

Analisi di stabilità per sistemi non lineari

Elia Bettio 561525-IAM

1- Introduzione

In pratica nessun componente di un sistema è lineare in un campo illimitato di possibile funzionamento, ma solo nell'ambito di un intorno più o meno grande del punto di lavoro al di fuori del quale manifesta alcune caratteristiche di non linearità.

Peraltro accanto alle frequenti situazioni in cui i comportamenti non lineari sono indesiderati, ve ne sono delle altre (per es. controllo Bang-Bang) nelle quali la non linearità è necessaria onde soddisfare le specifiche di progetto. Escludendo questi casi particolari, ogniqualvolta si ha a che fare con un processo intrinsecamente non-lineare (è il caso per es. del pendolo inverso) si adotteranno opportuni provvedimenti (quali la limitazione del range dei valori) al fine di ottenere un modello linearizzato, attorno al quale è possibile progettare il sistema di controllo con i metodi classici dei sistemi lineari.

Diverso è il caso in cui la non-linearità compare all'esterno del processo, concentrata nell'attuatore e/o nel trasduttore (hard-nonlinearity).

Generalmente non è possibile linearizzare le hard-nonlinearity; onde per cui si ricorre ad un approccio specifico per lo studio dei sistemi closed-loop non lineari.

2- Approccio allo studio della stabilità di sistemi retroazionati non lineari

E' noto come lo studio della risposta in frequenza costituisca la chiave della teoria della stabilità dei sistemi lineari: la funzione di trasferimento I/O può essere indagata mediante tecniche analitiche e grafiche molto versatili e potenti.

La non linearità fa cadere uno dei punti di forza dello studio dei sistemi lineari: nell'ambito dei Sistemi non Lineari non è più possibile parlare di modi armonici, in quanto non è affatto lecito aspettarsi che l'uscita di un Sistema non Lineare eccitato da una sinusoide sia ancora una sinusoide. Un possibile approccio allo studio della stabilità dei Sistemi non Lineari è costituito dalle tecniche di linearizzazione, la cui validità è però limitata ad un intorno più o meno piccolo (non ben definito) del punto di lavoro. Nella realtà delle applicazioni pratiche le non linearità sono molto frequenti (basti pensare alla saturazione) e purtroppo un criterio così fortemente limitato è del tutto insufficiente. Si ricorre quindi al metodo della "funzione descrittiva", che costituisce sostanzialmente una estensione ai Sistemi non Lineari della tecnica della risposta in frequenza dei sistemi lineari. Anche se approssimato, questo metodo costituisce una risorsa sufficientemente potente per il progettista in quanto consente l'individuazione degli eventuali "cicli limitati nel piano delle fasi e la valutazione della loro stabilità.

La definizione di stabilità BIBO applicata ai Sistemi non Lineari non esclude l'esistenza di traiettorie "chiuse" nel piano delle fasi: queste sono tecnicamente denominate "cicli limite".

Peraltro è importante distinguere fra cicli limite "stabili" e cicli limite "instabili": un ciclo limite è detto "stabile" se tutte le possibili traiettorie nel piano delle fasi convergono ad esso; è altrimenti instabile se esistono traiettorie che si allontanano irreversibilmente dal ciclo limite.

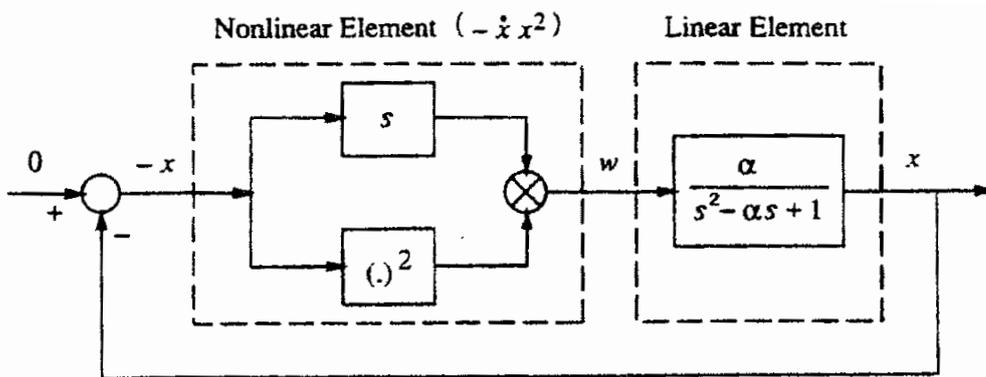
Nella maggior parte dei sistemi di controllo l'esistenza di un ciclo limite costituisce un problema: l'oscillazione permanente che lo caratterizza può essere fonte di guasti meccanici oppure può avere effetti secondari sgradevoli (si pensi per esempio ad un aereo controllato da autopilota). Ebbene, ciò che interessa al progettista non è tanto la forma esatta del ciclo limite, ma essenzialmente una sicura indicazione sulla sua esistenza e solo approssimativamente la sua ampiezza e frequenza.

