UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Introdurre la cosmologia quasi senza Relatività Generale

Relatore
Prof./Dr. Sabino Matarrese

Laureando
Federico Bottaro

Anno Accademico 2017/2018

A chi mi è stato vicino,

Indice

Indice delle figure

Premessa

Il presente studio è stato frutto di un’analisi dell’articolo “Cosmology calculations almost without General Relativity” di Thomas F. Jordan (American Journal of Physics 73, 653, 2005) dal quale è stato tratto molto materiale e il quale è stato fonte di ispirazione per la tesi stessa oltre che le preziose discussioni con il mio relatore Proff./Dr. Sabino Matarrese.

1. Introduzione.

Gli attuali studi in ambito cosmologico si basano sulla teoria della relatività generale ma una prima introduzione può essere svolta anche senza prendere in considerazione, nella sua totalità, questa teoria. Dalla fisica Newtoniana in cui i moti sono non-relativistici e la gravità è trattata come una forza di attrazione tra masse è possibile ricavare l'equazione di Friedmann che è una delle due equazioni di Einstein che governa l'espansione dell'universo. L'altra si può ricavare tenendo conto del lavoro svolto dalla pressione mentre l'universo espande.

Il successo di questo metodo sta nel fatto che le equazioni ricavate per via Newtoniana o per mezzo della relatività generale sono le stesse, senza termini correttivi, anche se alcuni componenti avranno un'interpretazione diversa nei due casi.

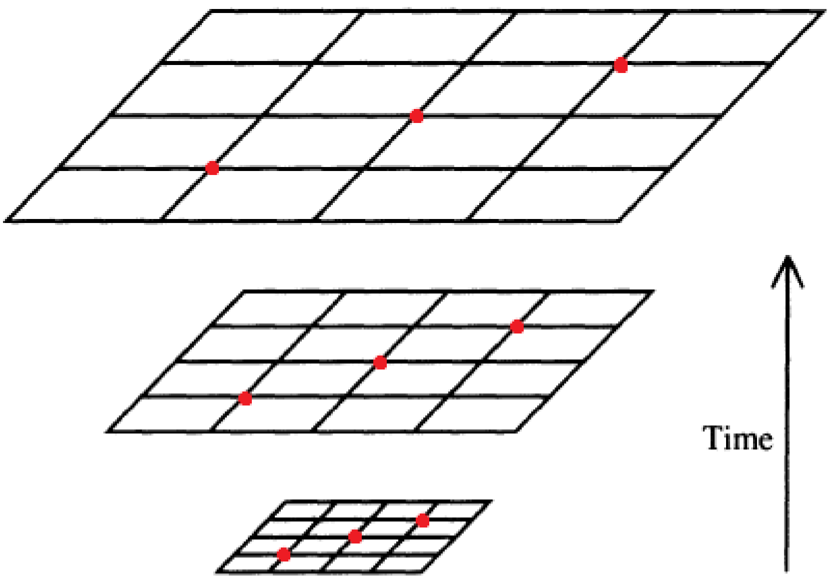
L'equazione di Friedmann, nella visione non relativistica, descrive la conservazione dell'energia cinetica più quella gravitazionale per il moto di una galassia nell'espansione dell'universo. Per spostarci a una visione relativistica sarà necessario usare l'equivalenza massa energia (che verrà discussa in seguito in modo più esaustivo) e quindi cambiare la densità di massa in densità di energia ed inserire in essa tutte le forme di energia presenti. Il processo relativistico si basa sul concetto di curvatura dello spazio piuttosto che su quello di energia gravitazionale ma il risultato è formalmente lo stesso.

Una volta introdotte queste due equazioni si avrà a disposizione un kit base per svolgere semplici calcoli in ambito cosmologico. Si presenteranno delle ipotesi sui costituenti dell'universo, si vedrà come essi variano mentre l'universo si espande e si ricaverà come essi portino ad una diversa evoluzione temporale dell'universo stesso.

2. L’equazione di Friedmann

2.1. L’equazione di Friedmann attraverso la fisica Newtoniana

L’espansione dell’universo si osserva nel moto delle galassie che appaiono allontanarsi le une dalle altre. Indipendentemente dal punto di osservazione in un universo in espansione si vedranno gli altri enti allontanarsi dall’osservatore [1]. Una visualizzazione di questo processo in modo pittoresco e bidimensionale è immaginare ogni galassia come rappresentata da un pallino disegnato sulla superficie di un palloncino. Indipendentemente da quale punto si scelga come riferimento, se il palloncino si sta gonfiando, si vedranno gli altri pallini (quindi le altre galassie) allontanarsi dal punto in questione. In figura 1 è illustrato tale concetto.



.

Figura 1: Rappresentazione grafica bidimensionale dell’espansione universale e del principio cosmologico.

Il palloncino sopra citato è stato espanso e preso come piatto ma l’effetto è il medesimo in quanto indipendentemente da quale punto si scelga come osservazione, la situazione è quella di vedere gli altri oggetti allontanarsi.

Questa visione è in accordo con il principio cosmologico che descrive l’universo come un insieme omogeneo e isotropo. Attenzione che ad espandersi è soltanto l’universo nella sua totalità, non un singolo elemento, quindi una galassia presa singolarmente non andrà incontro a un processo di espansione, analogamente a quanto avviene per le particelle che costituiscono un gas che si espande.

La legge di Hubble è una descrizione di quanto si osserva, infatti essa mette in relazione la velocità di recessione di un certo oggetto che si sta allontanando dall'osservatore con la distanza da esso. La legge di Hubble per un oggetto a distanza R dall'osservatore può essere scritta come:

$$v = \frac{dR}{dt} = HR \tag{2.1}$$

dove H è conosciuta come la costante di Hubble e con v si è indicata la velocità dell'oggetto.

Tale legge è di natura empirica e osservativa in quanto osservando le velocità di alcuni oggetti si trovò che la distribuzione era lineare, come mostrato in figura 2.

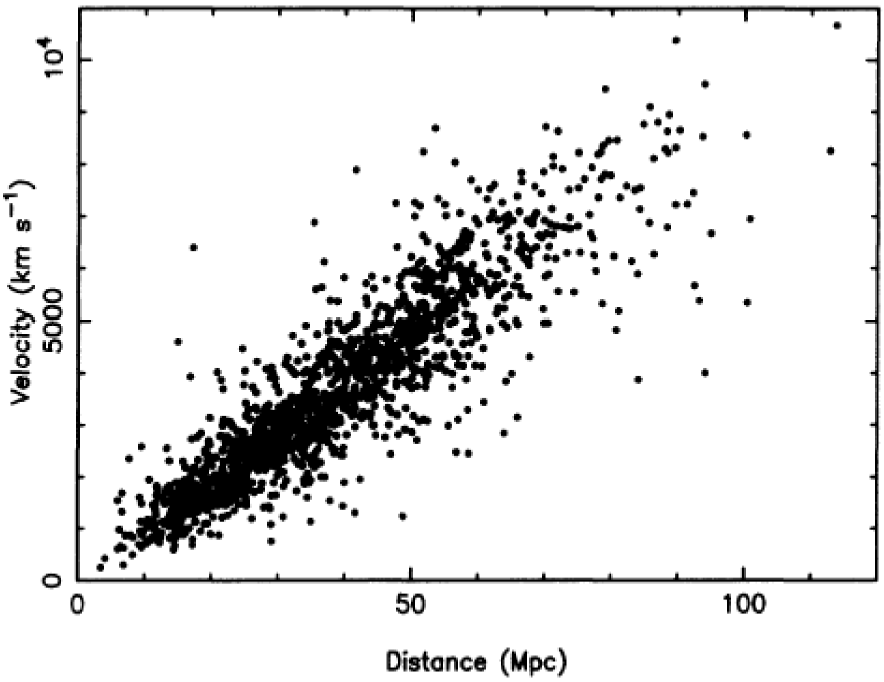


Figura 2: Storico diagramma di Hubble in cui sono inseriti dati derivanti da 1355 differenti galassie e da cui il famoso cosmologo trasse la relazione al primo ordine distanza-velocità. La figura presenta una serie di osservazioni di oggetti in allontanamento e come si vede la relazione tra le due grandezze è diretta.

