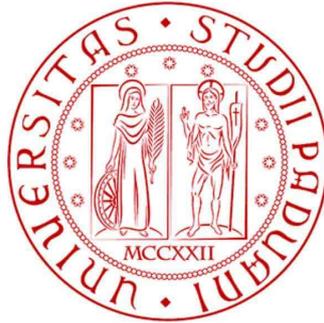


Università degli Studi di Padova
Dipartimento di Scienze Statistiche
Corso di Laurea Magistrale in
Scienze Statistiche



Modelli di diffusione: alcune proposte di generalizzazione

Relatore: Prof.ssa
Mariangela Guidolin
Dip. di Scienze Statistiche

Laureanda:
Alessandra Zantedeschi
Matricola 2078213

Anno Accademico 2023/2024

Indice

1	Introduzione	3
2	Modelli di diffusione	6
2.1	Modello di Bass	7
2.2	Modello di Bass Generalizzato	13
2.2.1	Impulsi rettangolari	15
2.2.2	Impulsi esponenziali	17
2.2.3	Impulsi armonici	18
2.2.4	Impulsi di Riccati	19
2.2.5	Impulsi misti	20
3	Proposte di generalizzazione per il GBM	23
3.1	Nuove funzioni impulso	23
3.1.1	Impulsi armonici continui	23
3.1.2	Impulsi lineari	26
3.1.3	Impulsi asimmetrici	28
3.2	Applicazione del GBM con <i>shock armonico continuo</i> . .	33
3.2.1	Audiocassette negli Stati Uniti	34
3.2.2	Citazioni di Bass (1969)	37
3.2.3	Vendita di auto in Norvegia	41

4	Modelli di diffusione con mercato potenziale variabile	52
4.1	Modello di Guseo-Guidolin	55
5	Proposta per il mercato potenziale variabile	59
5.1	Mercato potenziale in funzione della reputazione del prodotto	60
5.2	Applicazione del modello con reputazione	63
5.2.1	Vendita di Apple iPhone	64
5.2.2	Vendita di auto ibride in Norvegia	69
6	Conclusione	74
A	Appendice	78
A.1	Minimi quadrati non lineari	78
A.2	Proposte di generalizzazione per il GBM	79
A.2.1	Calcolo di integrali	79
A.2.2	Algoritmi implementati	81
A.3	Proposta per il mercato potenziale variabile	97
A.3.1	Algoritmi implementati	97
B	Bibliografia	108

Capitolo 1

Introduzione

Secondo Rogers (2003) [23], la diffusione è il processo con cui un'innovazione viene trasmessa attraverso determinati canali nel tempo ai membri di un sistema sociale. Questa definizione descrive il processo di evoluzione dei sistemi economici e sociali, che crescono, cambiano e si rinnovano attraverso la diffusione di nuove idee e di nuovi prodotti. Un'innovazione, sia essa una scoperta scientifica, una filosofia o un prodotto, causa cambiamento, ed è attraverso questo cambiamento che il mondo e la società evolvono. Se si considera l'ambito economico, in particolare, si può affermare che esso è caratterizzato da una continua entrata e uscita di prodotti. Per un'azienda produttrice, è di particolare interesse poter comprendere le dinamiche che determinano la diffusione di un nuovo prodotto; potendo quindi prevedere la reazione del mercato all'introduzione di un'innovazione, l'azienda ha la possibilità di pianificarne il lancio e di scegliere le migliori strategie di marketing per assicurarne il maggior successo possibile. Tra gli strumenti fondamentali per poter fare ciò ci sono i modelli di diffusione per innovazioni: come illustrano Mahajan e Muller (1979) [16], l'obiettivo di questo tipo di modelli è la descrizione del processo di diffusione di un nuovo prodotto in un mercato definito. Il modello di diffusione più

famoso è quello di Bass (1969) [1], che modella l'istante del primo acquisto di un'innovazione come risultato di influenze esterne, come la pubblicità, o interne, attraverso l'effetto del passaparola. Il modello di Bass è efficiente e parsimonioso, tuttavia spesso può risultare poco flessibile: per poter includere interventi che modifichino il tempo di diffusione, Bass, Krishnan e Jain (1994) [2] propongono una funzione che rappresenti le eventuali perturbazioni presenti nel processo. Un'ulteriore generalizzazione ampiamente considerata dalla letteratura riguarda invece il numero di potenziali acquirenti: considerato inizialmente costante nel tempo, viene poi descritto come variabile in funzione di diverse caratteristiche del mercato e del sistema sociale. L'obiettivo di questo elaborato è l'analisi dei modelli di diffusione studiati finora, finalizzato alla proposta di alcune forme di generalizzazione per tali modelli. In particolare, si considereranno delle funzioni alternative per gli impulsi nella generalizzazione del modello di Bass, con l'obiettivo di includere scenari non ancora presenti in letteratura. In aggiunta, si vuole studiare una funzione alternativa per il mercato potenziale variabile, che dipenda dalla qualità della reputazione del prodotto e dal tipo di informazione a riguardo che viene diffusa nel sistema sociale.

La tesi è così strutturata: il capitolo 2 introduce i modelli di diffusione con mercato potenziale fisso, in particolare modello di Bass e modello di Bass generalizzato; il capitolo 3 contiene la descrizione delle nuove funzioni proposte per gli impulsi e l'applicazione dei nuovi modelli a

diversi *dataset* per verificarne la bontà di adattamento. Nel capitolo 4 vengono introdotti i modelli di diffusione con mercato potenziale variabile, in particolare il GGM, mentre nel capitolo 5 viene proposto un nuovo modello con diversa funzione per il mercato potenziale variabile. Questo modello viene quindi applicato ad alcuni *dataset* per valutarne l'adattamento. Nel capitolo 6 vengono riassunti proposte e risultati dell'elaborato.

Capitolo 2

Modelli di diffusione

Lo scopo dei modelli di diffusione è stato definito da Mahajan e Muller (1979) [16]: descrivere il livello di diffusione di un'innovazione all'interno di un insieme di potenziali acquirenti. Il focus di questo ambito di studi è quindi la rappresentazione e la previsione della crescita di adozioni in un processo di diffusione già in atto. Il processo di diffusione preso in considerazione descrive il ciclo di vita di un'innovazione, di cui si vuole studiare l'evoluzione nel tempo. I modelli di diffusione sono uno strumento utile per la previsione delle diverse fasi del ciclo di vita di un nuovo prodotto: la loro applicazione più immediata è quindi relativa alla pianificazione di pratiche di marketing per il lancio di innovazioni, con l'obiettivo di massimizzare le vendite o di prolungare la durata della presenza del prodotto nel mercato; tuttavia questo tipo di modelli possono essere applicati anche in svariati contesti diversi dal marketing, quali scienze sociali, matematica, fisica ed epidemiologia.

I modelli di diffusione sono stati sviluppati a partire da modelli epidemiologici, utilizzati per descrivere le dinamiche di contagio in una popolazione. È infatti stato osservato da Rogers (2003) [23] che la diffusione di un'innovazione in un sistema sociale è simile a quella di un virus in una popolazione; pertanto, la forma dei modelli di diffu-

sione prende ispirazione dal modello di Verhulst, basato sull'equazione logistica. I modelli di diffusione più noti al giorno d'oggi sono i seguenti: il modello di Fourt e Woodlock (1960) [8] prevede una crescita esponenziale asintotica; il modello logistico di Mansfield (1961) [19] si concentra sul tasso di imitazione tra potenziali acquirenti; infine, il più recente e acclamato dei modelli di diffusione è il modello di Bass (1969) [1], che si basa sui due modelli precedenti, superandone le limitazioni.

2.1 Modello di Bass

Nell'ambito di studio in cui si applicano i modelli di diffusione, come il modello di Bass, vengono formulate delle ipotesi formali riguardanti il comportamento degli acquirenti: si assume che ogni agente acquisti una sola volta il prodotto, e che ogni acquisto sia composto da una sola unità; Bass (1969) [1] specifica infatti che il suo modello di diffusione ha l'obiettivo di prevedere l'istante del primo acquisto del prodotto da parte di un agente del mercato considerato. Tuttavia, le applicazioni del modello di Bass rilassano queste ipotesi, considerando processi di diffusione senza grosse limitazioni sul comportamento degli acquirenti. Un'altra ipotesi fondamentale dei modelli di diffusione riguarda il mercato potenziale, definito da Bass (1969) [1] come il numero massimo di acquirenti nell'intero ciclo di vita dell'innovazione studiata. Questo numero è considerato costante nel tempo e viene stimato nella fase iniziale del processo di diffusione, cioè nel momento in cui l'innovazione

viene introdotta nel mercato.

Il modello di Bass è un caso particolare dell'equazione differenziale di Riccati a coefficienti costanti

$$y' + ay^2 + by + c = 0. \quad (1)$$

Il modello di Bass standard assume forma

$$y'(t) = (p + qy(t))(1 - y(t)), \quad (2)$$

con $p, y > 0$, dove y rappresenta una funzione di densità e y' è la sua funzione di ripartizione. Si nota che, ponendo $q = a$, $p - q = b$ e $-p = c$, dal modello di Bass (2) si ottiene l'equazione di Riccati a coefficienti costanti (1).

Utilizzando una notazione che si riferisce al numero assoluto di adozioni del prodotto, si pone $z = ym$, dove m è il mercato potenziale, anche detto capacità portante. Allora il modello di Bass standard (2) può anche essere riscritto come

$$z'(t) = \left(p + q \frac{z(t)}{m} \right) (m - z(t)), \quad (3)$$

in cui si osserva che la variazione delle adozioni rispetto al tempo, $z'(t)$, è proporzionale al termine $m - z(t)$, che indica il mercato residuo, ri-

sultato della differenza tra mercato potenziale e adozioni cumulate. Inoltre, da questa formulazione del modello di Bass standard risulta che la probabilità di adozione, supposto che il prodotto non sia già stato acquistato, è lineare rispetto al numero di adozioni. Si ottiene quindi un modello per il numero di adozioni cumulate che prevede una velocità di crescita che, dopo un periodo di introduzione dell'innovazione del mercato in cui gli acquisti sono pochi, aumenta per poi rallentare gradualmente quando si arriva alla saturazione del mercato potenziale. Le adozioni cumulate stimate secondo il modello di Bass assumono quindi una forma “a S”, come si può vedere in Figura 1.

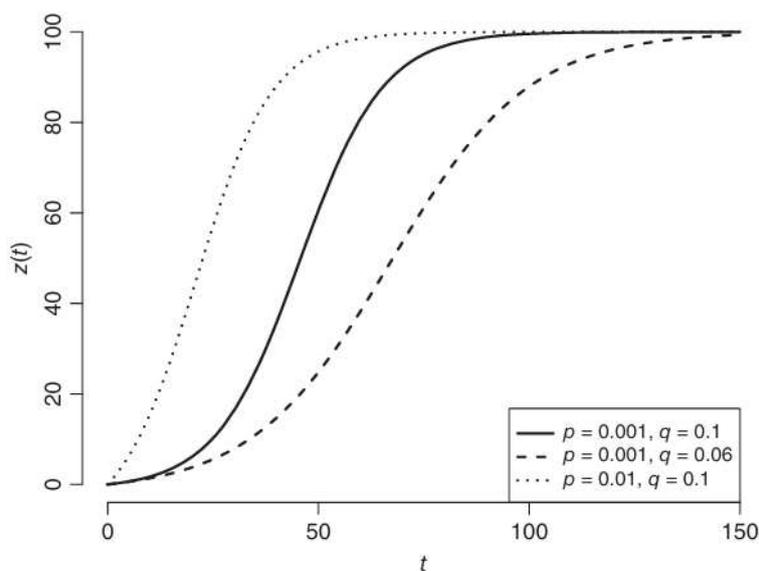


Figura 1: Processi di diffusione per 3 diversi set di parametri p e q con m fissato a $m = 100$ per un modello di Bass standard (Guidolin (2024) [9]).

Da questa ultima riscrittura del modello (3) si nota che la variazione istantanea delle vendite è il risultato della somma di due addendi:

$p(m - z(t))$ e $q\frac{z(t)}{m}(m - z(t))$. Infatti, l'ipotesi di lavoro su cui si è basato Bass nella formulazione del suo modello, specifica che un componente del mercato potenziale adotta l'innovazione come risultato di due diversi tipi di forze: le influenze esterne, rappresentate da p , e le influenze interne, indicate da q . In particolare, Bass (1969) [1] ipotizza che la probabilità di adozione di un nuovo prodotto in uno specifico istante, assunto che non sia già stato adottato, dipende linearmente dalle due diverse influenze appena nominate. Le forze esterne che agiscono nel processo decisionale dell'adozione sono rappresentate dalla comunicazione che l'azienda intraprende con il mercato, come ad esempio la pubblicità. Le influenze interne, invece, sono il risultato dell'interazione tra gli acquirenti del prodotto e i potenziali acquirenti; pertanto, le influenze interne riguardano l'informazione scambiata tra i componenti del mercato potenziale, mentre quelle esterne sfruttano l'informazione inserita nel mercato potenziale dalle aziende. Allora è possibile distinguere due diversi tipi di acquirenti dell'innovazione: coloro che hanno scelto di adottare il prodotto perché raggiunti da informazioni esterne, chiamati da Bass (1969) [1] "innovatori"; e coloro che acquistano il prodotto perché convinti da chi lo ha già acquistato, detti quindi "imitatori". Per questo motivo, la componente che riguarda l'imitazione nel modello di Bass, $q\frac{z(t)}{m}(m - z(t))$, è detta "effetto passaparola"; è interessante notare che questo comincia ad agire solo quando il rapporto $\frac{z(t)}{m}$ è non nullo, ossia quando $z(t)$ è diverso da 0:

ciò indica che gli imitatori cominciano ad acquistare il prodotto solo nel momento in cui nel mercato ci sono degli innovatori da imitare. Infatti, come si può osservare in Figura 2, l'importanza degli innovatori è massima all'inizio e decresce nel tempo.

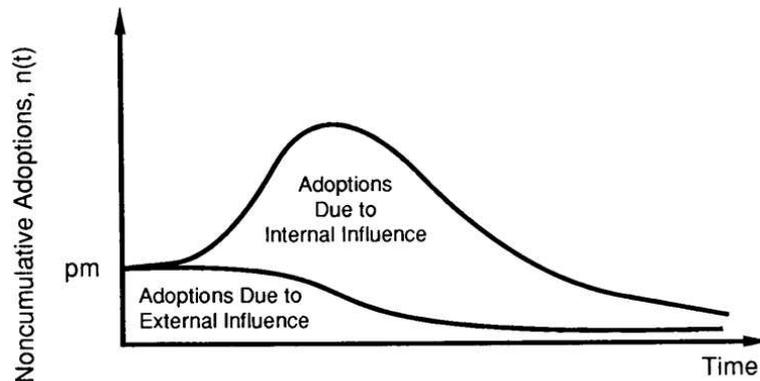


Figura 2: Adozioni dovute a influenze esterne e interne nel modello di Bass standard (Mahajan, Muller e Bass (1990) [17].)

Nel modello di Bass (2), p indica il coefficiente di innovazione e q quello di imitazione; nella maggior parte dei casi, il coefficiente di imitazione è alcune decine di volte più grande del coefficiente di innovazione: ciò è sottolineato anche da Guidolin e Manfredi (2022) [10], che dimostrano la prevalenza dell'effetto di imitazione rispetto a quello di innovazione. Questo fatto evidenzia nuovamente il legame tra i modelli di diffusione per innovazioni e i modelli per la diffusione epidemiologica, che prevedono solo l'aspetto del contagio, corrispondente all'imitazione.

Uno dei pregi del modello di Bass è che possiede una soluzione esplicita: con la condizione iniziale $y(0) = 0$, che indica l'assenza di adozioni al

momento del lancio del prodotto, si ottiene

$$y(t) = \frac{1 - e^{-(p+q)t}}{1 + \frac{q}{p}e^{-(p+q)t}}, \quad (4)$$

ovvero

$$z(t) = m \frac{1 - e^{-(p+q)t}}{1 + \frac{q}{p}e^{-(p+q)t}}. \quad (5)$$

Il modello può essere stimato attraverso i minimi quadrati non lineari, e fornisce generalmente un buon adattamento ai dati, con valori del coefficiente di determinazione R^2 spesso superiori al 95%. Inoltre, il modello di Bass standard ha il vantaggio di essere semplice, facilmente interpretabile, parsimonioso e di richiedere solo la conoscenza del numero di adozioni aggregate. Il suo utilizzo è stato esteso anche oltre all'ambito dei beni di consumo, venendo applicato anche a cicli di vita di tipi diversi di innovazione, come evidenziano Guidolin e Manfredi (2022) [10]. Alcune limitazioni sono presentate da Guidolin (2024) [9], sottolineando che il modello di Bass standard può essere stimato solo quando c'è un numero sufficiente di osservazioni disponibili, e dunque ovviamente non può essere utilizzato per fare previsioni prima del lancio di un prodotto. Inoltre, il modello ipotizza un mercato potenziale m costante nel tempo: ciò non è sempre realistico. Una ulteriore restrizione del modello di Bass standard è che non considera il *marketing mix*. Anche Bass, Krishnan e Jain (1994) [2] e Mahajan, Muller e Bass

(1990) [17] evidenziano il medesimo limite: secondo gli autori, infatti, il modello risulta essere incompleto, in quanto non combina l'effetto di passaparola con l'effetto di variabili economiche quali prezzo e pubblicità. Inoltre, Peres, Muller e Mahajan (2010) [20] propongono una estensione del modello di Bass che tenga conto di altre influenze sociali, oltre a quella del passaparola.

2.2 Modello di Bass Generalizzato

Nel loro articolo, Bass, Krishnan e Jain (1994) [2] si pongono l'obiettivo di creare un modello che sia una generalizzazione del modello di Bass standard, in modo tale che potesse includere anche variabili di decisione, in quanto secondo gli autori hanno un impatto significativo sul processo di diffusione. Altre caratteristiche che sono ritenute necessarie per il buon funzionamento di un tale modello sono la presenza di una soluzione a forma chiusa e che il modello di Bass ne rappresenti un caso particolare. Una possibile soluzione è rappresentata da un modello in cui i parametri di innovazione e imitazione, p e q , siano variabili nel tempo; tuttavia, risulta più conveniente mantenere la struttura del modello di Bass standard (2). Pertanto, la soluzione proposta, che prende il nome di modello generalizzato di Bass (GBM), assume la seguente forma:

$$z'(t) = \left(p + q \frac{z(t)}{m} \right) (m - z(t)) x(t), \quad (6)$$

dove $x(t)$ è chiamata da Bass, Krishnan e Jain (1994) [2] *current marketing effort*. Questa funzione del tempo, che deve essere non-negativa e integrabile, rappresenta l'effetto delle variabili di marketing sulla probabilità condizionale di adozione al tempo t . $x(t)$ può anche riflettere l'effetto di ritardi nelle variabili decisionali; in generale, ha la capacità di traslare la funzione di probabilità di adozione. Secondo Guseo (2004) [11], la funzione $x(t)$, detta portante o impulso, permette di incorporare nel processo di diffusione l'effetto di covariate che influenzano il mercato, come ad esempio il livello dei prezzi, la comunicazione dell'impresa, cambiamenti nei regimi contrattuali e altri tipi di perturbazioni economiche. In breve, la funzione portante rappresenta interventi esogeni nel processo di diffusione dell'innovazione, altrimenti detti shock o impulsi, che sono legati a covariate di tipo economico solo indirettamente, non in modo esplicito. Guseo (2004) [11] specifica anche che, quando la funzione vale $0 < x(t) < 1$, causa un rallentamento nella diffusione dell'innovazione, ossia una dilatazione del tempo; viceversa, se $x(t) > 1$, il processo di diffusione subisce un'accelerazione. Inoltre, è possibile osservare come il modello di Bass standard (2) rappresenti il caso particolare del modello di Bass generalizzato (6), in cui la funzione $x(t)$ vale 1.

Il modello di Bass generalizzato ha una soluzione esplicita in forma

chiusa:

$$z(t) = m \frac{1 - e^{-(p+q) \int_0^t x(\tau) d\tau}}{1 + \frac{q}{p} e^{-(p+q) \int_0^t x(\tau) d\tau}}. \quad (7)$$

Si nota quindi come il GBM riesca a mantenere i pregi del modello di Bass standard, in quanto i parametri m , p e q non vengono modificati dalla funzione portante, mantenendo il proprio ruolo e la propria interpretazione.

Uno degli scopi aggiuntivi del modello di Bass generalizzato rispetto al modello di Bass standard riguarda l'individuazione degli eventi esogeni che hanno modificato il tempo della diffusione dell'innovazione, e la loro separazione dal normale processo di diffusione, che è l'oggetto di studio. Il modello di Bass generalizzato permette quindi di analizzare, dopo il loro avvenimento, eventi che hanno influenzato il mercato in cui si sta diffondendo il prodotto. Per individuare in modo più semplice e immediato tali eventi, nella letteratura sono stati proposti alcuni impulsi, ossia forme della funzione portante $x(t)$, che rappresentano situazioni semplificate e circoscritte. In seguito vengono elencate e descritte alcune scelte particolari per la funzione portante, come vengono riportate da Guseo (2004) [11] e Guidolin (2024) [9].

2.2.1 Impulsi rettangolari

Uno degli interventi esogeni più semplici rappresenta un evento che ha effetto costante in un intervallo di tempo limitato: questo tipo di

impulso è detto rettangolare e ha forma

$$x(t) = 1 + c_1 \mathbb{1}_{a_1 \leq t \leq b_1}, \quad (8)$$

dove $\mathbb{1}$ è la funzione indicatrice, che vale 1 quando la condizione a pedice è vera, 0 altrimenti. I parametri $[a_1, b_1]$, con $a_1, b_1 \geq 0$ e $a_1 < b_1$, indicano gli estremi dell'intervallo temporale entro cui agisce l'impulso; la funzione portante ha valore costante 1 al di fuori di questo intervallo. c_1 , invece, rappresenta il segno e l'intensità dell'impulso stesso.

