e la trisezione dell'angolo. Entrambi, infatti, sono esprimibili attraverso equazioni di terzo grado.

Il problema della ciclotomia, ovvero della costruzione di poligoni regolari, può essere invece ricondotto alla costruzione delle radici complesse dell'unità. Infatti, la costruzione di un n-agono regolare equivale, nel piano complesso, a costruire le radici di $x^n - 1 = 0$ con $n \geq 3$.

Il contributo più importante su tale tema è stato raggiunto nel 1801 da Gauss (1777 - 1855) nel testo *Disquisitiones Arithmeticae*[2]; attraverso il seguente teorema egli prova che, utilizzando la riga e compasso, non è possibile costruire i poligoni regolari aventi rispettivamente sette e nove lati.

Teorema 2.8. *L'equazione $x^n - 1 = 0$ è risolubile per radicali quadratici se e solo se n è della forma:*

$$n = 2^r \cdot p_1 \cdot ... \cdot p_s \quad r, s \geq 0$$

con p_1,...,p_s primi di Fermat a due a due distinti.

2.1.3 Teoria del *paper-folding* e costruzioni con riga e compasso

Mostriamo che è possibile costruire una teoria assiomatica del *paper-folding* $\mathcal{T}$ che permette di effettuare le medesime costruzioni realizzabili con la riga e il compasso.

Teoria assiomatica del *paper-folding* $\mathcal{T}_E$

Definiamo quindi la teoria assiomatica del *paper-folding* $\mathcal{T}_E$ formata dal sottoinsieme di assiomi $\mathcal{S}_E$ tale che $\mathcal{S}_E = \{O1,O5\}$. Non inseriamo O2 tra gli assiomi della teoria $\mathcal{T}_E$, in quanto risulta valida la seguente proposizione:

Proposizione 2.9. *In $\mathcal{T}$ in cui vale l'assioma O5 le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

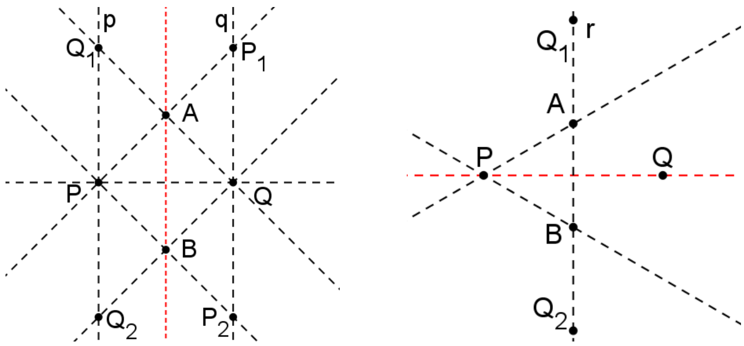
i. vale l'assioma O1;

ii. vale l'assioma O2.

Dimostrazione. (i. $\Rightarrow$ ii.) L'implicazione si dimostra in modo analogo alla Proposizione 1.8, ma ricorrendo all'assioma O5 invece che all'assioma O6. Costruire le rette che mandano contemporaneamente i punti P e Q sulla retta p grazie all'assioma O6 equivale infatti a costruire le rette passanti per P tali che il punto Q sia riflesso sulla retta p tramite l'assioma O5. La figura 2.1(a) mostra la costruzione completa.
(ii. $\Rightarrow$ i.) Siano P e Q due punti costruibili in $\mathcal{T}$ e sia r l'asse del segmento PQ. Grazie all'assioma O5 è possibile costruire le rette s_1 e s_2 per P che riflettono il punto Q sulla retta r; tali rette incontrano r in due punti A e B. Siano Q_1 e Q_2 i riflessi di Q tramite tali rette (tali punti sono costruibili per il Lemma 1.7). Per costruzione, i triangoli PQQ_1 e PQQ_2 sono equilateri e le rette s_1 e s_2 fungono da bisettrici dell'angolo $\widehat{P}$. Di conseguenza, il triangolo ABP è equilatero, quindi l'asse del segmento AB è la retta PQ cercata.

□

[2]Carl Friedrich Gauss, *Disquisitiones Arithmeticae*, New Haven: Yale University Press, 1966



(a) (i. ⇒ ii.) Costruzione asse del segmento PQ dati gli assiomi O1 e O5.

(b) (ii. ⇒ i.) Costruzione retta PQ dati gli assiomi O2 e O5.

Figura 2.1: Dimostrazione Proposizione 2.9.

Si noti che la teoria $\mathcal{T}_E$ necessita unicamente di due punti base X e Y in quanto il punto Z può essere facilmente costruito: per l'assioma O4 è costruibile la retta t perpendicolare alla retta XY e passante per X, mentre per l'assioma O5 è costruibile la retta passante per X che manda Y sulla retta t; quindi per il Lemma 1.7 è costruibile il punto Z dato dalla riflessione di Y rispetto a tale retta.

Disponiamo quindi di tutti gli elementi necessari per provare il seguente teorema:

Teorema 2.10. *In $\mathcal{T}$ in cui vale l'assioma O5 e uno tra gli assiomi O1 e O2, valgono anche gli assiomi O3, O4 e O7.*

Dimostrazione. La dimostrazione è analoga a quella svolta per la Proposizione 1.9. □

Dimostriamo inoltre la seguente proposizione, valida in ogni teoria assiomatica del *paper-folding* che presenti O3 tra i suoi assiomi.

Proposizione 2.11. *In $\mathcal{T}$ per cui valga l'assioma O3 è possibile riportare un segmento costruibile di qualsiasi lunghezza su un punto costruibile e lungo una qualsiasi semiretta costruibile in $\mathcal{T}$.*

Dimostrazione. Sia PQ un segmento costruibile e sia r una semiretta costruibile uscente da un punto R. Grazie al Lemma 1.4 si costruisce il segmento RS parallelo a PQ e avente la medesima lunghezza.
Se il segmento traslato giace già sulla semiretta r la dimostrazione è conclusa; altrimenti, per l'assioma O3, si costruisce la bisettrice dell'angolo individuato dalla semiretta r e la retta RS. Per il Lemma 1.7 è costruibile il punto S' dato dalla riflessione di S sulla semiretta r; il segmento RS' è quindi congruente al segmento PQ nella direzione di r. □

Numeri costruibili in $\mathcal{T}_E$

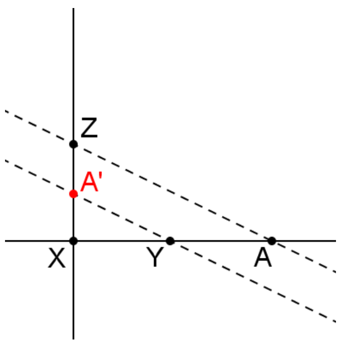
Per prima cosa, siamo interessati a caratterizzare analiticamente i punti costruibili in $\mathcal{T}_E$. Introduciamo un sistema di coordinate a partire dai due punti base, facendo corrispondere ai punti X e Y le coordinate $(0;0)$ e $(1;0)$. Si può quindi considerare la retta XY come asse x, mentre la retta perpendicolare a XY e passante per X, costruibile grazie all'assioma O4, sarà l'asse y.

Definizione 2.4. *Un numero reale α è costruibile in $\mathcal{T}_E$ se, dato un sistema di riferimento, si riesce a costruire il segmento di misura $|\alpha|$.*

Proposizione 2.12. *Indichiamo con $\mathcal{P}_E$ l'insieme dei numeri reali costruibili in $\mathcal{T}_E$. $\mathcal{P}_E$ è un campo che contiene i razionali.*

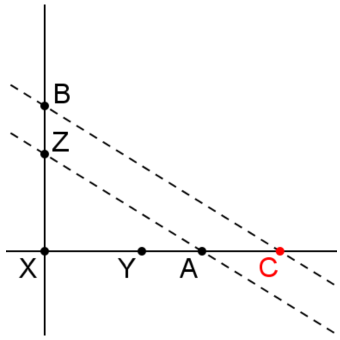
Dimostrazione. Siano X e Y i punti base per $\mathcal{T}_E$; si fissa un sistema di riferimento a partire da tali punti. Per il Lemma 1.4 si trasla il segmento XY lungo l'asse x in modo che un estremo coincida con Y; la traslazione permette di individuare un punto Z di coordinate $(2;0)$. Iterando il procedimento lungo l'asse x, si costruiscono gli interi $\mathbb{Z}$.
Mostriamo ora che $\mathcal{P}_E$ è chiuso per somma, differenza, reciproco, prodotto e rapporto di numeri costruibili.

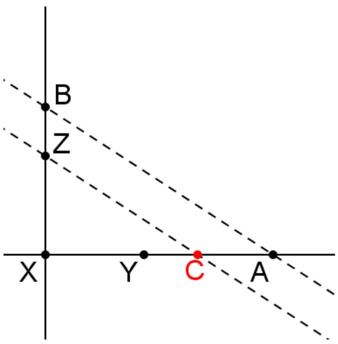
Somma e differenza: Dati a e b due numeri costruibili in $\mathcal{T}_E$, per la Proposizione 2.11 si costruiscono i segmenti XA e XB, aventi lunghezza rispettivamente $|a|$ e $|b|$, lungo la direzione positiva dell'asse x. Per il Lemma 1.4 si costruiscono i segmenti AB' e AB'' traslando il segmento XB lungo l'asse x in modo che un estremo coincida con il punto A. I segmenti XB' e XB'' hanno lunghezza pari a $|a-b|$ e $|a+b|$.



Reciproco: Dato a un numero costruibile in $\mathcal{T}_E$ non nullo, per la Proposizione 2.11 si costruisce il segmento XA avente lunghezza $|a|$, lungo la direzione positiva dell'asse x. Il segmento XY ha lunghezza pari a 1 per costruzione del sistema di riferimento e, per la Proposizione 2.11, è costruibile il punto Z appartenente all'asse y tale che XZ abbia lunghezza pari a 1. Per l'assioma O1 è costruibile la retta AZ e, attraverso la doppia applicazione dell'assioma O4, è costruibile la retta parallela a AZ e passante per il punto Y. Tale retta intersecando l'asse y individua il punto A'. Per la similitudine tra i triangoli rettangoli, il segmento XA' ha lunghezza $\frac{1}{|a|}$.

Prodotto: Dati a e b due numeri costruibili in $\mathcal{T}_E$, per la Proposizione 2.11 si costruiscono i segmenti XA e XB, aventi lunghezza rispettivamente $|a|$ e $|b|$, lungo le direzioni positive degli assi x e y. Il segmento XY ha lunghezza pari a 1 per costruzione del sistema di riferimento e per la Proposizione 2.11 è costruibile il punto Z appartenente all'asse y tale che XZ abbia lunghezza pari a 1. Per l'assioma O1 è costruibile la retta AZ e, attraverso l'applicazione dell'assioma O4 per due volte, è costruibile la retta parallela a AZ e passante per il punto B. Tale retta individua il punto C dalla sua intersezione con l'asse x. Per la similitudine tra i triangoli, il segmento XC ha lunghezza $|ab|$.





Rapporto: Dati a e $b \neq 0$ due numeri costruibili in $\mathcal{T}_E$, per la Proposizione 2.11 si costruiscono i segmenti XA e XB, aventi lunghezza rispettivamente $|a|$ e $|b|$, lungo le direzioni positive degli assi x e y. Il segmento XY ha lunghezza pari a 1 per costruzione del sistema di riferimento e per la Proposizione 2.11 è costruibile il punto Z appartenente all'asse y tale che XZ abbia lunghezza pari a 1. Per l'assioma O1 è costruibile la retta AB e, attraverso l'applicazione dell'assioma O4 per due volte, è costruibile la retta parallela a AB e passante per il punto Z. Tale retta individua il punto C dalla sua intersezione con l'asse x. Per la similitudine tra i triangoli, il segmento XC ha lunghezza $|\frac{a}{b}|$.

$\mathcal{P}_E$ è quindi un campo che contiene i razionali. □

Proposizione 2.13. *$\mathcal{P}_E$ è chiuso per l'estrazione di radice quadrata.*

Dimostrazione. Si consideri il punto costruibile Y di coordinate (1;0). Attraverso l'assioma O3 sono costruibili le bisettrici di I-III quadrante e II-IV quadrante; la riflessione di Y rispetto a ciascuna bisettrice individua i punti costruibili F di coordinate (0;1) e D di coordinate (0;-1). Per l'assioma O4 è costruibile la retta d perpendicolare all'asse y e passante per il punto D; tale retta avrà equazione $y = -1$. Si consideri la parabola avente fuoco F e direttrice d, avente equazione $y = \frac{1}{4}x^2$; la tangente in un generico punto costruibile $P = \left(k; \frac{1}{4}k^2\right)$ interseca l'asse y nel punto Q di coordinate $\left(0; -\frac{1}{4}k^2\right)$.
Sia n è un numero positivo costruibile, allora il punto Q di coordinate $\left(0, -\frac{1}{4}n\right)$ è costruibile per la Proposizione 2.12. Per l'assioma O5 si costruiscono le tangenti alla parabola

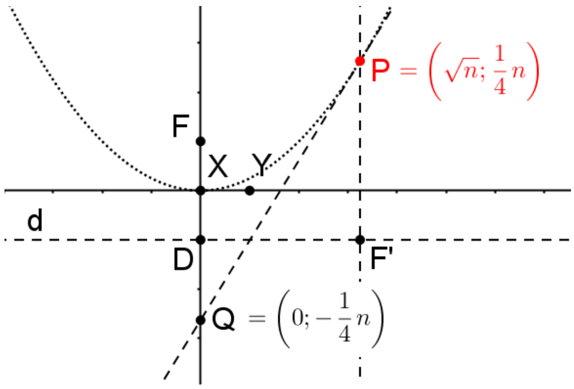


Figura 2.2: Costruzione del punto $P = \left(\sqrt{n}; \frac{1}{4}n\right)$ dato il numero positivo e costruibile n.

passanti per Q e per il Lemma 1.7, è costruibile il punto F' dato dalla riflessione di F rispetto ad una di tali tangenti. Per l'assioma O4 è possibile costruire la retta perpendicolare a d passante per F'; tale retta interseca la tangente nel punto di tangenza della parabola, ovvero nel punto costruibile P di coordinate $\left(\pm\sqrt{n}; \frac{1}{4}n\right)$, a seconda della tangente utilizzata. Abbiamo quindi mostrato che $\mathcal{P}_E$ è chiuso per estrazione di radice quadrata. $\square$

La seguente proposizione chiarisce il legame tra numeri e punti costruibili nella teoria assiomatica del *paper-folding* $\mathcal{T}_E$.

Proposizione 2.14. *Un punto P è costruibile in $\mathcal{T}_E$ se e solo se ha coordinate numericamente costruibili in $\mathcal{T}_E$.*

Dimostrazione. ($\Rightarrow$) Sia P un punto costruibile in $\mathcal{T}_E$, su cui è stato fissato un sistema di riferimento a partire dai punti base. Allora, per l'assioma O4, sono costruibili le perpendicolari agli assi passanti per il punto P. Tali rette individuano due punti costruibili A e B, uno su ciascun asse. I segmenti XA e XB hanno misura pari al modulo delle coordinate di P, che sono quindi costruibili.
($\Leftarrow$) Siano x e y due numeri reali costruibili in $\mathcal{T}_E$, su cui è stato fissato un sistema di riferimento a partire dai punti base. Allora, per la Proposizione 2.11, si possono traslare i segmenti di lunghezza $|x|$ e $|y|$ sugli assi con un estremo corrispondente al punto X. Grazie all'assioma O4 si costruiscono le perpendicolari agli assi per gli estremi di tali segmenti; tali rette si incontrano nel punto $P = (x; y)$ che è quindi costruibile. $\square$

Le costruzioni della teoria $\mathcal{T}_E$ e le costruzioni con riga e compasso

Desideriamo dimostrare che la teoria del *paper-folding* $\mathcal{T}_E$ permette di effettuare le medesime costruzioni realizzabili con riga e compasso. Attraverso la seguente proposizione proviamo che poter effettuare le medesime costruzioni equivale a poter costruire i medesimi numeri reali. Si può infatti dimostrare che:

Proposizione 2.15. *Due teorie permettono di effettuare le medesime costruzioni se e solo se i numeri reali costruibili attraverso tali teorie sono gli stessi.*

Dimostrazione. ($\Rightarrow$) Se due teorie permettono di effettuare le medesime costruzioni, segue immediatamente che anche i numeri reali costruibili attraverso tali teorie sono gli stessi, in quanto le due teorie porteranno alla costruzione degli stessi segmenti.
($\Leftarrow$) Se i numeri reali costruibili attraverso due teorie sono gli stessi, allora tali teorie avranno gli stessi punti costruibili per la Proposizione 2.14. Inoltre, per il Lemma 1.2 ogni retta costruibile ha almeno due punti costruibili. Tutte le teorie assiomatiche dispongono dell'assioma O1 per tracciare la retta per due punti, mentre, lavorando con la riga e il compasso, è possibile tracciare tale retta utilizzando la riga. Vi sono quindi anche le medesime rette costruibili e, di conseguenza, si possono effettuare le medesime costruzioni. $\square$

Mostriamo quindi che $\mathcal{T}_E$ e la geometria euclidea delle costruzioni con riga e compasso presentano i medesimi numeri costruibili.

Teorema 2.16. *I numeri costruibili in $\mathcal{T}_E$ corrispondono ai numeri costruibili con riga e compasso, ovvero $\mathcal{P}_E = \mathbb{E}$.*

Dimostrazione. Sappiamo che i numeri reali costruibili con riga e compasso sono quelli appartenenti al minimo campo contenente i razionali e chiuso rispetto all'estrazione di radici quadrate di elementi positivi. Grazie alla Proposizione 2.13 possiamo quindi affermare che $\mathbb{E} \subseteq \mathcal{P}_E$.
Per il viceversa è sufficiente verificare che tutti i numeri in $\mathcal{P}_E$ si ottengono con le sole operazioni di campo ed estrazione di radice. Ciò risulta evidente per i punti base; mostriamo che si verifica anche per le rette e i punti costruibili applicando gli assiomi della teoria $\mathcal{T}_E$, ovvero O1 e O5.
Dati due punti costruibili A e B aventi coordinate $(x_A; y_A)$ e $(x_B; y_B)$ per l'assioma O1 è costruibile la retta AB, avente equazione:

$$y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A)$$

Il coefficiente angolare e il termine noto di tale retta si ottengono con le sole operazioni di campo.
Dati due punti costruibili $P = (x_P; y_P)$ e $Q = (x_Q; y_Q)$ e data r una retta costruibile di equazione $y = \overline{m}x + \overline{q}$, attraverso l'assioma O5 si costruisce la retta t di equazione $y = mx + q$ che passa per il punto Q e riflette il punto P sulla retta r. Dal passaggio

di tale retta per il punto Q si ricava $q = y_Q - mx_Q$; inoltre sappiamo che il punto P' ottenuto dalla riflessione di P rispetto a t avrà coordinate:

$$x_{P'} = \frac{-2mq + x_P - m^2 x_P + 2my_P}{m^2 + 1} \qquad y_{P'} = \frac{2q + 2mx_P - y_P + m^2 y_P}{m^2 + 1}$$

Poiché P' deve appartenere alla retta r, attraverso alcuni passaggi algebrici si ottiene la seguente equazione per il calcolo del coefficiente angolare m:

$$(y_P - 2\overline{m}x_Q x_P + \overline{m}x_P - \overline{q})m^2 + (-2x_Q + 2x_P - 2\overline{m}y_Q - 2\overline{m}y_P)m + (2y_Q - y_P - \overline{q}) = 0$$

Di conseguenza m e q sono ottenibili con le sole operazioni di campo o estrazione di radice quadrata.
Infine, date due rette costruibili, un punto costruibile tramite la loro intersezione avrà coordinate $\left(\frac{q_2 - q_1}{m_1 - m_2}; \frac{m_1 q_2 - m_2 q_1}{m_1 - m_2}\right)$ con m_1, m_2 i coefficienti angolari delle rette e q_1, q_2 i loro termini noti; il punto avrà quindi coordinate che si ottengono con le sole operazioni di campo. $\square$

La teoria $\mathcal{T}_E$ permette quindi di effettuare le medesime costruzioni realizzabili con riga e compasso. Ci apprestiamo a dimostrare che l'introduzione dell'assioma O6 porta alla realizzazione di alcune costruzioni aggiuntive; ciò rende il *paper-folding* uno strumento più "potente" della riga e del compasso in termini di potenzialità costruttive.

2.2 Costruzioni con il *paper-folding*

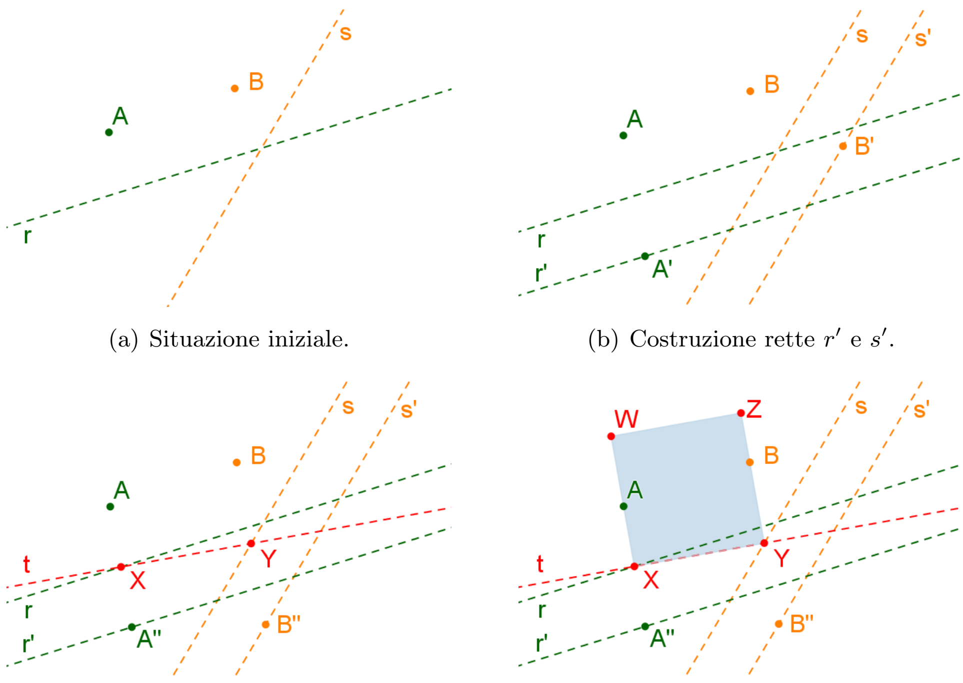
2.2.1 Quadrato di Beloch

L'assioma O6 fu introdotto per la prima volta negli anni Trenta del secolo scorso da Margherita Piazzolla Beloch (1879 – 1976), docente di Geometria e di Matematiche Complementari presso l'Università di Ferrara. Attraverso gli articoli *Lezioni di matematiche complementari* [5] e *Sul metodo del ripiegamento della carta per la risoluzione dei problemi geometrici* [6] provò che attraverso il *paper-folding* è possibile risolvere le equazioni di terzo grado e, di conseguenza, alcuni problemi che erano risultati non risolubili per mezzo di riga e compasso. Nella presente sezione, traendo ispirazione dal suo lavoro, mostriamo le potenzialità della piegatura della carta.

Dall'analisi svolta nel capitolo precedente, sappiamo che l'assioma O6 permette di trovare la tangente comune a due parabole di cui sono dati fuoco e direttrice. Per ragioni geometriche, è noto che possono esistere fino a tre tangenti comuni; tale fatto suggerisce che attraverso il sesto assioma sia possibile risolvere le equazioni di terzo grado. Beloch realizzò una costruzione, detta "quadrato di Beloch", che, attraverso l'utilizzo del sesto assioma, permette di individuare una radice reale delle equazioni di terzo grado. La seguente proposizione illustra come effettuare tale costruzione.

Proposizione 2.17. *Dati due punti costruibili A e B e due rette costruibili r e s, è costruibile un quadrato $WXYZ$ con i due vertici adiacenti X e Y appartenenti rispettivamente alle rette r e s e le rette WX e YZ passanti per A e B rispettivamente. Tale figura è detta "quadrato di Beloch".*

Dimostrazione. Dati A, B punti costruibili e r, s rette costruibili, per il Lemma 1.7 si possono costruire i punti A' riflettendo il punto A rispetto alla retta r, e B' riflettendo il punto B rispetto alla retta s. Applicando due volte l'assioma O4, si costruiscono le rette r' e s' passanti rispettivamente per i punti A', B' e parallele rispettivamente alle rette r e s. Per l'assioma O6 si costruisce la retta t che riflette contemporaneamente A e B rispettivamente su r' e s'; tale riflessione individua i punti A'' e B''. Il punto medio X del segmento AA'' appartiene sia alla retta r sia alla retta t per costruzione; analogamente il punto medio Y del segmento BB'' è il punto di intersezione tra la retta s e la retta t. Inoltre, le rette AA'' e BB'' risultano essere perpendicolari alla retta t per costruzione di t. Per mezzo dell'assioma O5 si costruisce la retta passante per X che manda il punto Y sulla retta AA'' dal lato di A. La riflessione individua il punto W sulla retta AA'' tale che $WX \cong XY$. Analogamente si costruisce il punto Z sulla retta BB'' tale che $YZ \cong XY$. Il poligono $WXYZ$ è quindi il quadrato cercato.



(a) Situazione iniziale.

(b) Costruzione rette r' e s'.

(c) Utilizzo dell'assioma O6 e costruzione dei punti X e Y.

(d) Conclusione della costruzione del quadrato di Beloch.

Figura 2.3: Dimostrazione Proposizione 2.17.

□

Bisogna ora dimostrare che tale costruzione permette di determinare, se esiste, una radice reale di una equazione di terzo grado. Per effettuare tale dimostrazione è necessario introdurre il "metodo di Lill".

2.2.2 Metodo di Lill

Il "metodo di Lill" è un procedimento grafico per la risoluzione di equazioni polinomiali di grado n, illustrato dall'ingegnere militare austriaco Eduard Lill (1830 - 1900) in una sua nota del 1867 pubblicata sui *Nouvelles Annales de Mathématiques*.

Il metodo consente di individuare, ammesso che esista, una radice reale di un polinomio di grado n a coefficienti reali $p(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$ attraverso la sua rappresentazione per mezzo di una spezzata i cui segmenti hanno lunghezza e orientamento dipendenti dai coefficienti del polinomio. Descriviamo i passaggi che costituiscono il metodo.

Dato un polinomio a coefficienti reali $p(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$:

a) Ci si pone nell'origine O di un piano cartesiano e si crea una spezzata, a partire dai coefficienti del polinomio $p(x)$, muovendosi nelle quattro direzioni: destra, sinistra, alto e basso.

   1. Si inizia sempre guardando la direzione positiva dell'asse delle ascisse, si procede in avanti o indietro a seconda del segno di a_n, fino al raggiungimento di un punto A_n tale che la distanza $|OA_n|$ corrisponda al valore di $|a_n|$.
   2. Giunti in A_n si effettua una rotazione di 90° verso sinistra e si prosegue in avanti o indietro, a seconda del segno di a_{n-1}, fino al raggiungimento di un punto A_{n-1} tale che la distanza $|A_n A_{n-1}|$ corrisponda al valore di $|a_{n-1}|$.
   3. Attraverso ulteriori rotazioni di 90° verso sinistra, si prosegue con la costruzione della spezzata fino a raggiungere il punto B tale che la distanza $|A_1 B|$ corrisponda al valore di $|a_0|$.

   Nel caso in cui un certo coefficiente a_i sia pari a zero allora si effettuerà ugualmente una rotazione verso sinistra e si avanzerà di una distanza nulla. Una volta giunti in B si è ottenuto una linea spezzata di $n+1$ segmenti tutti perpendicolari o paralleli tra loro.

b) Si torna nell'origine del piano cartesiano e si vuole costruire una spezzata di n segmenti perpendicolari o paralleli che unisca l'origine con il punto B, chiamata "cammino risolvente". Il primo segmento di questa spezzata dovrà unire il punto O con un punto appartenente alla retta $A_n A_{n-1}$, mentre il secondo segmento dovrà essere perpendicolare al primo e terminare su un punto della retta $A_{n-1}A_{n-2}$. Si procede in tal senso finché l'n-esimo segmento non termina nel punto B. Si deve quindi determinare l'angolo orientato α con cui inclinare il primo segmento del cammino risolvente rispetto a OA_n. L'angolo α designato sarà tale che $x_0 = -\tan\alpha$ è una radice reale del polinomio $p(x)$.

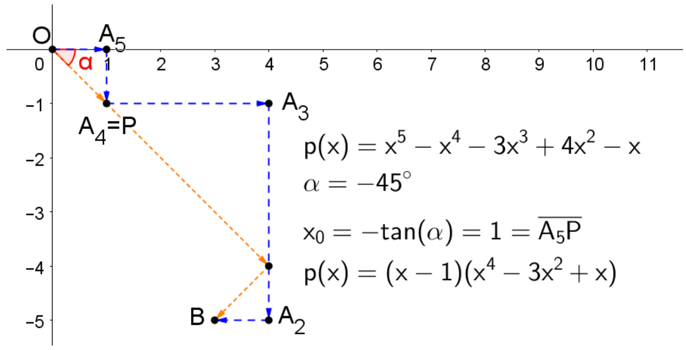


Figura 2.4: Metodo di Lill applicato ad un polinomio di quinto grado.

Se il polinomio $p(x)$ è monico e $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, si ha $x_0 = -\tan\alpha = -\overline{A_nP}$ con P l'estremo del cammino risolvente che appartiene al segmento A_nA_{n-1}; se invece $p(x)$ è monico e $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$, si ha $x_0 = -\tan\alpha = \overline{A_nP}$. La figura 2.4 mostra una applicazione del metodo ad un polinomio $p(x)$ monico di quinto grado.

Nel caso in cui il polinomio $p(x)$ sia di terzo grado, utilizzare il metodo di Lill per la risoluzione grafica equivale a costruire il quadrato di Beloch con A e B rispettivamente i punti iniziale e finale della spezzata e r e s le due rette su cui deve incidere il cammino risolvente, ovvero le rette A_3A_2 e A_2A_1.

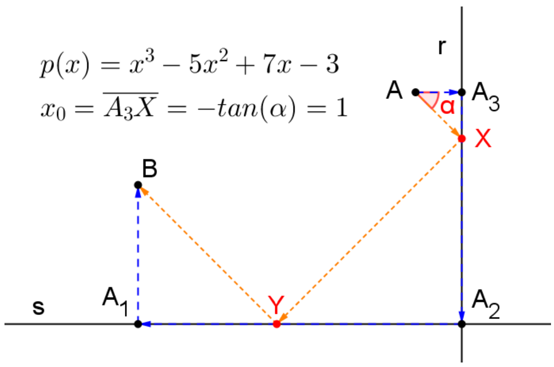


Figura 2.5: Il quadrato di Beloch individua il cammino risolvente per i polinomi di terzo grado.

Come si vede in figura 2.5, i punti X e Y sono i punti in cui il cammino risolvente incontra rispettivamente le rette A_3A_2 e A_2A_1; di conseguenza, si avrà $|x_0| = \overline{A_3X}$. Il quadrato di Beloch rappresenta quindi un metodo grafico per la risoluzione delle equazioni di terzo grado.

2.2.3 Numeri costruibili e problemi classici risolubili

Sia $\mathcal{T}'$ la teoria assiomatica del *paper-folding* definita nel Capitolo 1 tale che $\mathcal{S}' = \{O1,O6\}$. Siano X e Y i punti base della teoria; il terzo punto base Z può essere facilmente costruito ricorrendo agli assiomi O4 e O5, secondo il procedimento eseguito per $\mathcal{T}_E$. Diamo la seguente definizione, analoga alla Definizione 2.4 data in precedenza:

Definizione 2.5. *Un numero reale α è costruibile in $\mathcal{T}'$ se, dato un sistema di riferimento, si riesce a costruire il segmento di misura $|\alpha|$.*

Indichiamo con $\mathbb{O}$ l'insieme dei numeri reali costruibili in $\mathcal{T}'$. Tale insieme gode delle seguenti proprietà:

Proposizione 2.18. *$\mathbb{O}$ è un campo contenente i razionali, chiuso per estrazione di radice quadrata e per estrazione di radice cubica.*

Dimostrazione. Ricordiamo che O5 $\in \mathcal{S}'$ per il Teorema 1.9. Allora, analogamente a quanto dimostrato per la Proposizione 2.12 e per la Proposizione 2.13, $\mathbb{O}$ è un campo contenente i razionali, chiuso per estrazione di radice quadrata. Mostriamo che è chiuso anche per estrazione di radice cubica.
Si consideri il punto base Y, per il Lemma 1.7 si costruisce il punto A simmetrico di Y rispetto all'asse y. Se n è un numero costruibile, allora è costruibile il punto B di coordinate $(0, n)$. La spezzata formata dai punti A, X, B rappresenta il polinomio $p(x) = x^3 - n$. Si effettua quindi la costruzione del quadrato di Beloch con i punti A, B

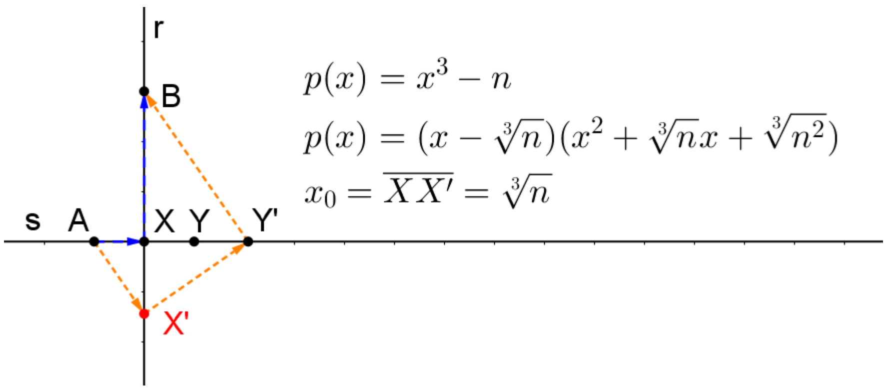


Figura 2.6: Costruzione di $\sqrt[3]{n}$ utilizzando il quadrato di Beloch.

e prendendo gli assi y ed x rispettivamente come rette r e s. Si ottiene il punto X' appartenente all'asse y tale che $x_0 = \overline{XX'}$. Poiché è noto che $p(x) = (x - \sqrt[3]{n})(x^2 + \sqrt[3]{n}x + \sqrt[3]{n^2})$, si ha $x_0 = \overline{XX'} = \sqrt[3]{n}$. Il numero $\sqrt[3]{n}$ è quindi costruibile.