La legge fornita in realtà è solo una restrizione al primo ordine a quella che è la più generale legge di Hubble ricavabile da un'analisi del red-shift di alcuni oggetti, infatti per determinare le distanze o meglio le velocità possedute da un oggetto che si sta allontanando da un osservatore si va a confrontare la lunghezza d'onda dei fotoni che si ricevono da esso (λ_o) con la lunghezza d'onda intrinseca che i fotoni dello stesso dovrebbero avere (λ_e). Da queste quantità si definisce appunto il red-shift:

$$z = (\lambda_o - \lambda_e)/\lambda_e \tag{2.2}$$

Il motivo che sta dietro al fatto che la lunghezza d'onda ricevuta sia diversa da quella nel momento dell'emissione è una sorta di effetto Doppler in cui però non si può definire un sistema di riferimento fissato come si faceva per l'effetto Doppler classico in quanto la sostanza di tale shift di lunghezze d'onda è dovuta non solo al fatto che le galassie si stanno allontanando fra loro ma anche al fatto che lo spazio stesso fra le galassie sta mutando e sta apportando degli effetti. Bisognerà dunque ricorrere a un effetto Doppler relativistico come mostrato in seguito.

Prima di riportare per completezza la relazione generale tra distanza e red-shift vi è la necessità di introdurre una nuova misura di distanza chiamata distanza di luminosità:

$$d_L = \sqrt{\frac{L}{4\pi l}} \tag{2.3}$$

Dove L è la luminosità intrinseca dell'oggetto e l è quella apparente.

Tale quantità è utile in quanto se si lavorasse in uno spaziotempo di Minkowski la luminosità di una fonte decadrebbe con l'inverso del quadrato della distanza dalla fonte stessa. Sapendo che però la relatività generale opera in uno spaziotempo che può anche essere curvo si avrebbe che tale legge non è più rispettata ma introducendo la distanza di luminosità se ne ripristina la validità.

Si può ora riportare la formula completa che lega red-shift alla distanza, in questo caso alla distanza di luminosità [2].

$$cz = H\left[d_L + \frac{1}{2}(q_0 - 1)\frac{H}{c}d_L^2 + \cdots\right] \tag{2.4}$$

Dove q_0 è definito parametro d'accelerazione ed è una quantità adimensionale funzione del parametro $a\ \ (t)$ che descrive come evolve spazialmente l'universo e che verrà introdotto in modo più esaustivo nella sezione 2.2.

Come si vede se ci si arresta al primo ordine si ottiene: $cz = Hd_L$. Ora il membro di destra è formalmente identico al membro di destra della legge elementare e il membro di sinistra può essere visto come la velocità se si va ad utilizzare la formula dell'effetto doppler relativistico [3]:

$$z = \frac{\lambda_o}{\lambda_e} - 1 = \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} - 1 \approx \frac{v}{c} \tag{2.5}$$

dove all’ultimo passaggio si è sviluppato per $v \ll c$.

La legge di Hubble generale è stata presentata in via informativa ma in seguito sarà usata la versione al primo ordine in quanto la via Newtoniana fornisce una buona base anche se si utilizza questa forma.

Si noti che la legge di Hubble non è perfettamente esatta, infatti essa ha validità una volta che il principio cosmologico inizia ad essere una buona approssimazione. Si può affermare che se la scala delle grandezze è più grande di un ammasso di galassie allora la legge di Hubble è una buona descrizione del comportamento medio di un oggetto che si sta allontanando [4]. Contrariamente a questo invece se si osserva il comportamento di una galassia vicina, essa sarà caratterizzata da dei moti chiamati velocità peculiari che la legge di Hubble non è in grado di descrivere.

Si può ora procedere per ricavare l’equazione di Friedmann.

Prendendo in considerazione la forza di gravità tra due oggetti di massa M e m:

$$F = \frac{GMm}{r^2} \tag{2.6}$$

Si ha che essa tende a compattare le galassie e perciò si va ad opporre all’espansione dell’universo.

Una galassia posta ad una distanza R da un osservatore (locato in qualsiasi posizione, in accordo con il principio cosmologico) risentirà dell’attrazione gravitazionale dovuta a tutta la massa contenuta all’ interno della sfera di raggio R e centrata sull’ osservatore, in accordo con la legge di Gauss e con il fatto che un guscio omogeneo di massa non crea una forza all’ interno di esso. Se ora si accetta l’ipotesi di un universo omogeneo allora l’attrazione gravitazionale della quale risente la galassia è la stessa che risentirebbe se tutta la massa della sfera di raggio R fosse concentrata al centro [5]. Tale massa sarà:

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \tag{2.7}$$

ove con ρ si è indicata la densità dell’universo.

Si può dunque procedere a ricavare l'equazione di Friedmann come conservazione della somma delle energie per una galassia.

La somma dell'energia cinetica e potenziale gravitazionale è:

$$E = \frac{1}{2} m \left(\frac{dR}{dt}\right)^2 - \frac{GMm}{R} \qquad (2.8)$$

nella quale inserendo la (2.7) si ottiene:

$$E = \frac{1}{2} m \left(\frac{dR}{dt}\right)^2 - \frac{4GmR^2\pi\rho}{3} \qquad (2.9)$$

inserendo la derivata temporale dalla legge di Hubble si ottiene:

$$E = \frac{1}{2} m \,(HR)^2 - \frac{4GmR^2\pi\rho}{3} \qquad (2.10).$$

Riarrangiando i termini:

$$\frac{2E}{mR^2} = H^2 - \frac{8G\pi\rho}{3} \qquad (2.11)$$

Possiamo notare che in tale equazione l'argomento di destra è costante ad un dato istante temporale, infatti lo sono H e ρ per un universo omogeneo [6]. Questo significa che l'argomento di sinistra debba essere lo stesso per tutte le galassie ed in particolar modo il carattere positivo, negativo o nullo di E è lo stesso per tali oggetti. Escludendo il caso di energia nulla è possibile scegliere delle unità e un tempo che si indicherà con t_1 t.c. $\left| 2E / m R(t_1)^2 \right| = 1$ e facendo ciò è possibile riscrivere la (2.9) come:

$$E = \frac{1}{2} m \left(\frac{dR}{dt}\right)^2 - \frac{4GmR^2\pi\rho}{3} \qquad (2.12)$$

$$\frac{2E}{mR^2} = \frac{\left(\frac{dR}{dt}\right)^2}{R^2} - \frac{8G\pi\rho}{3} \qquad (2.13)$$

$$\boxed{\frac{\left(\frac{dR}{dt}\right)^2}{R^2} - \frac{8G\pi\rho}{3} = -\frac{kR(t_1)^2}{R^2}} \qquad (2.14)$$

dove $k \coloneqq -2E/mR(t_1)^2$ è 1,0,-1 dipendentemente dal fatto che E sia positiva, nulla, negativa rispettivamente, quindi k è costante. L'utilità di usare k sta nel fatto che un universo in espansione ha un unico valore di tale costante che conserva durante tutta la sua evoluzione [7].