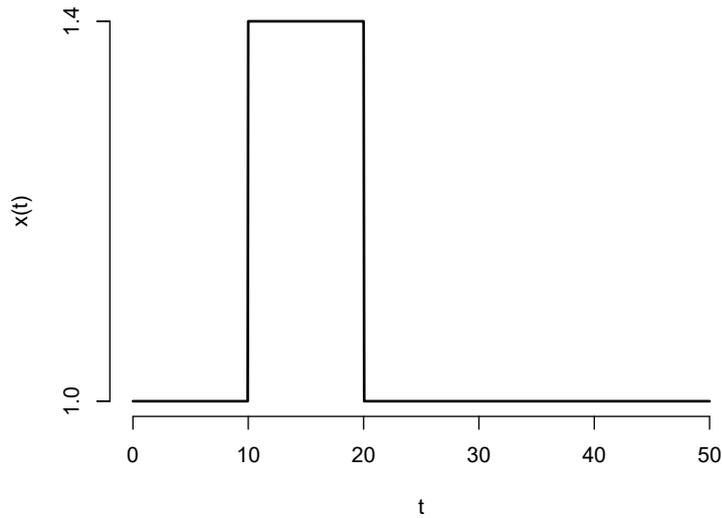


Figura 3: Impulso rettangolare con $a_1 = 10$, $b_1 = 20$ e $c_1 = 0.4$.

Questo tipo di impulso, rappresentato in Figura 3, è utilizzato in contesti in cui l'effetto dell'evento agisce solo all'interno dei confini temporali e non cambia nel tempo.

2.2.2 Impulsi esponenziali

Alternativamente, la funzione $x(t)$ può rappresentare un impulso che causa una perturbazione immediatamente intensa e che si riassorbe nel tempo: si tratta di impulsi esponenziali, che hanno forma

$$x(t) = 1 + c_1 e^{b_1(t-a_1)} \mathbb{1}_{t \geq a_1}. \quad (9)$$

Il parametro $a_1 \geq 0$ indica l'istante in cui l'impulso comincia; b_1 rappresenta invece la memoria dello shock, cioè la velocità di riassorbimento della funzione portante: pertanto, è spesso negativo. Invece c_1 è l'intensità dell'impulso.

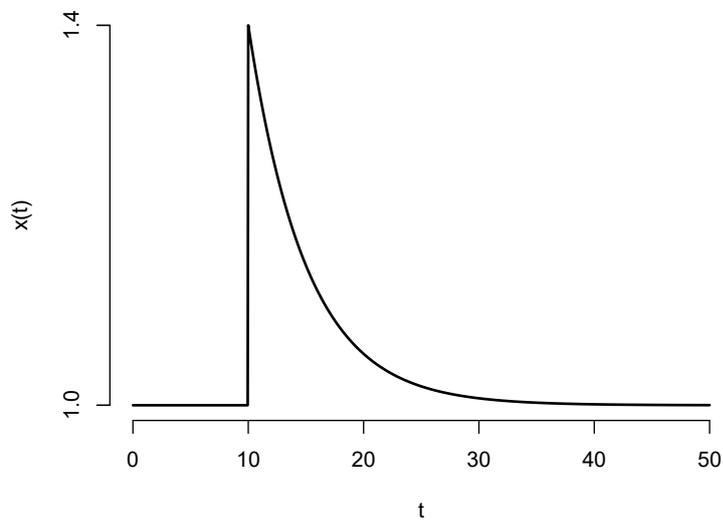


Figura 4: Impulso esponenziale con $a_1 = 10$, $b_1 = -0.2$ e $c_1 = 0.4$.

Gli impulsi esponenziali, come ad esempio quello riportato in Figu-

ra 4, rappresentano interventi con effetto istantaneo, che viene poi riassorbito fino al ritorno alla stabilità.

2.2.3 Impulsi armonici

Gli impulsi armonici sono shock locali e bilanciati: al primo scostamento iniziale dal valore stazionario 1 segue una reazione uguale ed opposta.

$$x(t) = 1 + c_1 \cos \left(2\pi \frac{t - a_1}{b_1 - a_1} \right) \mathbb{1}_{a_1 \leq t \leq b_1}, \quad (10)$$

dove i parametri $[a_1, b_1]$, con $a_1, b_1 \geq 0$ e $a_1 < b_1$, indicano il tempo di insorgenza e di interruzione dello shock, che anche in questo caso agisce solo in questa finestra temporale limitata. c_1 , invece, indica l'ampiezza dell'impulso.

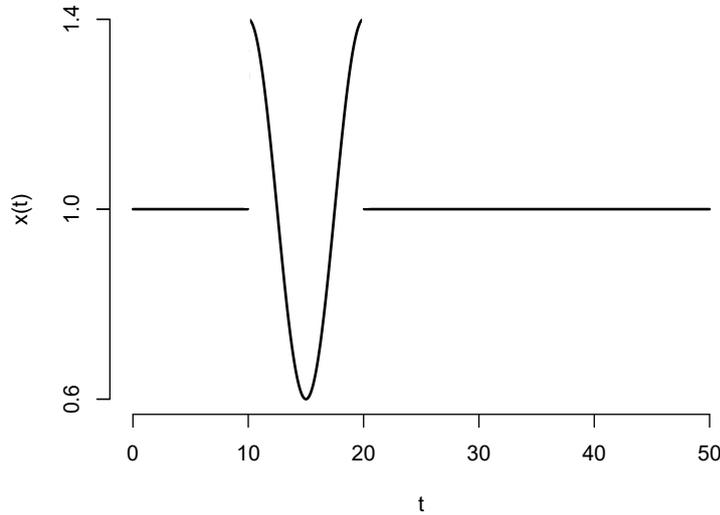


Figura 5: Impulso armonico con $a_1 = 10$, $b_1 = 20$ e $c_1 = 0.4$.

Un impulso armonico, rappresentato in Figura 5, può servire per descrivere interventi a cui segue una reazione simmetrica, che però ha intensità maggiore dello spostamento massimo dallo stato di equilibrio e che perdura nella finestra temporale definita dai parametri.

2.2.4 Impulsi di Riccati

Per descrivere un impulso che si discosta gradualmente dallo stato di equilibrio unitario fino al raggiungimento di un massimo, per poi tornare al valore 1 nella stessa maniera, è stata proposta la densità di Riccati:

$$x(t) = 1 + \frac{-a_1 \frac{b_1}{d_1} (d_1 - b_1)^2 e^{-a_1(d_1 - b_1)(t - c_1)}}{\left(1 - \frac{b_1}{d_1} e^{-a_1(d_1 - b_1)(t - c_1)}\right)^2}. \quad (11)$$

In questo caso, $b_1 < 0 < d_1$ rappresentano le radici dell'equazione di Riccati, mentre $a_1 > 0$ indica la velocità di crescita e decrescita della funzione portante ed è inversamente proporzionale all'ampiezza della curva; c_1 rappresenta invece il punto in cui $x(t)$ raggiunge il proprio massimo o minimo.

Anche questo shock, riportato in Figura 6, rappresenta interventi con impulso iniziale seguito da una reazione simmetrica che riporta la funzione portante $x(t)$ allo stato stazionario. Tuttavia, a differenza degli impulsi armonici, nei casi descritti con shock di Riccati l'effetto dell'intervento si manifesta gradualmente, e la reazione riporta allo stesso modo $x(t)$ al valore 1.

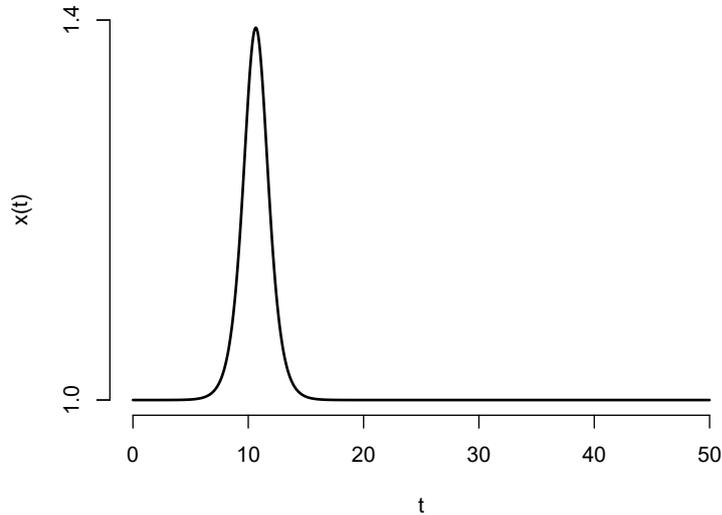


Figura 6: Impulso di Riccati con $a_1 = 0.2$, $b_1 = -2$, $c_1 = 10$ e $d_1 = 5$.

2.2.5 Impulsi misti

Poiché gli impulsi descritti finora descrivono uno scostamento locale della funzione portante dall'unità, è possibile che $x(t)$ sia composta da più di uno shock: infatti, il processo di diffusione di un'innovazione può subire accelerazioni o rallentamenti plurimi dovuti a cause potenzialmente diverse, che causano quindi impulsi di forma diversa, come evidenziato da Guseo, Dalla Valle e Guidolin (2007) [12]. È dunque possibile ottenere shock composti, formati da più impulsi dello stesso tipo: ad esempio si potrebbero avere tre diversi impulsi esponenziali

$$x(t) = 1 + c_1 e^{b_1(t-a_1)} \mathbf{1}_{t \geq a_1} + c_2 e^{b_2(t-a_2)} \mathbf{1}_{t \geq a_2} + c_3 e^{b_3(t-a_3)} \mathbf{1}_{t \geq a_3}, \quad (12)$$

come è rappresentato in Figura 7; è anche possibile avere una funzione portante composta da impulsi di natura diversa, detti quindi impulsi misti. Ad esempio, volendo combinare un impulso rettangolare, uno esponenziale e uno armonico, si ottiene la seguente espressione:

$$x(t) = 1 + c_1 \mathbb{1}_{a_1 \leq t \leq b_1} + c_2 e^{b_2(t-a_2)} \mathbb{1}_{t \geq a_2} + c_3 \cos\left(2\pi \frac{t-a_3}{b_3-a_3}\right) \mathbb{1}_{a_3 \leq t \leq b_3}, \quad (13)$$

il cui grafico è riportato in Figura 8.

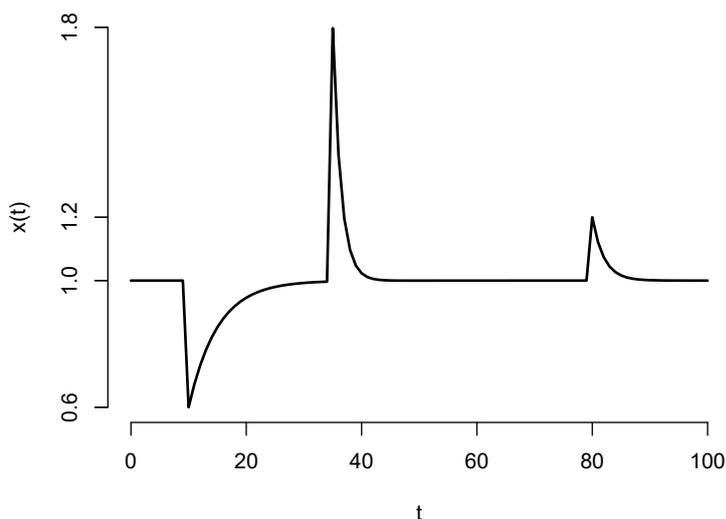


Figura 7: Impulso esponenziale multiplo con $a_1 = 10$, $b_1 = -0.2$ e $c_1 = -0.4$, $a_2 = 35$, $b_2 = -0.7$ e $c_2 = 0.8$, $a_3 = 80$, $b_3 = -0.5$ e $c_3 = 0.2$.

Gli impulsi misti permettono quindi di rappresentare situazioni in cui il mercato ha subito diversi interventi, la cui combinazione ha un effetto complesso sul processo di diffusione.

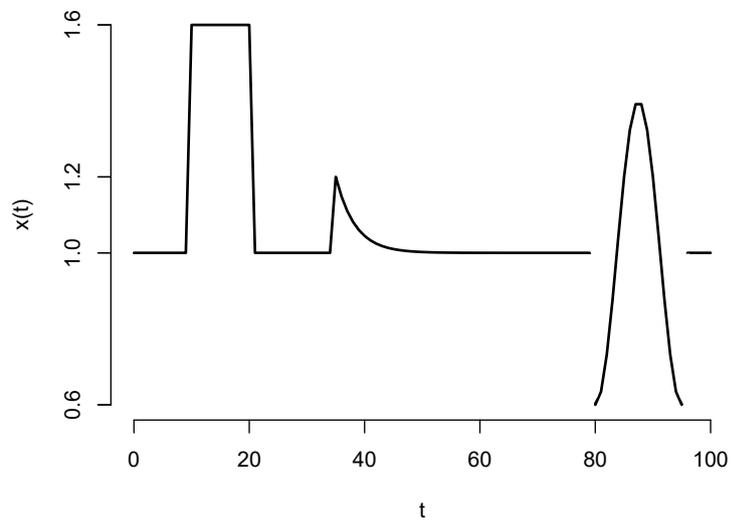


Figura 8: Impulso misto con $a_1 = 10$, $b_1 = 20$ e $c_1 = 0.6$, $a_2 = 35$, $b_2 = -0.3$ e $c_2 = 0.2$, $a_3 = 80$, $b_3 = 95$ e $c_3 = 0.4$.

Capitolo 3

Proposte di generalizzazione per il GBM

Gli impulsi proposti in letteratura, presentati nel capitolo 2, sono stati formulati per rappresentare alcune specifiche perturbazioni che si verificano nella realtà. Ovviamente queste funzioni sono adatte a rappresentare alcuni eventi all'interno dei dati, mentre risultano poco adeguate in altri casi. Al fine di estendere le opzioni di modellazione, in questo capitolo si propongono alcune ulteriori forme funzionali, atte a rappresentare situazioni differenti da quelle già prese in considerazione da Guseo (2004) [11]. Per la scrittura delle funzioni, la loro analisi e il calcolo delle grandezze necessarie per la stima dei modelli, si è fatto riferimento ai principi matematici descritti in Bramanti, Pagani e Salsa (2008) [4].

3.1 Nuove funzioni impulso

3.1.1 Impulsi armonici continui

Per descrivere un impulso locale, bilanciato e continuo è possibile utilizzare, tra quelli già noti, uno shock di Riccati; tuttavia, la struttura dell'impulso armonico e il suo numero inferiore di parametri lo rendono più conveniente per questo tipo di situazione. Per rendere continuo uno

shock armonico (10) è sufficiente traslare la funzione coseno, ottenendo il seguente impulso:

$$x(t) = 1 + c_1 \left(\cos \left(2\pi \frac{t - a_1}{b_1 - a_1} \right) - 1 \right) \mathbb{1}_{a_1 \leq t \leq b_1}, \quad (14)$$

dove $a_1, b_1 \geq 0$, con $a_1 < b_1$, indicano gli istanti di inizio e fine dell'effetto dello shock, mentre c_1 rappresenta l'intensità dell'impulso. L'integrale definito di questa funzione di intervento, il cui calcolo è riportato nell'appendice A.2.1, assume valore

$$\int_0^t x(\tau) d\tau = t + c_1 \left(\frac{b_1 - a_1}{2\pi} \sin \left(2\pi \frac{t - a_1}{b_1 - a_1} \right) - t \right) \mathbb{1}_{a_1 \leq t \leq b_1}. \quad (15)$$

La funzione portante descritta nell'equazione (14) è stata chiamata “armonica continua” perché, al contrario del classico impulso armonico, rappresenta un evento il cui effetto cresce gradualmente, causando uno spostamento continuo dall'unità. La forma dell'*impulso armonico continuo* può essere osservata in Figura 9.

Il modello di Bass generalizzato descritto nell'equazione (6) con un *impulso armonico continuo* assume la forma rappresentata in Figura 10.

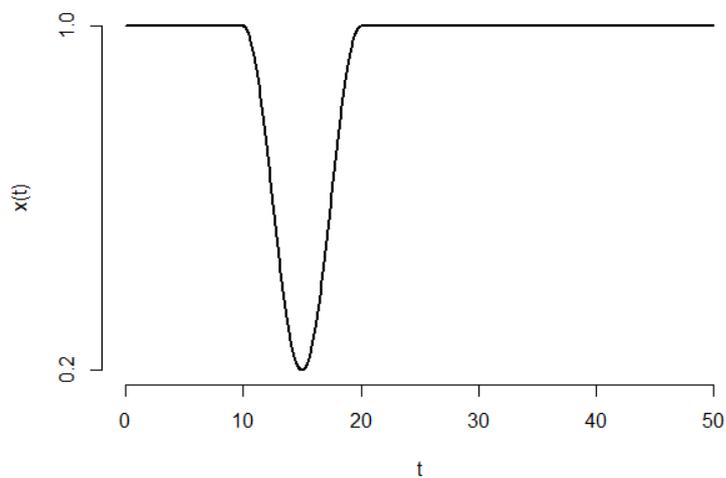


Figura 9: *Impulso armonico continuo* con $a_1 = 10$, $b_1 = 20$ e $c_1 = 0.4$.

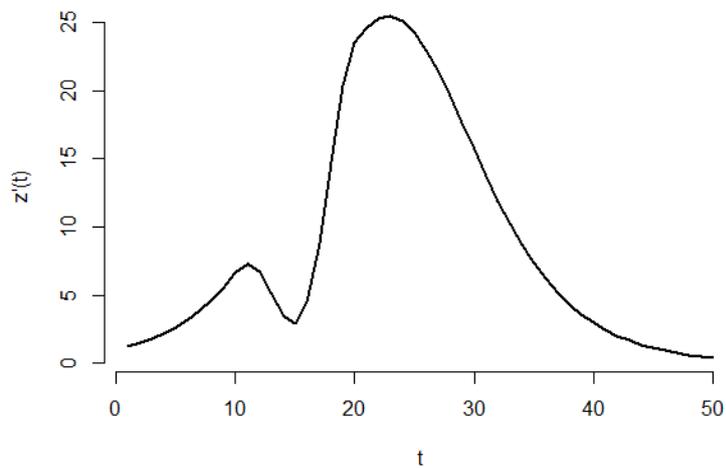


Figura 10: Modello di Bass generalizzato con *impulso armonico continuo* con $m = 500$, $p = 0.002$, $q = 0.2$, $a_1 = 10$, $b_1 = 20$ e $c_1 = 0.4$.

Il vantaggio dell'utilizzo di questo tipo di funzione per $x(t)$ risiede nel numero parsimonioso di parametri e nella sua facilità di utilizzo e

comprensione: infatti, al contrario della densità di Riccati, l'*impulso armonico continuo* agisce in una finestra temporale esplicitamente delimitata, permettendo di individuare in modo intuitivo e diretto i confini temporali dell'evento che rappresenta. Inoltre, la forma funzionale proposta è più semplice e facilmente interpretabile di quelle già in uso.

3.1.2 Impulsi lineari

Lo shock esponenziale è stato ideato per descrivere un impulso il cui effetto viene riassorbito come un esponenziale negativo; una tale funzione non può però rappresentare un evento che ha esito immediato e che viene riassorbito in modo lineare. Per questo motivo, è stata formulata una funzione che descriva un impulso lineare:

$$x(t) = 1 + (c_1 + b_1 t) \mathbb{1}_{a_1 \leq t \leq -\frac{c_1}{b_1}}. \quad (16)$$

Il parametro $a_1 \geq 0$ indica l'istante di insorgenza dell'effetto; b_1 indica invece la velocità di riassorbimento, ovvero la pendenza della retta, mentre c_1 è l'intensità dello shock. Valgono inoltre delle condizioni aggiuntive, che assicurano che la retta converga effettivamente al valore 1: $c_1 b_1 < 0$ e $c_1(c_1 + b_1 a_1) > 0$. L'integrale definito della funzione impulso, il cui calcolo è riportato in appendice A.2.1, assume valore

$$\int_0^t x(\tau) d\tau = t + \left(c_1 t + \frac{b_1 t^2}{2} \right) \mathbb{1}_{a_1 \leq t \leq -\frac{b_1}{c}}. \quad (17)$$

Un *impulso lineare* è raffigurato in Figura 11. Il modello di Bass generalizzato descritto nell'equazione (6) con un *impulso lineare* assume la forma rappresentata in Figura 12.

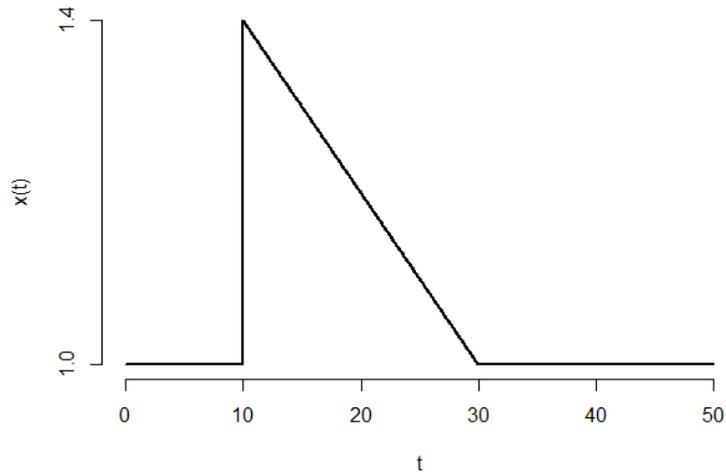


Figura 11: *Impulso lineare* con $a_1 = 10$, $b_1 = -0.02$ e $c_1 = 0.6$.

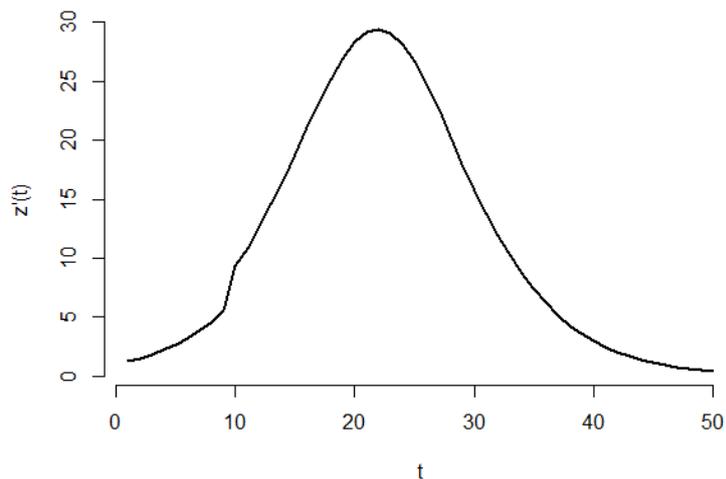


Figura 12: Modello di Bass generalizzato con *impulso lineare* con $m = 500$, $p = 0.002$, $q = 0.2$, $a_1 = 10$, $b_1 = -0.02$ e $c_1 = 0.6$.

Nonostante le condizioni necessarie per la realizzazione di questo impulso possano risultare stringenti e non sia sempre facile individuare valori appropriati per i parametri, questa funzione portante risulta utile per la rappresentazione di eventi il cui effetto svanisce in modo lineare.

