Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI FISICA E ASTRONOMIA
Corso di Laurea Triennale in Fisica

Tesi di laurea

Interpretazioni della meccanica quantistica con particolare riferimento alla teoria di de Broglie-Bohm

Relatore:
Prof. **Giulio Peruzzi**

Laureando:
Federico Comparsi

Anno accademico
2013/2014

"Vorrei un attimo fermarmi a questo punto e fare una osservazione. Il fatto che l'elettrodinamica possa essere scritta in così tanti modi, le equazioni differenziali di Maxwell, vari principi di minimo con i campi, principi di minimo senza campi, tutti modi di tipo diverso, era qualcosa che sapevo, ma che non ho mai capito. Mi è sempre sembrato strano che le leggi fondamentali della fisica, una volta scoperte, possano apparire in così tante diverse forme che a prima vista non sembrano identiche, ma che con un po' di gioco matematico si riesca a mostrarne le relazioni. Un esempio di questo è l'equazione di Schrödinger e la formulazione di Heisenberg della meccanica quantistica. Non so perché sia così, rimane un mistero, ma era qualcosa che avevo imparato dall'esperienza. C'è sempre un altro modo di dire la stessa cosa che non assomiglia affatto al modo in cui l'hai detta prima. Di questo fatto non conosco la ragione. Penso sia in qualche modo una rappresentazione della semplicità della natura. Una cosa come la legge dell'inverso del quadrato è proprio giusto quella che deve essere rappresentata dalla soluzione dell'equazione di Poisson, che per questo è un modo assai diverso di dire la stessa cosa che non assomiglia affatto al modo in cui l'hai detta prima. Non so cosa significhi il fatto che la natura scelga queste forme curiose, ma forse questo è un modo per definire la semplicità. Forse una cosa è semplice se si può descriverla pienamente in molti modi diversi senza sapere immediatamente che si sta descrivendo la stessa cosa."

———Richard P. Feynman———

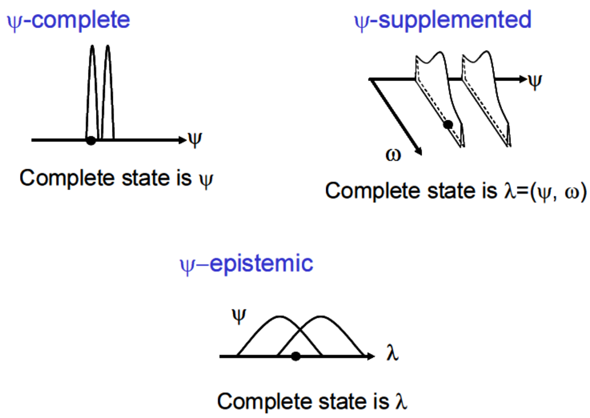
Indice

1 Introduzione

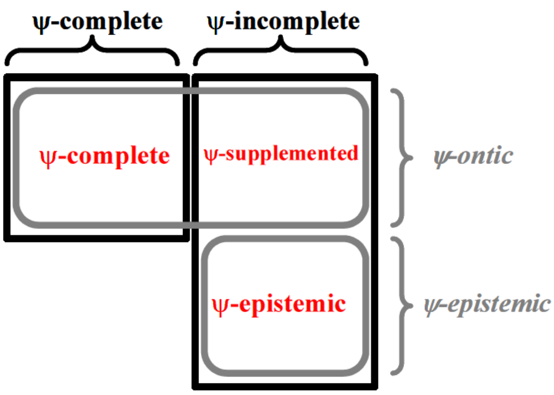
Ogni teoria è la somma di un formalismo più un'interpretazione. Dunque non può esistere teoria senza interpretazione, poiché in tal caso il formalismo sarebbe privo di significato fisico. È infatti l'interpretazione che crea la corrispondenza tra i simboli matematici del formalismo e la realtà. L'interpretazione può essere più o meno precisa, e il fisico in genere se ne disinteressa, poiché per la maggior parte degli scopi tecnici l'esatta interpretazione di una teoria, quand'anche esistesse, non è necessaria. Ma se desideriamo che la scienza sia qualcosa di più che pura tecnica, e che esprima qualcosa di oggettivo del mondo reale che ci circonda, ecco che diviene necessario occuparsi di essa. E come sostenuto da van Fraassen, ogni volta che scopriamo che un'interpretazione è insostenibile, comunque raggiungiamo una migliore comprensione della teoria e quindi della realtà. Quindi le interpretazioni di una teoria non solo possono aiutare ad estendere la teoria stessa e a risolverne i problemi concettuali, ma ci aiutano anche ad avere una comprensione maggiore. Vi sono alcune interpretazioni della meccanica quantistica di carattere più metafisico e stravagante, come l'interpretazione a "molti mondi" di Everett o la "coscienza causa del collasso" di von Neumann e Wigner, ed interpretazioni più fisiche e concrete, di cui vediamo qualche esempio. Vi è l'interpretazione statistica [37] che è un'interpretazione minimalista, ovvero che fa uso del minor numero di elementi da associare al formalismo matematico. Questa afferma che la funzione d'onda non è una descrizione completa di sistema individuale, ad esempio una singola particella, ma è un ente matematico di natura statistica, che descrive un insieme di particelle preparate in modo identico. Poi vi è l'interpretazione transazionale di Cramer [44], basata sulla teoria dell'assorbitore-emettitore di Wheeler-Feynman, che descrive le interazioni quantistiche in termini di onde stazionarie prodotte da onde ritardate e anticipate. Un approccio alternativo è quello della teoria delle "riduzioni spontanee" (o "teoria oggettiva del collasso") di Ghirardi, Rimini e Weber, chiamata per questo teoria GRW [49] [59]. L'idea alla base di questa teoria è quella di introdurre dei termini non lineari e stocastici nell'equazione di Schrödinger, ovvero nell'evoluzione temporale della funzione d'onda, che hanno il ruolo di farla collassare spontaneamente, dopo un certo tempo di vita caratteristico. Il processo

di localizzazione avviene in tempi casualmente distribuiti con una frequenza media $\nu = 10^{-16}$ s^{-1}; le localizzazioni, pur avvenendo continuamente, sono tanto più efficaci quanto più numerosi sono i costituenti elementari del sistema. Un ultimo esempio, che è quello su cui si concentrerà questo lavoro di tesi, sono le teorie a variabili nascoste, come la meccanica stocastica, l'interpretazione di de Broglie-Bohm e l'interpretazione idrodinamica di Madelung.
Un'interpretazione alternativa della meccanica quantistica, per essere consistente, deve avere le stesse previsioni sperimentali e un formalismo matematico equivalente e coerente. Vi sono differenti formulazioni della meccanica quantistica, ad esempio la meccanica delle matrici di Heisenberg, la meccanica ondulatoria di Schrödinger, la formulazione tramite integrale sui cammini di Feynman, la formulazione nello spazio delle fasi di Wigner, la formulazione tramite matrice densità e la formulazione tramite equazioni di Hamilton-Jacobi generalizzate [36]. Ogni formulazione può avere interpretazioni fisiche differenti, a seconda del significato fisico attribuito ai vari elementi del formalismo e a seconda dei diversi postulati del modello. Il fatto che in meccanica quantistica esistano alcune formulazioni equivalenti non è sorprendente, spesso in fisica vi sono formalismi differenti utilizzabili per descrivere gli stessi fenomeni. Un'interpretazione alternativa di una teoria è tale solo all'interno dell'ambito di validità della teoria stessa; oltre quest'ambito essa diviene un'estensione.
Il dibattito sulle interpretazioni e sui fondamenti della meccanica quantistica è incentrato principalmente sul significato da attribuire alla funzione d'onda e sulla questione di stabilire se essa sia o meno una descrizione completa del sistema fisico. Le varie teorie ed interpretazioni sviluppate devono assumere una posizione concettuale ben precisa su questi aspetti. È auspicabile che una teoria fisica sia in grado descrivere in modo preciso ed oggettivo i fenomeni naturali, risultando coerente sia dal punto di vista matematico che dal punto di vista concettuale, evitando quindi che dai vari postulati insorgano delle contraddizioni o dei paradossi. Il problema maggiore che dovrebbe essere risolto in questi contesti è il cosiddetto "problema della misura", che in seguito verrà analizzato in dettaglio.
Secondo la classificazione di Harrigan e Spekkens [40] i modelli ψ-ontici sono quelli per i quali ogni stato fisico completo (stato ontico) è

consistente solo con uno stato quantistico puro. In un modello ψ-ontico distinti stati quantistici corrispondono a disgiunte distribuzioni di probabilità sullo spazio degli stati ontici; tipicamente in questi modelli la funzione d'onda rappresenta un ente fisico reale. Invece in un modello ψ-epistemico esistono stati ontici che sono consistenti con più di uno stato quantistico puro. In altre parole esistono distinti stati quantistici che corrispondono a distribuzioni di probabilità sugli stati ontici che si sovrappongono. In questi modelli invece la funzione d'onda è solo uno strumento matematico che codifica l'informazione parziale che l'osservatore ha sul sistema.



In un modello ψ-completo la funzione d'onda è una descrizione completa del sistema quantistico: non esiste una realtà più profonda e non è necessario specificare parametri addizionali per descrivere esaurientemente il comportamento fisico del sistema, ovvero quello osservato sperimentalmente. In un modello ψ-incompleto invece la funzione d'onda non è una descrizione completa del sistema: vi è una "realtà" sottostante più profonda; la meccanica quantistica sarebbe una teoria statistica su questi stati ontici sottostanti e sconosciuti (in analogia con il teorema di Liouville in meccanica statistica), ovvero essa produrrebbe solo valori medi di quantità misurate, come la termodinamica. Ovviamente se un modello non è ψ-completo allora è necessariamente ψ-incompleto e se un modello non è ψ-ontico allora è necessariamente ψ-epistemico. Discende direttamente dalle definizioni che non possono esistere modelli che siano sia ψ-completi che ψ-epistemici, in quanto sarebbe una contraddizione. Dunque un modello ψ-completo è necessariamente ψ-ontico e un modello ψ-epistemico è necessariamente ψ-incompleto. L'interpretazione di de Broglie-Bohm è un modello ψ-supplementato: per avere una descrizione completa della realtà è necessario supplementare lo stato quantistico con variabili addizionali. Queste variabili possono essere sia esplicite che nascoste e specificano nel modo più completo ed esauriente consentito dal formalismo lo stato fisico del sistema. Il termine "nascoste" deriva dal fatto che il loro valore è in genere sconosciuto a chi conosce lo stato quantistico, ovvero all'osservatore. Questo fatto non è così strano se si pensa che l'osservatore ha dei limiti di carattere epistemico nelle misure che compie e di predicibilità e controllo di tutte le variabili dinamiche del sistema, che spesso è molto complesso dato che racchiude l'osservatore stesso. Infatti l'interazione del sistema con l'ambiente e con l'apparato di misura può risultare determinante nel processo che conduce al risultato della misura. Dunque, in questo caso, affermare che qualcosa non esiste non è logicamente equivalente a giustificare il fatto che questa cosa non risulti misurabile o controllabile dall'osservatore. Per specificare quindi lo stato ontico completo del sistema è necessario specificare sia ψ che le variabili nascoste λ_i.



L'apparato di misura è comunque un sistema fisico e in linea di principio dovrebbe essere descritto da una corrispettiva funzione d'onda che soddisfa un'equazione deterministica. In una teoria soddisfacente della misura si vorrebbe poter includere nell'analisi le correlazioni tra il sistema quantistico e l'apparato di misura, in modo tale da riuscire a spiegare il motivo per cui emerge il principio di indeterminazione e la regola di Born, attraverso una sorta di meccanica statistica del processo di amplificazione. Infatti senza dubbio l'incertezza deriva dalla necessità di amplificare gli effetti di un processo quantistico ad un livello tale da poter essere osservato su un apparato di misura macroscopico, per il quale sembra che le leggi della meccanica classica siano una ottima approssimazione. Infatti è legittimo aspettarsi che le probabilità emergano da una teoria deterministica a causa di limiti epistemici dell'osservatore, ovvero legati alla incompleta conoscenza delle condizioni iniziali, o comunque a causa di limiti di complessità e computabilità [34] [56].

Una cosa importante da chiarire in questi contesti è il significato che usualmente si attribuisce al termine "realismo". In genere si intende la possibilità di affermare che durante l'evoluzione temporale le osservabili siano possedute oggettivamente dal sistema e che assumano sempre un valore ben preciso, indipendentemente dal fatto che l'osservatore abbia effettuato una misura e quindi lo conosca. Questa proprietà viene chiamata "definitezza controfattuale" (CFD). Generalmente questo implica l'introduzione di "elementi di realtà fisica" all'interno della teoria, a cui non necessariamente si ha sempre accesso sperimentalmente. Per usare il termine coniato da Bell a questi elementi ci si riferisce usualmente col termine "beables", che deriva da "be able" e significa che queste quantità hanno sussistenza, indipendentemente dal fatto che la loro "esistenza" sia effettivamente confermata da una misura.

Nell'interpretazione ortodossa non è possibile assegnare contemporaneamente l'aggettivo "elementi di realtà" agli autovalori di osservabili incompatibili, ovvero a osservabili che non commutano. L'apparato formale stesso della teoria giustifica questa impossibilità, che è sperimentalmente garantita proprio a causa del principio di indeterminazione e del principio di complementarietà.