Abbiamo così ricavato l'equazione (2.14) che è la forma più diffusa in cui si trova l'equazione di Friedmann tramite un percorso che si basa esclusivamente sull'equazione di Hubble al primo ordine e sulla fisica Newtoniana.

2.2. Cenni di relatività generale sull'equazione di Friedmann

In relatività generale il fondamento sul quale si svolgono i calcoli in ambito cosmologico e non solo è la cosiddetta metrica dello spazio-tempo la quale ne descrive la geometria. In particolare, data una metrica si è in grado di calcolare l'elemento che descrive la distanza tra due punti (o tra due eventi dello spazio-tempo).

Tale separazione si può scrivere in via generale come:

$$ds^2 = \sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu \qquad (2.15)$$

Dove gli indici μ, ν assumono i valori 0,1,2,3 in quanto stiamo lavorando in uno spazio 4-dimensionale, $g_{\mu\nu}$ è la metrica di tale spazio e, una volta definito questo tensore, siamo in grado di descrive lo spazio-tempo che in via generale può essere anche curvo, per questo motivo l'elemento ds^2 è scritto come infinitesimo. Il fatto di determinare un particolare tensore metrico è complesso ma prendendo in considerazione il principio cosmologico le cose vengono semplificate. Esso infatti impone che a un dato tempo l'universo non deve avere un qualche punto spaziale preferito rispetto ad un altro e questo si traduce nel fatto che la curvatura della parte spaziale della metrica deve essere costante. La metrica spaziale più generale in grado di descrivere tale condizione è:

$$ds_S^2 = \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta^2 + sen^2(\theta)d\Phi^2) \qquad (2.16)$$

Dove il pedice s sta ad indicare che la separazione concerne solo le coordinate spaziali. Per descrivere tale metrica sono state usate le coordinate polari sferiche. Vediamo che compare il simbolo *k* già introdotto ma che in questo ambito è una misura della curvatura dello spazio.

Per completare la metrica però bisogna includere anche la parte che si riferisce alla coordinata temporale. Nel far ciò si usa la parte spaziale descritta sopra e si lascia la libertà che essa cresca o si riduca nel tempo secondo un fattore a(t) che prende il nome di fattore di scala dell'universo. La metrica così descritta prende il nome di metrica di Robertson-Walker e nella sua forma più generale si presenta come:

$$ds^2 = -c^2dt^2 + a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta^2 + sen^2(\theta)d\Phi^2)\right] \qquad (2.17)$$

Per arrivare ora a ricavare l'equazione di Friedman bisogna passare per l'equazione di Einstein che descrive come evolve la metrica:

$$R^\mu_\nu - \frac{1}{2}\delta^\mu_\nu R = \frac{8\pi G}{c^4}T^\mu_\nu \qquad (2.18)$$

ove T^μ_ν prende il nome di tensore energia-momento, R^μ_ν e R sono il tensore e lo scalare di Ricci che danno la curvatura dello spazio-tempo.

Nel loro complesso le equazioni di Einstein descrivono come la presenza di materia vada a curvare lo spaziotempo. In base al tipo di materia presente il tensore energia-momento prende una diversa forma, talvolta anche molto complessa, ma sotto l'ipotesi di un universo costituito da un fluido perfetto, ovvero privo di viscosità e privo di flussi di calore il tensore in questione assume la forma diagonale $T^\mu_\nu = diag(-\rho c^2, p, p, p)$ ove ρ è la densità di massa e p è la pressione. Per questa situazione si hanno soltanto due equazioni di Einstein indipendenti: l'equazione tempo-tempo e l'equazione spazio-spazio.

Si può dimostrare che l'equazione tempo-tempo riproduce esattamente l'equazione di Friedman ricavata tramite la fisica Newtoniana:

$$\boxed{\frac{\left(\frac{dR}{dt}\right)^2}{R^2} - \frac{8G\pi\rho}{3} = -\frac{kR(t_1)^2}{R^2}} \qquad (2.19)$$

nella quale però le costanti assumono un diverso significato. Si ha infatti che la costante k è ora definita come la curvatura dell'universo mentre, come si è osservato in precedenza, in fisica Newtoniana era legata al carattere dell'energia. [8]

2.3. Evanescenza del fattore c^2

Come si è visto presentando questa prima equazione, si parla di densità di massa che nell'usualità del campo viene spesso e volentieri intercambiata con la densità di energia. Le due sono connesse dalla famosa relazione di Einstein $\rho_{massa}\, c^2 = \rho_{energia}$. Nella teoria è conveniente impostare le unità di misura cosiddette "naturali" nelle quali la velocità della luce è presa come unitaria e quindi vi è un'uguaglianza massa energia.

L'equazione di Friedmann sopra presentata è stata ricavata proprio facendo tale imposizione, si è potuto infatti constatare che il fattore c^2 che compariva nel tensore energia-momento non appare nell'equazione finale. Un processo distinto in realtà porta alla semplice comparsa del termine c^2 nell'equazione e ad una ridefinizione della costante k ma il risultato ovviamente non cambia.

3. Seconda equazione di Einstein

3.1. La seconda equazione di Einstein attraverso la fisica Newtoniana

Nel secondo capitolo si è ricavata l'equazione di Friedmann per un universo omogeneo e isotropo ma essa da sola non è in grado di soddisfare le moltitudini di problemi legati alle diverse quantità che compongono l'universo. Si associa allora ad essa la seconda equazione di Einstein la quale aggiunge il fatto che mentre l'universo espande, o meglio mentre una porzione di esso di volume V aumenta della quantità dV, la pressione p nel volume fa lavoro pdV il quale diminuisce l'energia all'interno del volume di tale quantità [9].

Si prenda in considerazione una sfera di raggio R nella quale sia presente una densità di massa/energia ρ. Applicando le considerazioni fatte sopra si ottiene che l'energia all'interno di tale sfera varia come:

$$d\left(\rho\frac{4}{3}\pi R^3\right) = -p\, d\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) \tag{3.1}$$

$$\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)\frac{d\rho}{dt} + \left(\rho\frac{4}{3}\pi R^2\right)\frac{dR}{dt} = -\left(p\frac{4}{3}\pi R^2\right)\frac{dR}{dt} \tag{3.2}$$

Riarrangiando e dividendo per $\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)$ si ottiene la cosiddetta equazione dei fluidi:

$$R\frac{d\rho}{dt} + 3\frac{dR}{dt}(\rho + p) = 0 \tag{3.3}$$

Tale equazione mette in relazione l'espansione dell'universo con la natura dei suoi componenti (in particolare densità e pressione sono correlate fra loro come si vedrà nel prossimo capitolo).

Sebbene alcuni testi presentino quest'ultima equazione insieme a quella di Friedmann per porre le basi della cosmologia, utilizzeremo una terza equazione, dipendente dalle precedenti, in quanto emerge direttamente dalla trattazione relativistica come si vedrà nella prossima sezione in analogia con quanto svolto nel capitolo precedente per l'equazione di Friedmann.

Partendo da (3.3) e da (2.14) che riportiamo nelle seguenti forme:

$$R\frac{d\rho}{dt} + 3\frac{dR}{dt}(\rho + p) = 0 \tag{3.4}$$

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = \frac{8G\pi\rho R^2}{3} - kR(t_1)^2 \tag{3.5}$$

Prendendo la derivata temporale della (3.5) e sostituendovi la (3.4):

$$R\frac{d\rho}{dt} = -3\frac{dR}{dt}(\rho + p) \tag{3.6}$$

$$2\frac{dR}{dt}\frac{d^2R}{dt^2} = \frac{8G\pi}{3}\left(R^2\frac{d\rho}{dt} + 2R\rho\frac{dR}{dt}\right) \tag{3.7}$$

Dalle quali si ottiene:

$$\boxed{\frac{d^2R}{dt^2} = -\frac{4G\pi}{3}R(\rho + 3p)} \tag{3.8}$$

Tale equazione descrive come l'universo stia accelerando in relazione alla varia natura dei sui componenti e a come essi generino una pressione.