3.1.3 Impulsi asimmetrici

Ad eccezione dell'impulso esponenziale, il cui effetto è immediato, i restanti shock proposti nella letteratura sono funzioni simmetriche; tuttavia, è realistico supporre che esistano situazioni che modifichino il tempo del processo di diffusione in modo asimmetrico. Per questo motivo sono state considerate delle forme per $x(t)$ che permettano di descrivere eventi il cui effetto cresce o decresce gradualmente a una velocità diversa da quella con cui viene riassorbito, tornando all'equilibrio.

La prima funzione considerata descrive un *impulso asimmetrico liscio*, utile per descrivere un intervento che ha un effetto sul tempo che viene smorzato progressivamente da un effetto opposto, riportando la funzione al valore unitario. Tale impulso ha la seguente forma:

$$x(t) = 1 + c_1 e^{\left(-\left(\frac{t-m}{\alpha}\right)^2 \mathbf{1}_{t \leq m} - \left(\frac{t-m}{\beta}\right)^2 \mathbf{1}_{t > m}\right)}, \quad (18)$$

dove c_1 rappresenta l'ampiezza dello shock, $\alpha, \beta > 0$ indicano, rispettivamente, la velocità di azione dello shock e quella di riassorbimento;

ognuno di questi due parametri e la corrispondente velocità sono inversamente proporzionali: all'aumentare di α , infatti, la velocità di azione decresce, e viceversa. Vigè la stessa regola per β e la velocità di riassorbimento. Il parametro $m > 0$ indica invece il punto di massimo o minimo della funzione, cioè l'istante in cui lo shock comincia a perdere il proprio effetto. Questo tipo di shock agisce su una finestra temporale limitata, che tuttavia non è esplicita e quindi non può essere proposta in modo diretto da chi analizza i dati: gli estremi dell'intervallo di azione della funzione possono essere dedotti dai parametri che vengono esplicitati, ossia il punto di massimo o minimo e le velocità di crescita e decrescita. L'integrale definito di questa funzione di intervento non è facilmente calcolabile; pertanto, potrebbe essere più opportuno utilizzare un algoritmo di calcolo numerico per ottenerne il valore. Alcuni metodi per l'approssimazione numerica di integrali definiti appropriati a questo tipo di problema sono la formula di Simpson adattiva e i metodi di Monte Carlo, come suggerito da Quarteroni, Saleri e Gervasio (2017) [21].

Una rappresentazione dello *shock asimmetrico liscio* è riportata in Figura 13: dal grafico si può notare che il punto di inversione dell'effetto è un punto di flesso, cioè un punto in cui la funzione ha derivata prima nulla. Questo indica che il processo di esaurimento della spinta dell'impulso avviene in modo graduale, motivo per cui questo shock è stato definito "liscio".

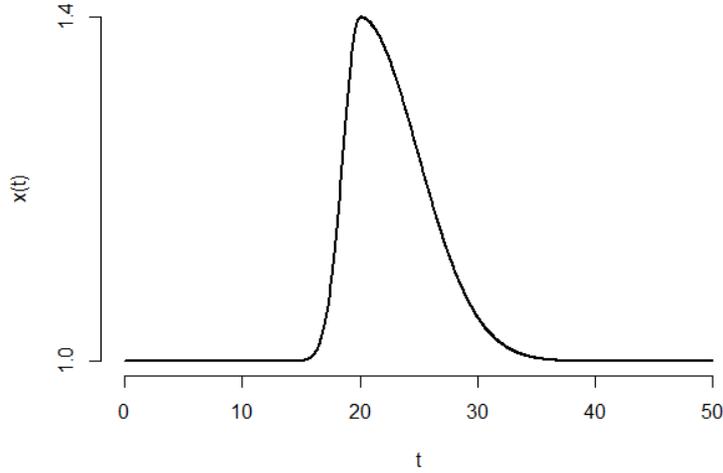


Figura 13: *Impulso asimmetrico liscio* con $c_1 = 0.4$, $m = 20$, $\alpha = 2$ e $\beta = 7$.

Alternativamente, è possibile considerare un evento il cui effetto si esaurisce e cambia direzione in modo repentino: si tratta tendenzialmente di situazioni determinate da dinamiche sociali di natura volubile e con cambi di tendenza frequenti e radicali. Nella funzione proposta si considerano quindi velocità di crescita e di decrescita potenzialmente diverse, ma che non prevedono un punto di flesso che indica l'istante in cui l'effetto dello shock comincia a essere riassorbito. Questo impulso viene chiamato *shock asimmetrico a picco*:

$$x(t) = 1 + c_1 \left(\left(\frac{t - a_1}{m - a_1} \right)^\alpha \mathbb{1}_{a_1 \leq t < m} + \left(\frac{b_1 - t}{b_1 - m} \right)^\beta \mathbb{1}_{m \leq t \leq b_1} \right). \quad (19)$$

I parametri $a_1, b_1 \geq 0$, con $a_1 < b_1$, sono gli estremi della finestra temporale entro cui agisce l'impulso; c_1 rappresenta l'intensità e il segno dello shock. I coefficienti α e β indicano rispettivamente la velocità di azione e quella di riassorbimento dell'impulso; in questo caso, i pa-

rametri sono direttamente proporzionali alle velocità che quantificano. Anche questo impulso agisce in una finestra temporale limitata, con il vantaggio che i tempi di inizio e di conclusione dello shock sono esplicitati nella formula. L'integrale definito di questa funzione intervento, il cui calcolo è riportato in appendice A.2.1, assume valore

$$\int_0^t x(\tau) d\tau = t + c_1 \left(\left(\frac{m - a_1}{\alpha + 1} \left(\frac{t - a_1}{m - a_1} \right)^{\alpha+1} - \frac{(-1)^{\alpha+1} a_1^{\alpha+1}}{(\alpha + 1)(m - a_1)^\alpha} \right) \mathbb{1}_{a \leq t < m} - \left(\frac{b_1 - m}{\beta + 1} \left(\frac{b_1 - t}{b_1 - m} \right)^{\beta+1} - \frac{b_1^{\beta+1}}{(\beta + 1)(b_1 - m)^\beta} \right) \mathbb{1}_{m \leq t \leq b_1} \right). \quad (20)$$

Il grafico di un *impulso asimmetrico a picco* è riportato in Figura 14. Si può notare che la crescita dell'impulso viene interrotta bruscamente dalla decrescita, formando così, appunto, un picco. Il modello di Bass generalizzato descritto nell'equazione (6) con un *impulso asimmetrico a picco* assume la forma rappresentata in Figura 15.

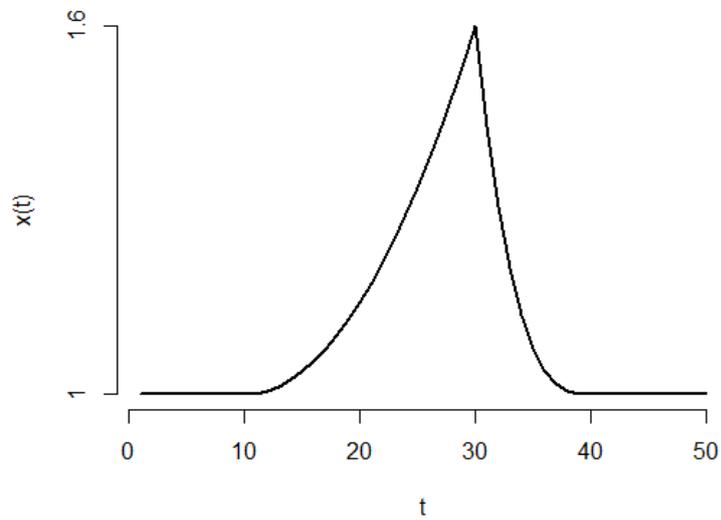


Figura 14: *Impulso asimmetrico a picco* con $a_1 = 10$, $b_1 = 40$, $c_1 = 0.6$, $m = 30$, $\alpha = 2$ e $\beta = 3$.

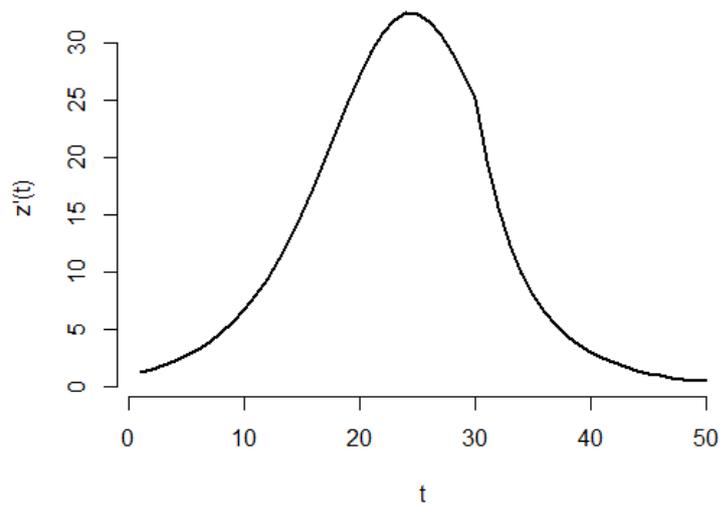


Figura 15: Modello di Bass generalizzato con *impulso asimmetrico a picco* con $m = 500$, $p = 0.002$, $q = 0.2$, $a_1 = 10$, $b_1 = 40$, $c_1 = 0.6$, $m = 30$, $\alpha = 2$ e $\beta = 3$.

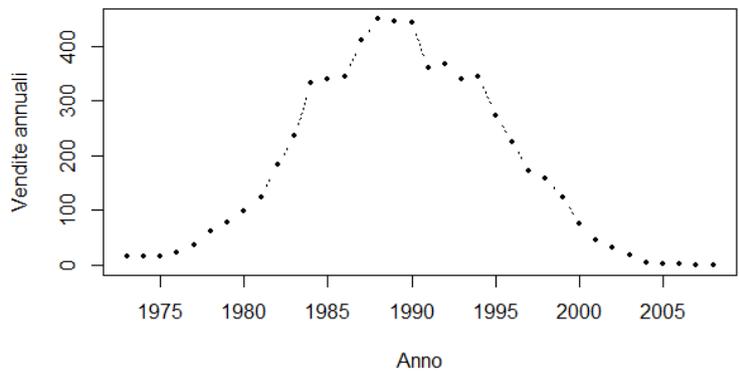
3.2 Applicazione del GBM con *shock armonico continuo*

In questa sezione vengono presentate alcune applicazioni del modello di Bass generalizzato con *shock armonico continuo*. Per poter applicare il modello considerato a dei dati, è stato prima necessario implementare un algoritmo di stima, utilizzando l'ambiente R. In particolare, attraverso una modifica della funzione `GBM` del pacchetto `DIMORA`, si è ottenuta una funzione per la stima di un modello di Bass generalizzato con lo shock descritto. Questa funzione, illustrata nel dettaglio in Appendice A.2.2, utilizza come metodo di stima i minimi quadrati non lineari, descritti in Appendice A.1, così come propone Guseo (2004) [11]: l'algoritmo prende come argomenti la serie storica delle vendite istantanee e un vettore di stime preliminari dei parametri m , p , q , a_1 , b_1 e c_1 . A partire da questi elementi vengono calcolate le funzioni necessarie per ottenere i residui, ossia la differenza tra la serie delle vendite cumulate e $z(t)$ stimato; a questo punto, attraverso l'algoritmo `nls`, vengono individuate le stime dei parametri. La funzione restituisce un *dataframe* contenente le stime e le relative quantità di interesse, oltre ad alcuni elementi riguardanti il modello, come ad esempio il coefficiente di determinazione e la somma dei quadrati residui. Inoltre, se il parametro `display` è posto uguale a `TRUE`, l'algoritmo restituisce un'immagine contenente due grafici che confrontano il modello stimato

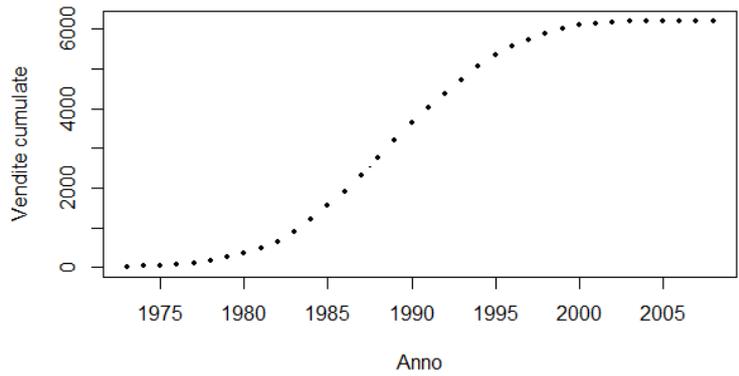
con le vendite istantanee e quelle cumulate, così come le altre funzioni per i modelli di diffusione del pacchetto DIMORA. Il codice utilizzato per i casi studio è riportato in Appendice A.2.2.

3.2.1 Audiocassette negli Stati Uniti

Il primo esempio proposto riguarda le vendite annuali di audiocassette negli Stati Uniti d'America, i cui dati provengono dal sito ufficiale della Recording Industry Association of America. Si tratta di una delle maggiori innovazioni nella storia dell'ascolto della musica, che tuttavia ora è stata soppiantata dalle nuove tecnologie introdotte con la diffusione di internet a partire dagli anni Novanta. Come si può osservare dalla serie storica riportata in Figura 16, il ciclo di vita delle audiocassette ha avuto inizio negli anni Settanta ed è ormai concluso. Questa particolare serie storica, insieme a quella delle vendite di CD, è stata frequentemente analizzata in letteratura, utilizzando il modello di Bass standard, che si adatta piuttosto bene. Tuttavia, nessuno dei modelli noti riesce a descrivere in maniera soddisfacente il picco che si può osservare intorno agli anni Novanta. Per cercare di migliorare questo aspetto è stato applicato alla serie delle vendite annuali di videocassette un modello di Bass generalizzato con *shock armonico continuo*. I parametri stimati con questo modello sono riportati in Tabella 1.



(a)



(b)

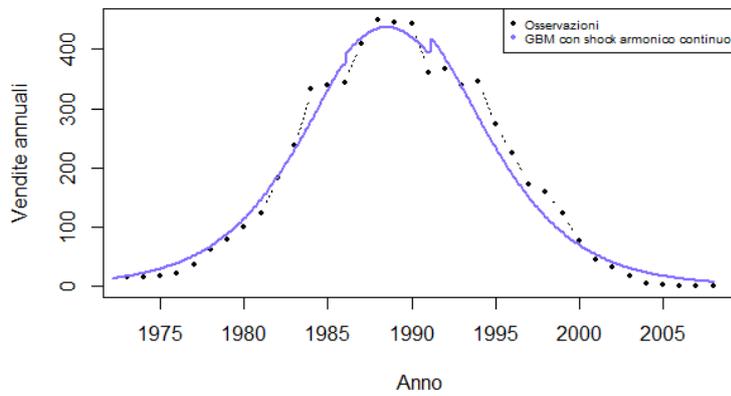
Figura 16: Vendite di audiocassette negli USA dal 1973 al 2008; serie storica delle vendite annuali (a) e delle vendite cumulate (b).

Tabella 1: Adattamento di un modello di Bass generalizzato con *shock armonico continuo* ai dati di vendita di audiocassette negli USA.

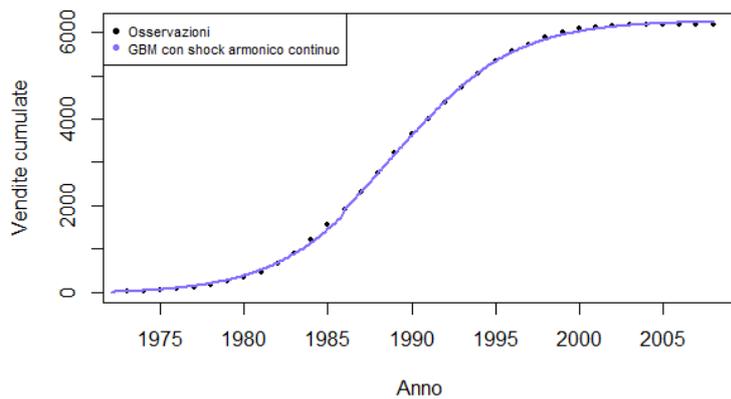
	Stima	S. E.	p-value
m	$6.28 \cdot 10^3$	$1.63 \cdot 10^1$	$5.99 \cdot 10^{-57}$ (***)
p	$2.03 \cdot 10^{-3}$	$8.94 \cdot 10^{-5}$	$1.78 \cdot 10^{-20}$ (***)
q	$2.90 \cdot 10^{-1}$	$3.33 \cdot 10^{-3}$	$1.23 \cdot 10^{-37}$ (***)
a_1	$1.40 \cdot 10^1$	$1.01 \cdot 10^{-7}$	$9.90 \cdot 10^{-224}$ (***)
b_1	$1.90 \cdot 10^1$	$2.77 \cdot 10^1$	$1.60 \cdot 10^{-34}$ (***)
c_1	$-3.53 \cdot 10^{-1}$	$1.25 \cdot 10^{-1}$	$8.15 \cdot 10^{-3}$ (**)

Il modello stimato rileva uno *shock armonico continuo* di intensità -0.35 tra il 1986 e il 1991. Tutti i parametri sono significativi; il modello ottiene un buon adattamento, misurato dal coefficiente di determinazione $R^2 = 0.99976$. In Figura 17 sono riportati i grafici delle previsioni del modello, confrontate con i dati osservati.

L'adattamento risulta soddisfacente e dimostra l'applicabilità del modello di Bass generalizzato con *shock armonico continuo* dati reali di natura economica.



(a)



(b)

Figura 17: GBM con *shock armonico continuo* per le vendite di audiocassette negli USA; confronto tra il modello stimato e le vendite annuali (a), e tra il modello stimato e le vendite cumulate (b).

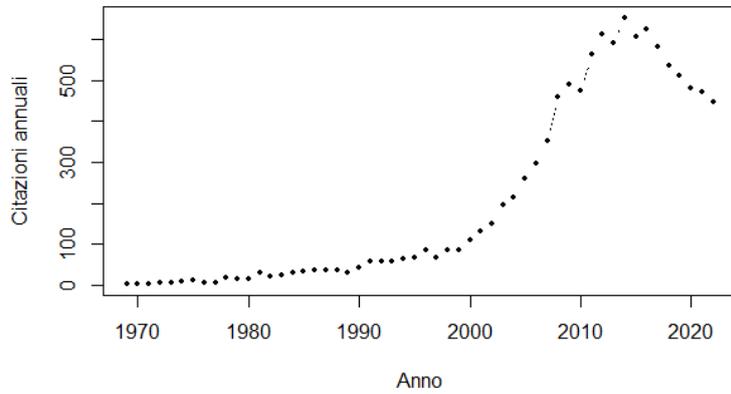
3.2.2 Citazioni di Bass (1969)

Il secondo caso studio preso in considerazione riguarda la serie storica del numero di citazioni annuali dell'articolo del 1969 che presenta il

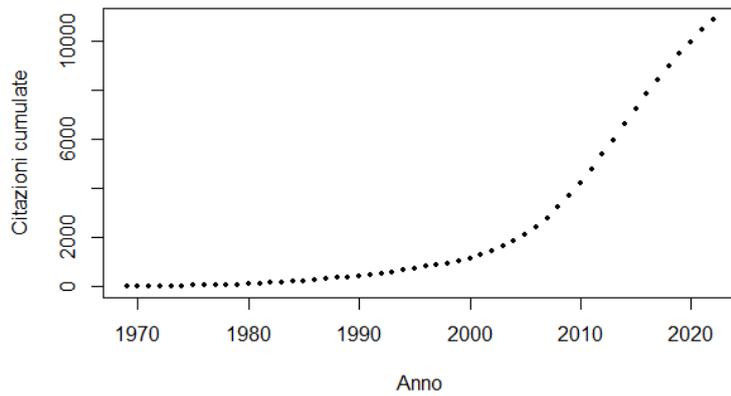
modello di Bass, disponibili su Google Scholar: è particolarmente interessante applicare a questo tipo di dati un modello di diffusione, poiché si dimostra come questa classe di modelli possa essere utilizzata per descrivere la diffusione non solo di prodotti, ma anche di idee innovative, come può essere un'innovazione scientifica. La proposta del modello di Bass standard, avvenuta nell'articolo oggetto di studio, rappresenta un'importante innovazione nell'ambito della statistica e dell'economia; come si può osservare in Figura 18, la sua diffusione, rappresentata dal numero di volte in cui viene citato, cresce gradualmente fino agli anni Novanta, per poi raggiungere rapidamente un picco intorno al 2014. Si può applicare alla serie storica delle citazioni di Bass (1969) un modello di Bass generalizzato con *shock armonico continuo*. I risultati della stima di questo modello sono riportati in Tabella 2.

Tabella 2: Adattamento di un modello di Bass generalizzato con *shock armonico continuo* ai dati delle citazioni dell'articolo di Bass (1969).

	Stima	<i>S. E.</i>	<i>p-value</i>
m	$1.61 \cdot 10^4$	$6.19 \cdot 10^2$	$6.69 \cdot 10^{-30}$ (***)
p	$8.86 \cdot 10^{-5}$	$8.26 \cdot 10^{-6}$	$2.50 \cdot 10^{-14}$ (***)
q	$1.53 \cdot 10^{-1}$	$4.04 \cdot 10^{-3}$	$2.27 \cdot 10^{-37}$ (***)
a_1	$4.35 \cdot 10^1$	$5.21 \cdot 10^{-1}$	$1.24 \cdot 10^{-53}$ (***)
b_1	$4.86 \cdot 10^1$	$1.74 \cdot 10^0$	$2.57 \cdot 10^{-31}$ (***)
c_1	$6.03 \cdot 10^{-1}$	$2.42 \cdot 10^{-1}$	$1.64 \cdot 10^{-2}$ (*)



(a)

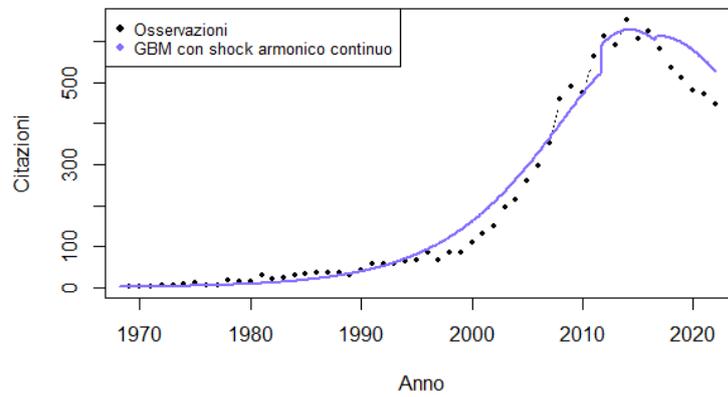


(b)

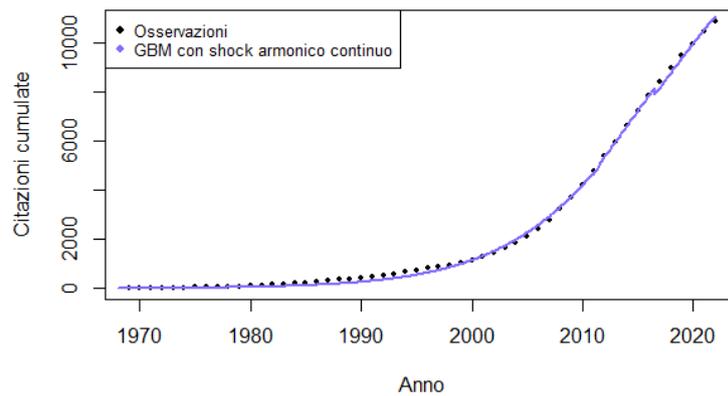
Figura 18: Citazioni dell'articolo di Bass (1969) dal 1969 al 2022; serie storica delle citazioni annuali (a) e delle citazioni cumulate (b).