□

Teorema 2.19. *Un numero reale α è costruibile in $\mathcal{T}'$ a partire da un campo K_0 se e solo se esiste una catena di campi di numeri reali $K_0 < K_1 < ... < K_i < ... < K_n$ tali che $\alpha \in K_n$ e $[K_{i+1} : K_i] \leq 3 \ \forall i = 1, ..., n$.*

Dimostrazione. ($\Rightarrow$) Sia $e_1, e_2, ..., e_n$ una costruzione piegando la carta nella teoria $\mathcal{T}'$ a partire dai punti base X e Y. Sia K_0 il campo contenente le coordinate dei punti base. Analogamente, procedendo per induzione, per ogni $i > 0$ sia K_i il campo ottenuto dal precedente campo K_{i-1} aggiungendovi le coordinate del nuovo elemento e_i; nel caso in cui e_i sia un punto si aggiungono le sue coordinate, se invece è una retta si aggiungono i coefficienti della sua equazione. Proveremo che $K_i = K_{i-1}(u, v)$ con v di grado ≤ 2 su K_{i-1} e u di grado ≤ 3 su $K_{i-1}(v)$.
Se e_i è un punto allora le sue coordinate sono già in K_{i-1} poiché l'intersezione di due rette e la riflessione di un punto rispetto ad una retta si realizzano con operazioni razionali. Analogamente se e_i è una retta ottenuta applicando l'assioma O1.
Nel caso in cui e_i sia una retta ottenuta applicando l'assioma O6, è necessario il seguente lemma per terminare la dimostrazione:

Lemma 2.20. *In un riferimento cartesiano ortogonale Oxy si considerino il punto $A = (1, 0)$ e la retta $a = -1$. Sia r una retta che riflette il punto A sulla retta a. Introdotto il punto generico $B = (u, v)$, sia $B' = (X, Y)$ il riflesso di B rispetto a r; allora risulta $(X - u)(X^2 + Y^2 - u^2 - v^2) + 2(Y - v)^2 = 0$.*

Dimostrazione. Sia $A' = (-1, t)$ un punto generico sulla retta a. La retta r che riflette A su A' ha equazione $2x - ty + \frac{t^2}{2} = 0$. Il riflesso di B rispetto a tale retta r si ottiene imponendo che AA' e BB' siano paralleli e $\frac{B+B'}{2} \in r$. Tali condizioni portano alla creazione del seguente sistema: $\begin{cases} -\frac{t}{2} = \frac{Y-v}{X-u} \\ 2\frac{X+u}{2} - t\frac{Y+v}{2} + \frac{t^2}{2} = 0 \end{cases}$
Isolando t nella prima equazione e sostituendo quanto trovato nella seconda si trova il polinomio indicato. □

Dati i punti A e B e le rette a e b, l'assioma O6 riflette contemporaneamente ciascun punto sulla rispettiva retta. Introduciamo un nuovo sistema di riferimento, affinché il punto A e la retta a abbiano le coordinate dell'enunciato del Lemma 2.20. Allora i coefficienti della trasformazione lineare $x \to x'$, $y \to y'$ sono in un'estensione $K_i = K_{i-1}(v)$ di grado ≤ 2 che contiene le coordinate di A e i coefficienti di a. Questo passaggio ha comportato l'allungamento della catena dei campo K_i, senza venir meno

alle condizioni sui gradi.
Mettendo a sistema l'equazione data dal Lemma 2.20 e l'equazione data dall'appartenenza del punto B' alla retta b, si ottiene un'equazione algebrica di grado 3 in x (o in y) a coefficienti reali. Ciò conclude la dimostrazione di questa prima implicazione.
($\Leftarrow$) Sia $K_{i+1} = K_i(u_i)$ con u_i uno zero di un polinomio di grado ≤ 3 avente coefficienti $a_i \in K_i$. Sappiamo che u_i è costruibile in K_i per la Proposizione 2.18. Si procede quindi per induzione fino a costruire $u_n = u$. □

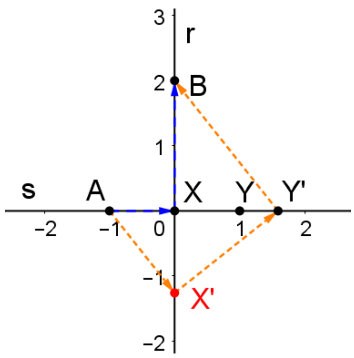
Il *paper-folding* permette quindi di risolvere alcuni dei problemi classici visti in precedenza e che si erano rivelati non risolubili attraverso l'uso di riga e compasso.

Duplicazione del cubo

Il problema della duplicazione del cubo ha origini antiche; secondo Eratostene (III sec. a.C.) venne posto dall'oracolo di Delo (V sec. a.C.), il quale riferì agli abitanti di Atene che la pestilenza da cui erano afflitti sarebbe giunta al termine se fossero riusciti a costruire un altare avente volume doppio rispetto a quello cubico allora esistente. La leggenda narra che gli ateniesi non portarono a termine il compito, e la pestilenza continuò.

Il problema della duplicazione del cubo continuò ad essere trattato da molteplici matematici, fino a quando non si giunse a dimostrare l'impossibilità di effettuare tale costruzione con riga e compasso, come afferma la Proposizione 2.7.

Per essere risolto, tale problema richiede la costruzione del numero reale $\sqrt[3]{2}$, ovvero di una radice reale dell'equazione $x^3 = 2$. Attraverso la Proposizione 2.18 è stato dimostrato che $\mathbb{O}$ è un campo contenente i razionali chiuso per estrazione di radice cubica; mostriamo quindi la risoluzione di tale problema ricorrendo al *paper-folding*.



1. Dati i punti base X e Y, si costruisce un sistema di riferimento e, per il Lemma 1.7, si costruisce il punto A simmetrico di Y rispetto all'asse y.

2. Poiché $\mathbb{O}$ contiene i razionali, è costruibile il punto B di coordinate $(0, 2)$. La spezzata formata dai punti A, X, B rappresenta il polinomio $p(x) = x^3 - 2$.

3. Si effettua la costruzione del quadrato di Beloch con i punti A, B e prendendo le rette XB e AX rispettivamente come rette r e s.

4. La costruzione individua un punto X' appartenente all'asse y le cui coordinate sono $(0, -\sqrt[3]{2})$. Il segmento XX' ha quindi lunghezza pari a $\sqrt[3]{2}$.

Trisezione dell'angolo

Un altro problema che abbiamo visto essere non risolubile, in generale, per mezzo di riga e compasso è quello della trisezione dell'angolo. Tuttavia, attraverso il *paper-folding* è possibile trisecare gli angoli, in quanto nella teoria assiomatica del *paper-folding* $\mathcal{T}'$ vale la seguente proposizione:

Proposizione 2.21. *Sia α un angolo costruibile in $\mathcal{T}'$, allora l'angolo β pari ad un terzo di α è costruibile in $\mathcal{T}'$.*

Dimostrazione. Dato un angolo costruibile $\alpha = C\widehat{O}A$, si costruiscono la retta OC e la retta perpendicolare ad OC passante per O grazie agli assiomi O1 e O4. Chiamiamo rispettivamente b e a tali rette. Per Lemma 1.4 si costruisce il punto B traslando il segmento OA lungo la retta OA in modo che un estremo coincida con O; si avrà quindi $OA \cong BO$. Si applica l'assioma O6 e si costruisce la retta t che porta A su a e contemporaneamente B su b. Si costruisce il punto O', il riflesso di O rispetto a t per il Lemma 1.7; si individua così l'angolo $\beta = C\widehat{O}O'$. Mostriamo che $\beta = \frac{\alpha}{3}$.

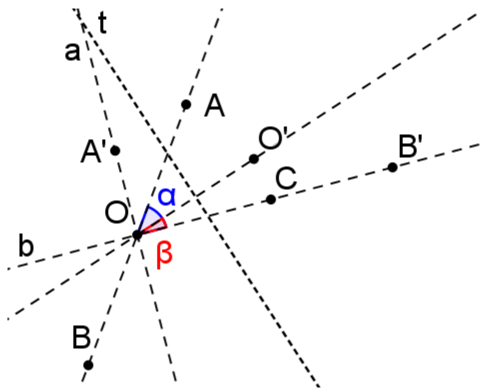


Figura 2.7: Costruzione di $\beta = \frac{\alpha}{3}$ e risoluzione del problema della trisezione dell'angolo.

Per costruzione $AO \cong OB$, di conseguenza per la riflessione si ha $AO \cong OB \cong A'O' \cong O'B'$. Inoltre, per costruzione $A'\widehat{O}B' \cong \frac{\pi}{2}$, di conseguenza per la riflessione si ha $A\widehat{O'}B \cong A'\widehat{O}B' \cong \frac{\pi}{2}$. Il triangolo $AO'B$ è quindi rettangolo, per cui $AO \cong OO' \cong OB$. Per la riflessione si ha $OB \cong O'B' \cong OO'$, il triangolo $OO'B'$ è quindi isoscele e $2\beta + O\widehat{O'}B' \cong \pi$ per somma angoli interni del triangolo. Poiché A, O, B sono allineati, anche A', O', B' lo sono; quindi $A'\widehat{O'}O + O\widehat{O'}B' \cong \pi$.
Da $2\beta + O\widehat{O'}B' \cong \pi \cong A'\widehat{O'}O + O\widehat{O'}B'$ si ottiene quindi $2\beta \cong O\widehat{O'}A' \cong A\widehat{O}O'$. Ciò permette di concludere la dimostrazione, in quanto è stato provato che $\alpha = A\widehat{O}C \cong A\widehat{O}O' + \beta \cong \beta + 2\beta = 3\beta$. $\square$

Costruzione dell' n-agono regolare

Abbiamo già stabilito che la costruzione di un n-agono regolare equivale, nel piano complesso, a costruire le radici dell'equazione $x^n - 1 = 0$ con $n \geq 3$. Dimostriamo il seguente teorema, enunciato da Benedetto Scimemi nel testo *Geometria sintetica* [31]:

Teorema 2.22. *L'equazione $x^n - 1 = 0$ è risolubile piegando la carta se e solo se n è della forma:*

$$n = 2^h \cdot 3^k \cdot p_1 \cdot \ldots \cdot p_s \quad h, k \geq 0$$

con p_1,...,p_s primi a due a due distinti del tipo $p_i = 1 + 2^{r_i} 3^{s_i}$ (primi di Pierpont[3]).

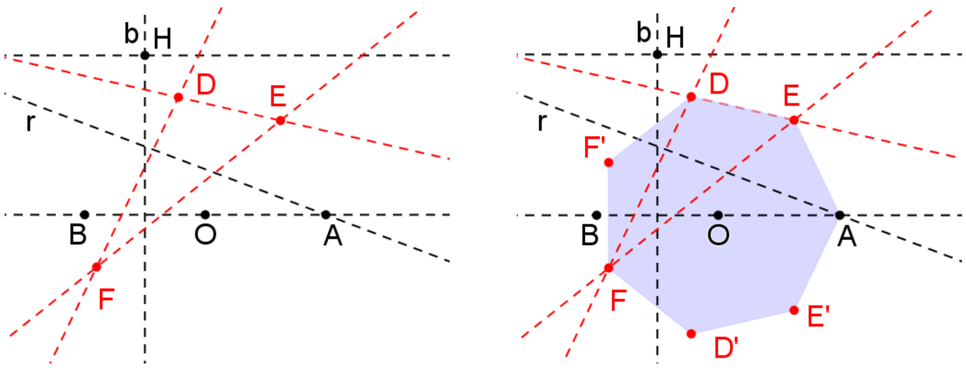
Dimostrazione. L'equazione è risolvibile se e solo se il numero $\cos \frac{2\pi}{n}$ è costruibile a partire dal campo $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali. Per il Teorema 2.19, occorre studiare i sottocampi del campo $\mathbb{Q}(\cos \frac{2\pi}{n})$. È noto che se $\epsilon = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$ è una radice n-esima primitiva dell'unità, allora $[\mathbb{Q}(\epsilon) : \mathbb{Q}] = \phi(n)$ dove ϕ è la funzione di Eulero; inoltre esistono campi intermedi $\mathbb{Q} = K_0 < K_1 < \ldots < K_i < \ldots < K_r = \mathbb{Q}(\epsilon)$ in cui tutte le estensioni intermedie hanno grado primo. Poiché $\mathbb{Q}(\epsilon)$ ha grado 2 sul campo reale $\mathbb{Q}(\cos \frac{2\pi}{n})$, quest'ultimo ha necessariamente grado $\frac{\phi(n)}{2}$ su $\mathbb{Q}$ ed esiste una analoga catena di campi reali $\mathbb{Q} = H_0 < H_1 < \ldots < H_i < \ldots < H_r = \mathbb{Q}(\cos \frac{2\pi}{n})$ aventi la medesima proprietà per i gradi dei campi intermedi.
D'altra parte, se dalla fattorizzazione in primi si ottiene $n = \prod p_i^{e_i}$, ne consegue che $\phi(n) = \prod p_i^{e_i - 1}(p_i - 1)$. Per il Teorema 2.19 e per le proprietà dei campi ciclotomici, è necessario e sufficiente che $\frac{\phi(n)}{2} = 2^h 3^k$ affinché $\cos \frac{2\pi}{n}$ sia costruibile. Ciò avviene se e solo se per ogni $p_i > 3$ risulta $p_i = 1 + 2^{r_i} 3^{s_i}$ e $e_i = 1$. Ciò conclude la dimostrazione. $\square$

Grazie al Teorema 2.22 è possibile concludere lo studio delle costruzioni realizzabili attraverso la piegatura della carta. Valgono infatti le seguenti proposizioni:

Proposizione 2.23. *L'ettagono regolare è costruibile in $\mathcal{T}'$ dati il centro e un suo vertice.*

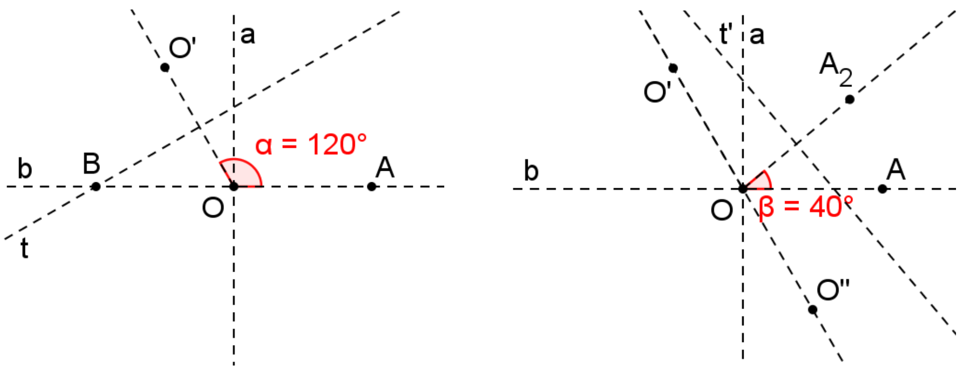
Dimostrazione. Siano assegnati il centro O e un vertice A del poligono da costruire. Si costruisce B riflettendo A rispetto alla perpendicolare ad AO per O. Sia b l'asse del segmento OB e sia r la retta passante per A tale che B sia riflesso su b. Chiamiamo H il riflesso di B sulla retta b. Sia infine a la retta per H parallela ad AO. Applicando l'assioma O6 per mandare contemporaneamente A su a e B su b, si costruiscono tre rette le quali si intersecano nei punti D, E e F; tali punti e i loro riflessi rispetto alla retta AO sono i restanti vertici del poligono da costruire (figura 2.8).
Per la dimostrazione del fatto che il poligono costruito è un ettagono regolare si veda il testo *Geometria sintetica* di B. Scimemi, pp. 94, [31]. $\square$

[3] James P. Pierpont (1866 - 1938), matematico americano.

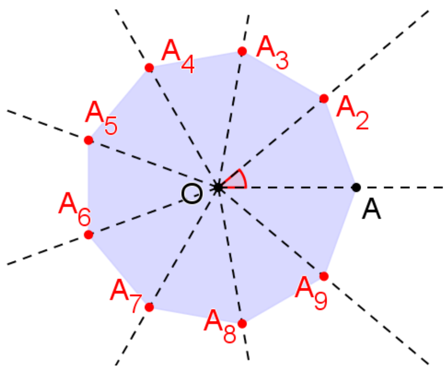


(a) Costruzione dei vertici D, E e F. (b) Conclusione della costruzione.

Figura 2.8: Costruzione dell'ettagono regolare per mezzo del *paper-folding* dati il centro e un vertice.



(a) Trisezione dell'angolo giro $A\widehat{O}A$. (b) Trisezione dell'angolo $A\widehat{O}O'$.



(c) Conclusione della costruzione.

Figura 2.9: Costruzione dell'ennagono regolare per mezzo del *paper-folding* dati il centro e un vertice.

Proposizione 2.24. *L'ennagono regolare è costruibile in $\mathcal{T}'$ dati il centro e un suo vertice.*

Dimostrazione. Dati il centro O e un vertice A del poligono da costruire, si triseca l'angolo giro $A\widehat{O}A$, ottenendo l'angolo $A\widehat{O}O'$ di $120°$. Successivamente, si esegue un'ulteriore trisezione dell'angolo $A\widehat{O}O'$ per ottenere l'angolo $A\widehat{O}A_2$ di $40°$; il segmento AA_2 è quindi un lato dell'ennagono regolare poiché $OA \cong OA_2$ per costruzione. Per il Lemma 1.7 è costruibile il punto A_3 dato dalla riflessione del punto A rispetto alla retta OA_2; analogamente si costruiscono i restanti punti A_i attraverso la riflessione dei punti A_{i-2} rispetto alle rette OA_{i-1} con $i = 4, ..., 9$. Viene così costruito l'ennagono regolare (figura 2.9). $\square$

Capitolo 3

Il *paper-folding* nell'insegnamento della matematica

Nel corso dell'ultimo secolo, diversi matematici e docenti hanno preso parte alla ricerca sui possibili impieghi del *paper-folding* nella didattica della matematica. Attraverso il seguente capitolo, presenteremo le principali attività, che coinvolgono l'utilizzo della piegatura della carta, proposte in classi scolastiche di diverso ordine e grado. Verrà inoltre effettuata una riflessione sulla validità didattica di tale strumento; per effettuare una simile valutazione, verranno presentate le principali nozioni di alcune teorie dell'apprendimento e dell'insegnamento che si sono affermate nel corso del XX secolo.

3.1 Teorie dell'apprendimento e dell'insegnamento

3.1.1 Teorie sull'intelligenza

L'indagine psicologica si occupa da sempre dello studio delle differenze individuali, riscontrabili in diverse sfere: emotiva, affettiva, motivazionale, ma soprattutto intellettuale. Non è facile, tuttavia, riuscire a dare una definizione universalmente riconosciuta di "intelligenza", poiché vi sono ancora numerose controversie non risolte che la riguardano. La prima tra le molte riguarda la contrapposizione tra "intelligenza" come un'unica qualità generale oppure come una collezione di abilità distinte.

Tra i principali sostenitori dell'intelligenza come un'unica qualità generale vi sono gli psicologi Alfred Binet (1857 - 1911) e Théodore Simon (1873 - 1961). Agli inizi del XX secolo Binet e Simon crearono un test, detto test del quoziente intellettivo (QI) finalizzato a posizionare su una scala di intelligenza da loro ideata chi vi si sottoponeva. Tale test venne impiegato per predire il successo lavorativo o scolastico di coloro cui veniva somministrato; in particolare, all'inizio del secolo molti bambini vennero valutati al fine di individuare i ragazzi considerati “ritardati” da inviare in scuole separate. Il lavoro di Binet e Simon, considerato a lungo uno dei più importanti successi della psicologia, diede il via ad una corsa alla realizzazione di test in grado di stimare sempre più accuratamente il quoziente intellettivo di chi vi si sottoponeva. Tali test sono tuttora impiegati per selezionare le persone dotate da inserire in specifici curricula scolastici, specialmente negli Stati Uniti, dove il loro impiego si è diffuso a partire dalla Prima Guerra Mondiale.

Anche lo psicologo cognitivo britannico Charles Spearman (1863 - 1945), fu un sostenitore della concezione unitaria dell'intelligenza; egli, attraverso l'analisi delle correlazioni positive che riuscì ad stabilire fra i diversi test, individuò quello che fu da lui denominato “fattore g d'intelligenza”. Osservò che i soggetti che avevano ottenuto un punteggio elevato in un test tendevano a conseguire punteggi elevati anche nelle restanti prove cui venivano sottoposti e spiegò tale correlazione attraverso l'esistenza di una comune sottostante abilità mentale, ovvero il fattore g. Secondo tale teoria, ad un fattore g elevato corrisponde di conseguenza un individuo più intelligente.

La correlazione individuata da Spearman non risultava però mai perfetta, per questo egli introdusse il concetto di abilità specifica per ogni tipo di test. Il fatto che la correlazione in alcuni casi fosse molto bassa, indusse altri autori a ideare dei modelli differenti, che presentavano l'intelligenza come più strutturata. Si consideri, ad esempio, Louis Thurston (1887 - 1955), il quale individuò dei gruppi di test altamente correlati tra loro, ma debolmente correlati tra gruppi differenti. Thurston concluse che le abilità mentali attivate da gruppi diversi di test siano tra loro relativamente indipendenti, e le chiamò “abilità mentali primarie”. Inizia quindi una transizione da un concetto di intelligenza generale ad un insieme articolato di abilità primarie.

Altri studiosi proposero modelli che prevedevano un numero sempre maggiore di fattori indipendenti; tuttavia, a partire dagli anni Settanta, iniziò a diffondersi un diverso approccio allo studio dell'intelligenza. Il fallimento delle scuole speciali per soggetti svantaggiati portò alla critica dei test d'intelligenza. Inoltre, venne messo in discussione il concetto di intelligenza come “abilità scolastica generale”, che non diceva nulla sui processi mentali attraverso i quali si risolvono i problemi, sulla capacità di adattamento e la comunicazione. Prese quindi avvio un filone di ricerca secondo il quale l'intelligenza è un fenomeno complesso ed in interazione continua con l'ambiente, il cui principale sostenitore è stato Howard Gardner (1943 -).

Gardner è il padre della *teoria delle intelligenze multiple* [15] [16]; egli effettuò molteplici studi sulle abilità dei bambini “normali” e sul deterioramento di tali abilità in persone che hanno subito traumi celebrali. Gardner giunse ad affermare l'esistenza di sette intelligenze indipendenti tra loro, le quali però interagiscono per produrre prestazioni che comunemente sono considerate intelligenti. Ciascuna intelligenza è separata dalle restanti ed è responsabile di distinti compiti (tabella 3.1). Secondo Gardner, ciascun individuo presenta tutte le sette intelligenze, ma ve ne sono alcune rispetto alle quali ciascuno brilla in misura maggiore e che vengono quindi maggiormente impiegate per risolvere i problemi.

Tipo di intelligenza	**Compiti correlati**
Intelligenza linguistica: include i meccanismi coinvolti nella fonologia, sintassi, semantica e pragmatica.	Leggere e scrivere testi di varia natura; comprensione del testo; comprensione del parlato; apprendere una nuova lingua.
Intelligenza logico-matematica: coinvolge l'uso e la comprensione di relazioni astratte.	Risolvere vari problemi matematici; fare i conti; sviluppare una dimostrazione matematica; ricorrere al ragionamento logico; individuare analogie e rapporti.
Intelligenza spaziale: concerne l'abilità di percepire l'informazione visiva o spaziale, di modificarla e trasformarla e di ricreare immagini visive in assenza del riferimento legato allo stimolo fisico iniziale.	Spostarsi da un posto all'altro; leggere le cartine; disporre oggetti in uno spazio; orientarsi.
Intelligenza musicale: consente alle persone di creare, comunicare e comprendere il significato che proviene dai suoni.	Cantare una canzone; comporre una suonata; apprezzare la struttura di un brano musicale.
Intelligenza corporeo-cinestetica: riguarda l'uso di tutte le parti del corpo per abitare lo spazio.	Ballare; giocare; correre; fare attività fisica.
Intelligenza interpersonale: si fonda sulla capacità di riconoscere e distinguere tra sentimenti, credenze e intenzioni delle altre persone.	Relazionarsi ad altre persone; capire il comportamento, le motivazioni e le emozioni degli altri.
Intelligenza intrapersonale: si fonda sulla capacità di distinguere tra le proprie emozioni e sentimenti.	Capire se stessi, chi siamo, cosa ci fa essere come siamo, come cambiamo dati i limiti preesistenti delle nostre abilità in funzione dei nostri interessi.

Tabella 3.1: Le sette intelligenze di Gardner affiancate dai relativi compiti cognitivi.

Negli stessi anni nacquero anche posizioni diverse da quella delle intelligenze multiple, sostenute dai ricercatori che ritenevano di dover concentrare l'attenzione su come le menti preferiscono funzionare piuttosto che sui gradi di successo nello svolgere le attività proposte. Iniziò quindi la ricerca sugli *stili cognitivi*.

3.1.2 Stili cognitivi e stili di apprendimento

Gli *stili cognitivi* sono le modalità attraverso le quali gli individui pensano, risolvono compiti e impiegano le proprie abilità; sono i meccanismi secondo i quali "preferiscono funzionare" le menti degli individui.

La ricerca sugli stili cognitivi si fa risalire agli inizi degli anni Quaranta del XX secolo, quando Gordon Allport (1897 - 1967) utilizzò per la prima volta tale terminologia. Ciò che differenzia le "abilità" individuate da altri autori, come ad esempio Thurston, dagli "stili cognitivi" è il fatto che quest'ultimi si riferiscono a differenze individuali costanti nei modi di organizzare ed elaborare le informazioni e l'esperienza, mentre le abilità si riferiscono ad un particolare dominio o una particolare materia cui sono relate.

Lungo tutto il XX secolo, diversi ricercatori si dedicarono agli stili cognitivi. Di conseguenza, vennero ideate molteplici teorie indipendenti e classificazioni, che a volte portarono all'attribuzione di denominazioni differenti a stili chiaramente sovrapponibili. Ad esempio, Sternberg propose una classificazione che definì dell'*autogoverno mentale*; egli effettuò un parallelo tra i *modus operandi* dei governi e le modalità di elaborazione cognitiva delle persone. Secondo tale teoria, gli individui in situazioni problematiche adottano particolari modalità che sono strettamente legate a strategie operative. Tutti gli stili proposti da Sternberg corrispondono quindi metaforicamente ad aspetti del governo. Il merito di tale impostazione consiste nel fatto che rese possibile operare una chiara separazione tra abilità e stile e ad assicurare che non vi fosse uno stile avente maggior valore di altri, come avviene per le funzioni governative [32].

Nonostante le classificazioni proposte da alcuni autori abbiano reso estremamente complesso creare dei riferimenti univoci, in tabella 3.2 è presente una suddivisione degli stili cognitivi condivisa da diversi autori, come George Miller (1920 - 2012) e Richard Riding. Secondo tale classificazione, per ogni categoria ciascun individuo utilizza ciascuno stile in percentuale differente, a causa dei suoi personali meccanismi di preferenza.

Tra gli stili cognitivi si collocano anche gli stili di apprendimento, il cui ruolo nel contesto scolastico è centrale. «Per stile di apprendimento si intende la tendenza di una persona a preferire un certo modo di apprendere-studiare; riguarda la sua modalità di percepire e reagire ai compiti legati all'apprendimento, attraverso la quale mette in atto, o sceglie, i comportamenti e le strategie per apprendere.» [8] Ciascun individuo, infatti, presenta delle tendenze costanti nell'utilizzo di determinate strategie sia nella percezione della realtà sia nell'elaborazione delle conoscenze; tali tendenze non hanno però un valore

CATEGORIE	STILI COGNITIVI	
Globale - Analitico	*Globale:* ci si focalizza sul quadro generale per procedere verso il particolare.	*Analitico:* ci si focalizza sui particolari per giungere al generale.
Convergente - Divergente	*Convergente:* si procede secondo logica, in funzione delle informazioni disponibili.	*Divergente:* si procede creativamente.
Sistematico - Intuitivo	*Sistematico:* si procede gradualmente all'analisi delle variabili.	*Intuitivo:* si procede formulando ipotesi e tentando di confermarle.
Verbale - Visuale	*Verbale:* si preferisce utilizzare un codice linguistico.	*Visuale:* si prediligono gli stimoli visivi/spaziali.
Impulsivo - Riflessivo	*Impulsivo:* tempo decisionale ridotto.	*Riflessivo:* tempo decisionale ampio.
Dipendente dal campo - Indipendente dal campo	*Dipendente dal campo:* percezione fortemente condizionata dal contesto.	*Indipendente dal campo:* percezione indipendente dal contesto.

Tabella 3.2: Alcune categorie nelle quali sono stati suddivisioni degli stili cognitivi da diversi autori.

prescrittivo, in quanto i compiti di apprendimento spesso richiedono l'utilizzo di strategie diverse e complementari. Il modello che ha maggiormente segnato la ricerca sugli stili di apprendimento è il modello di Kolb.

David Kolb (1939 -) fu il primo ad introdurre il concetto di apprendimento esperienziale, ovvero un processo secondo il quale la conoscenza è creata attraverso l'osservazione e la trasformazione dell'esperienza. Secondo tale teoria, l'apprendimento è una riflessione sulle azioni, e si basa su un ciclo in quattro fasi (figura 3.1), le quali si sostengono a vicenda:

- Esperienze concrete (CE) = l'apprendimento è influenzato principalmente dalle percezioni e dalle reazioni alle esperienze;
- Osservazione riflessiva (OR) = l'apprendimento è influenzato principalmente dal-

l'ascolto e dall'osservazione;

- Concettualizzazione astratta (CA) = l'apprendimento è influenzato principalmente dal pensiero e dall'analisi dei problemi in modo sistematico;
- Sperimentazione attiva (SA) = l'apprendimento è influenzato principalmente dall'azione, la sperimentazione e l'osservazione dei risultati.

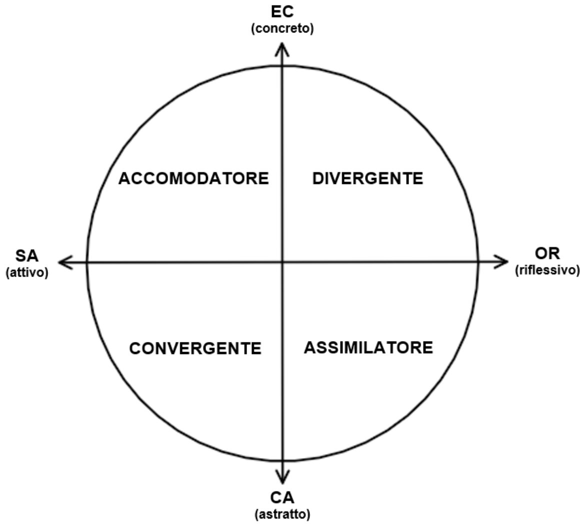


Figura 3.1: Il ciclo di Kolb e i quattro stili di apprendimento.

Ciascun individuo può iniziare il processo di apprendimento da un qualsiasi punto del ciclo, per poi proseguire lungo le restanti fasi; tuttavia spesso gli individui prediligono alcune fasi alle restanti. Prendendo nota delle fasi predilette nei processi di apprendimento, è possibile stabilire quale stile di apprendimento contraddistingue ciascun individuo: la distribuzione delle quattro modalità lungo due *continuum* aventi come poli rispettivamente concretezza/astrattezza (EC-CA) e sperimentazione attiva/riflessività (SA-OR), permette di individuare le posizioni che ciascun individuo assume rispettivamente nella scala EC-CA e SA-OR (figura 3.1). L'incrocio tra le due scale individua quattro distinti stili, che corrispondono a quattro tipi di soggetti: *convergente*, ovvero un concettualizzatore astratto interessato alla sperimentazione attiva; *accomodatore*, ovvero chi preferisce l'esperienza concreta ed è abile nella sperimentazione attiva; *divergente*, ovvero chi preferisce l'esperienza concreta ed è interessato all'osservazione riflessiva; *assimilatore*, ovvero un concettualizzatore astratto interessato all'osservazione riflessiva.

Tale modello è solamente uno tra i molti prodotti per indagare le modalità di apprendimento; scorrendo la letteratura risulta evidente come molta meno attenzione sia stata dedicata all'indagine degli stili di insegnamento. Ciò può essere motivato dalla tradizione di porre sempre lo studente al centro di qualsiasi discorso sui processi educativi; inoltre, risulta più semplice dedicarsi agli stili di apprendimento degli studenti, in quanto è possibile modificare le strategie che essi adottano in modo non maturo, mentre è più complesso ammettere che le metodologie adottate dagli insegnanti spesso non sono completamente adatte ai contenuti e ai contesti.

Tuttavia, è possibile ricavare importanti indicazioni su come strutturare la didattica consultando i risultati conseguiti dalla ricerca pedagogica. Ci apprestiamo, quindi, ad indagare le principali teorie dell'apprendimento prodotte dagli studi pedagogici generali.

3.1.3 Teorie dell'apprendimento

Nel corso del XX secolo vi è stato un progressivo abbandono della convinzione che nell'apprendimento e nell'insegnamento entrino in gioco unicamente fattori cognitivi; ad esso, infatti, contribuiscono anche fattori metacognitivi, linguistici, culturali e affettivi. La complessità acquisisce, quindi, sempre maggior importanza. Ciò ha comportato un'evoluzione all'interno della riflessione pedagogica generale, attraverso la codifica di diversi modelli di apprendimento, i quali sono ancora oggi presi come riferimento da chi si occupa di didattica.

Intorno agli anni Venti del XX secolo, si afferma il *comportamentismo*, il cui oggetto di studio è «il comportamento manifesto dei soggetti, a partire dall'assunto che la mente sia una "scatola nera" che è conoscibile solo attraverso le attività osservabili dell'individuo.» [4] Secondo tale teoria, è possibile modificare i comportamenti di un individuo e indurlo a fornire "risposte positive" attraverso il rinforzo positivo, ovvero l'assegnazione di un premio, o il rinforzo negativo, ovvero la sospensione di una condizione negativa preesistente. Nelle sue versioni più radicali, il comportamentismo riduce il comportamento umano ai meccanismi di stimolo e risposta osservati nel mondo animale, si pensi ad esempio alla ricerca di Ivan Pavlov (1849 - 1936) sui cani. Secondo tale estremizzazione, l'educazione degli esseri umani può essere equiparata all'addestramento animale.