Il metodo della Funzione Descrittiva: un esempio preliminare

Il soggetto del seguente esempio di applicazione della tecnica della funzione descrittiva è l'equazione dell'oscillatore di Van der Pol, chiaramente non lineare:

$$\dot{x} + \alpha(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$$

Il primo passo consiste nel rappresentare l'equazione (previa trasformazione di Laplace) mediante un sistema retroazionato nel quale elementi lineari ed elementi non lineari siano blocchi separati nella catena diretta:



Per poter proseguire è necessario verificare il soddisfacimento della cosiddetta “filtering hypothesis”: l'elemento lineare deve essere obbligatoriamente un filtro passa basso. Ciò che si fa arrivati a questo punto è ipotizzare l'esistenza di un ciclo limite caratterizzato da una oscillazione sinusoidale del tipo:

$$x(t) = A \sin(\omega t)$$

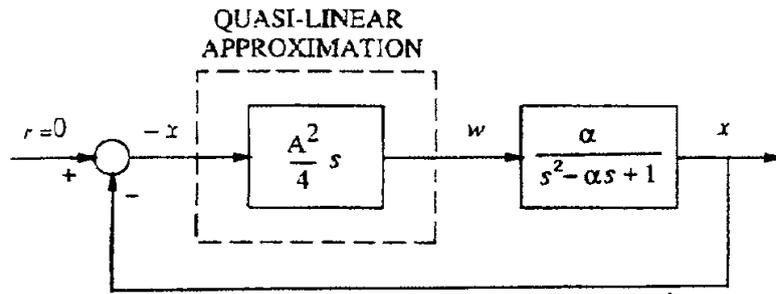
Indi, (analogamente a quanto si faceva per la risoluzione delle equazioni differenziali) si verifica la validità dell'ipotesi applicando direttamente $x(t)$ al sistema ed eseguendo i calcoli. L'uscita del blocco non lineare sarà:

$$w = -x^2 \dot{x} = -(A \sin \omega t)^2 \cdot (A \omega \cos \omega t) = -\frac{A^3 \omega}{2} (1 - \cos 2\omega t) \cos \omega t = -\frac{A^3 \omega}{4} (\cos \omega t - \cos 3\omega t)$$

Grazie alla proprietà passa basso dell'elemento lineare, è possibile semplificare l'espressione di $w(t)$ trascurando le armoniche di ordine maggiore di uno (in questo caso solo la terza armonica), ottenendo approssimativamente:

$$w(t) \approx -\frac{A^3 \omega}{4} \omega \cos \omega t = -\frac{A^2 \omega}{4} \frac{d}{dt} (-A \sin \omega t)$$

Si è quindi raggiunto un importante risultato: ai fini dello studio della stabilità, l'elemento non lineare può essere rimpiazzato con la sua “approssimazione quasi-lineare” (in questo caso un derivatore il cui guadagno è funzione quadratica dell'ampiezza dell'ingresso):



La “funzione descrittiva” è quindi la seguente:

$$N(A, \omega) = \frac{A^2}{4}(j\omega)$$

Infine, resta da verificare l’esistenza del ciclo limite avente $x(t)=A\sin\omega t$. A tale scopo basta tradurre in formule la struttura I/O della catena diretta:

(abuso di notazione a scopo semplificativo nell’accostare segnali nel tempo a funzioni in $j\omega$)

$$x = A\sin\omega t = \frac{\alpha}{(j\omega)^2 - \alpha(j\omega) + 1} \cdot w = A\sin\omega t = \frac{\alpha}{(j\omega)^2 - \alpha(j\omega) + 1} \cdot N(A, \omega) \cdot (-x)$$

Da cui:

$$1 + \frac{A^2(j\omega)}{4} \frac{\alpha}{(j\omega)^2 - \alpha(j\omega) + 1} = 0$$

Risolvendo l’equazione, si ottiene $A=2$, $\omega=1$.