Il modello rileva uno *shock armonico continuo* di intensità 0.60 tra il 2011 e il 2017. Anche in questo caso tutti i parametri risultano significativi e il modello ottiene un coefficiente di determinazione R^2 pari a 0.998792. Il confronto tra i dati osservati e il modello stimato è

riportato in Figura 19.



(a)



(b)

Figura 19: GBM con *shock armonico continuo* per le citazioni dell'articolo di Bass; confronto tra il modello stimato e le citazioni annuali (a), e tra il modello stimato e le citazioni cumulate (b).

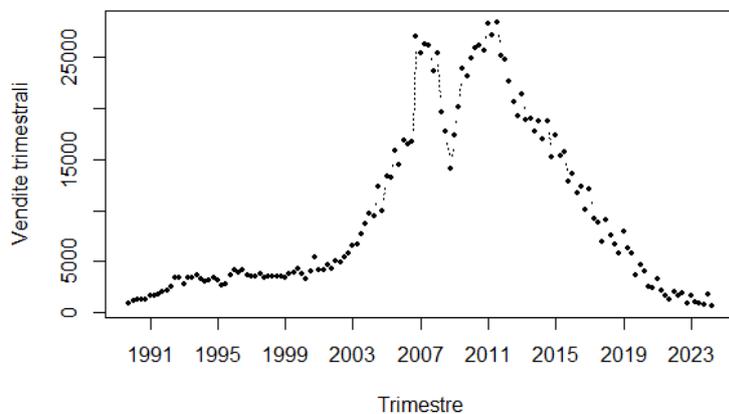
3.2.3 Vendita di auto in Norvegia

Un'ulteriore applicazione del modello presentato viene proposta utilizzando un *dataset* relativo alle vendite trimestrali di diverse categorie di macchine in Norvegia. Questi dati provengono da un'agenzia norvegese per la digitalizzazione, Digitaliseringsdirektoratet, e dal Consiglio Norvegese per le Informazioni sul Traffico Stradale, o OFV.

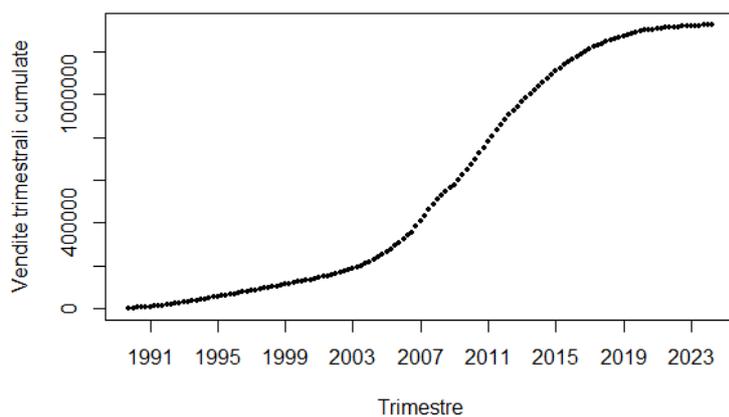
Vendita di auto a diesel nuove in Norvegia I primi dati considerati descrivono le vendite trimestrali di macchine a diesel nuove vendute in Norvegia dal primo trimestre 1990 al terzo trimestre 2024. La serie storica che illustra questi dati è rappresentata in Figura 20. Si può notare che le vendite subiscono un significativo calo tra il 2007 e il 2011: viene quindi stimato un modello di Bass generalizzato con *shock armonico continuo* per verificare se riesce a individuare tale impulso. I parametri stimati per questo modello sono riportati in Tabella 3.

Tabella 3: Adattamento di un modello di Bass generalizzato con *shock armonico continuo* ai dati delle vendite di macchine nuove a diesel in Norvegia.

	Stima	S. E.	p-value
m	$1.38 \cdot 10^6$	$7.40 \cdot 10^3$	$7.50 \cdot 10^{-163}$ (***)
p	$2.93 \cdot 10^{-4}$	$1.68 \cdot 10^{-5}$	$2.81 \cdot 10^{-36}$ (***)
q	$6.58 \cdot 10^{-2}$	$9.99 \cdot 10^{-4}$	$2.26 \cdot 10^{-103}$ (***)
a_1	$7.00 \cdot 10^1$	$6.70 \cdot 10^0$	$5.93 \cdot 10^{-19}$ (***)
b_1	$8.56 \cdot 10^1$	$5.70 \cdot 10^0$	$2.09 \cdot 10^{-30}$ (***)
c_1	$1.23 \cdot 10^{-1}$	$1.75 \cdot 10^{-1}$	$4.84 \cdot 10^{-1}$



(a)

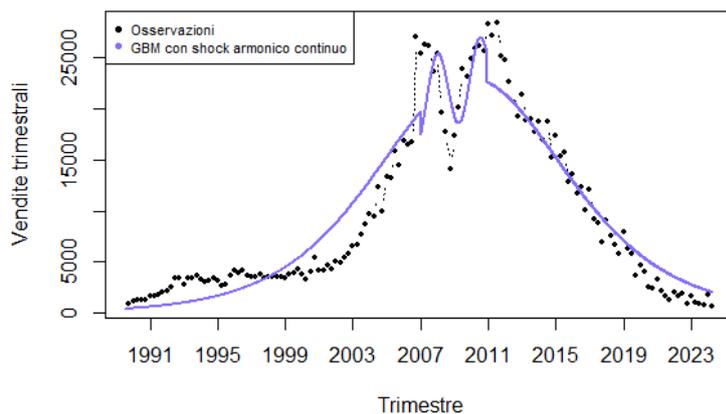


(b)

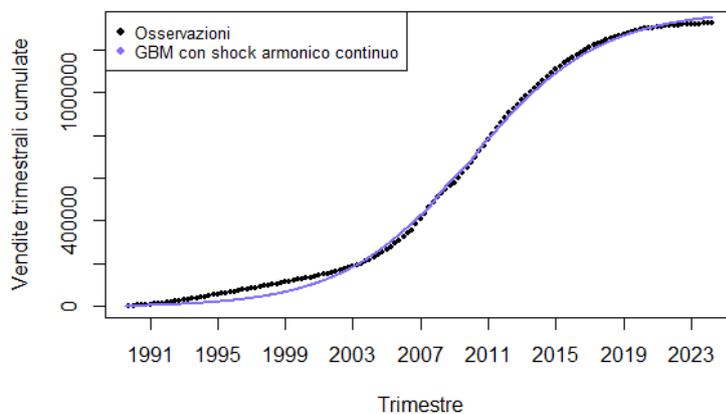
Figura 20: Vendite trimestrali di macchine a diesel nuove in Norvegia dal 1990 al 2024; serie storica delle vendite trimestrali (a) e delle vendite cumulate (b).

Il modello rileva uno *shock armonico continuo* dal secondo trimestre del 2007 al secondo semestre del 2011; il parametro che indica l'intensità dell'impulso, c_1 , non risulta significativo. Tuttavia, l'adattamento di questo modello ai dati considerati risulta buono, come indica il coef-

ficiente di determinazione $R^2 = 0.997889$. La rappresentazione del modello stimato, messo a confronto con i dati osservati, è riportata in Figura 21.



(a)

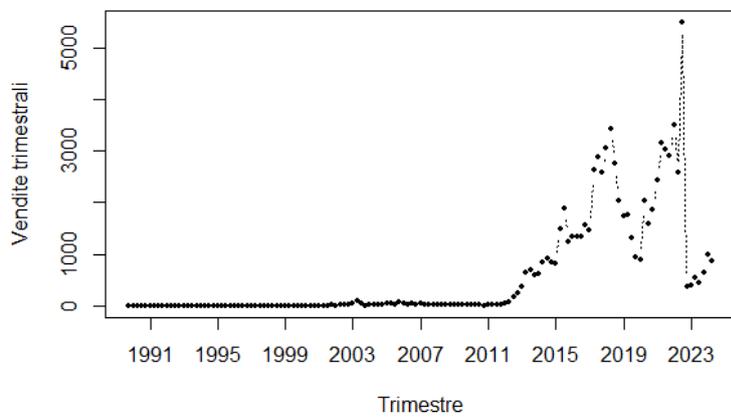


(b)

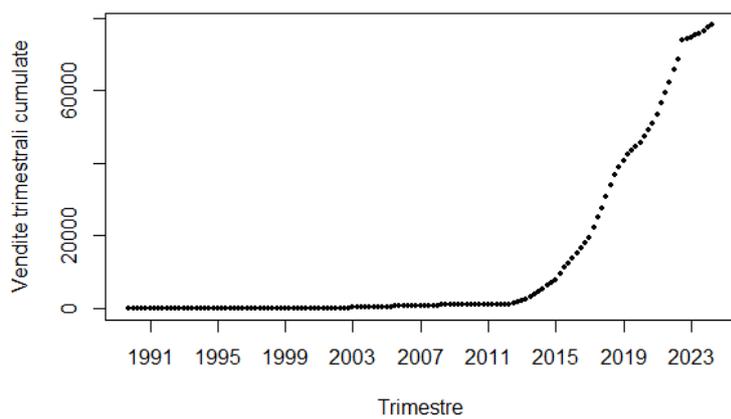
Figura 21: GBM con *shock armonico continuo* per le vendite trimestrali di macchine a diesel nuove in Norvegia; confronto tra il modello stimato e le vendite trimestrali (a), e tra il modello stimato e le vendite cumulate (b).

Il modello approssima bene l'andamento dei dati: in questo caso, diversamente dagli esempi precedentemente illustrati, si può osservare che lo shock rilevato persiste per un periodo più lungo di tempo ed è quindi costituito da più di una oscillazione della funzione coseno. La forma così creata permette al GBM con *shock armonico continuo* di seguire il comportamento dei dati in modo sufficientemente accurato.

Vendita di auto *BEV* usate Vengono ora analizzati i dati di vendita trimestrali di auto *BEV*, ossia *Battery Electric Vehicle*, usate vendute in Norvegia dal primo trimestre del 1990 al terzo trimestre del 2024. Come si può osservare in Figura 22, questo tipo di veicolo non era presente sul mercato fino ai primi anni 2000 e ha cominciato a diffondersi solo dopo il 2010. Si possono osservare diversi sbalzi nei livelli di vendita tra il 2015 e il 2023: viene applicato un modello di Bass generalizzato con *shock armonico continuo* per provare a modellarli. I risultati del processo di stima del modello sono riportati in Tabella 4. Il modello individua uno *shock armonico continuo* tra il secondo semestre 2017 e il quarto trimestre 2018; anche in questo caso, l'intensità dell'impulso non è significativa, ma il coefficiente di determinazione R^2 risulta pari a 0.997613, indicando un buon adattamento del modello ai dati. In Figura 23 è riportato il modello stimato per un confronto con i dati.



(a)



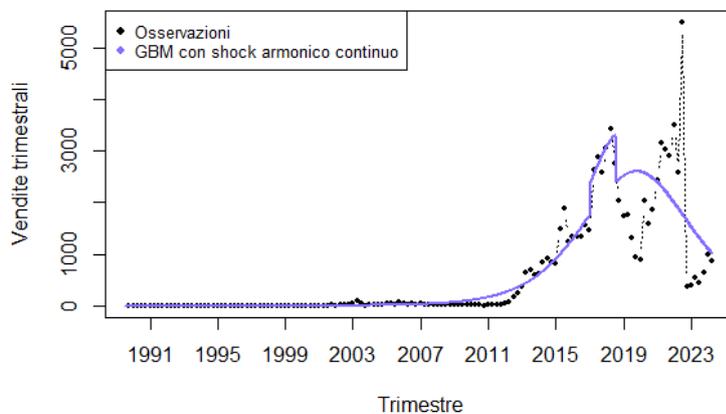
(b)

Figura 22: Vendite trimestrali di macchine *BEV* usate in Norvegia dal 1990 al 2024; serie storica delle vendite trimestrali (a) e delle vendite cumulate (b).

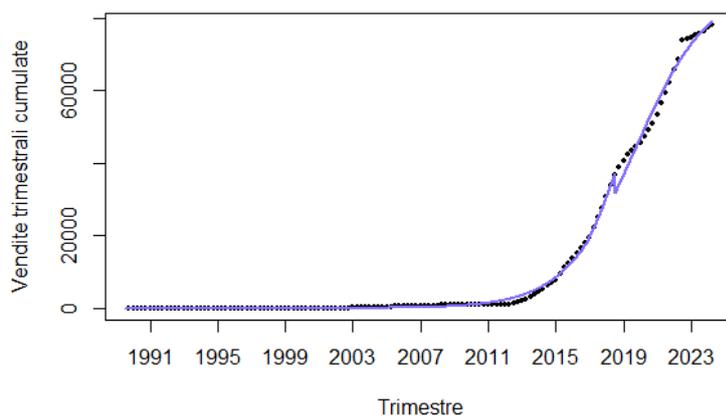
Tabella 4: Adattamento di un modello di Bass generalizzato con *shock armonico continuo* ai dati delle vendite di macchine *BEV* usate in Norvegia.

	Stima	<i>S. E.</i>	<i>p-value</i>
m	$8.87 \cdot 10^4$	$1.18 \cdot 10^3$	$7.49 \cdot 10^{-111}$ (***)
p	$8.10 \cdot 10^{-8}$	$1.91 \cdot 10^{-8}$	$4.16 \cdot 10^{-5}$ (***)
q	$1.17 \cdot 10^{-1}$	$2.33 \cdot 10^{-3}$	$1.98 \cdot 10^{-88}$ (***)
a_1	$1.10 \cdot 10^2$	$1.92 \cdot 10^0$	$1.26 \cdot 10^{-95}$ (***)
b_1	$1.16 \cdot 10^2$	$1.60 \cdot 10^1$	$3.06 \cdot 10^{-11}$ (***)
c_1	$-1.61 \cdot 10^1$	$1.93 \cdot 10^3$	$9.93 \cdot 10^{-1}$

Si può osservare che lo shock individuato approssima bene il comportamento locale delle osservazioni; tuttavia, per una descrizione più accurata dei dati si potrebbero inserire ulteriori impulsi che descrivano le oscillazioni dei livelli di vendita degli anni successivi.



(a)



(b)

Figura 23: GBM con *shock armonico continuo* per le vendite trimestrali di macchine *BEV* usate in Norvegia; confronto tra il modello stimato e le vendite trimestrali (a), e tra il modello stimato e le vendite cumulate (b).

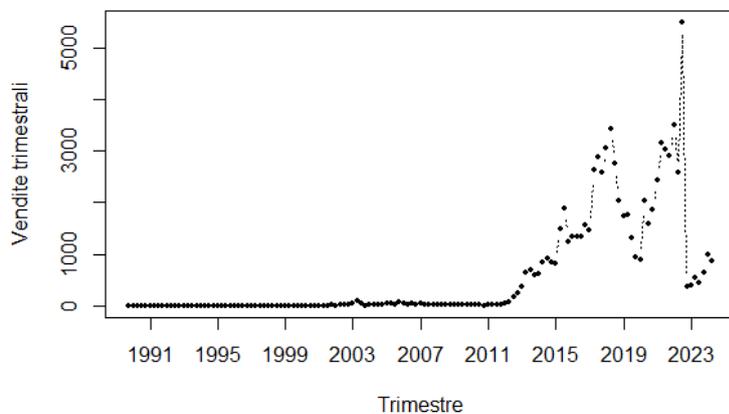
Vendita di auto *plug-in hybrid* usate in Norvegia L'ultima serie di dati proveniente dal presente *dataset* riguarda le vendite trimestrali di macchine *plug-in hybrid* usate in Norvegia dal primo trimestre

del 1990 al terzo trimestre del 2024. Come nel caso delle auto *BEV*, la serie storica delle macchine ibride *plug-in*, rappresentata in Figura 24, indica che la diffusione di questo prodotto è iniziata solo dopo il 2010. Si può inoltre notare una crescita molto rapida dopo il 2015, nuovamente interrotta da un brusco calo delle vendite intorno al 2019. A questi dati viene applicato un modello di Bass generalizzato con *shock armonico continuo*, i cui parametri stimati sono riportati in Tabella 5.

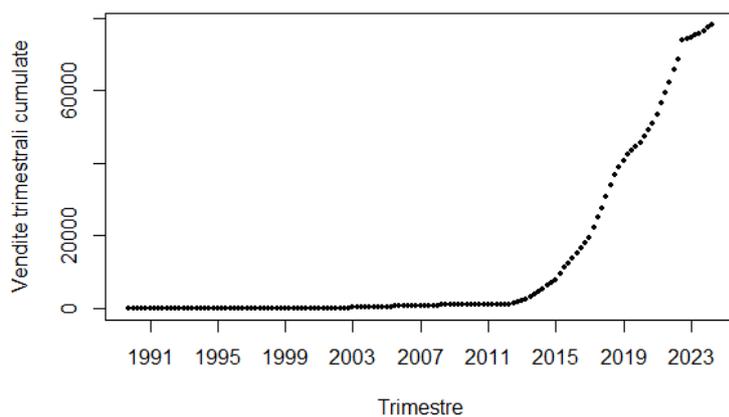
Tabella 5: Adattamento di un modello di Bass generalizzato con *shock armonico continuo* ai dati delle vendite di macchine ibride *plug-in* usate in Norvegia.

	Stima	<i>S. E.</i>	<i>p-value</i>
m	$1.82 \cdot 10^4$	$7.28 \cdot 10^1$	$1.50 \cdot 10^{-179}$ (***)
p	$4.71 \cdot 10^{-12}$	$1.92 \cdot 10^{-12}$	$1.54 \cdot 10^{-2}$ (*)
q	$2.15 \cdot 10^{-1}$	$3.72 \cdot 10^{-3}$	$3.99 \cdot 10^{-96}$ (***)
a_1	$1.05 \cdot 10^2$	$1.08 \cdot 10^0$	$2.27 \cdot 10^{-125}$ (***)
b_1	$1.16 \cdot 10^2$	$7.05 \cdot 10^{-1}$	$1.52 \cdot 10^{-155}$ (***)
c_1	$-4.44 \cdot 10^{-1}$	$1.11 \cdot 10^{-1}$	$9.73 \cdot 10^{-5}$ (***)

Il modello stimato individua uno *shock armonico continuo* tra il secondo semestre del 2017 e il quarto semestre del 2018. In questo caso è significativo anche il parametro che indica l'intensità dell'impulso, che viene stimata pari a -0.44 .



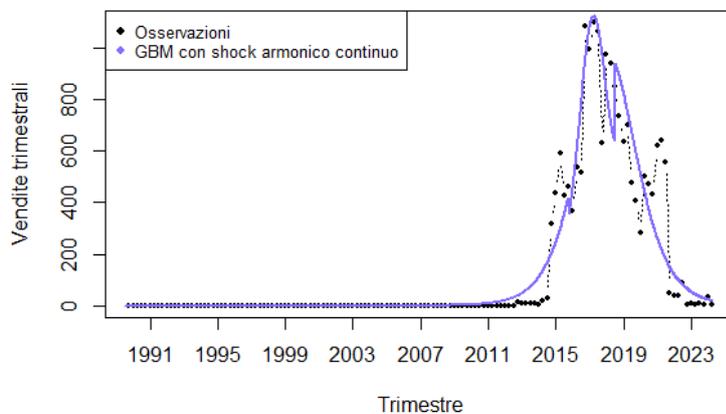
(a)



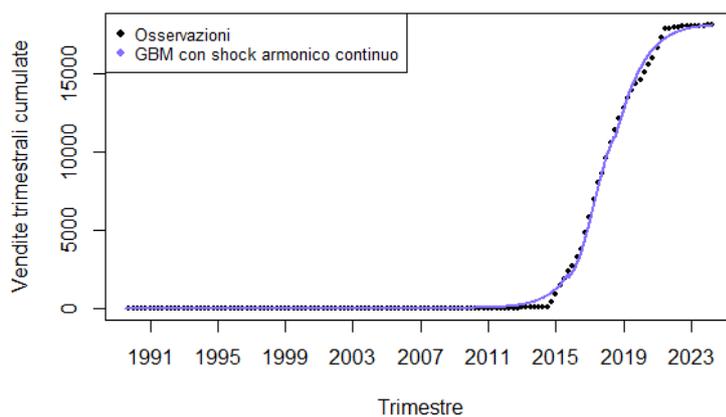
(b)

Figura 24: Vendite trimestrali di macchine ibride *plug-in* usate in Norvegia dal 1990 al 2024; serie storica delle vendite trimestrali (a) e delle vendite cumulate (b).

Il coefficiente di determinazione R^2 , pari a 0.998866, indica un ottimo adattamento del modello ai dati. Questo è confermato anche dalla rappresentazione del GBM stimato, che si può osservare in Figura 25.



(a)



(b)

Figura 25: GBM con *shock armonico continuo* per le vendite trimestrali di macchine ibride *plug-in* usate in Norvegia; confronto tra il modello stimato e le vendite trimestrali (a), e tra il modello stimato e le vendite cumulate (b).

Lo shock stimato cerca di modellare i dati che descrivono il crollo delle vendite delle auto ibride *plug-in* usate in Norvegia attraverso un calo, seguito da una ricrescita.