Nelle sue espressioni più evolute, ad esempio nella concezione di Burrhus F. Skinner (1904 - 1990), il comportamentismo ha dato significativi contributi alla ricerca didattica. Innanzitutto, ha affermato la necessità di sistematicità e rigore nelle indagini svolte in campo educativo; ha inoltre portato l'attenzione verso i comportamenti osservabili, incoraggiando le ricerche sui comportamenti non verbali degli insegnanti. Il comportamentismo ha inoltre il merito di aver introdotto i concetti di *rinforzo positivo* e *feedback* nell'analisi dei processi educativi e scolastici. È possibile osservare come il modello didattico legato al comportamentismo caratterizzi largamente l'insegnamento della matematica tutt'oggi [4].

Il principale limite riscontrabile in tale movimento culturale è rappresentato dal fatto che propone un modello per il processo di insegnamento-apprendimento di tipo trasmissivo, trascurando gli elementi non tangibili che influiscono su tale processo, dall'intenzionalità educativa al senso del sapere, dai processi socio-emotivi e culturali a quelli più prettamente cognitivi [26].

Alcuni tra tali elementi non tangibili vengono invece considerati dal *cognitivismo*, la cui origine risale agli anni Venti, ma che si è affermato intorno agli anni Quaranta e Cinquanta del XX secolo; tra i principali esponenti di tale teoria dell'apprendimento incontriamo Ulric Neisser (1928 - 2012), Jean Piaget (1896 - 1980) e Lev S. Vygotskij (1896 - 1934). L'oggetto di studio del cognitivismo è il modo in cui la mente crea la conoscenza e il controllo cosciente del processo di conoscenza. Secondo tale approccio, l'apprendimento avviene quando il discente elabora le informazioni; ciò avviene attraverso tre fasi: acquisizione, trattamento, immagazzinamento. Viene quindi riconosciuto all'allievo un ruolo attivo nel processo di apprendimento.

I principali contributi alla didattica forniti da tale teoria sono:

- il concetto di *advanced organizer*, con cui si indica ogni forma di conoscenza precedentemente interiorizzata, ad esempio schemi, nozioni, sintesi, interrogativi, convinzioni ecc., che funge da selettore e organizzatore delle informazioni esterne [26];
- la teoria dell'analisi degli obiettivi o della programmazione per obiettivi.

Tuttavia, anche il cognitivismo trascura gli aspetti culturali e simbolici dell'apprendimento; non vi è quindi una completa risoluzione dei limiti già riscontrati per il comportamentismo.

Tra gli anni Cinquanta e Sessanta si diffonde una nuova teoria dell'apprendimento: il *costruttivismo*. La prima forma di costruttivismo che si è affermata è stata denominata *costruttivismo radicale*, il quale è stato elaborato dallo psicologo Erns von Glasersfeld (1917 - 2010). Tale movimento poggia su due principi cardine:

1. la conoscenza è costruita attivamente dal soggetto che apprende;
2. conoscere è un processo adattivo che organizza il nostro dominio di esperienze.

La teoria presenta un esplicito riferimento sia a Giambattista Vico (1668 - 1744), il quale affermava che si può conoscere unicamente attraverso un atto costruttivo, sia a Jean Piaget, secondo il quale la conoscenza rappresenta la più alta forma di adattamento all'ambiente e tale adattamento avviene attraverso due processi: assimilazione (l'incorporazione di un oggetto in uno schema cognitivo o comportamentale già acquisito) e accomodamento (modifica della struttura cognitiva o dello schema comportamentale per accogliere nuovi oggetti o eventi prima ignoti). A tale modello fa esplicito riferimento Emma Castelnuovo (1913 - 2014) nel suo testo *"Didattica della Matematica"* [9]; con il suo lavoro Castelnuovo suggerisce l'attuazione di una didattica "attiva", ovvero che fa ricorso all'azione, nell'insegnamento della matematica agli studenti degli indirizzi scolastici inferiori, corrispondenti alle attuali Scuole Primarie e Secondarie di I grado.

Negli anni Settanta si assiste infine all'affermazione del *costruttivismo internazionalista* (o *sociale*) della scuola postpiagetiana, secondo il quale alla base dell'apprendimento c'è il conflitto socio-cognitivo, ovvero la presa di coscienza da parte dell'allievo che ci sono risposte diverse dalla propria. Secondo tale teoria, è il confronto che produce apprendimento, non la correttezza delle teorie enunciate; inoltre, la conoscenza parte dai processi sensoriali, percettivi e intuitivi per essere poi organizzata in concetti, categorie, strategie logico-formali [26]. Viene quindi affermata la centralità del rapporto tra mente e corpo nella costruzione dei processi cognitivi; inoltre, si valorizza il ruolo dell'apprendimento informale.

Il ruolo dell'adulto nel processo di apprendimento risulta quindi essere quello di guida in questi processi di costruzione; l'insegnante ha il compito di predisporre esperienze seguendo il principio della gradualità, della progressione, e fornendo gli strumenti strettamente necessari affinché l'allievo sia il più autonomo possibile. Aderendo a tale prospettiva, Jerome Bruner (1915 - 2016) conia il concetto di *scaffolding*, ovvero la strategia di insegnamento-apprendimento che prevede l'eliminazione graduale dei livelli di assistenza man mano che gli studenti progrediscono e assorbono nuova conoscenza.

Con la fine del XX secolo si assiste quindi al riconoscimento della complessità del processo di insegnamento-apprendimento, e all'abbandono dell'ingenua idea che vi possano essere dei metodi e delle metodologie validi per tutti i soggetti coinvolti nell'esperienza educativa e per tutti i tempi e i luoghi in cui essa viene realizzata.

3.2 Il *paper-folding* come strumento didattico

3.2.1 Le potenzialità del *paper-folding*

L'analisi delle molteplici teorie sull'apprendimento svolta nella precedente sezione porta ad una inevitabile conclusione: l'apprendimento è un fenomeno complesso ed è necessario abbandonare l'idea che esista una strategia che assicuri l'apprendimento di tutti i soggetti coinvolti. Tuttavia, le differenti teorie affermano anche che, affinché si verifichi il migliore e maggiore apprendimento possibile, è necessario differenziare le modalità e gli strumenti impiegati nel processo di insegnamento-apprendimento. Ricorrere a diverse metodologie didattiche e impiegare differenti strumenti permette infatti il coinvolgimento del maggior numero di allievi, in particolare di coloro che presentano stili cognitivi che li portano a non raggiungere un buon apprendimento attraverso la didattica frontale e l'utilizzo di un numero ridotto di strumenti didattici.

Secondo tale prospettiva, i docenti vengono chiamati a rivestire un nuovo ruolo che prevede la predisposizione di esperienze idonee a stimolare la curiosità, l'interesse e la partecipazione degli allievi; agli insegnanti viene richiesto di fornire sussidi e ausili culturali, tecnico-disciplinari e materiali sufficientemente variegati e differenziati per rispettare e valorizzare i diversi approcci alla conoscenza, affinché gli studenti acquisiscano gli aspetti del sapere proposte e padroneggino i processi cognitivi che costituiscono l'obiettivo da conseguire. Il contesto didattico deve rivelarsi ricco, multiforme, così che gli alunni possano costruirsi un corposo numero di rappresentazioni differenti. Ciò significa che il contesto educativo dovrebbe presentare le conoscenze secondo diversi sistemi simbolici (visivo, verbale, simbolico, formale ecc.) e richiedere agli studenti di usare differenti tipi di attività e manipolazioni (concreta, legata ai sensi, ideativa ecc.). Viene incoraggiata la rinuncia alla centralità della lezione tradizionale, a favore dell'esperienza diretta, intesa non solo come manipolazione e costruzione di oggetti, ma anche di fruizione e decostruzione di materiali e testi diversi. Si predispone quindi una didattica che favorisca la ricerca e la costruzione attiva e autonoma del sapere e non la recezione passiva di contenuti e tecniche.

Tutto ciò richiede quindi che sia apportato un significativo mutamento nella realizzazione della pratica didattica, adottando strategie che mettano al centro l'esperienza degli studenti e utilizzando una maggior varietà di materiali e linguaggi nel corso delle lezioni. Tuttavia, la realizzazione di tale indicazione nella pratica didattica della matematica si è rivelato e si continua a rivelare estremamente difficoltoso, soprattutto in riferimento agli ordini scolastici superiori.

A tali indicazioni provenienti dal mondo pedagogico si uniscono le considerazioni effettuate dai numerosi studiosi che si sono occupati di didattica della matematica riguardanti l'importanza delle rappresentazioni nell'insegnamento della matematica. Efraim Fischbein (1920 - 1998) nel 1963 parla per la prima volta di *concetti figurali* [13], ovvero il principio secondo il quale gli oggetti geometrici presentano un doppio aspetto: uno di natura concettuale e uno di natura concreta, legato all'esperienza reale. Di conseguenza l'attività di produzione di immagini viene chiamata a rivestire un ruolo estremamente importante nella costruzione di un rapporto corretto tra i concetti e le loro rappresentazioni. Emma Castelnuovo (1913 - 2014) sostiene invece che un buon apprendimento in matematica avvenga attraverso l'utilizzo di rappresentazioni dinamiche, in quanto catturano l'attenzione molto più degli oggetti fissi [9].

Considerate le numerose indicazioni fornite da psicologi, studiosi di didattica e matematici, possiamo affermare come il *paper-folding* sia uno strumento che risponde in modo soddisfacente a tutte le necessità presentate finora. È possibile infatti osservare che:

- il *paper-folding* permette di produrre un'immagine degli oggetti geometrici incontrati nel corso delle lezioni, e quindi di costruire un rapporto corretto tra i concetti e le loro rappresentazioni;

- è uno strumento dinamico, che permette rappresentazioni mobili;
- è uno strumento facilmente manipolabile, ciò permette agli studenti di realizzare numerose rappresentazioni differenti, così che essi possano costruire autonomamente la conoscenza e il sapere;
- fornisce una rappresentazione differente, che può essere affiancata alle più classiche (si pensi ad esempio alle rappresentazioni con riga e compasso in ambito geometrico);
- è un'attività che coinvolge la componente sensoriale;
- favorisce l'approccio alla conoscenza per coloro che presentano stili cognitivi dominanti di tipo divergente, visuale e/o intuitivo e per coloro che hanno una spiccata intelligenza spaziale;
- è uno strumento versatile, in quanto può essere impiegato in diversi segmenti del percorso scolastico in matematica, non solo in ambito geometrico.

Per queste ragioni il *paper-folding* si rivela un interessante strumento che può essere impiegato in progetti e attività laboratoriali all'interno dei percorsi di matematica nelle scuole di ogni ordine e grado. Inoltre, la piegatura della carta, alla luce delle caratteristiche che sono state messe in evidenzia, si rivela un buon candidato per diventare uno strumento di uso quotidiano, di cui gli studenti possono decidere di servirsi o meno, a seconda delle proprie inclinazioni personali, al pari della riga, del compasso e dei software di geometria dinamica, sempre più presenti nelle classi odierne.

La piegatura della carta viene già utilizzata in alcune realtà scolastiche, attraverso progetti che rientrano prevalentemente in ambito geometrico. Attraverso la prossima sezione verranno presentati brevemente alcune attività esistenti che prevedono l'utilizzo del *paper-folding* nella pratica scolastica italiana.

3.2.2 Proposte didattiche esistenti sull'utilizzo del *paper-folding*

La diffusione del *paper-folding* in Occidente ha avuto inizio anche grazie alla pubblicazione di un testo di didattica della matematica che si occupava di piegatura della carta. Nel 1893 l'insegnante di matematica indiano T. Sundara Row pubblicò infatti il libro *Geometric Exercises in Paper Folding* [28], un testo realizzato per guidare i suoi studenti nella costruzione di molteplici figure geometriche utilizzando la piegatura della carta. Per effettuare le pieghe indicate da Row non era necessaria alcuna particolare abilità matematica, tuttavia tali semplici raffigurazioni permettevano di veicolare importanti nozioni matematiche, come è stato sapientemente illustrato dall'autore all'interno del volume. Il testo non è mai stato tradotto dall'inglese all'italiano; nonostante ciò sono molti gli autori italiani del secolo successivo che vi hanno fatto riferimento nel presentare altri possibili progetti didattici che coinvolgono la piegatura della carta.

Ad esempio, il libro *Pensare con le mani le piegature della carta* di M. Locatelli ed E. Rottoli [22] è stato realizzato prendendo spunto dal testo di Sundara Row. Il libro, scritto nel 2009, presenta un progetto che prevede l'utilizzo del *paper-folding* per affrontare le lezioni di geometria con gli studenti della Scuola Secondaria di I grado; è composto da sei capitoli, che percorrono la geometria dai sui enti fondamentali, passando per i triangoli e le loro proprietà, fino alle rette parallele. Nell'introduzione, gli autori commentano la sperimentazione che è state effettuata in alcune classi e dichiarano che, affrontando il progetto, gli alunni hanno mostrato impreviste difficoltà nella manualità. Tuttavia, secondo la loro opinione, la fatica nel costruire ha facilitato la determinazione e la memorizzazione delle proprietà incontrate nel corso delle lezioni. Infatti, mentre proprietà imparate in altre classi attraverso definizioni comunicate verbalmente sono rimaste vaghe e sono state memorizzate malamente, il costruire manualmente ha permesso agli alunni di acquisire una conoscenza più solida e di trasferire tale conoscenza nell'analisi delle proprietà delle figure. Complessivamente, la sperimentazione ha avuto quindi un esito positivo, secondo l'opinione degli autori, con gli alunni che sono apparsi molto coinvolti e motivati. Tale progetto sembra quindi confermare come la didattica attiva porti ad un maggior apprendimento, in quanto richiede un esercizio non meccanico, e come il *paper-folding* sia un valido strumento didattico, in grado di favorire un buon apprendimento.

La piegatura della carta come strumento didattico ha guadagnato sempre maggior notorietà nel corso degli ultimi anni; il suo utilizzo nella didattica della matematica viene suggerito anche da alcune riviste divulgative scientifiche. Ad esempio, il magazine *Prisma* [30], nell'edizione di luglio-agosto 2021 ha pubblicato un articolo per promuovere l'utilizzo della piegatura della carta nell'insegnamento della geometria nelle scuole di ogni ordine e grado. Nell'articolo, vengono sottolineate due importanti caratteristiche del *paper-folding*, che lo rendono uno strumento didattico in grado di accompagnare gli alunni lungo tutto il loro percorso scolastico: ha una significativa valenza formativa come attività manuale e permette una semplice manipolazione e modifica degli oggetti geometrici creati. Per tali ragioni viene suggerito il suo impiego:

- nella Scuola Primaria, attraverso la realizzazione di figure non geometriche, per allenare la precisione nell'esecuzione delle pieghe e per permettere agli studenti di effettuare attività di esplorazione geometrica;

- nella Scuola Secondaria di I grado, per costruire figure geometriche e scoprirne le proprietà;

- nella Scuola Secondaria di II grado, per costruire figure solide e per effettuare rappresentazioni che assistano gli studenti nel processo dimostrativo.

Anche alcuni portali che forniscono materiali per i docenti presentano una serie di attività a disposizione degli insegnanti che prevedono l'utilizzo del *paper-folding*. Ad esempio presso il portale *DeA SCUOLA*, casa editrice De Agostini, nella sezione riservata alla Scuola Secondaria di I grado, sono presenti progetti di didattica laboratoriale riguardanti argomenti come il calcolo di aree e perimetri, il Teorema di Pitagora, i triangoli rettangoli particolari, i poligono inscritti e circoscritti, ma anche il piano cartesiano e le frazioni; non vengono suggeriti quindi unicamente attività geometriche, bensì sono presenti anche alcuni laboratori che prevedono l'utilizzo della piegatura della carta in ambito algebrico. Anche per la Scuola Secondaria di II, presso il portale, si incontrano sia attività geometriche che prevedono l'utilizzo del *paper-folding*, ad esempio riguardanti la geometria euclidea e la geometria analitica nello spazio, sia attività per l'apprendimento dell'analisi, che permettono di accompagnare gli studenti nell'affrontare gli studi di funzione, la continuità e la derivabilità attraverso la piegatura della carta.

È possibile riscontrare un legame tra la recente diffusione del virus SARS-CoV-2 a partire da dicembre 2019 e l'aumento nel numero di progetti che coinvolgono l'uso del *paper-folding* proposti ai docenti delle Scuole Primarie e Secondarie attraverso riviste e portali che si occupano di didattica. Il passaggio alla didattica a distanza ha infatti portato con sé la necessità di individuare alcune attività laboratoriali realizzabili anche a distanza e il *paper-folding* si è rivelato uno strumento adatto a tale compito, in quanto è un'attività che richiede pochi materiali ed è in grado di aiutare gli studenti più giovani a mantenere la concentrazione e l'interesse, anche ritrovandosi a partecipare alle lezioni da casa.

Mettendo da parte la situazione straordinaria in cui la scuola italiana si è trovata ad operare negli ultimi due anni, risulta evidente come il *paper-folding* si presti più facilmente ad essere impiegato nelle Scuole Primarie e Secondarie di I grado, rispetto che nelle Secondarie di II grado. I progetti ideati per gli ordini scolastici inferiori sono infatti molto più numerosi, permettono di affrontare sezioni più ampie dei programmi scolastici e presentano un livello di complessità ridotto, tale per cui gli studenti riescono a prendere parte a tali progetti anche se privi di allenamento nella piegatura della carta. Il *paper-folding* può essere impiegato per portare gli studenti della Scuola Primaria a scoprire gli enti geometrici, seguendo l'idea di scuola attiva promosso da E. Castelnuovo [9]: la piegatura della carta, in quanto strumento dinamico, a differenza del disegno su carta, permette agli studenti di sperimentare e giungere da soli alla conoscenza degli enti geometrici. Anche nella Scuola Secondaria di I grado il *paper-folding* presenta molteplici possibili applicazioni in virtù della sua natura dinamica: gli studenti hanno la possibilità di modificare agevolmente ciò che producono e quindi di cogliere analogie e tratti comuni tra le varie configurazioni. In tal modo gli alunni possono effettuare autonomamente delle congetture ed imparare ad applicare il metodo induttivo.

Sono, invece, numericamente inferiori i progetti che prevedono l'utilizzo del *paper-folding* ideati per la Scuola Secondaria di II grado. Oltre alle attività laboratoriali nominate in precedenza, si incontrano alcuni progetti che prevedono l'impiego della piegatura della carta per effettuare le costruzioni non eseguibili con l'ausilio di riga e compasso, come la duplicazione del cubo, la trisezione dell'angolo o la costruzione dell'ettagono regolare. Tali progetti si rivelano di difficile attuazione sia perché i contenuti trattati sono abbastanza complessi, sia perché, per essere eseguiti, richiedono una buona abilità nella realizzazione di figure attraverso la piegatura della carta. Altre attività che prevedono l'impiego del *paper-folding* nella Scuola Secondaria di II grado si concentrano sulla realizzazione di figure solide, oppure sulle trasformazioni geometriche. Ciò che accomuna i diversi progetti presentati fino ad ora è il fatto che prevedono l'utilizzo della piegatura della carta unicamente in segmenti limitati del programma scolastico, al fine di portare gli studenti ad apprendere alcune specifiche nozioni. Il *paper-folding* non viene proposto come strumento da utilizzare nella quotidianità didattica, assieme ad altri strumenti, per fornire una pluralità di rappresentazioni differenti. Inoltre, molti dei progetti proposti presentano un livello di complessità elevato, tale per cui gli studenti faticano ad affrontare tali attività se non sono stati precedentemente preparati e allenati alla piegatura della carta.

Anche l'attività nata all'interno del progetto *Liceo Matematico* avviata presso il Liceo Scientifico Ulivi di Parma con la collaborazione dell'Università di Parma [23] prevede l'utilizzo del *paper-folding* unicamente in un segmento del programma di geometria, non promuovendo di conseguenza l'ingresso di tale strumento all'interno del bagaglio personale di ciascuno studente. Il progetto, presentato alle classe prime del Liceo Scientifico, prevede l'utilizzo della piegatura della carta per avvicinare gli studenti al concetto di sistema assiomatico. Gli studenti potevano prendere parte alla sperimentazione su base volontaria, ciò ha comportato la realizzazione dell'attività unicamente con la parte di studenti che solitamente mostra maggior affinità con la matematica e la geometria. Non avendo proposto il progetto a tutto il gruppo classe, non è stato quindi possibile stabilire se il *paper-folding* sia un valido strumento da impiegare nella pratica didattica quotidiana delle Scuole Secondarie di II grado, in grado di rendere più accessibile la geometria agli studenti che solitamente presentano alcune difficoltà.

Alla luce di tutti gli elementi finora presentati, ci si può chiedere se le potenzialità del *paper-folding* non possano venir sfruttate maggiormente anche negli ordini scolastici superiori qualora venisse effettuato un graduale inserimento di tale strumento nel bagaglio di ciascuno studente a partire dai primi anni della Scuola Secondaria di II grado. Ciò permetterebbe agli studenti di disporre di uno strumento che può favorire il loro apprendimento, secondo quanto detto nel presente capitolo, e al contempo getterebbe le basi per poter affrontare, in futuro, molte delle attività presentate in precedenza, disponendo dell'adeguata preparazione.

Nei prossimi capitoli viene quindi presentato un progetto realizzato per gli studenti del primo anno della Scuola Secondaria di II grado, che prevede l'utilizzo del *paper-folding* nello studio della geometria. Nel corso del progetto verranno affrontati i contenuti compresi tra lo studio del sistema assiomatico e la realizzazione di elementari dimostrazioni geometriche; la piegatura della carta verrà proposta come strumento da affiancare alla riga, al compasso e ad un software di geometria dinamica, per effettuare tutte le rappresentazioni necessarie alla comprensione degli argomenti trattati. Tale progetto si propone quindi di verificare se la piegatura della carta possa essere uno strumento di facile impiego all'interno della didattica della geometria che può essere adottato da ciascuno studente per orientarsi all'interno della disciplina e quindi affrontare i quesiti che gli vengono sottoposti. La scelta di effettuare la sperimentazione in ambito geometrico non vuole suggerire di limitare l'utilizzo della piegatura della carta in tale disciplina; tale scelta è stata effettuata poiché si ritiene che l'ambito geometrico sia il più idoneo per entrare in contatto con lo strumento. Uno volta padroneggiato, potrà essere impiegato anche in attività riguardanti l'algebra o l'analisi.

Capitolo 4

Progetto per la Scuola Secondaria di II grado

Attraverso il presente capitolo conosceremo le attività da cui è composto il progetto realizzato per gli studenti del primo anno della Scuola Secondaria di II grado, che prevede l'utilizzo del *paper-folding* nello studio della geometria. Per ciascuna attività sono state indicate la durata, le modalità di lavoro, le finalità e i materiali occorrenti per la sua realizzazione. I materiali cui si farà riferimento sono stati inseriti in appendice A.

4.1 Presentazione iniziale

Il seguente progetto di sperimentazione didattica è stato ideato al fine di collaudare l'impiego del *paper-folding* nella didattica dell'introduzione alla geometria euclidea nelle Scuole Secondarie di II grado. Nel corso della sperimentazione gli studenti apprendono cos'è il metodo assiomatico-deduttivo, oltre al significato dei concetti di postulato, assioma, definizione, teorema, dimostrazione secondo quanto espresso dalle Indicazioni Nazionali per la Scuola Secondaria di II grado di qualunque Liceo [11]. Inoltre, allenano la propria abilità risolutiva di semplici esercizi dimostrativi che coinvolgano angoli e segmenti. Tali contenuti vengono affrontati utilizzando la piegatura della carta come ulteriore strumento didattico, che affianca la riga e il compasso e l'uso del software GeoGebra.

Il progetto ha origine da due domande di ricerca:

- La piegatura della carta, uno strumento di facile impiego all'interno della didattica della geometria euclidea, può aiutare gli studenti a raggiungere un più profondo livello di comprensione della sua natura assiomatico-deduttiva?

- La piegatura della carta può essere uno strumento adottato da ciascuno studente per orientarsi all'interno della disciplina e quindi affrontare i quesiti che gli vengono sottoposti?

Sono state quindi stabilite due ipotesi di ricerca:

1. l'utilizzo del *paper-folding* da parte del docente durante le lezioni comporta un apprendimento maggiore da parte degli alunni;
2. gli studenti adottano spontaneamente la piegatura della carte come strumento del quale disporre per risolvere più facilmente gli esercizi che vengono loro sottoposti.

Il progetto è volto a verificare se la sperimentazione porta ad una conferma o ad una smentita di tali ipotesi di ricerca.

4.2 Struttura progetto

Il progetto può essere suddiviso in tre fasi distinte:

1. Introduzione al software GeoGebra e alla piegatura della carta;
2. Scoperta e comprensione degli elementi su cui si fonda il metodo deduttivo;
3. Comprensione e produzione di dimostrazioni.

Obiettivo della prima fase è assicurarsi che tutti gli studenti padroneggino i prerequisiti necessari per affrontare le fasi successive. Essa è strutturata in due distinte attività: la prima orientata alla scoperta di GeoGebra, la seconda funzionale ad apprendere le regole alla base della piegatura della carta. In particolare, l'introduzione a GeoGebra può subire una significativa semplificazione qualora tutti gli studenti abbiano già dimestichezza con il suddetto software. Si precisa inoltre che, nel caso in cui l'istituto in cui verrà effettuata la sperimentazione non disponga della strumentazione necessaria per permettere agli studenti di svolgere l'attività prevista, è possibile rimuovere tale attività dal progetto. In tal caso, si avrà cura di eliminare i riferimenti all'impiego del software GeoGebra nelle restanti fasi. Si è deciso di includere l'utilizzo di un software di geometria dinamica nel progetto, in quanto è ampiamente provato il fatto che sia un utile strumento da impiegare nell'insegnamento della matematica [4].

La seconda fase si compone di quattro distinte attività, ciascuna delle quali sonda uno degli elementi su cui fonda il metodo deduttivo: enti primitivi, assiomi, definizioni e teoremi. Il tutto viene affrontato all'interno del contesto dato dalla Geometria Euclidea, con solo sporadici cenni a geometrie differenti.

La fase finale ha come obiettivo il raggiungimento da parte degli studenti di una buona comprensione dei principi su cui poggia una dimostrazione e l'acquisizione da parte di essi delle abilità necessarie per effettuare semplici dimostrazioni geometriche in modo autonomo.

Vengono ora presentati i contenuti di ciascuna attività, fornendo precise indicazioni rispetto ai tempi di realizzazione e i materiali da impiegare. Le seguenti schede rappresentano quindi la programmazione delle attività in cui è strutturato il progetto, e possono essere impiegate per riproporre tale sperimentazione. Invece, la descrizione della prima attuazione del progetto è consultabile nel capitolo 5. Il progetto assume come testo di riferimento il libro *"Colori della Matematica 1"* per i Licei Scientifici di L. Sasso e C. Zanone [29]. È possibile consultare i file con i materiali necessari per la realizzazione delle varie attività nell'apposita appendice A.

4.2.1 Introduzione al software GeoGebra e alla piegatura della carta

Attività 1 - Introduzione a GeoGebra

Durata: 1-2 ore, contestualmente al livello di partenza del gruppo classe.
Modalità di lavoro: A coppie.
Finalità: Gli studenti apprendono come lavorare con GeoGebra attraverso la vista *Grafici.*
Materiale occorrente: Un pc/tablet per studente, GeoGebra versione 5 classica. Si consiglia di effettuare in anticipo le seguenti azioni:

- Menu Opzioni → Etichettatura → Solo i nuovi punti;
- Menu Opzioni → Dimensione del carattere: 16 o 18 pt;
- Terminate queste impostazioni, scegliere Menu Opzioni → Salva impostazioni.

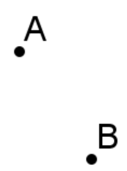
Ciascuno studente accede attraverso il dispositivo assegnatogli a GeoGebra. Dal momento che verrà utilizzata solamente la vista *'grafici'*, l'insegnante mostra alla classe come nascondere gli assi cartesiani, la griglia e come chiudere la vista *'algebra'*. Si suddividono quindi gli studenti in coppie, avendo premura di affiancare eventuali studenti che conoscono già il software a studenti che non l'hanno mai utilizzato. Viene lasciato del tempo per l'esplorazione autonoma dei comandi da parte degli studenti, poi l'insegnante illustra brevemente il loro funzionamento. Si assegnano quindi alcune elementari costruzioni a ciascuna coppia, da eseguire in modo collaborativo. Ad esempio, è possibile assegnare la costruzione di un segmento, di due rette perpendicolari, due rette parallele, una circonferenza, un triangolo qualunque, un triangolo equilatero a partire dal lato, un quadrato a partire dal lato e un rombo. Si presti attenzione al fatto che GeoGebra considera poligoni unicamente gli elementi costruiti attraverso lo strumento *'Poligono'*, di conseguenza non è sufficiente costruire una poligonale chiusa, non intrecciata. Terminate le costruzioni, si invitano gli studenti a trascinare i punti-base di ciascuna costruzione, per verificare se esse si mantengono valide.

Attività 2 - Introduzione alla piegatura della carta

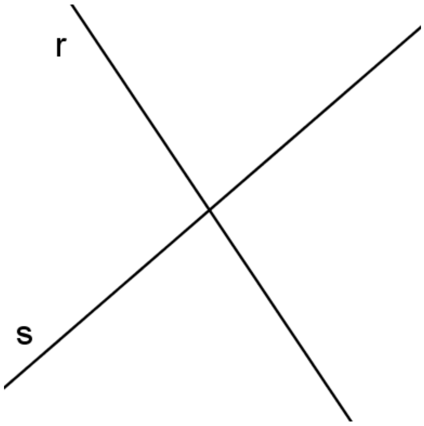
Durata: 1 ora.
Modalità di lavoro: Individuale.
Finalità: Gli studenti apprendono le regole alla base del *paper-folding* e l'importanza di conoscere le regole alla base di una teoria prima di utilizzarla. Tale consapevolezza servirà successivamente come esempio per comprendere l'importanza di esplicitare un'assiomatica.
Materiale occorrente: Sei fogli formato A5 e un paio di fogli trasparenti per studente. Si consiglia di stampare anticipatamente sui fogli trasparenti le immagini mostrate in figura 4.1, prestando attenzione ad inserire due volte la prima. Tali sette immagini rappresentano il punto di partenza per effettuare una specifica piega della teoria del *paper-folding*. Va inoltre inserita come ottava tessera una delle immagini presenti in figura 4.2, recante una conformazione per la quale non è realizzabile la piega richiesta. Gli schemi delle pieghe per effettuare le costruzioni di quadrato, triangolo isoscele e triangolo equilatero.

Si consegnano a ciascuno studente le sue otto tessere. Inizialmente si chiede loro di mettere da parte l'ottava tessera, e lavorare con le restanti sette. Per ciascuna immagine viene richiesto di effettuare una specifica piega:

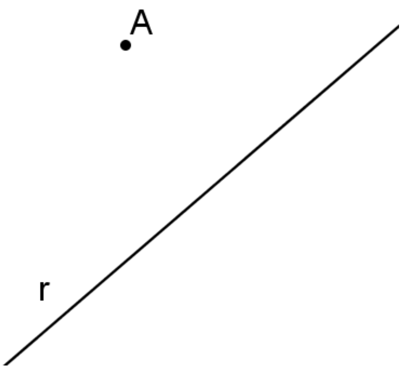
1. Piega il foglio in modo che la piega passi per entrambi i punti A, B.
2. Piega il foglio in modo che i punti A, B si sovrappongano.
3. Piega il foglio in modo che le due rette r, s si sovrappongano.
4. Piega il foglio in modo che la piega passi per il punto A e faccia sovrapporre la retta r a se stessa.
5. Piega il foglio in modo che la piega passi per il punto A e sovrapponga il punto B alla retta r.
6. Piega il foglio in modo che il punto A si sovrapponga alla retta r e il punto B si sovrapponga alla retta s.
7. Piega il foglio in modo che la retta s si sovrapponga a se stessa e il punto A si sovrapponga con la retta r.



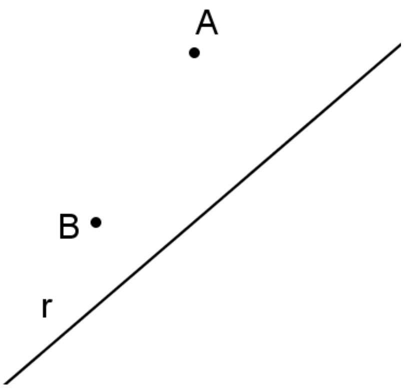
(a) Prima e seconda piega.



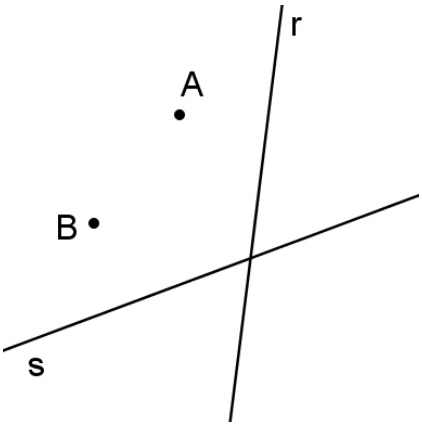
(b) Terza piega.



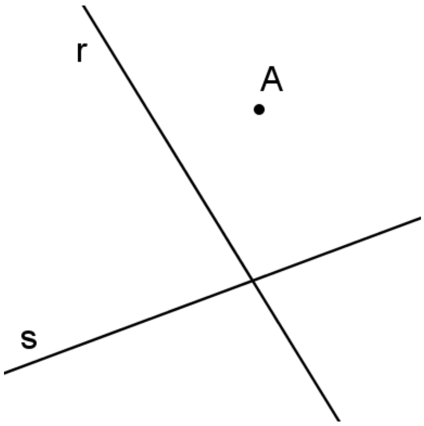
(c) Quarta piega.



(d) Quinta piega.



(e) Sesta piega.

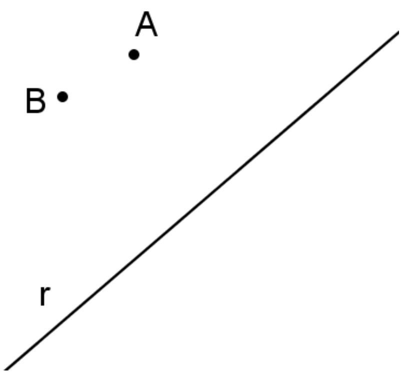


(f) Settima piega.