Se la continuità delle traiettorie e la causalità vengono meno allora non si è più in grado di descrivere o anche solo di pensare a delle ben definite connessioni tra i fenomeni a un dato tempo e quelli ad un tempo immediatamente precedente. Questo punto di vista è implicito nelle conclusioni di Bohr, cioè nel principio di complementarietà, che è il cuore dell'interpretazione di Copenaghen. In altri termini non è lecito affermare che una particella possieda delle definite proprietà finché non venga effettuata una misura. Questo fatto ha portato all'introduzione di elementi antropomorfici e soggettivistici all'interno della teoria quantistica, arrivando in alcune interpretazioni perfino ad assegnare un

ruolo alla coscienza dell'osservatore, che attualmente non ha una definizione scientifica operativa, ma che è trattata come epifenomeno, ovvero come fenomeno emergente dal sostrato fisico.
La teoria di de Broglie-Bohm, su cui sarà incentrata maggiormente la tesi, è in grado di risolvere i problemi concettuali della meccanica quantistica non relativistica ripristinando i concetti di "realismo", oggettivismo, causalità e continuità nei processi fisici elementari.
Nell'interpretazione di de Broglie-Bohm le variabili nascoste sono le posizioni delle particelle e la natura ontica della funzione d'onda è chiara a causa del fatto che essa ha il compito di "guidare" le particelle lungo le loro traiettorie, dunque a differenti ψ corrispondono differenti situazioni fisiche. Quindi lo stato completo del sistema, composto da N particelle, è descritto dalla coppia $(\psi(\vec{x},t),\vec{x}(t))$, dove $\vec{x}(t)$ è un vettore nello spazio delle configurazioni 3N dimensionale che contiene le posizioni delle N particelle nello spazio fisico e $\psi(\vec{x},t)$ è un vettore nello spazio di Hilbert.
Passiamo ora ad analizzare brevemente il percorso storico che ha caratterizzato la nascita dei principali lavori in ambito di fondamenti e interpretazioni della meccanica quantistica.

2 Cenni storici

De Broglie nel 1924 presentò nella sua tesi di dottorato l'idea di associare un'onda ad ogni particella, che la guidasse lungo delle definite traiettorie nello spazio tridimensionale, con lo scopo di spiegare i vari fenomeni quantistici osservati negli esperimenti. Egli svilupperà ulteriormente questa idea, ma in seguito ad una critica di Pauli a cui non saprà rispondere, la abbandonerà. Nel 1925 Heisenberg sviluppò una formulazione della meccanica quantistica, chiamata "meccanica delle matrici" e successivamente Born, Jordan e Dirac approfondiscono il lavoro di Heisenberg fornendo una complessiva trattazione della formulazione.
Nel 1926 Schrödinger trovò un'equazione che governa l'evoluzione temporale delle "onde di fase" di de Broglie, in grado di descrivere sistemi a molti corpi. La sua meccanica delle onde però è differente da quella di de Broglie, in quanto si svolge non in uno spazio 3+1 dimensionale, ma nello spazio delle configurazioni 3N+1 dimensionale, dove N è il numero delle particelle. Inoltre non viene attribuito alcun ruolo alle traiettorie delle particelle, ovvero non vengono forniti dettagli circa la localizzazione della particella durante l'evoluzione temporale delle "onde", fino all'atto della misura. Dopo aver presentato la meccanica ondulatoria descrivendo la quantizzazione come problema agli autovalori, Schrödinger dimostrò l'equivalenza matematica della sua teoria con la meccanica delle matrici, sottolineandone comunque la radicale diversità nei punti di partenza e nei metodi formali.
Successivamente, sempre nel 1926, Born presentò l'interpretazione probabilistica della funzione d'onda.
L'interpretazione di queste formulazioni, che saranno sostenute sperimentalmente e logicamente dal principio di indeterminazione di Heisenberg presentato nel 1927 e dal principio di complementarietà concettualizzato successivamente da Bohr, va sotto il nome di "interpretazione di Copenaghen", che ancora oggi è considerata l'interpretazione "ortodossa" all'interno dell'ambito di prima quantizzazione. Dirac nel 1930 introdusse gli operatori lineari come generalizzazione delle teorie di Heisenberg e Schrödinger e la notazione bra-ket. Von Neumann nel 1932 contribuì a formalizzare i postulati della teoria, introducendo anche una trattazione del processo di misura.

Le relazioni di indeterminazione di Heisenberg, che costituiscono la base del noto principio di complementarietà enunciato da Bohr, saranno al centro del cosiddetto dibattito tra Einstein e Bohr che verterà proprio sui tentativi di Einstein di trovare una violazione alle relazioni di indeterminazione, attraverso degli esperimenti mentali. Infatti, come è stato fatto notare successivamente da Feynman, il principio di indeterminazione "sta a difesa" della meccanica quantistica: se fosse possibile misurare simultaneamente posizione e impulso di una particella con una accuratezza maggiore di quella sancita, la struttura formale della meccanica quantistica crollerebbe. Le successive risposte di Bohr dimostrarono che la teoria è consistente, così Einstein dal 1927 al '35 dedicò i suoi sforzi per cercare di dimostrare che la meccanica quantistica è incompleta. Einstein avrebbe voluto introdurre nella teoria il "realismo" (CFD) e la possibilità di descrivere gli eventi in un preciso quadro spazio-temporale, secondo definite relazioni causali. Questa possibilità non necessariamente si ottiene introducendo il determinismo a livello di leggi fondamentali, di fatto è possibile concepire teorie stocastiche che assumano la CFD.
Tra le prime critiche formali alla meccanica quantistica vi fu il famoso paradosso EPR, formulato da Einstein, Podolski e Rosen nel 1935. [7] Gli autori volevano dimostrare l'incompletezza della meccanica quantistica partendo da tre definizioni basate su concetti fondamentali e ragionevoli: gli elementi di realtà fisica, la completezza di una teoria e la località. Affinché una teoria sia completa ogni elemento di realtà fisica deve avere una controparte nella teoria stessa. Einstein fornisce una condizione sufficiente per stabilire quali siano gli elementi di realtà: se, senza disturbare in alcun modo un sistema, è possibile predire con certezza (cioè con probabilità uguale a 1) il valore di una quantità fisica, allora esiste un elemento di realtà fisica corrispondente a questa quantità (il sistema possiede oggettivamente la relativa proprietà). La condizione di località, motivata dallo spirito della sua interpretazione della relatività, è formulata nel seguente modo: gli elementi di realtà di un sistema fisico non possono essere influenzati istantaneamente a distanza. Assumendo che i sistemi fisici non possano influenzarsi istantaneamente a distanza, ovvero a intervalli di tipo spazio, essi giungono alla conclusione che la meccanica quantistica deve essere una teoria incompleta, in quanto analizzando un sistema di particelle entangled, trovano degli

elementi di realtà che non rientrano nella descrizione formale della teoria. Nello stesso anno di EPR Schrödinger pubblicherà l'articolo in cui espone il famoso paradosso del gatto, analizzando le peculiari situazioni che si possono ideare considerando stati entangled tra sistemi [11].
Nel 1932 von Neumann dimostrò che l'introduzione di variabili nascoste non è compatibile con le previsioni della meccanica quantistica, ovvero che non può esistere una teoria statistica classica che la completi in modo deterministico. Ma questo fu fatto proprio da David Bohm nel 1952 e John Bell, notando l'articolo, si dedicò allo studio della teoria, la quale non solo era un'interpretazione oggettiva, causale e deterministica della meccanica quantistica, ma risolveva in modo semplice il problema della misura ed eliminava la vaga divisione del mondo in "sistemi" da una parte e "apparecchi di misura" o "osservatori" dall'altra. L'aspetto cruciale della teoria di Bohm è il fatto che nell'atto della misura l'apparato disturba il sistema quantistico in modo impredicibile ed incontrollabile, cosicché il principio di indeterminazione è ricavato come una limitazione pratica sulla precisione della misura. Questa limitazione comunque non è inerente alla struttura concettuale della teoria, come nell'interpretazione ortodossa, ma è dovuta semplicemente a limiti dell'osservatore.
Bohm ha precisato che il teorema di von Neumann non si applica alla sua interpretazione: la tipologia di variabili nascoste considerata in essa dipende sia dallo stato dell'apparato di misura che da quello del sistema osservato e quindi va oltre certe assunzioni della dimostrazione. In particolare Bohm mostrò che nelle ipotesi del teorema vi era la non-contestualità delle osservabili. "Contestuale" significa che il risultato della misura dipende non solo dallo stato del sistema, ma anche dalle precise condizioni in cui si trova lo strumento che la effettua; il risultato dipende appunto dal "contesto" in cui si trova il sistema quantistico, quindi anche dalla diversa interazione di esso con l'ambiente. In altre parole il risultato della misura di un'osservabile dipende dal set di osservabili compatibili che si misurano simultaneamente.
Bohm nel 1952 estende la teoria di de Broglie ai sistemi a molti corpi in modo coerente, rispondendo alla critica di Pauli e includendo una teoria soddisfacente della misura.
Nel 1964 Bell [4] ricava delle disuguaglianze partendo da un esperimento mentale di tipo EPR e dimostra che la violazione delle disuguaglianze

non è compatibile con le assunzioni congiunte di località e causalità. In altre parole dimostra che l'assunzione di separabilità non è compatibile con le previsioni statistiche della meccanica quantistica sulla coppia di particelle entangled. In un articolo successivo [5] Bell discute in dettaglio la tipologia di variabili nascoste non compatibili con le previsioni della meccanica quantistica, ovvero le variabili nascoste locali.
Successivamente Aspect et al. hanno dimostrato sperimentalmente una violazione delle disuguaglianze. Il teorema di Bell di per sé non ha a che fare con teorie deterministiche o probabilistiche, ma semplicemente col fatto che nessun modello ψ-supplementato locale può spiegare i fenomeni osservati, cioè i fenomeni descritti dalla meccanica quantistica. Un modello che assuma la CFD per le osservabili deve essere necessariamente non locale e una teoria a variabili nascoste deterministica ovviamente implica l'assunzione CFD.
Il teorema di Kochen-Specker stabilisce l'impossibilità di avere un modello a variabili nascoste non-contestuale. Ovvero non si può assumere che i valori di tutte le osservabili misurate erano già posseduti dal sistema prima della misura, infatti l'interazione con l'apparato o col resto del sistema può aver cambiato i valori in modo impredicibile.
Indagini successive hanno mostrato tramite il ragionamento di EPR e i teoremi Bell-Kochen-Specker (BKS) che la non località della meccanica quantistica può essere dedotta dalla contestualità.
Il fatto che la meccanica quantistica predica una violazione delle disuguaglianze, è in accordo col ragionamento di EPR, il quale dimostra che una teoria ψ-completa, come la meccanica quantistica, non può essere locale. Di fatto EPR non assume CFD, ma deduce il necessario grado di non contestualità della teoria dall'ipotesi di località.
In definitiva qualsiasi modello ψ-ontico deve necessariamente essere non locale e contestuale come la meccanica quantistica stessa, dunque deve essere consistente con i cosiddetti "no-go theorem".

3 Interpretazione ortodossa e interpretazioni alternative

Dopo aver fornito un quadro generale sui fondamenti e le interpretazioni della meccanica quantistica e dopo aver accennato i principali eventi storici che hanno caratterizzato la nascita, gli sviluppi e i problemi relativi alle interpretazioni e ai fondamenti della teoria quantistica, analizziamo ora nel dettaglio i tratti caratteristici dell'interpretazione di Copenaghen e le problematiche derivanti dai suoi postulati. Successivamente analizzeremo nel dettaglio alcuni modelli a variabili nascoste, dedicando particolare attenzione all'interpretazione di Bohm. L'interpretazione idrodinamica di Madelung e la teoria dell'onda pilota di de Broglie possono essere viste di fatto come precorritrici della teoria di Bohm. Mentre la meccanica stocastica e la formulazione di Feynman sono successive, ma hanno delle relazioni interessanti con l'interpretazione di Bohm, delle quali accenneremo nelle sezioni successive.

3.1 L'interpretazione di Copenaghen e il problema della misura

Nell'interpretazione ortodossa si hanno i seguenti assiomi:
1) Vi è una corrispondenza biunivoca tra stati Σ di un sistema quantistico e raggi vettori $|\psi>$ dello spazio di Hilbert H che descrive il sistema: $\Sigma \Leftrightarrow |\psi> \in H$
2) Ogni grandezza fisica A si può rappresentare in meccanica quantistica mediante un operatore lineare $\hat{A}$ autoaggiunto che agisce su H. L'insieme dei valori possibili per il risultato della misura della grandezza A è dato dallo spettro dell'operatore ad essa associato.
3) Sia $|\psi_0>$ il raggio vettore che descrive il sistema all'istante iniziale t_0 e si supponga che tra l'istante t_0 e t non si effettuino misure sul sistema. Allora lo stato all'istante t è descritto dal raggio vettore $|\psi_t>= U(t_0, t)|\psi_{t_0}>$ dove U è un operatore unitario. Ovvero l'evoluzione temporale del vettore di stato $|\psi_t>$ è governata dall'equazione di Schrödinger.
4) Quando la quantità fisica A è misurata su di un sistema nello stato normalizzato $|\psi>$, la probabilità P_{a_n} di ottenere l'autovalore a_n del

corrispondente osservabile A è: $P_{a_n} = \sum_{i=1}^{g_n} | < u_n^i | \psi > |^2$ dove g_n è il grado di degenerazione di a_n e u_n^i $(i = 1, 2, ..g_n)$ è un sistema di vettori che forma una base nel sottospazio H_n delle autofunzioni associate all'autovalore a_n di $\hat{A}$.
5) Se la misura della quantità fisica A su di un sistema nello stato $|\psi_{t_0} >$ dà il risultato a_n, lo stato del sistema immediatamente dopo la misura è la proiezione normalizzata $|\psi_{a_n} >$ sul sottospazio delle autofunzioni associate ad a_n. Per ogni osservabile A esistono misure ideali di prima specie in grado di far passare lo stato del sistema prima della misura in un autostato relativo all'autovalore trovato. In conclusione le misure ideali di prima specie agiscono come dei filtri perfetti.
In meccanica quantistica il processo di misura consiste sempre nell'interazione del sistema quantistico microscopico e lo strumento di misura, che invece è un sistema macroscopico, per il quale le leggi della meccanica classica sono un'ottima approssimazione. Voler descrivere in dettaglio tale interazione con le leggi della meccanica quantistica è difficile, sia dal punto di vista pratico (a causa della complessità del sistema macroscopico rappresentato dall'apparato di misura) che dal punto di vista concettuale. Il problema concettuale maggiore consiste nel fatto che nell'atto della misura apparentemente vi è una transizione da uno stato puro del sistema totale (sistema quantistico + apparato di misura) a una miscela statistica e descrivere tale transizione non è agevole.
Un'altra fonte di difficoltà della teoria della misura nella meccanica quantistica ortodossa deriva dal postulato della "riduzione del pacchetto", introdotto per giustificare il fatto che durante una misura si ottiene sempre un solo autovalore tra quelli possibili, ovvero un risultato ben definito.
Il postulato 1), come fatto notare da Nelson, è di fatto una richiesta non necessaria per una teoria fisica, mentre il postulato 5), cercando di giustificare l'evidente realismo macroscopico, crea ulteriori problemi concettuali, affidando un ruolo privilegiato all'osservatore e mettendo in evidenza la sostanziale differenza tra strumento di misura, soggetto alle leggi della meccanica classica, e sistema quantistico, che evolve secondo l'equazione di Schrödinger. Tuttavia, di fatto, non si ha una chiara visualizzazione di dove sia la linea di demarcazione tra mondo classico e quantistico.