Si noti come, in termini della variabile di Laplace s , l’equazione caratteristica ad anello chiuso di questo sistema diventa:

$$1 + \frac{A^2 s}{4} \frac{\alpha}{s^2 - \alpha s + 1} = 0$$

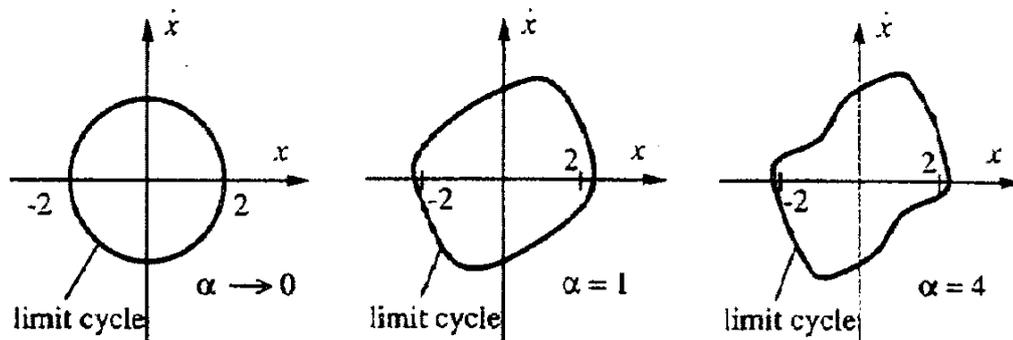
le cui radici risultano:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{8}\alpha(A^2 - 4) \pm \sqrt{\frac{1}{64}\alpha^2(A^2 - 4)^2 - 1}$$

In corrispondenza ad $A = 2$, si avrà $\lambda_{12} = \pm j$. Questo implica l’esistenza di un ciclo limite di ampiezza 2 e pulsazione 1.

In realtà, l’imprecisione del metodo seguito (dovuta alla approssimazione mediante elemento “quasi lineare”) emerge in modo evidente dall’osservazione della traiettoria del ciclo limite per diversi valori di α :

**EFFETTO DI α SULLA FORMA DEL CICLO LIMITE;
BONTA' DELLA APPROSSIMAZIONE MEDIANTE FUNZ. DESCRITTIVA**



Al crescere di α il ciclo limite non sarà più una circonferenza, ma bensì una figura chiusa più complessa: questo perché per α che diverge, l'ampiezza delle armoniche di ordine superiore al primo (nel segnale in uscita al blocco non lineare) diventa sempre meno trascurabile.

La stabilità di detto ciclo limite può essere studiata al variare di A : per ampiezze $A > 2$, si osserva come la parte reale dei poli $\text{Re}(\lambda_{1,2})$ passi da 0 a valori minori di 0; questo significa che il sistema diventa asintoticamente stabile, per cui l'ampiezza dell'oscillazione tenderà a decrescere. Anche ipotizzando $A < 2$ si ottiene un risultato analogo: A tende a crescere e tende a 2. Non resta che prendere atto della stabilità del ciclo limite in corrispondenza di $A=2$.

3- Metodo della funzione descrittiva

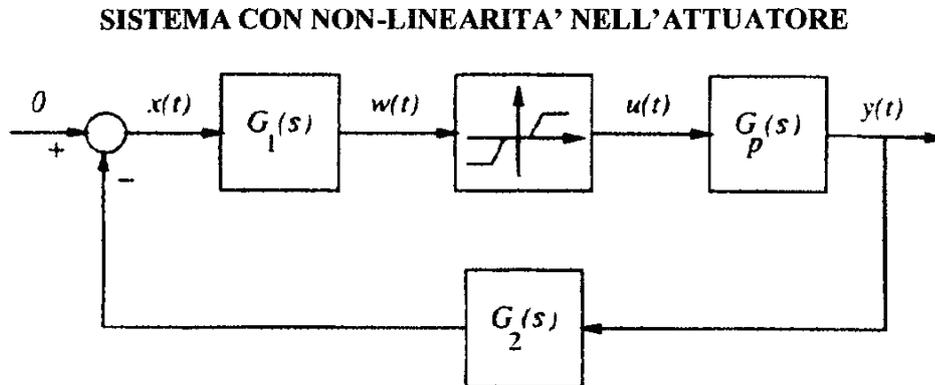
Il metodo della funzione descrittiva permette l'individuazione dei cicli limite e la valutazione della loro stabilità sia nell'ambito dei sistemi esplicitamente lineari sia in quello dei sistemi "quasi lineari". Questi ultimi corrispondono a quei sistemi di controllo di concezione idealmente lineare, ma che presentano elementi "pesantemente non lineari" (hard nonlinearities) nella realizzazione pratica: esempi comuni sono la saturazione negli attuatori o eventuali zone morte dei sensori.