I risultati ottenuti dall'applicazione del GBM con *shock armonico continuo* alle serie storiche considerate avevano l'obiettivo di mostrare il funzionamento pratico del modello, e dimostrano la potenzialità di questo tipo di impulso: i parametri stimati sono consistenti con i dati osservati e la procedura di stima restituisce stime significative; inoltre, l'interpretazione del modello proposto può essere effettuata con semplicità, alla pari di altre funzioni di intervento proposte nella letteratura. Lo scopo dell'applicazione del modello ai diversi *dataset* è quindi stato raggiunto, in quanto è stato dimostrato il funzionamento del modello proposto; in conclusione, il GBM con *shock armonico continuo* può essere considerato una valida aggiunta agli strumenti utilizzabili per l'analisi di un processo di diffusione.

Capitolo 4

Modelli di diffusione con mercato potenziale variabile

Uno degli assunti fondamentali del modello di Bass riguarda la forma del mercato potenziale: la capacità portante è infatti determinata all'inizio del processo di diffusione dell'innovazione ed è considerata costante per la durata del ciclo di vita di tale prodotto. Ciò implica che il numero massimo di potenziali acquirenti viene determinato all'entrata del prodotto nel mercato e non cambia più fino alla fine del processo. Tuttavia, questo potrebbe non essere ragionevole, in quanto il numero di acquirenti totali del prodotto potrebbe subire influenze anche dopo l'entrata dell'innovazione nel mercato. Come spiegato in Mahajan, Muller e Bass (1990) [17], la diffusione di un'innovazione dipende da quattro elementi fondamentali: l'innovazione, i canali di comunicazione, il tempo e il sistema sociale. Tale affermazione può aiutare a mettere in luce come il numero di persone disposte ad acquistare un nuovo prodotto possa cambiare nel corso del ciclo di vita di tale prodotto: in primo luogo, è noto che la diffusione di un'innovazione nel mercato può essere soggetta a un cosiddetto "periodo di incubazione", che indica l'intervallo di tempo durante il quale l'idea del nuovo prodotto viene diffusa nel sistema sociale e viene da esso ac-

cettata. La lunghezza di tale periodo dipende direttamente da quanto innovativo è il prodotto. Conseguentemente, la dimensione del mercato potenziale al lancio di un'innovazione potrebbe risultare inferiore al numero effettivo di persone disposte a comprare il prodotto alla fine del periodo di incubazione, cioè quando il nuovo prodotto è stato effettivamente accettato. Inoltre, qualora gli sforzi pubblicitari o altre azioni di marketing di un'azienda non fossero limitati al periodo antecedente al lancio del prodotto, ma venissero protratti nel tempo, questi potrebbero raggiungere potenziali acquirenti in un qualsiasi momento del ciclo di vita dell'innovazione, modificando la dimensione della capacità portante. È inoltre importante notare che ciò che influenza il mercato potenziale potrebbe agire sia a favore che a sfavore del prodotto: un'innovazione potrebbe non riuscire a penetrare il mercato nonostante un lancio di successo e le azioni di marketing potrebbero non migliorare la percezione del prodotto. Per queste motivazioni, l'ipotesi di un mercato potenziale costante e determinato all'inizio del processo di diffusione risulta difficilmente giustificabile. Una prima critica all'assunzione di m fissato viene mossa da Mahajan e Peterson (1978) [18]: ci sono infatti numerosi studi che dimostrano che il mercato potenziale assume valori crescenti durante il ciclo di vita del prodotto; pertanto l'ipotesi di una capacità portante costante non è supportata né dall'evidenza sperimentale, né da ragioni teoriche. In letteratura si è ritenuto più coerente formulare il mercato potenziale come una grandezza dinamica.

Sono state fatte innumerevoli proposte per la forma funzionale del mercato potenziale variabile $m(t)$. Dagli studi in materia, emergono sostanzialmente due approcci: in un primo caso, di cui è rappresentativo il lavoro di Centrone et al. (2006) [5], la capacità portante assume la forma di una crescita esponenziale, come suggerito dalla letteratura in ambito demografico ed epidemiologico

$$m(t) = m_0 e^{(b-\mu)t}, \quad (21)$$

con $t \geq 0$, $b \geq 0$ e $0 \leq \mu < 1$. Questo tipo di modello ha ottenuto buoni risultati e dimostra che un mercato in crescita non può arrivare a saturazione, rinforzando l'ipotesi di un mercato potenziale variabile.

Alternativamente, il mercato potenziale è stato descritto attraverso una funzione esogena di variabili economiche, tra cui Radojičić et al. (2011) [22] riportano grandezze quali la popolazione, i prezzi, il numero dei concorrenti nel mercato e il numero di rivenditori. Successivamente, gli autori si concentrano sull'effetto della disponibilità tecnologica sulla diffusione delle innovazioni in telecomunicazione. Shukla et al. (2011) [24] propongono un modello di diffusione che utilizza tre equazioni differenziali non lineari per rappresentare la densità della popolazione dei non acquirenti, quella degli acquirenti e la densità delle influenze esterne. Un'altra proposta di funzione per il mercato potenziale, ideata da Kim et al. (1999) [15], prende in considerazione la relazione tra entra-

te e uscite dal mercato e la domanda, considerando anche il ruolo del numero di concorrenti. Il pregio principale di questo tipo di modelli risiede nella possibilità di esplicitare il ruolo di alcune variabili osservabili nel mercato, permettendo quindi alle aziende di pianificare degli interventi diretti su tali aspetti.

4.1 Modello di Guseo-Guidolin

In Guseo (2004) [11] viene proposto un modello di Riccati con potenziale variabile, espandendo il modello di Bass in modo tale che potesse includere la variazione locale secca di $m(t)$. Il modello assume la seguente forma

$$z'(t) = m(t) \left(p + q \frac{z(t)}{m(t)} \right) \left(1 - \frac{z(t)}{m(t)} \right) + \frac{z(t)}{m(t)} m'(t). \quad (22)$$

Tale formulazione permette di condurre analisi di tipo teorico sul processo di diffusione senza necessariamente specificare la natura del mercato potenziale $m(t)$. Questo contributo rappresenta un primo approccio a un nuovo modello di diffusione a mercato variabile, formulato da Guseo e Guidolin (2009) [14] per modellare il processo di diffusione di beni *stand-alone*, ossia privi di esternalità di rete. A partire dalle riflessioni sulla *absorptive capacity* definita da Cohen e Levinthal (1990) [7] come l'abilità di riconoscere il valore di una nuova informazione, assimilarla e usarla, gli autori hanno ipotizzato che il mercato poten-

ziale fosse una funzione del processo di diffusione e di assimilazione dell'informazione tra i componenti del mercato. In particolare, Guseo e Guidolin (2009) [14] propongono di utilizzare una rete di connessioni per rappresentare l'informazione che si diffonde tra gli individui e utilizzano un modello stocastico di *Cellular Automata* per descrivere tale rete. In questo grafo finito $G = (V, E)$, gli agenti del mercato sono rappresentati dai nodi, $V = 1, 2, \dots, N$: un arco risulta attivo, e assume quindi valore 1, se tra i nodi viene trasmessa dell'informazione riguardante il prodotto; altrimenti, l'arco è inattivo e assume valore 0. L'idea fondamentale è quella di utilizzare il numero medio di archi attivi U per definire il mercato potenziale. Come specifica Guidolin (2024) [9], viene quindi assunto che il processo di diffusione dell'informazione sul prodotto segue un modello di Bass standard:

$$h(t) = m_c \frac{1 - e^{-(p_c+q_c)t}}{1 + \frac{q_c}{p_c} e^{-(p_c+q_c)t}}, \quad (23)$$

dove m_c , p_c e q_c rappresentano mercato potenziale, coefficiente di innovazione e imitazione della diffusione dell'informazione (il pedice c sta per *communication*). In questo caso, $h(t)$ rappresenta il numero di archi attivi U , ossia il numero di connessioni attraverso cui è stata trasmessa dell'informazione sul prodotto. Tuttavia, per i fini del modello di diffusione, è necessario individuare il numero di individui con tale informazione, ossia il numero di nodi coinvolti. Realisticamente,

non tutti i nodi saranno tra loro connessi: pertanto, si può assumere che $U \leq |E|^2 = N^2$. Allora, il numero di individui a conoscenza dell'innovazione è dato dalla radice quadrata del numero di archi attivi

$$m(t) = \sqrt{h(t)} = K \sqrt{\frac{1 - e^{-(p_c+q_c)t}}{1 + \frac{q_c}{p_c} e^{-(p_c+q_c)t}}}, \quad (24)$$

dove $K = \sqrt{m_c}$ rappresenta il mercato potenziale asintotico, ossia il limite superiore della capacità portante.

Avendo definito il mercato potenziale in questo modo, il modello di Guseo-Guidolin (GGM) assume la seguente forma

$$z(t) = K \sqrt{\frac{1 - e^{-(p_c+q_c)t}}{1 + \frac{q_c}{p_c} e^{-(p_c+q_c)t}} \frac{1 - e^{-(p_s+q_s)t}}{1 + \frac{q_s}{p_s} e^{-(p_s+q_s)t}}}, \quad (25)$$

dove i parametri p_s e q_s sono riferiti al processo di diffusione del prodotto, con s che va a indicare *sales*. Si nota che le vendite cumulate $z(t)$ sono espresse come risultato di due diversi processi: uno di comunicazione, $K \sqrt{\frac{1 - e^{-(p_c+q_c)t}}{1 + \frac{q_c}{p_c} e^{-(p_c+q_c)t}}}$, e uno di adozione, $\frac{1 - e^{-(p_s+q_s)t}}{1 + \frac{q_s}{p_s} e^{-(p_s+q_s)t}}$, che seguono entrambi la struttura del modello di Bass. Infatti, il modello proposto da Guseo e Guidolin (2009) [14] è un modello a due stadi. Il GGM consente di rappresentare i processi di diffusione di innovazioni in maniera molto più flessibile rispetto ai modelli precedentemente analizzati: la struttura del mercato potenziale permette in particolare la presenza di picchi multipli, descrivendo con più accuratezza il periodo di incubazio-

ne e altre caratteristiche quali selle o rallentamenti, come evidenziato da Guseo e Guidolin (2011) [13]. Il modello gode inoltre degli stessi pregi del modello di Bass standard, che ne rappresenta un caso particolare. Alcuni esempi di configurazione del modello di Guseo-Guidolin si possono osservare in Figura 26.

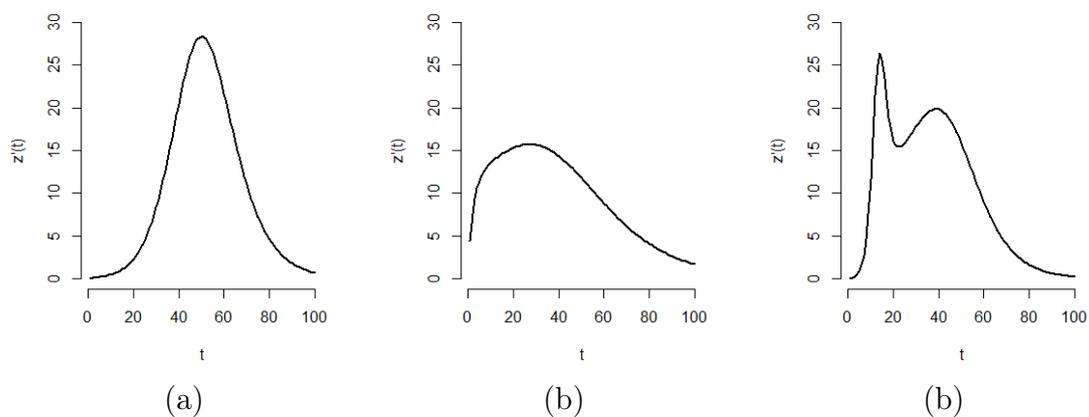


Figura 26: Modello di Guseo-Guidolin con $K = 1000$, $p_c = 0.001$, $q_c = 0.1$, $p_s = 0.001$ e $q_s = 0.1$ (a), $p_c = 0.2$, $q_c = 0.02$, $p_s = 0.01$ e $q_s = 0.04$ (b), $p_c = 0.001$, $q_c = 0.1$, $p_s = 0.001$ e $q_s = 0.5$ (c).

Capitolo 5

Proposta per il mercato potenziale variabile

Il modello di Guseo-Guidolin è strutturato sulla base del concetto di diffusione dell'informazione: un agente del mercato diventa potenziale acquirente di un prodotto solo nel momento in cui acquisisce conoscenza su tale prodotto; quando l'informazione viene trasmessa da un individuo a un altro attraverso un arco, questo diventa attivo e il nodo raggiunto entra a far parte del mercato potenziale. Tuttavia, l'informazione trasmessa potrebbe non essere positiva: basti prendere in esame alcuni dei casi di cronaca del marketing degli ultimi anni, in cui scandali o pubblicità controverse hanno causato una rappresentazione negativa del prodotto o del brand nel mercato. Quando il passaparola riferisce informazioni negative sul prodotto, un individuo che viene a conoscenza di tale informazione non è più propenso a diventare acquirente, nonostante diventi un nodo attivo nel modello di Guseo-Guidolin. Pertanto, può essere ragionevole considerare un mercato potenziale che vari in funzione della *reputazione del prodotto* nel mercato: in particolare, si potrebbe supporre che, se l'informazione trasmessa nel mercato è positiva e incoraggia quindi all'acquisto del prodotto, il numero di potenziali acquirenti aumenti; al contrario, se

l'informazione riferita è negativa, il mercato potenziale diminuirebbe, perché un individuo interessato al prodotto che apprende dati negativi potrebbe essere meno propenso ad acquistarlo. Per queste motivazioni, in questo capitolo viene proposto un modello di diffusione per innovazioni con mercato potenziale variabile dipendente dalla reputazione del prodotto.

5.1 Mercato potenziale in funzione della reputazione del prodotto

L'idea che il tipo di informazione che si diffonde in un sistema sociale influisca sulla quantità di persone interessate ad acquistare un prodotto si deve riflettere in una funzione che cambia forma a seconda di una misura di tale informazione. La forma funzionale per $m(t)$ proposta nel modello di Guseo-Guidolin è crescente, perché basata sull'idea che all'aumentare della diffusione dell'informazione, aumentano i potenziali acquirenti. Invece, per rappresentare l'idea che la capacità portante dipende dalla positività dell'informazione diffusa, si cerca una funzione non necessariamente crescente e la cui forma dipende da un parametro, misura della reputazione. Una proposta per il mercato potenziale variabile non crescente e dipendente da un parametro è stata formulata da Cescon (2021) [6], che utilizza una modifica della funzione di ripartizione esponenziale negativa. Seguendo tale approccio, si propone una

funzione per il mercato potenziale variabile che dipenda da una misura della reputazione del prodotto:

$$m(t) = \frac{K}{2}(1 + \alpha(1 - e^{-\lambda t})). \quad (26)$$

In questa funzione, K indica il limite superiore della capacità portante, coerentemente con la letteratura. Il parametro α , tale che $-1 \leq \alpha \leq 1$, è una misura della reputazione del prodotto: se $\alpha < 0$, l'opinione del mercato sull'innovazione è negativa; invece, se $\alpha > 0$, è positiva. Infine, $\lambda > 0$ indica quanto velocemente la reputazione del prodotto influisce sul suo mercato potenziale; in particolare, λ e la velocità dell'effetto della reputazione sono direttamente proporzionali.

Il pregio principale della funzione (26) risiede nella sua dipendenza dal parametro α , che ne determina la monotonia: quando la misura della reputazione è positiva, infatti, $m(t)$ è crescente, mentre risulta decrescente se α è negativo. Inoltre, un cambiamento locale del valore della reputazione comporta un cambiamento locale nella monotonia della funzione. Queste caratteristiche si evincono anche dalla Figura 27. Un'altra caratteristica utile di questa forma funzionale è il suo dominio, che corrisponde a $[0, K)$, come nel modello di Guseo-Guidolin.

Utilizzando la funzione proposta per il mercato potenziale, il modello

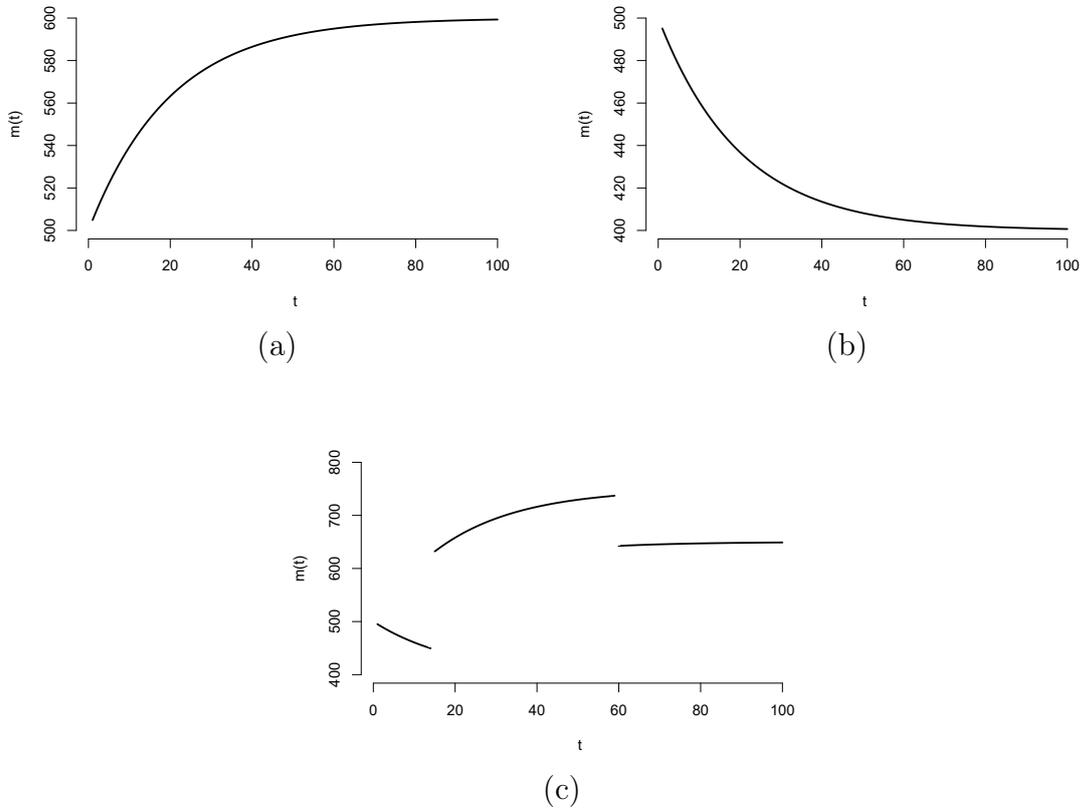


Figura 27: Mercato potenziale variabile dipendente dalla reputazione del prodotto con $K = 1000$, $\lambda = 0.05$ e $\alpha = 0.2$ (a), $\alpha = -0.2$ (b), $\alpha = -0.2\mathbb{1}_{t < 15} + 0.5\mathbb{1}_{15 \leq t < 60} + 0.3\mathbb{1}_{t \geq 60}$ (c).

di diffusione per innovazione assume la seguente forma:

$$z(t) = \frac{K}{2} (1 + \alpha(1 - e^{-\lambda t})) \frac{1 - e^{-(p+q)t}}{1 + \frac{q}{p}e^{-(p+q)t}}. \quad (27)$$

Una rappresentazione del modello di diffusione con mercato potenziale dipendente dalla reputazione del prodotto è riportato in Figura 28.

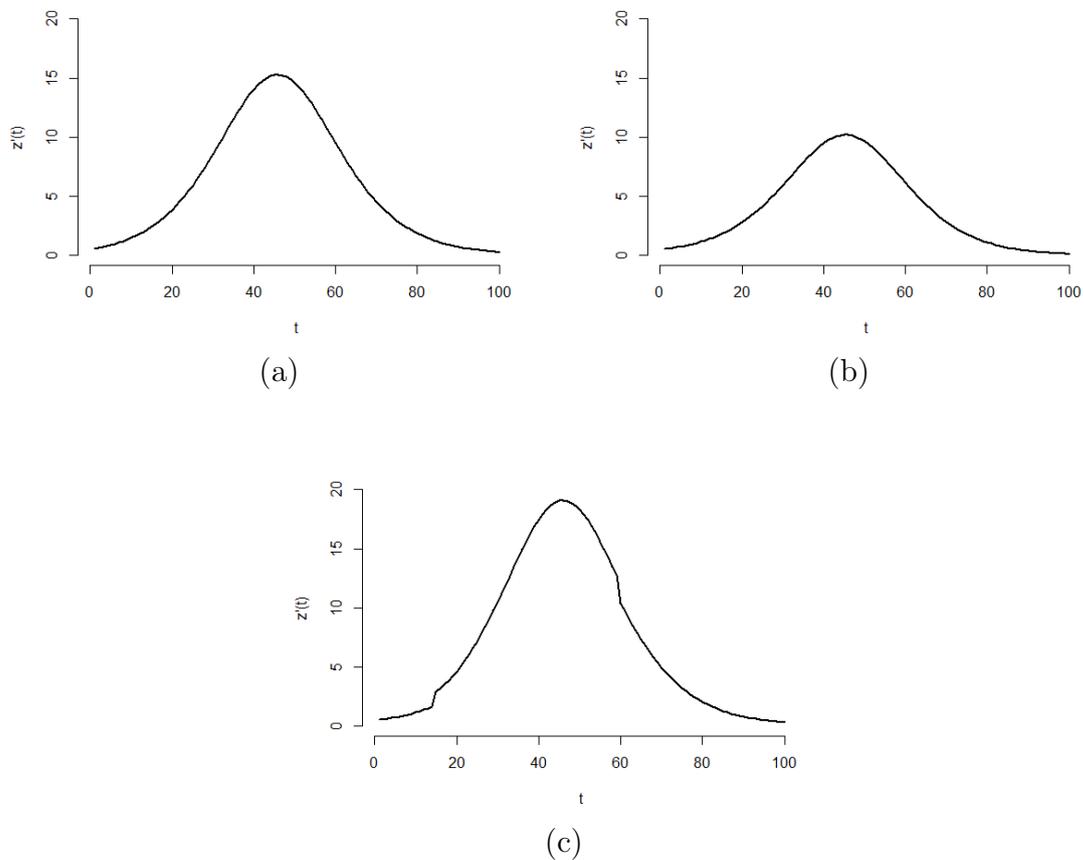


Figura 28: Modello di diffusione con mercato potenziale variabile dipendente dalla reputazione del prodotto con $K = 1000$, $p = 0.001$, $q = 0.1$, $\lambda = 0.05$ e $\alpha = 0.2$ (a), $\alpha = -0.2$ (b), $\alpha = -0.21\mathbb{1}_{t < 15} + 0.51\mathbb{1}_{15 \leq t < 60} + 0.31\mathbb{1}_{t \geq 60}$ (c).

