

**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA**

FACOLTÀ DI SCIENZE STATISTICHE

**CORSO DI LAUREA**

**IN STATISTICA E TECNOLOGIE INFORMATICHE**

TESI DI LAUREA

**DISEGNO DI CARTE DI  
CONTROLLO EWMA PER DATI  
AUTOCORRELATI**

RELATORE: PROF.SSA GIOVANNA CAPIZZI

LAUREANDO: GORAN KOZLICIC

ANNO ACCADEMICO 2004-05

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
<b>1 Modelli per le serie temporali</b>	<b>5</b>
1.1 Modelli stazionari . . . . .	5
1.1.1 L'operatore di ritardo e l'operatore di differenza . . . . .	5
1.1.2 Modelli autoregressivi . . . . .	6
1.1.3 Modelli a media mobile . . . . .	7
1.1.4 Modelli autoregressivi a media mobile . . . . .	8
1.1.5 Le proprietà di stazionarietà e di invertibilità . . . . .	8
1.2 Modelli non stazionari . . . . .	10
1.2.1 Modelli ARIMA . . . . .	10
1.3 Simulazione di serie ARMA(1, 1) . . . . .	11
<b>2 Controllo statistico di un processo produttivo</b>	<b>17</b>
2.1 Fonti di variabilità nei processi produttivi . . . . .	17
2.2 Carte di controllo . . . . .	18
2.3 Carte di controllo EWMA . . . . .	19
2.4 Effetto dell'autocorrelazione del processo sulle carte EWMA . . . . .	21
2.5 Effetto dell'incertezza del modello stimato . . . . .	23
<b>3 Disegno della carta EWMA per processi autocorrelati in presenza di incertezza sul modello</b>	<b>25</b>
3.1 Introduzione . . . . .	25
3.2 Varianza <i>worst-case</i> della carta EWMA . . . . .	26

---

3.2.1	Calcolo della matrice di varianze e covarianza $\Sigma_\gamma$ . . . . .	28
3.3	Scelta dei parametri $L$ , $\lambda$ , e $\alpha$ . . . . .	29
3.4	Stime dei parametri $\phi$ , $\theta$ , e $\sigma_a$ e calcolo dei parametri <i>worst-case</i> . . . . .	31
<b>4</b>	<b>Calibrazione della carta EWMA mediante approssimazione stocastica</b> . . . . .	<b>35</b>
4.1	Approssimazione stocastica . . . . .	36
4.1.1	Il problema . . . . .	36
4.1.2	Lo schema di Robbins e Monro . . . . .	36
4.1.3	Regola d'arresto . . . . .	37
4.2	Applicazione alla calibrazione di una carta di controllo . . . . .	37
4.2.1	Risultati . . . . .	38
<b>5</b>	<b>Risultati</b> . . . . .	<b>41</b>
5.1	Introduzione . . . . .	41
5.2	Simulazione dell'ARL . . . . .	41
5.3	Interpretazione . . . . .	42
5.3.1	ARL in controllo per i limiti standard e <i>worst-case</i> . . . . .	42
5.3.2	ARL fuori controllo per i limiti standard e <i>worst-case</i> . . . . .	43
5.3.3	Confronto tra le carte Shewhart ed EWMA . . . . .	44
	<b>Conclusioni</b> . . . . .	<b>50</b>
	<b>Appendice</b> . . . . .	<b>53</b>
	<b>Bibliografia</b> . . . . .	<b>71</b>

# Introduzione

Metodologie note con il nome di Controllo Statistico di Qualità (SPC, *Statistical Quality Control*) vengono ampiamente usate per il monitoraggio e miglioramento della qualità nei processi industriali. L'ipotesi fondamentale delle tecniche tradizionali di SPC è quella dell'indipendenza delle osservazioni. Sfortunatamente, l'assunzione di indipendenza dei dati, o almeno di incorrelazione, non è soddisfatta in molte situazioni reali. Ad esempio, i processi di produzione dell'industria chimica presentano tipicamente osservazioni fortemente correlate, come pure le procedure automatiche di ispezione e controllo, nelle quali le osservazioni avvengono nella stessa sequenza temporale della produzione. Fondamentalmente tutti i processi produttivi risentono di elementi inerziali, e quando la frequenza delle osservazioni diventa elevata ciò comporta la presenza di correlazione seriale. I metodi tradizionali di SPC, come le carte di controllo CUSUM (*CUMulative SUM*),  $\bar{X}$  ed EWMA (*Exponentially Weighted Moving Average*), in presenza di dati correlati forniscono risultati fuorvianti, in termini di frequenza troppo elevata di falsi allarmi. Come conseguenza, negli ultimi anni sono state condotte considerevoli ricerche sulla progettazione delle procedure di SPC adatte ai processi autocorrelati.

Un approccio che si è rivelato utile nel trattare dati autocorrelati è quello di descrivere direttamente la struttura di correlazione con appropriati modelli di serie temporali, con i quali rimuovere la presenza di autocorrelazione e successivamente applicare una carta di controllo ai residui. L'applicazione di queste carte è basata sull'assunto che le stime dei parametri del modello, che usiamo per descrivere i dati, siano molto vicine ai veri valori dei parametri.

---

In presenza di errori nelle stime del modello, l'uso delle carte progettate sotto l'assunzione che il modello sia perfetto, fa sì che si ricada nella situazione in cui la frequenza dei falsi allarmi è inaccettabilmente elevata.

Questa tesi presenta un metodo per incorporare l'informazione di incertezza sul modello nel disegno di carte di controllo EWMA basate sui residui. Si tratta del metodo introdotto da Apley e Lee (2003), che consiste nell'allargare i limiti di controllo per una quantità che dipende da tanti fattori, compreso il livello di incertezza del modello.

# Capitolo 1

## Modelli per le serie temporali

### 1.1 Modelli stazionari

Una classe importante dei modelli stocastici per le serie temporali è la classe di modelli stazionari, che assume che il processo rimanga in equilibrio attorno ad un livello medio costante. La loro caratteristica principale consiste nella capacità di rappresentare, approssimativamente, la struttura di autocorrelazione di un qualsiasi processo stazionario.

Prima di definire i modelli appartenenti a questa classe, introduciamo la seguente terminologia:

$t$	l'indice del tempo;
$Z_t, Z_{t-1}, Z_{t-2} \dots$	le deviazioni dalla media di un processo stocastico;
$\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$	i parametri media mobile (costanti);
$\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$	i parametri autoregressivi (costanti);
$a_t, a_{t-1}, a_{t-2} \dots$	le innovazioni del processo (variabili casuali indipendenti e identicamente distribuite $N(0, \sigma^2)$ );

e inoltre presentiamo nel seguente paragrafo due importanti operatori.

#### 1.1.1 L'operatore di ritardo e l'operatore di differenza

Nella letteratura che tratta le serie temporali, i modelli rappresentati in questo capitolo vengono spesso espressi tramite l'operatore di ritardo

( $B$ , *backshift operator*), definito come

$$B(X_t) = X_{t-1}$$

dove  $X_t$  indica una serie temporale.

Esso opera sull'indice temporale di una serie in modo da spostare il tempo all'indietro di un'unità temporale per formare una nuova serie.

L'operatore di ritardo è lineare, in quanto per ogni costante  $a$ ,  $b$  e  $c$ , e serie  $X_t$  e  $Y_t$ , vale

$$B(a_t X_t + b Y_t + c) = a[B(X_t)] + b[B(Y_t)] + c.$$

Siccome la  $B(X_t)$  stessa è una serie temporale, è sensato considerare  $B[B(X_t)]$ , e visto che  $B[B(X_t)] = B(X_{t-1}) = X_{t-2}$ , possiamo scrivere

$$B^2(X_t) = X_{t-2}.$$

In generale, abbiamo

$$B^m(X_t) = X_{t-m}$$

per ogni  $m$  (positivo intero).

Un altro importante operatore è l'operatore di differenza, che può essere scritto in termini di  $B$ :

$$\begin{aligned} \nabla X_t &= X_t - X_{t-1} \\ &= X_t - B(X_t) \\ &= (1 - B)X_t. \end{aligned}$$

In generale, la differenza  $d$ -esima è data da

$$\nabla^d X_t = (1 - B)^d X_t.$$

### 1.1.2 Modelli autoregressivi

Un processo stocastico,  $\{Z_t\}$ , è detto generato da un modello autoregressivo di ordine  $p$ , o abbreviato AR( $p$ ), se

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \dots + \phi_p Z_{t-p} + a_t. \quad (1.1)$$

Per esprimere questo modello tramite l'operatore di ritardo, spostiamo sulla parte sinistra del segno di uguaglianza tutti i termini che contengono  $Z$

$$Z_t - \phi_1 Z_{t-1} - \phi_2 Z_{t-2} - \dots - \phi_p Z_{t-p} = a_t$$

e scriviamo

$$\begin{aligned} Z_t - \phi_1 B(Z_t) - \phi_2 B^2(Z_t) - \dots - \phi_p B^p(Z_t) &= a_t \\ (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p) Z_t &= a_t \end{aligned}$$

ovvero

$$\Phi(B)Z_t = a_t$$

dove  $\Phi(B)$  è il polinomio caratteristico autoregressivo sviluppato in funzione di  $B$ .

In particolare, i modelli autoregressivi del primo ordine ( $p = 1$ ) e del secondo ordine ( $p = 2$ ):

$$\begin{aligned} Z_t &= \phi_1 Z_{t-1} + a_t \\ Z_t &= \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + a_t \end{aligned}$$

sono di considerevole importanza pratica.

### 1.1.3 Modelli a media mobile

Un processo stocastico,  $\{Z_t\}$ , è detto generato da un modello a media mobile di ordine  $q$ , o abbreviato MA( $q$ ), se

$$Z_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q}. \quad (1.2)$$

Possiamo scrivere questa equazione in forma equivalente

$$\begin{aligned} Z_t &= a_t - \theta_1 B(a_t) - \theta_2 B^2(a_t) - \dots - \theta_q B^q(a_t) \\ &= (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q)(a_t) \\ &= \Theta(B)a_t, \end{aligned}$$



dove  $\Theta(B)$  è il polinomio caratteristico della media mobile sviluppato in funzione di  $B$ .

I processi a media mobile del primo ordine ( $q = 1$ ) e del secondo ordine ( $q = 2$ ):

$$\begin{aligned} Z_t &= a_t - \theta_1 a_{t-1} \\ Z_t &= a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} \end{aligned}$$

sono particolarmente importanti in pratica.

#### 1.1.4 Modelli autoregressivi a media mobile

Combinando la (1.1) e la (1.2) si ottengono modelli autoregressivi a media mobile, o abbreviato ARMA( $p, q$ ). In particolare, un processo stocastico  $\{Z_t\}$  si dice generato da un modello ARMA( $p, q$ ), quando è generato dall'equazione alle differenze

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + a_t + \phi_2 Z_{t-2} + \dots + \phi_p Z_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q} \quad (1.3)$$

ovvero, in forma compatta

$$\begin{aligned} (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p) Z_t &= (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q) a_t, \\ \Phi(B) Z_t &= \Theta(B) a_t. \end{aligned}$$

Un caso speciale molto importante dei modelli autoregressivi a media mobile è il modello ARMA(1, 1), che può essere scritto in questa forma:

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + a_t - \theta_1 a_{t-1}. \quad (1.4)$$

#### 1.1.5 Le proprietà di stazionarietà e di invertibilità

Un processo stocastico,  $\{Y_t\}$ , è detto stazionario

- in senso forte se per qualsiasi  $h, k, t_1, \dots$  e  $t_k$  (tutti interi) la distribuzione di probabilità di

$$(Y_{t_1}, \dots, Y_{t_k})$$

è uguale alla distribuzione di probabilità di

$$(Y_{t_1+h}, \dots, Y_{t_k+h});$$

- in senso debole se per qualsiasi  $h, t'$  e  $t''$  (interi)

$$\begin{aligned} E(Y_{t'}) &= E(Y_{t''}), \\ \text{var}(Y_{t'}) &= \text{var}(Y_{t''}), \\ \text{cov}(Y_{t'}) &= \text{cov}(Y_{t'+h}, Y_{t''+h}). \end{aligned}$$

La prima definizione implica la seconda (almeno se i momenti coinvolti esistono).

Un processo stocastico è detto invertibile se può essere scritto in funzione dei suoi valori passati sommati ad una variabile casuale normale  $a_t$  di media 0 e varianza  $\sigma^2$ :

$$Y_t = f(Y_{t-1} + Y_{t-2}, \dots) + a_t.$$

I modelli AR( $p$ ), MA( $q$ ) e ARMA( $p, q$ ) godono di queste due proprietà nei seguenti casi:

- il processo AR( $p$ ) è sempre invertibile, ed è stazionario se, è solo se, le radici dell'equazione caratteristica  $\Phi(B) = 0$  sono esterne al cerchio unitario;
- il processo MA( $q$ ) è invertibile se, e solo se, le radici dell'equazione caratteristica  $\Theta(B) = 0$  sono tutte esterne al cerchio unitario, ed è sempre (debolmente) stazionario;
- il processo ARMA( $p, q$ ) è invertibile se, è solo se, le radici dell'equazione caratteristica  $\Theta(B) = 0$  sono tutte esterne al cerchio unitario, ed è stazionario (debolmente) se le radici dell'equazione caratteristica  $\Phi(B) = 0$  sono tutte esterne al cerchio unitario.

## 1.2 Modelli non stazionari

Le serie temporali prive di una media costante si dicono non stazionarie. Il numero di modi in cui una serie può essere non stazionaria è illimitato. Però nell'ambito industriale, che è il soggetto del nostro interesse, i processi frequentemente esibiscono un comportamento non stazionario omogeneo che può essere rappresentato tramite appropriati modelli stocastici (Box et al., 1994). Questi sono i cosiddetti modelli autoregressivi a media mobile integrati (*Autoregressive Integrated Moving Average*) o ARIMA( $p, d, q$ ), che rappresentano una estensione dei modelli ARMA nella direzione della non-stazionarietà.

### 1.2.1 Modelli ARIMA

Una serie  $\{Z_t\}$  segue un modello autoregressivo a media mobile integrato se la differenza  $d$ -esima di questa serie

$$W_t = \nabla^d Z_t = Z_t - Z_{t-d}$$

è un processo ARMA stazionario. Se  $W_t$  è ARMA( $p, q$ ), diciamo che  $Z_t$  è ARIMA( $p, d, q$ ). Fortunatamente, per scopi pratici, di solito possiamo prendere  $d = 1$  o al massimo  $d = 2$ .

Consideriamo un processo ARIMA( $p, 1, q$ ). Con  $W_t = Z_t - Z_{t-1}$  otteniamo

$$W_t = \phi_1 W_{t-1} + \phi_2 W_{t-2} + \dots + \phi_p W_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q}$$

ovvero, in termini di  $Z_t$

$$\begin{aligned} Z_t - Z_{t-1} &= \phi_1(Z_{t-1} - Z_{t-2}) + \phi_2(Z_{t-2} - Z_{t-3}) + \dots + \phi_p(Z_{t-p} - Z_{t-p-1}) \\ &\quad + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q}, \end{aligned}$$

che può essere riscritta in forma dell'equazione alle differenze

$$\begin{aligned} Z_t &= (1 + \phi_1)Z_{t-1} + (\phi_2 - \phi_1)Z_{t-2} + (\phi_3 - \phi_2)Z_{t-3} + \dots + (\phi_p - \phi_{p-1})Z_{t-p} \\ &\quad - \phi_p Z_{t-p-1} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q}. \end{aligned}$$

Possiamo esprimere questo modello in forma compatta utilizzando l'operatore di ritardo

$$\phi(B)(1 - B)^d Z_t = \theta(B)a_t.$$

### 1.3 Simulazione di serie ARMA(1, 1)

I risultati di questa tesi sono basati sul modello ARMA(1, 1). Per simulare i dati da questo modello, invece di utilizzare `arma.sim` (la funzione predefinita dell'ambiente **R**), viene utilizzata la funzione creata dall'utente, `ARMAsim`.<sup>1</sup> I codici sorgenti di questa e delle altre funzioni sono riportati nell'appendice. L'uso dell' `ARMAsim` si rivelerà utile nell'applicazione delle simulazioni Monte Carlo.