Per l'applicazione della tecnica della funzione descrittiva è fondamentale "riassumere" le non linearità del sistema in un unico blocco della catena diretta permettendo così la verifica delle ipotesi del metodo della funzione descrittiva:

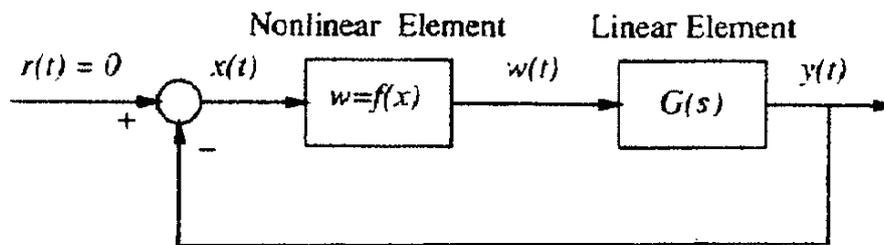
- Presenza di un unico elemento lineare:
ovvero la fattibilità di ridurre le non linearità ad un unico blocco
- Tempo invarianza dell'elemento non lineare:
ipotesi necessaria per l'applicazione del criterio di Nyquist sul quale si basa il metodo della funzione descrittiva. Verificata da un'ampia classe di sistemi di controllo.
- Filtering hypothesis:
l'elemento lineare deve avere proprietà filtranti passa-basso per rendere trascurabili le armoniche di ordine superiore ad uno dell'uscita del blocco non lineare e poter di conseguenza ricorrere all'approssimazione "quasi-lineare".
- Disparità dell'elemento non lineare:
la funzione che descrive il comportamento dell'elemento non lineare dev'essere dispari.
L'ipotesi ha scopo meramente semplificativo rendendo nullo il termine costante della serie di

Fourier.

Ad esempio, riferendosi ad un sistema di controllo contenente una hard nonlinearity (saturazione e zona morta) in corrispondenza dell'attuatore:



Esso viene rappresentato con le non linearità in un unico blocco



potendo così procedere alla verifica del soddisfacimento delle ipotesi del metodo della funzione descrittiva: è necessario che l'elemento $G(s)$ abbia proprietà filtranti passa-basso tali da rendere trascurabile l'effetto su $y(t)$ delle armoniche di ordine superiore ad uno del segnale $w(t)$ in modo da ricorrere all'approssimazione "quasi-lineare" dell'elemento $f(x)$.

In altre parole, detta ω la pulsazione della fondamentale di $w(t)$, deve essere verificata la seguente:

$$|G(j\omega)| \gg |G(jn\omega)| \quad \text{per } n=2,3,\dots$$

La tecnica della funzione descrittiva fa uso dello sviluppo in serie di Fourier del segnale in uscita dal blocco non lineare prendendo in considerazione, in virtù dell'ipotesi di filtraggio, solamente l'armonica fondamentale.

$$w(t) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)] \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} w(t) \cos(n\omega t) d(\omega t)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} w(t) \sin(n\omega t) d(\omega t)$$

$$\varphi(A, \omega) = \text{tg}^{-1} \frac{a_1}{b_1}$$

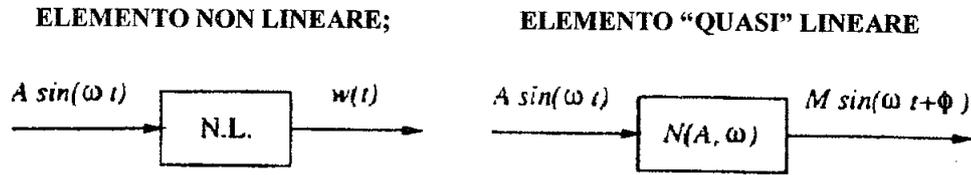
$$w(t) \approx a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t) = M \sin(\omega t + \varphi)$$

$$M(A, \omega) = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$$

Passando alla rappresentazione nel dominio dei numeri complessi:

$$w(t) \approx M e^{j(\omega t + \varphi)} = (b_1 + j a_1) e^{j \omega t}$$

la funzione descrittiva risulta:



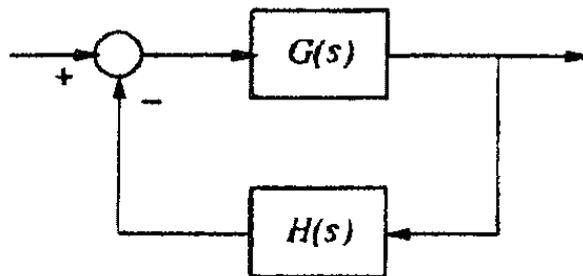
$$N(A, \omega) = \frac{M e^{j(\omega t + \varphi)}}{A e^{j \omega t}} = \frac{M}{A} e^{j \varphi} = \frac{b_1 + j a_1}{A}$$

Si noti come la funzione descrittiva (approssimazione lineare del blocco N.L.) sia dipendente dall'ampiezza A della sinusoide in ingresso.

Essa può essere calcolata per via analitica, quando è possibile calcolare gli integrali dei coefficienti a_1 e b_1 , oppure per via numerica, o ancora può essere ricavata dalla risposta dell'elemento non lineare a una sinusoide, variando quest'ultima sia in ampiezza che in frequenza.