5.2 Applicazione del modello con reputazione

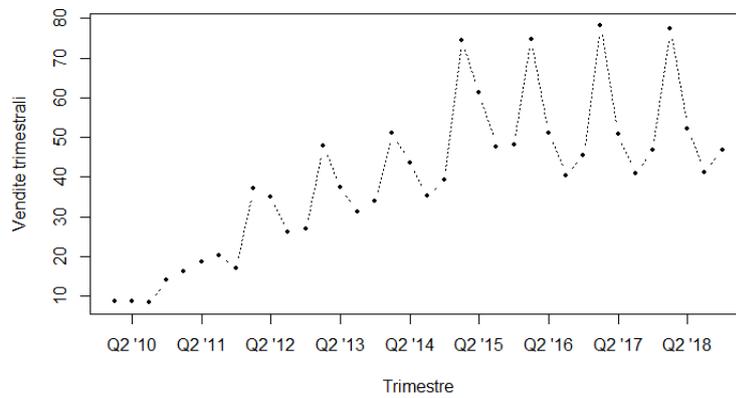
In questa sezione vengono presentate alcune applicazioni del modello di diffusione con mercato potenziale dipendente dalla reputazione del prodotto illustrato in precedenza. Per poter utilizzare questo modello, è stato necessario implementare un algoritmo di stima, ottenuto attraverso una modifica della funzione `GGM` del pacchetto `DIMORA` nel-

l'ambiente R. La funzione, descritta nel dettaglio in Appendice A.3.1, prende come argomento i dati di vendita istantanei, un vettore di stime preliminari dei parametri m , p , q e λ e un vettore, di lunghezza uguale a quella dei dati, contenente il valore della reputazione dell'azienda in ogni istante di tempo. A partire da questi elementi, vengono calcolati i residui come differenza tra vendite istantanee osservate e stimate. Le stime dei parametri sono ottenute tramite il metodo dei minimi quadrati non lineari (NLS), descritto nell'Appendice A.1. La funzione restituisce le stime con le relative quantità di interesse e due grafici di confronto tra il modello e i dati osservati, istantanei e cumulati. I codici utilizzati per l'analisi dei *dataset* sono riportati in Appendice A.3.1.

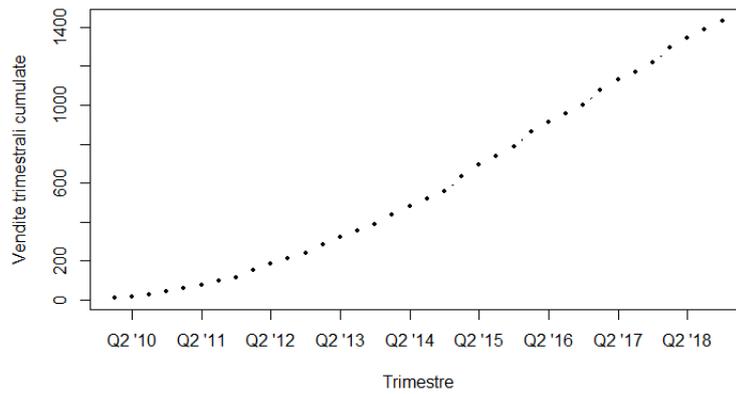
5.2.1 Vendita di Apple iPhone

I primi dati presi in considerazione sono dati di vendita trimestrali di iPhone, resi pubblici dalla stessa azienda Apple, dal lancio del prodotto fino alla fine del 2018. Per misurare la reputazione è stata utilizzata la classifica delle 100 aziende con migliore reputazione negli Stati Uniti d'America, chiamata RepTrak 100 USA, calcolata da The RepTrak Company tenendo conto di “fiducia, stima, ammirazione e opinione positiva dei consumatori nei confronti di un'azienda”, e riportata sul sito di www.rankingthebrands.com. La classifica è disponibile online dal 2010 ad oggi; pertanto, la serie storica analizzata contiene le os-

servazioni dal 2010 al 2018. Negli anni 2015, 2016 e 2018, Apple non risultava tra le 100 aziende con migliore reputazione negli USA: è stato quindi assegnato a questi anni un posto in classifica pari a 101, il primo escluso. Per trasformare i posti in classifica in una misura della reputazione compresa tra -1 e 1, dalla reputazione peggiore alla migliore, è stata applicata ai valori dei posti in classifica una trasformazione che assegna valore 1 al primo classificato, e -1 al centounesimo classificato; questo ha permesso di ottenere per il parametro cercato un valore per ogni anno. Infine, per rendere coerente la misura della reputazione con i dati di vendita, ogni valore è stato replicato quattro volte, una per ogni trimestre per cui si ha un dato di vendita. Alla fine di questa elaborazione, si è ottenuta una serie storica di vendite trimestrali dal 2010 al 2018 e una misura della reputazione, con valori differenti ogni anno e costanti all'interno dell'anno. Una rappresentazione dei dati di vendita di iPhone è riportata in Figura 29. Si può notare un trend di vendita in crescita, che evidenzia però un rallentamento dal 2016 in poi. Invece, in Figura 30 si può osservare l'andamento della reputazione di Apple in quegli anni, misurata a partire dalla classifica delle 100 aziende con migliore reputazione negli USA. Il grafico mostra un netto peggioramento nella reputazione dell'azienda, che si abbassa significativamente dal 2013 in poi, toccando la misura minima nel 2015, 2016 e 2018, anni in cui Apple non rientra nei primi 100 posti in classifica.



(a)



(b)

Figura 29: Vendite di Apple iPhone dal 2010 al 2018; serie storica delle vendite trimestrali (a) e delle vendite cumulate (b).

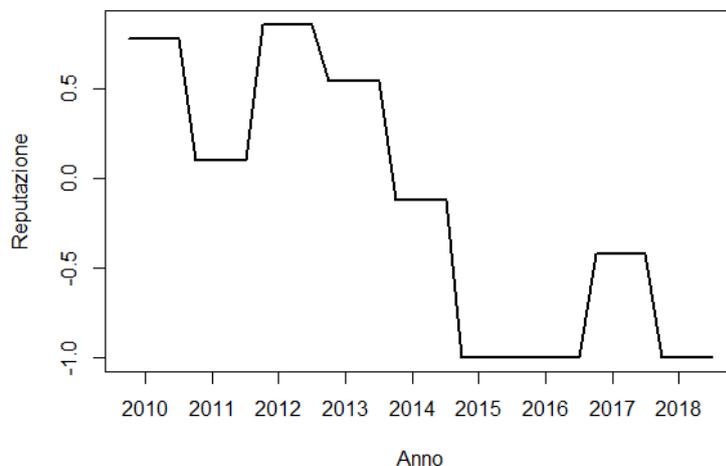


Figura 30: Misura della reputazione di Apple, ottenuta dalla classifica delle 100 aziende con migliore reputazione negli USA dal 2010 al 2018.

L'applicazione del modello di diffusione per innovazioni con mercato potenziale variabile dipendente dalla reputazione produce le stime riportate in Tabella 6.

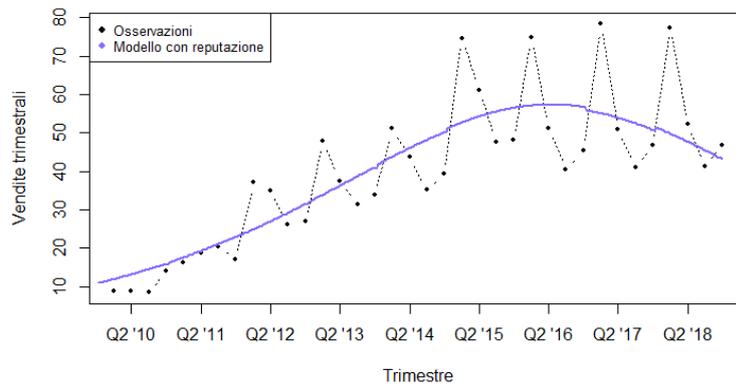
Tabella 6: Adattamento di un modello di diffusione con mercato potenziale dipendente dalla reputazione ai dati di vendita di Apple iPhone.

	Stima	<i>S. E.</i>	<i>p-value</i>
m	$3.77 \cdot 10^3$	$8.98 \cdot 10^1$	$1.43 \cdot 10^{-29}$ (***)
p	$5.75 \cdot 10^{-3}$	$1.31 \cdot 10^{-4}$	$3.88 \cdot 10^{-30}$ (***)
q	$1.07 \cdot 10^{-1}$	$2.77 \cdot 10^{-3}$	$2.23 \cdot 10^{-28}$ (***)
λ	$5.77 \cdot 10^{-4}$	$2.78 \cdot 10^{-4}$	$4.62 \cdot 10^{-2}$ (*)

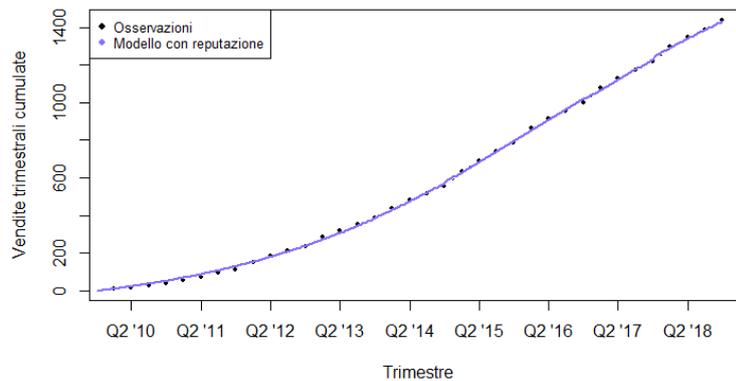
Tutti i parametri stimati sono significativi; il valore del parametro che misura l'importanza della reputazione, λ , è molto prossimo allo 0 e

risulta poco significativo: questo potrebbe essere dovuto alla poca accuratezza della misura di reputazione utilizzata, o al fatto che Apple è un'azienda con un mercato ben consolidato e poco sensibile alle fluttuazioni della sua reputazione. Il modello dimostra di adattarsi bene ai dati, ottenendo un coefficiente di determinazione R^2 pari a 0.999539. In Figura 31 sono riportati i grafici delle previsioni del modello, confrontate con i dati osservati. Si possono notare delle lievissime discontinuità nella funzione del modello stimato in corrispondenza dei cambi del valore della reputazione: questi cambiamenti sono quasi impercettibili, coerentemente con il valore prossimo allo 0 del parametro λ .

Il modello proposto si adatta bene ai dati considerati, ottenendo stime significative e permettendo un'interpretazione diretta dell'importanza della reputazione. Il *dataset* analizzato appartiene a una realtà in cui il marchio è ben stabilito nel mercato, e pertanto i livelli delle vendite potrebbero non risentire significativamente del calo nella reputazione.



(a)



(b)

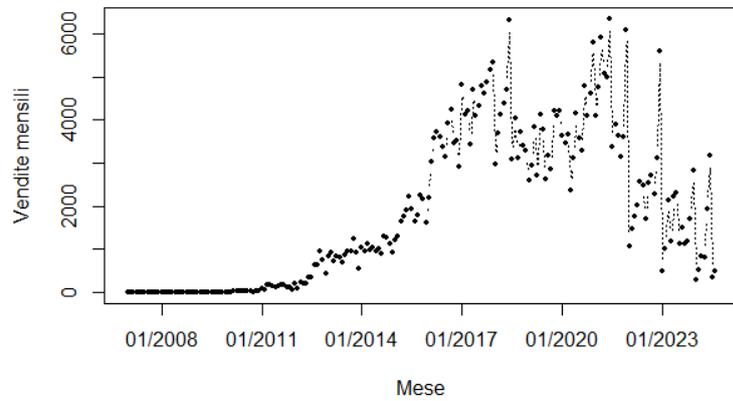
Figura 31: Modello di diffusione con mercato potenziale dipendente dalla reputazione applicato ai dati di vendita di Apple iPhone; confronto tra il modello stimato e le vendite trimestrali (a), e tra il modello stimato e le vendite cumulate (b).

5.2.2 Vendita di auto ibride in Norvegia

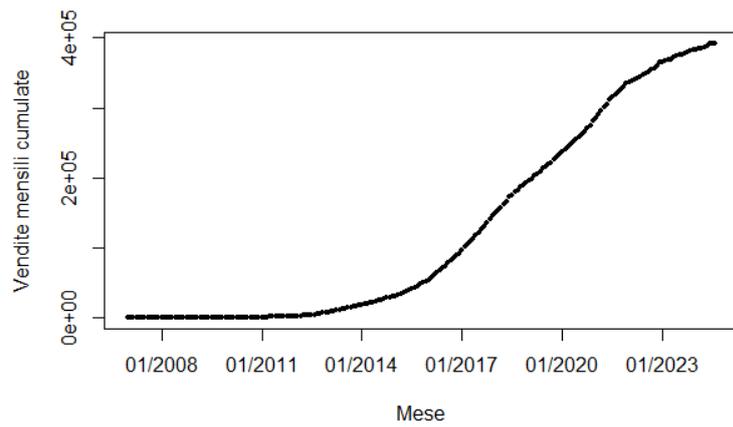
Una seconda applicazione del modello a mercato potenziale variabile dipendente dalla reputazione del prodotto viene vista rispetto ai dati di vendita di macchine ibride in Norvegia. I dati, che descrivono le

vendite mensili di macchine ibride, sia di tipo *plug-in* che non *plug-in*, sia nuove che usate, da Gennaio 1990 ad Agosto 2024, sono stati forniti da un'agenzia norvegese per la digitalizzazione, Digitaliseringdirektoratet, e dal Consiglio Norvegese per le Informazioni sul Traffico Stradale, o OFV. La serie dei dati, raffigurata in Figura 32, viene studiata solo dal Gennaio 2007, in quanto non risultano essere avvenute vendite prima di questo periodo. Si può osservare che la crescita delle vendite di auto ibride in Norvegia è inizialmente molto lenta, per poi aumentare intorno al 2012; i dati subiscono però un calo poco dopo il 2017. Poiché non sono disponibili dati che misurino la reputazione delle macchine ibride, è stata fatta un'assunzione sulla sua forma: si ipotizza che la reputazione di tale prodotto nel mercato sia positiva, pari a 0.3, fino ad Agosto 2018 e che successivamente subisca un calo, assumendo valore pari a -0.2 . Utilizzando questa assunzione, viene stimato sui dati di vendita delle auto ibride un modello di diffusione con mercato potenziale variabile dipendente dalla reputazione. I parametri stimati sono riportati in Tabella 7.

Tutti i parametri stimati risultano significativi; anche λ , che indica l'importanza della reputazione, è significativo, anche se assume un valore di dimensione ridotta. L'adattamento del modello appare soddisfacente, come indica il coefficiente di determinazione $R^2 = 0.999008$. La rappresentazione del modello stimato può essere osservata in Figura 33.



(a)



(b)

Figura 32: Vendite di auto ibride in Norvegia da Gennaio 2007 ad Agosto 2024; serie storica delle vendite mensili (a) e delle vendite cumulate (b).

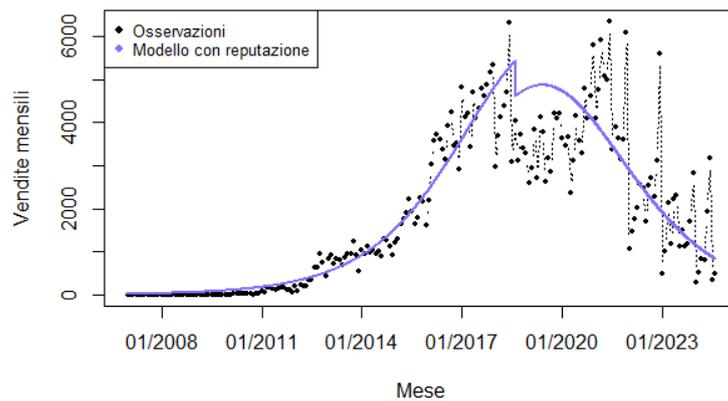
Tabella 7: Adattamento di un modello di diffusione con mercato potenziale dipendente dalla reputazione ai dati di vendita di auto ibride in Norvegia.

	Stima	<i>S. E.</i>	<i>p-value</i>
m	$8.85 \cdot 10^5$	$6.57 \cdot 10^3$	$2.22 \cdot 10^{-204}$ (***)
p	$3.85 \cdot 10^{-5}$	$2.27 \cdot 10^{-6}$	$4.17 \cdot 10^{-41}$ (***)
q	$4.73 \cdot 10^{-2}$	$4.77 \cdot 10^{-4}$	$4.53 \cdot 10^{-177}$ (***)
λ	$2.25 \cdot 10^{-3}$	$2.44 \cdot 10^{-4}$	$3.93 \cdot 10^{-17}$ (***)

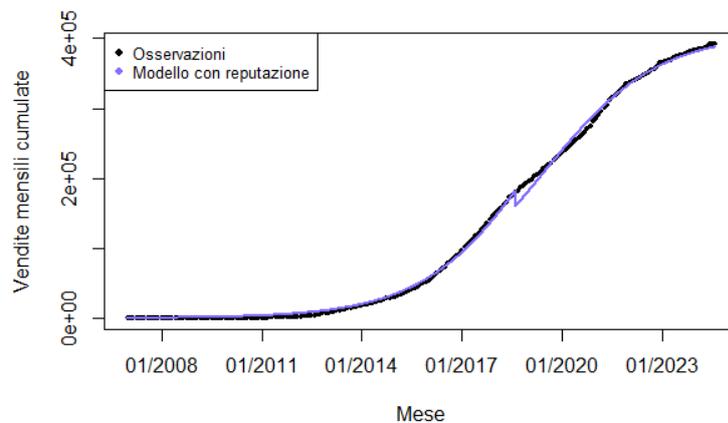
Il modello stimato con la reputazione ipotizzata segue inizialmente il calo delle vendite, dimostrando che un calo nella reputazione potrebbe aver causato il comportamento osservato nei dati. Avendo a disposizione una misura accurata e oggettiva della reputazione del mercato riguardo le auto ibride, si potrebbe stimare un modello che descriva i dati considerati in modo più dettagliato.

Entrambi i casi studio che sono stati analizzati ottengono risultati plausibili e coerenti, ma la reputazione non sembra essere particolarmente rilevante, soprattutto per i dati di vendita di Apple iPhone; questo può essere dovuto al fatto che dati riguardanti la reputazione delle aziende spesso non sono facilmente reperibili e si è quindi scelto di utilizzare misure approssimative o ipotizzate. Tuttavia, il funzionamento del modello indica una buona prospettiva per il suo utilizzo, che potrebbe

essere più indicato all'interno dell'azienda, congiuntamente ad analisi di rilevamento della reputazione.



(a)



(b)

Figura 33: Modello di diffusione con mercato potenziale dipendente dalla reputazione applicato ai dati di vendita di auto ibride in Norvegia; confronto tra il modello stimato e le vendite mensili (a), e tra il modello stimato e le vendite cumulate (b).

Capitolo 6

Conclusione

Dopo aver illustrato il modello di diffusione di Bass standard, questa tesi si è focalizzata sulla sua generalizzazione, il GBM: questo modello prevede l'introduzione di una funzione di intervento $x(t)$ che rappresenta eventi che influenzano il tempo di diffusione di un'innovazione. Sono stati analizzati gli impulsi presenti in letteratura, per poi proporre delle forme funzionali innovative, che potessero descrivere interventi diversi da quelli già studiati. In particolare, è stato proposto uno *shock armonico continuo*, utile per rappresentare situazioni in cui l'effetto sul processo di diffusione è graduale e viene riassorbito in modo simmetrico. La seconda funzione introdotta descrive un *impulso lineare*, cioè uno shock con effetto immediato che viene riassorbito con velocità lineare rispetto al tempo. Infine, è stata considerata la possibilità di modellare interventi il cui effetto agisca gradualmente sul processo di diffusione, ma che venga riassorbito con velocità diversa, assumendo una forma asimmetrica. Per fare ciò sono state considerate due diverse funzioni intervento: la prima, lo *shock asimmetrico liscio*, rappresenta un impulso con effetto di attivazione e riassorbimento gradualmente, mentre la seconda, lo *shock asimmetrico a picco*, prevede un cambio repentino tra crescita e decrescita. Le funzioni di intervento illustrate sono

state utilizzate per proporre nuove formulazioni per il modello di Bass generalizzato. Successivamente, è stato implementato un algoritmo di stima per il GBM con *shock armonico continuo*, che è quindi stato applicato a diversi *dataset*: la serie storica delle vendite di audiocassette, la serie storica delle citazioni dell'articolo che ha introdotto il modello di Bass, la serie di vendita di macchine a diesel nuove, di auto *BEV* e di auto ibride *plug-in* in Norvegia. I casi studio hanno dimostrato l'applicabilità del modello, che ha prodotto stime significative e coerenti e un alto valore del coefficiente di determinazione. Ulteriori passi da compiere per approfondire lo studio delle formulazioni proposte sono la scrittura di funzioni di stima anche per gli altri impulsi e la ricerca di dati adeguati alla loro applicazione: è necessario individuare e utilizzare *dataset* che si adattino bene alla forma dei diversi modelli, per consentire l'interpretazione diretta dei parametri e verificare che il loro ruolo all'interno della funzione intervento possa essere utile per la diagnosi degli interventi individuati. Questo tipo di studio permetterebbe di utilizzare i modelli proposti come validi strumenti per l'analisi di un processo di diffusione.