Allo scopo di controllare la bontà dei risultati ottenuti utilizzando la funzione `ARMAsim`, questa viene confrontata con la funzione `arma.sim`. Nella Figura 1.1. sono riportate due serie simulate con queste funzioni. Il modello

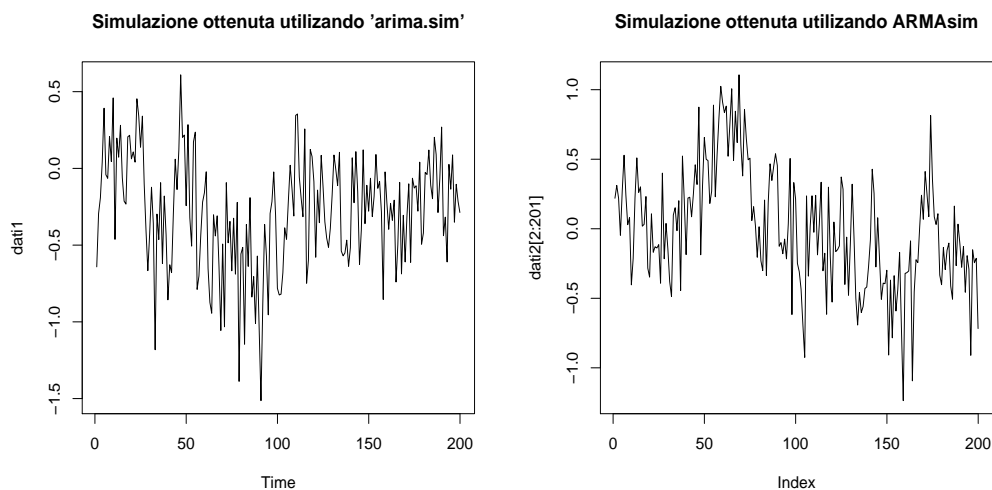


Figura 1.1: *Andamento tipico della serie ARMA(1, 1), con  $\phi = 0.91$ ,  $\theta = 0.58$  e  $\sigma_a^2 = 0.098$*

---

<sup>1</sup>Tutti calcoli in questa tesi vengono effettuati utilizzando il software statistico **R**.

utilizzato per simulare i dati è

$$\begin{aligned} Z_t &= \phi_1 Z_{t-1} + a_t - \theta_1 a_{t-1} \\ &= 0.91 Z_{t-1} + a_t - 0.58 a_{t-1}, \end{aligned}$$

con  $a_t = N(0, 0.098)$ .

Quindi, i parametri sono  $\phi_1 = 0.91$ ,  $\theta_1 = 0.58$ , e  $\sigma_a^2 = 0.098$ .

Qui è necessario sottolineare che nell'ambiente **R** il modello ARMA(1, 1) viene espresso in questa forma:

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + a_t + \theta_1 a_{t-1}.$$

Pertanto, nell'utilizzo della funzione `arima.sim` per ottenere i dati provenienti dal modello

$$Z_t = 0.91 Z_{t-1} + a_t - 0.58 a_{t-1},$$

è necessario porre  $\theta = -0.58$ , anziché 0.58.

Le due serie (Figura 1.1) sembrano avere andamenti simili. Però, se ne osserviamo i primi valori, notiamo che quelli ottenuti tramite `ARMAsim` non si allontanano tanto dallo zero. Questo comportamento è dovuto al semplice fatto che i valori iniziali di simulazione sono  $Z_t = 0$  e  $a_t = 0$ . Per precisare, osserviamo i risultati dell'utilizzo dell' `ARMAsim`<sup>2</sup>

$Z_t$	$Z_1$	$Z_2$	$Z_3$	$Z_4$	$Z_5$	$Z_6$	$\dots$
$a_t$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$\dots$
$-\theta a_{t-1}$	-0	$-\theta a_1$	$-\theta a_2$	$-\theta a_3$	$-\theta a_4$	$-\theta a_5$	$\dots$
$+\phi Z_{t-1}$	+0	$+\phi Z_1$	$+\phi Z_2$	$+\phi Z_3$	$+\phi Z_4$	$+\phi Z_5$	$\dots$

Sostituendo  $Z_{t-1}$  con  $a_{t-1}, a_{t-2}\dots$

<sup>2</sup>Gli indici di  $\phi_1$  e  $\theta_1$  vengono omissi, perché superflui.

$Z_t$	$Z_1$	$Z_2$	$Z_3$	$Z_4$	$Z_5$	$\dots$
$a_t$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$\dots$
$-\theta a_{t-1}$	$-0$	$-\theta a_1$	$-\theta a_2$	$-\theta a_3$	$-\theta a_4$	$\dots$
$+\phi Z_{t-1}$	$+0$	$+\phi a_1$	$+\phi(\phi - \theta)a_1$ $+\phi a_2$	$+\phi^2(\phi - \theta)a_1$ $+\phi(\phi - \theta)a_2$ $+\phi a_3$	$+\phi^3(\phi - \theta)a_1$ $+\phi^2(\phi - \theta)a_2$ $+\phi(\phi - \theta)a_3$ $+\phi a_4$	$\dots$

Quindi:

$$Z_1 = a_1$$

$$Z_2 = a_2 + (\phi - \theta)a_1$$

$$Z_3 = a_3 + (\phi - \theta)a_2 + \phi(\phi - \theta)a_1$$

$$Z_4 = a_4 + (\phi - \theta)a_3 + \phi(\phi - \theta)a_2 + \phi^2(\phi - \theta)a_1$$

$$Z_5 = a_5 + (\phi - \theta)a_4 + \phi(\phi - \theta)a_3 + \phi^2(\phi - \theta)a_2 + \phi^3(\phi - \theta)a_1$$

$$Z_6 = a_6 + (\phi - \theta)a_5 + \phi(\phi - \theta)a_4 + \phi^2(\phi - \theta)a_3 + \phi^3(\phi - \theta)a_2 + \phi^4(\phi - \theta)a_1$$

$\vdots$

$$Z_t = a_t + (\phi - \theta)a_{t-1} + \phi(\phi - \theta)a_{t-2} + \phi^2(\phi - \theta)a_{t-3} + \dots + \phi^{t-2}(\phi - \theta)a_1$$

oppure, in forma compatta:

$$Z_1 = a_1; \text{ e per } t > 1 : Z_t = a_t + (\phi - \theta) \sum_{i=1}^{t-1} \phi^{(t-1)-i} a_i .$$

È ovvio che le  $Z_t$  sono le somme pesate delle innovazioni precedenti e, pertanto, il comportamento sopra descritto risulta inevitabile. Comunque, all'aumentare del numero di osservazioni si raggiungerà la variabilità naturale del processo generatore dei dati. Per dimostrare questo, simuliamo 3000 volte 200 realizzazioni da un modello ARMA(1, 1) mediante la funzione `arima.sim`, ottenendo una matrice di dati 200 x 3000:

tempo	serie			
	$Y_1$	$Y_2$	$\dots$	$Y_{3000}$
$t_1$	$y_{1,1}$	$y_{2,1}$	$\dots$	$y_{3000,1}$
$t_2$	$y_{1,2}$	$y_{2,2}$	$\dots$	$y_{3000,2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$t_{200}$	$y_{1,200}$	$y_{2,200}$	$\dots$	$y_{3000,200}$

Per ogni riga della matrice calcoliamo la deviazione standard. Ripetiamo questa simulazione utilizzando la funzione `ARMA``sim` e riportiamo i risultati nella Figura 1.2.

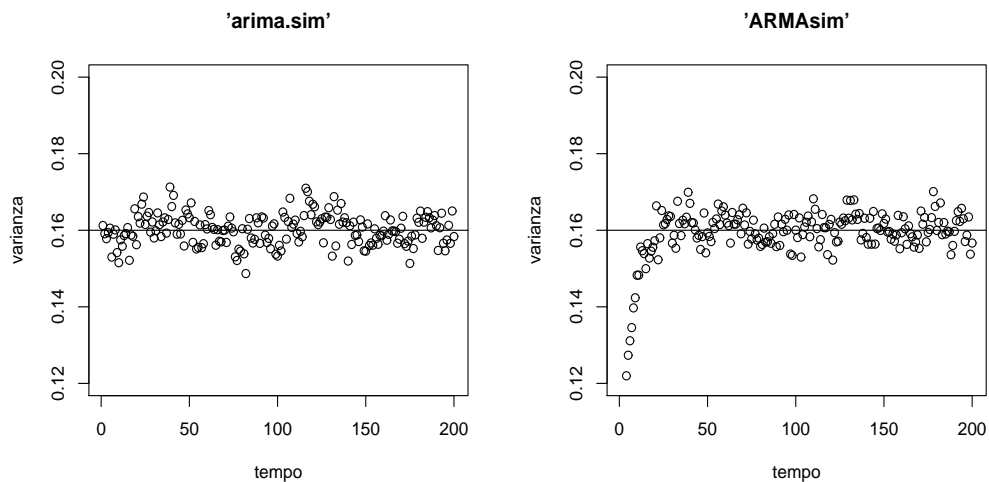


Figura 1.2: *Le variabilità, per ogni istante temporale  $t = 1, 2, \dots, 200$ , dei dati simulati mediante le funzioni `arima.sim` e `ARMA``sim` (numero di dati: 200, numero di replicazioni: 3000).*

Ricordiamo che la variabilità dei dati di un processo stazionario non dipende dal tempo, ovvero, per ogni  $t'$  e  $t''$ , vale l'equazione

$$\text{var}(Y_{t'}) = \text{var}(Y_{t''}).$$

Per quanto riguarda i dati simulati mediante la funzione `arima.sim`, notiamo che le varianze, per ogni istante temporale  $t = 1, 2, \dots, 200$ , sono molto

---

vicine alla varianza teorica del modello ARMA(1, 1):

$$\text{var}(Y_t) = \frac{1 - 2\theta\phi + \theta^2}{1 - \phi^2} \sigma_a^2,$$

che è nel caso specifico pari a 0.16. Questo, invece, non vale per le serie ottenute mediante la funzione `ARMAsim`, perché i primi istanti temporali di queste serie sono caratterizzati da una varianza relativamente piccola. Quindi, per rendere utilizzabile una serie simulata utilizzando la funzione `ARMAsim`, è necessario eliminare i primi  $K$  valori (per esempio  $K=50$ ).





## Capitolo 2

# Controllo statistico di un processo produttivo

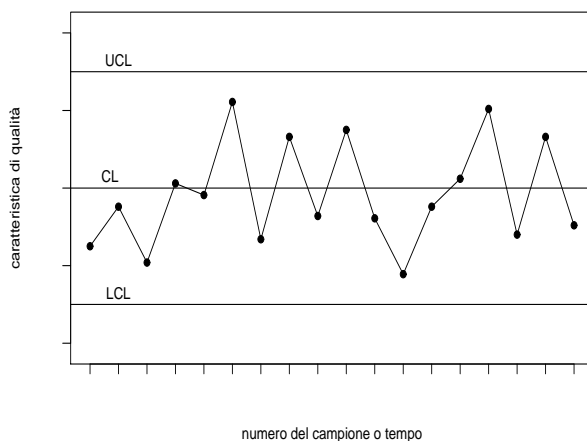
### 2.1 Fonti di variabilità nei processi produttivi

Ogni processo produttivo è caratterizzato da una certa variabilità intrinseca o naturale, che è il risultato dell'effetto cumulato di molti piccoli ma ineliminabili fattori costanti o casuali. Un processo la cui variabilità è dovuta solo a questi fattori viene detto **sotto controllo**. Esistono poi fonti di variabilità che non sono riconducibili a fattori casuali, e che influiscono sulla qualità dei prodotti. Queste fonti di variabilità, chiamate fattori specifici, sono presenti solo occasionalmente nel processo produttivo e principalmente sono dovute a tre fattori: macchinari non ben funzionanti, errori degli operatori o materiali grezzi difettosi. Un processo che sta funzionando in presenza di fattori specifici viene detto **fuori controllo**. La presenza dei segnali che il processo sia fuori controllo rende necessarie azioni correttive o di indagini sul processo per individuare ed eliminare le cause che hanno portato all'insorgere di quei fattori specifici. L'obiettivo primario del controllo statistico di un processo produttivo è di individuare il più velocemente i cambiamenti nel processo che portano alla produzione di pezzi di qualità non accettabile. Uno strumento ampiamente usato per questi scopi è la carta di controllo.

## 2.2 Carte di controllo

Le carte di controllo sono una classe di tecniche statistiche pensate per l'analisi obiettiva delle caratteristiche di un processo stocastico e per l'individuazione di variazioni sistematiche nel suo andamento. Due parametri che vengono maggiormente monitorati sono il livello medio del processo e la sua variabilità. Una tipica carta di controllo è quella riportata nella Figura 2.1, che descrive una certa qualità di un prodotto misurata in diversi istanti temporali. La carta riporta una linea centrale che rappresenta il valor medio della qualità, in genere corrispondente al valore desiderato quando il processo è sotto controllo. Le altre due linee orizzontali vengono chiamate limiti di controllo superiore (UCL, *Upper Control Limit*) e limite di controllo inferiore (LCL, *Lower Control Limit*). Sequenzialmente nel tempo, i valori campionari della statistica di controllo vengono confrontati con i limiti di controllo, che devono essere scelti in modo tale che, se il processo è sotto controllo, la maggior parte dei valori campionari cadrà al loro interno e nessun intervento correttivo sul processo sarà necessario. Se invece un punto cade al di fuori di tali limiti, questo dovrà essere interpretato come un'evidenza del fatto che il processo è fuori controllo.

L'efficienza delle carte di controllo dipende dalla rapidità con cui vengono segnalate eventuali anomalie e dal numero di segnalazioni dei falsi allarmi. La valutazione dell'efficienza di una carta avviene in termini di RL (*Run Length*) e del suo valore atteso ARL (*Average Run Length*). La *run length* è una variabile casuale che rappresenta il primo istante temporale in corrispondenza del quale la statistica di controllo fuoriesce dai limiti di controllo. In una situazione ideale fintanto che il processo rimane in controllo, l'ARL della carta dovrebbe essere estremamente grande, mentre al minimo cambiamento la segnalazione dovrebbe avvenire istantaneamente. In pratica anomalie, soprattutto se di modesta entità, vengono segnalate con un certo ritardo o non vengono rilevate affatto, mentre valori assolutamente accettabili causano a volte falsi allarmi.

Figura 2.1: *Tipica carta di controllo*

## 2.3 Carte di controllo EWMA

La carta di controllo a media mobile pesate esponenzialmente (EWMA, *Exponentially Weighted Moving Average*) è stata ideata per scoprire salti di livello di entità limitata. Essa viene tipicamente adoperata per osservazioni singole.