3.2. Cenni di relatività generale sulla seconda equazione di Einstein

In analogia con quanto visto nel capitolo precedente si ha che anche tale equazione è ricavabile dalla relatività generale. Si ricordi che la metrica di Roberston-Walker (2.17) evolve tramite le equazioni di Einstein (2.18), si era detto poi che sotto l'ipotesi di universo come fluido perfetto il tensore energia-momento assume la particolare forma $T_\nu^\mu = diag(-\rho c^2, p, p, p)$ e le equazioni di Einstein si riducono a essere due. Allo stesso modo in cui l'equazione tempo-tempo è esattamente l'equazione di Friedmann, la spazio-spazio è:

$$2\frac{\frac{d^2R}{dt^2}}{R} + \left(\frac{\frac{dR}{dt}}{R}\right)^2 + \frac{kR(t_1)}{R^2} = 8\pi G\rho \tag{3.9}$$

nella quale inserendo la (2.19) si ottiene proprio:

$$\boxed{\frac{d^2R}{dt^2} = -\frac{4G\pi}{3}R(\rho + 3p)} \tag{3.10}$$

Anche in questo caso l'equazione trovata è la stessa senza termini correttivi [8].

4. Densità e pressione: alcuni modelli cosmologici

4.1. Equazione dei fluidi

Si è visto che le equazioni ricavate in precedenza dipendono dalla densità e dalla pressione dei costituenti dell'universo. Per predire dunque come l'universo si evolva bisogna specificare di cosa esso sia fatto. Sostanzialmente in questo capitolo si andranno a sviluppare dei semplici modelli cosmologici. Il significato fisico consiste nel dare il legame matematico che intercorre tra la densità e la pressione che appaiono nelle due equazioni e sviluppare queste ultime di conseguenza. In questo capitolo si esporranno le relazioni fra densità e pressione sotto l'ipotesi di un universo costituito separatamente da:

- Materia
- Radiazione
- Vuoto

Una volta fornite tali dipendenze si sarà in grado di andare a risolvere l'equazione dei fluidi (3.1) che per semplicità riportiamo della forma:

$$\frac{d}{dt}(\rho_i R^3) = -p_i \frac{d}{dt}(R^3) \tag{4.1}$$

Dove il pedice i assumerà il significato di materia (m), radiazione (r) o vuoto (v) a seconda dei casi.

La risoluzione di tale equazione ci darà una stima di come la densità di energia vari con la dimensione dell'universo.

Si presenta in fine un'altra possibile applicazione delle equazioni andando a calcolare come l'universo si espanda in relazione al tempo.

4.2. Materia

In tale contesto la definizione di materia è una scorciatoia per indicare in realtà la materia non relativistica o, in altre parole, tutta quella materia la quale esercita una pressione trascurabile. Il significato di questo modello è quello di un universo privo di pressione in cui le galassie che lo compongono non hanno alcuna interazione fra loro al di fuori di quella gravitazionale. In particolar modo esse non collidono e non creano pressione che intacchi l'espansione dell'universo. Abbiamo dunque che $p_m = 0$ [10].

Inserendo tale condizione nella 4.1 si ottiene:

$$\frac{d}{dt}(\rho_m R^3) = 0 \tag{4.2}$$

Dunque

$$\rho_m \propto \frac{1}{R^3} \tag{4.3}$$

Il significato di tale risultato è che l'energia di una sfera di materia in espansione non cambia, verrà solamente distribuita o diluita.

4.3. Radiazione

In presenza di sola radiazione (situazione dominante nelle fasi giovani dell'universo [10]) si ha una relazione pressione densità: $p_r = \frac{1}{3}\,\rho_r$. Tale relazione è esplicabile andando a computare quale pressione venga esercitata per unità di area da fotoni che rappresentano la radiazione. Nel dettaglio si consideri una superficie di area A la quale viene investita da una corrente di fotoni di momento $\vec{p}$. Nel rimbalzare su tale superficie i fotoni cambiano la componente di momento perpendicolare alla superficie p_x in $-p_x$. La forza esercitata sull'area A è data da $2p_x$, ovvero il cambio di momento, per il numero di volte che un fotone colpisce la superficie nell'unità di tempo.

Includendo fotoni aventi diverso momento è possibile scrivere la forza sulla superficie come:

$$\frac{1}{2}2\overline{p_x\, v_x}\; A\, n \tag{4.4}$$

Ove v_x è la componente della velocità perpendicolare alla superficie di un fotone con momento qualsiasi. n è il numero di fotoni per unità di volume. Il fattore 1/2 è spiegato dal fatto che la media è su tutti i vari $\vec{p}$ ma solo i fotoni con momento perpendicolare positivo eserciteranno una forza su A e questi saranno metà di quelli presenti ipotizzando una distribuzione uniforme. La velocità di un fotone è pari a c se considerata nella direzione del suo momento. Ipotizzando ora una distribuzione uniforme per i momenti e dividendo la (4.4) per l'area si ottiene la pressione esercitata:

$$p_r = \overline{p_x\, v_x}\; n \tag{4.5}$$

$$= \overline{p_x \left(\frac{p_x}{|\vec{p}\,|}\right)}\ c\ n \tag{4.6}$$

$$= \frac{1}{3}\overline{\left(\frac{p_x^2\ + p_y^2\ + p_z^2}{|\vec{p}\,|}\right)}\ c\ n \tag{4.7}$$

$$= \frac{1}{3}\overline{|\vec{p}\,|}c\ n \tag{4.8}$$

Essendo $\overline{|\vec{p}\,|}\ c$ l'energia di un fotone si ottiene proprio [11]

$$p_r = \frac{1}{3}\ \rho_r \tag{4.9}$$

È dunque possibile inserire tale relazione pressione densità nella (4.1) ottenendo:

$$\frac{d}{dt}(\rho_r R^3) = -\frac{1}{3}\rho_r\ \frac{d}{dt}(R^3) \tag{4.10}$$

$$\dot{\rho_r} R^3 + 4\rho R^2 \dot{R} = 0 \tag{4.11}$$

$$\frac{1}{R^4}\frac{d}{dt}(\rho_r R^4) = 0 \tag{4.12}$$

E si trova dunque che per un universo composto solo da radiazione si ha una densità che varia come:

$$\rho_r \propto \frac{1}{R^4} \tag{4.13}$$

4.4. Vuoto

Resta da trattare il caso in cui l'universo sia pervaso da vuoto. Da una grossolana definizione di vuoto si può dire che non essendoci nulla che possa essere cambiato allora la densità di energia del vuoto non cambia nel tempo:

$$\frac{d}{dt}\rho_v = 0 \tag{4.14}$$

Il che comporterebbe, una volta inserita questa condizione nella (4.1):

$$\rho_v \frac{d}{dt}R^3 = -p_v\ \frac{d}{dt}R^3 \tag{4.15}$$

da cui:

$$\rho_v = -p_v \tag{4.16}$$

Questa trattazione grossolana trova in realtà conferma andando a valutare un punto di vista relativistico.