4- Il criterio di Nyquist e la sua estensione

Prima di procedere con l'esposizione della estensione del criterio di Nyquist, è opportuno richiamare brevemente il metodo di applicazione di quest'ultimo allo studio della stabilità dei sistemi retroazionati lineari del tipo:

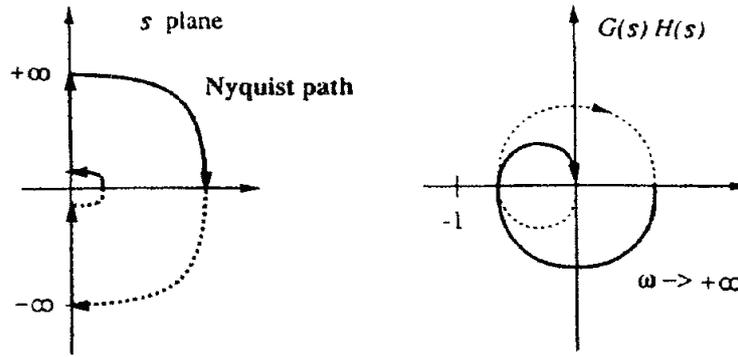


Il criterio di Nyquist discende direttamente dall'applicazione del teorema di Cauchy all'equazione caratteristica del sistema (si ricordi che le radici dell'equazione caratteristica sono anche i poli della funzione di trasferimento ad anello chiuso):

$$\delta(s) = 1 + G(s)H(s) = 0 \Rightarrow G(s)H(s) = -1$$

Equazione Caratteristica:

Si osservi la mappatura tramite $G(s)H(s)$ nel percorso di Nyquist che comprende il semipiano complesso $\{s: \text{Re}(s) \geq 0, \text{Im}(s) \neq 0\}$:



Nell' ipotesi che $G(s)H(s)$ non possieda poli e/o zeri sull'asse immaginario, vale la seguente:

$$Z = N + P$$

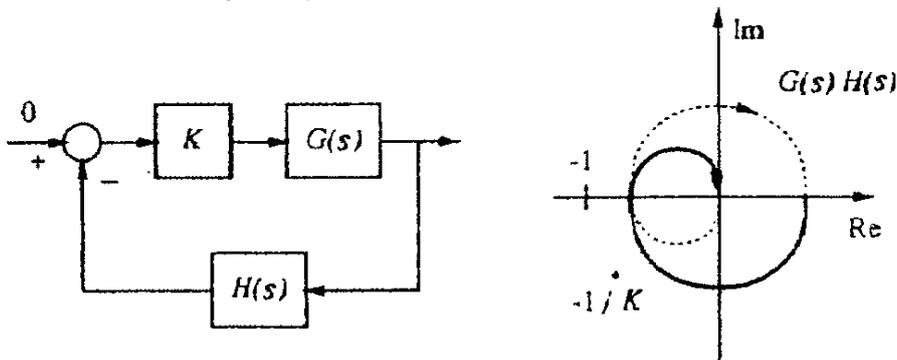
Dove:

Z = numero dei poli instabili del sistema closed loop: radici a parte reale positiva di $\delta(s)$;

N = numero di giri in senso orario attorno al punto $(-1,0)$;

P = numero di poli a parte reale positiva di $\delta(s)$;

Il criterio di Nyquist può essere facilmente esteso ai sistemi comprendenti un guadagno costante K (in generale K è un numero complesso) nella catena diretta:



L'equazione caratteristica diventa:

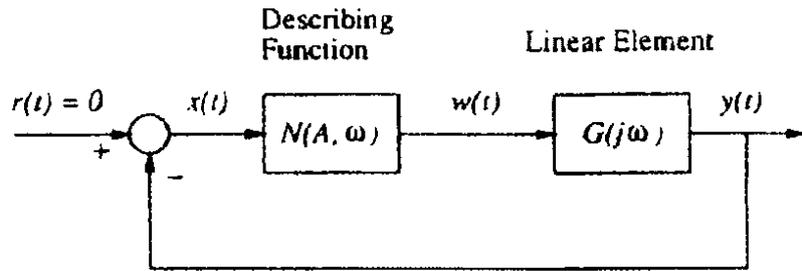
$$\delta(s) = 1 + KG(s)H(s) = 0 \Rightarrow G(s)H(s) = -\frac{1}{K}$$

Il criterio di Nyquist rimane sostanzialmente lo stesso, con l'unica differenza che in questo caso N rappresenta il numero di giri orari intorno al punto $(-1/K,0)$ anziché intorno a $(-1,0)$.

5- Ricerca dei cicli limite per via grafica

La ricerca dei cicli limite risulta semplificata dalla rappresentazione della funzione di trasferimento mediante diagramma di Nyquist.