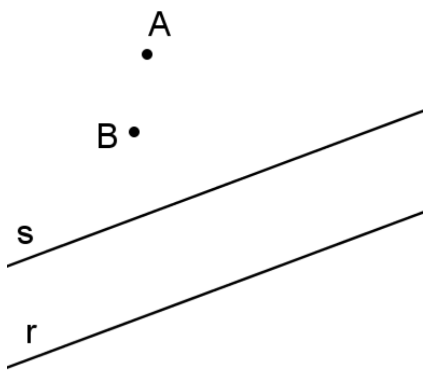
Figura 4.1: Conformazioni iniziali per effettuare le prime sette pieghe.

Effettuate le sette pieghe descritte in precedenza, ciascuno studente può dedicarsi all'ultima piega che gli è stata assegnata. Ciascuno è in possesso di un'immagine tra quelle presenti in figura 4.2. La prima immagine rappresenta una diversa conformazione iniziale per la quinta piega, la seconda immagine riguarda invece la sesta piega e la terza immagine è inerente alla settima piega. Ciascuno studente deve tentare di effettuare la piega associata all'immagine di cui è in possesso. Quando realizzerà che non è possibile effettuare la piega richiesta, lo si invita a cercare di fornire una motivazione a questa impossibilità.

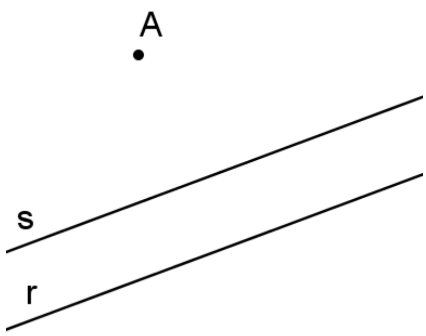
Si incoraggia una libera condivisione delle conclusioni cui ciascuno studente è giunto; ciò che deve emergere dal confronto è che, mentre le prime quattro pieghe sono sempre



(a) Conformazione alternativa per la quinta piega.



(b) Conformazione alternativa per la sesta piega.



(c) Conformazione alternativa per la settima piega.

Figura 4.2: Possibili ottave immagini da assegnare a ciascuno studente, recanti conformazioni alternative della quinta, sesta e settima piega.

effettuabili, le ultime tre non sempre lo sono. Il confronto tra i lavori dei singoli studenti permette inoltre di portare all'attenzione della classe come alcune istruzioni potessero essere soddisfatte in modi diversi. Si pensi ad esempio alla terza piega, la quale poteva venir eseguita in due modi differenti.

In questo modo gli studenti possono conoscere tutti i tipi di pieghe che potranno incontrare nell'esercizio del *paper-folding*, ponendo l'attenzione sulle peculiarità di ciascuna di esse. Si consiglia di non rivelare che i sette tipi di pieghe effettuate rappresentano quelli che comunemente vengono indicati come gli *"assiomi della teoria degli origami"*, dal momento che ancora non è stata svolta la lezione sugli assiomi e ciò potrebbe generare confusione negli studenti.

La lezione si conclude con una breve spiegazione della differenza tra le pieghe *'a valle'* e *'a monte'*, cui segue la realizzazione di alcuni semplici costruzioni geometriche attraverso la piegatura della carta: quadrato, triangolo isoscele, triangolo equilatero.

4.2.2 Scoperta e comprensione degli elementi su cui si fonda il metodo deduttivo

Attività 3 - Enti primitivi

Durata: 1 ora.
Modalità di lavoro: In gruppo.
Finalità: Gli studenti riscoprono quali sono gli enti primitivi della Geometria Euclidea, prestando attenzione al fatto che come gli enti primitivi sono privi di definizione. La classe scopre che il senso degli enti primitivi non è dato da un'idea intuitiva che ciascuno ha di essi, bensì dalle loro relazioni reciproche.
Materiale occorrente: Tre fogli di carta trasparente in formato a piacere tra A6, A5 e A4 per ciascuno studente. Un dispositivo per studente con GeoGebra installato e accesso a internet. Quaderno, matita, riga e compasso per ciascuno studente. L.I.M. o proiettore e accesso a Wooclap.

Attraverso la piattaforma Wooclap si sottopongono agli studenti tre *brainstorming* sui seguenti tre argomenti: punto, retta e piano. Gli alunni sono invitati a scrivere tutto ciò che conoscono o pensano di conoscere riguardo questi tre elementi, che si rivelano essere gli enti primitivi della Geometria Euclidea. Si invita il gruppo classe a contribuire anche con immagini che suggeriscono loro questi tre elementi. Al termine del *brainstorming*, si analizzano le risposte che sono state inviate, individuando quelle che hanno il chiaro intento di provare a definire gli enti.

Si prosegue chiedendo a ciascuno studente di rappresentare ciascuno dei tre enti primitivi attraverso GeoGebra, la piegatura della carta e la riga e il compasso. Successivamente, si chiede loro se ciò che hanno prodotto sia effettivamente una retta/ un punto/

un piano. Si avvia quindi un libero confronto con il gruppo classe, del quale il docente deve mantenere le redini, e che deve portare a chiarire i seguenti tre punti:

1. Ciò che ciascuno studente ha prodotto è una rappresentazione che approssima l'ente;

2. Non esiste una definizione degli enti primitivi, essi sono "definiti" dalle loro reciproche relazioni;

3. Gli enti primitivi non hanno senso grazie ad "un'idea intuitiva" che abbiamo di essi.

Si termina la lezione invitando gli studenti a riflettere per casa su quali siano le relazioni tra i tre enti primitivi, chiedendo loro di rispondere alle seguenti domande:

- Che cosa conosci sulle relazioni tra rette e punti? Prova a pensare, ad esempio, a quanti punti ci sono in una retta, a quante rette passano per un punto, o per due punti ecc...

- Che cosa conosci sulle relazioni tra piani e punti? Prova a pensare, ad esempio, a quanti punti ci sono in un piano, a quanti piani passano per un punto, o per due punti ecc...

- Che cosa conosci sulle relazioni tra rette e piani? Prova a pensare, ad esempio, a quante rette ci sono in un piano, a quanti piani passano per una retta, o per due rette ecc...

Attività 4 - Assiomi

Durata: 1 ora.
Modalità di lavoro: Individuale, con momenti di condivisione collettiva.
Finalità: Gli studenti apprendono gli assiomi della Geometria Euclidea e viene loro chiarita la funzione degli assiomi in una teoria matematica deduttiva. Si affronta il diffuso errore secondo il quale un disegno o una rappresentazione costituiscono una dimostrazione di una proposizione.
Materiale occorrente: Una decina di fogli A5 per studente. Un elenco di tutti gli assiomi della Geometria Euclidea presenti nel libro di testo adottato dalla classe.

La precedente attività si è conclusa ponendo alcune domande agli allievi; si chiede agli studenti di condividere con il gruppo classe le risposte cui sono giunti. Può essere che alcuni alunni siano riusciti a capire autonomamente che le regole cui ci stiamo riferendo, che chiariscono le relazioni tra gli enti primitivi, sono gli assiomi. In caso contrario, sarà l'insegnante a svelarlo.

Giunti a questo punto, viene spiegato agli studenti cosa sono gli assiomi e quale sia il loro ruolo in una teoria matematica deduttiva; successivamente si illustrano gli assiomi della geometria euclidea attraverso una trattazione di tipo storico, a partire dagli *"Elementi"* di Euclide fino all' assiomatica di Hilbert. Si presentano quindi tutti gli assiomi presenti nel libro di testo adottato dal gruppo classe. Se il libro di testo ha adottato un'impostazione euclidea, sarà cura dell'insegnante chiarirlo agli studenti; qualora l'impostazione sia hilbertiana, l'insegnante avrà il compito di assicurarsi che gli alunni non si smarriscano tra i molteplici assiomi che verranno loro presentati.

Viene richiesto a ciascuno studente di rappresentare attraverso la piegatura della carta alcuni assiomi, precedentemente selezionati dall'insegnante. Si consiglia di far rappresentare i seguenti assiomi, qualora si stia adottando un'impostazione hilbertiana:

- Consideriamo una retta r nel piano. L'insieme dei punti del piano che non appartengono a r resta diviso da r in due sottoinsiemi disgiunti e convessi α e β, tali che, se A appartiene ad α e B appartiene a β, allora il segmento AB interseca la retta r in uno e un solo punto.

- Data una qualsiasi poligonale chiusa non intrecciata, essa divide l'insieme dei punti del piano che non le appartengono in due sottoinsiemi, uno che non può contenere rette, i cui punti vengono detti interni alla poligonale e uno che contiene delle rette, i cui punti vengono detti esterni alla poligonale.

- Dato un segmento AB e una semiretta di origine O, esiste un unico punto P sulla semiretta, tale che AB è congruente a OP.

- Dato un angolo $a\widehat{O}b$ e una semiretta a' di origine O', su ognuno dei due semipiani individuati dalla retta cui appartiene la semiretta a' esiste un'unica semiretta b', di origine O', tale che $a'\widehat{O'}b'$ è congruente ad $a\widehat{O}b$.

- Due triangoli che hanno ordinatamente congruenti due lati e l'angolo tra di essi compreso sono congruenti.

I primi quattro assiomi indicati sono infatti complessi e fornire una rappresentazione può aiutare gli studenti a coglierne il senso. Per quanto riguarda, invece, l'ultimo assioma, vi è il rischio che gli studenti lo considerino un teorema; per tale motivo si è ritenuto opportuno soffermarsi su di esso. L'insegnante deve assicurarsi che gli studenti capiscano che fornire una rappresentazione di ciò che un assioma descrive non significa fornire una dimostrazione dell'assioma stesso. È infatti diffusa la *misconception* secondo la quale un disegno o una rappresentazione possono fungere da dimostrazione di una data proposizione.

Gli studenti potrebbero dirlo esplicitamente o meno, ma a questo punto probabilmente si staranno chiedendo: come mai bisogna stabilire gli assiomi? A favore della non necessità degli assiomi potrebbero portare il fatto che per otto anni hanno fatto geometria nelle scuole senza mai incontrare gli assiomi o dedicando loro pochissimo tempo e attenzione. In tal caso, si rivela necessario chiarire che ciò che cambia rispetto al passato è l'intenzione con cui ci apprestiamo a studiare la geometria, in quanto siamo interessati a verificare che tutte le proprietà delle figure individuate siano "corrette". La correttezza di una proprietà può essere dimostrata solo se chiariamo quali sono le regole che tutti prendiamo per vere quando lavoriamo in tale ambiente, ovvero se esplicitiamo gli assiomi.

Si termina quindi la lezione con un libero dibattito, monitorato dall'insegnante. Per convincere gli studenti della necessità di stabilire e conoscere gli assiomi, è possibile portare l'esempio della piegatura della carta: nel corso delle precedenti lezioni è stato necessario stabilire cosa è possibile effettuare piegando la carta, ovvero conoscere e capire le 7 pieghe iniziali, prima di passare a costruzioni più complesse. Si può inoltre ricorrere ad una analogia con un gioco: gli assiomi sono le "regole base" di un gioco, se non li si conosce non si hanno gli strumenti per capire se si sta giocando nel modo giusto. Ovviamente le regole si possono cambiare, ma ciò che si ottiene è un gioco diverso. Gli assiomi della Geometria Euclidea servono appunto a creare una teoria geometrica che riproduce la realtà fisica che percepiamo, per questo la studiamo fin dalla Scuola Primaria.

Sarà premura dell'insegnante stabilire quanto in profondità spingersi, valutando il livello di comprensione e interesse della classe. Al termine della lezione è possibile inoltre effettuare un veloce accenno alla problematicità del 5° postulato, e alle geometrie non euclidee, sempre a discrezione dell'insegnante.

Attività 5 - Definizioni

Durata: 1 ora.
Modalità di lavoro: In gruppo.
Finalità: Gli studenti apprendono la funzione delle definizioni e le caratteristiche che deve avere una buona definizione.
Materiale occorrente: Un dispositivo con accesso a internet per ciascuno studente. Una L.I.M. o un proiettore con accesso a Wooclap. Il libro di testo.

Ciascuno studente è invitato a ideare le definizioni di triangolo isoscele, triangolo equilatero e quadrato, ovvero le figure geometriche che ciascuno ha realizzato nel corso della seconda attività del progetto. Tali definizioni vengono in seguito condivise con la classe attraverso l'applicazione Wooclap.

La classe è invitata a ragionare e discutere per stabilire quali definizioni tra quelle proposte siano corrette, riflettendo in particolare su che criteri adottare per valutarne la correttezza dal punto di vista matematico. Se tali definizioni vengono date tutte correttamente da tutti gli studenti, si può chiedere alla classe di suggerire alcune definizioni di altri enti geometrici incontrati nel corso della loro precedente carriera scolastica, fino a trovare degli enti per cui verranno suggerite definizioni diverse tra loro.

L'insegnante deve guidare gli studenti affinché colgano che dare una definizione significa introdurre una parola nuova per indicare gli oggetti che godono di determinate proprietà, senza però essere sovrabbondanti e senza creare una circolarità. Per quanto concerne la circolarità è possibile portare l'esempio delle definizioni di *Superficie* e *Contorno* presenti nel vocabolario Treccani della lingua italiana [20]. Gli studenti devono inoltre essere invitati ad esprimersi con un linguaggio corretto e pertinente, evitando termini quali "base", "lati obliqui", ecc... Tali termini fanno infatti riferimento ad una specifica posizione dell'ente nello spazio, ma tale disposizione può, in generale, subire variazioni. Si chiede quindi a ciascuno studente di ruotare le costruzioni realizzate in precedenza con la tecnica del *paper-folding*, per rendere più evidente tale aspetto.

Dopo aver chiarito cos'è una definizione, siamo interessati a chiarire quale sia l'utilità di dare delle definizioni in matematica. Si chiede, quindi, agli studenti di enunciare il Teorema di Pitagora; successivamente, l'insegnante riformulerà tale teorema eliminando termini come triangolo rettangolo, angolo retto, ipotenusa e cateto. L'enunciato risulterà così estremamente più lungo e complesso. Questo esempio dovrebbe fornire una lampante prova della funzione principale delle definizioni: abbreviare.

Si può concludere la lezione leggendo alcune definizioni presenti nel libro di testo adottato dalla classe, e chiedendo agli studenti di rappresentare alcuni degli oggetti definiti attraverso la piegatura della carta e con GeoGebra. Ad esempio, si può chiedere di rappresentare segmenti consecutivi o adiacenti e angoli consecutivi, adiacenti o opposti al vertice.

Attività 6 - Enunciato dei teoremi

Durata: 2 ore.
Modalità di lavoro: A coppie.
Finalità: Gli studenti apprendono la differenza tra ipotesi e tesi, inoltre allenano la loro capacità ad stabilire quali informazioni presenti in un enunciato siano le ipotesi e quali siano la tesi. Imparano che la corretta rappresentazione di quanto espresso in un enunciato si effettua utilizzando unicamente le informazioni presenti tra le ipotesi.
Materiale occorrente: Un dispositivo con accesso a GeoGebra per ciascuno studente, un paio di fogli di carta per studente, quaderno, riga e compasso. Almeno una decina di enunciati da modificare e portare sotto forma di implicazione e una decina di teoremi geometrici.

L'insegnante seleziona un teorema noto agli studenti e lo riformula attraverso la sintassi *"se... allora..."*. In tal modo è possibile porre in evidenza i due elementi che costituiscono l'enunciato di un teorema: l'ipotesi e la tesi. Si presenta la differenza concettuale tra questi due elementi dell'enunciato, servendosi anche di ulteriori esempi, i quali possono essere tratti da eventi della vita quotidiana. Ad esempio, si possono suggerire affermazioni come:

- se perdo l'autobus, allora arrivo in ritardo a scuola;
- se scatta il rosso, allora ci si ferma al semaforo.

Gli studenti sono invitati ad individuare ipotesi e tesi per ogni esempio che l'insegnante decide di portare alla loro attenzione.

Una volta chiarito il significato e il ruolo di questi due elementi che costituiscono l'enunciato di un teorema, si prosegue con un esercizio volto ad affinare l'abilità degli studenti ad individuare le ipotesi e la tesi in un enunciato. Poiché tale processo di individuazione risulta significativamente semplificato nel caso in cui l'enunciato sia posto sotto forma di implicazione, l'allenamento prevede di ricondurre gli enunciati in tale forma: gli studenti, divisi in coppie, sono invitati a riformulare alcuni teoremi, non necessariamente geometrici, secondo la sintassi *"se... allora..."* e ad individuare quindi ipotesi e tesi. Per portare a termine correttamente tale esercizio ciascuno studente deve allenarsi a chiedersi il significato che assume ogni parola presente nell'enunciato e il ruolo di ogni informazione che incontra leggendo.

La lezione prosegue assegnando a ciascuna coppia di studenti un paio di teoremi geometrici e chiedendo loro di modificare l'enunciato in modo da esprimere il teorema attraverso un'implicazione. Successivamente si chiede loro di fornire una rappresentazione del teorema per mezzo della piegatura della carta, della riga e del compasso e attraverso GeoGebra. Gli studenti devono impiegare solo le informazioni presenti tra le ipotesi per eseguire la rappresentazione. Se la loro rappresentazione viene effettuata con sufficiente precisione, risulterà rappresentata correttamente anche la tesi. Inoltre, solo se individuano tutte le ipotesi presenti nell'enunciato possono effettuare una rappresentazione corretta. Poiché gli studenti lavorano in coppia al medesimo enunciato, ciascuno verrà rappresentato in due modi distinti; tale fatto deve essere impiegato dall'insegnante per chiarire come ogni rappresentazione sia parziale. Il lavoro svolto da ciascuna coppia viene poi condiviso con la classe.

4.2.3 Comprensione e produzione di dimostrazioni

Attività 7 - Dimostrazioni

Durata: 3 ore.
Modalità di lavoro: A coppie.
Finalità: Gli studenti apprendono come effettuare una dimostrazione diretta.
Materiale occorrente: Un dispositivo con accesso a GeoGebra per ciascuno studente,

un paio di fogli di carta per studente, quaderno, riga e compasso. Almeno una decina di enunciati geometrici facilmente dimostrabili.

L'insegnante seleziona un elementare teorema geometrico, possibilmente noto agli studenti, e si appresta a svolgere la sua dimostrazione. Si consiglia di utilizzare i primi teoremi presenti nel libro di testo adottato dal gruppo classe. Il testo *"Colori della Matematica 1"* di L. Sasso e C. Zanone [29] presenta come primi teoremi i seguenti:
Due angoli complementari rispettivamente a due angoli congruenti sono congruenti.
Due angoli supplementari rispettivamente a due angoli congruenti sono congruenti.

Si coinvolge la classe nel processo dimostrativo, chiedendo agli studenti di provare ad individuare i meccanismi che guidano una dimostrazione diretta. Per aiutarli in tale processo è consigliato porre le seguenti domande:

- Quali sono le ipotesi del teorema? Come possiamo scrivere ciascuna di queste informazioni utilizzando il linguaggio matematico e la corretta simbologia?
- Qual è la tesi del teorema? Come possiamo scriverla utilizzando il linguaggio matematico e la corretta simbologia?
- Come possiamo rappresentare quanto espresso dall'enunciato?
- Cosa dobbiamo ottenere per poter completare la dimostrazione? Conosciamo teoremi o assiomi che affermano ciò?
- Cosa è necessario verificare affinché sia possibile impiegare tale teorema o assioma?

Attraverso le risposte degli studenti e gli interventi dell'insegnante si viene a delineare il funzionamento di una dimostrazione diretta.

A questo punto, gli studenti mettono in pratica quanto appreso, lavorando in coppia. Anche in questo caso a ciascuna coppia vengono assegnati un paio di teoremi geometrici; ciascuna coppia dovrà individuare ipotesi e tesi, rappresentare quanto espresso dall'enunciato attraverso riga e compasso, piegatura della carta e GeoGebra, e infine dimostrare l'enunciato. Tale esercizio può subire un significativo accorciamento se si utilizzano i medesimi teoremi impiegati al termine della precedente attività, purché fossero stati selezionati in modo da essere facilmente dimostrabili. Alcune proposte sono state inserite nell'appendice A. L'attività si conclude con ciascuna coppia che condivide il proprio lavoro con il gruppo classe.

In seguito ad una attenta valutazione del gruppo classe, l'insegnante può decidere di affrontare anche uno dei seguenti aspetti, o alternativamente, entrambi:

1. Non esistono solo le dimostrazioni dirette, alcuni teoremi si dimostrano attraverso altri tipi di dimostrazioni. È possibile accennare alle dimostrazioni per assurdo, le quali verranno impiegate durante le lezioni di Aritmetica, ad esempio per dimostrare il Teorema Fondamentale dell'Aritmetica.

2. Per dimostrare che qualcosa NON è vero, è sufficiente trovare un esempio di un fatto che soddisfa tutte le ipotesi del teorema, ma per cui la tesi non è verificata. Chiameremo questo processo *"trovare un controesempio"*.

Capitolo 5

Sperimentazione del Progetto nella Scuola Secondaria di II grado

Viene ora presentata la realizzazione del progetto effettuata in una classe prima di un Liceo Scientifico di Padova. Dopo un'iniziale descrizione della messa in pratica delle attività presentate nel precedente capitolo, vengono illustrati i metodi attraverso i quali sono stati raccolti i dati per valutare la riuscita del progetto: l'osservazione partecipante e numerosi questionari e test. In appendice B sono disponibili i questionari e le tabelle recanti i dati raccolti attraverso la loro somministrazione. Il capitolo si conclude con l'analisi dei dati raccolti attraverso la sperimentazione.

5.1 Attuazione del progetto

Le condizioni straordinarie legate alla diffusione del virus SARS-CoV-2 a partire da dicembre 2019, unite alla difficoltà di reperire docenti disponibili ad accogliere la sperimentazione nelle proprie classi, ha comportato l'attuazione del progetto unicamente in una classe prima di un Liceo Scientifico di Padova. Il progetto è stato proposto solamente a docenti di matematica che prestano insegnamento presso licei scientifici, in quanto si è valutato che tale fosse il contesto preferibile per effettuare la prima realizzazione sul campo. È importante però sottolineare come il progetto non sia stato ideato per essere impiegato unicamente in classi appartenenti a tale indirizzo di studi, bensì risulti attuabile in ogni classe prima di una scuola Secondaria di II grado.

La sperimentazione ha avuto luogo presso il Liceo Scientifico "E. Fermi" di Padova: il docente di Matematica e Fisica di una classe prima di tale liceo si è reso disponibile ad accogliere il progetto all'interno della propria classe e la Dirigenza dell'Istituto si è mostrata interessata al progetto e desiderosa di offrire il proprio contributo. La classe candidata frequenta l'indirizzo *Scienze Applicate*; tale indirizzo «fornisce allo studente competenze particolarmente avanzate negli studi afferenti alla cultura scientifico-tecnologica, con particolare riferimento alle scienze matematiche, fisiche, chimiche, biologiche, della terra, all'informatica e alle loro applicazioni.» [17] L'indirizzo *Scienze Applicate* condivide le medesime indicazioni nazionali previste per il liceo scientifico tradizionale, riguardanti gli obiettivi specifici di apprendimento in relazione alle attività e agli insegnamenti compresi nei piani degli studi. [11] Sono comuni ai due indirizzi anche le ore di lezione di matematica previste per il primo anno del primo biennio. Per queste ragioni, è stata accettata la candidatura ad assumere il ruolo di classe di controllo da parte di un'altra classe prima del Liceo "E. Fermi", frequentante l'indirizzo tradizionale. La docente di Matematica di tale classe si è resa disponibile a modificare la propria programmazione dell'anno scolastico corrente, così da affrontare l'introduzione alla geometria euclidea nei primi mesi di lezione. In tal modo è stato possibile sottoporre la classe di controllo alle medesime prove sostenute dalla classe che ha preso parte alla sperimentazione. La classe sperimentale è formata da 28 studenti, la classe di controllo da 26.

La sperimentazione presso la classe del Liceo Scientifico "E. Fermi" di Padova è stata effettuata all'inizio dell'anno scolastico, ed è proseguita complessivamente per due mesi, durante i quali il progetto veniva portato in classe due volte la settimana, in incontri da un'ora ciascuno. Nel corso della sperimentazione, la classe, guidata dalla ricercatrice, ha svolto le attività presentate nel precedente capitolo ed è stata sottoposta ai seguenti test e questionari:

- **Test iniziale**, somministrato alla classe sperimentale nel corso del primo incontro della sperimentazione;
- **Test finale**, somministrato ad entrambe le classi al termine del progetto;
- **Questionario sui contenuti**, somministrato ad entrambe le classi al termine del progetto;
- **Questionario sulle discipline**, somministrato all'inizio e al termine del progetto, unicamente alla classe sperimentale.

5.1.1 Test e questionari

Nel corso del primo incontro con la classe è stato somministrato un **Test d'ingresso**, per conoscere il livello di partenza di ciascuno studente. Il test, costituito da domande a risposta multipla, ha permesso di sondare la preparazione iniziale degli studenti sull'introduzione alla geometria, la geometria euclidea e le conversioni/operazioni con le unità di misura. Si è ritenuto necessario verificare la preparazione iniziale degli studenti in quanto provenienti da istituti diversi e uscenti da due anni di "didattica mista", in presenza ed a distanza. È stato così possibile verificare se vi fossero studenti che, nel corso della loro precedente carriera scolastica, avevano studiato la geometria euclidea attraverso una prospettiva assiomatico-deduttivo. Inoltre, conoscere il livello del gruppo classe ha reso possibile intervenire sul progetto in modo da adattarlo alle problematiche emerse attraverso il test.

Per verificare le ipotesi di ricerca e stabilire gli esiti della sperimentazione si è ricorso ai restanti test e questionari. Il **Test finale** consiste in una prova di verifica, strutturata in tre parti, realizzata per verificare l'apprendimento da parte degli studenti dei contenuti presentati nel corso del progetto. Le prime sei domande, a risposta multipla, chiedevano di stabilire se una data proposizione fosse un assioma, una definizione o un teorema della geometria euclidea. Le successive sei domande, a risposta aperta, richiedevano agli studenti di presentare ciascun elemento costituente una teoria assiomatico-deduttiva e illustrarne la finalità. Infine, sono stati inseriti due semplici esercizi dimostrativi, attraverso i quali è stato possibile verificare se ciascuno studente avesse appreso come effettuare e trascrivere una dimostrazione. Tale test è stato somministrato ad entrambe le classi, per poter verificare se la partecipazione al progetto ha comportato un apprendimento maggiore.

Il **Questionario sui contenuti** ha permesso di indagare ciò che gli studenti ritengono di aver appreso e compreso rispetto ai contenuti del progetto. Si è ritenuto importante non somministrare unicamente una prova di verifica, per non incorrere nell'errore di ritenere che un esercizio svolto correttamente sia necessariamente un indicatore di una avvenuta comprensione dei contenuti affrontati. Il questionario, costruito dopo aver preso visione del testo *"La ricerca sociale: metodologia e tecniche"* di P. Corbetta [10], è anonimo e suddiviso in quattro sezioni:

A **Domande sull'introduzione alla Geometria:** 20 domande cui ciascuno studente deve rispondere alternativamente *'Sì'* oppure *'No'*. Attraverso tali domande ciascuno studente dichiara se egli ritiene di avere capito gli elementi che costituiscono una teoria assiomatico-deduttiva.

B **Domande sulle abilità acquisite nell'affrontare problemi dimostrativi di Geometria:** 13 domande cui ciascuno studente deve rispondere attribuendo un punteggio da 1 a 5, dove 1 significa *mai*, 5 invece *sempre*. Le domande da B1 ad B2 sono riferite agli **enunciati** dei teoremi e alla capacità di riconoscere ipotesi e tesi, le domande da B3 a B5 e B13 riguardano la **rappresentazione** che gli studenti producono per preparasi a dimostrare un teorema geometrico, le domande da B6 a B10 sono domande riguardanti le **strategie dimostrative** sviluppate dagli studenti e infine le domande da B11 a B12 riguardano le **definizioni**.

C **Utilizzo degli origami:** 10 domande cui ciascuno studente deve rispondere attribuendo un punteggio da 1 a 5, dove 1 significa *non saprei*, 2 significa *per niente* e

5 significa *molto*. Tali domande sono state poste solamente alla classe che ha preso parte alla sperimentazione. Le domande C1 e da C9 a C10 riguardano l'**opinione** degli studenti rispetto la piegatura della carta e il suo impiego nella didattica, le domande da C2 a C4 riguardano l'**esperienza** di sperimentazione appena conclusa e infine le domande da C5 a C8 sono inerenti all'**impatto operativo** che la piegatura della carta esercita sull'attività dimostrativa di ciascuno studente.

D **Chiusura dell'intervista:** gli studenti forniscono alcune informazioni riguardanti la propria persona, il nucleo familiare e le abitudini di studio.

Il **Questionario sulle discipline**, invece, è stato realizzato per sondare l'opinione che gli studenti hanno della matematica e della geometria come discipline, ed è finalizzato a stabilire se si verifica una variazione nell'opinione degli studenti. Si ritiene, infatti, che un possibile indicatore dell'efficacia dell'impiego del *paper-folding* possa essere la misura in cui l'opinione degli studenti sulla disciplina si modifica al termine del progetto. Tale questionario è anonimo, ed è suddiviso in quattro sezioni:

A **Domande sulla Matematica:** 14 domande cui ciascuno studente deve rispondere attribuendo un punteggio da 1 a 4, dove 1 significa *completamente in disaccordo*, 4 invece *totalmente d'accordo*. Le domande da A1 ad A3 sono riferite all'**opinione** degli studenti, le domande da A4 ad A7 riguardano l'**utilizzo** della matematica, mentre le restanti da A8 ad A14 sono domande di **autovalutazione** attraverso le quali gli studenti dichiarano quanto si sentono preparati in matematica.

B **Domande sulla Geometria:** 13 domande cui ciascuno studente deve rispondere attribuendo un punteggio da 1 a 4, dove 1 significa *completamente in disaccordo*, 4 invece *totalmente d'accordo*. Le domande da B1 ad B4 sono riferite all'**opinione** degli studenti, le domande da B5 a B6 riguardano l'**utilizzo** della geometria, mentre le restanti da B7 a B13 sono domande di **autovalutazione** attraverso le quali gli studenti dichiarano quanto si sentono preparati in geometria.

C **Didattica a distanza:** 5 domande che permettono agli studenti di dichiarare quanto ritengono che la D.A.D. abbia compromesso la loro preparazione in matematica, attribuendo a ciascuna domanda un punteggio da 1 a 4, dove 1 significa *completamente in disaccordo* e 4 invece *totalmente d'accordo*.

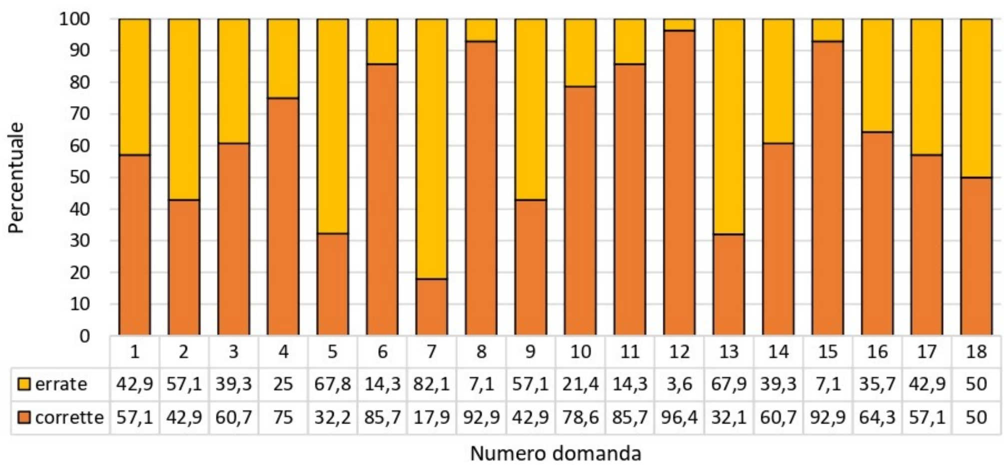
D **Chiusura dell'intervista:** gli studenti forniscono alcune informazioni riguardanti la propria persona, il nucleo familiare e le abitudini di studio. Inseriscono inoltre un codice che permetterà di abbinare ciascun questionario con il corrispondente effettuato al termine della sperimentazione.

La verifica delle ipotesi di ricerca è avvenuta anche attraverso l'osservazione da parte della ricercatrice delle tecniche che gli studenti hanno messo in campo per affrontare il *Test finale*. La ricercatrice ha dovuto inoltre compiere un esercizio di osservazione partecipante nel corso della sperimentazione, per cogliere eventuali resistenze manifestate dagli studenti riguardanti l'adozione della piegatura della carta.

I vari test e i questionari utilizzati nel corso della sperimentazione sono consultabili nell'appendice B.

5.1.2 Programmazione didattica

La sperimentazione ha avuto inizio con un incontro nel corso del quale gli studenti hanno sostenuto Il *Test d'ingresso* e il *Questionario sulle discipline*. I risultati conseguiti dagli studenti nel *Test d'ingresso* sono illustrati dalla figura 5.1, la quale mostra le percentuali di risposte corrette o errate fornite dagli studenti a ciascuna domanda che è stata loro rivolta.



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
errate	42,9	57,1	39,3	25	67,8	14,3	82,1	7,1	57,1	21,4	14,3	3,6	67,9	39,3	7,1	35,7	42,9	50
corrette	57,1	42,9	60,7	75	32,2	85,7	17,9	92,9	42,9	78,6	85,7	96,4	32,1	60,7	92,9	64,3	57,1	50

Figura 5.1: Risposte test iniziale somministrato alla casse sperimentale (dato percentuale).

È possibile osservare come le risposte con percentuali di errore superiori al 50% siano quelle riguardanti i teoremi e le dimostrazioni (2, 5 e 7), oltre alle definizioni di segmenti e angoli consecutivi o adiacenti (9 e 13). Si è deciso quindi di apportare le seguenti modifiche ai contenuti delle attività 5 e 6 del progetto:

- Al termine della quinta attività si affronteranno tutte le definizioni presenti nei primi capitoli del libro di testo, in quanto non è possibile considerarle apprese dagli studenti nel corso della Scuola Secondaria di I grado;

- Nella fase iniziale dell'attività sugli enunciati si utilizzeranno teoremi provenienti da ogni ambito della matematica, così che gli studenti si allenino a riconoscere un teorema quando si presenta loro.