La seconda parte dell'elaborato si è concentrata sul mercato potenziale variabile, per cui sono state fatte diverse proposte in letteratura; in particolare, è stato presentato il modello di Guseo-Guidolin, che propone un mercato potenziale che cresce con il diffondersi dell'informazione sul prodotto. A partire da questo concetto, è stata proposta una for-

ma del mercato potenziale la cui monotonia dipende da una misura della reputazione dell'azienda: se l'informazione diffusa nel mercato è negativa, il mercato potenziale decresce nel tempo; al contrario, se l'informazione è positiva, $m(t)$ è crescente. Questa formulazione permette al mercato potenziale di adattarsi al variare della percezione che il mercato ha del prodotto, rendendo il modello di diffusione utile per la valutazione dell'impatto della reputazione sulle vendite, soprattutto all'interno di un'azienda che conduce analisi sulle opinioni dei propri acquirenti. Dopo aver formulato il modello di diffusione con la funzione proposta per il mercato potenziale, è stato scritto un algoritmo per la sua stima. Questo algoritmo è stato quindi usato per applicare il modello a due diversi *dataset*: il primo riguardava i dati di vendita di iPhone, per cui è stata utilizzata come misura della reputazione una trasformazione dei posti occupati da Apple nella classifica delle 100 aziende con migliore reputazione negli Stati Uniti d'America; il secondo insieme di dati era relativo alla vendita di auto ibride in Norvegia e in questo caso la misura della reputazione è stata ipotizzata a partire dai dati. In entrambi i casi, l'adattamento del modello è risultato soddisfacente e il processo di stima ha fornito risultati significativi. Tuttavia, i dati considerati potrebbero non essere i più appropriati per l'interpretazione del modello: le vendite di Apple iPhone appartengono a un'azienda ben consolidata nel mercato e che gode di forte lealtà da parte dei propri acquirenti, mentre sulle auto ibride non è dispo-

nibile una misura appropriata della reputazione. Sarebbe quindi utile individuare un *dataset* di un'azienda la cui reputazione ha subito forti variazioni e applicare a questi dati il modello proposto, per verificarne l'utilità come strumento per la valutazione dell'impatto della reputazione sulle vendite. Un'ulteriore prospettiva di ricerca potrebbe essere indirizzata verso la creazione di uno strumento di marketing volto alla misura della reputazione; combinando una misura accurata della reputazione con il modello proposto, un'azienda potrebbe essere in grado di pianificare azioni strategiche di marketing volte a influenzare positivamente la propria immagine per influenzare il processo di diffusione del proprio prodotto.

In definitiva, le funzioni impulso e il modello di mercato potenziale variabile proposti aprono nuove possibilità di espansione nella modellizzazione della diffusione di innovazioni, offrendo strumenti che migliorano le capacità di analisi dei dati di vendita. Si auspica che questo contributo possa stimolare ulteriori ricerche e applicazioni pratiche, confermando il valore predittivo ed esplicativo dei modelli presentati nel contesto del mercato moderno.

A Appendice

A.1 Minimi quadrati non lineari

Il modello di Bass e tutte le sue successive generalizzazioni utilizzano come metodo di stima i minimi quadrati non lineari (NLS). I minimi quadrati non lineari sono un metodo di stima per modelli di regressione non lineare, definiti da Bates e Watts (1988) [3] come

$$y_i = f(x_i; \theta) + \epsilon_i, \quad (28)$$

dove x_i, y_i , con $i = 1, \dots, n$, sono coppie di osservazioni e f è una funzione non lineare, cioè tale che almeno una delle derivate della funzione rispetto ai parametri dipende da almeno uno dei parametri; come riporta Guidolin (2023), si assume che $E(\epsilon_i) = 0$, $x_i \in R^k$, $y_i \in R$ e $\theta \in \Theta \subset R^p$ è il parametro ignoto. La stima ai minimi quadrati non lineari $\hat{\theta}$ è quel valore del parametro che minimizza la devianza

$$S(\theta) = \sum_{i=1}^n [y_i - f(x_i; \theta)]^2, \quad (29)$$

ovvero

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} S(\theta). \quad (30)$$

La stima NLS così ottenuta è distorta. Tuttavia, imponendo ulteriori condizioni su ϵ_i , gode di buone proprietà: se ϵ_i sono indipendenti e

identicamente distribuiti e sotto condizioni di regolarità, $\hat{\theta}$ è uno stimatore consistente di θ ; inoltre, se ϵ_i sono normalmente distribuiti, la stima NLS è la stima di massima verosimiglianza.

La minimizzazione della devianza non ha una soluzione a forma chiusa ed è spesso calcolata attraverso algoritmi numerici; i due metodi più utilizzati in questo contesto sono quello di Gauss-Newton, che necessita solo delle derivate prime, e quello di Levenberg-Marquardt. In particolare, la funzione `nls` nell'ambiente `R`, presente nelle funzioni implementate per le applicazioni dei modelli proposti, utilizza una modifica dell'algoritmo di Levenberg-Marquardt.

A.2 Proposte di generalizzazione per il GBM

A.2.1 Calcolo di integrali

Nel capitolo 3 sono state espone delle proposte per funzioni intervento per il modello di Bass generalizzato: per tre di queste funzioni sono stati calcolati gli integrali definiti. Di seguito viene riportato esplicitamente il calcolo dei suddetti integrali.

L'integrale definito per l'impulso armonico continuo (14) è

$$\begin{aligned}
\int_0^t x(\tau) d\tau &= \int_0^t 1 + c_1 \left(\cos \left(2\pi \frac{\tau - a_1}{b_1 - a_1} \right) - 1 \right) \mathbb{1}_{a_1 \leq \tau \leq b_1} = \\
&= \int_0^t 1 + c_1 \cos \left(2\pi \frac{\tau - a_1}{b_1 - a_1} \right) \mathbb{1}_{a_1 \leq \tau \leq b_1} - c_1 \mathbb{1}_{a_1 \leq \tau \leq b_1} d\tau = \\
&= t + c_1 \left(\frac{b_1 - a_1}{2\pi} \sin \left(2\pi \frac{t - a_1}{b_1 - a_1} \right) \right) \mathbb{1}_{a_1 \leq t \leq b_1} - c_1 t \mathbb{1}_{a_1 \leq t \leq b_1} = \\
&= t + c_1 \left(\frac{b_1 - a_1}{2\pi} \sin \left(2\pi \frac{t - a_1}{b_1 - a_1} \right) - t \right) \mathbb{1}_{a_1 \leq t \leq b_1},
\end{aligned}$$

dove ci si è ricondotti all'integrale definito dello shock armonico (10) introdotto da Guseo (2004) [11].

L'integrale definito per l'impulso lineare (16) è

$$\begin{aligned}
\int_0^t x(\tau) d\tau &= \int_0^t 1 + (c_1 + b_1\tau) \mathbb{1}_{a_1 \leq \tau \leq -\frac{b_1}{c_1}} d\tau = \\
&= t + \left(c_1 t + \frac{b_1 t^2}{2} \right) \mathbb{1}_{a_1 \leq t \leq -\frac{b_1}{c_1}}.
\end{aligned}$$

L'integrale definito per l'impulso asimmetrico a picco (19) è

$$\int_0^t x(\tau) d\tau = \int_0^t 1 + c_1 \left(\left(\frac{\tau - a_1}{m - a_1} \right)^\alpha \mathbb{1}_{a_1 \leq \tau < m} + \left(\frac{b_1 - \tau}{b_1 - m} \right)^\beta \mathbb{1}_{m \leq \tau \leq b_1} \right) d\tau =$$

$$\begin{aligned}
&= t + c_1 \left[\left(\frac{1}{\alpha + 1} \left(\frac{\tau - a_1}{m - a_1} \right)^{\alpha+1} (m - a_1) \mathbb{1}_{a_1 \leq \tau < m} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{\beta + 1} \left(\frac{b_1 - \tau}{b_1 - m} \right)^{\beta+1} (-(b_1 - m)) \mathbb{1}_{m \leq \tau \leq b_1} \right) \right]_0^t = \\
&= t + c_1 \left(\left(\frac{t - a_1}{m - a_1} \right)^{\alpha+1} - \frac{m - a_1}{\alpha + 1} \left(-\frac{a_1}{m - a_1} \right)^{\alpha+1} \right) \mathbb{1}_{a_1 \leq t < m} \\
&\quad - \left(\frac{b_1 - m}{\beta + 1} \left(\frac{b_1 - t}{b_1 - m} \right)^{\beta+1} \right) \mathbb{1}_{m \leq t \leq b_1} = \\
&= t + c_1 \left(\left(\frac{t - a_1}{m - a_1} \right)^{\alpha+1} - \frac{m - a_1}{\alpha + 1} \left(-\frac{a_1}{m - a_1} \right)^{\alpha+1} \right) \mathbb{1}_{a_1 \leq t < m} \\
&\quad - \left(\frac{b_1 - m}{\beta + 1} \left(\frac{b_1 - m}{\beta + 1} \left(\frac{b_1}{b_1 - m} \right)^{\beta+1} \right) \mathbb{1}_{m \leq t \leq b_1} \right) = \\
&= t + c_1 \left(\left(\frac{m - a_1}{\alpha + 1} \left(\frac{t - a_1}{m - a_1} \right)^{\alpha+1} - \frac{(-1)^{\alpha+1} a_1^{\alpha+1}}{(\alpha + 1)(m - a_1)^\alpha} \right) \mathbb{1}_{a_1 \leq t < m} \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{b_1 - m}{\beta + 1} \left(\frac{b_1 - t}{b_1 - m} \right)^{\beta+1} - \frac{b_1^{\beta+1}}{(\beta + 1)(b_1 - m)^\beta} \right) \mathbb{1}_{m \leq t \leq b_1} \right).
\end{aligned}$$

A.2.2 Algoritmi implementati

Di seguito è riportato l'algoritmo utilizzato per la stima del GBM con *shock armonico continuo*, dal nome **GBMarm**, utilizzato per l'analisi dei dati descritti all'interno del capitolo 3.

```

GBMarm = function (series, prelimestimates, alpha =
  0.05, oos = round(length(series)*0.25), display = T)

```

```

{

c1 <- match.call()

a1 <- b1 <- c1 <- x <- NULL
t <- seq(1, length(series), by = 1)
s <- series
c <- cumsum(series)

#integrale definito di x(t)
intx <- function(t, a1, b1, c1) {
  t + c1 * ((b1 - a1)/(2 * pi)) * sin(2 * pi * ((t -
    a1)/(b1 - a1)) - t) * (t >= a1) * (t <= b1)
}

#x(t)
xt <- function(t, a1, b1, c1) {
  1 + c1 * (cos(2*pi*(t-a1)/(b1-a1)) - 1) * (t >= a1)
  * (t <= b1)
}

#z(t)
zcum <- function(t, m, p, q, a1, b1, c1) {
  m * (1 - exp(-(p + q) * intx(t, a1, b1, c1))) / (1 +
    (q / p) * exp(-(p + q) * intx(t, a1, b1, c1)))
}

```

```

#residui: sales cumulati - z previsti
residui <- function(t, par) {
  c - zcum(t, par[1], par[2], par[3], par[4], par[5],
    par[6])
}

#calcola z(t) con parametri in un vettore
ff2 <- function(t, par) {
  zcum(t, par[1], par[2], par[3], par[4], par[5], par
    [6])
}

#calcola z'(t)
zprimo <- function(t, m, p, q, a1, b1, c1) {
  m * (p + q * (zcum(t, m, p, q, a1, b1, c1) / m)) *
    (1 - (zcum(t, m, p, q, a1, b1, c1) / m)) * xt(t,
    a1, b1, c1)
}

zprimo.return <- function(t, par) {
  m <- par[1]
  p <- par[2]
  q <- par[3]
  a1 <- par[4]
  b1 <- par[5]
  c1 <- par[6]
  m * (1 - exp(-(p + q) * intx(t, a1, b1, c1))) /
    (1 + (q / p) * exp(-(p + q) * intx(t, a1, b1, c1)))
}

```

```

    )
}

#stime attraverso la minimizzazione dei quadrati dei
  residui con NLS
stime <- nls.lm(par = prelimestimates, fn = residui, t
  = t, control = nls.lm.control(maxiter = 1000))$par
aa <- data.frame(summary(nls.lm(par = prelimestimates,
  fn = residui, t = t, control = nls.lm.control(
  maxiter = 1000)))$coefficients[, c(1, 2)], 0, 0, 0)
names(aa) <- c("Estimate", "Std.Error", "Lower", "
  Upper", "p-value")
row.names(aa) <- c("m  ", "p  ", "q  ", "a1  ", "b1  "
  , "c1  ")
for (i in 1:NROW(aa)) {
  aa[i, c(3, 4)] <- aa[i, 1] + c(-1, 1) * qnorm(1 -
  alpha / 2) * aa[i, 2]
}
sssss <- signif(summary(nls.lm(par = prelimestimates,
  fn = residui, t = t, control = nls.lm.control(
  maxiter = 1000)))$coefficients, digits = 3)
aa[, 5] <- sssss[, 4]
resid <- nls.lm(par = prelimestimates, fn = residui, t
  = t, control = nls.lm.control(maxiter = 1000))$
  fvec

if (display == T) {

```

```

par(mfrow = c(1, 2))

#z(t)
plot(t, c, main = "Cumulative", xlim = c(0, max(t) +
  oos), ylim = c(0, optimize(ff2, interval = c(0,
  max(t) + oos), maximum = TRUE, par = stime)$
  objective*1.2), ylab = "z(t)", type = 'b', pch =
  19, cex = 0.8)
legend("topright", legend = c("Observed", "Predicted
  "), pch = c(19, NA), lty = c(NA, 1), lwd = 2, col
  = c(1, 2), cex = 0.8)
curve(ff2(x, stime), add = T, lty = 1, lwd = 2, col
  = 2, xlim = c(0, max(t) + oos))

#z'(t)
plot(t, series, main = "Instantaneous", xlim = c(0,
  max(t) + oos), ylim = c(0, max(max(series), max(
  make.instantaneous(ff2(1: (max(t)+oos), stime))))
  *1.2), ylab = "z'(t)", type = 'b', pch = 19, cex
  = 0.8)
legend("topright", legend = c("Observed", "Predicted
  "), pch = c(19, NA), lty = c(NA, 1), lwd = 2, col
  = c(1, 2), cex = 0.8)
curve(grad(function(t) ff2(t, stime), x, method = "
  simple"), add = T, lty = 1, lwd = 2, col = 2,
  xlim = c(0, max(t) + oos))
par(mfrow = c(1, 1))
}

```

```

s.hat <- ff2(t, stime) #sales stimati
tss <- sum((c - mean(c)) ^ 2) #devianza dei dati
rss <- sum((c - s.hat) ^ 2) #devianza residua delle
      stime
r.squared <- 1 - rss / tss #rquadro

tipo <- paste("Modello di Bass generalizzato con shock
      armonico continuo")

coefi <- aa$Estimate
names(coefi) <- rownames(aa)
ao <- list(model = zprimo.return, type = tipo,
      Estimate = aa, coefficients = coefi, Rsquared = r.
      squared, RSS = rss, residuals = resid, fitted = s.
      hat, data = cumsum(series), call = cl)
class(ao) <- "Dimora"
invisible(ao)
}

```

Listing 1: Algoritmo di stima di un modello di Bass generalizzato con uno shock armonico continuo.

Vengono ora riportati i codici eseguiti per le analisi dei casi studio riportati nel capitolo 3. In primo luogo si possono osservare le analisi condotte sui dati di vendita di audiocassette negli Stati Uniti nel paragrafo 3.2.1.

```
library(DIMORA)
```

```

library(forecast)
library(readxl)

dati <- read_excel("music1.xlsx")
str(dati)
dati <- as.data.frame(dati)
head(dati)
dati <- dati[,c(1,3)]
View(dati)
dati <- na.omit(dati)
l <- length(dati[,1])
t <- seq(1,l,1)
cass <- dati[,2]

plot(dati, type = "b", pch = 16, lty = 3, cex = 0.6,
      xlab = "Anno", ylab = "Vendite annuali")
plot(x = t, y = t(cumsum(cass)), type = "b", xlab = "
      Anno", ylab = "Vendite cumulate", pch = 16, lty = 3,
      cex = 0.6, xaxt = "n")
axis(1, at = c(3, 8, 13, 18, 23, 28, 33), labels = dati$
      year[c(3, 8, 13, 18, 23, 28, 33)])

bm.cass <- BM(cass)
prelimestimates <- c(bm.cass$coefficients['m'], bm.cass$
      coefficients['p'], bm.cass$coefficients['q'], 14, 19,
      0.5)
source("GBMarm.R")
GBMarm.cass <- GBMarm(cass, prelimestimates)

```

```

summary(GBMarm.cass)

tfine <- seq(0,1,0.1)
pred.gbma.cass <- predict(GBMarm.cass, newx = tfine)
pred.gbma.cass.i <- make.instantaneous(pred.gbma.cass)
  [-1]

plot(x = t, y = cass, type = "b", pch = 16, lty = 3,
     cex = 0.6, xlab = "Anno", ylab = "Vendite annuali",
     xaxt = "n")
axis(1, at = c(3, 8, 13, 18, 23, 28, 33), labels = dati$
     year[c(3, 8, 13, 18, 23, 28, 33)])
lines(tfine[-c(1, 140, 191)], pred.gbma.cass.i[-c(140,
     191)]*10, lwd = 2, col = "slateblue1")
legend("topright", legend = c("Osservazioni", "GBM con
     shock armonico continuo"), col = c("black", "
     slateblue1"), pch = 16, cex = 0.6)
plot(x = t, y = cumsum(cass), type = "b", xlab = "Anno",
     ylab = "Vendite cumulate", pch = 16, lty = 3, cex =
     0.6, xaxt = "n")
axis(1, at = c(3, 8, 13, 18, 23, 28, 33), labels = dati$
     year[c(3, 8, 13, 18, 23, 28, 33)])
lines(tfine, pred.gbma.cass, lwd = 2, col = "slateblue1"
     )
legend("topleft", legend = c("Osservazioni", "GBM con
     shock armonico continuo"), col = c("black", "
     slateblue1"), pch = 16, cex = 0.7)

```

Listing 2: Analisi della serie delle vendite di audiocassette negli USA.

Successivamente viene riportato il codice per le analisi della serie storica delle citazioni dell'articolo di Bass (1969) del paragrafo 3.2.2.

```
library(DIMORA)
library(forecast)

dati <- read.csv("citeBass.csv")
str(dati)
head(dati)
View(dati)
l <- length(dati[,1])
t <- seq(1,l,1)
bass <- dati[,2]

plot(dati, type = "b", pch = 16, lty = 3, cex = 0.6,
      xlab = "Anno", ylab = "Citazioni annuali")
plot(x = t, y = t(cumsum(bass)), type = "b", xlab = "
      Anno", ylab = "Citazioni cumulate", pch = 16, lty =
      3, cex = 0.6, xaxt = "n")
axis(1, at = c(2, 12, 22, 32, 42, 52), labels = dati$
      year[c(2, 12, 22, 32, 42, 52)])

bm.bass <- BM(bass, display = T)
prelimestimates <- c(bm.bass$coefficients['m'], bm.bass$
      coefficients['p'], bm.bass$coefficients['q'], 44, 49,
```

```

0.5)
source("GBMarm.R")
GBMarmB <- GBMarm(bass, prelimestimates)
summary(GBMarmB)

tfine <- seq(0,1,0.1)
pred.gbma.bass <- predict(GBMarmB, newx = tfine)
pred.gbma.bass.i <- make.instantaneous(pred.gbma.bass)
  [-1]

plot(x = t, y = bass, type = "b", pch = 16, lty = 3,
     cex = 0.6, xlab = "Anno", ylab = "Citazioni", xaxt =
     "n")
axis(1, at = c(2, 12, 22, 32, 42, 52), labels = dati$
     year[c(2, 12, 22, 32, 42, 52)])
lines(tfine[-c(1, 436, 486)], pred.gbma.bass.i[-c(436,
     486)]*10, lwd = 2, col = "slateblue1")
legend("topleft", legend = c("Osservazioni", "GBM con
     shock armonico continuo"), col = c("black", "
     slateblue1"), pch = 16, cex = 0.8)
plot(x = t, y = cumsum(bass), type = "b", xlab = "Anno",
     ylab = "Citazioni cumulate", pch = 16, lty = 3, cex
     = 0.6, xaxt = "n")
axis(1, at = c(2, 12, 22, 32, 42, 52), labels = dati$
     year[c(2, 12, 22, 32, 42, 52)])
lines(tfine, pred.gbma.bass, lwd = 2, col = "slateblue1"
     )
legend("topleft", legend = c("Osservazioni", "GBM con

```

```
shock armonico continuo"), col = c("black", "
slateblue1"), pch = 16, cex = 0.8)
```

Listing 3: Analisi della serie delle citazioni di Bass (1969).

Si può ora osservare il codice per l'analisi dei dati delle vendite trimestrali di macchine a diesel nuove in Norvegia condotta nella sezione 3.2.3.

```
library(DIMORA)
library(forecast)

View(dati_trimestrali)
diesel_new <- dati_trimestrali[,5]
l <- length(dati_trimestrali[,1])
t <- seq(1,l,1)
tfine <- seq(0,l,0.1)

plot(t, diesel_new, type = "b", pch = 16, lty = 3, cex
     = 0.6, xlab = "Trimestre", ylab = "Vendite
     trimestrali", xaxt = "n")
axis(1, at = c(6, 22, 38, 54, 70, 86, 102, 118, 134),
     labels = dati_trimestrali$anno[c(6, 22, 38, 54, 70,
     86, 102, 118, 134)])
plot(x = t, y = t(cumsum(diesel_new)), type = "b", xlab
     = "Trimestre", ylab = "Vendite trimestrali cumulate",
     pch = 16, lty = 3, cex = 0.6, xaxt = "n")
axis(1, at = c(6, 22, 38, 54, 70, 86, 102, 118, 134),
     labels = dati_trimestrali$anno[c(6, 22, 38, 54, 70,
```

```

86, 102, 118, 134)])

bm.diesel <- BM(diesel_new, display = T)
prelimestimates <- c(bm.diesel$coefficients['m'], bm.
  diesel$coefficients['p'], bm.diesel$coefficients['q'
  ], 70, 90, 0.8)
source("GBMarm.R")
GBM.diesel <- GBMarm(diesel_new, prelimestimates)
summary(GBM.diesel)

pred.diesel <- predict(GBM.diesel, newx = tfine)
pred.diesel.i <- make.instantaneous(pred.diesel)[-1]

plot(t, diesel_new, type = "b", pch = 16, lty = 3, cex
  = 0.6, xlab = "Trimestre", ylab = "Vendite
  trimestrali", xaxt = "n")
axis(1, at = c(6, 22, 38, 54, 70, 86, 102, 118, 134),
  labels = dati_trimestrali$anno[c(6, 22, 38, 54, 70,
  86, 102, 118, 134)])
lines(tfine[-c(1,700,856)], pred.diesel.i[-c(700,856)]*
  10, lwd = 2, col = "slateblue1")
legend("topleft", legend = c("Osservazioni", "GBM con
  shock armonico continuo"), col = c("black", "
  slateblue1"), pch = 16, cex = 0.7)
plot(x = t1, y = t(cumsum(diesel_new)), type = "b", xlab
  = "Trimestre", ylab = "Vendite trimestrali cumulate"
  , pch = 16, lty = 3, cex = 0.6, xaxt = "n")
axis(1, at = c(6, 22, 38, 54, 70, 86, 102, 118, 134),

```

```

labels = dati_trimestrali$anno[c(6, 22, 38, 54, 70,
86, 102, 118, 134)])
lines(tfine1, pred.diesel, lwd = 2, col = "slateblue1")
legend("topleft", legend = c("Osservazioni", "GBM con
shock armonico continuo"), col = c("black", "
slateblue1"), pch = 16, cex = 0.8)

```

Listing 4: Analisi della serie delle vendite di auto a diesel nuove in Norvegia.