La statistica EWMA, al tempo  $t$ , è definita come

$$y_t = (1 - \lambda)y_{t-1} + \lambda x_t, \quad (2.1)$$

dove  $0 < \lambda \leq 1$  è una costante che determina quanto peso assegnare all'ultima osservazione  $x_t$ . Il valore iniziale della statistica solitamente va posto pari al valore di riferimento, ovvero

$$y_0 = \mu_0.$$

Il nome della carta deriva dal fatto che la statistica  $y_t$  è una media ponderata di tutte le osservazioni precedenti (o delle medie dei campioni precedenti):

$$y_t = \lambda \sum_{j=0}^{t-1} (1 - \lambda)^j x_{t-j} + (1 - \lambda)^t y_0.$$

I pesi  $\lambda(1-\lambda)^j$  decrescono in progressione geometrica e la loro somma è pari all'unità, in quanto la loro somma parziale è:

$$\lambda \sum_{j=0}^{t-1} (1-\lambda)^j = \lambda \left[ \frac{1 - (1-\lambda)t}{1 - (1-\lambda)} \right] = 1 - (1-\lambda)^t.$$

Se le osservazioni sono determinazioni di variabili casuali indipendenti di varianza comune  $\sigma^2$ , la varianza di  $y_t$  è pari a

$$\sigma_{y_t}^2 = \sigma^2 \left( \frac{\lambda}{2-\lambda} \right) [(1 - (1-\lambda)^{2t})].$$

Siccome, al crescere di  $t$ , il termine  $1 - (1-\lambda)^{2t}$  si approssima all'unità, la varianza asintotica di  $y_t$  è pari a

$$\sigma_{y_t}^2 = \sigma^2 \left( \frac{\lambda}{2-\lambda} \right).$$

Quindi, la carta EWMA dovrebbe essere costruita rappresentando le  $y_t$  in funzione del numero di osservazioni  $t$ , dove la linea centrale e i limiti di controllo vanno posti pari ai seguenti valori:

$$\begin{aligned} UCL &= \mu_0 + L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda} [1 - (1-\lambda)^{2t}]} \\ CL &= \mu_0 \\ LCL &= \mu_0 - L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda} [1 - (1-\lambda)^{2t}]} \end{aligned}$$

dove il fattore  $L$  rappresenta l'ampiezza dei limiti di controllo. I criteri di scelta dei parametri  $L$  e  $\lambda$  verranno discussi nel paragrafo (3.3).

Utilizzando la varianza asintotica di  $y_t$ , si ottengono i limiti asintotici:

$$\begin{aligned} UCL &= \mu_0 + L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}} \\ CL &= \mu_0 \\ LCL &= \mu_0 - L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}}. \end{aligned}$$

In questa tesi vengono considerati soltanto i limiti asintotici. Comunque, volendo migliorare la sensibilità delle prestazioni della carta di controllo,

nello scoprire il presentarsi di situazioni anomale, già presenti all'inizio delle operazioni di controllo, potrebbero essere usati i limiti non asintotici.

Un modo alternativo di procedere è di calcolare le statistiche  $y_t$ , non direttamente sui dati originali  $x_t$ , ma sulle loro deviazioni dalla media  $x_t - \mu_0$ . In questo caso la linea centrale e i limiti di controllo vanno posti a

$$\begin{aligned} UCL &= +L\sigma\sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}} \\ CL &= 0 \\ LCL &= -L\sigma\sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}}. \end{aligned}$$

Nel seguito verrà utilizzato solamente quest'ultimo modo di procedere.

## 2.4 Effetto dell'autocorrelazione del processo sulle carte EWMA

Per un'applicazione corretta di una carta di controllo EWMA convenzionale, è necessario che sia soddisfatta l'assunzione di indipendenza dei dati. Il progresso delle tecniche per misurare e collezionare i dati ha creato il potenziale per l'ispezione più frequente dei processi produttivi. Siccome, fondamentalmente tutti i processi produttivi risentono di elementi inerziali, la frequenza elevata delle osservazioni comporta la presenza di correlazione seriale. La carta EWMA convenzionale, applicata ai dati autocorrelati, non funziona in modo corretto, nel senso che, in presenza di autocorrelazione positiva, l'ARL in controllo può essere molto più piccola rispetto al suo valore desiderato. Quindi, per trattare dati autocorrelati è necessario ricorrere all'uso di qualche altra tecnica adatta a questo fenomeno.

Uno dei possibili approcci è quello basato sui residui, che consiste nelle tre fasi seguenti:

**1) Si descrive la struttura di correlazione con un appropriato modello di serie temporali.**

Tipicamente viene assunto che i dati  $x_t$  seguono un modello  $ARMA(p, q)$ .

Usando la notazione standard per le serie temporali, introdotta nel Capitolo 1., il modello ARMA può essere scritto come

$$x_t = \frac{\Theta(B)}{\Phi(B)} a_t, \quad (2.2)$$

dove  $\Theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q$ ,  $\Phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p$ , e  $a_t$  è la sequenza delle innovazioni indipendenti e identicamente distribuite (*iid*), con media pari a 0 e varianza  $\sigma_a^2$ . Viene assunto che il processo sia sotto controllo, e perciò le  $x_t$  avranno media nulla, fino a quando il processo non subisce un cambiamento.

**2) Si rimuove la presenza di autocorrelazione utilizzando il modello individuato.**

I residui vengono generati attraverso  $e_t = \Theta^{-1}(B)\Phi(B)x_t$ . Dall'equazione 2.2 segue che  $e_t$  è esattamente pari alla sequenza  $a_t$  (*iid*)

$$e_t = \frac{\Phi(B)}{\Theta(B)} x_t = \frac{\Phi(B)\Theta(B)}{\Theta(B)\Phi(B)} a_t = a_t.$$

**3) Si applica la carta EWMA direttamente ai residui (errori di previsione ad un passo).**

In una procedura tipica di progettazione della carta EWMA, sotto l'assunzione che il modello sia perfetto, vengono specificati  $\lambda$  e  $L$ , dopo di che i limiti di controllo vanno posti pari a

$$\{LCL, UCL\} = \pm L\hat{\sigma}_y, \quad (2.3)$$

dove

$$\hat{\sigma}_y = \hat{\sigma}_a \sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda}} = \hat{\sigma}_a \sqrt{\frac{1 - \nu}{1 + \nu}} \quad (2.4)$$

è la stima della deviazione standard asintotica della statistica  $y_t$ , e  $\nu = 1 - \lambda$ . Questa stessa procedura può essere applicata direttamente ai residui, tenendo conto che la statistica EWMA basata sui residui è definita come

$$y_t = (1 - \lambda)y_{t-1} + \lambda e_t. \quad (2.5)$$

## 2.5 Effetto dell'incertezza del modello stimato

L'ipotesi fondamentale, che deve essere soddisfatta per il funzionamento corretto delle carte di controllo basate sui residui é che il modello di serie temporali che usiamo per descrivere i dati sia perfetto, cioè il più vicino possibile alla distribuzione reale dei dati. Siccome il modello deve essere stimato dai dati, gli errori di stima del modello saranno inevitabili. Se le carte basate sui residui sono state progettate sotto l'assunzione che il modello sia perfetto, la presenza di questi errori farà sì che si ricada nella situazione in cui il valore dell'ARL in controllo può essere sostanzialmente più piccolo del valore fissato.

Per formalizzare questo fatto, indichiamo con  $\{\phi_i\}_{i=1}^p$ ,  $\{\theta_i\}_{i=1}^q$  e  $\sigma_a^2$  i parametri del modello ARMA, con  $\{\hat{\phi}_i\}_{i=1}^p$ ,  $\{\hat{\theta}_i\}_{i=1}^q$  e  $\hat{\sigma}_a^2$  le loro stime, e con  $\hat{\Phi}(B)$  e  $\hat{\Theta}(B)$  i polinomi AR e MA basati su queste stime. Per semplicità, assumiamo che  $p$  e  $q$  siano noti. I residui sono generati utilizzando il modello stimato

$$e_t = \frac{\hat{\Phi}(B)}{\hat{\Theta}(B)} x_t = \frac{\hat{\Phi}(B)\Theta(B)}{\hat{\Theta}(B)\Phi(B)} a_t. \quad (2.6)$$

Con gli errori delle stime i residui si comportano come un processo ARMA( $p+q$ ,  $p+q$ ) e non sono più *iid*.

Supponiamo che la carta EWMA basata sui residui venga usata per sorvegliare il processo ARMA. Combinando le equazioni 2.5 e 2.6, e introducendo la sostituzione  $\nu = 1 - \lambda$ , segue che la statistica EWMA,  $y_t$ , si comporta come un modello ARMA( $p+q+1$ ,  $p+q$ )

$$\begin{aligned} y_t &= \nu y_{t-1} + (1 - \nu)e_t \\ y_t - \nu y_{t-1} &= (1 - \nu)e_t \\ y_t - \nu B y_t &= (1 - \nu)e_t \\ (1 - \nu B)y_t &= \frac{1 - \nu}{1 - \nu B} e_t \\ y_t &= \frac{(1 - \nu)\hat{\Phi}(B)\Theta(B)}{(1 - \nu B)\hat{\Theta}(B)\Phi(B)} a_t. \end{aligned} \quad (2.7)$$

È ovvio che, in presenza degli errori di stima del modello, i residui conservano una parte di autocorrelazione dei dati originali, e se la carta EWMA viene



costruita su questi residui, l'impatto negativo sulla prestazione della carta sarà inevitabile.

Al fine di fornire una certa robustezza nei confronti degli errori di stime del modello, nel prossimo capitolo si presenta un disegno della carta di controllo EWMA basata sui residui. Secondo questo approccio, detto *worst-case*, i limiti di controllo vengono allargati di una quantità che dipende da tanti fattori, compreso il livello di incertezza sul modello (Apley e Lee, 2003).

## Capitolo 3

# Disegno della carta EWMA per processi autocorrelati in presenza di incertezza sul modello

### 3.1 Introduzione

Per includere l'informazione di incertezza sul modello nella progettazione delle carte EWMA per dati autocorrelati e per creare una protezione contro le situazioni nelle quali la frequenza dei falsi allarmi è sostanzialmente più elevata di quella desiderata, una ragionevole precauzione consiste nell'utilizzare i limiti di controllo che sono più ampi rispetto a quelli considerati sotto l'assunzione che il modello sia perfetto.

Per un valore specificato di  $\lambda$  e per le stime dei parametri ARMA, l'equazione 2.7 implica che la deviazione standard della statistica EWMA,  $\sigma_y$ , è funzione dei veri parametri ignoti. Considerando incertezza dei veri parametri, il paragrafo 3.2 deriva un'approssimazione dell'intervallo di confidenza di livello  $1 - \alpha$  per  $\sigma_y$ , per qualche valore specificato di  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ . Indichiamo con  $\sigma_{y,\alpha}$  la frontiera superiore di questo intervallo di confidenza, che può essere vista come il valore massimo, cioè assunto nel caso peggiore, dalla  $\sigma_y$ . Per questo motivo la  $\sigma_{y,\alpha}^2$  viene chiamata la varianza *worst-case* della

statistica EWMA.

Il metodo proposto da Apley e Lee (2003) consiste nel sorvegliare le stesse statistiche EWMA,  $y_t$ , come nel caso standard, usando però i limiti *worst-case* al posto di quelli standard (2.3)

$$\{\text{LCL}, \text{UCL}\} = \pm L\sigma_{y,\alpha}. \quad (3.1)$$

### 3.2 Varianza *worst-case* della carta EWMA

La statistica EWMA (2.5) può essere riscritta come:

$$y_t = (1 - v)G(B)a_t = (1 - v) \sum_{j=0}^{\infty} G_j a_{t-j},$$

dove

$$G(B) = \frac{\hat{\Phi}(B)\Theta(B)}{(1 - vB)\hat{\Theta}(B)} = \sum_{j=0}^{\infty} G_j B^j$$

e  $\{G_j : j = 1, 2, 3, \dots\}$  sono i coefficienti della risposta all'impulso della funzione di trasferimento  $G(B)$  del modello ARMA( $p + q + 1, p + q$ ). Per un insieme fissato dei parametri ARMA e delle loro stime, la varianza EWMA è (Box et al., 1994)

$$\sigma_y^2 = \sigma_a^2 (1 - v)^2 \sum_{j=0}^{\infty} G_j^2. \quad (3.2)$$

Definiamo il vettore dei parametri ARMA  $\gamma = [\phi_1 \ \phi_2 \dots \phi_p \ \theta_1 \ \theta_2 \dots \theta_q]^T$ , e indichiamo con  $\hat{\gamma}$  il vettore delle stime puntuali dei parametri. Per trovare l'approssimazione dell'intervallo di confidenza per  $\sigma_y$ , usiamo l'approssimazione di Taylor del primo ordine del rapporto  $\sigma_y^2/\hat{\sigma}_y^2$  attorno  $\hat{\gamma} = \gamma$ . Se definiamo il vettore degli errori dei parametri con  $\tilde{\gamma} = \hat{\gamma} - \gamma$ , allora l'approssimazione di Taylor del primo ordine è:

$$\frac{\sigma_y^2}{\hat{\sigma}_y^2} \cong 1 + V^T \tilde{\gamma}, \quad (3.3)$$

dove

$$V = \left[ \frac{-2v}{\Phi(v)} \quad \frac{-2v^2}{\Phi(v)} \quad \dots \quad \frac{-2v^p}{\Phi(v)} \quad \frac{-2v}{\Theta(v)} \quad \frac{-2v^2}{\Theta(v)} \quad \dots \quad \frac{-2v^p}{\Theta(v)} \quad -\sigma_a^{-2} \right]^T, \quad (3.4)$$

con  $\Phi(v) = \phi(B)|_{B=v} = 1 - \phi_1 v - \phi_2 v^2 - \dots - \phi_p v^p$   
e  $\Theta(v) = \theta(B)|_{B=v} = 1 - \theta_1 v - \theta_2 v^2 - \dots - \theta_p v^p$ .

Se il modello è ARMA(1, 1) la (3.4) diventa

$$V = \begin{bmatrix} -2v & 2v & -\hat{\sigma}_\alpha^{-2} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{-2v}{1 - \hat{\phi}_1 v} & \frac{2v}{1 - \hat{\theta}_1 v} & -\hat{\sigma}_\alpha^{-2} \end{bmatrix}^T. \quad (3.5)$$

Indichiamo con  $N$  il numero di osservazioni nel campione utilizzato per stimare i parametri ARMA. Per la maggior parte dei metodi di stima, la distribuzione di  $\tilde{\gamma}$ , per  $N$  grande, è approssimativamente normale con media 0 e matrice di varianze e covarianze  $\Sigma_\gamma$  che è inversamente proporzionale a  $N$  (Box et al., 1994). Un metodo di calcolo di  $\Sigma_\gamma$  verrà esposto nel sottoparagrafo 3.2.1. Dalla distribuzione approssimata di  $\tilde{\gamma}$ , segue che il rapporto  $\sigma_y^2/\hat{\sigma}_y^2$  nella (3.3) si distribuisce approssimativamente come una normale di media 1 e varianza  $V^T \Sigma_\gamma V$ . Perciò, per ogni  $0 < \alpha < 1$ ,

$$\begin{aligned} 1 - \alpha &\cong Pr[\sigma_y^2/\hat{\sigma}_y^2 \leq 1 + z_\alpha(V^T \Sigma_\gamma V)^{1/2}] \\ &= Pr[\sigma_y \leq \{1 + z_\alpha(V^T \Sigma_\gamma V)^{1/2}\}^{1/2}], \end{aligned}$$

dove  $z_\alpha$  indica il percentile  $\alpha$  della distribuzione normale standardizzata. Sostituendo  $\Sigma_\gamma$  e  $V$  rispettivamente con  $\hat{\Sigma}_\gamma$  e

$$\hat{V} = \begin{bmatrix} \frac{-2v}{\hat{\Phi}(v)} & \frac{-2v^2}{\hat{\Phi}(v)} & \dots & \frac{-2v^p}{\hat{\Phi}(v)} & \frac{-2v}{\hat{\Theta}(v)} & \frac{-2v^2}{\hat{\Theta}(v)} & \dots & \frac{-2v^p}{\hat{\Theta}(v)} & -\sigma_a^{-2} \end{bmatrix}^T, \quad (3.6)$$

si ottiene l'intervallo di confidenza (approssimato), di livello  $1 - \alpha$ , per la deviazione standard della statistica EWMA:

$$\sigma_y \leq \sigma_{y,\alpha} = \hat{\sigma}_y \{1 + z_\alpha(V^T \Sigma_\gamma V)^{1/2}\}. \quad (3.7)$$

Dopo aver selezionato  $L$ , come verrà descritto nel seguente paragrafo,  $\sigma_{y,\alpha}$  può essere usato per calcolare i limiti di controllo *worst-case*.