Il dato sulle dimostrazioni si è invece posto in linea con ciò che ci si aspetta da studenti che si apprestano ad iniziare il primo anno di Scuola Secondaria di II grado. In fase di somministrazione del test, inoltre, alcuni studenti hanno chiesto alla ricercatrice il significato della parola assioma, rivelando così di non aver mai incontrato il metodo deduttivo nel corso delle loro pregresse carriere scolastiche. Inoltre, dalle risposte fornite al test, è emerso che molti studenti compiono l'errore di riferirsi a casi particolari di conformazioni o figure, invece che attenersi a quanto dichiarato dal problema; ad esempio, dovendo rappresentare un generico triangolo, molti studenti arbitrariamente ne hanno disegnato uno isoscele. Il *Test d'ingresso* è stato somministrato unicamente alla classe che ha aderito alla sperimentazione, per verificarne il livello di partenza. Se in futuro tale progetto di sperimentazione didattica fosse riproposto in una Scuola Secondaria di II grado, può essere utile somministrare il test anche alla classe di controllo designata, per verificarne il livello iniziale.

A partire dal secondo incontro, sono state quindi realizzate le attività presentate nella sezione 4.2, apportando solamente un'ulteriore modifica ai contenuti del progetto: dopo aver attuato la prima attività riguardante GeoGebra, si è deciso di non portare più gli studenti in aula computer poiché ciò comportava un significativo accorciamento dei tempi della lezione. Sono stati quindi tolti i riferimenti a GeoGebra all'interno delle successive attività ed è sempre stato richiesto agli studenti di fornire unicamente rappresentazioni con riga e compasso e attraverso la piegatura della carta. Le attività sono state presentate e gestite dalla ricercatrice, mentre il docente della classe ha supervisionato il lavoro, così da poter intervenire in caso emergessero questioni esterne al progetto.

Nel corso dell'ultimo incontro, sono stati somministrati alla classe sperimentale e alla classe di controllo il *Test finale* e il *Questionario sui contenuti*; inoltre, la classe sperimentale ha sostenuto nuovamente il *Questionario sulle discipline*, al quale è stata apportata una modifica: la terza sezione, inerente alla didattica a distanza, è stata cancellata poiché nel corso della sperimentazione non è mai stato necessario ricorrervi. Unicamente 25 studenti della classe sperimentale erano presenti durante l'ultima lezione e hanno quindi sostenuto i vari test e questionari.

5.2 Raccolta e analisi dei dati

5.2.1 Osservazione partecipante

La realizzazione del progetto presso la classe del Liceo "E. Fermi" ha permesso di effettuare importanti osservazioni, sia sulle reazioni degli studenti al progetto, sia sui contenuti e gli strumenti impiegati.

L'attività sulla piegatura della carta è stata sostenuta da tutti gli studenti con esiti positivi, ma alcuni di loro hanno trovato più difficile di altri individuare le pieghe da effettuare ed esercitare la giusta precisione nella loro esecuzione. La classe ha quindi autonomamente attuato un momento di *peer education*, in quanto gli studenti si sono aiutati a vicenda nella realizzazione delle pieghe assegnate. Ne è conseguito che gli alunni hanno prodotto la medesima piega per ogni consegna assegnata loro, ovvero nessuno studente ha sviluppato delle soluzioni personali, preferendo ricorrere ad una risoluzione omogenea e condivisa tra i membri della classe. Ciò ha comportato che nessuno studente sia riuscito ad individuare la non unicità di alcune pieghe, né producendo diverse pieghe in modo autonomo né attraverso il confronto della propria produzione con quella dei compagni. Tuttavia, nella fase successiva dell'attività, alcuni studenti sono riusciti ad individuare le condizioni che rendono alcune pieghe non eseguibili, mostrando una notevole abilità nel congetturare.

Nel corso dell'attività sugli enti primitivi gli studenti hanno mostrato difficoltà ad assimilare il fatto che quando eseguiamo una rappresentazione di un punto, una retta o un piano in realtà stiamo approssimando l'ente. Infatti, hanno compiuto diversi errori stabilendo le dimensioni degli enti primitivi, dovuti probabilmente al fatto che sono tratti in errore dalle immagini rappresentative che producono per ciascun ente. Inoltre, gli studenti hanno mostrato molta resistenza anche rispetto al fatto che gli enti primitivi non si definiscono, perseverando nel tentare di ideare delle definizioni nel corso di tutta l'attività. Infine, la classe ha mostrato un diffuso interesse verso le geometrie non euclidee; ciò ha quindi motivato l'inserimento di alcuni accenni ad esse nel corso della lezione.

L'attività sugli assiomi ha richiesto il doppio del tempo stabilito, poiché si è rivelato necessario procedere con molta calma nel presentare i contenuti. Le analogie proposte con "le regole di un gioco" e le regole viste in precedenza per la piegatura della carta hanno sortito l'effetto sperato. Inoltre, la decisione di soffermarsi su ciascun assioma presente nel testo e rappresentare quelli che presentano enunciati più complessi è servito a portare buona parte degli studenti a comprendere il significato di quanto letto. Su loro ammissione, dopo la prima lettura autonoma non avevano colto il senso di molti di essi; tuttavia, sono risultati più chiari dopo aver effettuato la rappresentazione per mezzo della piegatura della carta.

Durante l'attività sulle definizioni si è potuto verificare come la piegatura della carta permetta di cambiare più agevolmente la prospettiva sulle figure geometriche, e quindi di liberarsi di quelle immagini limitanti, come il triangolo isoscele sempre "appoggiato" sul lato non congruente ai restanti. Molti studenti hanno infatti mostrato di essere ancorati a queste rappresentazioni stereotipate, fino a considerarle l'unica rappresentazione possibile per certe figure. Il fatto che una figura realizzata attraverso il *paper-folding* non sia fissa sulla pagina, ma possa essere ruotata a piacimento, ha aiutato molti studenti ad abbandonare tali prospettive limitanti. Inoltre, gli studenti hanno mostrato di essere spesso in grado di stabilire se alcune informazioni inserite in una definizione sono sovrabbondanti; tuttavia hanno una ridotta dimestichezza con le definizioni inclusive e dimostrano un'elevata resistenza ad adottarle.

Le attività riguardanti l'enunciato dei teoremi e le dimostrazioni si sono rivelate le più complesse, ma hanno anche permesso agli studenti di mettersi maggiormente in gioco. Sono state effettuate le seguenti osservazioni riguardanti le maggiori difficoltà riscontrate:

- Gli studenti hanno mostrato di incorrere in maggiori difficoltà nell'individuare ipotesi e tesi quando si confrontano con teoremi per i quali anche la proposizione inversa è un teorema loro noto.

- Molti studenti si ritrovano in difficoltà poiché non comprendono il testo che è stato loro sottoposto; spesso lo leggono troppo velocemente, non individuando tutte le informazioni presenti in esso.

- Gli studenti hanno mostrato di non ricorrere spontaneamente alla piegatura della carta, in quanto ritengono più complesso effettuare una rappresentazione attraverso tale strumento inedito, piuttosto che attraverso la riga e il compasso.

- L'impiego della tecnica del *paper-folding* non garantisce il superamento dell'errore molto comune di fornire una rappresentazione di un caso particolare invece di quello generale.

Tuttavia, sono emersi anche molti aspetti positivi, ad esempio il lavoro in piccoli gruppi si è rivelato molto proficuo in entrambe le attività finali e ha reso più semplice per gli studenti esternare le difficoltà incontrate nell'individuazione di ipotesi e tesi e nella creazione delle dimostrazioni. Inoltre, l'esposizione del lavoro svolto da ciascun gruppo ha reso possibile verificare agevolmente chi ha superato le iniziali difficoltà e chi invece necessita di ulteriore supporto. Per quanto concerne l'impiego del *paper-folding*, è risultato evidente che il suo utilizzo abbia portato gli studenti ad interrogarsi più profondamente sul significato dell'enunciato ed a riflettere maggiormente durante la fase di individuazione delle ipotesi.

5.2.2 *Test finale*

Ulteriori informazioni circa gli effetti della sperimentazione, sono state reperite attraverso la somministrazione dei questionari al termine del progetto. Il test finale, sostenuto sia dalla classe sperimentale sia dalla classe di controllo, mostra come la classe che ha svolto la sperimentazione abbia raggiunto un più profondo livello di comprensione e una maggior abilità dimostrativa.

Attraverso la figura 5.2 è possibile osservare come le domande a risposta multipla iniziali siano state affrontate in modo soddisfacente da entrambe le classi, anche se i risultati migliori sono stati ottenuti dalla classe che ha preso parte alla sperimentazione. Rispetto a quanto si era verificato con il test d'ingresso, gli studenti sembrano aver imparato a riconoscere assiomi, teoremi e definizioni quando li incontrano.

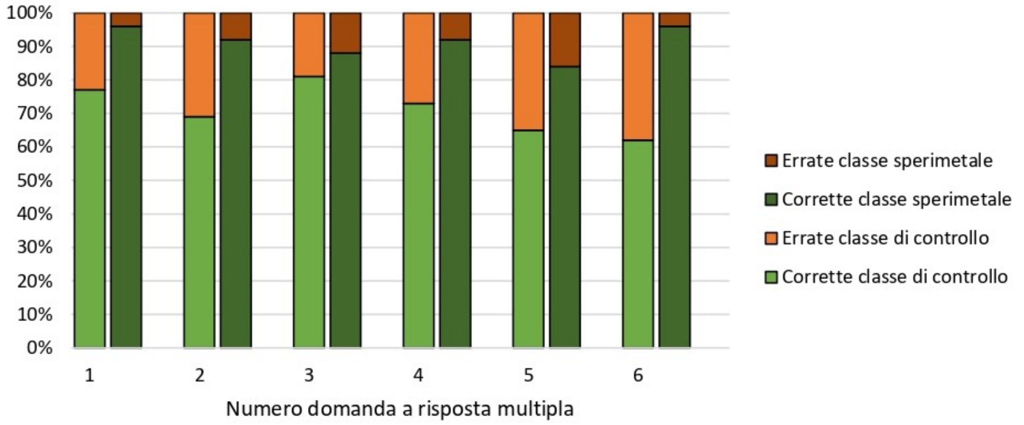


Figura 5.2: Risposte alle domande a risposta multipla presenti nel test finale, somministrato ad entrambe le classi (dato percentuale).

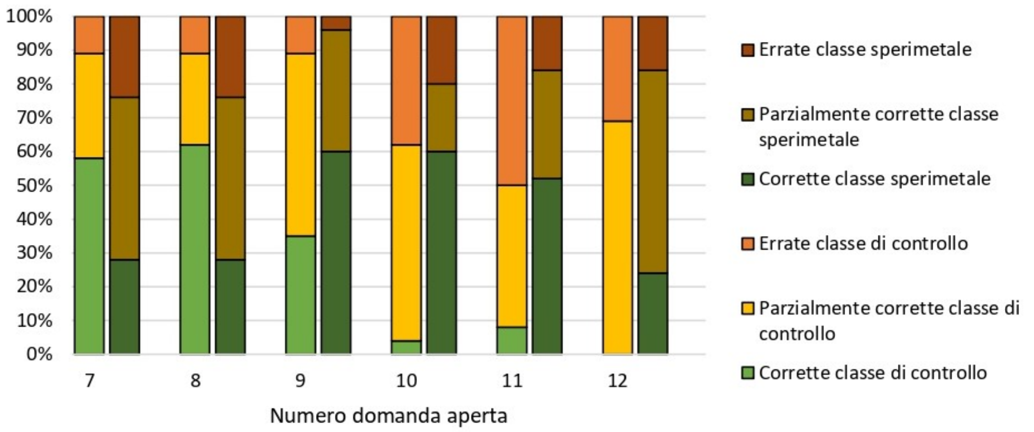


Figura 5.3: Risposte alle domande aperte presenti nel test finale, somministrato ad entrambe le classi (dato percentuale).

A partire dai dati presentati nella figura 5.3, è possibile osservare come le domande a risposta aperta si differenziano tra le prime due, alle quali hanno risposto meglio gli studenti della classe di controllo, e le restanti quattro in cui la classe che ha effettuato la sperimentazione ha ottenuto risultati migliori. Da tali risultati emerge come la classe sperimentale abbia acquisito le nozioni trasmesse attraverso la sperimentazione riguardanti assiomi, dimostrazioni e definizioni, ma abbia ancora delle incertezze rispetto a cosa sia il metodo assiomatico-deduttivo e sul ruolo degli enti primitivi. La classe di controllo, invece, sembra aver raggiunto una maggior comprensione di cosa sia il metodo assiomatico-deduttivo e degli enti primitivi, ma presenta maggior impreparazione rispetto alle dimostrazioni e le definizioni. Entrambe le classi non ottengono buoni risultati nell'affrontare l'ultima domanda aperta, poiché, nel fornire la definizione di triangolo isoscele, spesso ricorrono ad una definizione esclusiva. Complessivamente, possiamo concludere che la classe sperimentale ha affrontato in modo leggermente migliore tale parte del test finale.

I due esercizi dimostrativi hanno messo in difficoltà entrambe le classi, come si può osservare in figura 5.4, ma la classe sperimentale ha sicuramente svolto una performance migliore rispetto alla classe di controllo. Infatti, entrambi gli esercizi sono stati svolti correttamente da circa il 30% in più degli studenti nella classe che ha partecipato al progetto. Va però sottolineato come unicamente uno studente su venticinque abbia deciso spontaneamente di avvalersi della piegatura della carta nella risoluzione di un esercizio dimostrativo.

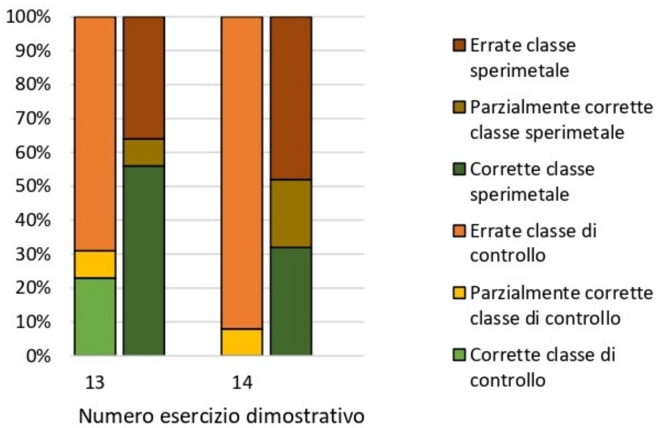


Figura 5.4: Risposte agli esercizi dimostrativi presenti nel test finale, somministrato ad entrambe le classi (dato percentuale).

Complessivamente, il test finale permette di cogliere come il progetto di sperimentazione didattica sia riuscito a portare ad un buon livello di apprendimento, superiore a quello ottenuto nella classe di controllo, la quale aveva invece ricevuto i medesimi contenuti attraverso classiche lezioni frontali e con l'impiego dei classici strumenti didattici: libro di testo e rappresentazioni per mezzo di riga e compasso. Non vi sono però studenti che adottano la piegatura della carta per far fronte alle domande del test, mostrando come tale strumento non sia diventato per loro un valido alleato nella risoluzione dei problemi.

5.2.3 *Questionario sui contenuti*

Il *Questionario sui contenuti*, realizzato per sondare l'opinione degli studenti rispetto alla propria comprensione degli argomenti affrontati, ci permette di verificare se gli studenti di entrambe le classi sono consapevoli delle proprie fragilità. Siamo quindi interessati a vedere se vi sia coerenza tra quanto espresso da ciascuna classe nel questionario e i risultati conseguiti nel test finale. Inoltre, la sezione inerente alla piegatura della carta permette di sondare i limiti che gli studenti hanno riscontrato in tale strumento.

Le prime venti domande del questionario erano finalizzate a verificare se ciascuno studente ritenesse di avere capito cosa sono e il ruolo di enti primitivi, assiomi, teoremi, dimostrazioni e definizioni. Le percentuali di risposte affermative fornite da ciascuna classe sono rappresentate in figura 5.5.

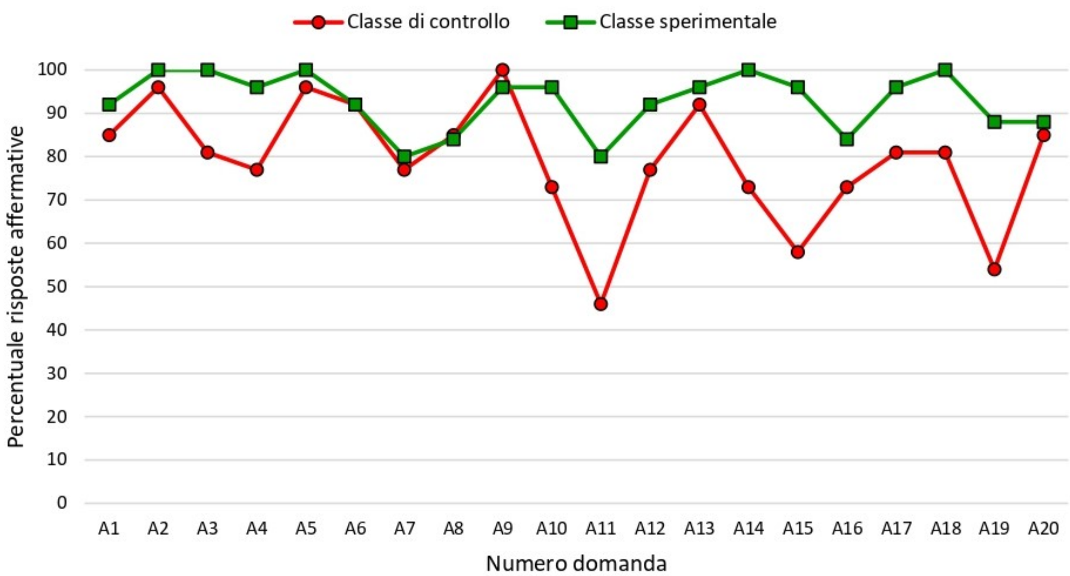


Figura 5.5: Percentuale di risposte affermative fornite dalle due classi nel *Questionario sui contenuti*, relativamente alle conoscenze acquisite sull'introduzione alla geometria.

È possibile osservare come la percentuale di risposte affermative date dalla classe che ha preso parte alla sperimentazione sia più elevata per tutte le domande, ad eccezione dei numeri A6, A8 ed A9. Tale dato, inerente a domande riguardanti gli enti primitivi, si pone quindi in linea con i risultati conseguiti dagli studenti delle due classi nel test finale. Si può inoltre osservare come le risposte dalla A10 in poi, presentino un tasso di risposte affermative da parte della classe che ha aderito alla sperimentazione di molto superiore rispetto alla classe di controllo. Il divario supera i trenta punti percentuali per domande quali *«so spiegare cos'è una definizione»* (A11), *«so spiegare cos'è un teorema»* (A15) e *«so spiegare cos'è una dimostrazione»* (A19). Anche tale dato si pone in accordo con quanto emerso dal test finale sostenuto dalle due classi.

Attraverso il secondo gruppo di domande gli studenti dichiarano quanto ritengono di aver appreso sulla risoluzione di esercizi dimostrativi. Sono state individuate quattro tipologie di domande, per ciascuna delle quali è stato stabilito un voto effettuando la media tra i punteggi assegnati a ciascuna domanda:

- **Enunciato**: domande da B1 ad B2;
- **Rappresentazione**: domande da B3 a B5 e B13;
- **Strategie dimostrative**: domande da B6 a B10;
- **Definizioni**: domande da B11 a B12.

Le domande B4 e B7 *«quando affronto un problema dimostrativo di geometria, effettuo la rappresentazione di un caso particolare, non di quello più generale»* e *«quando affronto un problema dimostrativo di geometria, procedo per tentativi, applicando casualmente i teoremi che riesco a ricordare»* sono state realizzate considerando ottimale l'assegnazione di un punteggio basso, in quanto si considera preferibile che gli studenti adottino raramente tali comportamenti. Effettuando la media sono stati quindi rovesciati i punteggi

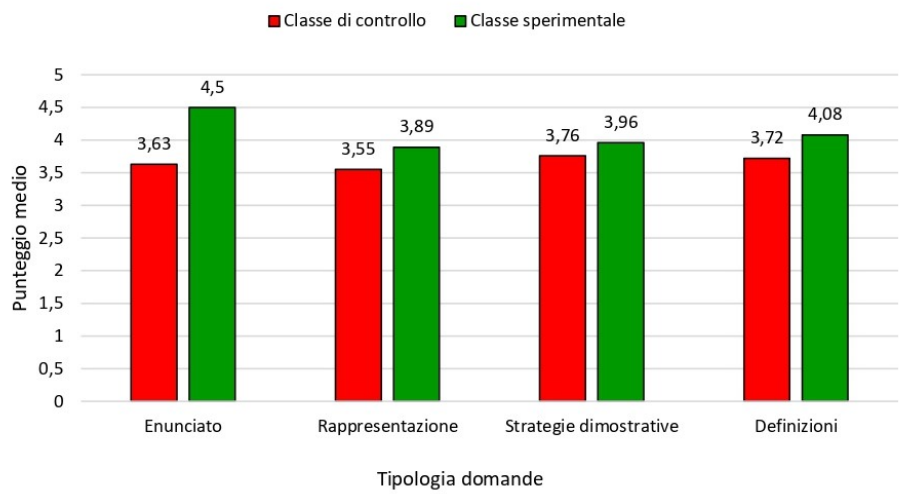


Figura 5.6: Risposte medie fornite dalle due classi nel *Questionario sui contenuti*, relativamente alle abilità acquisite nell'affrontare i problemi dimostrativi.

assegnati a tali domande secondo le seguente regola $1 \leftrightarrow 5, 2 \leftrightarrow 4$ e $3 \leftrightarrow 3$. In figura 5.6 sono rappresentati i punteggi medi che ciascuna classe ha attribuito ai vari gruppi di domande.

È possibile osservare come i punteggi medi attribuiti dalla classe sperimentale siano più alti rispetto quelli attribuiti dalla classe di controllo. Il divario è maggiore nell'**enunciato**, ovvero sulle domande *«quando affronto un problema dimostrativo di geometria, so individuare autonomamente tutte le ipotesi»* e *«quando affronto un problema dimostrativo di geometria, so individuare autonomamente la tesi»*. Tali domande riguardano le fasi iniziali del processo di dimostrazione: se non si padroneggiano tali aspetti risulta impossibile affrontare un esercizio dimostrativo. Il fatto che la classe di controllo ritenga di non possedere una elevata padronanza di tali aspetti, si pone in linea con i risultati da loro conseguiti nel test finale. Vi era infatti stata una percentuale molto ridotta di studenti in grado di portare a termine un esercizio dimostrativo.

Il terzo gruppo di domande del questionario è stato sottoposto unicamente alla classe che ha preso parte alla sperimentazione e spostava il focus sulla piegatura della carta come strumento didattico. Anche in questo caso, sono state individuate tre tipologie di domande, per ciascuna delle quali è stato stabilito un voto effettuando la media tra i punteggi assegnati a ciascuna domanda:

- **Opinione**: domande C1 e da C9 a C10;
- **Esperienza**: domande da C2 a C4;
- **Impatto operativo**: domande da C5 a C8.

In fase di correzione dei questionari, è emerso un errore di compilazione: le domande da C1 a C6 presentavano la scala di punteggio da 1 a 5 con 1=*'non saprei'*, 2=*'per niente'* e 5=*'molto'*, mentre le restanti facevano riferimento alla scala da 1 a 5, dove 1=*'mai'* e 5=*'sempre'*. Nelle intenzioni della ricercatrice, la scala adeguata a tale gruppo di domande è la prima tra le due inserite; inoltre, tale scala risulta essere quella meno restrittiva. Si è quindi deciso di mantenere il primo sistema di valutazione per tutta la sezione di domande inerenti alla piegatura della carta.

Nel caso in cui uno studente abbia risposto *'non saprei'* ad una domanda, è stato assegnato un punteggio pari a zero a tutto il gruppo cui appartiene la domanda in questione. Le restanti valutazioni sono state diminuite di un punto, in modo da attribuire 1 alle risposte del tipo *'per niente'* e 4 a rispose del tipo *'molto'*. Inoltre, le domande C6, C9 e C10 sono state realizzate considerando ottimale l'assegnazione di un punteggio basso; effettuando la media sono stati quindi rovesciati i punteggi assegnati a tali domande secondo le seguente regola $1 \leftrightarrow 4$ e $2 \leftrightarrow 3$. In figura 5.7 sono rappresentati i punteggi medi che la classe ha attribuito ai vari gruppi di domande, mentre la figura 5.8 illustra le percentuali di risposta *'non saprei'* date dagli studenti a ciascun gruppo di domande.

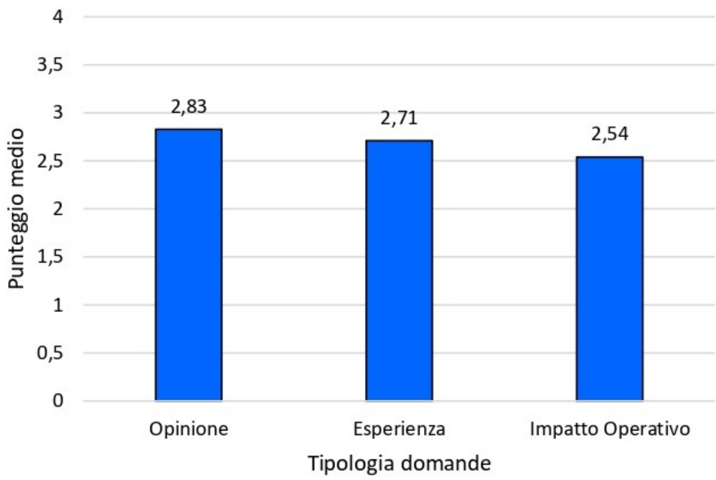


Figura 5.7: Voti medi attribuiti dagli studenti della classe sperimentale alle domande inerenti il progetto e l'utilizzo della piegatura della carta nella didattica della Geometria.

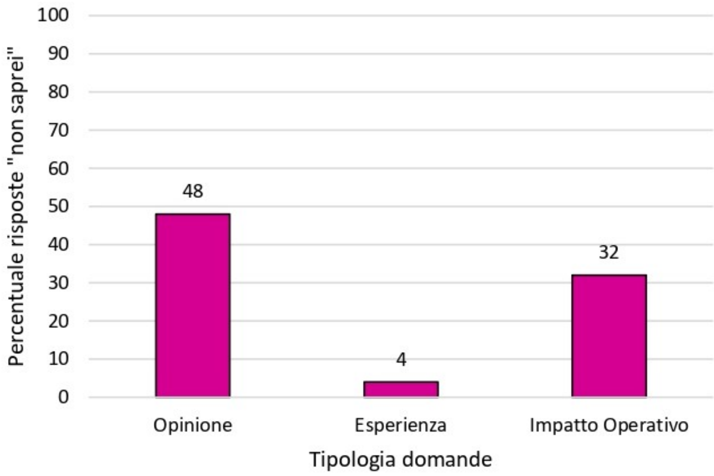


Figura 5.8: Percentuale di risposte *'non saprei'* fornite dagli studenti alle domande inerenti il progetto e l'utilizzo della piegatura della carta nella didattica della Geometria.

Il punteggio medio inerente all'**opinione** degli studenti è il più elevato tra i tre, ma tale gruppo è anche quello che ha ricevuto il più alto tasso di risposte *'non saprei'* da parte degli studenti. In particolar modo, le domande C9 e C10 *«ritengo che l'utilizzo degli origami nel corso delle lezioni di geometria non sia utile»* e *«ritengo che l'utilizzo degli origami all'interno degli esercizi dimostrativi non sia utile»* hanno ricevuto molte risposte *'non saprei'*. Tali domande sono state formulate attraverso una negazione; ciò ha incrementato notevolmente la loro complessità. Risulta quindi plausibile che sia questa la ragione alla base di tale percentuale elevata di astensioni. Qualora si decidesse di effettuare un'ulteriore sperimentazione, è quindi consigliato modificare tali domande eliminando la negazione. Per quanto riguarda invece la valutazione dell'**esperienza** effettuata attraverso la sperimentazione, il punteggio medio attribuito è più che sufficiente, con una percentuale di risposte *'non saprei'* estremamente bassa. Emerge quindi un generale apprezzamento da parte degli studenti per il progetto realizzato. Il dato riguardante l'**impatto operativo** è positivo, anche se il voto medio attribuitogli è il più basso della sezione. Inoltre, anche questo gruppo presenta una percentuale di risposte *'non saprei'* elevata. Gli studenti sembrano quindi avere alcune difficoltà a stabilire quanto possa risultare per loro utile ricorrere in prima persona alla tecnica del *paper-folding* quando devono svolgere esercizi dimostrativi.

Tale paragrafo del questionario permette di concludere che in generale la classe trova utile l'utilizzo degli origami da parte dell'insegnante nella didattica, ma ritiene meno utile utilizzarli in prima persona. Ciò è in linea con quanto osservato in precedenza: solo uno studente ha deciso di avvalersi degli origami per affrontare gli esercizi dimostrativi.

Complessivamente, il *Questionario sui contenuti* conferma quanto appreso attraverso il test finale, ovvero che il progetto ha portato un maggior apprendimento. Inoltre, ha permesso di individuare con maggiore chiarezza il principale limite dell'utilizzo del *paper-folding* nella didattica: la difficoltà degli studenti di impiegarlo autonomamente nella risoluzione dei problemi.

5.2.4 *Questionario sulle discipline*

Si consideri ora il *Questionario sulle discipline*, realizzato per verificare se l'opinione degli studenti ha subito delle significative modifiche al termine dei due mesi di sperimentazione. Siamo interessati a confrontare le risposte attribuite all'inizio e al termine della sperimentazione sia alle domande inerenti alla matematica sia alle domande inerenti alla geometria, al fine di verificare quali modifiche si siano verificate. Inoltre, siamo interessati a conoscere le percentuali degli studenti che hanno variato la propria votazione assegnando un punteggio più alto al termine della sperimentazione, per individuare eventuali differenze tra la matematica e la geometria.

Le prime domande sondano l'opinione degli studenti sulla matematica e le successive più in particolare sulla geometria. Le domande riguardanti entrambe le discipline sono state suddivise in tre gruppi, per ciascuno dei quali è stato stabilito un voto effettuando la media tra i punteggi assegnati a ciascuna domanda:

- **Opinione**: *Matematica* domande da A1 ad A3, *Geometria* domande da B1 a B4;
- **Utilizzo**: *Matematica* domande da A4 ad A7, *Geometria* domande da B5 a B6;

- **Autovalutazione**: *Matematica* domande da A8 ad A14, *Geometria* domande da B7 a B13.

In figura 5.9 sono rappresentati i punteggi medi che la classe ha attribuito ai vari gruppi di domande riguardanti la matematica. La figura 5.10 rappresenta i punteggi medi assegnati alla geometria.

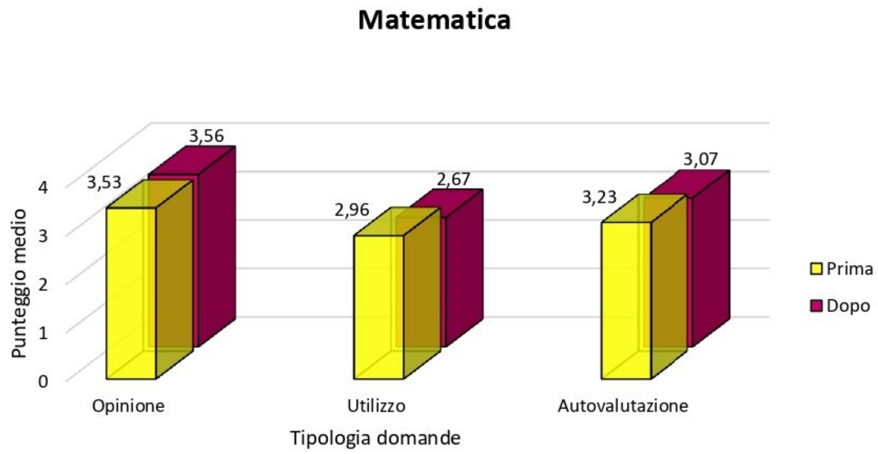


Figura 5.9: Voti medi attribuiti dagli studenti della classe sperimentale alle domande riguardanti la Matematica all'inizio e al termine del progetto.

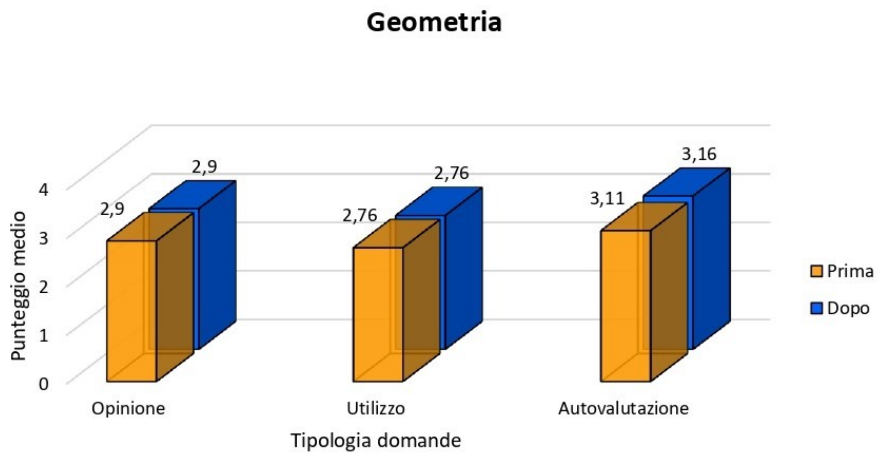
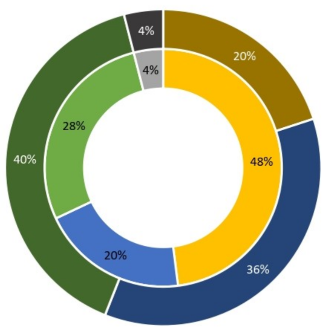


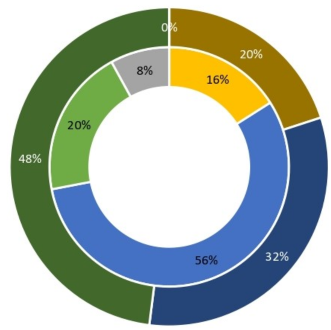
Figura 5.10: Voti medi attribuiti dagli studenti della classe sperimentale alle domande riguardanti la Geometria all'inizio e al termine del progetto.