La densità di energia di un sistema è la componente tempo-tempo del tensore relativistico energia-momento $T_{\mu\nu}$ di tale sistema. Sotto l'ipotesi che il vuoto sia un invariante di Lorentz allora si dimostra che la densità deve eguagliare l'inverso della pressione [12]. Le componenti di tale tensore rappresentano:

- T_{00} la densità di energia come già detto.
- $T_{0\nu}$ la densità di momento anche chiamata corrente di energia
- T_{ij} (con i,j=1,2,3) la corrente di momento, ovvero il momento per unità di volume che attraversa l'area unitaria, in altre parole la pressione.

In un universo omogeneo e uniforme in espansione, un osservatore che osservi una porzione vicina a lui in quiete non osserverà flussi di energia o momenti entranti o uscenti dalla porzione stessa, che si traduce in $T_{\mu\nu} = 0$ per $\mu \neq \nu$. Inoltre, si può affermare che $T_{11} = T_{22} = T_{33}$ altrimenti una semplice rotazione delle coordinate non verificherebbe l'assunzione fatta poco sopra. Il tensore si presenta dunque nella forma:

$$T_{\mu\nu} = diag\ (\rho, p, p, p) \tag{4.17}$$

Applicando ora una trasformazione di Lorentz a tale tensore che può essere scritta in via generale come:

$$T'_{\mu\nu} = \sum_{\alpha=0}^{3} \sum_{\beta=0}^{3} \Lambda_{\mu\alpha}\, \Lambda_{\nu\beta}\, T_{\alpha\beta} \tag{4.18}$$

con Λ matrice 4x4 della trasformazione che è funzione della velocità v con cui l'osservatore si muove, si ottiene (per un osservatore che si muove a velocità $-v$ in direzione z per semplicità):

$$T'_{00} = \frac{\rho + v^2 p}{1 - v^2} \tag{4.19}$$

$$T'_{33} = \frac{p + v^2 \rho}{1 - v^2} \tag{4.20}$$

mentre le altre componenti del tensore restano invariate.

Si vede che la richiesta di invarianza per trasformazioni di Lorentz è soddisfatta se e solo se $\rho = -p$. Da una richiesta di invarianza per il vuoto allora si riottiene la relazione pressione energia già presentata.

4.4.1. Sulla costante cosmologica

In molti testi non si parla di vuoto come entità presente nell'universo ma si tratta solo materia e radiazione. Il vuoto viene poi inserito attraverso l'utilizzo di una costante cosmologica. Tale costante trova in realtà fondamento nella relatività generale ed è stato proprio Einstein ad introdurla anche se inizialmente il suo scopo era tutt'altro che quello di andare a rappresentare il vuoto presente nell'universo. L'avvento della costante cosmologica è infatti dovuto alla credenza di Einstein che l'universo dovesse essere statico ma la sua teoria della relatività non permetteva ciò [13], considerando infatti solo materia essa si attrae tramite la forza di gravità e Einstein per far tornare le cose andò a modificare l'equazione di Friedmann sommando una costante che chiamò costante cosmologica Λ. Tale costante può essere positiva o negativa e Einstein ipotizzò che tramite l'utilizzo di essa si potesse andare a bilanciare la curvatura dello spazio al fine di ottenere $H^2 = 0$.

Ad oggi invece si osserva che la costante cosmologica attua una forza repulsiva e quindi tende a slegare l'universo e viene spesso utilizzata nella trattazione di modelli cosmologici come alternativa al vuoto. Per avere un collegamento diretto con la trattazione svolta qui bisogna passare per la descrizione nell'ambito dei fluidi della costante cosmologica.

Si definisce Λ come un fluido di densità $\rho = \frac{\Lambda}{8\pi G}$. Per vedere come questa densità si leghi alla pressione si consideri l'equazione dei fluidi (4.1):

$$\frac{d}{dt}(\rho_i R^3) = -p_i \frac{d}{dt}(R^3) \tag{4.21}$$

Che, una volta sviluppate le derivate si presenta nella forma:

$$\dot{\rho} + \frac{3\dot{R}}{R}(\rho + p) = 0 \tag{4.22}$$

Ma visto che per definizione ρ è una costante allora si deve avere $p = -\rho$. Tale pressione negativa significa che mentre l'universo si espande del lavoro è fatto sul fluido Λ e ciò permette che la densità rimanga costante mentre l'universo si espande.

Come visto si ha che il fluido Λ ha le stesse caratteristiche del vuoto introdotto precedentemente.

Si preferirà nel seguito parlare di vuoto piuttosto che di costante cosmologica perché quest'ultima ha un significato più profondo in ambito relativistico.

4.5. Relazione parametrica densità pressione

Il tentativo di unificare i precedenti casi in un'unica formula generale trova consistenza considerando un legame pressione energia parametrico:

$$p = w\,\rho \tag{4.23}$$

con w parametro costante.

Si vede che inserendo tale condizione della (4.1) si ottiene:

$$\frac{d}{dt}(\rho R^3) = -w\rho\,\frac{d}{dt}(R^3) \tag{4.24}$$

$$\dot{\rho}R^3 + 3\rho R^2\dot{R}(1+w) = 0 \tag{4.25}$$

$$\dot{\rho} + 3\rho\frac{\dot{R}}{R}(3+3w) = 0 \tag{4.26}$$

$$\frac{1}{R^{3+3w}}\frac{d}{dt}\,(\rho R^{3+3w}) = 0 \tag{4.27}$$

Da cui si ricava

$$\rho \propto \frac{1}{R^{(3+3w)}} \tag{4.28}$$

Si può facilmente vedere che sostituendo i valori 0, 1/3, -1 si ottengono rispettivamente le dipendenze per materia, radiazione e vuoto.

4.6. Dipendenza temporale

Un'applicazione interessante delle equazioni della cosmologia è quella di andare a valutare come l'universo, ipotizzato in espansione, vari la propria dimensione in relazione al tempo. Come si è già visto, le varie relazioni densità pressione hanno portato a tre diversi risultati e si ha già una stima di come varino le densità di energia mentre l'universo si espande. A sua volta però l'universo va incontro ad un diverso tipo di sviluppo temporale in base a come i suoi componenti siano distribuiti e a come essi evolvano nel tempo. Si è già detto che nelle fasi giovani dell'universo vi doveva essere una dominanza da parte della radiazione per poi, con il passare del tempo andare verso una dominanza del vuoto e una fase intermedia in cui vuoto e materia erano entrambi da considerarsi mentre la radiazione si può ritenere trascurabile.

Essendo la dipendenza temporale legata alla varietà dei costituenti dell'universo, che siano essi materia, radiazione o vuoto, si avrà un'espansione diversa per diverse ere.

Per osservare un caso esplicito poniamo k nell'equazione di Friedmann uguale a 0 per semplificare ed alleggerire la trattazione [14], questo corrisponde a un universo giovane nel quale la parte legata alla radiazione sovrasta il termine con k. L'equazione di Friedmann allora si presenta come:

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 \propto \rho R^2 \tag{4.29}$$

Andando a inserire le relazioni densità-Raggio nella precedente relazione di proporzionalità si ottiene rispettivamente:

materia:

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 \propto \frac{1}{R^3} R^2 \tag{4.30}$$

$$\frac{dR}{dt} \propto \frac{1}{R^{1/2}} \tag{4.31}$$

$$R \propto t^{2/3} \tag{4.32}$$

radiazione:

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 \propto \frac{1}{R^4} R^2 \tag{4.33}$$

$$\frac{dR}{dt} \propto \frac{1}{R^2} \tag{4.34}$$

$$R \propto t^{1/2} \tag{4.35}$$

vuoto:

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 \propto R^2 \tag{4.36}$$

$$R \propto e^{Kt} \tag{4.37}$$

Con K costante. È usuale chiamare tale condizione di espansione esponenziale inflazione.