L'approssimazione di Taylor (3.3) ha una interpretazione interessante quando il processo è ARMA(1, 1). In questo caso, la (3.3) si riduce a

$$\sigma_y^2 \cong \hat{\sigma}_y^2 \left\{ 1 - \frac{2v(\hat{\phi}_1 - \phi_1)}{1 - \phi_1 v} + \frac{2v(\hat{\theta}_1 - \theta_1)}{1 - \theta_1 v} - \frac{\hat{\sigma}_a^2 - \sigma_a^2}{\sigma_a^2} \right\}$$

La varianza della statistica EWMA aumenta (rispetto al valore assunto di  $\hat{\sigma}_y^2$ ) quando  $\phi_1$  è sottostimato ( $\hat{\phi}_1 < \phi_1$ ) e/o  $\theta_1$  è sovrastimato ( $\hat{\theta}_1 > \theta_1$ ). Il motivo sta nel fatto che l'autocorrelazione di  $x_t$  è sottostimata in questa situazione e, pertanto, i residui presentano un'autocorrelazione positiva. Quando i residui sono autocorrelati positivamente, la varianza EWMA è più grande rispetto al caso in cui i residui sono *iid* (Adams e Tsang, 1998).

L'intervallo di confidenza (3.7) e l'espressione per  $\hat{\Sigma}_\gamma$  (3.8) sono validi anche per il processo ARIMA( $p, 1, q$ ) della forma  $x_t = (1-B)^{-1}\Phi^{-1}(B)\Theta(B)a_t$ . La ragione sta nel fatto che, stimando i parametri del modello ARIMA (sui dati  $x_t$ ), in realtà si stima il modello ARMA sulle differenze prime di  $x_t$ , ovvero  $(1-B)x_t$ . Siccome i residui sono sempre generati tramite l'equazione 2.6, con  $x_t$  sostituito dalla differenza prima di  $x_t$ , la statistica EWMA segue lo stesso modello ARMA( $p+q+1, p+q$ )(2.7). Pertanto, le stime dei parametri hanno esattamente lo stesso effetto sulla varianza EWMA come nel caso ARMA (Apley e Lee, 2003).

### 3.2.1 Calcolo della matrice di varianze e covarianza $\Sigma_\gamma$

Per campioni di grandezza sufficientemente grande, la matrice di varianze e covarianze è (Box et al., 1994)

$$\Sigma_\gamma \cong \begin{bmatrix} \Sigma_\eta & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 2N^{-1}\sigma_\alpha^4 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

dove  $\mathbf{0}$  sta ad indicare il vettore colonna dei  $p+q$  zeri, e  $\Sigma_\eta$  indica la covarianza di  $\eta = [\phi_1 \ \phi_2 \ \dots \ \phi_p \ \theta_1 \ \theta_2 \ \dots \ \theta_q]^T$ .

Siccome i valori dei parametri ARMA sono ignoti, nella (3.8) devono essere sostituiti con le loro stime. Box et al. (1994) dimostrano che per i processi AR(1), MA(1), e ARMA(1, 1) le stime delle covarianze di  $\eta$  si riducono a quanto segue:

Modello ARMA(1, 1):

$$\hat{\Sigma}_\eta = \frac{(1 - \hat{\phi}\hat{\theta})}{N(\hat{\phi} - \hat{\theta})^2} \times \begin{bmatrix} (1 - \hat{\phi}^2)(1 - \hat{\phi}\hat{\theta}) & (1 - \hat{\phi}^2)(1 - \hat{\theta}^2) \\ (1 - \hat{\phi}^2)(1 - \hat{\theta}^2) & (1 - \hat{\theta}^2)(1 - \hat{\phi}\hat{\theta}) \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

Modello AR(1):

$$\hat{\Sigma}_\eta = \frac{1 - \hat{\phi}^2}{N}, \quad (3.10)$$

Modello MA(1):

$$\hat{\Sigma}_\eta = \frac{1 - \hat{\theta}^2}{N}. \quad (3.11)$$

### 3.3 Scelta dei parametri $L$ , $\lambda$ , e $\alpha$

Nel disegno di una carta di controllo EWMA per dati indipendenti e identicamente distribuiti, senza prendere in considerazione incertezza del modello, i parametri  $\lambda$  e  $L$  vengono spesso selezionati congiuntamente, nel modo seguente:

- si fissano il valore desiderato dell'ARL in controllo (indichiamolo con  $ARL_d$ ) e la minima ampiezza del salto nella media del processo che si desidera segnalare ( $\delta$ );
- si scelgono  $\lambda$  e  $L$  che, per i valori specificati dell' $ARL_d$  e  $\delta$ , minimizzano l'ARL fuori controllo.

Lucas e Saccucci (1990) forniscono le tabelle per selezionare i valori di  $\lambda$  e  $L$ , che sono ottimali in questo senso, nel caso di indipendenza delle osservazioni.

Per le carte EWMA applicate ai residui in presenza dei dati autocorrelati, la scelta della coppia dei valori di  $\lambda$  e  $L$  che soddisfano qualche criterio di ottimalità è proibitivamente complessa. Per tale ragione, si raccomanda di scegliere prima  $\lambda$  come se il modello fosse perfetto. Lu e Reynolds (1999) propongono di usare  $0.05 < \lambda \leq 0.5$ , dove si intende che valori piccoli di  $\lambda$  risultano migliori per scoprire *shift* piccoli, ma più lenti nell'individuazione di quelli grandi.

Dopo che abbiamo specificato  $\lambda$ , supponiamo di utilizzare le tabelle di Lucas e Saccucci (1990) per selezionare  $L$  sulla base di qualche valore dell' $ARL_d$ . Se non vi è presente incertezza sul modello stimato e i residui sono *iid*, l'uso di questo valore di  $L$ , nei limiti di controllo standard della carta EWMA (2.3), fornirà il valore desiderato dell' $ARL_d$ . Per le situazioni nei quali è presente incertezza sul modello, si raccomanda l'uso di questo stesso valore di  $L$ ,

nei limiti *worst-case* della carta EWMA (3.1). Nei casi in cui la deviazione standard  $\sigma_y$  della statistica EWMA  $y_t$ , coincide con il *worst-case* valore  $\sigma_{y,\alpha}$ , i limiti (3.1) forniranno il valore dell'ARL in controllo approssimativamente uguale al valore desiderato  $ARL_d$ .

Potrebbe anche essere ragionevole l'uso di un valore leggermente più piccolo di  $L$ , nei limiti (3.1)

Quando non ci sono errori di stima del modello, e vengono usati i limiti dati dalla (2.3), il valore di  $L$  con il quale si ottiene il valore desiderato di ARL in controllo, dipende da  $\lambda$ . Questo in primo luogo perché l'autocorrelazione della statistica EWMA dipende da  $\lambda$ . Al diminuire di  $\lambda$ , l'autocorrelazione di  $y_t$  incrementa, e pertanto, per ogni  $L$  fissato, incrementa anche l'ARL in controllo. Di conseguenza, se diminuisce  $\lambda$ , lo stesso valore dell'ARL in controllo si potrà ottenere con un valore di  $L$  più piccolo.

Quando invece i veri valori dei parametri sono tali che  $\sigma_y$  coincide con  $\sigma_{y,\alpha}$ , l'autocorrelazione dei residui sarà, generalmente, positiva e l'autocorrelazione di  $y_t$  sarà più grande rispetto a quella che si ha nelle situazioni in cui non vi siano errori nel modello. Da questo consegue che quando  $\sigma_y$  coincide con  $\sigma_{y,\alpha}$ , un valore prefissato leggermente più piccolo di  $L$  fornirà l' $ARL_d$ .

D'altra parte, l'approssimazione di Taylor del primo ordine della varianza della statistica EWMA, che è stata utilizzata per sviluppare l'espressione di  $\sigma_{y,\alpha}$ , tende a sottostimare la varianza EWMA. Quindi,  $\sigma_{y,\alpha}$  che si ottiene con questa approssimazione è leggermente più piccola rispetto a quello che si otterrebbe con un intervallo di confidenza più preciso.

Siccome i limiti *worst-case* sono il prodotto di  $L$  e  $\sigma_{y,\alpha}$ , è consigliabile compensare tale effetto di approssimazione prendendo  $L$  direttamente dalle tabelle di Lucas e Saccucci (1990) invece di usare valori leggermente più piccoli. Notiamo che l' $ARL_d$ , che viene specificato nel disegno della carta di controllo, dovrebbe essere visto come la *worst-case* ARL che si ottiene quando la varianza della statistica EWMA è uguale al suo valore *worst-case*. Se i veri valori dei parametri ARMA e la varianza della statistica EWMA sono vicini alle loro stime, l'ARL in controllo sarà, generalmente, più grande di

quello specificato. E' necessario tener conto di questo fatto nella selezione dell'ultimo parametro  $\alpha$ . Un valore piccolo di  $\alpha$ , come  $\alpha = 0.01$  può portare ad un allargamento dei limiti di controllo, in misura tale che diventi difficile individuare la maggior parte degli *shift* di interesse. Apley e Lee (2003) propongono di usare  $0.1 \leq \alpha \leq 0.3$ .

### 3.4 Stime dei parametri $\phi$ , $\theta$ , e $\sigma_a$ e calcolo dei parametri *worst-case*

Il disegno della procedura descritta nella sezione precedente viene illustrata a partire da un insieme di  $N = 197$  misurazioni della concentrazione di un processo chimico (Box et al., 1994). Il modello più adattato ai dati è un ARMA(1, 1) (Apley e Lee, 2003), e per ottenere le stime dei parametri utilizziamo la funzione `arima` :

```
#input:
arima(concetrazone,order=c(1,0,1))
#output
Call:
arima(x = concetrazone, order = c(1, 0, 1))
```

```
Coefficients:
          ar1          ma1  intercept
          0.9087  -0.5758    17.0654
s.e.      0.0532   0.1156     0.0992
```

```
sigma^2 estimated as 0.09768:  log likelihood = -50.75,  aic = 109.49
```

Quindi, tenendo conto che la forma in cui viene espresso il modello ARMA(1, 1), in questa tesi, differisce da quella utilizzata nell'ambiente  $\mathbf{R}$  per il segno del parametro  $\theta$ , le stime dei parametri sono:  $\hat{\phi} = 0.909$ ,  $\hat{\theta} = 0.576$ , e  $\hat{\sigma}_a^2 = 0.098$ . Utilizzando la (3.9), si ottiene la matrice di varianze e covarianze stimata



$$\hat{\Sigma}_\gamma = \begin{bmatrix} 1.814 & 2.544 & 0 \\ 2.544 & 6.960 & 0 \\ 0 & 0 & 0.097 \end{bmatrix} \times 10^{-3}.$$

Se vengono specificati  $\lambda = 0.1$  e  $ARL_d = 500$ , le tabelle di Lucas e Saccucci (1990) indicano che dovrebbe essere usato  $L=2.2814$ . Siccome la deviazione standard della statistica EWMA è  $\hat{\sigma}_y = \hat{\sigma}_a(1-v)^{1/2}(1+v)^{-1/2} = 0.0718$ , i limiti di controllo standard diventano  $\pm L\hat{\sigma}_y = 0.202$ . Se al parametro  $\alpha$  viene attribuito il valore 0.1, utilizzando la (3.6) e la (3.7) si ottengono  $\hat{V} = [-9.88 \ 3.74 \ -10.24]^T$ , e  $\sigma_{y,\alpha} = \sqrt{0.007189061} = 0.08478833$ . Quindi, i limiti di controllo *worst-case* sono  $\pm L\sigma_{y,\alpha} = \pm 0.239$ .

La Figura 3.1 mostra la carta di controllo EWMA applicata alle 600 osservazioni derivate da un processo che ha questi parametri  $\phi = 0.944$ ,  $\theta = 0.573$ , e  $\sigma_a^2 = 0.102$

Questi valori sono stati scelti perché in questo caso l'approssimazione di Taylor (3.3) della  $\hat{\sigma}_y^2$  (con  $V$  sostituito da  $\hat{V}$ ) risulta uguale alla *worst-case* varianza ( $\sigma_{y,\alpha}^2 = 0.007189061$ ):

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_y^2}{\hat{\sigma}_y^2} &\cong 1 + \hat{V}^T \tilde{\gamma} \\ \sigma_y^2 &\cong \hat{\sigma}_y^2 \{1 + \hat{V}^T \tilde{\gamma}\} \\ &= 0.005141053 \times \left\{ 1 + \begin{bmatrix} -9.88 & 3.74 & -10.24 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.909 - 0.944 \\ 0.576 - 0.573 \\ 0.0978 - 0.102 \end{bmatrix} \right\} \\ &= 0.007215377 \end{aligned}$$

È possibile far vedere che tra tutte le combinazioni di parametri, con le quali l'approssimazione di Taylor risulta uguale a  $\sigma_{y,\alpha}^2$ , questi valori hanno la massima verosimiglianza, ovvero minimizzano  $\tilde{\gamma}^T \hat{\Sigma}_\gamma^{-1} \tilde{\gamma}$  (si veda la funzione **WCvar** nell'appendice).

Nei grafici vengono portati sia i limiti standard che i limiti *worst-case*. Siccome i dati vengono simulati con la media uguale a zero, tutti i casi nei quali

la statistica EWMA fuoriesce dai limiti di controllo sono falsi allarmi. Con i limiti di controllo standard i falsi allarmi vengono registrati approssimativamente agli istanti temporali 100, 400, e 500, mentre i limiti di controllo *worst-case* eliminano i primi due.

La Figura 3.2, che è simile alla Figura 3.1 eccetto il fatto che i veri parametri ARMA sono stati scelti in modo tale che coincidano con le loro stime, illustra uno svantaggio del uso dei limiti *worst-case*. Se i veri parametri sono sufficientemente vicini alle loro stime, allora i limiti standard forniscono il valore desiderato dell'ARL in controllo ( $ARL_d = 500$ ). I limiti di controllo *worst-case* sono inutilmente larghi in questo caso e inevitabilmente portano ad una diminuzione dell'efficienza della carta. Per mitigare questo svantaggio viene consigliato l'uso di entrambi i limiti, standard e *worst-case* (Apley e Lee, 2003). Le osservazioni che cadono fuori dei limiti di controllo *worst-case* evidenziano che il processo è cambiato. Le osservazioni che invece cadono all'interno dei limiti di controllo *worst-case*, ma fuori dei limiti standard, dovrebbero essere interpretati con più cautela: potrebbe voler dire che il processo è cambiato oppure che i parametri ARMA differiscono dalle loro stime.

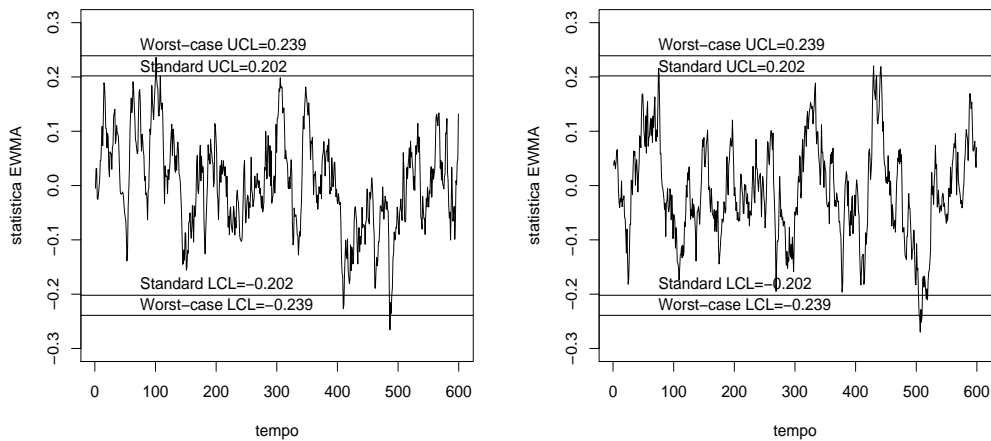


Figura 3.1: Esempi della carta EWMA con i limiti di controllo standard e worst-case, quando  $\sigma_y$  coincide con il suo worst-case valore  $\sigma_{y,\alpha}$ .