I dati mostrano come le valutazioni medie non subiscano significative variazioni per quanto riguarda la geometria, mentre si verifica un leggero abbassamento della media calcolata su due gruppi di domande riguardanti la matematica. Le informazioni che è possibile ricavare da tale analisi sono limitate, per cui si è deciso di compiere una diversa valutazione: per ciascun gruppo di domande è stata calcolata la percentuale di studenti che hanno assegnato un voto più alto o basso al termine della sperimentazione, o che non hanno variato la propria valutazione. La figura 5.11 mostra le percentuali ottenute per ciascun gruppo di domande: più internamente sono rappresentati i dati relativi alla matematica, mentre il cerchio più esterno mostra i dati relativi alla geometria.

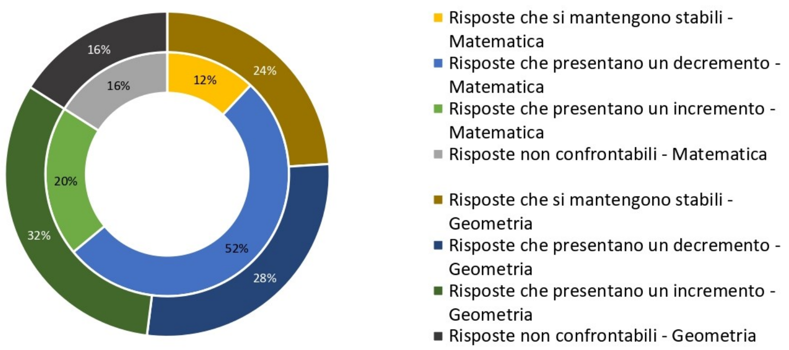
Per quanto riguarda l'**opinione** degli studenti, le percentuali di incrementi e decrementi nei voti assegnati alla geometria sono largamente superiori a quelle nei voti



(a) Opinione



(b) Utilizzo



(c) Autovalutazione

Figura 5.11: Percentuale di studenti della classe sperimentale che hanno mantenuto o modificato la propria valutazione sulla Geometria e la Matematica, suddivise nei tre gruppi.

assegnati alla matematica. Domande rappresentative di tali gruppi sono *«la matematica/geometria è una materia che mi piace»* e *«ritengo che la matematica/geometria sia una materia utile da sapere»*. Il fatto che vi sia un'elevata percentuale di variazioni del voto assegnato a tali domande riferite alla geometria, non può essere interpretato con certezza come un dato riferito al progetto di sperimentazione. La geometria è una disciplina che si modifica significativamente nel passaggio dalla Scuola Secondaria di I grado alla Secondaria di II grado; non è possibile stabilire se le modifiche nell'opinione degli studenti siano da imputare a tale cambiamento o al progetto proposto.

Per quanto riguarda invece l'**utilizzo** e l'**autovalutazione**, le percentuali di incrementi nelle valutazioni attribuite alla geometria sono superiori rispetto a quelle attribuite alla matematica, mentre vi è una minor percentuale di studenti che hanno abbassato il proprio voto. L'autovalutazione presenta domande quali *«mi reputo brava in matematica/geometria»*; la presenza di una maggior percentuale di studenti che hanno assegnato voti più alti a tale gruppo di domande quando queste erano riferite alla geometria rispetto a quando erano riferite alla matematica, può essere un ulteriore indice di efficacia del progetto: affrontare lo studio della geometria attraverso una pluralità di strumenti, ha portato ad una maggior comprensione e gli studenti si sono rivelati consapevoli di tale fatto. Tale dato sarebbe più chiaro se il medesimo questionario fosse stato sottoposto anche alla classe di controllo. Se in futuro tale progetto di sperimentazione didattica fosse riproposto in una Scuola Secondaria di II grado, può essere utile somministrare anche tale questionario alla classe di controllo designata.

5.3 Osservazioni e riflessioni finali

Complessivamente, il progetto di sperimentazione didattica si è rivelato efficace. I risultati conseguiti nel test finale e i dati raccolti attraverso i questionari hanno restituito l'immagine di una classe che ha appreso i contenuti dell'unità didattica e ha sviluppato delle competenze centrali per i proseguimento del percorso scolastico. La prima ipotesi di ricerca è stata verificata, e il *paper-folding* si è dimostrato uno strumento di facile impiego all'interno dell'insegnamento della geometria euclidea, in grado di aiutare gli studenti a raggiungere un più profondo livello di comprensione della sua natura assiomatico-deduttiva.

Le osservazioni svolte nel corso del progetto e durante la somministrazione dei test finali hanno invece mostrato come gli studenti non ricorrano autonomamente alla piegatura della carta per risolvere gli esercizi che vengono loro sottoposti. La seconda ipotesi di ricerca non è quindi stata confermata poiché le conclusioni cui si è giunti non sono quelle sperate in fase progettuale. La sensazione emersa dall'osservazione degli studenti che hanno preso parte al progetto, è che essi non ricorrano al *paper-folding* poiché trovano molto complesso stabilire come utilizzare al meglio lo strumento. È quindi ragionevole chiedersi se la piegatura della carta non possa diventare uno strumento di più facile utilizzo nel caso in cui il suo apprendimento avvenga in una fase precedente del percorso scolastico. Sarebbe interessante verificare se, l'utilizzo quotidiano fin dalla Scuola Primaria e lungo tutta la Scuola Secondaria di I grado, possa portare gli studenti a considerare la piegatura della carta uno strumento di cui disporre al pari della riga e al compasso, e quindi utilizzabile nelle risoluzioni degli esercizi.

In generale, la sperimentazione è stata svolta su un piccolo campione di studenti, di conseguenza non è stato possibile attuare il progetto nelle molteplici realtà scolastiche esistenti. Sarebbe interessante allargare la sperimentazione ad indirizzi di studio differenti, al fine di verificare se le conclusioni cui si giunge sono le medesime. Inoltre, ampliare il bacino di studenti che prendono parte al progetto assicurerebbe di incontrare individui che adottano diversi stili di apprendimento; sarebbe interessante verificare se il *paper-folding* si rivela un alleato migliore per alcuni di essi. Inoltre, l'ampliamento del bacino di studenti che prendono parte al progetto permetterebbe di verificare se l'utilizzo della piegatura della carta possa essere un efficace strumento per aiutare gli studenti che presentano disturbi dell'apprendimento, come ad esempio la dislessia e la disgrafia.

Conclusione

Complessivamente, nell'elaborato si è cercato di fornire un'immagine completa del *paper-folding*, in quanto sono state indagate sia le sue proprietà matematiche sia le sue potenzialità didattiche.

Inizialmente, è stata studiata nel dettaglio la teoria assiomatica del *paper-folding*, elaborata al termine del XX secolo a partire dai lavori dei matematici Humiaki Huzita, Benedetto Scimemi, Jacques Justin e Koshiro Hatori, effettuando l'analisi della completezza e dell'indipendenza dei sette assiomi di Huzita-Hatori, secondo le strade tracciate dai matematici i Roger C. Alperin e Robert J. Lang. È stato quindi dimostrato che la teoria assiomatica è completa, contrariamente a quanto riteneva Huzita, e che unicamente il primo e il sesto assioma, detto *assioma di Beloch* in quanto individuato per la prima volta, negli anni Trenta del Novecento, da Margherita Piazzolla Beloch, sono tra loro indipendenti.

Sono state inoltre esplicitate le potenzialità costruttive della piegatura della carta, mostrando come il primo e quinto assioma permettano di effettuare le medesime costruzioni realizzabili con riga e compasso. L'introduzione del sesto assioma permette invece di risolvere alcuni problemi classici non risolubili attraverso gli strumenti euclidei, quali la duplicazione del cubo, la trisezione dell'angolo e la costruzione dell'ettagono e dell'ennagono regolari. Ciò permette di concludere che il *paper-folding* è uno strumento "più potente", in termini di potenzialità costruttive, rispetto a riga e compasso.

In seguito, sono stati presentati i possibili vantaggi che può comportare l'utilizzo della piegatura della carta nell'insegnamento della matematica, analizzando i principali contributi in didattica e teorie dell'apprendimento prodotti da psicologi, pedagogisti e insegnanti nel corso dell'ultimo secolo. La letteratura generale e specifica riguardante il tema permette di affermare che un buon apprendimento si verifica attraverso la didattica attiva, che porta gli studenti a costruire autonomamente la propria conoscenza e attraverso l'utilizzo di molteplici strumenti in modo da favorire i diversi stili cognitivi e di apprendimento che caratterizzano ciascun allievo. Il *paper-folding* rappresenta un utile strumento da impiegare nella didattica della matematica in quanto risponde a tutte queste esigenze.

Sono stati inoltre presentati i principali progetti esistenti che prevedono l'impiego del *paper-folding* nell'insegnamento della matematica. Nonostante la Scuola Secondaria di II grado sia l'ambiente nel quale è possibile sfruttare appieno le potenzialità matematiche di tale strumento, i progetti realizzati per tale grado di istruzione sono numericamente inferiori rispetto a quelli ideati per i restanti gradi di istruzione; vengono inoltre attuati raramente, poiché gli studenti non hanno sufficiente dimestichezza con la piegatura della carta e ciò ostacola l'assimilazione dei contenuti veicolati.

Per tale ragione è stato proposto un progetto di sperimentazione didattica volto a far conoscere il *paper-folding* agli studenti di una classe prima della Scuola Secondaria di II grado, così che possano disporre di tale strumento che può favorire il loro processo di apprendimento. Inoltre, la conoscenza della piegatura della carta rappresenta la condizione necessaria per poter realizzare in futuro ulteriori progetti che coinvolgono aspetti matematici più complessi, quali quelli presentati nei primi capitoli del presente elaborato.

La sperimentazione ha portato a confermare i numerosi vantaggi che comporta l'inclusione del *paper-folding* nell'insegnamento della geometria, in quanto gli studenti che hanno preso parte al progetto hanno effettuato prestazioni migliori nei test di controllo rispetto a coloro che non vi hanno preso parte. Inoltre, gli studenti stessi, attraverso un questionario, hanno dichiarato di aver trovato utili le rappresentazioni per mezzo del *paper-folding* effettuate dall'insegnante nel corso delle lezioni. Tuttavia, è emerso anche la difficoltà degli alunni a ricorrere autonomamente a tale strumento, trovandosi a dover fronteggiare gli esercizi dimostrativi. Ciò può significare che il primo anno della Scuola Secondaria di II grado è troppo avanzato per l'inserimento di un nuovo strumento didattico; per questo si auspica la realizzazione di ulteriori progetti che mirino all'introduzione della piegatura della carta in fasi antecedenti del percorso scolastico, come la Scuola Primaria o la Scuola Secondaria di I grado. Ulteriori sviluppi di tale progetto possono inoltre prevedere la sperimentazione in istituti aventi indirizzi di studi diversi dal Liceo Scientifico e l'utilizzo di tale strumento nell'insegnamento a classi in cui sono presenti studenti aventi disturbi dell'apprendimento, come ad esempio dislessia o disgrafia.

Alla luce di quanto fin qui presentato, possiamo concludere che il *paper-folding* è uno strumento dalle forti proprietà matematiche e rappresenta un utile mezzo didattico, che merita maggior spazio nella realtà scolastica odierna.

Appendice A

Materiali utilizzati nel Progetto

La presente appendice raccoglie tutti i materiali impiegati nel corso della sperimentazione presso la Scuola Secondaria di II grado “E. Fermi” di Padova. È presente una breve presentazione dei materiali, suddivisi secondo le attività cui sono finalizzati.

Attività 2 - Introduzione alla piegatura della carta

Sono presenti quattro pagine formato A4 che possono essere impiegate per ricavare le otto tessere per effettuare le pieghe della teoria del *paper-folding*. Seguono gli schemi delle pieghe necessari per realizzare le costruzioni di quadrato, triangolo isoscele e triangolo equilatero, reperiti online al seguente indirizzo:
https://viemaestre.com/wp-content/uploads/2022/01/DispensaOrigamiLincei.pdf [33].

Attività 4 - Assiomi

É disponibile la lista degli assiomi presenti nel libro di testo *“Colori della Matematica 1”* di L. Sasso e C. Zanone [29], adottato nella classe sperimentale. Nel file sono inoltre indicati gli assiomi che sono stati rappresentati dagli studenti per mezzo della piegatura della carta.

Attività 5 - Definizioni

Schemi delle pieghe per alcune rappresentazioni che possono essere assegnate agli studenti da svolgere per casa. Sono presenti gli schemi per realizzare segmenti e angoli consecutivi o adiacenti, angoli opposti al vertice, punto medio e bisettrice.

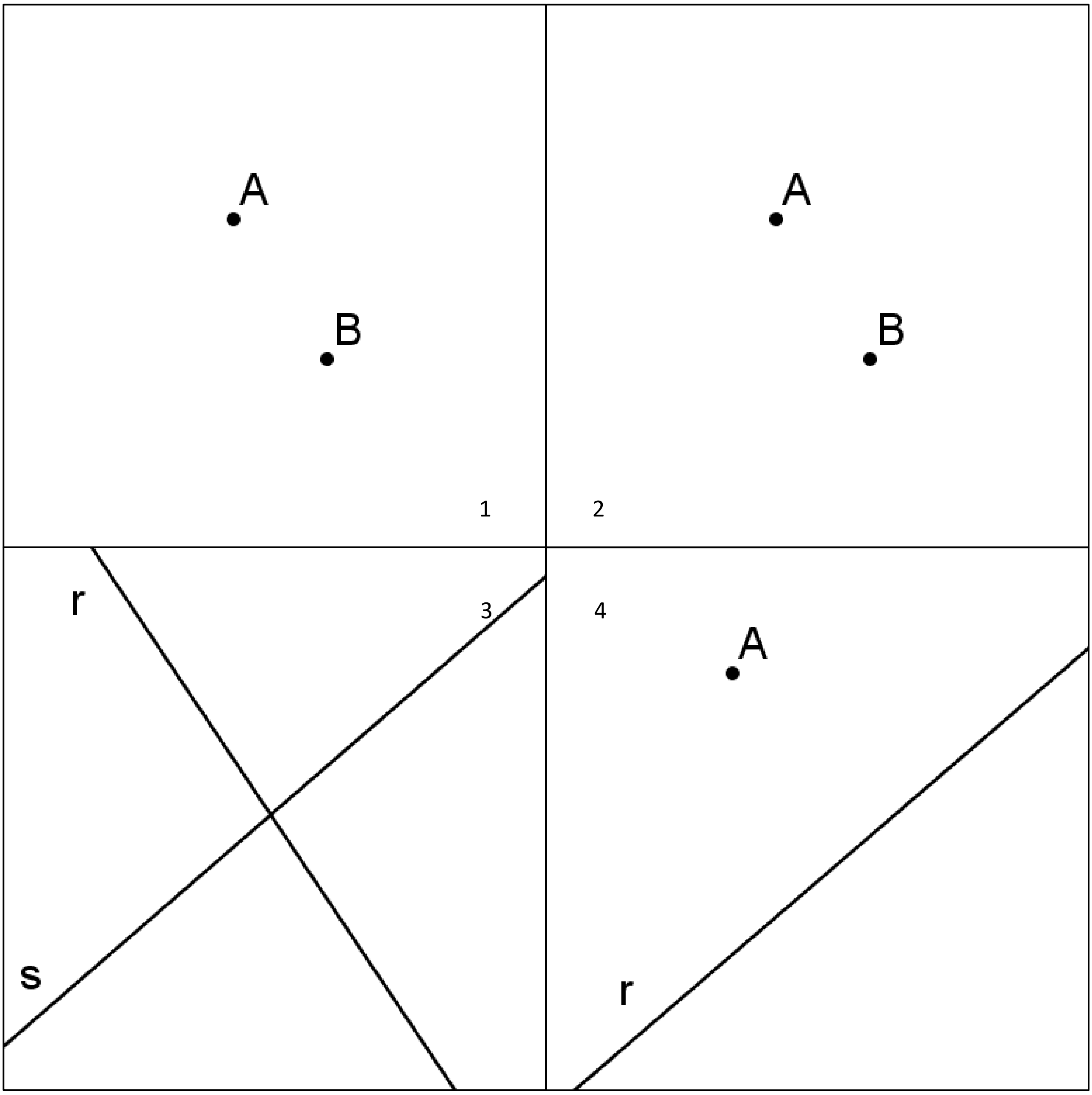
Attività 6 - Enunciato dei teoremi

É disponibile una lista recante alcuni teoremi, non necessariamente geometrici, da riformulare sotto forma di implicazione, tratti dal libro di testo *"Colori della Matematica 1"* di L. Sasso e C. Zanone [29].

Attività 7 - Dimostrazioni

Alcuni teoremi geometrici da impiegare affinché gli studenti si esercitino ad individuare ipotesi e tesi, rappresentare quanto espresso dall'enunciato attraverso riga e compasso, piegatura della carta e GeoGebra, e infine dimostrare l'enunciato. Tali proposte sono tratte dal testo *"Colori della Matematica 1"* di L. Sasso e C. Zanone [29].

Seguono i file indicati in precedenza, secondo l'ordine in cui sono stati presentati.

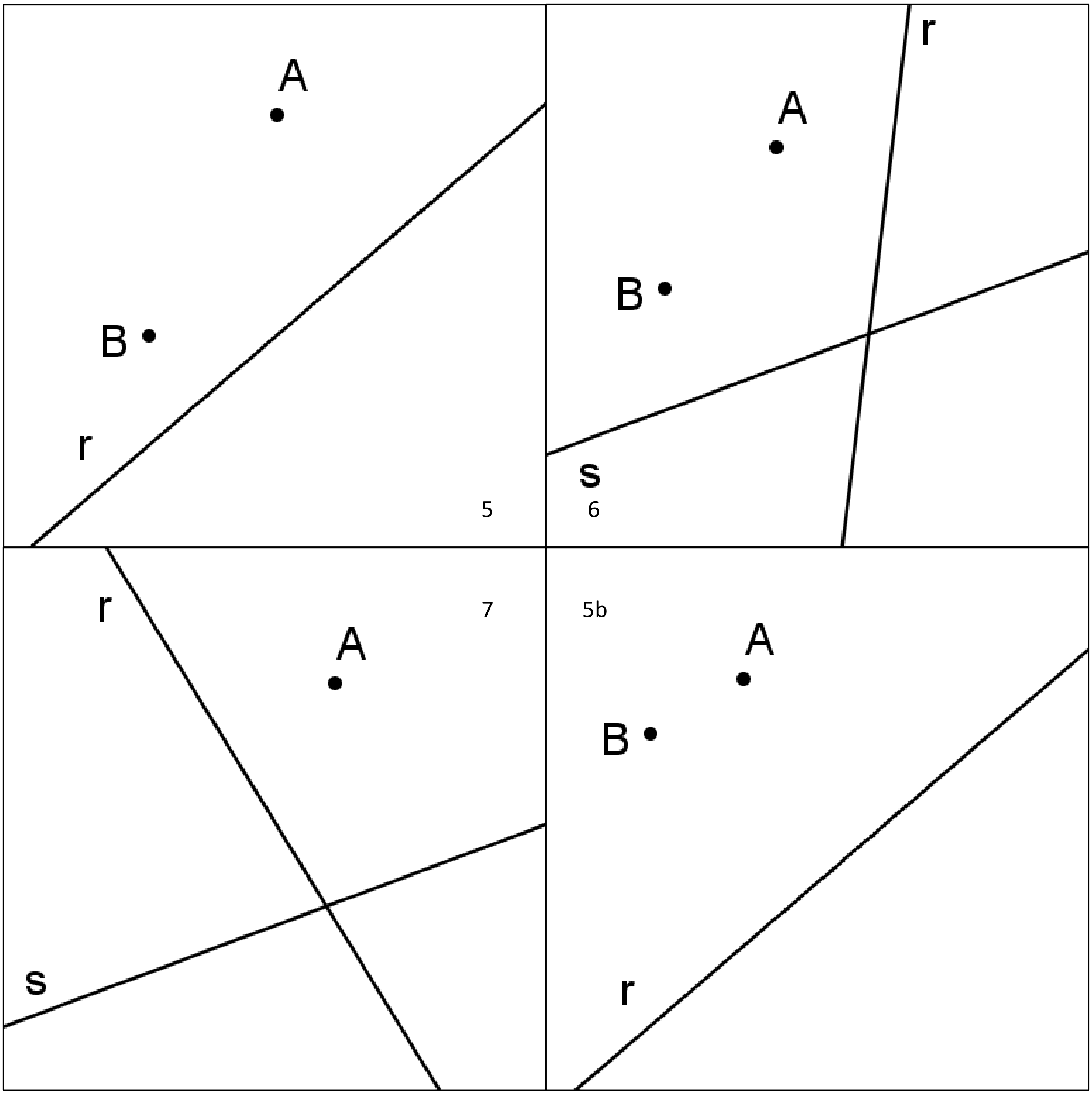


1) Piega il foglio in modo che la piega passi per entrambi i punti A, B.

2) Piega il foglio in modo che i punti A, B si sovrappongano.

3) Piega il foglio in modo che le due rette r, s si sovrappongano.

4) Piega il foglio in modo che la piega passi per il punto A e faccia sovrapporre la retta r a se stessa.

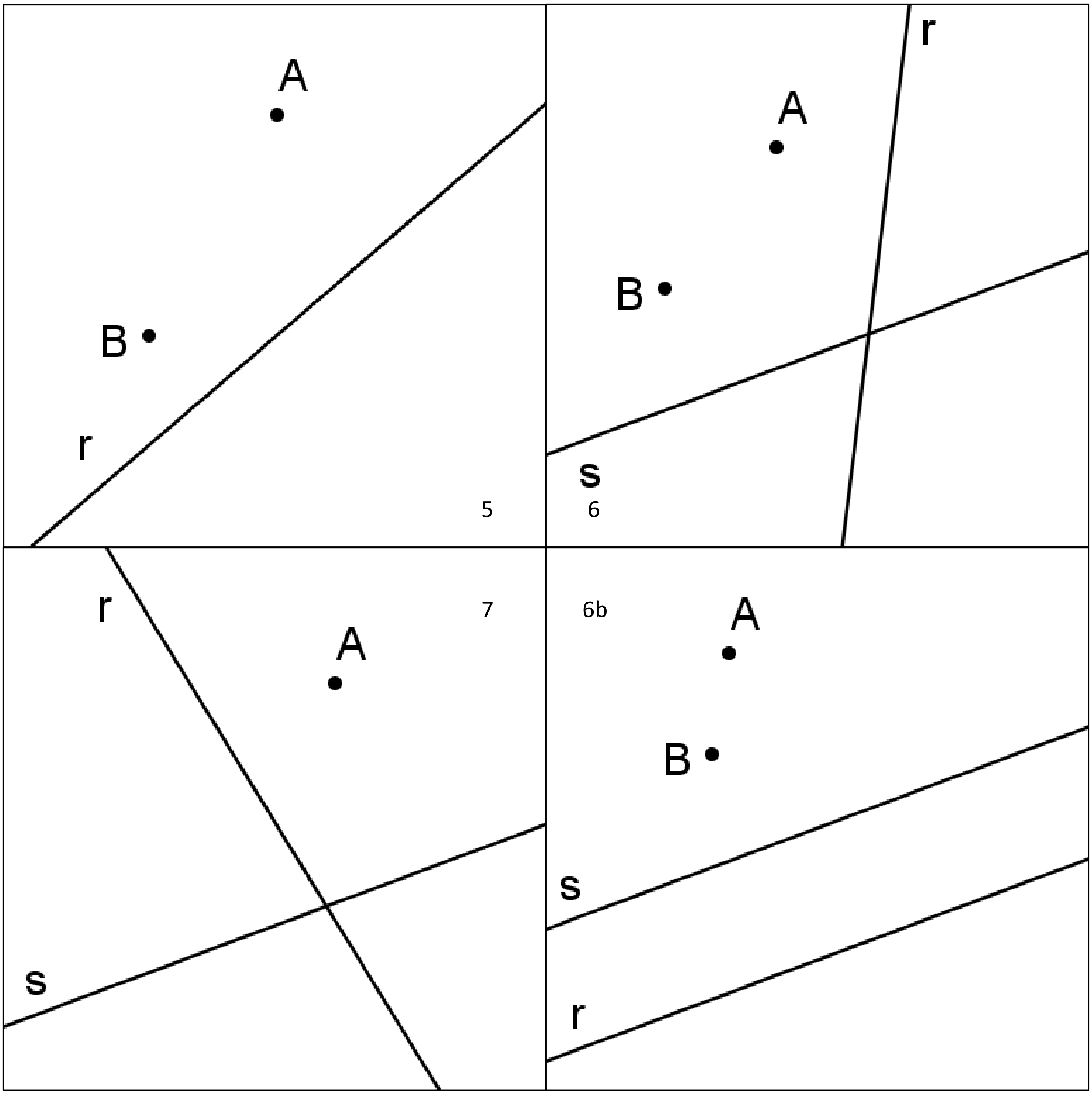


5) Piega il foglio in modo che la piega passi per il punto A e sovrapponga il punto B alla retta r.

6) Piega il foglio in modo che il punto A si sovrapponga alla retta r e il punto B si sovrapponga alla retta s.

7) Piega il foglio in modo che la retta s si sovrapponga a se stessa e il punto A si sovrapponga con la retta r.

Prendi ora il disegno 5b) e prova ad applicare la consegna 5.

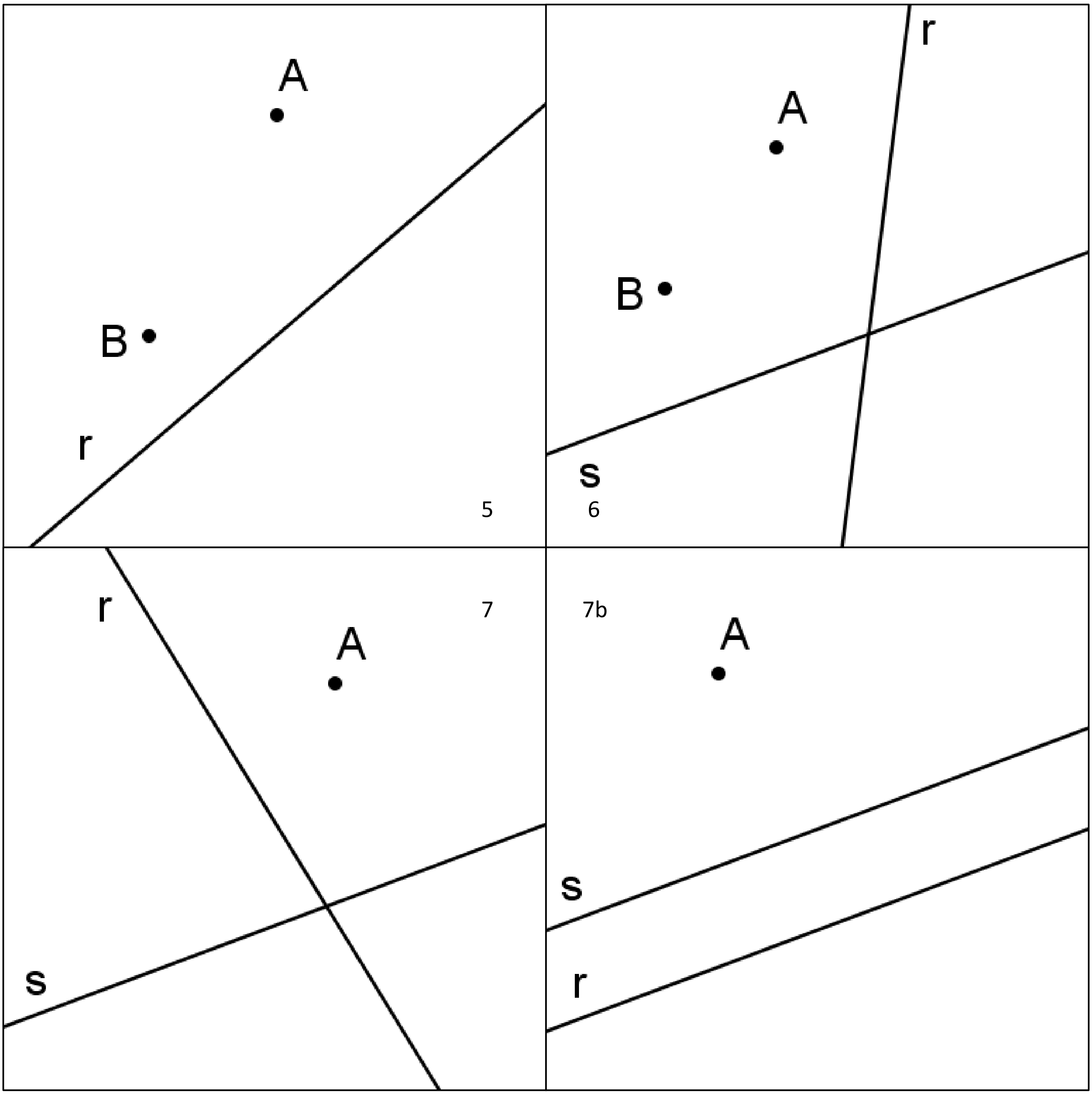


5) Piega il foglio in modo che la piega passi per il punto A e sovrapponga il punto B alla retta r.

6) Piega il foglio in modo che il punto A si sovrapponga alla retta r e il punto B si sovrapponga alla retta s.

7) Piega il foglio in modo che la retta s si sovrapponga a se stessa e il punto A si sovrapponga con la retta r.

Prendi ora il disegno 6b) e prova ad applicare la consegna 6.

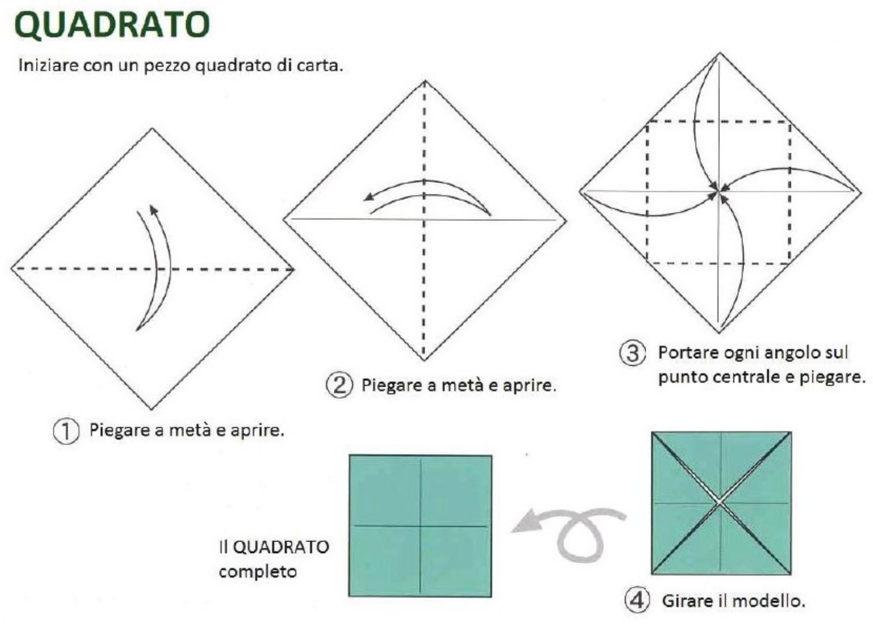


5) Piega il foglio in modo che la piega passi per il punto A e sovrapponga il punto B alla retta r.

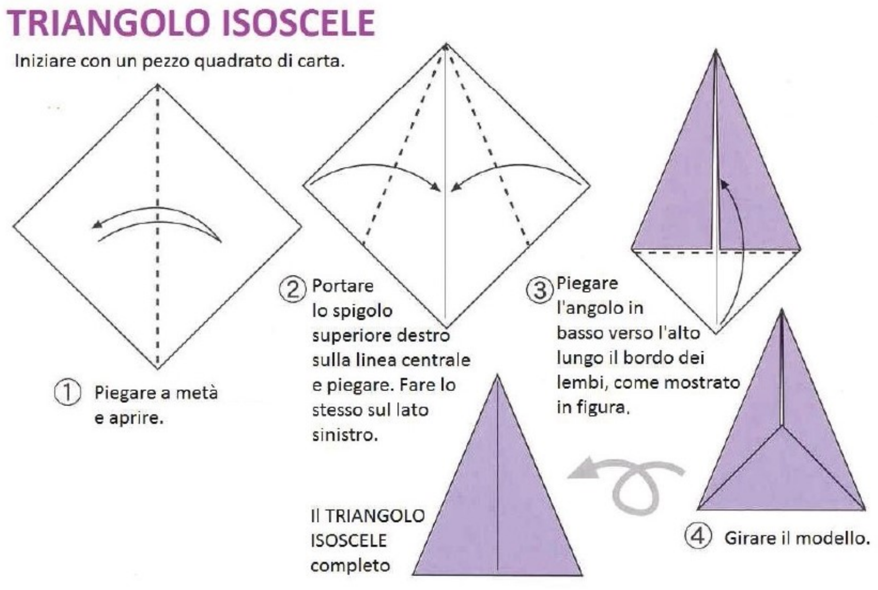
6) Piega il foglio in modo che il punto A si sovrapponga alla retta r e il punto B si sovrapponga alla retta s.

7) Piega il foglio in modo che la retta s si sovrapponga a se stessa e il punto A si sovrapponga con la retta r.

Prendi ora il disegno 7b) e prova ad applicare la consegna 7.



(a) Quadrato.



(b) Triangolo isoscele.

Figura A.1: Schemi delle pieghe origami geometrici.