In una situazione mista, che comprenda un insieme delle precedenti condizioni richiede la risoluzione dell'equazione differenziale in cui densità e pressione siano la somma delle varie componenti.

Quanto svolto in sezione 4.5 trova un riscontro anche in tale ambito. Si era trovato che la relazione parametrica densità raggio era:

$$\rho \propto \frac{1}{R^{(3+3w)}} \tag{4.38}$$

La quale inserita in (4.27) porta a:

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 \propto \frac{1}{R^{3+3w}} R^2 \tag{4.39}$$

$$\frac{dR}{dt} \propto R^{-\frac{1+3w}{2}} \tag{4.40}$$

Da cui integrando si ottiene:

$$R \propto t^{\frac{2}{3+3w}} \tag{4.41}$$

Anche in questo caso sostituendo a w rispettivamente i valori 1/3 e 0 si ottiene la dipendenza temporale di radiazione e materia (4.35) e (4.32).

4.7. Densità critica

Una visione alternativa molto usata dell'equazione di Friedmann è quella che si ottiene introducendo la densità critica, ovvero la densità che si dovrebbe avere per un dato valore di H affinché $k=0$ (o parlando di relatività generale affinché lo spazio sia piatto) [15].

Ponendo $k=0$ nell' equazione (2.14) si ottiene:

$$0 = H^2 - \frac{8G\pi\rho}{3} \tag{4.42}$$

Da cui si definisce densità critica

$$\rho_{crit} = \frac{3H^2}{8\pi G} \tag{4.43}$$

È usuale definire anche la quantità:

$$\Omega = \frac{\rho}{3H^2/8\pi G} \tag{4.44}$$

Che mette in evidenza il rapporto tra la densità e la densità critica. Prendendo in considerazione i tre costituenti ipotizzati dell'universo, è possibile definire tale rapporto per ognuno di essi:

-materia
$$\Omega_m = \frac{\rho_m}{\rho}\Omega \tag{4.45}$$

-radiazione
$$\Omega_r = \frac{\rho_r}{\rho}\Omega \tag{4.46}$$

-vuoto
$$\Omega_v = \frac{\rho_v}{\rho}\Omega \tag{4.47}$$

Tali Ω valgono 1 se $k = 0$, sono più piccoli di 1 se $k = -1$ e sono più grandi di 1 se $k = 1$.

Possiamo ora scrivere l'equazione di Friedmann nella seguente forma:

$$\frac{\rho - \frac{3H^2}{8\pi G}}{\rho} = \frac{3kR(t_1)^2}{8\pi G\rho R^2} \tag{4.48}$$

Il membro di sinistra di tale equazione rappresenta la frazione di densità che è diversa dalla densità critica e il membro di destra descrive come tale frazione evolva al cambiare di R.

Dalle osservazioni emerge che nell' attuale universo la frazione suddetta è molto piccola [16]. Se andiamo ad utilizzare la relazione densità raggio per la radiazione (dominante in un universo giovane) $\rho_r \propto \frac{1}{R^4}$ il membro di destra cresce con R^2 e quindi molto velocemente. Questo, comparato alle osservazioni, implica che essendo ora la differenza molto piccola tra densità e densità critica, nelle fasi primordiali la densità doveva praticamente coincidere con la densità critica. Una spiegazione plausibile è che nelle primissime fasi dell'universo vi sia stata un'espansione inflazionaria, ovvero esponenziale, dominata dalla densità di energia del vuoto. Come visto però la densità del vuoto rimane costante e la frazione (4.48) decadrà con R^2.Ricordando che la relazione raggio tempo in un universo dominato da vuoto è un esponenziale, si ha che la frazione in questione tende a 0 molto velocemente.

5. *Applicazioni delle equazioni*

5.1. Applicazione: il valore di H nel tempo

Si è visto che per ricavare l'equazione di Friedmann è stata usata la legge di Hubble nella quale si era detto che la costante H, detta costante di Hubble, non variava ad un dato istante temporale e rimaneva costante attraverso tutto lo spazio. Ci si chiede allora variando l'istante in cui considero H come esso vari.

Si parte sempre dall'ipotesi che l'universo sia pervaso da un solo costituente, ad esempio materia o radiazione. Si sono già viste le dipendenze temporali del raggio dell'universo:

$$R \propto t^{2/3} \tag{5.1}$$

$$R \propto t^{1/2} \tag{5.2}$$

Rispettivamente per materia e radiazione.

Svilupperemo la proporzionalità ipotizzando per semplicità $k=0$ nelle equazioni. Partendo dall' equazione (2.11) e ponendo il membro di destra uguale a 0 da ipotesi si ottiene:

$$0 = H^2 - \frac{8G\pi\rho}{3} \tag{5.3}$$

Dalla quale è possibile ricavare una proporzionalità tra H e la densità:

$$H \propto \sqrt{\rho} \tag{5.4}$$

andando ora ad inserire le relazioni densità raggio e ancora raggio tempo si ottiene:

- Materia:

$$\rho_m \propto \frac{1}{R^3} \propto \frac{1}{(t^{2/3})^3} \tag{5.4}$$

$$H \propto \frac{1}{t} \tag{5.5}$$

- Radiazione:

$$\rho_m \propto \frac{1}{R^4} \propto \frac{1}{(t^{1/2})^4} \tag{5.6}$$

$$H \propto \frac{1}{t} \tag{5.7}$$

Entrambe le ipotesi portano a una dipendenza inversamente proporzionale all' età dell'universo.

5.2. Applicazione: accelerazione dell'universo

Escludendo la radiazione come parte dominante dell'attuale universo, in quanto essa è dominante nelle fasi giovani dell'universo stesso, ci si chiede come l'universo stia accelerando in relazione ai sui costituenti. La risposta a tale quesito è da ricercarsi nella seconda equazione di Einstein che descrive proprio quanto richiesto:

$$\frac{d^2R}{dt^2} = -\frac{4G\pi}{3}R(\rho + 3p) \tag{5.8}$$

La densità e la pressione saranno la somma delle rispettive densità e pressioni di materia e vuoto. Ricordando però che la materia non genera pressione e che la relazione pressione densità per il vuoto è: $\rho_v = -p_v$ si ottiene:

$$\frac{d^2R}{dt^2} = -\frac{4G\pi}{3}R(\rho_m - 2\rho_v) \tag{5.9}$$

Il carattere positivo, negativo o nullo dell'accelerazione dipende dal fatto che $2\rho_v$ sia minore, uguale o maggiore di ρ_m.

Graficamente la situazione è rappresentata nel piano Ω_m , Ω_v in figura 3.