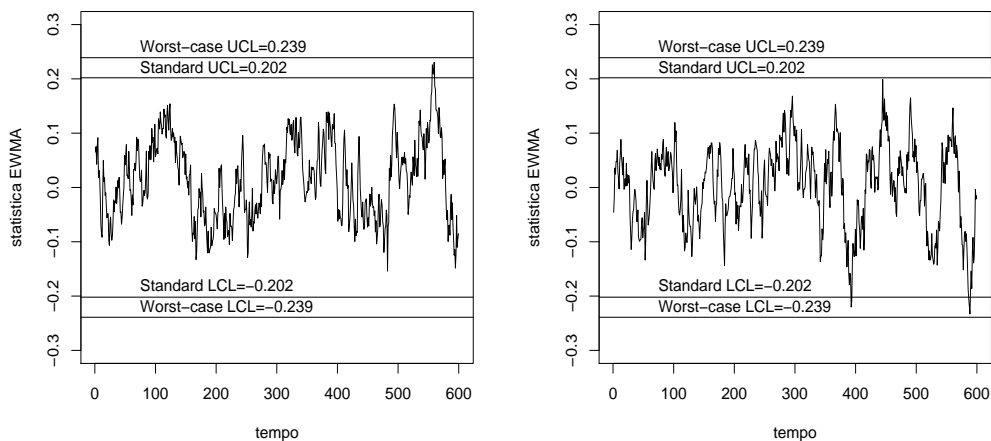


Figura 3.2: Esempi della carta EWMA con i limiti di controllo standard e worst-case, quando  $\sigma_y$  coincide con  $\hat{\sigma}_y$ .

## Capitolo 4

# Calibrazione della carta EWMA mediante approssimazione stocastica

Nel precedente capitolo abbiamo visto che i limiti *worst-case* dovrebbero essere intesi come i limiti che, nel caso in cui la varianza EWMA coincide con il suo valore *worst-case*, forniscono il valore desiderato dell'ARL in controllo. I limiti *worst-case* sono stati trovati prendendo il valore appropriato della costante  $L$  direttamente dalle tabelle di Lucas e Saccucci (1990), come nel caso standard, e moltiplicandolo per la varianza *worst-case* della statistica EWMA. Un approccio alternativo per trovare i limiti di controllo è quello basato sull'algoritmi di approssimazione stocastica. Nel seguito viene introdotto questo metodo, dopo di che si passa alla sua applicazione al calcolo dei limiti *worst-case* della carta EWMA.

## 4.1 Approssimazione stocastica

### 4.1.1 Il problema

Supponiamo che, in corrispondenza di ogni valore di un parametro, diciamo  $h \in R$ , sia possibile ottenere delle determinazioni indipendenti di una variabile casuale reale,  $Y_h$ , con funzione di distribuzione  $F(y; h)$ . A riguardo di quest'ultima si assume solamente che

$$M(h) = E\{Y_h\} = \int_R y dF(y; h)$$

esista per qualsivoglia  $h$ , sia monotona crescente ed inoltre che esista e sia unico un valore di  $h$ , indichiamolo con  $\bar{h}$ , per cui  $M(\bar{h}) = 0$ . Il problema, affrontato dagli schemi di approssimazione stocastica, consiste nel determinare sequenzialmente una successione  $h_1, h_2, \dots$  convergente in qualche senso a  $\bar{h}$ .

### 4.1.2 Lo schema di Robbins e Monro

Una prima soluzione al problema è stata suggerita da Robbins e Monro (1951). Essi suggeriscono di generare la successione  $h_1, h_2, \dots$  utilizzando la relazione iterativa

$$h_n = h_{n-1} - \frac{A}{n} y_n \quad (4.1)$$

dove  $y_n$  è un'osservazione distribuita in accordo a  $F(\cdot; h_{n-1})$ , mentre  $A$  è una opportuna costante positiva. Per quanto riguarda il valore di  $h_0$ , questo può essere scelto in modo arbitrario. Ovviamente, la convergenza sarà tanto più veloce quanto più  $h_0$  risulta vicino al vero valore  $\bar{h}$ . E' possibile far vedere (Ruppert, 1991) che  $h_n$  converge quasi certamente a  $\bar{h}$  ed inoltre che, se esiste oltre al valore atteso, anche la varianza di  $Y_h$ , allora  $\sqrt{n}(h_n - \bar{h})$  converge in distribuzione ad una normale di media zero e varianza  $A^2\sigma^2/(2AM'(\bar{h} - 1))$ , dove  $\sigma^2$  indica la varianza di  $Y_{\bar{h}}$ .

### 4.1.3 Regola d'arresto

Lo schema descritto produce una successione convergente. Nelle applicazioni è però necessario troncare le iterazioni in corrispondenza di un valore  $N$ , che indica il numero dell'iterazione in cui il valore di  $h_n$  risulta sufficientemente vicino a  $\bar{h}$ .

Un possibile approccio per la scelta di  $N$  nel caso dello schema di Robbins e Monro è stato suggerito da Stroup e Braun (1982). Questi autori suggeriscono di ottenere per ogni  $n$  due valori  $y_{n1}$  e  $y_{n2}$  tali che  $E\{y_{n1}\} = E\{y_{n2}\} = M(h_{n-1})$ . Il processo di Robbins e Monro viene modificato semplicemente sostituendo nella (4.1)  $y_n$  con  $l_n = (y_{n1} + y_{n2})/2$  e il processo viene arrestato in corrispondenza di

$$N = \inf \left\{ n > k : u_n = \left( \sum_{i=n-k+1}^n l_i^2/k \right) / \left( \sum_{i=1}^n e_i^2/n \right) < w \right\} \quad (4.2)$$

dove  $e_n^2 = (y_{n1} - y_{n2})/2$ , mentre  $k$  è un intero appropriato. In sostanza, Stroup e Braun propongono di fermare la procedura nel caso in cui negli ultimi  $k$  passi si siano ottenute osservazioni sufficientemente vicine allo zero. Per quanto riguarda la scelta della soglia  $w$ , Stroup e Braun mostrano che la statistica  $u_n$  converge in distribuzione a  $(k\sigma^2)^{-1}$  la distribuzione di  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=n-k+1}^n (l_i - E\{l_i\})^2$ . Così se, ad esempio le risposte  $Y_{ni}$  sono gaussiane allora  $2ku_n$  si distribuisce, per  $n$  sufficientemente grande, come una variabile casuale  $\chi^2$  con  $k$  gradi di libertà e, possiamo quindi pensare di scegliere  $2kw$  uguale ad un percentile appropriato di questa distribuzione. Più in generale, dal momento che a convergenza ottenuta il valore atteso di  $u_n$  risulta pari ad  $1/2$  possiamo pensare a delle soglie del tipo  $\gamma/2$ , con  $\gamma > 0$ .

## 4.2 Applicazione alla calibrazione di una carta di controllo

La struttura di una carta di controllo può essere schematizzata nel modo seguente: (i) ad ogni istante di tempo  $t$ , utilizzando tutte le osservazioni fino

ad allora disponibili, diciamo  $(z_1, \dots, z_t)$ , viene calcolata una statistica di controllo

$$s_t = g_t(z_1, \dots, z_t); \quad (4.3)$$

(ii) il valore della statistica viene confrontata con una soglia,  $h$ , ed, in particolare, viene segnalato un allarme, ovvero un possibile cambiamento nel processo che genera le osservazioni, se  $s_t > h$ .

Utilizzando questa notazione, la *run length* di uno schema è

$$R_h = \inf\{t > 0 : s_t > h\}. \quad (4.4)$$

La soglia  $h$  viene comunemente scelta risolvendo un'equazione del tipo

$$E\{R_h\} = ARL\{h\} = B \quad (4.5)$$

dove  $B$  rappresenta un conveniente valore per il tempo medio intercorrente tra due falsi allarmi. Il valore atteso  $E\{R_h\}$  è calcolato con riferimento alla distribuzione in controllo di  $(z_1, z_2, \dots)$ .

Nei casi in cui è possibile simulare il processo in controllo, possiamo ottenere, combinando la (4.3) e la (4.4), delle determinazioni di  $R_h$ . L'equazione (4.5) può allora essere risolta con le tecniche del paragrafo precedente definendo  $Y_h = (R_h - B)/B$ . La presenza di  $B$  al denominatore non è strettamente necessaria per la convergenza, però è molto utile per accelerare la convergenza (Masarotto e Capizzi, 1999).

### 4.2.1 Risultati

Per applicare l'approssimazione stocastica al problema di calcolo dei limiti di controllo *worst-case* della carta EWMA sono state create le funzioni `hAppross` e `RL`. All'interno della funzione `hAppross` viene richiamata la funzione `RL` per generare due osservazioni indipendenti di *run length*:  $y_{n1}$  e  $y_{n2}$ , in corrispondenza di un valore iniziale di  $h$ , che viene passato come argomento della funzione. La media di due valori simulati,  $l_n = (y_{n1} + y_{n2})/2$ , viene

utilizzata al posto di  $y_n$  nella formula di Robbins e Monro (4.1) per effettuare una successiva stima di  $h$ . L'aggiornamento della soglia  $h$  continua fino al verificarsi della condizione della regola d'arresto. La funzione `hAppross` restituisce l'ultimo valore stimato di  $h$  e il numero di osservazioni necessarie per giungere a questa stima.

$n$	$h_n$	$n$	$h_n$	$n$	$h_n$	$n$	$h_n$
1184	0.2468150	2165	0.2466773	1533	0.2460820	148	0.2495988
2815	0.2461195	1533	0.2460820	148	0.2495988	2889	0.2473318
2165	0.2466773	148	0.2495988	2889	0.2473318	535	0.2453674
1186	0.2458978	2889	0.2473318	535	0.2453674	6304	0.2468358
1533	0.2460820	535	0.2453674	6304	0.2468358	1186	0.2458978
148	0.2495988	6304	0.2468358	1186	0.2458978	1812	0.2471199
2889	0.2473318	1186	0.2458978	1812	0.2471199	1266	0.2485545
535	0.2453674	1812	0.2471199	1266	0.2485545	442	0.2475187
6304	0.2468358	1266	0.2485545	442	0.2475187	1479	0.2465127
1812	0.2471199	442	0.2475187	1479	0.2465127	1397	0.2483519
1266	0.2485545	1479	0.2465127	1397	0.2483519	1184	0.2468150
442	0.2475187	1397	0.2483519	1936	0.2479115	2815	0.2461195
1479	0.2465127	1936	0.2479115	3167	0.2478823	2165	0.2466773
1397	0.2483519	3167	0.2478823	1746	0.2464408	1533	0.2460820
1936	0.2479115	1746	0.2464408	3215	0.2463109	148	0.2495988
3167	0.2478823	3215	0.2463109	796	0.2471811	2889	0.2473318
1746	0.2464408	796	0.2471811	1184	0.2468150	535	0.2453674
3215	0.2463109	1184	0.2468150	2815	0.2461195	6304	0.2468358
1184	0.2468150	2815	0.2461195	2165	0.2466773	1186	0.2458978
2815	0.2461195	2165	0.2466773	1533	0.2460820	1479	0.2463853

Tabella 4.1: *Il risultato dell'applicazione di approssimazione stocastica al calcolo dei limiti di controllo worst-case della carta EWMA.*

Nella tabella 4.1 sono riportati 80 risultati dell'utilizzo della funzione `hAppross` per trovare la stima della soglia  $h$  che fornisce l'ARL in controllo pari a 500. Per quanto riguarda i parametri  $h_0$  e  $A$  (per la formula ricorsiva di Robbins e Monro) e il parametro  $w$  (per la regola d'arresto) si è posto arbitrariamente  $h_0 = 0.239$ ,  $A = 0.1$  e  $w = 2/9$ . Il valor medio e la deviazione standard degli 80 valori simulati di  $h$  sono 0.247028 e 0.001063 rispettivamente. In media sono state necessarie 1908 iterazioni per ottenere un risultato. Possiamo concludere che mediante l'approssimazione stocastica si ottengo-



#### 4. Calibrazione della carta EWMA mediante approssimazione stocastica 40

no i limiti di controllo leggermente più ampi rispetto a quelli calcolati nel Capitolo 3.

# Capitolo 5

## Risultati

### 5.1 Introduzione

Per esplorare le performance dell'ARL di una carta EWMA con i limiti standard e con i limiti basati sulla varianza *worst-case*, quando i veri valori dei parametri differiscono dalle loro stime, sono state utilizzate delle simulazioni Monte Carlo. Per effettuare le simulazioni è stata creata la funzione `1'ARL`, con la quale si possono simulare sia l'ARL in controllo sia quello fuori controllo, per una qualsiasi combinazione di parametri  $\phi$ ,  $\theta$  e  $\sigma_a$  che viene passata come argomento della funzione.

### 5.2 Simulazione dell'ARL

Riconsideriamo l'esempio ARMA(1, 1) introdotto nel Capitolo 3., dove abbiamo ottenuto queste stime dei parametri:  $\hat{\phi} = 0.91$ ,  $\hat{\theta} = 0.58$  e  $\hat{\sigma} = 0.098$ . Per ciascuna delle 100 combinazioni dei veri parametri  $\phi$  e  $\theta$ , appositamente specificate, è stata replicata 10.000 volte la simulazione di una RL in controllo per ciascuno dei tre limiti: EWMA standard, EWMA *worst-case* e Shewhart. La stessa procedura è stata ripetuta per una RL fuori controllo corrispondente a *shift* pari a  $3\sigma_a$ . Le combinazioni dei parametri sono:

$$(\phi[i], \theta[j]) \quad \forall i = 1, 2, \dots, 10; \text{ e } j = 1, 2, \dots, 10;$$

con  $\phi = [0.80, 0.82, 0.84, 0.86, 0.88, 0.90, 0.92, 0.94, 0.96, 0.98]$

e  $\theta = [0.36, 0.40, 0.44, 0.48, 0.52, 0.56, 0.60, 0.64, 0.68, 0.72]$ .

Per semplicità, l'incertezza su  $\sigma_\alpha^2$  è stata tralasciata, modificando l'espressione per  $\hat{\Sigma}_\gamma$  in modo tale che risulti  $\hat{\Sigma}_\gamma[3, 3] = 0$ , cioè  $\hat{V}[\hat{\sigma}_\alpha^2] = 0$ .<sup>1</sup> Con tale semplificazione si ottengono la varianza *worst-case*  $\sigma_{y,\alpha} = 0.0841$  e i limiti *worst-case*  $\pm L\sigma_{y,\alpha} = 0.237$ . Dunque, rispetto al caso in cui abbiamo considerato l'incertezza di  $\sigma_\alpha^2$ , questi limiti sono solo leggermente più stretti. I risultati delle simulazioni sono portati nelle Tabelle 5.1 e 5.2, e la rappresentazione grafica nella Figura 5.1.

## 5.3 Interpretazione

Per trovare la probabilità a posteriori che l'ARL sia minore dell'ARL<sub>d</sub>, si può ricorrere all'analisi Bayesiana, dove viene assunta una distribuzione a posteriori per  $\gamma$ . Nel caso specifico viene assunto che la distribuzione a posteriori di  $\gamma$  sia approssimativamente una normale multivariata di media  $\hat{\gamma}$  e covarianza  $\hat{\Sigma}_\gamma$ . Questa può essere vista come un'approssimazione asintotica quando la distribuzione a priori di  $\gamma$  non è informativa.

### 5.3.1 ARL in controllo per i limiti standard e *worst-case*

Nella Figura 5.1(a) sono riportate curve di livello dell'ARL in controllo per la carta EWMA standard con i limiti  $\pm 0.202$ . Siccome la carta EWMA è stata disegnata con l'ARL<sub>d</sub> = 500, la curva del livello 500 passa per il punto che corrisponde alle stime dei parametri.