La trattazione usuale del processo di misura, che viene presentata nei libri di testo, in realtà aggira il problema di descrivere in dettaglio l'interazione "sistema-apparato di misura" e si limita a prendere in considerazione una classe idealizzata di processi di misura per i quali si può dire a priori tutto quello che serve, senza entrare nel merito dell'interazione sistema-apparato che avviene nell'atto della misura.
Nelle trattazioni usuali della meccanica classica si considerano di solito misure idealizzate, atte a determinare le condizioni iniziali del sistema o a misurare una grandezza a un dato istante: si assume infatti che le misure siano a) prive di errore sperimentale; b) istantanee; c) tali da non perturbare lo stato del sistema o la grandezza da misurare.
Naturalmente le misure reali non sono esenti da errori, durano un tempo finito e disturbano il sistema in esame, ma le assunzioni a), b) e c) sono giustificate perché in fisica classica non c'è alcuna ragione concettuale per pensare che l'errore sperimentale, la durata della misura e il disturbo di questa sul sistema non possano essere resi piccoli a piacere. Per la stessa ragione anche in meccanica quantistica si può assumere che le misure siano esenti da errori ed istantanee, ma, a causa delle relazioni di indeterminazione, non è lecito assumere che il disturbo sul sistema dovuto all'interazione sistema-apparato di misura possa essere piccolo a piacere, dunque l'assunzione c) va abbandonata. Una misura si dice di prima specie se, supponendo di aver effettuato all'istante t una misura e di aver trovato un certo autovalore, ripetendo la stessa misura ad un istante immediatamente successivo $t + dt$, si ritrova con certezza lo stesso risultato. È importante la precisazione "immediatamente dopo" perché se si aspetta del tempo a fare la seconda misura lo stato può essersi modificato per evoluzione temporale. Una sottoclasse di queste sono le misure ideali di prima specie che sono quelle misure in cui il disturbo sul sistema è per così dire, il più piccolo possibile.
L'effetto di una misura di prima specie di A, fatta all'istante t_0, col risultato a_n, è quello di far "saltare" il sistema dallo stato $|\psi_{t_0} >$ in cui si trova immediatamente prima della misura, allo stato $|\psi_{a_n} > \in H_{a_n}$ immediatamente dopo. Questo processo viene chiamato "collasso del vettore di stato" ed è necessario per giustificare l'emergenza del mondo classico nell'interpretazione ortodossa, ovvero per giustificare come mai in una misura si ottiene sempre un valore definito delle osservabili. Se non venisse introdotto, si avrebbero situazioni peculiari, come quella

espressa nel famoso paradosso del “gatto di Schrödinger”, in cui, supponendo che nell'atto della misura si crei una correlazione tra apparato di misura P e sistema quantistico S (ovvero che si crei uno stato entangled tra i sottosistemi) il sistema totale $(S+P)$ sarebbe in uno stato puro. In particolare i sottosistemi P e S sarebbero in stati misti impropri, in netta contraddizione con ciò che si osserva a livello macroscopico per il sistema P, per il quale valgono le leggi della meccanica classica.
Se H_{a_n} è non degenere (ossia consiste in un solo raggio vettore) $|\psi_{a_n}>$ è completamente determinato. Ma in generale, se indichiamo con $|a_n, r>$ una base completa ortonormalizzata di H_{a_n}, lo stato subito dopo la misura sarà descritto dal vettore $|\psi_{a_n}>=\sum_{i=1}^{n} C_r|a_n, r>$ e sui coefficienti C_r non si può dire nulla a priori. Infatti, se in base alla completezza dell'operatore autoaggiunto $\hat{A}$, sviluppiamo lo stato $|\psi_{t_0}>$ in autostati di $\hat{A}$:
$|\psi_{t_0}>=\sum_{a_n\in Sp(A)}|\psi_{a_n}>$ con $|\psi_{a_n}>=|a_n, r><a_n, r|\psi_{t_0}>$
la misura, seppur di prima specie, può aver deformato o sfasato i coefficienti $<a_n, r|\psi_{t_0}>$ in modo incontrollabile.
Tuttavia non c'è alcuna ragione concettuale per pensare che questa deformazione o questo sfasamento non possano essere piccoli a piacere. Misure che non sono di prima specie si dicono di seconda specie. Un esempio di misura di prima specie è la misura della posizione di una particella mediante un microscopio. Affinché una particella sia localizzata bisogna che un fotone collidente con essa sia deviato nell'oculare di un microscopio. Dopo un tempo infinitesimo dt, anche se l'impulso della particella nell'urto col fotone è variato di un quantità finita $\Delta\vec{p}$ la posizione varia di $\frac{\Delta\vec{p}}{m}dt$, cioè praticamente non varia. Un esempio di misura di seconda specie è la misura dell'impulso di una particella carica mediante un campo magnetico: la direzione dell'impulso viene modificata dalla misura.
L'effetto delle misure ideali di prima specie è quello di condurre alla “riduzione del pacchetto”. Consideriamo la grandezza “posizione” di un particella (data dagli operatori autoaggiunti $\hat{X}$, $\hat{Y}$, $\hat{Z}$) e supponiamo che in rappresentazione $\vec{x}$ lo stato del sistema all'istante t_0 sia descritto dalla funzione d'onda $\psi(\vec{x})$. Supponiamo di eseguire all'istante t_0 una misura ideale di prima specie di posizione atta a stabilire se la particella si trova o meno in un volume ΔV. Si noti che la funzione d'onda $\psi(\vec{x})$ può essere

sensibilmente diversa da zero anche in regioni lontane da ΔV. Se la misura ha dato un risultato positivo, cioè se la particella è stata trovata nel volume considerato, in base al postulato 5) l'atto di misura ha fatto collassare la funzione d'onda annullandola fuori da ΔV. L'aspetto paradossale sta nel fatto che questa misura, localizzata in ΔV, ha prodotto effetti anche in regioni lontane. Se invece la misura non ha trovato la particella, egualmente la misura ha prodotto un effetto, perché ha annullato la funzione d'onda in ΔV. In questo caso la cosa è forse anche più paradossale, perché l'apparato di misura ha prodotto l'effetto anche senza interagire con la particella, che effettivamente "non c'era".
In questo contesto è bene far notare che se non si attribuisse un aspetto "reale" alla funzione d'onda, ovvero se si adottasse un'interpretazione ψ-epistemica, allora il fatto che questa "informazione" si comporti ed evolva esattamente secondo le leggi della meccanica quantistica non avrebbe una giustificazione fisica ben definita. Tuttavia la non località implicita nel collasso della funzione d'onda non è utilizzabile per trasferire informazione a velocità superiore a quella della luce. Si ha un'analogia nell'elettrodinamica dove, nella gauge di Coulomb, il potenziale elettrico in un punto dello spazio cambia istantaneamente quando ogni altra particella si muove. Tuttavia i potenziali del campo elettromagnetico non sono propriamente misurabili e sono definiti a meno di una trasformazione di gauge.
Schrödinger ha affermato che i tratti peculiari della meccanica quantistica sono due: il principio di sovrapposizione e l'entanglement.
Uno stato quantistico può trovarsi in uno stato puro, ovvero in un autostato o in una sovrapposizione di autostati, oppure in uno stato misto, detto anche miscela statistica. In uno stato puro gli esiti stocastici delle misure non sono dovute all'ignoranza dello sperimentatore sullo stato reale del sistema, ma sono dovute a ragioni intrinseche e legate al fatto che si sta misurando un'osservabile incompatibile con quella della quale il sistema si trova in un autostato.
Negli stati misti invece la presenza della probabilità negli esiti della misura è dovuta a ragioni epistemiche. L'evoluzione temporale degli stati misti si ottiene con la formulazione tramite matrice densità.
Si possono considerare però degli stati peculiari, chiamati stati entangled, in cui la funzione d'onda associata ad un sistema fisico composto da più sottosistemi non è fattorizzabile.

Consideriamo come esempio di stato entangled un sistema composto da due particelle A e B di spin $\frac{1}{2}$ in uno stato di singoletto $S_{tot} = 0$, che viaggiano in direzioni opposte. Questo stato si può ottenere supponendo che le due particelle siano i prodotti di decadimento di una particella con momento angolare totale nullo. Questo esempio è di fatto quello considerato nell'esperimento mentale EPR, riproposto da Bohm in una forma concettualmente analoga, facilmente sperimentabile e di più facile comprensione, in quanto tratta osservabili a spettro discreto. Prendiamo la componente lungo l'asse z dello spin; esso in realtà non è definito per i singoli elettroni, dato che il sistema totale è descritto dallo stato puro entangled:

$$|\psi>_{A+B}= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|\psi>_A^{up} |\psi>_B^{down} - |\psi>_A^{down} |\psi>_B^{up} \right] \tag{1}$$

In questo caso ogni singolo sottosistema non si trova in una sovrapposizione di stati, ma in uno stato misto. La peculiarità di questo stato misto è che non è interpretabile classicamente, ovvero non si può affermare che prima della misura le particelle hanno uno stato definito e l'osservatore per limiti epistemici non sa qual è. Concettualmente, secondo il formalismo della meccanica quantistica, questa affermazione non è corretta. La misura dello spin della particella A lungo l'asse z fa collassare la funzione d'onda $|\psi>_{A+B}$ in uno dei seguenti stati: $|\psi>_A^{up} |\psi>_B^{down}$ oppure $|\psi>_A^{down} |\psi>_B^{up}$. Quindi la misura effettuata su A crea un elemento di realtà in B (secondo la definizione di EPR) che prima della misura di fatto non esisteva.
Schrödinger nel 1935 ha considerato uno stato di questo genere per formulare il famoso paradosso del gatto, in cui uno dei due sottosistemi entangled è macroscopico e quindi deve possedere delle ben definite proprietà ad ogni istante, ma questo risulta incompatibile col fatto dedotto precedentemente. Il paradosso del gatto di Schrödinger in effetti mette in evidenza il contrasto tra le leggi della meccanica quantistiche e quelle della meccanica classica.
Quello che è strano è che certe correlazioni che si producono in ambito quantistico non sono spiegabili localmente, cioè senza ricorrere ad "azioni a distanza". Schrödinger sottolinea che sistemi "entangled" implicano un substrato di "non-separabilità" nella descrizione quantistica. Se si sostiene la completezza contro EPR non si può fare a meno, in linea di

principio, di ammettere la non-separabilità: sistemi che hanno interagito in un certo modo nel passato risultano entangled e il recupero dell'individualità richiede il ricorso al collasso della funzione d'onda.
Nel collasso della funzione d'onda a seguito del processo di misura, si ha qualcosa di intrinsecamente stocastico ed irreversibile, mentre l'evoluzione della funzione d'onda secondo l'equazione di Schrödinger è perfettamente causale, reversibile e deterministica. Dunque si ha un contrasto tra la linearità dell'equazione di Schrödinger e la non linearità richiesta per un eventuale collasso.
Il limite classico di solito si ottiene quando gli effetti di interferenza spariscono, ovvero quando gli effetti quantistici diventano trascurabili; questo limite è concettualmente chiaro nelle interpretazioni che tratteremo in seguito. All'interno dell'interpretazione ortodossa vi sono alcuni tentativi di giustificare l'emergenza del mondo classico anche attraverso la decoerenza ambientale. Nel processo di misura si crea una correlazione (entanglement) tra il sistema quantistico e l'apparato. Allo stesso modo, considerando che un sistema isolato di fatto non esiste e che ogni sistema interagisce continuamente con l'ambiente, ciascuno stato del sistema quantistico risulta entangled con qualche stato sconosciuto dell'ambiente. Tuttavia non è chiaro come queste correlazioni spieghino l'emergenza del mondo classico, in quanto, col passare del tempo, il sistema quantistico tende a diventare entangled con un numero sempre maggiore di altri sistemi dell'universo. Sembrerebbe che ogni cosa diventi sempre meno simile al mondo macroscopico che conosciamo, con oggetti che non hanno più una posizione definita, poiché essa dipende da moltissime altre cose che avvengono altrove nell'universo. Dunque la decoerenza non sembra essere in grado di risolvere coerentemente il problema della misura [47] [53], ovvero di spiegare concettualmente e formalmente l'emergenza continua del mondo classico da quello quantistico, senza ulteriori postulati sull'evoluzione temporale dello stato. Per risolvere il problema della misura sembra sia necessario introdurre un processo di localizzazione delle particelle durante l'evoluzione temporale, oppure assumere che le posizioni delle particelle siano variabili nascoste non contestuali.