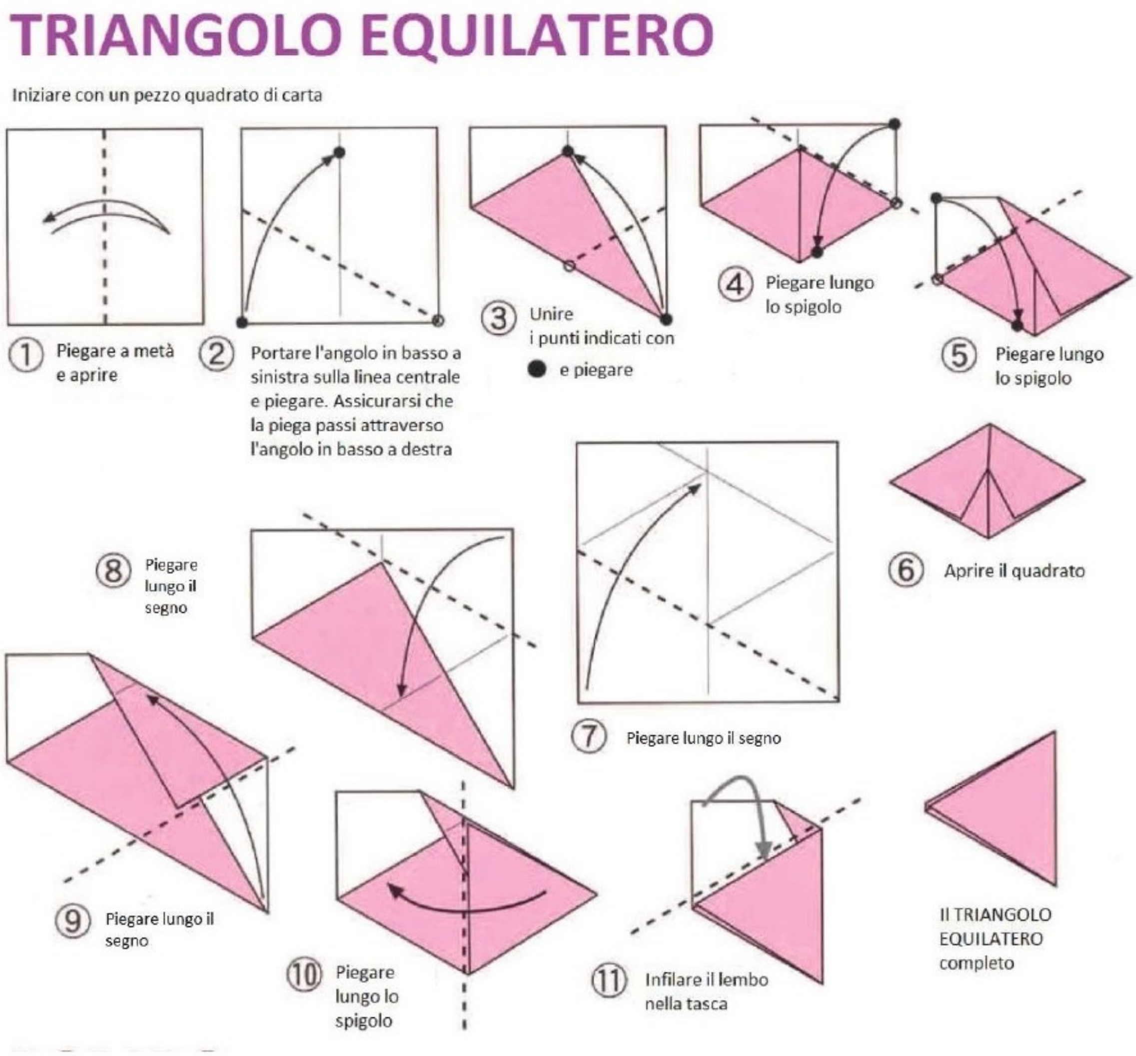


Figura A.2: Schema delle pieghe triangolo equilatero

Assioma 1 (pagina 693)

Ogni piano è un insieme di punti. Ogni retta è un sottoinsieme del piano.

Assioma 2 (pagina 693)

a) Ad ogni retta appartengono almeno due punti distinti.
b) Dati due punti distinti, esiste una e una sola retta alla quale appartengono entrambi.
c) Data una retta nel piano, esiste almeno un punto del piano che non appartiene ad essa.

Assioma 3 (pagina 694)

I punti di una retta possono essere ordinati in modo che valgano le seguenti proprietà:

a) Dati due punti distinti A e B, tali che A precede B, esiste sempre un punto C compreso tra A e B.
b) Dato un punto P, esistono sempre due punti A e B, tali che A precede P e P precede B.

Assioma 4 (pagina 697) – *paper folding*

Consideriamo una retta r nel piano. L'insieme dei punti del piano che non appartengono a r resta diviso da r in due sottoinsiemi disgiunti e convessi α e β, tali che, se A appartiene ad α e B appartiene a β, allora il segmento AB interseca la retta r in uno e un solo punto.

Assioma 5 (pagina 700) – *paper folding*

Data una qualsiasi poligonale chiusa non intrecciata, essa divide l'insieme dei punti del piano che non le appartengono in due sottoinsiemi, uno che non può contenere rette, i cui punti vengono detti interni alla poligonale e uno che contiene delle rette, i cui punti vengono detti esterni alla poligonale.

Assioma 6 (pagina 717)

La relazione di congruenza fra le figure del piano gode delle seguenti proprietà:

a) Ogni figura è congruente a se stessa (proprietà riflessiva);
b) Se la figura F_1 è congruente alla figura F_2, allora F_2 è congruente a F_1 (proprietà simmetrica);
c) Se la figura F_1 è congruente alla figura F_2 e la figura F_2 è congruente alla figura F_3, allora anche F_1 è congruente a F_3 (proprietà transitiva).

Assioma 7 (pagina 717)

Tutti i punti sono congruenti fra loro. La stessa cosa vale per le rette, le semirette, i piani e i semipiani.

Assioma 8 (pagina 718) – *paper folding*

a) Dato un segmento AB e una semiretta di origine O, esiste un unico punto P sulla semiretta, tale che AB è congruente a OP.
b) Dato un angolo $a\hat{O}b$ e una semiretta a' di origine O', su ognuno dei due semipiani individuati dalla retta cui appartiene la semiretta a' esiste un'unica semiretta b', di origine O', tale che $a'\hat{O}'b'$ è congruente ad $a\hat{O}b$.

Assioma 9 (pagina 720)

Somme, differenze, multipli e sottomultipli di segmenti congruenti sono congruenti.

Assioma 10 (pagina 722)

Somme, differenze, multipli e sottomultipli di angoli congruenti sono congruenti.

Assioma 11 (pagina 726)

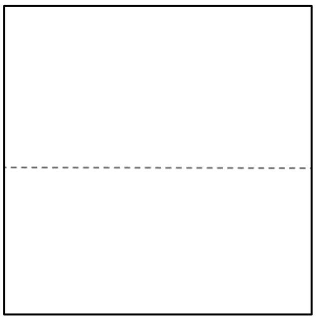
Comunque fissati un segmento (non nullo) u come unità di misura e un numero reale positivo k, esiste un segmento la cui misura rispetto a u è il numero k.

Assioma 12 (pagina 747) – *paper folding*

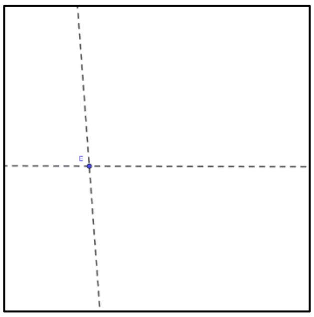
Due triangoli che hanno ordinatamente congruenti due lati e l'angolo tra di essi compreso sono congruenti.

Assioma 13 (pagina 791)

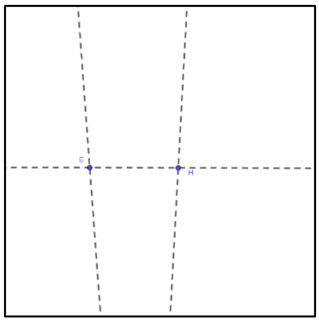
Dato un punto P e una retta r, la retta passante per P e parallela a r è unica.



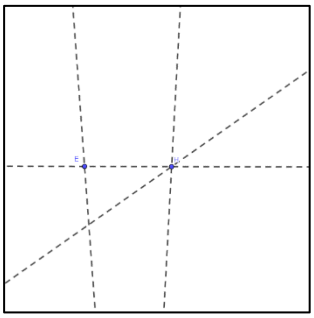
1) Effettua una piega.



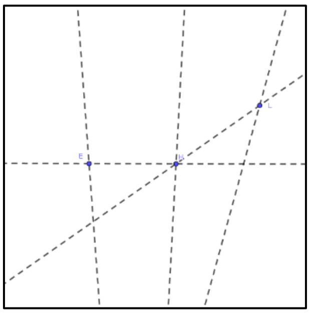
2) Effettua una piega che si intersechi con quella precedente. Viene così individuato il primo estremo.



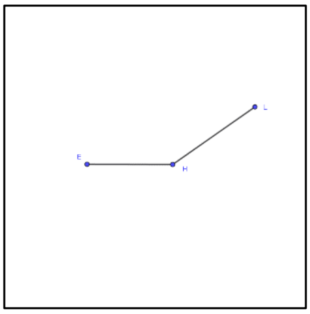
3) Effettua un’ulteriore piega che si intersechi con la prima. Viene così individuato il secondo estremo.



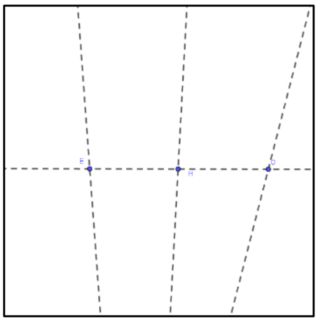
4a) Effettua una piega per il secondo punto individuato.



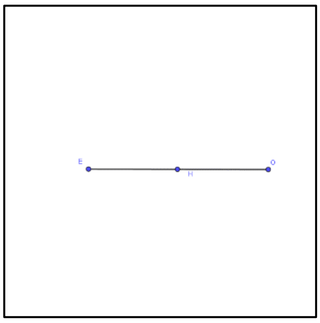
5a) Effettua una piega che si intersechi con la precedente. Viene così individuato il terzo estremo.



6a) Congiungendo il primo e il secondo punto e il secondo con il terzo, si ottengono due **segmenti consecutivi**.



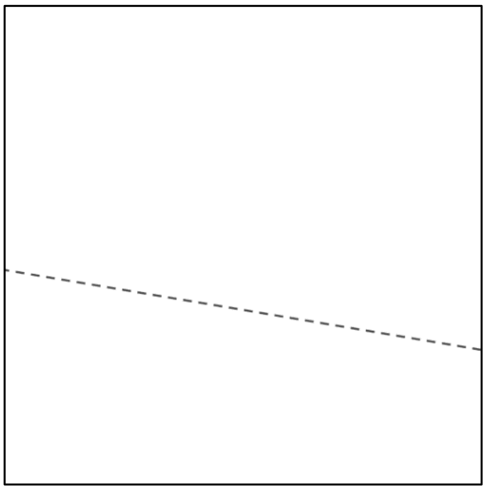
4b) Effettua una terza piega che si intersechi con la prima. Viene così individuato il terzo estremo.



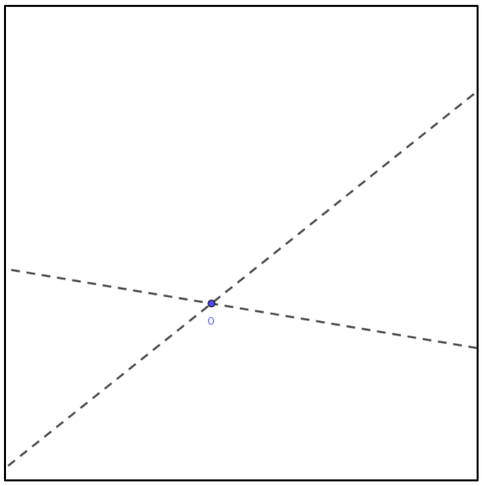
5b) Congiungendo il primo e il secondo punto e il secondo con il terzo, si ottengono due **segmenti adiacenti**.

ORA PROVA A PIEGARE UNA POLIGONALE (rivedi la definizione pag. 696)

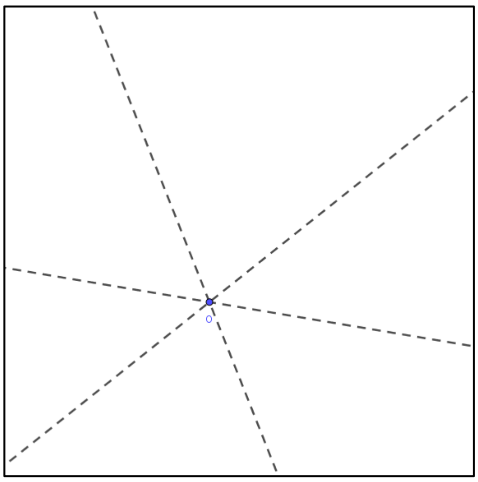
E UN POLIGONO (rivedi la definizione pag. 700)



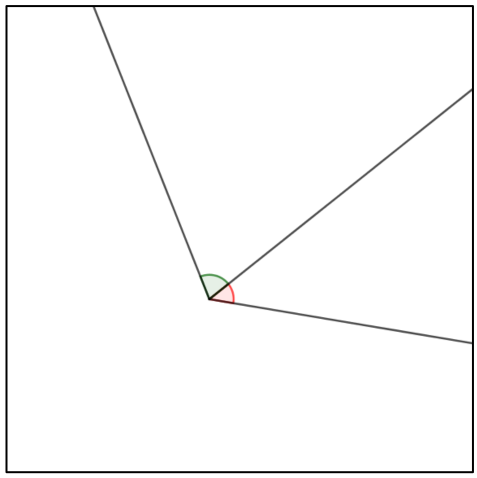
1) Effettua una piega.



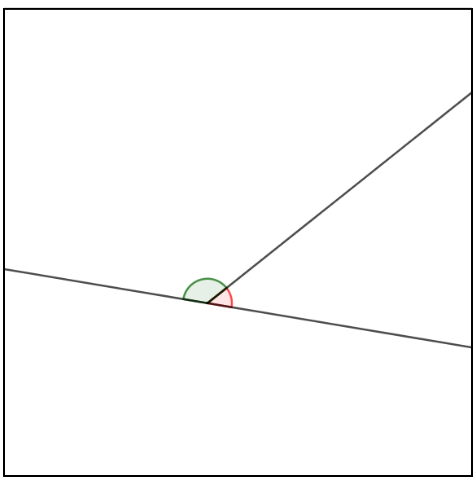
2) Effettua una piega che si intersechi con quella precedente. Viene così individuato il vertice.



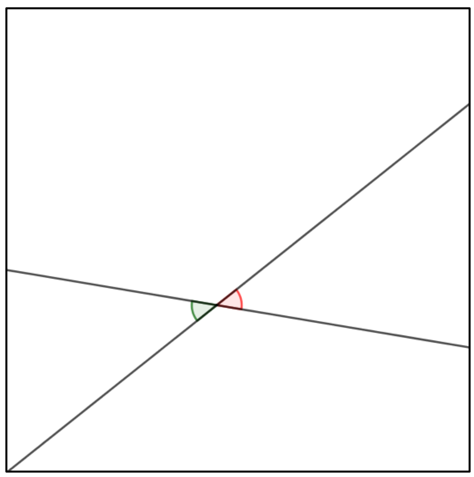
3a) Effettua un’altra piega passante per il punto individuato.



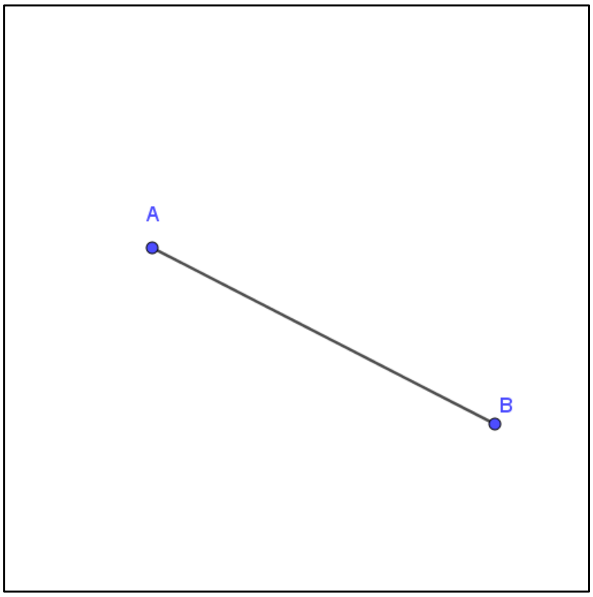
4a) Considera tre semirette uscenti dal vertice e non appartenenti alla stessa retta. Le parti di piano da loro delimitate sono due **angoli consecutivi**.

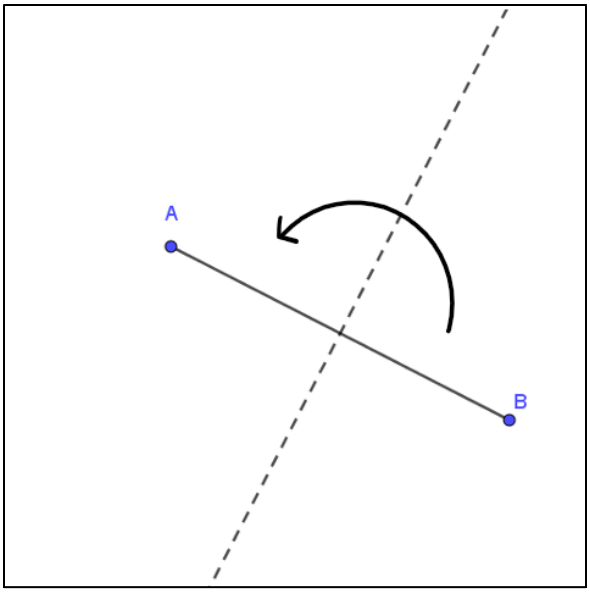


3b) Considera tre semirette uscenti dal vertice. Le parti di piano da loro delimitate sono due **angoli adiacenti.**



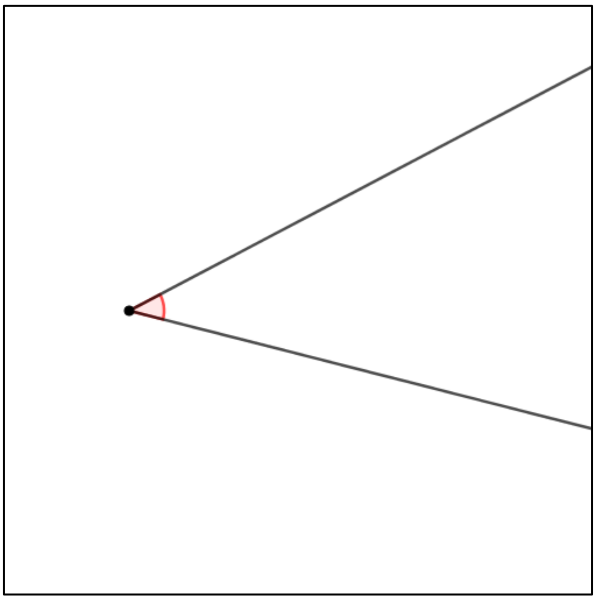
3c) Considera le quattro semirette uscenti dal vertice. Le parti di piano delimitate da due coppie distinte di semirette non appartenenti alla stessa retta, sono due **angoli opposti al vertice**.

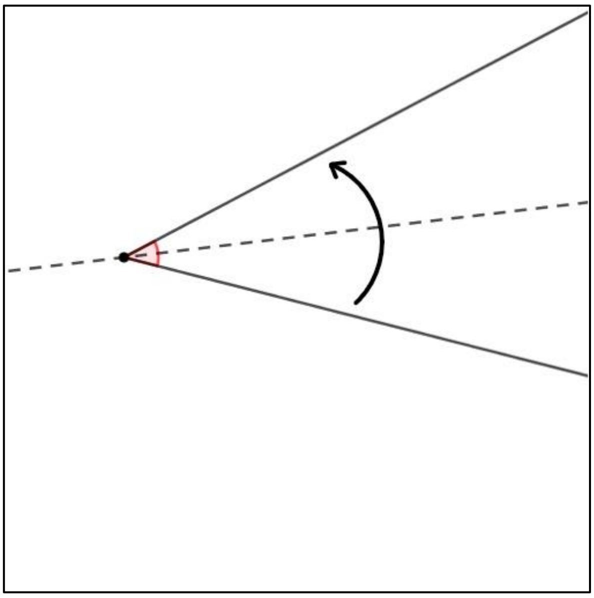




1) Prendi il segmento di cui vuoi trovare il punto medio.

2) Porta gli estremi a sovrapporre ed effettua la piega. Il punto medio è individuato dall'intersezione della piega con il segmento.





1) Prendi l'angolo di cui vuoi trovare la bisettrice.

2) Effettua la piega per il vertice che porti le due semirette a sovrapporsi. La piega effettuata è la retta cercata.

Effettua ora la costruzione della bisettrice se l'angolo di partenza è PIATTO.

Riscrivi i seguenti enunciati sotto forma di implicazione, se già non lo sono, e riconosci l'ipotesi e la tesi.

1. Il prodotto di due numeri interi negativi è un numero intero positivo.
2. Se il prodotto di due numeri è nullo, almeno uno dei due è zero.
3. Ogni numero divisibile per 9 è divisibile per 3.
4. Il prodotto di due numeri pari è un numero pari.
5. Ogni rombo ha le diagonali perpendicolari.
6. Ogni parallelogramma in cui le diagonali sono perpendicolari è un rombo.
7. Ogni numero naturale divisibile per 10 è divisibile per 5 e 2.
8. Due rette incidenti appartengono ad uno e un solo piano.
9. Il prodotto di due numeri maggiori di 1 è un numero maggiore di 1
10. Un numero è divisibile per 5 se la sua cifra delle unità è 0.

Individua le ipotesi e la tesi dei seguenti enunciati, rappresenta quanto affermano attraverso riga e compasso, la piegatura della carta e GeoGebra, infine dimostrali.

1. Un segmento AB ha come punto medio M. Considera sul segmento AB due punti C e D (con C più vicino ad A che a B) tali che il punto medio di CD sia ancora M e dimostra che $\mathrm{AC} \cong \mathrm{DB}$.
2. Tre segmenti adiacenti AB, BC e CD sono congruenti. Dimostra che il punto medio di BC è anche il punto medio di AD.
3. Siano A, B due punti appartenenti alla retta r. Considera sulla retta r, esternamente ad AB, due punti P e Q tali che $\mathrm{PA} \cong \mathrm{BQ}$. Dimostra che il punto medio di AB è anche punto medio di PQ.
4. Siano AC, CD e DB tre segmenti adiacenti tali che $\mathrm{AC} \cong \mathrm{DB}$. Dimostra che il punto medio di AB è anche il punto medio di CD.
5. Dati due angoli $a\hat{O}b$, $c\hat{O}d$ aventi il vertice in comune e le rispettive bisettrici r e s siano una il prolungamento dell'altra. Dimostra che $\mathrm{a\hat{O}c} \cong \mathrm{b\hat{O}d}$.
6. Considera tre angoli consecutivi $a\hat{O}b$, $b\hat{O}c$ e $c\hat{O}d$. Dimostra che se $\mathrm{a\hat{O}b} \cong \mathrm{c\hat{O}d}$, allora $\mathrm{a\hat{O}c} \cong \mathrm{b\hat{O}d}$.
7. Considera tre angoli consecutivi $a\hat{O}b$, $b\hat{O}c$ e $c\hat{O}d$, tali che la bisettrice di $b\hat{O}c$ è anche la bisettrice di $a\hat{O}d$. Dimostra che $\mathrm{a\hat{O}b} \cong \mathrm{c\hat{O}d}$.
8. Dimostra che le bisettrici di due angoli opposti al vertice sono due semirette opposte.
9. Due semirette a, b aventi la stessa origine, individuano due angoli, uno convesso e l'altro concavo. Dimostra che le bisettrici di questi due angoli sono semirette opposte.
10. Siano $a\hat{O}b$ e $b\hat{O}c$ due angoli consecutivi supplementari. Traccia la bisettrice r di $a\hat{O}b$ e la bisettrice s di $b\hat{O}c$. Dimostra che $r\hat{O}s$ è un angolo retto.

Appendice B

Questionari e Test

La presente appendice raccoglie tutti i questionari e i test che son stati impiegati nel corso della sperimentazione presso la Scuola Secondaria di II grado “E. Fermi” di Padova. Sono inoltre inserite le tabelle recanti i dati raccolti attraverso la somministrazione degli stessi.

In ordine, è possibile consultare i seguenti file:

- *Test d’ingresso*, somministrato alla classe che ha aderito al progetto;
- *Questionario sulle discipline*, nella versione somministrata all’inizio del progetto;
- *Questionario sulle discipline*, nella versione somministrata al termine del progetto;
- *Questionario sui contenuti*, somministrato ad entrambe le classi al termine del progetto;
- *Test finale*, somministrato ad entrambe le classi.

Ciascun questionario è seguito dalle tabelle recanti i dati raccolti attraverso la loro somministrazione all’inizio o al termine della sperimentazione presso la Scuola Secondaria di II grado.

VERIFICA DELLE CONOSCENZE E COMPETENZE

Rispondi alle seguenti domande. Nel caso la risoluzione ti richieda di effettuare dei conti o eseguire dei disegni, hai a disposizione l'ultima facciata per effettuarli.

Argomento: Introduzione alla Geometria

Domanda n. 1 "Dati due punti distinti, esiste una e una sola retta alla quale appartengono entrambi" è un/una:

- Assioma (o postulato)
- Teorema
- Definizione
- Non lo so

Domanda n. 2 "La somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto" è un/una:

- Assioma (o postulato)
- Teorema
- Definizione
- Non lo so

Domanda n. 3 "Due segmenti che hanno in comune uno e un solo estremo si dicono consecutivi" è un/una:

- Assioma (o postulato)
- Teorema
- Definizione
- Non lo so

Domanda n. 4 "Un rettangolo è un quadrilatero che ha tutti gli angoli retti" è un/una:

- Assioma (o postulato)
- Teorema
- Definizione
- Non lo so

Domanda n. 5 "Se un triangolo è isoscele, allora ha due angoli congruenti" è un/una:

- Assioma (o postulato)
- Teorema
- Definizione
- Non lo so

Domanda n. 6 Cosa significa per te **ragionare**? Cosa invece **dedurre**? Secondo te sono sinonimi?

____

____

____

____

____

Domanda n. 7 Cosa significa per te **dimostrare** in matematica?

____
____
____
____
____

Argomento: Geometria

Domanda n. 8 Qual è l'area di un trapezio in cui le basi sono lunghe 6 e 10 cm mentre l'altezza è lunga 5 cm ?

- ○ 40 cm^2
- ○ 45 cm^2
- ○ 8 cm^2
- ○ 85 cm^2
- ○ Non lo so

Domanda n. 9 Due angoli di un piano aventi lo stesso vertice, un lato in comune ed i lati non comuni sul prolungamento l'uno dell'altro si dicono:

- ○ Consecutivi
- ○ Adiacenti
- ○ Opposti al vertice
- ○ Complementari
- ○ Non lo so

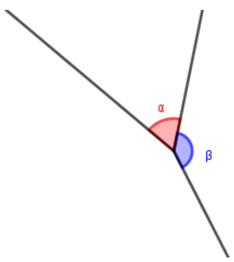
Domanda n. 10 Se la lunghezza di una circonferenza e di 6π cm, qual è l'area del cerchio corrispondente?

- ○ 4π cm^2
- ○ 9π cm^2
- ○ 16π cm^2
- ○ Nessuna delle precedenti
- ○ Non lo so

Domanda n. 11 Un triangolo rettangolo ha l’ipotenusa lunga 10 cm e un cateto lungo 8 cm, quanto misura l’altro cateto?

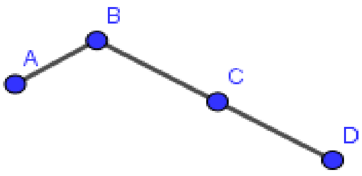
- ○ 2 cm
- ○ 36 cm
- ○ 6 cm
- ○ Non lo so

Domanda n. 12 Considera la figura:



- ○ α è un angolo ottuso, β è un angolo acuto
- ○ α è un angolo acuto, β è un angolo ottuso
- ○ α, β sono angoli ottusi
- ○ α, β sono angoli acuti
- ○ Non lo so

Domanda n. 13 Nella seguente figura:



- ○ AB, BC e CD sono adiacenti
- ○ AB e BC sono adiacenti, BC e CD sono consecutivi
- ○ AB e BC sono consecutivi, BC e CD sono adiacenti
- ○ Non lo so

Domanda n. 14 Due angoli la cui somma è un angolo piatto si dicono:

- ○ Complementari
- ○ Supplementari
- ○ Esplementari
- ○ Non lo so

Domanda n. 15 Un triangolo rettangolo può essere ottusangolo

- ○ Vero
- ○ Falso

Argomento: Misura

Domanda n. 16 $1 km^2$ =

- ○ 0,0001 m^2
- ○ 100 m^2
- ○ 1000 m^2
- ○ 1000000 m^2
- ○ Non lo so

Domanda n. 17 7 h : 4 =

- ○ 1 h 45 min
- ○ 175 min
- ○ 1 h 75 min
- ○ Non si può eseguire
- ○ Non lo so

Domanda n. 18 180° - 50°30’ =

- ○ 130°30°
- ○ 129°30’
- ○ 129°70°
- ○ 129,7°
- ○ Non lo so

N° domanda	**Risposte corrette** (%)	**Risposte errate** (%)
1	57.1	42.9
2	42.9	57.1
3	60.7	39.3
4	75.0	25.0
5	32.2	67.8
6	85.7	14.3
7	17.9	82.1
8	92.9	7.1
9	42.9	57.1
10	78.6	21.4
11	85.7	14.3
12	96.4	3.6
13	32.1	67.9
14	60.7	39.3
15	92.9	7.1
16	64.3	35.7
17	57.1	42.9
18	50.0	50.0

Tabella B.1: Percentuali di risposte corrette ed errate fornite dagli studenti della classe sperimentale al test iniziale.

CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN MATEMATICA
Dipartimento di Matematica – Università degli Studi di Padova

PROGETTO DI OSSERVAZIONE E AZIONE DIDATTICA SULL'USO DELLA PIEGATURA DELLA CARTA NELLA SCUOLA SECONDARIA DI II GRADO

Buongiorno, sono una studentessa dell'Università di Padova e sto svolgendo un progetto di tesi riguardante l'impiego del *paper folding* nella didattica della matematica. Il seguente questionario mi permette di indagare l'efficacia di tale strumento, attraverso le dichiarazioni degli studenti.

Le informazioni raccolte sono del tutto anonime e non sarà in alcun modo riconoscibile chi le ha fornite. I dati raccolti serviranno esclusivamente a uso di ricerca, come previsto dalla legge sulla Privacy e successive modificazioni (art. 13 del Regolamento (UE), 27 aprile 2016, n. 679) che disciplina il trattamento dei dati personali in questi ambiti.

Per rispondere al questionario, per ciascuna affermazione contrassegna una casella corrispondente ad un numero da 1 a 4, dove 1=completamente in disaccordo con l'affermazione e 4=totalmente d'accordo. Se non vuoi o non sai rispondere ad un quesito, lascialo in bianco. Grazie per la collaborazione.

A. Domande sulla Matematica

	Completamente in disaccordo	Piuttosto in disaccordo	Abbastanza d'accordo	Totalmente d'accordo
A1. Ritengo che la matematica sia una materia utile da sapere.	☐1	☐2	☐3	☐4
A2. La matematica è una materia che mi piace.	☐1	☐2	☐3	☐4
A3. Nell'ultimo anno ho fatto volentieri i compiti assegnatimi per casa di matematica.	☐1	☐2	☐3	☐4
A4. Nell'ultimo mese ho utilizzato la matematica nella vita quotidiana, al di fuori dei miei studi.	☐1	☐2	☐3	☐4
A5. Nell'ultimo mese, quando ho pagato in contanti, ho fatto il conto del resto che mi spettava.	☐1	☐2	☐3	☐4
A6. Nell'ultimo mese, quando bisognava dividere una spesa, ho controllato che i conti fossero giusti.	☐1	☐2	☐3	☐4
A7. Nell'ultimo mese, quando ho visto un cartello di sconto, ho calcolato il prezzo scontato.	☐1	☐2	☐3	☐4

	Completamente in disaccordo	Piuttosto in disaccordo	Abbastanza d’accordo	Totalmente d’accordo
A8. Mi reputo bravə a svolgere i conti a mente.	☐1	☐2	☐3	☐4
A9. Mi reputo bravə a svolgere i compiti di matematica.	☐1	☐2	☐3	☐4
A10. Mi reputo bravə in matematica.	☐1	☐2	☐3	☐4
A11. Capisco facilmente la matematica.	☐1	☐2	☐3	☐4
A12. Dopo averci dedicato molto tempo, arrivo a capire la matematica.	☐1	☐2	☐3	☐4
A13. Sono preparatə in matematica.	☐1	☐2	☐3	☐4
A14. So usare la matematica al di fuori della scuola.	☐1	☐2	☐3	☐4

B. Domande sulla Geometria

	Completamente in disaccordo	Piuttosto in disaccordo	Abbastanza d’accordo	Totalmente d’accordo
B1. Ritengo che la geometria sia una materia utile da sapere.	☐1	☐2	☐3	☐4
B2. La geometria è una disciplina che mi piace.	☐1	☐2	☐3	☐4
B3. Tra gli argomenti affrontati negli anni in matematica, la geometria è un argomento che mi piace più degli altri.	☐1	☐2	☐3	☐4
B4. Nell'ultimo anno ho fatto volentieri i compiti assegnatimi per casa di geometria.	☐1	☐2	☐3	☐4
B5. Nell'ultimo mese ho utilizzato la geometria nella vita quotidiana, al di fuori dei miei studi.	☐1	☐2	☐3	☐4
B6. Nell'ultimo mese, quando ho dovuto raggiungere un luogo, ho riflettuto su quale fosse il percorso più breve.	☐1	☐2	☐3	☐4
B7. Mi reputo bravə a disporre gli oggetti secondo un ordine	☐1	☐2	☐3	☐4
B8. Mi reputo bravə a valutare le dimensioni di un oggetto.	☐1	☐2	☐3	☐4

	Completamente in disaccordo	Piuttosto in disaccordo	Abbastanza d’accordo	Totalmente d’accordo
B9. Mi reputo bravə a individuare similitudini tra gli oggetti.	☐1	☐2	☐3	☐4
B10. Mi reputo bravə a riconoscere le figure geometriche.	☐1	☐2	☐3	☐4
B11. Mi reputo bravə a svolgere gli esercizi di geometria.	☐1	☐2	☐3	☐4
B12. Mi reputo bravə in geometria.	☐1	☐2	☐3	☐4
B13. Tra gli argomenti affrontati in matematica, la geometria è un argomento che capisco.	☐1	☐2	☐3	☐4

C. Didattica a distanza

	Completamente in disaccordo	Piuttosto in disaccordo	Abbastanza d’accordo	Totalmente d’accordo
C1. La didattica a distanza ha avuto una ricaduta negativa nella mia **comprensione** della matematica.	☐1	☐2	☐3	☐4
C2. La didattica a distanza ha avuto una ricaduta negativa nella mia **comprensione** della geometria.	☐1	☐2	☐3	☐4
C3. Se non ci fosse stata la didattica a distanza sarei più preparatə in matematica.	☐1	☐2	☐3	☐4
C4. Se non ci fosse stata la didattica a distanza sarei più preparatə in geometria.	☐1	☐2	☐3	☐4
C5. Ho trovato difficile dover ripetutamente passare dal seguire in presenza al seguire a distanza le lezioni.	☐1	☐2	☐3	☐4

D. Chiusura dell’intervista

D1. Il tuo genere?
- Donna
- Uomo
- Altro

D2. Qual è la tua nazionalità?