L'integrazione numerica della probabilità a posteriori rivela che la probabilità che l'ARL sia minore di 250 è uguale a 0.24 e, invece, la probabilità che

<sup>1</sup>L'elemento di posizione [3,3] della matrice di varianze e covarianze è la stima della varianza delle innovazioni.

l'ARL sia minore di 150 è uguale a 0.11 (Apley e Lee, 2003).

Il grafico 5.1(b) mostra l'ARL in controllo per la carta EWMA con i limiti *worst-case*  $\pm 0.237$ . Con questi limiti, la probabilità che l'ARL sia minore del suo valore desiderato ( $ARL_d=500$ ) è approssimativamente 0.13. La probabilità che l'ARL sia minore di 250 è solamente 0.05, che è molto più piccola della probabilità corrispondente ai limiti standard (0.24). Dunque i limiti *worst-case* forniscono un'adeguata protezione contro le ARL in controllo inaccettabilmente piccole. Un altro beneficio dell'uso di questi limiti è che nel caso in cui i parametri coincidono con le loro stime, l'ARL in controllo sarà più grande del valore specificato. Nella Figura 5.1(b) possiamo vedere che l'ARL in controllo con i limiti *worst-case* è vicina a 2000, quindi rispetto al valore di 500 ottenuto con i limiti standard questo valore è considerevolmente più grande. Lo svantaggio ovvio dell'allargamento dei limiti di controllo consiste nella diminuzione del potere della carta nell'individuare scostamenti nella media del processo.

### 5.3.2 ARL fuori controllo per i limiti standard e *worst-case*

Le Figure 5.1(d) e 5.1(e) rappresentano le curve di livello dell'ARL fuori controllo per la situazione in cui la media del processo ha subito uno scostamento nella media pari a  $3\hat{\sigma}_a$ . I due grafici sono ottenuti con i limiti standard  $\pm 0.202$  e i limiti *worst-case*  $\pm 0.237$  rispettivamente. Questi ultimi fanno incrementare l'ARL fuori controllo all'incirca di 60% per la maggior parte delle combinazioni di  $\phi$  e  $\theta$ . Nella Tabella 5.3 vengono riportati l'ARL fuori controllo per diversi valori dello *shift* per il caso specifico in cui i parametri ARMA coincidono con le loro stime. In questa tabella sono riportati tra l'altro anche i risultati per la carta Shewhart, che sono discussi nel paragrafo 5.3.3. Allargamento dei limiti di controllo ha, chiaramente, un impatto negativo sull'ARL fuori controllo, in particolare per *shift* piccoli. Se lo *shift* è pari a  $\hat{\sigma}_a$  l'allargamento dei limiti provoca un incremento dell'ARL fuori controllo da 126 a 338. Questo è comprensibile, dato che l'ARL in control-

lo subisce un incremento da 499 a 2084. Per *shift* più grandi incremento dell'ARL è più moderato, però resta ancora elevato.

Data la diminuzione del potere della carta che ne consegue dall'allargamento dei limiti di controllo, ci chiediamo se, e fino a che punto questi limiti dovrebbero essere allargati allo scopo di tener conto di incertezza del modello. Questo dipenderà idealmente dai costi associati ai falsi allarmi, dai costi di mancata segnalazione delle condizioni di fuori controllo e dalla probabilità a priori della realizzazione di condizioni fuori controllo. Se i costi dei falsi allarmi sono piccoli, allora l'allargamento dei limiti potrebbe essere non conveniente. Comunque i costi dei frequenti falsi allarmi sono piuttosto alti se si considerano i costi nascosti delle interruzioni non necessarie del lavoro, i ritardi nella produzione e le mancate reazioni da parte degli operatori agli allarmi, compresi quelli che segnalano vere condizioni di fuori controllo (Apley e Lee, 2003). La soluzione migliore per diminuire gli effetti negativi dell'uso dei limiti *worst-case* sarebbe aumentare, quando è possibile, il numero delle osservazioni per ridurre l'incertezza dei parametri.

### 5.3.3 Confronto tra le carte Shewhart ed EWMA

Le figure 5.1(c) e 5.1(f) mostrano le curve di livello per l'ARL in controllo e l'ARL fuori controllo per le carte Shewhart con i limiti  $3.09\hat{\sigma}_a = \pm 0.967$ . Questi limiti, nel caso in cui non ci sono errori nelle stime, forniscono un'ARL in controllo uguale a 500. L'ampiezza dello *shift* per la Figura 5.1(f) è pari a  $3\hat{\sigma}_a$ . Differentemente dall'ARL della carta EWMA con  $\lambda$  piccolo, l'ARL della carta Shewhart è poco dipendente da  $\phi$  e  $\theta$ . Questo perché la carta Shewhart considera i residui individuali e non la media ponderata della successione dei residui, e pertanto l'effetto dell'autocorrelazione dei residui sull'ARL di questa carta è piccolo. Sebbene l'incremento della varianza dei residui avrà effetto sull'ARL della carta Shewhart, in questo esempio viene assunto che  $\sigma_a^2$  sia uguale a  $\hat{\sigma}_a^2$  e perciò piccole variazioni di  $\phi$  e  $\theta$  non porteranno a un sostanziale incremento della varianza dei residui.

Visto che le carte Shewhart sono relativamente insensibili agli errori delle

---

stime dei parametri e, dall'altra parte, che l'ARL fuori controllo per la carta EWMA aumenta al crescere dei limiti di controllo, si potrebbe concludere che le carte Shewhart con i limiti standard possano migliorare l'efficienza nell'individuazione di scostamenti dalla media del processo. La Tabella 5.3. indica che questo è vero soltanto per *shift* grandi. Persino quando vengono usati i limiti *worst-case* l'efficienza della carta EWMA nell'individuare *shift* piccoli e medi è notevolmente più alta di quella della carta Shewhart. Nel caso ARMA(1, 1) in esame l'efficienza della carta Shewhart è maggiore rispetto alla carta EWMA con i limiti *worst-case* soltanto quando lo *shift* è compreso tra  $4\hat{\sigma}_a$  e  $5\hat{\sigma}_a$ . Possiamo notare che a questo stesso livello dello *shift*, l'efficienza della carta Shewhart supera quella della carta EWMA con i limiti standard.

a)

	0.36	0.40	0.44	0.48	0.52	0.56	0.60	0.64	0.68	0.72
0.80	577	895	1520	2698	5139	11175	>15000	>20000	>25000	>35000
0.82	399	592	920	1579	2951	5960	13432	>20000	>25000	>35000
0.84	279	391	585	939	1679	3243	6946	17483	>25000	>35000
0.86	196	264	381	575	971	1735	3564	8480	22994	>35000
0.88	143	182	246	364	556	951	1739	3965	9836	30639
0.90	103	130	168	229	329	523	921	1729	4404	11426
0.92	76	93	116	148	205	294	457	843	1678	4384
0.94	58	68	81	99	130	175	247	392	711	1445
0.96	44	50	58	69	84	108	141	193	299	509
0.98	33	34	40	47	52	63	78	98	129	186

b)

	0.36	0.40	0.44	0.48	0.52	0.56	0.60	0.64	0.68	0.72
0.80	2992	5539	11059	26037	71867	>100000	>150000	>200000	>250000	>300000
0.82	1724	2990	5603	11918	30226	85394	>150000	>200000	>250000	>300000
0.84	1007	1630	2925	5723	12143	33358	104271	>200000	>250000	>300000
0.86	593	925	1543	2821	5858	12584	37032	162081	>250000	>300000
0.88	369	529	820	1384	2606	5475	13468	42236	174237	>300000
0.90	231	317	455	710	1193	2311	5151	14474	44734	181317
0.92	151	194	269	365	569	971	1919	4535	12331	48486
0.94	101	121	156	206	294	438	724	1386	3195	9849
0.96	70	79	97	117	154	209	302	467	864	1913
0.98	45	49	59	70	82	103	129	174	251	402

c)

	0.36	0.40	0.44	0.48	0.52	0.56	0.60	0.64	0.68	0.72
0.80	428	453	451	445	434	417	406	373	349	304
0.82	399	456	453	476	450	433	424	393	366	328
0.84	423	454	468	485	474	447	446	420	382	350
0.86	406	444	473	481	487	480	462	430	402	371
0.88	388	428	460	478	490	488	482	449	427	398
0.90	369	410	434	464	494	499	496	470	451	226
0.92	340	379	412	448	479	489	495	491	469	435
0.94	290	322	368	397	436	472	492	484	477	458
0.96	227	260	294	333	381	413	442	463	468	456
0.98	149	163	188	222	252	289	321	356	375	398

Tabella 5.1: Risultati di simulazione dell'ARL in controllo per diverse combinazioni di  $\phi$  e  $\theta$  (con  $\sigma_a = \hat{\sigma}_a$ ) per le carte (a) EWMA con i limiti standard  $\pm 0.202$ , (b) EWMA con i limiti worst-case  $\pm 0.237$  e (c) Shewhart con i limiti standard  $\pm 0.067$

a)

	0.36	0.40	0.44	0.48	0.52	0.56	0.60	0.64	0.68	0.72
0.80	7.09	6.90	6.81	6.60	6.47	6.41	6.16	5.99	5.86	5.66
0.82	7.41	7.06	6.85	6.78	6.61	6.37	6.30	6.07	5.99	5.78
0.84	7.39	7.37	7.21	7.01	6.88	6.48	6.42	6.25	6.05	5.93
0.86	7.89	7.79	7.48	7.26	7.15	6.91	6.55	6.46	6.25	5.85
0.88	8.18	8.00	7.78	7.75	7.41	7.30	6.92	6.75	6.31	6.19
0.90	8.93	8.46	8.31	8.13	7.79	7.47	7.34	7.04	6.74	6.37
0.92	9.62	9.37	8.93	8.74	8.65	8.15	7.94	7.51	7.27	6.74
0.94	10.88	10.81	10.47	10.28	9.86	9.40	9.04	8.25	7.85	7.57
0.96	13.12	12.72	12.85	12.33	12.10	11.25	11.09	10.39	9.70	8.83
0.98	14.71	15.51	16.32	16.39	16.93	17.10	16.71	16.40	14.83	13.56

b)

	0.36	0.40	0.44	0.48	0.52	0.56	0.60	0.64	0.68	0.72
0.80	12.41	12.22	12.13	12.15	12.02	11.96	11.84	11.66	11.75	11.11
0.82	2.61	12.47	12.02	12.43	12.33	12.11	12.28	11.85	11.67	11.58
0.84	12.63	12.77	12.77	12.78	12.67	12.24	12.38	12.29	11.80	11.66
0.86	13.38	13.34	13.12	13.07	13.22	12.90	12.75	12.70	12.41	11.80
0.88	13.80	13.78	13.52	13.72	13.57	13.72	13.33	13.10	12.80	12.47
0.90	14.61	14.59	14.63	14.48	14.35	14.12	14.05	14.00	13.67	13.04
0.92	15.71	15.74	15.50	15.53	15.61	15.30	15.42	14.45	14.56	14.10
0.94	17.65	17.65	17.20	17.73	17.50	17.19	17.02	16.55	16.32	16.14
0.96	20.38	20.55	20.83	20.58	20.81	20.16	20.46	20.00	19.29	18.34
0.98	22.59	24.54	25.86	26.59	28.36	28.79	29.39	29.38	28.98	27.44

c)

	0.36	0.40	0.44	0.48	0.52	0.56	0.60	0.64	0.68	0.72
0.80	55.0	54.9	55.4	54.9	51.2	51.3	47.3	45.7	42.1	37.2
0.82	55.0	57.7	55.4	54.9	55.2	50.6	50.1	48.2	43.5	40.9
0.84	54.5	56.5	56.9	56.1	56.1	52.4	51.2	48.8	46.3	43.1
0.86	55.8	56.6	56.5	56.1	57.3	56.6	53.4	51.1	49.2	43.4
0.88	53.5	57.2	56.9	61.1	57.7	57.2	54.7	54.0	49.8	48.3
0.90	54.8	56.4	57.0	59.3	59.4	58.6	56.8	55.1	53.2	48.3
0.92	53.1	54.9	58.0	58.3	59.3	59.1	58.2	55.6	55.2	50.9
0.94	50.8	53.7	57.5	59.4	60.2	59.3	58.8	60.0	57.6	56.3
0.96	53.1	54.3	58.3	58.5	60.8	59.4	61.3	59.7	58.8	56.2
0.98	49.9	54.4	58.0	60.3	62.5	64.2	64.8	63.3	61.9	60.1

Tabella 5.2: Risultati di simulazione dell'ARL fuori controllo, con shift pari a  $3\sigma_a$ , per diverse combinazioni di  $\phi$  e  $\theta$  (con  $\sigma_a = \hat{\sigma}_a$ ) per le carte (a) EWMA con i limiti standard  $\pm 0.202$ , (b) EWMA con i limiti worst-case  $\pm 0.237$  e (c) Shewhart con i limiti standard  $\pm 0.067$



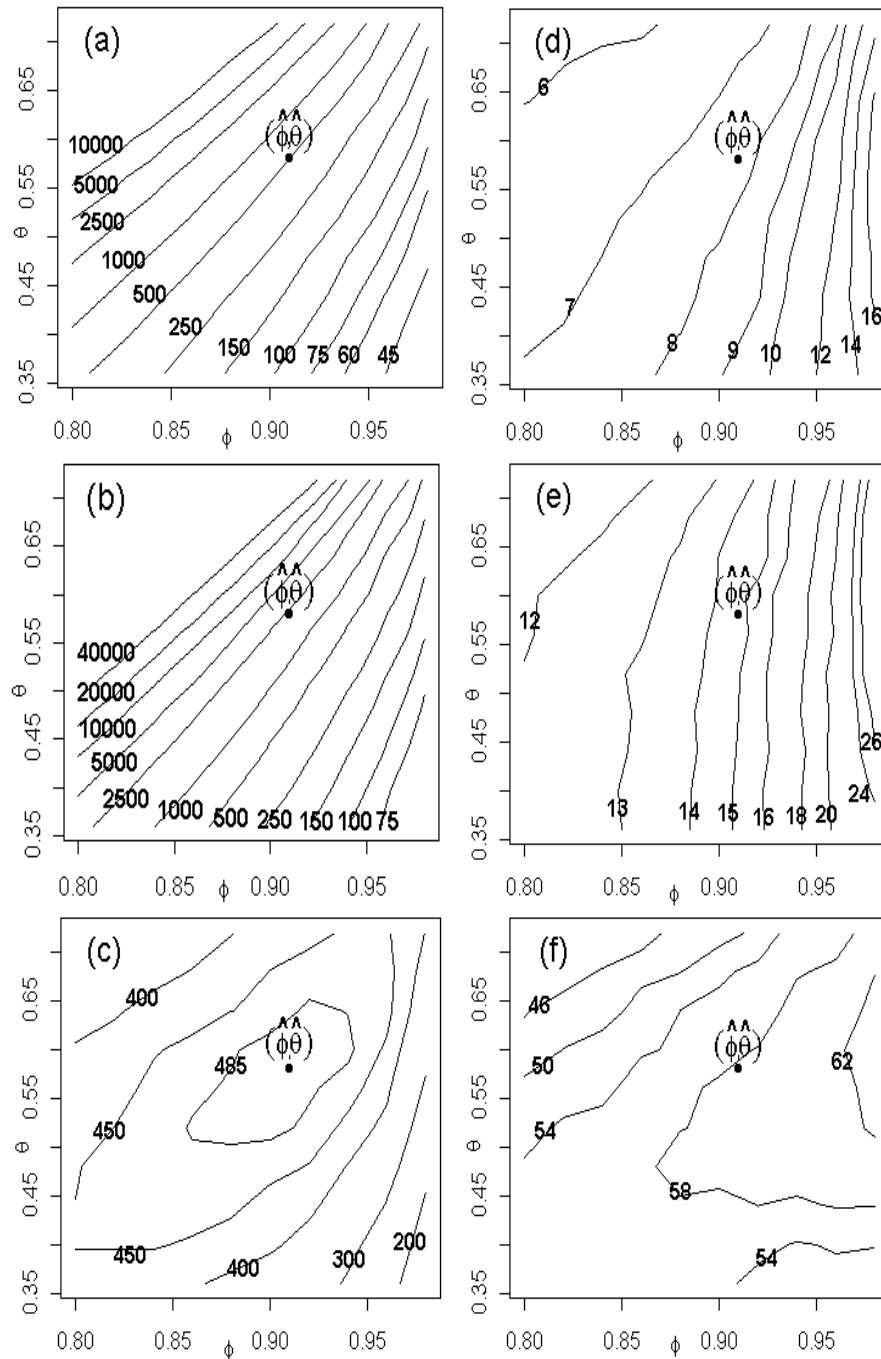


Figura 5.1: Curve di livello come funzione di  $\phi$  e  $\theta$  per  $ARMA(1, 1)$ . I grafici (a), (b) e (c) sono per l'ARL in controllo delle carte EWMA standard, EWMA worst-case e Shewhart, mentre (d), (e) e (f) sono per l'ARL fuori controllo delle rispettive carte (con shift pari a  $3\sigma_a$ ).