3.2 L'interpretazione idrodinamica di Madelung

Nel 1927 Madelung [16] dimostrò che l'equazione di Schrödinger può essere espressa in forma idrodinamica. Così facendo il campo di Schrödinger diventa l'espressione matematica di un "fluido" con densità proporzionale al modulo quadro dell'ampiezza e con velocità del flusso proporzionale al gradiente della fase del campo. Nell'interpretazione idrodinamica il tensore di pressione non locale ha la stessa forma matematica del potenziale quantistico ed ha le stesse proprietà. Tuttavia, mentre nella teoria di Bohm le linee di flusso rappresentano le traiettorie fisiche delle particelle, nell'interpretazione di Madelung le equazioni sono quelle di Eulero per un fluido ideale, che descrivono la caratteristiche medie della porzione di fluido. In effetti le equazioni di Madelung sono analoghe alle equazioni che descrivono un superfluido [8]. Partendo dall'equazione di Schrödinger dipendente dal tempo:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + U\Psi \tag{2}$$

dove U è l'energia potenziale. Scrivendo la funzione d'onda in forma polare $\Psi = \sqrt{\rho}e^{i\theta}$ con ρ e θ funzioni reali di $\vec{x} = (x, y, z)$ e t (in particolare con θ dipendente linearmente dal tempo), sostituendo nell'equazione e separando parte reale e parte immaginaria si ottengono le seguenti due equazioni:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\nabla\cdot(\rho\vec{v}) \tag{3}$$

$$\hbar\frac{\partial\theta}{\partial t} + \frac{m}{2}\vec{v}^2 + U - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\nabla^2\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} = 0 \tag{4}$$

dove $\vec{v} = \frac{\hbar}{m}\nabla\theta$ e quindi $\frac{\hbar\theta}{m}$ viene identificato col potenziale delle velocità del fluido, mentre ρ è la densità del fluido. La (3) quindi è l'equazione di continuità per il fluido. L'ultimo termine nella (4) rappresenta una sorta di energia di compressione interna al fluido, che ha una strana dipendenza dalla densità. Poiché il fluido è irrotazionale, $\nabla\times\vec{v} = 0$, prendendo il gradiente della (4) si ha:

$$m\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla(\vec{v}^2)\right) = m\frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla U + \nabla\left[\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\nabla^2\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}\right] \tag{5}$$

che è l'equazione del moto di un fluido irrotazionale e a viscosità nulla, che si muove sotto l'azione di forze conservative, dove l'ultimo termine rappresenta una sorta di forza quantistica interna al fluido; in effetti il termine tra parentesi può essere interpretato come un tensore di pressione non locale del "fluido quantistico". Nel caso in cui $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ si ottiene il caso stazionario, corrispondente all'equazione d'onda stazionaria:

$$\Delta\Psi_0 + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\Psi_0 = 0 \tag{6}$$

dove E è l'energia del sistema e $\Psi = \Psi_0 e^{\frac{iEt}{\hbar}}$
Affinché l'interpretazione sia consistente, per il campo delle velocità del fluido bisogna imporre questa condizione di quantizzazione, la quale rispecchia il fatto che la funzione d'onda deve essere monodroma:

$$\oint_\gamma \nabla\theta \cdot d\vec{\gamma} = 2\pi n \tag{7}$$

dove n è un numero intero e γ è un circuito chiuso. Si può osservare che se la condizione di quantizzazione vale ad un dato istante, sarà mantenuta per tutta l'evoluzione temporale, in modo analogo a quanto avviene in fluidodinamica per il teorema di Kelvin.
Successivamente sono state fatte delle estensioni di questo modello, includendo la turbolenza nel fluido [21]. In questo contesto il modello di Madelung appare come una sorta di approssimazione, dove le linee di flusso corrispondono al moto medio del fluido turbolento. Altre estensioni sono state fatte per includere la "vorticità", collegata in questo contesto allo spin delle particelle, che quindi viene trattato come una proprietà del fluido e non della particella. In questo caso più generale si avrebbe:

$$\vec{v} = \frac{\hbar}{m}\nabla\theta' + \nabla \times \vec{A} \tag{8}$$

dove le relazioni $\rho = |\psi|^2$ e $\vec{v} = \frac{\hbar}{m}\nabla\theta$ varrebbero solo in media. $\vec{A}$ sarebbe un campo vettoriale proporzionale che descrive lo spin della particella e il cui rotore è diverso da zero. Quindi si avrebbe:
$\langle \nabla \times \vec{A} \rangle = 0$ e $\langle \nabla\theta' \rangle = \nabla\theta$.

Si può mostrare infatti che la densità di probabilità $P(\vec{x}, t) = |\Psi(\vec{x}, t)|^2$ tende alla densità del fluido ρ in presenza di fluttuazioni irregolari e stocastiche nel moto del fluido [18]. Questo fatto sarebbe una generalizzazione del teorema che dimostra il rilassamento verso l'equilibrio per un generico processo di Markov. Questo mostra inoltre che l'equazione di Schrödinger non contempla queste fluttuazioni. Tuttavia, questa interpretazione "idrodinamica" presenta alcune difficoltà, soprattutto per i sistemi a molti corpi. Ad esempio non è ben chiaro come interpretare fisicamente la densità del fluido e il fatto che l'interazione tra le particelle dipenda dalla distribuzione totale. Inoltre la critica di Wallstrom [17] sembra essere decisiva: le equazioni (3), (4) e le loro analoghe in dimensione superiore non risultano equivalenti all'equazione di Schrödinger. Di solito la funzione d'onda quantistica è un campo complesso continuo e monodromo, che possiede tipicamente dei nodi ($\psi = 0$), in prossimità dei quali la fase S è polidroma, con valori che differiscono per multipli interi di $2\pi\hbar$. Se si permette a S in (3) e (4) di essere polidroma, non vi è alcun motivo per cui i valori consentiti dovrebbero differire per multipli interi di $2\pi\hbar$ e in generale ψ non sarà monodroma. D'altra parte, se si rende S monodroma, si escludono alcune funzioni d'onda, come quelle a momento angolare diverso da zero (questo problema non si pone nella teoria dell'onda pilota, presentata in seguito, in quanto la funzione d'onda è considerata come entità fondamentale).

3.3 La teoria dell'onda pilota di de Broglie

Nel 1927 al congresso di Solvay Louis de Broglie propose una teoria in grado di unificare in un quadro concettuale coerente la duplice natura corpuscolare e ondulatoria osservata negli esperimenti. L'idea era considerare come fisicamente reali sia le particelle che le onde. Nella sua teoria le particelle sono considerate come puntiformi e vengono "guidate" dalle onde lungo delle traiettorie normali alle superfici a fase costante; per questo la teoria fu chiamata "dell'onda pilota". Inizialmente il nome era "della doppia soluzione", in quanto vi erano essenzialmente due soluzioni, ψ e ϕ, legate dalla formula $\psi = C\phi$, dove C è una costante di normalizzazione. Le due soluzioni hanno i seguenti ruoli:
• $|\psi|^2$ rappresenta una densità di probabilità per la posizione della particella, dunque ψ rappresenta una funzione normalizzata che racchiude le informazioni statistiche sulla particella;
• ϕ è un campo fisico che guida la particella (che è una singolarità del campo) lungo definite traiettorie.
La correttezza delle informazioni statistiche di ψ è assicurata dalla coincidenza di fase tra le due soluzioni: le due funzioni hanno ampiezza diversa, ma hanno la stessa fase. Il vantaggio di concepire il corpuscolo così incorporato in un campo ondulatorio e solidale alla sua evoluzione, consiste nella possibilità di recuperare una localizzazione per la particella, tenendo comunque conto dell'esistenza di fenomeni di diffrazione e interferenza in grado di influire sulla traiettoria degli oggetti microscopici. Secondo questa legge il corpuscolo, considerato come un piccolo "orologio", si sposta restando sempre in fase con l'onda ϕ che lo trasporta: esso va nella direzione in cui la fase cresce più velocemente, con una velocità proporzionale a questo incremento.
Partendo dalla relazione di Einstein $E = h\nu$, de Broglie associa ad ogni particella un fenomeno oscillatorio interno di frequenza $\nu = \frac{E}{h}$. Un osservatore per cui la particella si muove a velocità v_g vedrà questa frequenza più bassa in conseguenza della trasformazione temporale di Lorentz e osserverà costantemente il fenomeno oscillatorio interno in fase con un'onda di frequenza $\nu = \frac{E}{h}$ e velocità $v_f = \frac{c^2}{v_g}$. Poiché questa velocità di fase è maggiore di c, essa non può trasportare informazione. Si ha quindi che la lunghezza d'onda associata alla particella è $\lambda = \frac{h}{p}$. L'onda ha una grande importanza nel determinare il moto della

particella: la particella segue sempre il raggio della propria onda di fase.
L'analogia tra il principio di Fermat e il principio di minima azione di Maupertuis permise a de Broglie di supporre che esistesse una proporzionalità diretta tra l'azione della particella (ovvero la funzione S di Jacobi) e la fase dell'onda, con costante di proporzionalità $\hbar$.
L'onda piana associata alla particella si può scrivere come $\psi(\vec{x},t) = Ae^{i\frac{S(\vec{x},t)}{\hbar}} = Ae^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$, dove A è l'ampiezza. Prendendo il gradiente si ha $\frac{\nabla\psi}{\psi} = i\vec{k} + \frac{\nabla A}{A}$ ed infine si ricava l'equazione di guida, dove ψ è l'onda pilota. Assumendo $\vec{p} = \hbar\vec{k} = m\vec{v}$ (ovvero nel caso non relativistico) si ha:

$$\vec{v} = \frac{\vec{p}}{m} = \frac{\hbar}{m}\Im\left(\frac{\nabla\psi}{\psi}\right) \tag{9}$$

Inoltre, come si può facilmente mostrare, valgono le seguenti due equazioni:

$$\vec{v} = \frac{\nabla S(\vec{x},t)}{m} \tag{10}$$

$$E = -\frac{\partial S}{\partial t} \tag{11}$$

La prima equazione definisce il vettore velocità della particella permettendo di definire la sua traiettoria, mentre la seconda è l'equazione di Hamilton-Jacobi per la particella.
Differentemente dalle interpretazioni idrodinamica e stocastica, in questo caso non è necessario imporre la regola di quantizzazione $\oint_\gamma \vec{p}\cdot d\vec{\gamma} = nh$, in quanto essa è implicita nelle equazioni 10) e 11), ovvero deriva dalla condizione per il fenomeno oscillatorio interno di rimanere in fase con l'onda pilota.
Pauli presentò una critica alla teoria di de Broglie sugli stati stazionari, che fu presentata al congresso di Solvay su "Elettroni e Fotoni" tenutosi a Bruxelles nel 1927. La critica riguardava uno scattering anelastico di una particella, descritta da un'onda piana, con un rotatore rigido, ad esempio un atomo di idrogeno. De Broglie non fu in grado di rispondere e la sua teoria fu abbandonata fino agli anni '50, quando fu ripresa da Bohm e in seguito de Broglie stesso [13] [1] [3].

3.4 L'interpretazione di Bohm

In due articoli del 1952 [1] David Bohm presentò un'interpretazione alternativa a quella di Copenaghen, in particolare un modello coerente a variabili nascoste che, sotto certe assunzioni, è del tutto equivalente alla meccanica quantistica galileiana. Secondo Bohm la sua teoria permetteva di spiegare i fenomeni quantistici in un quadro concettuale più ampio ed intuitivo, in quanto forniva una descrizione precisa ed oggettiva dei processi quantistici, senza dover abbandonare i concetti di causalità e continuità ben radicati nella fisica. La teoria permette di risolvere i problemi concettuali della meccanica quantistica e nonostante alcuni tratti peculiari, ha un'ontologia analoga a quella della meccanica classica: le particelle hanno delle definite posizioni e velocità e sono guidate da campi in modo deterministico. Nonostante il carattere intrinsecamente deterministico della teoria, le sue previsioni sono probabilistiche poiché non è possibile avere una conoscenza esatta delle condizioni iniziali sulle variabili dinamiche del sistema. Ciò è dovuto essenzialmente al principio di indeterminazione, il quale rimane comunque un limite intrinseco al processo di misura. Tuttavia le probabilità emergono in modo classico, a causa dei limiti dell'osservatore. Ad esempio, effettuando una misura di posizione si perturba il campo, introducendo fluttuazioni di impulso incontrollabili, in accordo con quelle sancite dalle relazioni di Heisenberg.
La novità introdotta da Bohm, rispetto ai lavori dei precursori, fu l'inclusione dell'apparato di misura nella descrizione del sistema, idea già espressa da Bohr in un altro quadro interpretativo. Inoltre estese la teoria in modo da trattare coerentemente i sistemi a molti corpi.
Le assunzioni della teoria sono:
1) La ψ soddisfa l'equazione di Schrödinger;
2) le particelle evolvono secondo l'equazione guida $\vec{v}(\vec{x},t) = \nabla S(\vec{x},t)/m$, ovvero l'impulso della particella è ristretto ai valori $\vec{p} = \nabla S(\vec{x},t)$;
3) non si possono predire e controllare con precisione le variabili dinamiche delle particelle, ma si ha, in pratica, un insieme statistico con densità di probabilità $P(\vec{x},t) = |\psi(\vec{x},t)|^2$.
Con queste ipotesi le previsioni dell'interpretazione di Bohm sono del tutto equivalenti a quelle della meccanica quantistica, col vantaggio concettuale di fornire chiara rappresentazione dei processi cinematici e

dinamici sottostanti la dinamica quantistica.
Partendo dall'equazione di Schrödinger, con H operatore hamiltoniano associato ad un sistema meccanico:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi_t>=\hat{H}|\psi_t> \tag{12}$$

e scrivendo la funzione d'onda in forma polare, ovvero come $\psi(\vec{x},t)=R(\vec{x},t)e^{iS(\vec{x},t)/\hbar}$ con R e S funzioni reali, separando parte reale e parte immaginaria si ottengono le seguenti due equazioni:

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{(\nabla S)^2}{2m}+V-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\nabla^2 R}{R}=0 \tag{13}$$

$$\frac{\partial R^2}{\partial t}+\nabla\cdot\left(\frac{R^2\nabla S}{m}\right)=0 \tag{14}$$

Ricordando la forma dell'equazione di Hamilton-Jacobi, ovvero:

$$\frac{\partial S}{\partial t}=-H \tag{15}$$

possiamo riscrivere la (13) in questo modo:

$$\frac{\partial S}{\partial t}=-\left[\frac{(\nabla S)^2}{2m}+V+Q\right] \tag{16}$$

che è un'equazione di Hamilton-Jacobi generalizzata dove, accanto al potenziale classico V, appare un termine $Q=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\nabla^2 R}{R}$ detto "potenziale quantistico". I potenziali V e Q non sono tra loro indipendenti, infatti il potenziale classico è presente nell'equazione di Schrödinger, che determina a sua volta la forma di Q. Il potenziale V ha due effetti: uno puramente classico attraverso la forza $-\nabla V$ ed uno puramente quantistico, mediante il fattore $-\nabla Q$. È importante notare che, sebbene V possa essere limitato, il potenziale quantistico può trasportarne gli effetti anche in regioni dove esso è nullo. Mentre classicamente in tali regioni sarebbero possibili solo moti rettilinei uniformi, in meccanica quantistica, per via della presenza del potenziale quantistico, si avrà una varietà di moti dipendenti dalla forma della funzione d'onda.
Attraverso questa formulazione si ha anche una chiara visualizzazione del limite classico: nel limite $\hbar\to 0$ anche $Q\to 0$ e la (13) si riduce alla nota equazione di Hamilton-Jacobi della meccanica classica.