Ad esempio, supponendo di avere un sistema di controllo nella forma:



per verificare l'esistenza di eventuali cicli limite, si traduce in formule la struttura closed loop ottenendo:

$$\begin{aligned} x &= -y \\ w &= N(A, \omega)x \\ y &= G(j\omega)w \end{aligned}$$

da cui si ricava:

$$y = G(j\omega)N(A, \omega)(-y)$$

con $y \neq 0$.

Perché sia presente un ciclo limite devono esistere un'ampiezza A e una pulsazione ω che soddisfino l'equazione

$$G(j\omega)N(A, \omega) + 1 = 0 \Rightarrow G(j\omega) = -\frac{1}{N(A, \omega)}$$

Separando parte reale e immaginaria si ottengono le equazioni:

$$\Re[G(j\omega)N(A, \omega) + 1] = 0$$

$$\text{Im}[G(j\omega)N(A, \omega) + 1] = 0$$

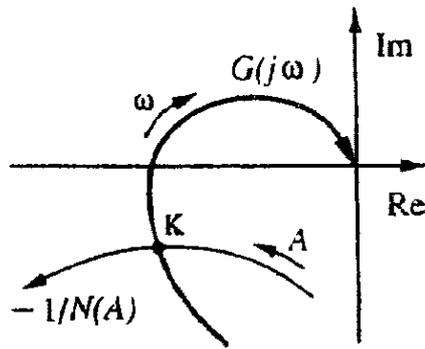
le cui radici non sempre sono facilmente calcolabili per via analitica: si preferisce la risoluzione per via grafica rappresentando $G(j\omega)$ e $-1/N(A, \omega)$ sul piano complesso, e individuando le intersezioni tra le due curve.

NOTA: quanto esposto vale per qualsiasi $N(A, \omega)$, tuttavia per motivi grafici nel seguito si farà riferimento solo a situazioni semplificate in cui $N(\cdot)$ dipende solo da A .

Ad esempio, considerando una funzione descrittiva indipendente dalla frequenza, ovvero $N(A, \omega) = N(A)$, l'equazione di esistenza del ciclo limite diventa:

$$G(j\omega) = -\frac{1}{N(A)}$$

Il grafico delle due funzioni, al variare di ω per la prima e di A per la seconda, risulta:



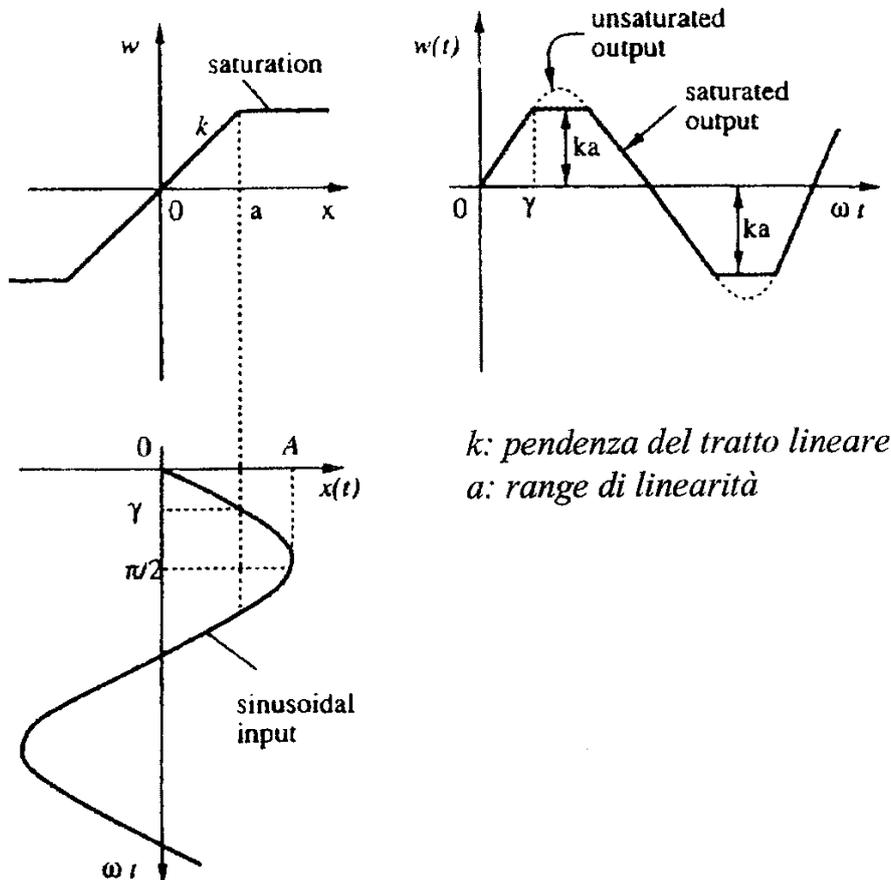
Dall'intersezione nel punto K si deduce che esiste un ciclo limite di pulsazione ω_k e ampiezza A_k .