- Italiana
- Paese dell'Unione Europea
- Paese europeo non dell'Unione Europea
- Altro, specificare ………………………

D3. Nel corso dell'ultimo anno scolastico, durante una settimana nella quale era prevista una verifica di matematica, quante ore hai dedicato in media allo studio della matematica nella settimana?

- Meno di 1 ora
- Tra 1 e 3 ore
- Tra 3 e 5 ore
- Più di 5 ore

D4. Nel corso dell'ultimo anno scolastico, durante una settimana nella quale non era prevista alcuna verifica di matematica, quante ore hai dedicato in media allo studio della matematica nella settimana?

- Meno di 1 ora
- Tra 1 e 3 ore
- Tra 3 e 5 ore
- Più di 5 ore

D5. Qual è il titolo di studio del Genitore 1?

- Senza diploma
- Diploma Superiore
- Laurea

D6. Qual è il titolo di studio del Genitore 2?

- Senza diploma
- Diploma Superiore
- Laurea

Segui le seguenti istruzioni per costruire un **codice identificativo** per il questionario. Il codice è ideato in modo da non poter risalire all'identità di chi ha effettuato il questionario.

1) Nelle prime due caselle inserisci la PRIMA LETTERA DEL COGNOME di entrambi i genitori seguendo l'ordine alfabetico. Nel caso la tua famiglia sia monogenitoriale, inserisci come prima lettera la A, seguita dalla prima lettera del cognome del tuo genitore.
2) Nella terza e quarta casella inserisci il TUO MESE DI NASCITA utilizzando due cifre.
3) Nella quinta e sesta casella PRIMA LETTERA DEL NOME di entrambi i genitori, seguendo l'ordine alfabetico. Nel caso la tua famiglia sia monogenitoriale, inserisci come prima lettera la A, seguita dalla prima lettera del nome del tuo genitore.

CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN MATEMATICA
Dipartimento di Matematica – Università degli Studi di Padova

PROGETTO DI OSSERVAZIONE E AZIONE DIDATTICA SULL'USO DELLA PIEGATURA DELLA CARTA NELLA SCUOLA SECONDARIA DI II GRADO

Buongiorno, sono una studentessa dell'Università di Padova e sto svolgendo un progetto di tesi riguardante l'impiego del *paper folding* nella didattica della matematica. Il seguente questionario mi permette di indagare l'efficacia di tale strumento, attraverso le dichiarazioni degli studenti.

Le informazioni raccolte sono del tutto anonime e non sarà in alcun modo riconoscibile chi le ha fornite. I dati raccolti serviranno esclusivamente a uso di ricerca, come previsto dalla legge sulla Privacy e successive modificazioni (art. 13 del Regolamento (UE), 27 aprile 2016, n. 679) che disciplina il trattamento dei dati personali in questi ambiti.

Per rispondere al questionario, per ciascuna affermazione contrassegna una casella corrispondente ad un numero da 1 a 4, dove 1=completamente in disaccordo con l'affermazione e 4=totalmente d'accordo. Se non vuoi o non sai rispondere ad un quesito, lascialo in bianco. Grazie per la collaborazione.

A. Domande sulla Matematica

	Completamente in disaccordo	Piuttosto in disaccordo	Abbastanza d'accordo	Totalmente d'accordo
A1. Ritengo che la matematica sia una materia utile da conoscere.	☐1	☐2	☐3	☐4
A2. La matematica è una materia che mi piace.	☐1	☐2	☐3	☐4
A3. Nell'ultimo mese ho fatto volentieri i compiti assegnatimi per casa di matematica.	☐1	☐2	☐3	☐4
A4. Nell'ultimo mese ho utilizzato la matematica nella vita quotidiana, al di fuori dei miei studi.	☐1	☐2	☐3	☐4
A5. Nell'ultimo mese, quando ho pagato in contanti, ho fatto il conto del resto che mi spettava.	☐1	☐2	☐3	☐4
A6. Nell'ultimo mese, quando bisognava dividere una spesa, ho controllato che i conti fossero giusti.	☐1	☐2	☐3	☐4
A7. Nell'ultimo mese, quando ho visto un cartello di sconto, ho calcolato il prezzo scontato.	☐1	☐2	☐3	☐4

	Completamente in disaccordo	Piuttosto in disaccordo	Abbastanza d’accordo	Totalmente d’accordo
A8. Mi reputo bravə a svolgere i conti a mente.	☐1	☐2	☐3	☐4
A9. Mi reputo bravə a svolgere i compiti di matematica.	☐1	☐2	☐3	☐4
A10. Mi reputo bravə in matematica.	☐1	☐2	☐3	☐4
A11. Capisco facilmente la matematica.	☐1	☐2	☐3	☐4
A12. Dopo averci dedicato molto tempo, arrivo a capire la matematica.	☐1	☐2	☐3	☐4
A13. Sono preparatə in matematica.	☐1	☐2	☐3	☐4
A14. So usare la matematica al di fuori della scuola.	☐1	☐2	☐3	☐4

B. Domande sulla Geometria

	Completamente in disaccordo	Piuttosto in disaccordo	Abbastanza d’accordo	Totalmente d’accordo
B1. Ritengo che la geometria sia una materia utile da conoscere.	☐1	☐2	☐3	☐4
B2. La geometria è una disciplina che mi piace.	☐1	☐2	☐3	☐4
B3. Tra gli argomenti affrontati negli anni in matematica, la geometria è un argomento che mi piace più degli altri.	☐1	☐2	☐3	☐4
B4. Nell'ultimo mese ho fatto volentieri i compiti assegnatimi per casa di geometria.	☐1	☐2	☐3	☐4
B5. Nell'ultimo mese ho utilizzato la geometria nella vita quotidiana, al di fuori dei miei studi.	☐1	☐2	☐3	☐4
B6. Nell'ultimo mese, quando ho dovuto raggiungere un luogo, ho riflettuto su quale fosse il percorso più breve.	☐1	☐2	☐3	☐4
B7. Mi reputo bravə a disporre gli oggetti secondo un ordine	☐1	☐2	☐3	☐4
B8. Mi reputo bravə a valutare le dimensioni di un oggetto.	☐1	☐2	☐3	☐4

	Completamente in disaccordo	Piuttosto in disaccordo	Abbastanza d’accordo	Totalmente d’accordo
B9. Mi reputo bravə a individuare similitudini tra gli oggetti.	☐1	☐2	☐3	☐4
B10. Mi reputo bravə a riconoscere le figure geometriche.	☐1	☐2	☐3	☐4
B11. Mi reputo bravə a svolgere gli esercizi di geometria.	☐1	☐2	☐3	☐4
B12. Mi reputo bravə in geometria.	☐1	☐2	☐3	☐4
B13. Tra gli argomenti affrontati in matematica, la geometria è un argomento che capisco.	☐1	☐2	☐3	☐4

C. Chiusura dell’intervista

C1. Il tuo genere?
- o Donna
- o Uomo
- o Altro

C2. Qual è la tua nazionalità?
- o Italiana
- o Paese dell’Unione Europea
- o Paese europeo non dell’Unione Europea
- o Altro, specificare ………………………

C3. Nel corso dell’ultimo anno scolastico, durante una settimana nella quale era prevista una verifica di matematica, quante ore hai dedicato in media allo studio della matematica nella settimana?
- o Meno di 1 ora
- o Tra 1 e 3 ore
- o Tra 3 e 5 ore
- o Più di 5 ore

C4. Nel corso dell’ultimo anno scolastico, durante una settimana nella quale non era prevista alcuna verifica di matematica, quante ore hai dedicato in media allo studio della matematica nella settimana?
- o Meno di 1 ora
- o Tra 1 e 3 ore
- o Tra 3 e 5 ore
- o Più di 5 ore

C5. Qual è il titolo di studio del Genitore 1?
- o Senza diploma
- o Diploma Superiore
- o Laurea

C6. Qual è il titolo di studio del Genitore 2?

- Senza diploma
- Diploma Superiore
- Laurea

Segui le seguenti istruzioni per costruire un **codice identificativo** per il questionario. Il codice è ideato in modo da non poter risalire all'identità di chi ha effettuato il questionario.

1) Nelle prime due caselle inserisci la PRIMA LETTERA DEL COGNOME di entrambi i genitori seguendo l'ordine alfabetico. Nel caso la tua famiglia sia monogenitoriale, inserisci come prima lettera la A, seguita dalla prima lettera del cognome del tuo genitore.
2) Nella terza e quarta casella inserisci il TUO MESE DI NASCITA utilizzando due cifre.
3) Nella quinta e sesta casella PRIMA LETTERA DEL NOME di entrambi i genitori, seguendo l'ordine alfabetico. Nel caso la tua famiglia sia monogenitoriale, inserisci come prima lettera la A, seguita dalla prima lettera del nome del tuo genitore.

Studente	PRIMA			DOPO		
	Opinione	Utilizzo	Autoval.	Opinione	Utilizzo	Autoval.
1	4	4	/	4	4	/
2	3.33	2.5	3.14	3	1.75	2.86
3	3.33	2.75	3.29	3.67	2.25	3.14
4	3.33	3	3.14	3.67	3	3.71
5	3	3	2.71	3	2	2.43
6	2.67	3.25	/	3	3.75	/
7	3.67	3.5	3.29	3.33	3.75	3.14
8	4	3	/	3.33	1.5	3
9	3	2.5	2.71	3	3.25	2.86
10	3.33	3.25	3.57	3.33	3	3.29
11	4	3.25	3.29	4	3.75	3.43
12	3.67	3	3.86	3.67	3	3
13	3.67	3.75	3.29	3.67	3.5	3.14
14	3.33	/	/	4	2.25	3.57
15	3.67	/	3.14	3.67	2.5	2.86
16	3.67	3	3	3	2.75	2.71
17	4	2.25	3.14	4	2.5	2.86
18	3.33	3	3.14	3.67	2.5	3.14
19	3.33	2.75	2.57	/	2.5	2.57
20	4	2.75	3.29	3.67	2.25	3
21	3.33	2.25	3.43	3.67	1.75	3.57
22	3.67	2.25	3.71	3.67	1.75	3.29
23	4	4	3.57	4	3	2.71
24	3.67	3	3.29	4	3	3.29
25	3.33	2	3.29	3.33	1.5	3.14
Media	3.53	2.96	3.23	3.56	2.67	3.07

Tabella B.2: Voti medi attribuiti dagli studenti della classe sperimentale alle domande riguardanti la Matematica all'inizio e al termine del progetto.

Studente	**PRIMA** Opinione	Utilizzo	Autoval.	**DOPO** Opinione	Utilizzo	Autoval.
1	/	3.5	/	4	4	3.14
2	3.75	3	3.29	2	2	2.71
3	3.5	2.5	3.43	3.75	2.5	3.43
4	3	3.5	3.14	3.5	4	3.86
5	3.25	1.5	3.14	2.25	1.5	2.71
6	1.75	2.5	/	2.75	4	/
7	3	3.5	3.29	2.75	3	3.29
8	3.5	3.5	3.29	2.75	2.5	3.29
9	3.5	3	3	3.25	3.5	3.14
10	3.25	3	3.14	2.5	2	/
11	3.75	3	3.57	3.75	3.5	3.86
12	3.25	3.5	3	3.25	3	3
13	3	3	3.29	3.25	3.5	3.57
14	2.5	2.5	2.14	3.25	1	/
15	2.5	2.5	3.29	2.5	2.5	3
16	3	3	3.29	2.25	3	3
17	2.25	2	2.86	2.75	3	2.86
18	1.75	2.5	2.71	2.75	2	3
19	2.25	1.5	2.86	3	2.5	3.29
20	2.5	3.5	3.29	2.5	2.5	3
21	2.5	2.5	3	2.75	3.5	3.29
22	2.75	2	3.14	2	2	2.71
23	3.5	2.5	3.14	3	3	3
24	3	3	3.43	3.5	3.5	3.57
25	2.5	2.5	2.86	2.5	1.5	2.86
Media	2.9	2.76	3.11	2.9	2.76	3.16

Tabella B.3: Voti medi attribuiti dagli studenti della classe sperimentale alle domande riguardanti la Geometria all'inizio e al termine del progetto.

Variazioni	**Opinione**	**Utilizzo**	**Autoval.**
Stabili	12	4	3
%	48	16	12
Decremento	5	14	13
%	20	56	52
Incremento	7	5	5
%	28	20	20
Non confrontabili	1	2	4
%	4	8	16

Tabella B.4: Numero studenti della classe sperimentale che hanno mantenuto o modificato la propria valutazione sulla Matematica, suddiviso per ambito. Ciascun dato è affiancato dal valore percentuale.

Variazioni	**Opinione**	**Utilizzo**	**Autoval.**
Stabili	5	5	6
%	20	20	24
Decremento	9	8	7
%	36	32	28
Incremento	10	12	8
%	40	48	32
Non confrontabili	1	0	4
%	4	0	16

Tabella B.5: Numero studenti della classe sperimentale che hanno mantenuto o modificato la propria valutazione sulla Geometria, suddiviso per ambito. Ciascun dato è affiancato dal valore percentuale.

CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN MATEMATICA
Dipartimento di Matematica – Università degli Studi di Padova

PROGETTO DI OSSERVAZIONE E AZIONE DIDATTICA SULL'USO DELLA PIEGATURA DELLA CARTA NELLA SCUOLA SECONDARIA DI II GRADO

Buongiorno, sono una studentessa dell'Università di Padova e sto svolgendo un progetto di tesi riguardante l'impiego del *paper folding* nella didattica. Il seguente questionario mi permette di indagare l'efficacia di tale strumento, attraverso le dichiarazioni degli studenti. **Le informazioni raccolte sono del tutto anonime e non sarà in alcun modo riconoscibile chi le ha fornite**. I dati raccolti serviranno esclusivamente a uso di ricerca, come previsto dalla legge sulla Privacy e successive modificazioni (art. 13 del Regolamento (UE), 27 aprile 2016, n. 679) che disciplina il trattamento dei dati personali in questi ambiti. Per rispondere al questionario, per ciascuna affermazione contrassegna la casella corrispondente a ciò che ritieni veritiero. Se non vuoi o non sai rispondere ad un quesito, lascialo in bianco. Grazie per la collaborazione.

A. Domande sull'introduzione alla Geometria.

Per ciascuna affermazione attribuisci un valore da 1 a 2 per indicare **se nella tua esperienza si verifica o meno la situazione descritta**. 1=No e 2=Sì.

	No	Sì
A1. So cos'è un ragionamento deduttivo in matematica.	☐1	☐2
A2. Ho compreso cos'è un assioma.	☐1	☐2
A3. So spiegare cos'è un assioma.	☐1	☐2
A4. Ho capito a cosa servono gli assiomi.	☐1	☐2
A5. Ricordo almeno un assioma della Geometria Euclidea.	☐1	☐2
A6. Ho compreso cos'è un ente primitivo.	☐1	☐2
A7. So spiegare cos'è un ente primitivo.	☐1	☐2
A8. Ho capito la funzione degli enti primitivi.	☐1	☐2
A9. Ricordo almeno un ente primitivo della Geometria Euclidea.	☐1	☐2
A10. Ho compreso cos'è una definizione.	☐1	☐2
A11. So spiegare cos'è una definizione.	☐1	☐2
A12. Ho capito la funzione delle definizioni.	☐1	☐2
A13. Ricordo almeno una definizione della Geometria Euclidea.	☐1	☐2
A14. Ho compreso cos'è un teorema.	☐1	☐2
A15. So spiegare cos'è un teorema.	☐1	☐2
A16. Ho capito la funzione dei teoremi.	☐1	☐2

	No	Sì
A17. Ricordo almeno un teorema della Geometria Euclidea.	□1	□2
A18. Ho compreso cos’è una dimostrazione.	□1	□2
A19. So spiegare cos’è una dimostrazione.	□1	□2
A20. Ho capito la funzione delle dimostrazioni.	□1	□2

B. Domande sulle abilità acquisite nell’affrontare problemi dimostrativi di Geometria.

Per ciascuna affermazione attribuisci un valore da 1 a 5 per indicare la **frequenza con cui si è verificata nell’ultimo mese** la situazione presentata, dove 1=Mai e 5=Sempre.

	Mai	Raramente	A volte	Spesso	Sempre
B1. Quando affronto un problema dimostrativo di geometria, so individuare autonomamente tutte le ipotesi.	□1	□2	□3	□4	□5
B2. Quando affronto un problema dimostrativo di geometria, so individuare autonomamente la tesi.	□1	□2	□3	□4	□5
B3. Quando affronto un problema dimostrativo di geometria, eseguo una rappresentazione corretta della situazione descritta (es. un disegno).	□1	□2	□3	□4	□5
B4. Quando affronto un problema dimostrativo di geometria, effettuo la rappresentazione di un caso particolare, non di quello più generale.	□1	□2	□3	□4	□5
B5. Quando affronto un problema dimostrativo di geometria, effettuo la rappresentazione utilizzando il metodo che mi permette di raggiungere la miglior comprensione possibile della situazione descritta.	□1	□2	□3	□4	□5
B6. Quando affronto un problema dimostrativo di geometria, individuo la strategia dimostrativa dopo aver effettuato la rappresentazione.	□1	□2	□3	□4	□5
B7. Quando affronto un problema dimostrativo di geometria, procedo per tentativi, applicando casualmente i teoremi che riesco a ricordare.	□1	□2	□3	□4	□5
B8. So individuare quando posso impiegare un teorema all'interno di una dimostrazione.	□1	□2	□3	□4	□5

	Mai	Raramente	A volte	Spesso	Sempre
B9. Quando utilizzo un teorema all'interno di una dimostrazione, indico tutte le ipotesi necessarie al suo utilizzo.	☐1	☐2	☐3	☐4	☐5
B10. Quando utilizzo un teorema all'interno di una dimostrazione, ho chiaro cosa mi permette di dimostrare tale teorema.	☐1	☐2	☐3	☐4	☐5
B11. Quando incontro il nome di una figura geometrica, ricordo la sua definizione.	☐1	☐2	☐3	☐4	☐5
B12. Quando incontro il nome di una figura o di un ente geometrico, attraverso la definizione risalgo alle proprietà di tele figura o ente.	☐1	☐2	☐3	☐4	☐5
B13. Quando rappresento una figura geometrica, vario l'orientamento della figura nel foglio o le sue dimensioni.	☐1	☐2	☐3	☐4	☐5

C. Utilizzo degli origami (solo per la classe nella quale è stato testato il progetto).

Per ciascuna affermazione riguardo l'utilizzo degli origami a lezione, esprimi **l'intensità con cui tale situazione si è verificata nella tua esperienza**, attribuendovi un valore da 1 a 5.

	Per niente	Poco	Abbastanza	Molto	Non saprei
C1. Trovo utile l'utilizzo degli origami per rappresentare argomenti o costruzioni della Geometria Euclidea.	☐1	☐2	☐3	☐4	☐5
C2. L'utilizzo degli origami mi ha aiutatə a raggiungere una maggior comprensione dei contenuti delle lezioni.	☐1	☐2	☐3	☐4	☐5
C3. L'utilizzo degli origami mi ha portatə a capire più facilmente i contenuti delle lezioni.	☐1	☐2	☐3	☐4	☐5
C4. La Geometria Euclidea mi risulta più chiara se presentata utilizzando gli origami.	☐1	☐2	☐3	☐4	☐5
C5. Se dispongo degli origami, visualizzo meglio la figura rispetto alla sola rappresentazione con riga e compasso.	☐1	☐2	☐3	☐4	☐5
C6. La rappresentazione per mezzo degli origami **non** mi aiuta ad evitare di rappresentare casi particolari al posto del caso generale.	☐1	☐2	☐3	☐4	☐5

	Mai	Raramente	A volte	Spesso	Sempre
C7. Se dispongo di una rappresentazione con gli origami, mi risulta più facile riconoscere le proprietà della figura rispetto a quando dispongo della sola rappresentazione con riga e compasso.	☐1	☐2	☐3	☐4	☐5
C8. Se dispongo di una rappresentazione con gli origami, mi risulta più facile individuare le strategie dimostrative rispetto a quando dispongo della sola rappresentazione con riga e compasso.	☐1	☐2	☐3	☐4	☐5
C9. Ritengo che l'utilizzo degli origami nel corso delle lezioni di geometria non sia utile.	☐1	☐2	☐3	☐4	☐5
C10. Ritengo che l'utilizzo degli origami all'interno degli esercizi dimostrativi non sia utile.	☐1	☐2	☐3	☐4	☐5

D. Chiusura dell'intervista.

D1. Il tuo genere?

- o Donna
- o Uomo
- o Altro

D2. Qual è la tua nazionalità?

- o Italiana
- o Paese dell'Unione Europea
- o Paese europeo non dell'Unione Europea
- o Altro, specificare ………………………

D3. Nel corso dell'ultimo mese, durante una settimana nella quale era prevista una verifica di matematica, quante ore hai dedicato in media allo studio della matematica nella settimana?

- o Meno di 1 ora
- o Tra 1 e 3 ore
- o Tra 3 e 5 ore
- o Più di 5 ore

D4. Nel corso dell'ultimo mese, durante una settimana nella quale non era prevista alcuna verifica di matematica, quante ore hai dedicato in media allo studio della matematica nella settimana?

- o Meno di 1 ora
- o Tra 1 e 3 ore
- o Tra 3 e 5 ore
- o Più di 5 ore

D5. Qual è il titolo di studio del Genitore 1?
- Senza diploma
- Diploma Superiore
- Laurea

D6. Qual è il titolo di studio del Genitore 2?
- Senza diploma
- Diploma Superiore
- Laurea

N° domanda	Risposte affermative classe di controllo (%)	Risposte affermative classe sperimentale (%)
1	85	92
2	96	100
3	81	100
4	77	96
5	96	100
6	92	92
7	77	80
8	85	84
9	100	96
10	73	96
11	46	80
12	77	92
13	92	96
14	73	100
15	58	96
16	73	84
17	81	96
18	81	100
19	54	88
20	85	88

Tabella B.6: Percentuale di risposte affermative fornite dagli studenti delle classi di controllo e sperimentale alle domande inerenti le conoscenze acquisite sull'introduzione della geometria

Studente	CLASSE DI CONTROLLO			
	Enunciato	**Rappresentazione**	**Strat. dimostrative**	**Definizioni**
1	3.5	/	/	/
2	4	3.75	3.8	4
3	2.5	3.5	4	3.5
4	4	/	4.8	/
5	3.5	4	3.8	3.5
6	3.5	/	3.4	4.5
7	4	4	4.4	5
8	5	4	4.6	4.5
9	4.5	4	/	/
10	1	2	2.4	4
11	4	/	/	3.5
12	2	3.5	3.6	3.5
13	4	4	4	3.5
14	4	3.75	3.4	3.5
15	2.5	3.5	3	2.5
16	3.3	3.75	3.4	4
17	3.5	2.75	4	4
18	3	2.25	3.2	3.5
19	4	3.5	3.4	3.5
20	4	3.5	4.6	3.5
21	4	4.25	4.2	4
22	4	3.25	3.8	3.5
23	4	4.25	3.6	4.5
24	4.5	3.75	3.4	2.5
25	4	3.75	3.8	3
26	4	3	3.8	4
Media	3.63	3.55	3.76	3.72

Tabella B.7: Voti medi attribuiti dagli studenti della classe di controllo rispondendo alle domande inerenti alle abilità acquisite nell'affrontare problemi dimostrativi.

Studente	CLASSE SPERIMENTALE Enunciato	Rappresentazione	Strat. dimostrative	Definizioni
1	3	3.25	2.8	2.5
2	5	4	4	4
3	5	3.5	3.8	4
4	3.5	/	/	/
5	4	3.25	4.4	4
6	5	4.25	4.2	3
7	5	3.5	4	5
8	5	4.75	3.8	5
9	5	4.25	4.4	4.5
10	5	3	3.6	4
11	5	4	4.4	4
12	5	3.75	4	3
13	3	4.25	3.2	4
14	4.5	/	4.8	4
15	5	4.5	4.4	4
16	5	4	3.4	5
17	5	4.25	4.8	4.5
18	5	3.75	4	4.5
19	5	3.5	3.6	4
20	3	3.75	4	3.5
21	5	4	3.6	4.5
22	5	4.25	4	5
23	4	4	4.4	4
24	4	3.75	3.2	4
25	3.5	4	4.2	4
Media	4.5	3.89	3.96	4.08

Tabella B.8: Voti medi attribuiti dagli studenti della classe sperimentale rispondendo alle domande inerenti alle abilità acquisite nell'affrontare problemi dimostrativi.

Studente	Piegatura della carta Opinione	 Esperienza	 Impatto operativo
1	/	/	/
2	3.67	4	2.5
3	0	2.33	2
4	/	/	/
5	0	0	0
6	0	3.67	0
7	0	3.33	3.25
8	1.33	2.33	0
9	0	3	1.75
10	2.33	1	1.75
11	0	/	3.25
12	3.33	2	0
13	0	4	3.25
14	/	3	1.75
15	3.67	3.33	3.25
16	0	3.33	0
17	3	2.33	0
18	0	2.33	2.75
19	1.67	1	1.25
20	2.33	2	0
21	0	3	0
22	0	3.33	3
23	3.33	3	/
24	0	2.67	2.5
25	3.67	2	3.25
Media	2.83	2.71	2.54
"Non saprei" (%)	48	4	32

Tabella B.9: Voti medi attribuiti dagli studenti della classe sperimentale alle domande inerenti il progetto e l'utilizzo della piegatura della carta nella didattica della Geometria e percentuale di risposte *'non saprei'* fornite dagli studenti.

VERIFICA DI MATEMATICA

Rispondi alle seguenti domande. Nel caso la risoluzione ti richieda di effettuare dei calcoli o eseguire dei disegni, hai a disposizione il foglio protocollo. Hai a disposizione 1 ora di tempo.

Esercizio 1: Rispondi alle seguenti domande a risposta multipla.

1) "Multipli, sottomultipli, somme e differenze di segmenti congruenti sono congruenti" è un:
   - o Assioma (o postulato)
   - o Teorema
   - o Definizione
   - o Non lo so
2) "Due angoli complementari rispettivamente di due angoli congruenti sono congruenti" è un/una:
   - o Assioma (o postulato)
   - o Teorema
   - o Definizione
   - o Non lo so
3) "Dato un segmento, si dice punto medio del segmento il punto che lo divide in due segmenti congruenti" è un/una:
   - o Assioma (o postulato)
   - o Teorema
   - o Definizione
   - o Non lo so
4) "Consideriamo una poligonale chiusa e non intrecciata. Chiamiamo poligono la figura formata dalla poligonale e dai punti interni ad essa" è un/una:
   - o Assioma (o postulato)
   - o Teorema
   - o Definizione
   - o Non lo so
5) "Due angoli opposti al vertice sono congruenti" è un/una:
   - o Assioma (o postulato)
   - o Teorema
   - o Definizione
   - o Non lo so
6) "Dato un punto P e una retta r, la retta passante per P e parallela a r è unica." è un/una:
   - o Assioma (o postulato)
   - o Teorema
   - o Definizione
   - o Non lo so

Esercizio 2: Rispondi alle seguenti domande.

7) La Geometria Euclidea si basa su un metodo induttivo o deduttivo? Quali sono gli elementi che caratterizzano questo metodo?

____

____

____

____

____

8) Che cosa sono gli *enti primitivi* e qual è il loro ruolo in una teoria matematica? Quali sono gli enti primitivi della Geometria Euclidea?

9) Che cosa sono gli *assiomi* e qual è il loro ruolo in una teoria matematica?

10) Che cos'è una dimostrazione? A cosa servono le dimostrazioni?

11) Che cos'è una definizione? Qual è lo scopo delle definizioni?

12) Come si definisce un triangolo isoscele?

Esercizio 3: Dimostra le seguenti proposizioni, dopo aver individuato ipotesi, tesi ed aver effettuato una corretta rappresentazione della situazione descritta.

13) Siano AB, BC e CD tre segmenti adiacenti, con $AB \cong CD$. Sia M il punto medio di AD, dimostra che M è punto medio anche di BC.

14) Siano $a\hat{O}b,\ b\hat{O}c,\ c\hat{O}d$ tre angoli consecutivi, con $a\hat{O}b,\ c\hat{O}d$ angoli retti. Dimostra che la semiretta opposta alla bisettrice di $b\hat{O}c$ è la bisettrice di $a\hat{O}d$.

N° domanda	**Corrette** (%) **C.C.**	**C.S.**	**Parz. corrette** (%) **C.C.**	**C.S.**	**Errate** (%) **C.C.**	**C.S.**
1	77	96	0	0	23	4
2	69	92	0	0	31	8
3	81	88	0	0	19	12
4	73	92	0	0	27	8
5	65	84	0	0	35	16
6	62	96	0	0	38	4
7	58	28	31	48	11	24
8	62	28	27	48	11	24
9	35	60	54	36	11	4
10	4	60	58	20	38	20
11	8	52	42	32	50	16
12	0	24	69	60	31	16
13	23	56	8	8	69	36
14	0	32	8	20	92	48

Tabella B.10: Percentuali di risposte corrette, parzialmente corrette ed errate fornite dagli studenti delle classi di controllo (C.C.) e sperimentale (C.S.) al test finale.

Bibliografia

[1] Acerbi F., *Euclide, tutte le opere*, Milano, Bompiani, (2007).

[2] Alperin R. C., “A mathematical theory of origami constructions and numbers”, in *New York J. Math*, 6 (2000), pp. 119-133.

[3] Alperin R. C., Lang R. J., *One-, two-, and multi-fold origami axiom*, in *Origami 4*, a cura di Lang R. J., (2009), pp. 371–393.

[4] Baccaglini Frank A., Di Martino P., Natalini R., Rosolini G., *Didattica della Matematica*, Milano, Mondadori Università, (2018).

[5] Beloch P. M., *Lezioni di matematiche complementari*, in *Proceedings of the First International Meeting of Origami Science and Technology*, a cura di Huzita H., Ferrara, selfpublished, (1998), pp. XIII−XIX.

[6] Beloch P. M., *Sul metodo del ripiegamento della carta per la risoluzione dei problemi geometrici*, in *Proceedings of the First International Meeting of Origami Science and Technology*, a cura di Huzita H., Ferrara, selfpublished, (1998), pp. XX−XXIV.

[7] Borgato M. T., *La storia della geometria degli origami e la risoluzione delle equazioni algebriche*, Progetto Mathesis Bergamo, https://www.mathesisbergamo.it/storie-di-scienza-2021-2022/, (2022).

[8] Cadamuro A., *Stili cognitivi e stili di apprendimento, da quello che pensi a come lo pensi*, Roma, Carocci, (2004).

[9] Castelnuovo E., *Didattica della matematica*, Firenze, La Nuova Italia, (1963).

[10] Corbetta P., *La ricerca sociale: metodologia e tecniche. II Le tecniche quantitative*, Bologna, il Mulino, (2003).

[11] Decreto ministeriale n° 211 del 7 ottobre 2010, *Indicazioni nazionali riguardanti gli obiettivi specifici di apprendimento concernenti le attività e gli insegnamenti compresi nei piani degli studi previsti per i percorsi liceali*, MIUR, https://www.gazzettaufficiale.it, (2010).

[12] Defina F., *Teoria degli Origami: analisi di una teoria assiomatica*, Tesi di laurea Magistrale, UNIPD, (2017−2018), rel. Ciraulo F.

[13] Fischbein E., "The theory of figural concepts", in *Educational Studies in Mathematics*, 24, (1993), pp. 139-162.

[14] Friedman M., *A History of Folding in Mathematics: Mathematizing the Margins*, Berlin, Birkhäuser, (2018).

[15] Gardner H., *Educazione e sviluppo della mente: intelligenze multiple e apprendimento*, Trento, Erickson, (2005).

[16] Gardner H., *Formae mentis: saggio sulla pluralità dell'intelligenza*, Milano, Feltrinelli, (1987).

[17] Governo Italiano, *Liceo scientifico - opzione scienze applicate*, MIUR, `https://www.miur.gov.it/liceo-scientifico-opzione-scienze-applicate`, (2010).

[18] Huzita H., *Axiomatic Development of Origami Geometry*, in *Proceedings of the First International Meeting of Origami Science and Technology*, a cura di Huzita H., Ferrara, selfpublished, (1998), pp. 143−158.

[19] Huzita H., Scimemi B., *Algebra of Paper-Folding (Origami)*, in *Proceedings of the First International Meeting of Origami Science and Technology*, a cura di Huzita H., Ferrara, selfpublished, (1998), pp. 215−222.

[20] Istituto della Enciclopedia Italiana fondata da Giovanni Treccani, *La cultura italiana - vocabolario - Treccani*, Treccani, `https://www.treccani.it/vocabolario/`.

[21] Justin J., *Résolution par le pliage de l'équation du troisième degré et applications géométrique*, in *Proceedings of the First International Meeting of Origami Science and Technology*, a cura di Huzita H., Ferrara, selfpublished, (1998), pp. 251−262.

[22] Locatelli M., Rottoli E., *Pensare con le mani le piegature della carta*, Milano-Udine, Mimesis, (2009).

[23] Maffini A., "La geometria dell'origami", in *DdM*, 8, (2020), pp. 92-114.

[24] mAnasa-taraMgiNI, `https://manasataramgini.wordpress.com/2016/11/26/paper-folding-sundara-rao-and-geometrical-constructions/`.

[25] Martin G. E., *Geometric Constructions*, New York, Springer, (1998).

[26] Nigris E., *Didattica Generale*, Ed. breve, Milano, Guerini scientifica, (2005).

[27] Rao C. H., *The Indian biographical dictionary*, Madras, Pillar, (1915).

[28] Row S. T., *Geometric exercises in paper folding*, New York, Dover, (1966).

[29] Sasso L., Zanone C., *Colori della Matematica 1*, per i Licei Scientifici, Novara, De Agostini Scuola, (2017).

[30] Scaccianoce A., “Esplorare la geometria piegando la carta”, in *Prisma*, 32, Milano, pp. 58-61, (luglio-agosto 2021).

[31] Scimemi B., *Geometria sintetica*, Coop. Libraria Editrice Università di Padova, (2012).

[32] Sternberg R. J., *Stili di pensiero: differenze individuali nell’apprendimento e nella soluzione di problemi*, Trento, Erikson, (1998).

[33] Vie Maestre, `https://viemaestre.com/wp-content/uploads/2022/01/DispensaOrigamiLincei.pdf`