Dato un insieme di traiettorie soluzioni delle equazioni del moto, queste saranno normali a tutte le superfici con S costante e il vettore velocità per una particella passante al tempo t nel punto $\vec{x}$ sarà pari a $\vec{v}(\vec{x},t) = \nabla S(\vec{x},t)/m$. Il campo vettoriale $\nabla S(\vec{x},t)/m$ definisce in ogni punto dello spazio ed in ogni istante di tempo un vettore tangente alle varie possibili traiettorie percorse fisicamente dalle particelle. È quindi possibile riscrivere l'equazione (14) come:

$$\frac{\partial R^2}{\partial t} + \nabla \cdot (R^2 \vec{v}) = 0 \tag{17}$$

Poiché secondo la regola di Born R^2 è una funzione di densità di probabilità (la probabilità che una particella dell'insieme si trovi tra $\vec{x}$ e $\vec{x} + d\vec{x}$ al tempo t è data da $R^2(\vec{x},t)d^3x$) la (17) è l'equazione di continuità che esprime la conservazione della probabilità.
In meccanica classica l'utilizzo delle equazioni di Hamilton-Jacobi per derivare le equazioni del moto è solo una questione di convenienza matematica; si potrebbero infatti utilizzare indifferentemente le equazioni di Eulero-Lagrange o l'equazione di Newton, con le opportune condizioni al contorno. L'equazione di Newton generalizzata corrispondente è quindi:

$$m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -\nabla[V + Q] \tag{18}$$

Le traiettorie delle particelle, sempre ortogonali alle superfici S=*cost.*, sono calcolate integrando le equazioni differenziali:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{\nabla S(\vec{x},t)}{m}|_{\vec{x}=\vec{x}(t)} \tag{19}$$

con le condizioni iniziali $\vec{x}_0 = \vec{x}(0)$, $\psi_0(\vec{x}) = \psi(\vec{x},0)$ e $\vec{p}_0(\vec{x}) = \nabla S_0(\vec{x})$.
Negli sviluppi odierni, che vanno sotto il nome di "meccanica bohmiana", l'equazione fondamentale è la (19) . Prendendone la derivata temporale si ottiene l'equazione di Newton, con l'aggiunta di un potenziale extra. Quest'ultima, pur essendo utile per studiare il limite classico, rimane un po' artificiosa e per questo si preferisce considerare come fondamentale l'equazione del campo guida, in linea con l'idea originale di de Broglie, dove la ψ ha il ruolo di "onda pilota". La forma di $\vec{x}$ può essere anche derivata partendo da alcuni principi fondamentali di invarianza (per rotazione, omogeneità, inversione temporale, galileiana) [24].

Si può esprimere l'equazione del campo guida anche attraverso la densità di corrente di probabilità $\vec{j}$; infatti dall'equazione di continuità si ha $\vec{j} = R^2\vec{v}$, che sostituendo nell'equazione di Schrödinger risulta essere:

$$\vec{j} = \frac{i\hbar}{2m}(\psi\nabla\psi^* - \psi^*\nabla\psi) \tag{20}$$

In effetti si vede che questo termine è proprio uguale a $R^2\vec{v}$, dove $\vec{v}$ è:

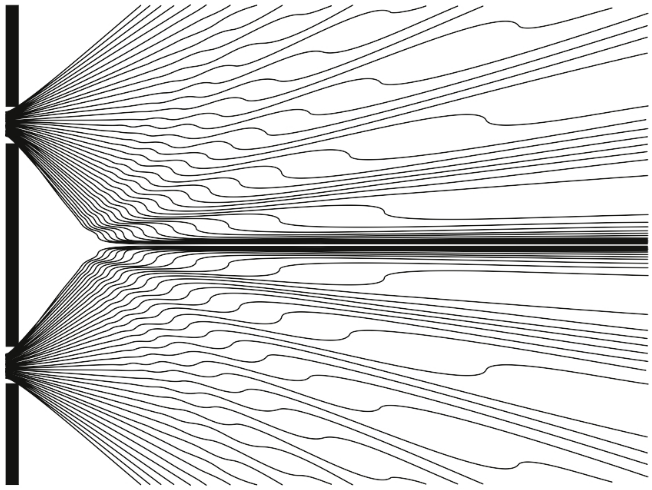
$$\vec{v} = \frac{\hbar}{m}\Im\left(\frac{\nabla\psi}{\psi}\right) \tag{21}$$

Poiché la forza che agisce sulla particella dipende da una funzione del valore assoluto di $R(\vec{x}, t)$, valutata nell'attuale posizione della particella, la funzione d'onda in questo contesto è una rappresentazione matematica di un campo che vive nello spazio delle configurazioni (che nel caso di N particelle è 3N+1 dimensionale); ne consegue che essa deve essere per lo meno continua, finita e monodroma. Questo campo influenza il moto della particella in modo analogo, ma non identico, a quello con cui un campo elettromagnetico esercita una forza su una carica elettrica. Come nella teoria di de Broglie, non è necessario imporre regole di quantizzazione ad hoc, in quanto la funzione d'onda è per ipotesi un campo che evolve secondo l'equazione di Schrödinger. Si dimostra che la meccanica di Bohm ha lo stesso contenuto empirico della meccanica quantistica non relativistica ed è in grado di spiegare tutti i fenomeni quantistici: l'effetto tunnel, gli effetti di interferenza e l'esistenza di stati stazionari, ovvero la quantizzazione.
Vediamo ad esempio come l'interpretazione di Bohm permetta di spiegare l'effetto tunnel, un misterioso fenomeno che sembra contraddire il principio di conservazione dell'energia. Consideriamo un pacchetto d'onda incidente su una barriera di potenziale. Durante l'interazione tra il pacchetto e la barriera, il potenziale quantistico Q subisce rapide e violente fluttuazioni sia spazialmente che nel tempo. Anche la traiettoria della particella può divenire molto complicata. Ma occasionalmente Q diverrà negativo, cancellando in parte la barriera di potenziale, e permetterà il passaggio della particella. La possibilità di passare dipende quindi dalla somma totale V+Q e non dal solo potenziale classico V. Inoltre è importante anche la localizzazione iniziale della particella, infatti questa penetrerà la barriera solo se potrà trovarsi in essa

nell'intervallo di tempo in cui la sua energia cinetica è maggiore del potenziale totale V+Q.
Si possono notare le caratteristiche in comune tra il potenziale delle velocità del "fluido" nell'interpretazione idrodinamica di Madelung, la fase dell'onda pilota di de Broglie e la funzione "azione" nella formulazione di Hamilton-Jacobi generalizzata. Il potenziale quantistico assume un ruolo chiave nella teoria, infatti detiene le informazioni sull'intero apparato di misura col quale le particelle si trovano ad interagire e le "guida" lungo le loro traiettorie. Per i sistemi a più particelle, nel caso in cui la funzione d'onda non sia fattorizzabile, ovvero nel caso in cui i sottosistemi non siano separabili, il potenziale quantistico è responsabile degli effetti non locali della meccanica quantistica. Esso riesce infatti a spiegare le correlazioni osservate negli esperimenti di tipo EPR. Una precisazione importante in questo contesto è che due sottosistemi quantistici possono essere non separabili anche nel caso di interazioni trascurabili.
L'estensione della teoria ai sistemi a molti corpi è immediata. In questo caso si avrà una funzione d'onda del tipo:
$\psi(\vec{x}_1, ..., \vec{x}_n, t) = R(\vec{x}_1, ..., \vec{x}_n, t)e^{iS(\vec{x}_1,....,\vec{x}_n,t)/\hbar}$, dove le $x_1, ..., \vec{x}_n$ sono le coordinate cartesiane ortogonali di un insieme di N particelle puntiformi con traiettorie $\vec{x_i}(t)$ nello spazio euclideo tridimensionale. Nello spazio delle configurazioni avremo una singola traiettoria, equivalente alle N traiettorie nello spazio euclideo.
Il potenziale quantistico dunque prende la seguente forma:
$Q = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\hbar^2}{2m_i} \frac{\nabla_i^2 R}{R}$ e l'equazione di guida per l'n-esima particella diviene: $\frac{d\vec{x_i}}{dt} = \frac{\nabla_i S(\vec{x}_1,....,\vec{x}_n,t)}{m_i}|_{\vec{x_i}=\vec{x_i}(t)}$. Come si nota facilmente vi è una dipendenza istantanea di ogni traiettoria dalla posizione di tutte le altre particelle; il sistema risponde globalmente ed istantaneamente ad una perturbazione localizzata nello spazio, generalmente in modo molto complicato ed impredicibile. Ricordiamo che il potenziale Q non dipende tanto dal valore assoluto di ψ, ma dalla sua forma: così, anche se $\psi \simeq 0$ in una certa regione, non è detto che in quel luogo il potenziale quantistico non abbia effetti rilevanti sul moto. Inoltre, mentre classicamente all'aumentare della distanza di separazione tra le particelle le forze tendono ad annullarsi e queste possono considerarsi indipendenti, in meccanica quantistica, per via della presenza di Q, il

moto di una particella potrà ancora dipendere dalla presenza delle altre particelle, anche se $V = 0$. La non località è una caratteristica fondamentale dei sistemi quantistici non separabili, ovvero di sistemi in stati non fattorizzabili.
Ci si potrebbe chiedere in che senso il potenziale quantistico, che dipende dalla “curvatura” dell’ampiezza della funzione d’onda, possa essere considerato un “vero campo” che agisce sulle particelle guidandole lungo le loro traiettorie. Ciò che si intende con campo “vero” è questo: un campo vero è una funzione matematica che si adopera per evitare l’idea di azione a distanza, ovvero se coincide con ciò che bisogna specificare nel punto in cui si trova la particella allo scopo di prevederne il moto. Lo stesso problema si è riscontrato storicamente quando ci si chiedeva se il potenziale vettore fosse o meno un vero campo. In meccanica classica spesso si considera come campo vero solo il campo magnetico, in quanto per l’invarianza di gauge della teoria di Maxwell, si può aggiungere il gradiente di una funzione scalare sufficientemente regolare al potenziale vettore, ottenendo le stesse equazioni del moto. In altre parole la dinamica e le forze dipendono solo dal campo magnetico. In meccanica quantistica l’invarianza di gauge è rappresentata dall’arbitrarietà della fase della funzione d’onda, detta per questo anche “invarianza di fase”. Vi sono però dei fenomeni quantistici peculiari, come l’effetto Aharonov-Bohm, nel quale il moto di una particella è influenzato dalla presenza di un potenziale vettore, ma non dal campo magnetico, il quale è nullo nella regione di spazio accessibile alla particella. Questo farebbe pensare che il potenziale vettore abbia in realtà un significato fisico rilevante in meccanica quantistica, tuttavia l’invarianza di gauge rende questa affermazione problematica. L’effetto Aharonov-Bohm quindi mette in evidenza il fatto che il concetto di campo elettromagnetico che agisce localmente su una particella non è sufficiente a predirne il comportamento quantistico. Tale effetto mette quindi in risalto il carattere non locale della meccanica quantistica, che risulta esplicitato maggiormente nel caso si volesse parlare in modo preciso di campi e traiettorie delle particelle. Tuttavia, è bene notare come questi effetti non locali non sarebbero utilizzabili da un osservatore per inviare segnali, ovvero per trasferire informazione. Anche in meccanica classica il potenziale di un sistema di N particelle dipende istantaneamente dalle posizioni delle stesse; tuttavia i potenziali non

sono propriamente misurabili e l'invarianza di gauge rende in un certo senso arbitrari i valori dei potenziali. L'effetto Aharonov-Bohm è spiegato in modo semplice attraverso l'introduzione del potenziale quantistico, il quale diviene responsabile della deviazione delle traiettorie delle particelle osservata negli esperimenti, ovvero della traslazione della figura di interferenza [12].
Una questione interessante da affrontare all'interno della teoria di Bohm è l'esistenza delle traiettorie. In effetti, poiché nell'equazione del campo guida compare la ψ al denominatore, è possibile che il campo abbia delle singolarità in corrispondenza degli zeri della funzione d'onda ($\psi = 0$), o nei punti singolari del potenziale V. Tuttavia si può dimostrare come, per una classe molto ampia di funzioni d'onda, in particolare per quelle soluzioni dell'equazione di Schrödinger in cui l'hamiltoniana è un operatore autoaggiunto (condizione necessaria affinché le soluzioni abbiano senso fisico) l'esistenza e la continuità delle traiettorie è garantita [2] [38].
"[...] un fenomeno che è impossibile, assolutamente impossibile, da spiegare in modo classico e che contiene in sé il cuore della meccanica quantistica. In realtà, ne racchiude l'unico mistero [...] Molte idee sono state proposte per spiegare la curva $P_{1,2}$ [che è la figura di interferenza] pensando ai singoli elettroni che se ne vanno in modo complicato attraverso i fori. Ma nessuna di esse ha avuto successo. [...] Qualcuno potrebbe ancora domandare: "Come funziona tutto ciò? Qual è il meccanismo che sta dietro a questa legge?". Nessuno ha mai trovato un tale meccanismo. Nessuno può spiegare niente di più di quanto abbiamo "spiegato" noi. Nessuno vi saprà dare una rappresentazione più approfondita della situazione. Non abbiamo idea di un meccanismo più fondamentale da cui questi risultati possano essere dedotti."
In questa citazione Feynman sostiene che l'esperimento della doppia fenditura racchiude tutte le caratteristiche peculiari della meccanica quantistica e aggiunge che non è stato fornito alcun meccanismo più profondo per spiegare coerentemente la figura di interferenza. Un tale meccanismo di fatto è stato fornito dalla teoria di Bohm. Vediamo qui un esempio delle traiettorie calcolate secondo la teoria di Bohm per l'esperimento della doppia fenditura:



L'ipotesi numero 3) della teoria di Bohm viene definita ipotesi di equilibrio ed ha un ruolo essenziale nella teoria: essa garantisce la validità della regola di Born, del principio di indeterminazione e del teorema di "no-signaling". Si può dimostrare dall'equazione di continuità che, se essa vale ad un dato istante, essa varrà per tutta l'evoluzione temporale [29]. Tuttavia questa condizione potrebbe sembrare un po' innaturale, un'ipotesi ad hoc. Vi è in effetti un'analogia tra l'ipotesi di equilibrio quantistico e il postulato di Gibbs in meccanica statistica.
A. Valentini [51] [52] ha mostrato come il rilassamento verso l'equilibrio $P(\vec{x},t) \to |\psi(\vec{x},t)|^2$ possa essere spiegato da una sorta di teorema H sub-quantistico, costruito in analogia con il teorema H di Boltzmann, mostrando come la località richiesta dalla relatività e l'incertezza dettata dal principio di indeterminazione emergano da una teoria sottostante deterministica e non locale. La non località in un certo senso verrebbe mascherata dal "rumore" quantistico. La restrizione espressa dal principio di indeterminazione garantisce la consistenza con la meccanica quantistica; allo stesso modo l'impossibilità di trasferire segnali superluminali garantisce la consistenza con la relatività.
L'ipotesi di "ergodicità" della dinamica sub-quantistica è richiesta affinché vi sia un rilassamento verso stati di equilibrio [20]. All'interno dell'ambito di validità della meccanica quantistica, ovvero all'interno dell'ambito in cui il principio di indeterminazione e la regola di Born valgono in modo esatto, è necessario che il rilassamento sia sufficientemente rapido da non poter osservare sperimentalmente stati di non equilibrio.

Bohm originariamente aveva proposto delle modifiche all'equazione di Schrödinger che valessero solo ad una scala di lunghezza dell'ordine di 10^{-15} m, ovvero alla scala in cui la meccanica quantistica comincia a diventare inadeguata. Queste modifiche si possono ottenere introducendo delle non linearità nelle equazioni del moto, ad esempio nella formula di Newton generalizzata si può aggiungere una forza con le proprietà di far tendere rapidamente a zero la differenza $(\vec{p} - \nabla S(\vec{x}, t))$, in un tempo dell'ordine di $\frac{10^{-15}}{c}$ s. L'ipotesi di equilibrio può quindi essere espressa nella forma equivalente: $\vec{p} \to \nabla S(\vec{x}, t)$.
Un'altra cosa importante da sottolineare è che in meccanica bohmiana la funzione d'onda di un sottosistema è solo una funzione d'onda "efficace"; la funzione d'onda "vera" è quella che governa l'evoluzione temporale di tutto il sistema, potenzialmente di tutto l'universo. Per giustificare la condizione di equilibrio di un sottosistema bisognerebbe effettivamente partire dalla funzione d'onda universale, la quale non collassa mai ed evolve in modo deterministico e unitario. Ciò che sembra collassare, è solo la funzione d'onda efficace del sottosistema, il quale tuttavia non può essere trattato come isolato a priori. Ogni sottosistema è necessariamente correlato in qualche modo sconosciuto al resto del sistema. Si potrebbe concepire quindi che il collasso "efficace" del sottosistema sia dovuto all'interazione col resto del sistema. Un osservatore locale, che non ha accesso a tutte le correlazioni, osserva delle "fluttuazioni" apparentemente stocastiche, analoghe a quelle assunte nell'ipotesi di caos molecolare per il teorema H di Boltzmann in meccanica statistica classica. È stato fatto notare che per sistemi isolati, in particolari situazioni, la teoria di Bohm non fornisce il corretto limite classico; solo includendo gli effetti dell'interazione con l'ambiente si ottengono le corrette traiettorie classiche. Infatti abbiamo già notato come sia fondamentale l'interazione dell'apparato di misura con il sistema per ottenere l'accordo con gli esperimenti; il carattere contestuale della teoria ne garantisce la consistenza.
L'interpretazione di Bohm risolve il problema della misura in modo semplice, dato che durante l'atto della misura non si ha un vero e proprio collasso della funzione d'onda, con successiva localizzazione della particella, ma semplicemente viene rivelata la sua preesistente posizione. In altre parole la particella possiede sempre una definita posizione che varia con continuità, indipendentemente dal fatto che venga effettuata

una misura, proprio perché le posizioni delle particelle assumono un carattere non contestuale nella teoria. Altre osservabili invece devono assumere un carattere intrinsecamente contestuale, come l'impulso e lo spin; questo fatto è dovuto proprio al teorema KS: non è corretto affermare che l'autovalore dell'impulso misurato era già posseduto dal sistema, dato che la misura o l'interazione con l'ambiente potrebbe averlo cambiato.
Un aspetto importante da far notare in questo contesto è il fatto che ogni misura può essere ridotta ad una misura di posizione; questo è stato fatto notare inizialmente da Feynman e Hibbs [34] all'interno della formulazione tramite integrali sui cammini. Con questa osservazione la teoria è in grado di trattare anche i fenomeni che coinvolgono lo spin delle particelle, il quale viene introdotto come una proprietà aggiuntiva della funzione d'onda e non come una proprietà della particella.

3.5 La meccanica stocastica

La meccanica stocastica è introdotta nel lavoro di Edward Nelson del 1966 [35], anche se versioni analoghe erano state proposte precedentemente da altri autori, ma con trattazioni differenti. Bohm e Vigier [18] per primi introdussero all'interno del modello idrodinamico di Madelung la nozione di fluttuazioni random derivanti dall'interazione con un mezzo sub-quantistico. Come nota anche Nelson nelle conclusioni dell'articolo, la sua proposta è uno sviluppo indipendente di idee già avanzate da Fényes nel 1952, da Weizel nel 1953 e Kershaw nel 1964, di cui l'autore è venuto a conoscenza solo dopo aver completato l'articolo. In particolare in alcuni di questi lavori si è mostrato come, invece di utilizzare il potenziale quantistico, il moto poteva essere compreso in termini di processi di Markov. Analogie formali tra moto browniano ed equazione di Schrödinger erano state fatte notare già da Fürth nel 1933 e sviluppate da Comisar nel 1965 [46]. In questi lavori il coefficiente di diffusione è immaginario. Un parallelismo tra meccanica quantistica e processi stocastici è stato notato in altri lavori.
Nelson tenta di mostrare che l'allontanamento radicale dalla meccanica classica prodottosi con l'introduzione della meccanica quantistica negli anni '30 non era necessario. Egli fornisce una derivazione e interpretazione interamente classica dell'equazione di Schrödinger, seguendo una linea di pensiero che è uno sviluppo naturale del modo di ragionare usato in meccanica statistica e nella teoria del moto browniano. Nell'interpretazione le posizioni delle particelle sono variabili nascoste stocastiche.
La dinamica è quella newtoniana, come nella teoria del moto browniano di Ornstein e Uhlenbeck (tramite equazioni di Langevin e equazione di Fokker-Planck), che avviene come processo di Wiener nello spazio delle fasi. La cinematica è ripresa dalla teoria di Einstein e Smoluchowski del moto browniano: il moto è descritto come un processo stocastico di Markov nello spazio delle configurazioni, in particolare come un processo di Wiener con coefficiente di diffusione $D = \frac{\hbar}{2m}$.
Le equazioni del moto che si derivano sono non lineari, ma, introducendo la ψ in un modo semplicemente legato alla descrizione cinematica del moto, si trova che essa soddisfa l'equazione di Schrödinger e ogni soluzione dell'equazione di Schrödinger può essere ricavata in questo

modo. La teoria non è causale, in quanto intrinsecamente stocastica, ma i concetti probabilistici vi entrano in modo classico. La descrizione dei processi atomici è ottenuta per mezzo di idee classiche del moto nello spazio-tempo ed è quindi concettualmente differente dalla meccanica quantistica.
Le traiettorie $\vec{x}(t)$ sono dei processi di Markov governati da due equazioni differenziali stocastiche (una "in avanti" e una "all'indietro" nel tempo) della forma:

$$d\vec{x}(t) = \vec{b}(\vec{x}(t), t)dt + d\vec{w}(t) \tag{22}$$

Un'interpretazione euristica di questa equazione è che, in un piccolo intervallo di tempo infinitesimo dt, il processo stocastico $\vec{x}(t)$ varia di una quantità che ha distribuzione normale, con media $\vec{b}(\vec{x}(t), t)dt$ e varianza $2Ddt$. $\vec{x}(t)$ è un processo stocastico di Markov, ovvero è un processo nel quale la probabilità di transizione che determina il passaggio ad un nuovo stato del sistema dipende unicamente dallo stato del sistema immediatamente precedente e non da come si è giunti a tale stato: lo stato futuro del sistema dipende solo dallo stato presente e non dagli incrementi passati. La proprietà di Markov di un processo stocastico può essere chiamata per questo anche condizione di "assenza di memoria". W è un processo di Wiener perché le fluttuazioni hanno una distribuzione normale con valore di aspettazione nullo ($< dw_i >= 0$) e scarto quadratico medio $\sqrt{< {dw_i}^2 >} = \sqrt{2Ddt}$. Il termine $\vec{b}$ è chiamato termine di trascinamento o di "deriva" (uguale alla velocità media "in avanti"), mentre D è il coefficiente di diffusione che in questo caso vale $\frac{\hbar}{2m}$. Definendo la "velocità di corrente" come $\vec{v} = \frac{\vec{b}+\vec{b}^*}{2}$ (dove b^* è la velocità media "all'indietro") e usando un'appropriata definizione di accelerazione media simmetrica nel tempo, si ricava una versione stocastica della seconda legge di Newton. Assumendo che la $\vec{v}$ sia un gradiente ($\frac{\nabla S(\vec{x},t)}{m}$), si ritrovano le equazioni (13) e (14) con $R = \sqrt{\rho}$, dove ρ è la densità di probabilità di trovare la particella associata al processo di Markov (22). ρ soddisfa l'equazione di Fokker-Planck $\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\vec{b}\rho) + D\nabla^2\rho$. La media di quest'ultima equazione con l'analoga relativa a $\vec{b}^*$ conduce all'equazione di continuità (3). Il termine di deriva $\vec{b}$ può essere scritto in questo modo: $\vec{b} = \frac{\hbar}{m}\left[\Re\left(\frac{\nabla\psi}{\psi}\right) + \Im\left(\frac{\nabla\psi}{\psi}\right)\right]$.

Definendo $\Psi = \sqrt{\rho} e^{\frac{iS}{\hbar}}$ formalmente si ottiene l'equazione di Schrödinger, tuttavia non vi è alcuna ragione per cui S dovrebbe avere la specifica struttura necessaria. Sembra quindi che, nonostante le apparenze, la teoria quantistica non possa essere derivata completamente dalla meccanica stocastica, senza delle precise assunzioni ad hoc.
Le traiettorie di Bohm emergono come spostamenti mediati del sottostante processo stocastico. Così come avviene nell'interpretazione stocastica del fluido di Madelung, le traiettorie delle particelle di Bohm corrispondono alle linee di flusso descriventi il comportamento medio del fluido [42].
In effetti l'equazione di Schrödinger non è altro che un'equazione di diffusione con coefficiente immaginario e vi è una analogia formale con l'equazione di Fokker-Planck, con la differenza che nell'equazione di Schrödinger ciò che diffonde è l'ampiezza di probabilità, mentre nell'equazione di Fokker-Planck è la densità di probabilità. Il fatto che il "campo" ψ sia complesso non crea particolari difficoltà, dato che ogni funzione complessa si può scrivere come una coppia di funzioni reali.
Quindi a livello sub-quantistico vi sarebbe un moto irregolare per le particelle che Nelson ipotizza essere dovuto all'interazione delle particelle con un mezzo "sub-quantistico", una sorta di "etere". Tuttavia non si può attribuire al mezzo alcun "attrito", in quanto ciò permetterebbe di misurare il moto rispetto all'ipotetico s.d.r. assoluto associato al mezzo, il che sarebbe in contrasto empirico con la relatività. Questo implica che le traiettorie non saranno "lisce" quindi, non potendo definire le velocità, il moto non può essere descritto nello spazio delle fasi, ma deve svolgersi nello spazio delle configurazioni. Dunque le traiettorie sono continue, ma non differenziabili, come quelle che caratterizzano il moto browniano.
Tale moto spiegherebbe le probabilità calcolate con l'equazione di Schrödinger. Ad esempio nello stato fondamentale dell'atomo di idrogeno l'elettrone sarebbe in equilibrio dinamico: la forza di Coulomb attrattiva del nucleo sarebbe bilanciata dalla forza "osmotica" derivante dal moto browniano. Anche l'accelerazione media quindi non ha significato dinamico: la forza esterna $\vec{F}$ non accelera la particella, ma semplicemente gli impartisce una velocità $\vec{v} = \frac{\vec{F}}{m\beta}$, dove β è la mobilità.
Una cosa interessante da notare è che anche nella teoria del moto browniano vale una sorta di relazione di indeterminazione per la

posizione e la velocità della particella. Infatti, osservando per un tempo Δt il moto di una particella sospesa in un fluido e soggetta a fluttuazioni casuali (derivanti dalle collisioni con gli elementi del fluido), si trovano delle fluttuazioni dell'ordine di Δx nella posizione media e dell'ordine di Δp nel valore medio della quantità di moto della particella, che soddisfano una relazione del tipo $\Delta x \Delta p \geq C$, per una opportuna costante C che dipende dalla temperatura del fluido. L'unico limite a questa analogia è che nel caso quantistico la costante C non può essere resa piccola a piacere.
Nel contesto della meccanica stocastica è molto difficile vedere come la circuitazione del campo delle velocità potrebbe essere quantizzata in maniera naturale. Per esempio l'equazione delle onde è ricavata con una tecnica per linearizzare le più fondamentali equazioni non lineari della teoria stocastica e quindi la funzione d'onda è vista più come un artificio matematico. Tuttavia la meccanica stocastica è un modello non locale (nel senso di Bell); di fatto si può mostrare che nel caso il processo di Wiener venga trascurato, essa si riduce all'interpretazione di Bohm, nell'ipotesi di equilibrio [33].
Indagini successive hanno mostrato delle relazioni tra integrale sui cammini, processi stocastici e equazione di Schrödinger.