6- Esempi di comuni non-linearità

Saturazione

E' una delle non linearità più frequenti localizzata soprattutto negli attuatori che, a causa di limitazioni fisiche, rispondono in uscita alle variazioni dell'ingresso purché l'ampiezza di quest'ultimo resti entro i limiti massimi prestabiliti dal costruttore. Qualora li eccedesse, l'ingresso non produrrebbe alcun effetto sull'uscita che rimarrebbe assestata al valore massimo.

COMPORAMENTO I/O DELL'ELEMENTO SATURANTE



Gli effetti della saturazione sulle prestazioni del sistema di controllo possono risultare complessi, per questo la funzione descrittiva associata risulta fondamentale per la determinazione di eventuali cicli limite.

Si supponga di avere un ingresso di tipo sinusoidale $x(t) = A \sin(\omega t)$. Per $A \leq a$ l'uscita segue l'ingresso e la funzione descrittiva è la costante k . Per $A > a$ invece l'uscita viene "tagliata" dalla saturazione; riferendosi al primo quarto di periodo dell'uscita si ha:

$$w(t) = \begin{cases} K A \sin(\omega t) & 0 \leq \omega t \leq \gamma \\ ka & \gamma < \omega t \leq \pi/2 \end{cases} \quad \text{Ove } \gamma = \sin^{-1} a/A$$

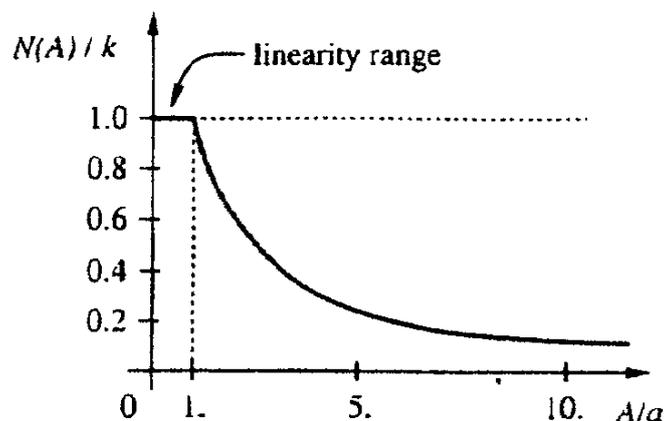
Poiché la funzione è dispari, il termine costante dello sviluppo in serie di Fourier sarà nullo, come anche il coefficiente del coseno di prima armonica ($a_1 = 0$). Il coefficiente del seno di prima armonica si può ricavare dall'espressione di $w(t)$:

$$b_1 = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} w(t) \sin(\omega t) d(\omega t) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\gamma} w(t) \sin(\omega t) d(\omega t) + \frac{4}{\pi} \int_{\gamma}^{\pi/2} ka \sin(\omega t) d(\omega t) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} ka \cdot \sin(\omega t) d(\omega t) = \frac{2kA}{\pi} \left[\gamma + \frac{a}{A} \sqrt{1 - \frac{a^2}{A^2}} \right]$$

E la funzione descrittiva $N(A)$ risultante è:

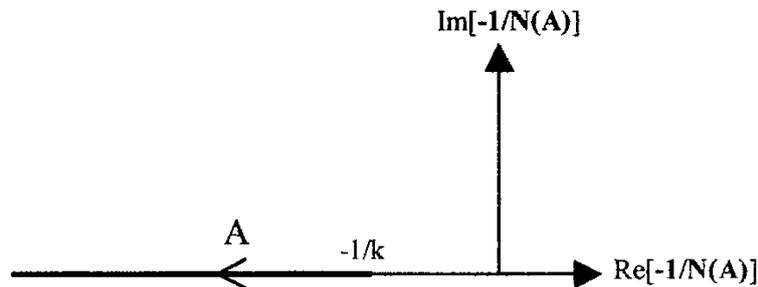
$$N(A) = \frac{b_1}{A} = \frac{2k}{\pi} \left[\sin^{-1} \frac{a}{A} + \frac{a}{A} \sqrt{1 - \frac{a^2}{A^2}} \right]$$

Il cui andamento (normalizzato) in funzione di A/a è rappresentato nel seguente grafico:



si nota chiaramente che, come era stato anticipato, per ampiezze contenute nel margine di idealità $N(A) = k$ mentre al di fuori di tale gamma di valori $N(A)$ tende a decrescere all'aumentare di A . Per quanto riguarda la fase, essa rimane invariata poiché la saturazione non introduce ritardi.