Di seguito compare il codice per l'analisi dei dati delle vendite trimestrali di macchine *BEV* usate in Norvegia condotta nella sezione 3.2.3.

```

library(DIMORA)
library(forecast)

View(dati_trimestrali)
bev_used <- dati_trimestrali[,12]
l <- length(dati_trimestrali[,1])
t <- seq(1,l,1)
tfine <- seq(0,l,0.1)

plot(t, bev_used, type = "b", pch = 16, lty = 3, cex =
0.6, xlab = "Trimestre", ylab = "Vendite trimestrali"
, xaxt = "n")
axis(1, at = c(6, 22, 38, 54, 70, 86, 102, 118, 134),
labels = dati_trimestrali$anno[c(6, 22, 38, 54, 70,
86, 102, 118, 134)])

```

```

plot(x = t, y = t(cumsum(bev_used)), type = "b", xlab =
  "Trimestre", ylab = "Vendite trimestrali cumulate",
  pch = 16, lty = 3, cex = 0.6, xaxt = "n")
axis(1, at = c(6, 22, 38, 54, 70, 86, 102, 118, 134),
  labels = dati_trimestrali$anno[c(6, 22, 38, 54, 70,
  86, 102, 118, 134)])

bm.bev <- BM(bev_used, display = T)
prelimestimates <- c(bm.bev$coefficients['m'], bm.bev$
  coefficients['p'], bm.bev$coefficients['q'], 110,
  130, 0.8)
source("GBMarm.R")
GBM.bev <- GBMarm(bev_used, prelimestimates11)
summary(GBM.bev)

pred.bev <- predict(GBM.bev, newx = tfine)
pred.bev.i <- make.instantaneous(pred.bev)[-1]

plot(t, bev_used, type = "b", pch = 16, lty = 3, cex =
  0.6, xlab = "Trimestre", ylab = "Vendite trimestrali"
  , xaxt = "n")
axis(1, at = c(6, 22, 38, 54, 70, 86, 102, 118, 134),
  labels = dati_trimestrali$anno[c(6, 22, 38, 54, 70,
  86, 102, 118, 134)])
lines(tfine[-c(1,1100,1161)], pred.bev.i[-c(1100,1161)]*
  10, lwd = 2, col = "slateblue1")
legend("topleft", legend = c("Osservazioni", "GBM con
  shock armonico continuo"), col = c("black", "

```

```

    slateblue1"), pch = 16, cex = 0.8)
plot(x = t, y = t(cumsum(bev_used)), type = "b", xlab =
    "Trimestre", ylab = "Vendite trimestrali cumulate",
    pch = 16, lty = 3, cex = 0.6, xaxt = "n")
axis(1, at = c(6, 22, 38, 54, 70, 86, 102, 118, 134),
    labels = dati_trimestrali$anno[c(6, 22, 38, 54, 70,
    86, 102, 118, 134)])
lines(tfine1, pred.bev, lwd = 2, col = "slateblue1")
legend("topleft", legend = c("Osservazioni", "GBM con
    shock armonico continuo"), col = c("black", "
    slateblue1"), pch = 16, cex = 0.8)

```

Listing 5: Analisi della serie delle vendite di auto BEV usate in Norvegia.

Successivamente si riporta il codice per l'analisi dei dati delle vendite trimestrali di macchine ibride *plug-in* usate in Norvegia condotta nella sezione 3.2.3.

```

library(DIMORA)
library(forecast)

View(dati_trimestrali)
plugin_used <- dati_trimestrali[,14]
l <- length(dati_trimestrali[,1])
t <- seq(1,l,1)
tfine <- seq(0,1,0.1)

plot(t, plugin_used, type = "b", pch = 16, lty = 3, cex
    = 0.6, xlab = "Trimestre", ylab = "Vendite

```

```

    trimestrali", xaxt = "n")
axis(1, at = c(6, 22, 38, 54, 70, 86, 102, 118, 134),
     labels = dati_trimestrali$anno[c(6, 22, 38, 54, 70,
      86, 102, 118, 134)])
plot(x = t, y = t(cumsum(plugin_used)), type = "b", xlab
     = "Trimestre", ylab = "Vendite trimestrali cumulate"
     , pch = 16, lty = 3, cex = 0.6, xaxt = "n")
axis(1, at = c(6, 22, 38, 54, 70, 86, 102, 118, 134),
     labels = dati_trimestrali$anno[c(6, 22, 38, 54, 70,
      86, 102, 118, 134)])

bm.pl <- BM(plugin_used, display = T)
prelimestimates <- c(bm.pl$coefficients['m'], bm.pl$
  coefficients['p'], bm.pl$coefficients['q'], 105, 120,
  0.8)
source("GBMarm.R")
GBM.pl <- GBMarm(plugin_used, prelimestimates)
summary(GBM.pl)

pred.pl <- predict(GBM.pl, newx = tfine)
pred.pl.i <- make.instantaneous(pred.pl)[-1]

plot(t, plugin_used, type = "b", pch = 16, lty = 3, cex
     = 0.6, xlab = "Trimestre", ylab = "Vendite
  trimestrali", xaxt = "n")
axis(1, at = c(6, 22, 38, 54, 70, 86, 102, 118, 134),
     labels = dati_trimestrali$anno[c(6, 22, 38, 54, 70,
      86, 102, 118, 134)])

```

```

lines(tfine[-c(1,1051,1160)], pred.pl.i[-c(1051,1160)]*
      10, lwd = 2, col = "slateblue1")
legend("topleft", legend = c("Osservazioni", "GBM con
      shock armonico continuo"), col = c("black", "
      slateblue1"), pch = 16, cex = 0.8)
plot(x = t, y = t(cumsum(plugin_used)), type = "b", xlab
      = "Trimestre", ylab = "Vendite trimestrali cumulate"
      , pch = 16, lty = 3, cex = 0.6, xaxt = "n")
axis(1, at = c(6, 22, 38, 54, 70, 86, 102, 118, 134),
      labels = dati_trimestrali$anno[c(6, 22, 38, 54, 70,
      86, 102, 118, 134)])
lines(tfine, pred.pl, lwd = 2, col = "slateblue1")
legend("topleft", legend = c("Osservazioni", "GBM con
      shock armonico continuo"), col = c("black", "
      slateblue1"), pch = 16, cex = 0.8)

```

Listing 6: Analisi della serie delle vendite di auto ibride plug-in usate in Norvegia.

A.3 Proposta per il mercato potenziale variabile

A.3.1 Algoritmi implementati

Viene ora riportato l'algoritmo utilizzato per la stima del modello di diffusione per innovazioni con mercato potenziale dipendente dalla reputazione, dal nome MPR, utilizzato per le analisi del capitolo 5.

```

MPR = function (series, reputazione, prelimestimates =
      NULL, alpha = 0.05, oos = round(length(series)*0.25),
      display = T)

```

```

{
  x <- NULL
  t <- seq(1, length(series), by = 1)
  s <- series
  c <- cumsum(series)

  #funzione del mercato potenziale con reputazione
  mt <- function(t, K, rep, lambda) {
    (K/2)*(1 + rep*(1 - exp(-lambda*t))) * (rep >= -1) *
      (rep <= 1) * (lambda > 0)
  }

  #z(t)
  zcum <- function(t, K, p, q, lambda) {
    mp(t, K, lambda) * (1 - exp(-(p+q)*t))/(1 + (q/p)*
      exp(-(p+q)*t))
  }

  #residui
  residui <- function(t, par) {
    c - zcum(t, par[1], par[2], par[3], par[4])
  }

  #calcola z(t) con parametri in un vettore
  ff2 <- function(t, par) {
    zcum(t, par[1], par[2], par[3], par[4])
  }
}

```

```

if (is.null(prelimestimates) == TRUE) {
  prelimestimates <- c(BM(series = s, display = F)$
    Estimate[,1], 0.001, 0.1)
}

stime <- nls.lm(par = prelimestimates, fn = residui, t
  = t, control = nls.lm.control(maxiter = 1000))$par
aa <- data.frame(summary(nls.lm(par = prelimestimates,
  fn = residui, t = t, control = nls.lm.control(
    maxiter = 1000)))$coefficients[,c(1, 2)], 0, 0, 0)
names(aa) <- c("Estimate", "Std.Error", "Lower", "
  Upper", "p-value")
row.names(aa) <- c("K ", "p ", "q ", "lambda ")
for (i in 1:NROW(aa)) {
  aa[i, c(3, 4)] <- aa[i, 1] + c(-1, 1) * qnorm(1 -
    alpha / 2) * aa[i, 2]
}

sssss <- signif(summary(nls.lm(par = prelimestimates,
  fn = residui, t = t, control = nls.lm.control(
    maxiter = 1000)))$coefficients, digits = 3)
aa[, 5] <- sssss[, 4]

#plot
if (display == T) {
  par(mfrow = c(1, 2))

  #z(t)
  plot(t, c, main = "Cumulative", xlim = c(0, max(t) +

```

```

    oos), ylim = c(0, sum(s) + sum(s) * 50 / 100),
    ylab = "z(t)", type = 'b', pch = 19, cex = 0.8)
legend("topright", legend = c("Observed", "Predicted
"), pch = c(19, NA), lty = c(NA, 1), lwd = 2, col
    = c(1, 2), cex = 0.8)
curve(ff2(x, stime), add = T, lty = 1, lwd = 2, col
    = 2, xlim = c(0, max(t) + oos))

#z'(t)
plot(t, series, main = "Instantaneous", xlim = c(0,
    max(t) + oos), ylim = c(0, max(series) * 150 /
    100), ylab = "z'(t)", type = 'b', pch = 19, cex =
    0.8)
legend("topright", legend = c("Observed", "Predicted
"), pch = c(19, NA), lty = c(NA, 1), lwd = 2, col
    = c(1, 2), cex = 0.8)
curve(grad(function(t) ff2(t, stime), x, method = "
    simple"), add = T, lty = 1, lwd = 2, col = 2,
    xlim = c(0, max(t) + oos))
par(mfrow = c(1, 1))
}

s.hat <- ff2(t, stime)
tss <- sum((c - mean(c)) ^ 2)
rss <- sum((c - s.hat) ^ 2)
r.squared <- 1 - rss / tss
res <- nls.lm(par = prelimestimates, fn = residui, t =
    t, control = nls.lm.control(maxiter = 1000))$fvec

```

```

coefi <- aa$Estimate
names(coefi) <- rownames(aa)

cl <- match.call()
ao <- list(model = ff2, type = "Modello di diffusione
      con mercato potenziale dipendente dalla reputazione
      del prodotto", Estimate = aa, coefficients = coefi
      , Rsquared = r.squared, RSS = rss, residuals = res,
      fitted = s.hat, data = cumsum(series), call = cl)
class(ao) <- "Dimora"
invisible(ao)
}

```

Listing 7: Algoritmo di stima di un modello di diffusione con mercato potenziale dipendente dalla reputazione.

Di seguito vengono riportati i codici utilizzati per le applicazioni del modello di diffusione con mercato potenziale variabile dipendente dalla reputazione svolte nel capitolo 5. In primo luogo viene riportato il codice utilizzato per le analisi condotte sui dati di vendita di Apple iPhone al paragrafo 5.2.1.

```

library(DIMORA)
library(forecast)

dati <- read.csv("iphone.csv")
str(dati)
head(dati)
View(dati)

```

```

#i dati sulla reputazione sono disponibili solo dal 2010
  --> rimuovo i dati prima
dati <- dati[-c(1:10),]
l <- length(dati[,1])
t <- seq(1,l,1)
iphone <- dati[,1]

#vettore con le posizioni in classifica di Apple dal
  2010 al 2018
classifica <- c(12, 46, 8, 24, 57, 101, 101, 72, 101)
best <- 1
worst <- 101
alpha <- 1 - 2*(classifica - best)/(worst - best)
alpha
rep <- function(t) {
  0.78 * (t <= 4) + #2010
  0.10 * (t > 4) * (t <= 8) + #2011
  0.86 * (t > 8) * (t <= 12) + #2012
  0.54 * (t > 12) * (t <= 16) + #2013
  -0.12 * (t > 16) * (t <= 20) + #2014
  -1 * (t > 20) * (t <= 24) + #2015
  -1 * (t > 24) * (t <= 28) + #2016
  -0.42 * (t > 28) * (t <= 32) + #2017
  -1 * (t > 32) #2018
}
plot(t, rep(t), xlab = "Anno", ylab = "Reputazione",
      xaxt = "n", lwd = 2, type = "l")
axis(1, at = c(2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34), labels

```

```

    = c(2010, 2011, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016, 2017,
2018))

plot(t, iphone, type = "b", pch = 16, lty = 3, cex =
    0.6, xlab = "Trimestre", ylab = "Vendite trimestrali"
    , xaxt = "n")
axis(1, at = c(2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34), labels
    = dati$quarter[c(2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34)])
plot(x = t, y = t(cumsum(iphone)), type = "b", xlab = "
    Trimestre", ylab = "Vendite trimestrali cumulate",
    pch = 16, lty = 3, cex = 0.6, xaxt = "n")
axis(1, at = c(2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34), labels
    = dati$quarter[c(2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34)])

bm.iphone <- BM(iphone, display = T)
prelimestimates <- c(bm.iphone$coefficients['m'], bm.
    iphone$coefficients['p'], bm.iphone$coefficients['q'
    ], 0.05)
source("MPR.R")
repm <- MPR(iphone, rep(t), prelimestimates)
summary(repm)

tfine <- seq(0,1,0.1)
pred.rep.iphone <- predict(repm, newx = tfine)
pred.rep.iphone.i <- make.instantaneous(pred.rep.iphone)
    [-1]

plot(t, iphone, type = "b", pch = 16, lty = 3, cex =

```

```

0.6, xlab = "Trimestre", ylab = "Vendite trimestrali"
, xaxt = "n")
axis(1, at = c(2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34), labels
     = dati$quarter[c(2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34)])
lines(tfine[-c(1,41,81,121,161,201,281,321)], pred.rep.
      iphone.i[-c(41,81,121,161,201,281,321)]*10, lwd = 2,
      col = "slateblue1")
legend("topleft", legend = c("Osservazioni", "Modello
con reputazione"), col = c("black", "slateblue1"),
      pch = 16, cex = 0.8)
plot(x = t, y = t(cumsum(iphone)), type = "b", xlab = "
Trimestre", ylab = "Vendite trimestrali cumulate",
      pch = 16, lty = 3, cex = 0.6, xaxt = "n")
axis(1, at = c(2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34), labels
     = dati$quarter[c(2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34)])
lines(tfine, pred.rep.iphone, lwd = 2, col = "slateblue1
")
legend("topleft", legend = c("Osservazioni", "Modello
con reputazione"), col = c("black", "slateblue1"),
      pch = 16, cex = 0.8)

```

Listing 8: Analisi della serie delle vendite di Apple iPhone.

Successivamente viene riportato il codice per le analisi sui dati di vendita delle macchine ibride in Norvegia alla sezione 5.2.2.

```

library(DIMORA)
library(forecast)

```

```

dati <- read.csv("bilsalg_data.csv")
str(dati)
View(dati)
colnames(dati)
datih <- data.frame(dati[,1], dati[,6] + dati[,7] + dati
[,12] + dati[,13]) #somma di tutte le ibride
colnames(datih) <- c("Mese", "Macchine")
View(datih)
#fino al 2007 non ci sono acquisti --> rimuovo le
osservazioni prima
datih <- datih[-c(1:204),]
hybrid <- datih[,2]
l <- length(datih[,1])
t <- seq(1,l,1)

plot(t, hybrid, type = "b", pch = 16, lty = 3, cex =
0.6, xlab = "Mese", ylab = "Vendite mensili", xaxt =
"n")
axis(1, at = c(13,49,85,121,157,193), labels = c("01/
2008", "01/2011", "01/2014", "01/2017", "01/2020", "
01/2023"))
plot(x = t, y = t(cumsum(hybrid)), type = "b", xlab = "
Mese", ylab = "Vendite mensili cumulate", pch = 16,
lty = 3, cex = 0.6, xaxt = "n")
axis(1, at = c(13,49,85,121,157,193), labels = c("01/
2008", "01/2011", "01/2014", "01/2017", "01/2020", "
01/2023"))

```

```

bm.h <- BM(hybrid, display = T)
rep <- function(t) {
  +0.3 * (t <= 140) - 0.2 * (t > 140)
}
prelimestimates <- c(bm.h$coefficients['m'], bm.h$
  coefficients['p'], bm.h$coefficients['q'], 0.05)
source("MPR.R")
repm <- MPR(hybrid, rep(t), prelimestimates)
summary(repm)

pred.rep.h <- predict(repm, newx = tfine)
pred.rep.h.i <- make.instantaneous(pred.rep.h)[-1]

plot(t, hybrid, type = "b", pch = 16, lty = 3, cex =
  0.6, xlab = "Mese", ylab = "Vendite mensili", xaxt =
  "n")
axis(1, at = c(13,49,85,121,157,193), labels = c("01/
  2008", "01/2011", "01/2014", "01/2017", "01/2020", "
  01/2023"))
lines(tfine[-c(1,1401)], pred.rep.h.i[-1401]*10, lwd =
  2, col = "slateblue1")
legend("topleft", legend = c("Osservazioni", "Modello
  con reputazione"), col = c("black", "slateblue1"),
  pch = 16, cex = 0.8)
plot(x = t, y = t(cumsum(hybrid)), type = "b", xlab = "
  Mese", ylab = "Vendite mensili cumulate", pch = 16,
  lty = 3, cex = 0.6, xaxt = "n")
axis(1, at = c(13,49,85,121,157,193), labels = c("01/

```

```
2008", "01/2011", "01/2014", "01/2017", "01/2020", "
01/2023"))
lines(tfine, pred.rep.h, lwd = 2, col = "slateblue1")
legend("topleft", legend = c("Osservazioni", "Modello
con reputazione"), col = c("black", "slateblue1"),
pch = 16, cex = 0.8)
```

Listing 9: Analisi della serie delle vendite di macchine ibride in Norvegia.

B Bibliografia

- [1] Frank M. Bass. “A New Product Growth for Model Consumer Durables”. In: *Management Science* 15.5 (1969), pp. 251–227.
- [2] Frank M. Bass, Trichy V. Krishnan e Dipak C. Jain. “Why the Bass model fits without decision variables”. In: *Marketing Science* 13.3 (1994), p. 203.
- [3] Douglas M. Bates e Donald G. Watts. *Nonlinear Regression Analysis and Its Applications*. Wiley, 1988.
- [4] Marco Bramanti, Carlo D. Pagani e Sandro Salsa. *Analisi matematica 1*. 2008.
- [5] Francesca Centrone, Aldo Goia e Ernesto Salinelli. “Demographic processes in a model of innovation diffusion with a dynamic market”. In: *Technological Forecasting & Social Change* 74 (2006), pp. 247–266.
- [6] Giovanni Cescon. “Analisi della seconda ondata del Covid-19 in Italia mediante l’utilizzo di modelli di diffusione”. In: (2021).
- [7] Wesley M. Cohen e Daniel A. Levinthal. “Absorptive Capacity: A New Perspective on Learning and Innovation”. In: *Administrative Science Quarterly* 35.1 (1990), pp. 128–152.
- [8] Louis A. Fourt e Joseph W. Woodlock. “Early Prediction of Market Success for New Grocery Products”. In: *Journal of Marketing* 25.2 (1960), pp. 31–38.

- [9] Mariangela Guidolin. *Innovation Diffusion Models: Theory and Practice*. Wiley, 2024.
- [10] Mariangela Guidolin e Pietro Manfredi. “Innovation Diffusion Process: Concepts, Models and Predictions”. In: *Annual Review of Statistics and Its Application* (2022).
- [11] Renato Guseo. *Interventi strategici e aspetti competitivi nel ciclo di vita di innovazioni*. 2004.
- [12] Renato Guseo, Alessandra Dalla Valle e Mariangela Guidolin. “World Oil Depletion Models: Price effects compared with strategic or technological interventions”. In: *Technological Forecasting & Social Change* 74.4 (2007), pp. 452–469.
- [13] Renato Guseo e Mariangela Guidolin. “Market potential dynamics in innovation diffusion: Modelling the synergy between two driving forces”. In: *Technological Forecasting & Social Change* 78 (2011), pp. 13–24.
- [14] Renato Guseo e Mariangela Guidolin. “Modelling a dynamic market potential: A class of automata networks for diffusion of innovations”. In: *Technological Forecasting & Social Change* 76 (2009), pp. 806–820.
- [15] Namwoon Kim, Eileen Bridges e Rajendra K. Srivastava. “A Simultaneous Model for Innovative Product Category Sales Diffusion and Competitive Dynamics”. In: *International Journal of Research in Marketing* 16.2 (1999), pp. 95–111.

- [16] Vijay Mahajan e Eitan Muller. “Innovation Diffusion and New Product Growth Models in Marketing”. In: *Journal of Marketing* 43.4 (1979).
- [17] Vijay Mahajan, Eitan Muller e Frank M. Bass. “New Product Diffusion Models in Marketing: A Review and Directions for Research”. In: *Journal of Marketing* 54 (1990).
- [18] Vijay Mahajan e Robert A. Peterson. “Innovation diffusion in a dynamic potential adopter population”. In: *Management Science* 24.15 (1978), pp. 1589–1597.
- [19] Edwin Mansfield. “Technical Change and the Rate of Imitation”. In: *Econometrica* 29.4 (1961).
- [20] Renana Peres, Eitan Muller e Vijay Mahajan. “Innovation diffusion and new product growth models: A critical review and research directions”. In: *Research in Marketing* 27 (2010), pp. 91–106.
- [21] Alfio Quaternioni, Fausto Saleri e Paola Gervasio. *Calcolo Scientifico: Esercizi e problemi risolti con MATLAB e Octave*. 2017.
- [22] Valentina D. Radojičić, Goran Z. Marković e Bojan M. Bakmaz. “New Diffusion Model with Variable Market Potential”. In: *Proceedings of the 10th International Conference on Telecommunications in Modern Satellite, Cable, and Broadcasting Services (TELSIKS)* (2011), pp. 637–640.

- [23] Everett M. Rogers. “Diffusion of Innovations”. In: *New York: Free Press* (2003).
- [24] Jang B. Shukla, Harsh Kushwah, Kapil Agrawal e Ajai Shukla. “Modeling the effects of variable external influences and demographic processes on innovation diffusion”. In: *Nonlinear Analysis: Real World Applications* 13 (2011), pp. 186–196.