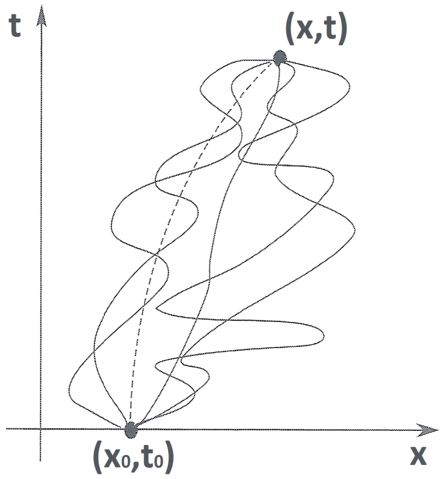
3.6 La formulazione di Feynman tramite integrale sui cammini

L'integrale sui cammini di Feynman è una formulazione della meccanica quantistica alternativa a quella di Schrödinger e Heisenberg, che generalizza il principio di azione stazionaria della meccanica classica. L'importanza di tale formalismo risiede prima di tutto nel fatto che esso fornisce una nitida descrizione delle fluttuazioni quantistiche; in secondo luogo permette una trattazione soddisfacente in ambito relativistico, in quanto tratta le variabili di spazio e tempo in maniera simmetrica. La formulazione lagrangiana è intrinsecamente covariante, infatti la densità di lagrangiana è un invariante di Lorentz e questo rende particolarmente conveniente il formalismo in ambito di teorie dei campi relativistici.
Nel formalismo la funzione di Green $G(x_0, t_0; x, t) =< x|e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}|x_0 >$ è ottenuta in questo modo:

$$G(x_0, t_0; x, t) = \int_{tutti[x(t)]} e^{\frac{i}{\hbar}S} d[x(t)] \tag{23}$$

$$S(x_0, t_0; x, t) = \int_{t_0}^{t} L(x, \dot{x}) dt \tag{24}$$

dove (24) è l'azione classica calcolata sui vari cammini e L è la lagrangiana. La funzione di Green è l'operatore di evoluzione temporale nella rappresentazione delle x ed è intimamente collegata al concetto di funzione d'onda: G è l'ampiezza di probabilità che una particella nel punto x_0 al tempo t_0 si trovi nel punto x al tempo successivo t. Quindi la probabilità che la particella si trovi nell'intervallo $(x, x + dx)$ all'istante t è data da $|G(x_0, t_0; x, t)|^2 dx$. Il simbolo $d[x(t)]$ significa che per calcolare la funzione di Green bisogna sommare su tutti i cammini possibili che connettono il punto iniziale $x(t_0) = x_0$ e quello finale $x(t) = x$, ognuno pesato con il corrispettivo fattore di fase $e^{\frac{i}{\hbar}S}$.



Si può infatti ricavare l'equazione di Schrödinger attraverso l'uso dell'integrale di Feynman. Scrivendo l'integrale per cammini infinitesimi si ha:

$$\psi(x + dx, t + dt) = A \int e^{\frac{i}{\hbar} S(x,t;x+dx,t+dt)} \psi(x, t) dx \tag{25}$$

dove A è una costante di normalizzazione e S è l'azione. Questa equazione è valida solo nel limite $dt \to 0$. Imponendo in particolare che sia valida al primo ordine in dt, si può ricavare l'equazione di Schrödinger. Svolgendo i calcoli si nota che l'integrale riceve contributi solo dove l'esponenziale in prima approssimazione non varia, perché la regione dove l'esponenziale oscilla rapidamente contribuisce molto poco, in quanto si cancellano i contributi. In particolare l'integrale riceve la maggior parte dei contributi quando $dx \simeq \sqrt{\frac{\hbar dt}{2m}}$. Dunque le "velocità" $\frac{dx}{dt}$ che più contano, sono molto grandi, dell'ordine di $\sqrt{\frac{\hbar}{2mdt}}$, che diverge per $dt \to 0$. Quindi solo quei particolari cammini che godono della proprietà $\Delta x \sim \sqrt{\Delta t}$ contribuiscono nell'integrale. Tali cammini sono continui, ma non hanno derivata, come quelli che si incontrano nella teoria del moto browniano. Qualitativamente essi sono identici a traiettorie a zig-zag, quindi si nota immediatamente il loro carattere fluttuante: esse appaiono come se il punto rappresentativo fluttuasse casualmente intorno ad una traiettoria liscia. L'esistenza di tali fluttuazioni è concettualmente molto importante, perché esse rappresentano gli effetti quantistici nell'evoluzione temporale descritta dall'integrale di Feynman e sono equivalenti al principio di indeterminazione. Di fatto se si misura la

traiettoria di una particella, si vede che le limitazioni dettate dal principio di indeterminazione implicano proprio la validitá dell'equazione $dx \simeq \sqrt{\frac{\hbar dt}{2m}}$. Il formalismo di Feynman quindi ammette un'interpretazione chiaramente stocastica: la funzione d'onda è calcolata come un integrale su cammini stocastici.
Una cosa importante da sottolineare è che l'integrale rappresenta una somma coerente di cammini per l'ampiezza, non per la probabilità; questo è un aspetto caratteristico della meccanica quantistica. I cammini "virtuali" introdotti nel formalismo lagrangiano della meccanica classica appaiono qui come cammini reali, nel senso che ognuno dà un contributo non nullo, proporzionale a $e^{\frac{i}{\hbar}S}$.
In definitiva Feynman ha fatto notare come in linea di principio sia ancora possibile parlare di traiettoria seguita dalla particella, sebbene per calcolare la probabilità di un evento (ad esempio una particella che parta da un punto in un dato istante e arrivi in un altro punto ad un istante successivo) occorra sommare le ampiezze per ogni "cammino" possibile (cioè per tutti i modi possibili in cui l'evento può verificarsi) ed infine prendere il modulo quadro della somma. La particella sceglierà uno dei cammini possibili, in modo tale che i vari eventi si verifichino in accordo con la distribuzione di probabilità calcolata.
È bene far presente però che i cammini virtuali di Feynman non corrispondono alle traiettorie reali seguite dalle particelle. Infatti per l'esistenza e l'unicità delle traiettorie (e questo è dovuto al fatto che la funzione d'onda è a singolo valore rispetto alla posizione) in meccanica bohmiana esiste un'unica traiettoria $x(t)$ che parte da un punto (x_0, t_0) e arriva ad un altro punto (x, t), mentre esistono infiniti cammini di Feynman che "connettono" i due punti. Certamente uno di questi sarà la traiettoria bohmiana e un altro sarà la traiettoria classica. La traiettoria classica è quella che minimizza l'azione classica, mentre la traiettoria bohmiana è quella che minimizza l'azione classica con l'aggiunta del potenziale quantistico nella lagrangiana [43]. Nel limite $\hbar \to 0$ soltanto i cammini stazionari ($\delta S = 0$) danno contributo, ma questo non è altro che il principio di minima azione della meccanica classica, che nella formulazione di Feynman trova la sua piena giustificazione.
Si dimostra infatti che la non validità del calcolo classico delle probabilità in meccanica quantistica implica che i cammini di Feynman

non possono essere visti come possibili traiettorie percorribili dalle particelle. Feynman ha espresso chiaramente il fatto che la sua formulazione è semplicemente una descrizione matematica alternativa, non un tentativo di descrivere un processo reale. Il fatto che nell'esperimento della doppia fenditura la particella sembra "tener conto" di tutti i possibili percorsi è qui espresso in una forma molto naturale. Se si riflette sul fatto che l'equazione di Schrödinger è essenzialmente una equazione di diffusione con un coefficiente di diffusione immaginario, l'integrale di Feynman è un metodo per l'enumerazione dei cammini casuali. Per questa ragione gli integrali sui cammini sono stati utilizzati anche nello studio del moto browniano e della diffusione, ancor prima della loro introduzione come formulazione alternativa della meccanica quantistica.

4 Critiche ed estensioni delle teorie

Sono state mosse alcune critiche nei confronti della teoria di Bohm, essenzialmente riguardanti il fatto che il campo che “guida” le particelle ha delle proprietà molto peculiari, del tutto differenti da quelle dei campi classici. Prima fra tutte il carattere intrinsecamente non locale: le traiettorie delle particelle si influenzano istantaneamente a distanza. Questo fatto rende problematico trovare un’estensione relativistica che sia Lorentz-invariante. Inoltre vi è il fatto che ψ è difficilmente interpretabile come “campo fisico”, in quanto vivendo nello spazio delle configurazioni 3N+1 dimensionale, è differente dai campi classici a cui siamo abituati. Altro aspetto peculiare della forza quantistica è che essa non dipende dall’intensità del campo, quanto piuttosto dalla “forma”. L’ultima questione è legata al fatto che per il campo non vale il principio di azione-reazione, che in teoria dei campi classica è legato alla conservazione della quantità di moto. In pratica non vi è una reazione delle particelle sul campo: le condizioni iniziali sul campo fissano le condizioni iniziali sulla velocità delle particelle, successivamente il campo influenza il moto delle particelle, guidandole lungo definite traiettorie; tuttavia il campo evolve nel tempo in modo indipendente, secondo l’equazione di Schrödinger. In un certo senso ci si aspetta una reazione delle configurazioni delle particelle sulla la funzione d’onda, in modo da avere una relazione “biunivoca” del tipo: $\vec{x} \leftrightarrow \psi$. La mancanza del principio di azione-reazione comunque non impedisce alla meccanica bohmiana di ottenere l’invarianza Galileiana per traslazioni temporali, siccome è una teoria al primo ordine. Di fatto in meccanica bohmiana l’energia e l’impulso si conservano in media. Tuttavia sono state proposte delle estensioni della teoria di Bohm in cui viene ripristinato il principio di azione-reazione [55]. In realtà si può supporre che le particelle esercitino una reciproca influenza sul campo e che questa influenza sia sufficientemente piccola da poter essere trascurata nell’ambito di validità della meccanica quantistica. Essa però potrebbe risultare significativa ad un livello “sub-quantistico”.
Una critica concettuale che di solito viene mossa nei confronti della teoria è che essa non rispetta il rasoio di Occam, facendo previsioni aggiuntive che non sono direttamente verificabili. In realtà questa critica è infondata, in quanto il rasoio di Occam si applica solo a parità di

postulati e a parità di potere esplicativo della teoria. La teoria di Bohm, oltre a risolvere il problema della misura, eliminare il postulato del collasso e tutti i paradossi da esso derivanti, ha un potere concettuale decisamente maggiore e le previsioni "aggiuntive" non sono altro che la continuità delle traiettorie.
I principali sforzi atti ad estendere la teoria di de Broglie-Bohm riguardano proprio i tentativi di trovare una formulazione relativistica Lorentz-invariante e di conseguenza adattare la teoria anche in ambito di seconda quantizzazione, ovvero per teorie quantistiche relativistiche dei campi e per sistemi ad infiniti gradi di libertà. Infatti l'interpretazione di Bohm è invariante per trasformazioni di Galileo, quindi, come la meccanica quantistica non relativistica, non è Lorentz-invariante. In una teoria quantistica relativistica si vorrebbe trattare il tempo e lo spazio in modo simmetrico, a differenza di quanto avviene nel caso non relativistico, dove il tempo è un parametro e non un autovalore di un operatore autoaggiunto, come invece è la posizione. Si dimostra che le traiettorie delle particelle di Bohm non rappresentano elementi di realtà Lorentz-invarianti, infatti diversi osservatori inerziali possono associare alla medesima particella traiettorie completamente diverse. Il timore maggiormente diffuso tra gli esperti riguardava il fatto che le due teorie fossero intrinsecamente incompatibili a causa della non località esplicita dell'interpretazione di Bohm. In realtà analizzando a fondo la questione si può notare come non vi sia una vera e propria incompatibilità empirica e formale [28]. Lo stesso vale per l'interpretazione ortodossa, dove la non località implicita nel collasso della funzione d'onda non è logicamente incompatibile con la relatività. Infatti all'interno delle teorie quantistiche dei campi la meccanica quantistica è stata unificata con la relatività ristretta grazie al fatto che l'invarianza di gauge garantisce l'invarianza di Lorentz. Ballentine ha mostrato [32] che la non località della meccanica quantistica è compatibile in linea di principio con i postulati della relatività ristretta. Infatti quest'ultima richiede che nessun segnale, utilizzabile dagli osservatori per sincronizzare gli orologi, possa avere una velocità maggiore di quella della luce. La meccanica quantistica effettivamente rispetta questa condizione grazie al teorema di no-signaling: non è possibile utilizzare la non località della meccanica quantistica per trasferire informazione a velocità maggiore di c. Dunque la condizione di località richiesta dalla relatività è più debole di quella