Carta	Limiti di controllo	l'ampiezza di <i>shift</i> (in unità di $\sigma_a$ )					
		0	1	2	3	4	5
EWMA ( $\lambda = 0.1$ )	0.202 (standard)	499	126	28.5	7.74	3.15	2.11
EWMA ( $\lambda = 0.1$ )	0.237 ( <i>worst-case</i> )	2084	338	60.1	14.71	4.85	2.75
Shewhart	0.967 (standard)	498	383	199.0	59.92	8.13	1.28

Tabella 5.3: *l'ARL fuori controllo per diversi valori di shift, per l'esempio ARMA(1, 1) quando i veri valori dei parametri ARMA coincidono con le loro stime.*



## Conclusioni

Una misura naturale per incorporare l'informazione sull'incertezza nelle stime dei parametri nel disegno delle carte EWMA basate sui residui è di allargare i limiti di controllo. La procedura di disegno presentata in questa tesi è basata sull'approccio *worst-case*, che sostanzialmente consiste nella scelta dei parametri del modello ARMA in modo tale che la varianza della statistica EWMA risulti uguale al valore massimo di un appropriato intervallo di confidenza. La complessità addizionale dei calcoli che comporta l'approccio *worst-case* è relativamente piccola rispetto all'approccio standard.

In pratica i limiti *worst-case* vengono calcolati moltiplicando la varianza *worst-case* con una costante  $L$ . Nel caso standard, l'uso dei valori tabulari di  $L$ , proposti da Lucas e Saccucci (1991), fornisce i valori desiderati dell'ARL in controllo. Nell'approccio *worst-case*, la scelta della costante  $L$  è proibitivamente complessa, però ci sono delle indicazioni che giustificano l'uso degli stessi valori di  $L$  che vengono usati nel caso standard.

Per confrontare le prestazioni delle carte con i limiti standard e *worst-case* sono state usate le simulazioni Monte Carlo. Il valore dell'ARL in controllo ottenuto utilizzando la costante  $L$  tabulare nei limiti *worst-case* è lievemente più piccolo rispetto al valore specificato ( $ARL_d = 500$ ). Al fine di trovare i limiti più precisi, ovvero quelli che forniscono il valore specificato dell'ARL in controllo, è stata utilizzata l'approssimazione stocastica. I limiti ottenuti con questo metodo sono effettivamente più ampi rispetto a quelli precedentemente calcolati, ovvero sono più precisi, però, la differenza tra loro non è drammatica, nel senso che le conclusioni alle quali portano sono uguali.

---

Il vantaggio principale dell'uso dei limiti *worst-case* è che essi forniscono la protezione contro un'elevata frequenza di segnalazione dei falsi allarmi. Lo svantaggio ovvio è la diminuzione del potere della carta nel individuare i cambiamenti piccoli nel processo produttivo. Pertanto la decisione se i limiti di controllo devono essere allargati, e fino a che punto, dovrebbe essere fatta in base ai costi associati ai falsi allarmi, ai costi di mancata segnalazione delle condizioni di fuori controllo, e dalla probabilità a priori che si verifichino condizioni fuori controllo. La soluzione migliore per aumentare l'efficienza delle carte con i limiti *worst-case* consiste nell'aumentare, quando è possibile, la dimensione campionaria per ridurre l'incertezza nelle stime dei parametri ARMA.

# Appendice

## Funzioni create in R per effettuare i calcoli

---

### ARMAsim

---

```
ARMAsim<-function(oldz=0, olda=0, phi, theta, sdinnovazione, num){  
  z <-rep(0,num+1)  
  z[1] <-oldz  
  for(i in 2:(num+1)){  
    newa <-rnorm(n=1,mean=0,sd=sdinnovazione)  
    z[i] <-phi*z[i-1]-theta*olda+newa  
    olda <-newa  
  }  
  z<-c(z,olda)  
  return(z)  
}
```

#### Utilizzo:

La funzione `ARMAsim` viene utilizzata per generare i dati da un processo ARMA(1, 1) per specificati valori dei parametri  $\phi_1$ ,  $\theta_1$  e  $\sigma_a$ .

**Input:**

<code>oldz</code>	il valore iniziale della sequenza simulata ( $Z_0$ )
<code>olda</code>	l'innovazione iniziale ( $a_0$ )
<code>phi</code>	il parametro autoregressivo ( $\phi_1$ )
<code>theta</code>	il parametro media mobile ( $\theta_1$ )
<code>sdinnovazione</code>	la deviazione standard ( $\sigma_a$ ) delle innovazioni ( $a_t$ )
<code>num</code>	il numero di dati simulati

**Output:**

Il vettore di lunghezza `num+2`:

$Z_0$	$Z_1$	$Z_2$	$Z_3$	$Z_4$	...	$Z_{\text{num}-1}$	$Z_{\text{num}}$	$a_{\text{num}}$
-------	-------	-------	-------	-------	-----	--------------------	------------------	------------------

Quindi, oltre a restituire la sequenza di dati provenienti dal modello ARMA(1, 1):  $Z_1, Z_2, \dots, Z_{\text{num}}$ , questa funzione restituisce il valore iniziale della simulazione ( $Z_0$ ) e il valore dell'ultima innovazione ( $a_{\text{num}}$ ). Questa struttura dell'output della funzione `ARMAsim` è necessaria per poterlo utilizzare all'interno delle funzioni `ARMAsidui` e `ARL`.

**Descrizione:**

Per una data combinazione dei parametri  $\phi_1$ ,  $\theta_1$  e  $\sigma_a$ , e dei valori iniziali  $Z_0$  e  $a_0$  vengono simulate, tramite l'equazione 1.3, `num` osservazioni provenienti dal modello ARMA(1, 1).

I valori simulati saranno:

$$Z_1 = \phi_1 Z_0 + a_1 - \theta_1 a_0$$

$$Z_2 = \phi_1 Z_1 + a_2 - \theta_1 a_1$$

$$Z_3 = \phi_1 Z_2 + a_3 - \theta_1 a_2$$

$$\dots = \dots$$

$$Z_{\text{num}} = \phi_1 Z_{(\text{num}-1)} + a_{\text{num}} - \theta_1 a_{(\text{num}-1)}$$

dove  $a_t$  sono le realizzazioni indipendenti di una variabile casuale con la distribuzione  $N(0, \sigma_a^2)$ .

Per ottenere dei risultati sensati, è necessario effettuare il controllo della presenza delle condizioni di stazionarietà e di invertibilità al di fuori della funzione, siccome questa non lo prevede.

---

## ARMAresidui

---

```
ARMAresidui<-function(y=dati[1:(length(dati)-1)], ph, th, e0=0){
residui<-rep(0,length(y))
residui[1]<-e0          #serve per inizializzare il filtraggio
for (i in 2:length(y)){
  prev<-ph*y[i-1]-th*residui[i-1]
  residui[i]<-y[i]-prev
}
residui<-residui[2:length(y)]
return(residui)
}
```

### Utilizzo:

La funzione `ARMAresidui` viene utilizzata per calcolare i residui (gli errori di previsione ad un passo) di una serie ARMA(1, 1) simulata con la funzione `ARMAsim`.

### Input:

- `y` la serie simulata tramite la funzione `ARMAsim`  
(incluso il dato iniziale  $Z_0$ )
- `ph` il parametro di filtraggio AR
- `th` il parametro di filtraggio MA
- `e0` il valore iniziale  $e_0$  che serve per calcolare il primo residuo

### Output:

Il vettore contenete `length(y)-1` residui.



**Descrizione:**

Per calcolare i residui di una serie temporale, il cui andamento può essere descritto con un appropriato modello ARMA(1, 1), utilizziamo l'equazione 2.6:

$$\begin{aligned}
 e_t &= \frac{\hat{\Phi}(B)}{\hat{\Theta}(B)} Z_t \\
 e_t &= \frac{1 - \hat{\phi}_1 B}{1 - \hat{\theta}_1 B} Z_t \\
 (1 - \hat{\theta}_1 B)e_t &= (1 - \hat{\phi}_1 B)Z_t \\
 e_t - \hat{\theta}_1 e_{t-1} &= Z_t - \hat{\phi}_1 Z_{t-1} \\
 e_t &= Z_t - \hat{\phi}_1 Z_{t-1} + \hat{\theta}_1 e_{t-1} \\
 e_t &= Z_t - \hat{Z}_{t-1}(1)
 \end{aligned}$$

dove

$$\hat{Z}_t(1) = \hat{\phi}_1 Z_t - \hat{\theta}_1 e_t$$

è la previsione fatta al tempo  $t$  per la osservazione al tempo  $t + 1$

$$Z_{t+1} = \phi Z_t + a_t + \theta_1 a_t.$$

Dunque, la procedura del calcolo dei residui tramite la funzione **ARMAResidui** è seguente:

- In ogni istante temporale  $t = 0, 1, 2, \dots, (\text{length}(\mathbf{y}) - 2)$  calcoliamo le previsioni  $Z_t(1)$  per i tempi  $(t + 1) = 1, 2, 3, \dots, \text{length}(\mathbf{y}) - 1$

$$\begin{aligned}
 \hat{Z}_0(1) &= \hat{\phi}_1 Z_0 - \hat{\theta}_1 e_0 \\
 \hat{Z}_1(1) &= \hat{\phi}_1 Z_1 - \hat{\theta}_1 e_1 \\
 &\dots = \dots \\
 \hat{Z}_{\text{length}(\mathbf{y})-2}(1) &= \hat{\phi}_1 Z_{\text{length}(\mathbf{y})-2} - \hat{\theta}_1 e_{\text{length}(\mathbf{y})-2}
 \end{aligned}$$

-Sottraendo le previsioni dai dati osservati otteniamo i residui

$$\begin{aligned}
 e_1 &= Z_1 - \hat{Z}_0(1) \\
 e_2 &= Z_2 - \hat{Z}_1(1) \\
 \dots &= \dots \\
 e_{(\text{length}(y)-1)} &= Z_{\text{length}(y)-1} - \hat{Z}_{(\text{length}(y)-2)}(1)
 \end{aligned}$$

---

## EWMAsat

---

```

EWMAsat<-function(res, y0=0, lambda=0.1){
y<-rep(0,length(res))
  for(i in 1:length(res)){
    y[i]<-lambda*res[i]+(1-lambda)*y0
    y0<-y[i]
  }
return(y)
}

```

### Utilizzo:

Il calcolo delle statistiche EWMA.

### Input:

**res**      la serie di dati per i quali vengono calcolate le statistiche  
**y0**      il valore iniziale della statistica ( $y_0$ )  
**lambda**   il parametro  $\lambda$

### Output:

Il vettore di lunghezza `length(res)` contenente le statistiche EWMA.

### Descrizione:

In questa tesi le carte EWMA vengono applicate esclusivamente ai residui.

Quindi, scelti valori del parametro  $\lambda$  e del  $y_0$ , in base della sequenza dei residui vengono calcolate le statistiche EWMA utilizzando l'equazione 2.1.

---

## matVarCov

---

```
matVarCov<-function(phi.stima,theta.stima,N,sa2.stima){
f<-phi.stima;t<-theta.stima
P1<-(1-f*t)/(N*(f-t)^2)
a1<-(1-f^2)*(1-f*t)
a2<-(1-f^2)*(1-t^2)
a3<-a2
a4<-(1-t^2)*(1-f*t)
m<-matrix(c(a1,a2,0,a3,a4,0),ncol=3,byrow=T)
sigmae<-P1*m
sigmag<-rbind(sigmae,c(0,0,(2/N)*sa2.stima^2))
return(sigmag)
}
```

### Utilizzo:

Il calcolo della matrice di varianze e covarianze (l'equazione 3.9) per un processo ARMA(1, 1).

### Input:

phi.stima	$\hat{\phi}_1$
theta.stima	$\hat{\theta}_1$
sa2.stima	$\hat{\sigma}_a^2$
N	la numerosità campionaria

### Output:

La matrice di varianze e covarianze di dimensione  $3 \times 3$ .

**Esempio:**

```
#input:
matVarCov(phi.stima=0.9087,theta.stima=0.5758,N=197,sa2.stima=0.9768)
#output:
           [,1]      [,2]      [,3]
[1,] 0.001814402 0.002543875 0.000000000
[2,] 0.002543875 0.006959800 0.000000000
[3,] 0.000000000 0.000000000 0.009686683
```

---

**EWMavar**

---

```
EWMavar<-function(sa2.stima,lambda=0.1){
  v<-1-lambda
  sy2.stima<-sa2.stima *(1-v)/(1+v)
  return(sy2.stima)
}
```

**Utilizzo:**

Il calcolo della stima di deviazione standard della statistica EWMA ,  $\hat{\sigma}_y$  (l'equazione 2.4 ).

**Esempio:**

```
#input:
ewmavar<-EWMavar(sa.stima=0.098,lambda=0.1)
#output:
[1] 0.005157895
```

---

## vettoreV

---

```
vettoreV<-function(phi.stima,theta.stima,sa2.stima,lambda=0.1){
v<-1-lambda
a<- -2*v/(1-phi.stima*v)
b<- 2*v/(1-theta.stima*v)
c<- -1/sa2.stima
V<-c(a,b,c)
return(V)
}
```

### Utilizzo:

Il calcolo del vettore  $V$  (l'equazione 3.5).

### Esempio:

```
#input:
vettoreV(phi.stima=0.9087,theta.stima=0.5758,sa2.stima=0.9768,lambda=0.1)
#output:
[1] -9.880880  3.736145 -10.237510
```

---

## worstCaseVar

---

```
worstCaseVar<-function(sa2.stima,V,sigmag,alpha=0.1,lambda=0.1){
v<-1-lambda
za<-qnorm(1-alpha)
sy2.stima = sa2.stima *(1-v)/(1+v)
sya2 = sy2.stima*(1+za*(t(V) %*% sigmag %*% V)^(1/2))
return(sya2)
}
```

**Utilizzo:**

Il calcolo della varianza *worst-case* della statistica EWMA,  $\sigma_{y,\alpha}$ , tramite l'equazione 3.7.

**Input:**

sa2.stima  $\sigma_a^2$   
 V il vettore V  
 sigmag la matrice di varianze e covarianze ( $\Sigma_\gamma$ )  
 alpha il parametro  $\alpha$   
 lambda il parametro  $\lambda$

**Output:**

$\sigma_{y,\alpha}$

**Esempio:**

```
#input:
vv<-vettoreV(phi.stima=0.9087,theta.stima=0.5758,sa2.stima=0.09768,lambda=0.1)
mvc<-matVarVov(phi.stima=0.9087,theta.stima=0.5758,N=197,sa2.stima=0.09768)
wcvar<-worstCaseVar(0.09768,V=vv,sigmag=mvc,alpha=0.1,lambda=0.1)
#output:
           [,1]
[1,] 0.007189061
```

**inversa**

```
inversa<-function(matrice){
  identita<-matrix(c(1,0,0,0,1,0,0,0,1),ncol=3,byrow=T)
  matrice<-cbind(matrice,identita)
  costante<-1/matrice[1,1]
  matrice[1,]<-matrice[1,] * costante
  costante<- -matrice[2,1]
  riga<-matrice[1,] * costante
```

```
matrice[2,]<-matrice[2,] +riga
costante<-1/matrice[2,2]
matrice[2,]<-matrice[2,] * costante
costante<-1/matrice[3,3]
matrice[3,]<-matrice[3,] * costante
costante<- -matrice[1,2]
riga<-matrice[2,] * costante
matrice[1,]<-matrice[1,] + riga
inversa<-round(matrice[,4:6],4)
return(inversa)
}
```

**Utilizzo:**

Il calcolo dell'inversa della matrice di varianze e covarianze ( $\hat{\Sigma}_{\gamma}^{-1}$ ).