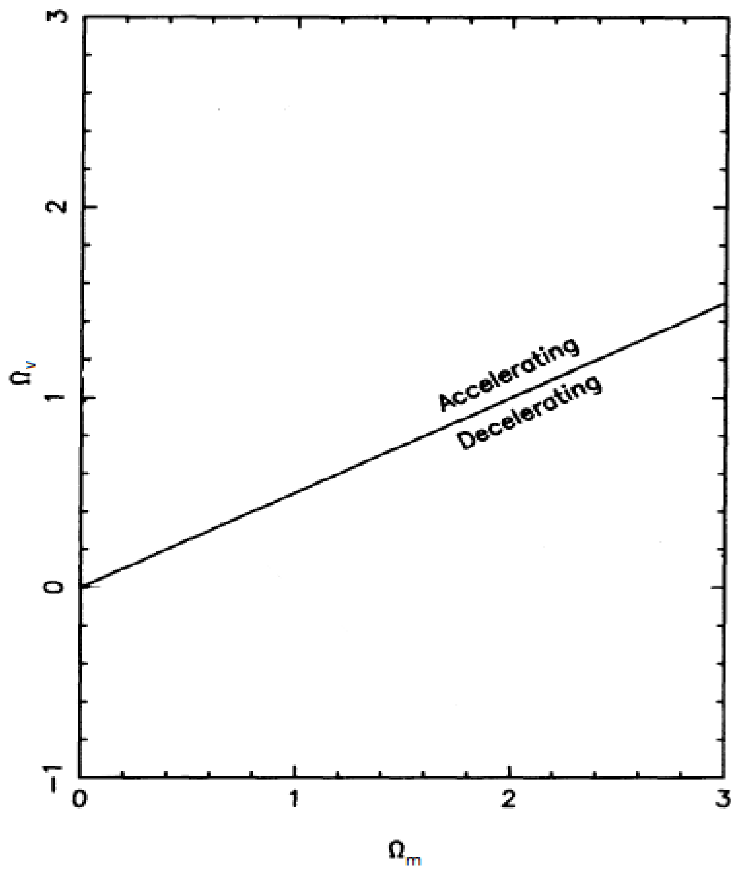


Figura 3: separazione tra universo in accelerazione e in decelerazione nel piano Ω_m , Ω_v.

5.3. Applicazione: valore costante di Ω se uguale a 1

Una condizione particolare che si verifica quando $k = 0$, nonché quindi quando $\Omega = 1$ è che tale valore viene mantenuto nel tempo.

Derivando la seguente:

$$\Omega = \frac{\rho}{3H^2/8\pi G} \tag{5.10}$$

si ottiene

$$\dot{\Omega} = \frac{8\pi G}{3}\left(\frac{\dot{\rho}}{H^2} - \frac{\rho}{H^3}2\dot{H}\right) \tag{5.11}$$

La densità che compare è proprio la densità critica e quindi possiamo sostituire nella precedente l'eq (4.43) e la sua derivata temporale ottenendo:

$$\dot{\Omega} = \frac{8\pi G}{3}\left(\frac{6H\dot{H}}{8\pi G\ H^2} - \frac{3H^2}{8\pi G\ H^3}2\dot{H}\right) \tag{5.12}$$

Ma annullandosi la parentesi viene annullata anche la derivata e si ha che Ω resta costante.

Questo fatto è rilevante in quanto mette in evidenza che se la densità dell'universo raggiunge la densità critica, questa non varierà nel tempo ma rimarrà costante.

5.4. Applicazione: espansione per sempre?

Ci si può chiedere se l'espansione dell'universo sarà eterna o se è possibile che essa cessi.

Fino a qualche anno fa si considerava solo la densità di materia e sotto tale ipotesi la discussione viene parecchio semplificata. Considerando solo la densità derivante dalla materia si ha che è possibile usare le familiari equazioni di Newton ed in particolare in:

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 - \frac{GMm}{R} \tag{5.13}$$

si ha che sia E, sia M sono costanti. Perché allora le galassie smettano di allontanarsi la condizione da richiedere è che E sia negativa. Un'energia nulla o positiva porterà a un'espansione eterna.

È possibile tramutare questa condizione in una condizione su k e quindi su Ω infatti un'energia negativa implica k positivo che implica Ω maggiore di 1.

Tale precisazione è utile in quanto il completamento di tale applicazione richiede un'analisi dell'espansione in presenza di materia e vuoto. In tale ipotesi si andrà a ricercare quali porzioni di area del piano $\Omega_m\Omega_v$ porteranno a un'espansione eterna o a un universo che smetterà di espandersi.

La radiazione è messa da parte in quanto come ripetuto più volte non è dominante se non nelle fasi iniziali dell'universo.

Si è già osservato che nel caso in cui Ω_v sia 0 allora l'espansione si ferma se e solo se Ω_m è più grande di 1. Procediamo ora alla ricerca di altre combinazioni $\Omega_m\Omega_v$ che permettono all'universo di fermarsi. La richiesta è allora quella che l'accelerazione (3.8) sia negativa e vi rimanga fino a che la velocità (2.14) raggiunge un valore nullo.

Concentriamoci dapprima nel caso in cui $\Omega_m \leq 1$,allora la richiesta di collasso è soddisfatta per Ω_v negativo in quanto il membro di destra di

$$\frac{d^2R}{dt^2} \propto -(\Omega_m - 2\Omega_v) \tag{5.14}$$

è negativo e resterà negativo nel tempo mente nella formula della velocità

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = \frac{8G\pi(\rho_m + \rho_v)}{3} R^2 - kR(t1)^2 \tag{5.15}$$

il primo fattore del membro di destra tenderà al secondo in quanto ρ_m decrecse come $1/R^3$ mentre ρ_v rimane invariata e l'ipotesi fatta sulle densità porta ad un $\Omega = \Omega_m + \Omega_v$ sempre minore di 1 e quindi a un k negativo [17].

Avendo trovato che per $\Omega_m \leq 1$ l'universo collasserà su sé stesso si può affermare che l'universo andrà incontro ad un'espansione eterna per Ω_v positivi in quanto essi porterebbero ad un'accelerazione e ad una velocità sempre maggiori.

Resta da analizzare il caso in cui $\Omega_m > 1$.

La fisica che sta dietro a questo problema è che la materia tende a far collassare l'universo sotto l'attrazione gravitazionale mentre la densità del vuoto (da molti chiamata costante cosmologica) tende a far separare l'universo quindi, avendo trovato un limite superiore a Ω_v nel caso di $\Omega_m \leq 1$, si procederà andando a porre un limite superiore corrispondente ad ogni valore di $\Omega_m > 1$ e nel farlo si ricaverà una funzione che lega proprio Ω_m e Ω_v.

Conoscendo che l'espansione si ferma per $\Omega_m > 1$ e per $\Omega_v = 0$ allora si ha che il valore limite di Ω_v è almeno 0. Si ha dunque che a tale limite l'accelerazione è sufficientemente negativa affinché la velocità decresca ed entrambe raggiungeranno il valore nullo nello stesso istante. Si contrassegnano le quantità a tale istante con $\sim$.

Ricordando che ρ_v non cambia il suo valore nel tempo si ottiene ponendo l'accelerazione e la velocità uguali a 0:

$$\widetilde{\rho_m} - 2\rho_v = 0 \qquad (5.16)$$

$$\frac{8}{3}\pi G(\widetilde{\rho_m} + \rho_v)\widetilde{R^2} = kR(t_1)^2 \qquad (5.17)$$

Si ricorda poi come varia la densità di materia:

$$\widetilde{\rho_m}\widetilde{R^3} = \rho_m R^3 \qquad (5.18)$$

Partendo da (5.17) si ottiene:

$$\frac{8}{3}\pi G\rho_v(\frac{\widetilde{\rho_m}}{\rho_v} + 1)\widetilde{R^2} = kR(t_1)^2 \qquad (5.19)$$

Inserendo (5.18) e riarrangiando la parentesi

$$\frac{8}{3}\pi G\rho_v \frac{3}{2}\frac{\rho_m R^3}{\rho_v \tilde{R}} = kR(t_1)^2 \qquad (5.20)$$

E sostituendo nuovamente (5.18) in $\tilde{R}$

$$8\pi G\rho_v R^2 \left(\frac{\rho_m}{2\rho_v}\right)^{\frac{2}{3}} = kR(t_1)^2 \qquad (5.21)$$