assunta in EPR o nelle ipotesi del teorema di Bell [32]. L'interpretazione originale di de Broglie, nel caso più generale, era in effetti relativistica e questo è chiaro quando si nota che la fase di un'onda è un invariante relativistico. La covarianza è garantita formalmente grazie al fatto che il potenziale quantistico trasforma come uno scalare, quindi è un invariante relativistico [50] [26]. La teoria di Bohm sembra richiedere in modo naturale un sistema di riferimento privilegiato. Tuttavia è necessario precisare che un tale sistema di riferimento, in cui sarebbe possibile definire una simultaneità assoluta, se inosservabile, non è in conflitto empirico con la relatività a causa del fatto che la procedura di sincronizzazione degli orologi è arbitraria e la velocità della luce di sola andata non è misurabile [54] [41]. Di fatto anche in questo caso i limiti intrinseci dell'osservatore, giustificati dal fatto che esso stesso è soggetto alle leggi della fisica degli altri sistemi fisici, giustificano il fatto che vi possa essere qualcosa di non osservabile, ma la cui introduzione risulta essenziale per la coerenza di una teoria completa e concettualmente chiara. Sono state proposte estensioni della teoria de Broglie-Bohm e della meccanica stocastica sia per l'equazione di Klein-Gordon che per l'equazione di Dirac [45] [57]. Una teoria quantistica per il campo elettromagnetico, ovvero per il campo bosonico a spin 1, bastata sull'interpretazione di de Broglie-Bogm fu proposta originariamente da Bohm. Ci sono state inoltre alcune proposte in grado di fornire un'interpretazione ontologica delle teorie quantistiche dei campi, in particolare delle teorie di gauge, introducendo degli elementi di realtà in modo analogo a quanto fatto dalla teoria di Bohm per la meccanica quantistica ortodossa. Questo permetterebbe di risolvere alcuni problemi concettuali delle moderne teorie quantiche dei campi, alcuni dei quali sono del tutto analoghi a quelli presenti in prima quantizzazione. In questo contesto le variabili nascoste possono essere sia le posizioni delle particelle che le configurazioni dei campi quantistici. Le particelle sono trattate come puntiformi e sono guidate dal campo lungo traiettorie ben definite, interrotte eventualmente da processi stocastici che tipicamente corrispondono ad eventi di creazione e distruzione di particelle [31] [9] [10] [27] [30]. Infine sono state avanzate alcune ipotesi sulla possibilità di utilizzare la teoria di de Broglie-Bohm come punto di partenza per costruire una teoria di gravità quantistica, dove, grazie al ripristino del determinismo e della continuità delle traiettorie, essa potrebbe risolvere alcuni problemi di incompatibilità tra relatività generale e meccanica quantistica. Tuttavia in questi sviluppi mancano tutt'ora dei risultati solidi. L'interpretazione di Bohm inoltre potrebbe risolvere anche alcuni problemi concettuali in ambito cosmologico, senza dover ricorrere ad ipotesi particolarmente fantasiose come il multiverso. Infatti in ambito cosmologico la questione di un "osservatore esterno" in grado di far collassare la funzione d'onda sarebbe ovviamente problematica; nell'interpretazione di Bohm invece vi è una funzione d'onda universale che evolve in modo deterministico senza mai collassare.

5 Conclusioni

Lo scopo della tesi era fare una breve rassegna storico-critica di alcune interpretazioni della meccanica quantistica alternative a quella di Copenaghen. Data la vastità degli argomenti e l'impossibilità di dilungarsi eccessivamente in questo contesto, si è deciso di fare un'introduzione molto concisa, riassumendo i concetti fondamentali. Dapprima sono state messe in evidenza le motivazioni per cui l'interpretazione "ortodossa" è stata considerata fin dalle origini non soddisfacente, poi si è riassunto brevemente il percorso storico che ha portato alla nascita dei principali teoremi in ambito di fondamenti della meccanica quantistica. Si è scelto di prestare maggiore attenzione ai modelli ψ-supplementati, in particolare ad una precisa classe di teorie a variabili nascoste, per ragioni di carattere concettuale ed esplicativo. La teoria di de Broglie-Bohm è in effetti un modello a variabili nascoste formalmente e sperimentalmente consistente, che risolve in modo semplice i problemi concettuali della meccanica quantistica ortodossa, fornendo inoltre un meccanismo fisico intuitivo per la comprensione dei fenomeni quantistici.

Riferimenti bibliografici

[1] D. Bohm, *A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of "Hidden" Variables*, I e II, Phys. Rev. **85**, 166-193 (1952)

[2] K. Berndl, D. Dürr, S. Goldstein, G. Peruzzi e N. Zanghì, *On the Global Existence of Bohmian Mechanics*, Commun. Math. Phys. **173**, 647–673 (1995)

[3] G. Bacciagaluppi e A. Valentini, *Quantum Theory at the Crossroads: Reconsidering the 1927 Solvay Conference*, Cambridge University Press, 2009

[4] J. S. Bell, *On the Einstein-Podolsky-Rosen Paradox*, Physics, **1**, 195–200 (1964)

[5] J. S. Bell, *On the Problem of Hidden Variables in Quantum Theory*, Rev. Mod. Phys. **38**, 447–452 (1966)

[6] J. S. Bell, *Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1987

[7] A. Einstein, B. Podolsky e N. Rosen, *Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality be Considered Complete?*, Phys. Rev. **47**, 777–780 (1935)

[8] R. P. Feynman, R. B. Leighton e M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics* , vol. II e III, Zanichelli, 2007

[9] W. Struyve, *Pilot-Wave Theory and Quantum Fields*, Rep. Prog. Phys. **73**, 106001 (30pp) (2010)

[10] W. Struyve, *Pilot-wave approaches to quantum field theory*, J. Phys.: Conf. Ser. **306** (2011)

[11] E. Schrödinger , *Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik*, Naturwissenschaften **23**, 807–812, 823–828, 844–849 (1935); English translation by J. D. Trimmer, *The Present Situation in Quantum Mechanics: A Translation of Schrödinger's 'Cat Paradox' Paper*, Proceedings of the American Philosophical Society **124**, 323–338 (1980)

[12] C. Philippidis, D. Bohm, e R. D. Kaye, *The Aharonov-Bohm Effect and the Quantum Potential*, Il Nuovo Cimento **71B**, 75-87 (1982)

[13] M. Jammer, *The Philosophy of Quantum Mechanics*, John Wiley and Sons, New York, 1974

[14] H. Nikolic, *Relativistic Quantum Mechanics and the Bohmian Interpretation*, Foundations of Physics Letters **18**, 549–561 (2005)

[15] G. Salesi, *Spin and Madelung fluid*, Mod. Phys. Lett. A **11**, 1815 (1996)

[16] E. Madelung, *Quantentheorie in hydrodynamischer Form*, Z. Phys **40**, 322-326 (1927); English translation by D.H. Delphenich, *Quantum Theory in Hydrodynamical Form*

[17] T.C. Wallstrom, *Inequivalence between the Schrodinger equation and the Madelung hydrodynamic equations*, Phys. Rev. A **49**, 1613-1617 (1994)

[18] D.Bohm e J.P. Vigier, *Model of the Causal Interpretation of Quantum Theory in Terms of a Fluid with Irregular Fluctuations*, Phys. Rev. **96**, 208 (1954)

[19] T. Takabayasi, *On the Formulation of Quantum Mechanics Associated with Classical Pictures*, Progress of Theoretical Physics **8**, 143 (1952)

[20] D. Bohm, *Proof that Probability Density Approaches* $|\psi|^2$ *in Causal Interpretation of Quantum Theory*, Physical Review **89**, 458 (1953)

[21] M. Schönberg, *On the Hydrodynamical Model of the Quantum Mechanics*, Nuovo Cimento **12**, 103-133 (1954)

[22] E. P. Wigner, *The Problem of Measurement*, Am. J. Phys. **31**, 6-15 (1963)

[23] D. Bohm, *Causality and chance in modern physics*, Routledge, London, 1984

[24] C. Garola e A. Rossi, *The Foundations of Quantum Mechanics*, 369-379 (1995)

[25] S. Goldstein, *Bohmian Mechanics*, The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Spring 2013 Edition), Edward N. Zalta, URL: http://plato.stanford.edu/archives/spr2013/entries/qm-bohm/

[26] H. Nikolic, *Making nonlocal reality compatible with relativity*, Int. J. Quantum Inform. **9**, 367 (2011)

[27] H. Nikolic, *QFT as pilot-wave theory of particle creation and destruction*, Int. J. Mod. Phys. A **25**, 1477 (2010)

[28] K. Berndl, D. Dürr, S. Goldstein e N. Zanghì, *Nonlocality, Lorentz Invariance, and Bohmian Quantum Theory*, Phys. Rev. A **53**, 2062–2073 (1996)

[29] D. Dürr, S. Goldstein e N. Zanghì, *Quantum Equilibrium and the Origin of Absolute Uncertainty*, Journal of Statistical Physics **67**, 843–907 (1992)

[30] D. Dürr, S. Goldstein, R. Tumulka e N. Zanghì, *Bohmian Mechanics and Quantum Field Theory*, Phys. Rev. Lett. **93**, 1–4 (2004)

[31] D. Dürr, S. Goldstein, R. Tumulka e N. Zanghì, *Bell-Type Quantum Field Theories*, J. Phys. A Math. Gen.**38**, R1-R43 (2005)

[32] L.E. Ballentine, *Quantum Mechanics A Modern development*, World Scientific Publishing Co., 1998

[33] G. Peruzzi e A. Rimini, *Quantum measurement in a family of hidden-variable theories*, Found. Phys. Lett. **9**, 505-519 (1996)

[34] R.P. Feynman e A.R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals (Emended edition by D.F. Styer)*, Dover Pubblications Inc., New York, 2010

[35] E. Nelson, *Derivation of the Schrödinger equation from Newtonian Mechanics*, Phys. Rev. **150**, 1079-1085 (1966)

[36] D. F. Styer et al., *Nine formulations of quantum mechanics*, Am. J. Phys. **70**, 288-297 (2002)

[37] L.E. Ballentine, *The statistical Interpretation of Quantum Mechanics*, Rev. Mod. Phys. **42**, 358-381 (1970)

[38] K. Berndl, D. Dürr, S. Goldstein, G. Peruzzi e N. Zanghì, *Existence of trajectories for Bohmian mechanics*, Int. J. Theor. Phys. **32**, 2245-2251 (1993)

[39] K. Konishi e G. Paffuti, *Meccanica quantistica: nuova introduzione*, Edizioni Plus-Pisa University Press, Pisa, 2005

[40] N. Harrigan e R. W. Spekkens, *Einstein, incompleteness, and the epistemic view of quantum states*, Foundations of Physics **40**, 125-15 (2010)

[41] F. Selleri, *Noninvariant One-Way Velocity of Light*, Found. Phys. **26**, 641 (1996)

[42] R. Tsekov, *Bohmian mechanics versus Madelung quantum hydrodynamics*, Ann. Univ. Sofia, Fac. Phys. SE, 112-119 (2012)

[43] R. Tumulka, *Feynman's path integrals and Bohm's particle paths*, Eur. J. Phys. **26**, L11–L13 (2005)

[44] J. G. Cramer, *The transactional interpretation of quantum mechanics*, Rev. Mod. Phys. **58**, 647 (1986)

[45] D. Bohm e B.J. Hiley, *Non-locality and locality in the stochastic interpretation of quantum mechanics*, Phys. Rep. **172**, 93–122 (1989)

[46] G.G. Comisar, *Brownian-Motion Model of Nonrelativistic Quantum Mechanics*, Phys. Rev. **138**, B 1332-1337 (1965)

[47] S. L. Adler, *Why decoherence has not solved the measurement problem: a response to P.W. Anderson*, Phys. Rep. **34**, 135–142 (2003)

[48] R. Tumulka, *The "Unromantic Pictures" of Quantum Theory*, J. Phys. A: Math. Theor. **40**, 3245 (2007)

[49] G. Ghirardi, *Un'occhiata alle carte di Dio*, il Saggiatore, Milano, 2009

[50] Y. Aharonov e D. Z. Albert, *Can we make sense out of the measurement process in relativistic quantum mechanics?*, Phys. Rev. D **24**, 359–370 (1981)

[51] A. Valentini, *Signal-locality, uncertainty, and the subquantum H-theorem*, I e II, Phys. Lett. A **156** e **158**, 5-11 e 1-8 (1991)

[52] A. Valentini e H. Westman, *Dynamical origin of quantum probabilities*, Proc. R. Soc. A **461**, 253-272 (2005)

[53] R. Penrose *La strada che porta alla realtà*, BUR Rizzoli, Milano, 2005

[54] F. R. Tangherlini, *The Velocity of Light in Uniformly Moving Frame*, The Abraham Zelmanov Journal, **17**, 29-43 (2009)

[55] P. R. Holland, *Quantum back-reaction and the particle law of motion*, J. Phys. A: Math. Gen. **39**, 559 (2006)

[56] D. Ruelle, *Caso e caos*, Bollati Boringhieri, Torino, 2003

[57] D. Bohm e B.J. Hiley, *The undivided universe*, Routledge, London, 1993

[58] D. Dürr, S. Goldstein, and N. Zanghì, *Bohmian Mechanics and the Meaning of the Wave Function*, in R. S. Cohen, M. Horne and J. Stachel eds., Experimental Metaphysics - Quantum Mechanical Studies for Abner Shimony, Volume I; Boston Studies in the Philosophy of Science **193**, Kluwer Academic Publishers (1997)

[59] G. Ghirardi, A. Rimini e T. Weber, *Unified Dynamics for Micro and Macro Systems*, Phys. Rev. D **34**, 470-491 (1986)

[60] P. R. Holland, *The Quantum Theory of Motion: an account of the de Broglie-Bohm causal interpretation of quantum mechanics*, Cambridge university press, Cambridge, 1993