---

**worstCasePar**

---

```
worstCasePar<-function (phi.stima,theta.stima,sa2.stima,N){
gama.stima<-c(phi.stima,theta.stima,sa2.stima)
vettore<-vettoreV(phi.stima,theta.stima,sa2.stima,lambda=0.1)
matrice<-matVarCov(phi.stima,theta.stima,N,sa2.stima)
var1<-matrice[1,1];var2<-matrice[2,2];var3<-matrice[3,3]
matinv<-inversa(matrice=matrice)
wcvar<-worstCaseVar(sa2.stima=sa2.stima,V=vettore,sigmag=matrice,
alpha=0.1,lambda=0.1)
wcvar=round(wcvar,4)
wcsd=round(sqrt(wcvar),4)
ewmavar<-EWMAvar(sa2.stima,lambda=0.1)
minimo<-1000
n=2
quant<-50
numComb<-quant^3
```

```

a<-phi.stima;b<-theta.stima;c<-sa2.stima
ris<-rep(0,3)
for(z in 1:6){
  seq1<-seq(a-n*sqrt(var1),a+n*sqrt(var1),length=quant)
  seq2<-seq(b-n*sqrt(var2),b+n*sqrt(var2),length=quant)
  seq3<-seq(c-n*sqrt(var3),c+n*sqrt(var3),length=quant)
  for(i in 1:quant){
    for(j in 1:quant){
      for(k in 1:quant){
        gama<-c(seq1[i],seq2[j],seq3[k])
        gama.tild<-gama.stima-gama
        aprossTaylor<-ewmavar*(1+t(vettore)*%*%gama.tild)
        if(aprossTaylor<0) aprossTaylor=0
        if(round(sqrt(aprossTaylor),4)==wcsd){
          minimizza<-t(gama.tild) %*% matinv %*%gama.tild
          if(minimizza<minimo){
            minimo<-minimizza
            ris[1]<-seq1[i]
            ris[2]<-seq2[j]
            ris[3]<-seq3[k]
          }
        }
      }
    }
  }
}
print(ris)
n<-n/2
a<-ris[1];b<-ris[2];c<-ris[3]
}
return(ris)
}

```

**Utilizzo:**

Il calcolo dei parametri *worst-case*, ovvero dei valori di parametri  $\phi_1$ ,  $\theta_1$  e  $\sigma_a$



con i quali l'approssimazione di Taylor della varianza della statistica EWMA risulta uguale al suo valore *worst-case* .

### Descrizione:

Per varie combinazioni dei parametri  $\phi_1$ ,  $\theta_1$  e  $\sigma_a^2$  appositamente specificate viene calcolata la varianza della statistica EWMA,  $\sigma_y^2$ , utilizzando l'approssimazioni di Taylor (l'equazione 3.3) con  $V$  sostituito da  $\hat{V}$ . Tra tutti i valori (ottenuti utilizzando questa approssimazione) che risultano uguali alla varianza *worst-case* della statistica EWMA viene cercato quello con la massima verosimiglianza, ovvero quello che minimizza  $\hat{\gamma}\hat{\Sigma}_\gamma^{-1}\tilde{\gamma}$ . I valori corrispondenti dei parametri  $\phi_1$ ,  $\theta_1$  e  $\sigma_a^2$  vengono restituiti dalla funzione.

### Esempio:

```
#per usare la funzione 'worstCasePar' devono essere
#caricate le seguenti funzioni:
#'vettoreV', 'matVarCov', 'inversa', 'worstCaseVar' e 'EWMAvar'.
#input:
worstCasePar(phi.stima=0.9087,theta.stima=0.5758,sa2.stima=0.9768,N=197)
#output:
[1] 0.94396106 0.57292693 0.10170974
```

---

## ARL

---

```
ARL<-function(SHlimit=0.967,STlimit=0.202,WClimit=0.237,nSim=10000,
phi=0.91,theta=0.58,sdinnovazione=sqrt(0.098),filtroAR=0.91,
filtroMA=0.58,nSimArma=1000,nSimArma2=2000,
shift=3*sqrt(0.098),K=100){
ris<-rep(0,3)
for(z in 1:nSim){
RunLengthST<-0;RunLengthWC<-0;RunLengthSH<-0
dati<-ARMAsim(oldz=0,olda=0,phi,theta,sdinnovazione,numero=(nSimArma+K))
```

```

if(shift !=0){
  dati[(K+2):(nSimArma+K+1)]<-
    dati[(K+2):(nSimArma+K+1)]+shift
}
residui<-ARMAresidui(dati[1:length(dati)-1],ph=filtroAR,th=filtroMA)
residui<-residui[(K+1):(nSimArma+K)] #si eliminano i primi 'K' residui
ultimores<-residui[nSimArma]
stat<-EWMAstat(residui) #si calcolano le statistiche EWMA
ultimaewma<-stat[nSimArma]
residui<-abs(residui) #valori assoluti dei residui
stat<-abs(stat) #valori assoluti delle statistiche EWMA
quant<-nSimArma #numero di dati simulati nel primo blocco
n<-(nSimArma+K) # n+1=la posizione dell'ultimo dato simulato nel primo blocco
contatore<-1 #la posizione del primo fuori controllo
while(RunLengthST==0 | RunLengthWC==0 | RunLengthSH==0){
  if(contatore>1){
    quant<-nSimArma2 #numero di dati simulati negli eventuali
                      #blocchi successivi al primo
    dati<-ARMAsim(oldz=dati[n+1]-shift,olda=dati[n+2],phi,theta,
                  sdinnovazione,numero=quant)
    if(shift != 0){
      dati[1:(quant+1)]<- dati[1:(quant+1)]+shift
    }
    n<-nSimArma2
    residui<-ARMAresidui(dati[1:length(dati)-1],r0=ultimores,
                        ph=filtroAR,th=filtroMA)
    stat<-EWMAstat(residui,y0=ultimaewma)
    ultimaewma<-stat[nSimArma2]
    residui<-abs(residui)
    stat<-abs(stat)
  }
  i<-1
  while(i<=quant & (RunLengthST==0 | RunLengthWC==0 | RunLengthSH==0)){

```

```

        if(RunLengthST==0 & stat[i]>STlimit){
            RunLengthST<-contatore
        }
        if(RunLengthWC==0 & stat[i]>WClimit){
            RunLengthWC<-contatore
        }
        if(RunLengthSH==0 & residui[i]>SHlimit){
            RunLengthSH<-contatore
        }
        i=i+1 ;contatore=contatore+1
    }#fine while (i)
}#fine while
ris<-ris+cbind(RunLengthSH,RunLengthST,RunLengthWC)
}#fine for(z)
ris<-ris/nSim
return(ris)
}

```

**Utilizzo:**

La funzione `ARL` viene utilizzata per simulare le ARL per tre carte di controllo: EWMA con i limiti standard, EWMA con i limiti *worst-case* e Shewhart con i limiti standard.

**Input:**

<code>SHlimit</code>	UCL per la carta Shewhart
<code>STlimit</code>	UCL per la carta EWMA con i limiti standard
<code>WClimit</code>	UCL per la carta EWMA con i limiti worst-case
<code>nSim</code>	il numero di replicazioni
<code>phi</code>	il vero valore del parametro autoregressivo $\phi$
<code>theta</code>	il vero valore del parametro media mobile $\theta$
<code>sdinnovazione</code>	la deviazione standard $\sigma_a$ delle innovazioni $a_t$
<code>filtroAR</code>	la stima del parametro $\phi$ con la quale viene filtrata la parte autoregressiva della serie simulata, al fine di ottenere i residui

<code>filtroMA</code>	la stima del parametro $\theta$ con la quale viene filtrata la parte di media mobile della serie simulata, al fine di ottenere i residui
<code>nSimArma</code>	il numero di dati simulati nel primo blocco
<code>nSimArma2</code>	il numero di dati simulati negli eventuali blocchi successivi
<code>shift</code>	l'ampiezza dello shift
<code>K</code>	il numero di dati iniziali che devono essere eliminati

**Output:**

Il vettore di lunghezza 3, contenente le ARL per le tre carte considerate.

**Descrizione:**

Le innovazioni  $a_t$  vengono generate come numeri casuali provenienti dalla distribuzione normale con media 0 e varianza  $\sigma_a^2$ ; le osservazioni  $x_t$  si calcolano utilizzando l'equazione 2.2 (tramite la funzione `ARMAsim`); i residui, invece, utilizzando l'equazione 2.6 (tramite la funzione `ARMAresidui`). I primi  $K$  residui vengono eliminati e, successivamente, sui rimanenti residui vengono calcolate le statistiche EWMA utilizzando l'equazione 2.5, con il valore iniziale  $y_0 = 0$  (tramite la funzione `EWMastat`). La statistica EWMA viene confrontata con i limiti standard e i limiti *worst-case* della carta EWMA, mentre i residui vengono confrontati con i limiti standard della carta Shewhart. La prima volta che il valore assoluto della statistica di controllo supera UCL della carta corrispondente, l'istante temporale in cui questo è avvenuto viene memorizzato. La procedura continua finché non si verifica la registrazione delle *run length* per tutte le tre carte.

La simulazione di tre valori di *run length* si ripete `nSim` volte. Dunque, si ottengono `nSim` valori di RL per ciascuna delle tre carte. Alla fine della simulazione la funzione `ARL` restituisce le medie di queste tre sequenze di RL.

---

## RL

---

```
RL<-function(h,phi,theta,sdinnovazione,filtroAR,filtroMA,nSimArima){
K<-100
RunLength<-0
dati<-ARMAsim(oldz=0,olda=0,phi,theta,sdinnovazione,numero=(nSimArima+K))
residui<-ARMAresidui(dati[1:length(dati)-1],ph=filtroAR,th=filtroMA)
residui<-residui[(K+1):(nSimArima+K)]
ultimores<-residui[nSimArima]
stat<-EWMAstat(residui)
ultimaewma<-stat[nSimArima]
residui<-abs(residui)
stat<-abs(stat)
n<-(nSimArima+K)
contatore<-1
while(RunLength==0){
  if(contatore>1){
    dati<-ARMAsim(oldz=dati[n+1],olda=dati[n+2],phi,theta,
                  sdinnovazione,numero=nSimArima)
    n<-nSimArima
    residui<-ARMAresidui(dati[1:length(dati)-1],r0=ultimores,
                        ph=filtroAR,th=filtroMA)
    stat<-EWMAstat(residui,y0=ultimaewma)
    ultimaewma<-stat[nSimArima]
    residui<-abs(residui)
    stat<-abs(stat)
  }
  i<-1
  while(i<=nSimArima & RunLength==0){
    if(stat[i]>h){
      RunLength<-contatore
    }
  }
}
```

```

        i<-i+1;contatore<-contatore+1
    }
}
return(RunLength)
}

```

### Utilizzo:

La funzione RL è una modifica della funzione ARL e viene utilizzata all'interno della funzione hAppross per simulare la *run length* della carta EWMA in corrispondenza ad una soglia di controllo  $h$ .

---

## hAppross

---

```

hAppross<-function(A,B,k,w,h){
  sume<-0
  seqy<-rep(0,k)
  ris<-c(0,0)
  i<-1
  u<-w+1
  while(u >= w){
    y1<-(RL(h=h,phi=0.94, theta=0.57,sdinovazione=sqrt(0.102),
            filtroAR=0.91,filtroMA=0.58,nSimArima=500)-B)/B
    y2<-(RL(h=h,phi=0.94, theta=0.57,sdinovazione=sqrt(0.102),
            filtroAR=0.91,filtroMA=0.58,nSimArima=500)-B)/B
    y<-(y1+y2)/2
    e<-((y1-y2)^2)/2
    sume<-sume+e
    h=h-(A/i)*y
    if (h<0) h=0
    y<-y^2
    if(i<k){
      seqy[i]<-y
    }
  }
}

```

```
    else{
      seqy[k]<-y
      numeratore<-sum(seqy^2)/k
      denominatore<-sume/i
      u<- numeratore/denominatore
      seqy<-seqy[2:k]
    }
    i=i+1
  }
  ris<-cbind(i-1,h)
  return(ris)
}
```

**Esempio:**

```
#input:
hAppross(A=0.1,B=500,w=2/9,k=100,h=0.239)
#output:[1,] 1479 0.2465127
```

**Utilizzo:**

Questa funzione viene utilizzata per trovare i limiti *worst-case* della carta EWMA mediante l'approssimazione stocastica.

**Input:**

- A la costante  $A$  nell'equazione 4.1
- B il valore prefissato di ARL in controllo ( $ARL_d$ )
- w la costante  $w$  nell'equazione 4.2
- k la costante  $k$  nell'equazione 4.2
- h il valore iniziale della soglia di controllo ( $h_0$ )

**Output:**

Oltre a restituire il valore di  $h$  che fornisce l'ARL in controllo pari al suo valore prefissato, la funzione `hAppross` restituisce anche il numero di iterazioni che sono state necessarie per ottenere il risultato.

## Bibliografia

- [1] ADAMS B.M., TSENG I.T. (1998), Robustness of Forecast-Based Monitoring Schemas, *Journal of Quality Technology*, 30, pp. 328-339.
- [2] APLEY W.D. (2002), Time Series Control Charts in the Presence of Model Uncertainty, *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, 124, pp. 891-898.
- [3] APLEY D.W., LEE H.C. (2003), Design of Exponentially Weighted Moving Average Control Charts for Autocorrelated Processes With Model Uncertainty, *Technometrics*, Vol.45, No.3, AUGUST 2003, pp 187-198.
- [4] BOX G., JENKINS G., REINSEL.G. (1994), *Time Series Analysis, Forecasting, and Control (3rd ed.)*, Englewood Cliffs, NJ:Prentice-Hall.
- [5] CRYER J.D. (1986), *Time Series Analysis*, PWS Publisher.
- [6] LU C.W., REYNOLDS M.R. (1999), EWMA Control Charts for Monitoring the Mean of Autocorrelated Processes, *Journal of Quality Technology*, 23, pp. 179-193.
- [7] LUCAS J.M., SACCUCCI M.S. (1990), Exponentially Weighted Moving Average Control Schemas: Properties and Enhancements, *Technometrics*, 32, pp. 1-12.
- [8] MASAROTTO G., CAPIZZI G. (1999), Calibrazione di una carta di controllo mediante Approssimazione Stocastica. Atti dello XXXIX Riunione Scientifica della Società Italiana di Statistica, in supplemento alla



- 
- Rivista di *Scritti di Statistica Economica*, pp. 809-815. *Technometrics*, 45, pp. 187-198.
- [9] MONTGOMERY D.C. (2000), *Controllo statistico della qualità*, McGraw-Hill.
- [10] ROBBINS H., MONRO S. (1951), A Stochastic Approximation Method, *The Annals of Mathematical Statistics*, 22, pp. 400-407.
- [11] RUPPERT D. (1991), Stochastic Approximation, in Ghosh B.K., Sen P.K., *Handbook of Sequential Analysis*, Marcel Dekker, New York, pp. 503-529.
- [12] STROUP D. F., BRAUN H.I. (1982), On a New Stopping Rule For Stochastic Approximation, *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 60, pp. 535-554 (corr. 1984, pp. 237).