Ponendo ora $k=1$ (cosa concessa dal fatto che stiamo analizzando proprio quella porzione di piano $\Omega_m \Omega_v$) ed esplicitando dalla precedente $R(t_1)^2/R^2$ è possibile riscrivere l'eq. di Friedmann (4.48) in funzione delle sole $\Omega_m \Omega_v$ [17]:

$$1 - \Omega_m - \Omega_v = -\frac{3}{2^{\frac{2}{3}}}\Omega_m^{1/3}\Omega_v^{2/3} \qquad (5.22)$$

Come si vede nella precedente compaiono solo Ω_m e Ω_v ed è possibile maneggiarla al fine di esplicitarne uno in funzione dell'altro. In particolare, utilizzando le variabili $x = 1 - \frac{1}{\Omega_m}$ e $y = \left(\frac{\Omega_v}{4\Omega_m}\right)^{\frac{1}{3}}$ è possibile scrivere la (5.22) come:

$$4y^3 - 3y + x = 0 \qquad (5.23)$$

Introducendo ora l'ulteriore variabile $y = \cos\beta$ (cosa concessa dal fatto che sia x che y sono entrambi positivi e che da (5.22) si può ricavare che y è sempre minore di 1), che implica $-x = \cos 3\beta$ (ricavabile ricordando che $\cos 3\beta = 4\cos^3\beta - 3\cos\beta$ e prendendo $y = 0$ quando $x = 0$ perché se $\Omega_m = 1$ allora $\Omega_v = 0$). Si ha dunque che $x = \cos(3\beta - \pi)$ e $y = \cos\left(\frac{1}{3}\cos^{-1}x + \frac{\pi}{3}\right)$.

Applicando tali sostituzioni a (5.23) si trova la curva nel piano $\Omega_m\Omega_v$:

$$\Omega_v = 4\Omega_m cos^3\left[\frac{1}{3}cos^{-1}\left(1-\frac{1}{\Omega_m}\right)+\frac{\pi}{3}\right] \tag{5.24}$$

Tale curva è visualizzabile in figura 4. Si può concludere dunque dicendo che per valori di $\Omega_m\Omega_v$ al di sotto della curva l'espansione si fermerà in quanto la parte legata alla costante cosmologica/vuoto non sarà in grado di vincere l'attrazione gravitazionale della materia, al contrario per valori posto sopra la curva l'attrazione non sarà sufficiente e l'universo andrà incontro ad un'espansione senza fine.

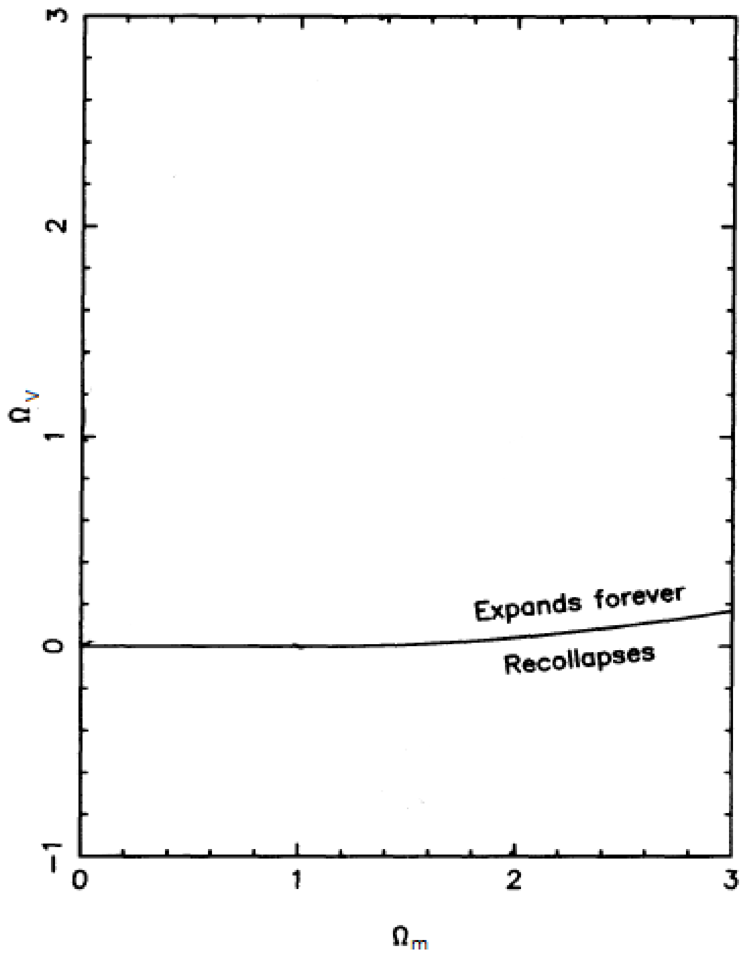


Figura 4: separazione tra universo in espansione per sempre e universo destinato a un collasso nel piano Ω_m , Ω_v.

È possibile che in alcuni testi vi sia riportata la curva nella forma:

$$\Omega_v = \frac{4\Omega_m}{27}\left(1 - \frac{1}{\Omega_m}\right)^3 \qquad (5.25).$$

Essa in realtà è un'approssimazione abbastanza buona della formula generale presentata anche in figura in quanto emerge direttamente dalla (5.23) anche se in essa si trascura il termine di terzo grado. Si noti infatti che presentando la (5.23) ridotta si ottiene:

$$-3y + x = 0 \qquad (5.26)$$

e andando in essa a sostituire le due variabili $x = 1 - \frac{1}{\Omega_m}$ e $y = \left(\frac{\Omega_v}{4\Omega_m}\right)^{\frac{1}{3}}$ si ottiene

$$-3\left(\frac{\Omega_v}{4\Omega_m}\right)^{\frac{1}{3}} + 1 - \frac{1}{\Omega_m} = 0 \qquad (5.27)$$

da cui esplicitando Ω_v si ottiene proprio la (5.25).

Bibliografia

[1] A. Liddle, An Introduction to Modern Cosmology, University of Sussex: Wiley, 2003. cap 2.

[2] S. Weinberg, Cosmology, Austin: Oxford, 2008. cap 1.

[3] V. Barone, Relatività, Torino: Bollati Boringhieri, 2004. cap 3.

[4] A. Liddle, An Introduction to Modern Cosmology, University of Sussex: Willey, 2003. cap 1.

[5] A. Bettini, Elettromagnetismo, Padova: DECIBEL, 2000. cap1 con riadattamento per la gravità.

[6] T.F. Jordan, American Journal of Physics 73, 653 (2005), sez 2.

[7] A. Liddle, An Introduction to Modern Cosmology, University of Sussex: Wiley, 2003. cap 3.

[8] A. Liddle, An Introduction to Modern Cosmology, University of Sussex: Wiley, 2003. Advanced Topic 1.

[9] A. Bettini, Meccanica e Termodinamica, Padova: DECIBEL, 1995. cap 10.

[10] T.F. Jordan, American Journal of Physics 73, 653 (2005), sez 4.

[11] T.F. Jordan, American Journal of Physics 73, 653 (2005), Appendix A.

[12] T.F. Jordan, American Journal of Physics 73, 653 (2005), Appendix B.

[13] A. Liddle, An Introduction to Modern Cosmology, University of Sussex: Wiley, 2003. cap 7.

[14] T.F. Jordan, American Journal of Physics 73, 653 (2005), sez 5.

[15] A. Liddle, An Introduction to Modern Cosmology, University of Sussex: Wiley, 2003. cap 6.

[16] T.F. Jordan, American Journal of Physics 73, 653 (2005), sez 6.

[17] T.F. Jordan, American Journal of Physics 73, 653 (2005), sez 8.