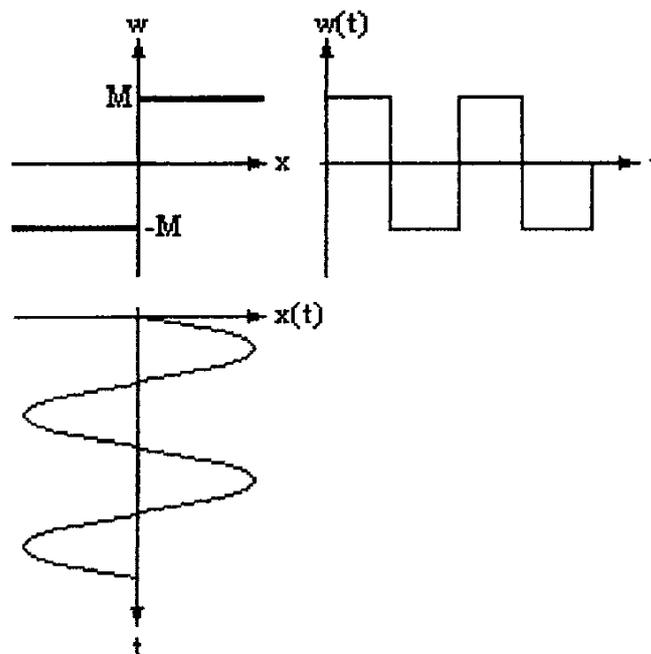
**RAPPRESENTAZIONE SUL PIANO
COMPLESSO DELLA FUNZIONE $-1/N(A)$, UTILE
PER L'INDIVIDUAZIONE DEI CICLI LIMITE**



Relè ideale

Può essere considerato come un caso estremo di saturazione priva di zona lineare. Presentano una pesante non idealità, come tutti i componenti aventi caratteristica on-off, ma sono molto spesso utilizzati come controllori “bang-bang” di processi difficilmente controllabili con metodi di controllo lineari. Un chiaro esempio è costituito dai “razzi di manovra” delle navette spaziali i quali sono controllati con la tecnica on-off piuttosto che da una regolazione continua. Inoltre è possibile dimostrare che tale controllore fa convergere tutte le traiettorie di stato verso l’origine in alcuni sistemi del secondo ordine.

COMPORAMENTO I/O DEL RELE' IDEALE

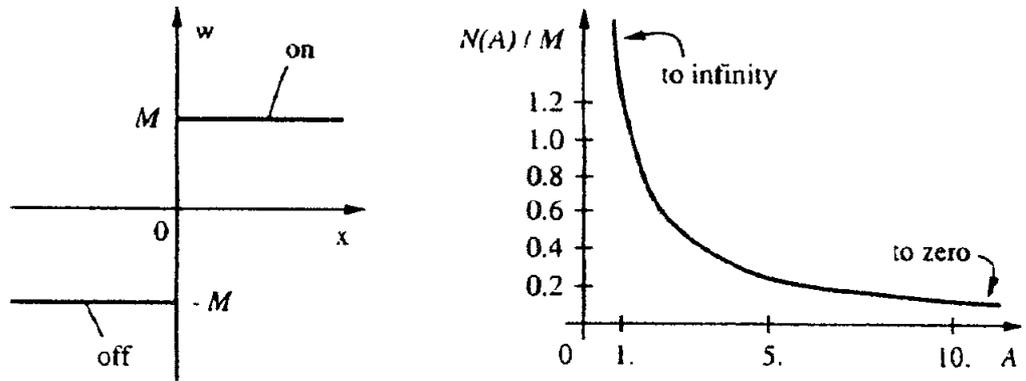


Ottenendo il coefficiente del seno di prima armonica con:

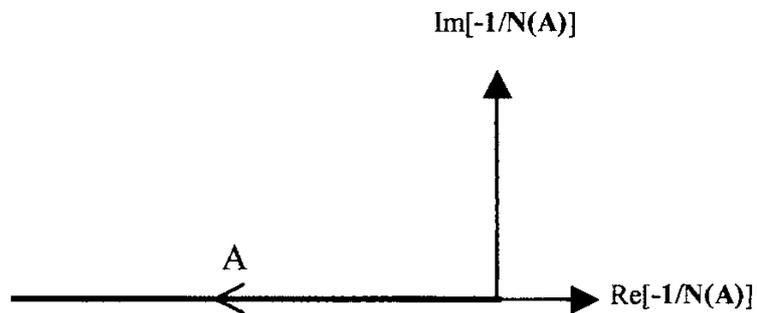
$$b_1 = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} M \sin(\omega t) d(\omega t) = \frac{4}{\pi} M$$

La funzione descrittiva risulta

$$N(A) = \frac{4M}{\pi A}$$



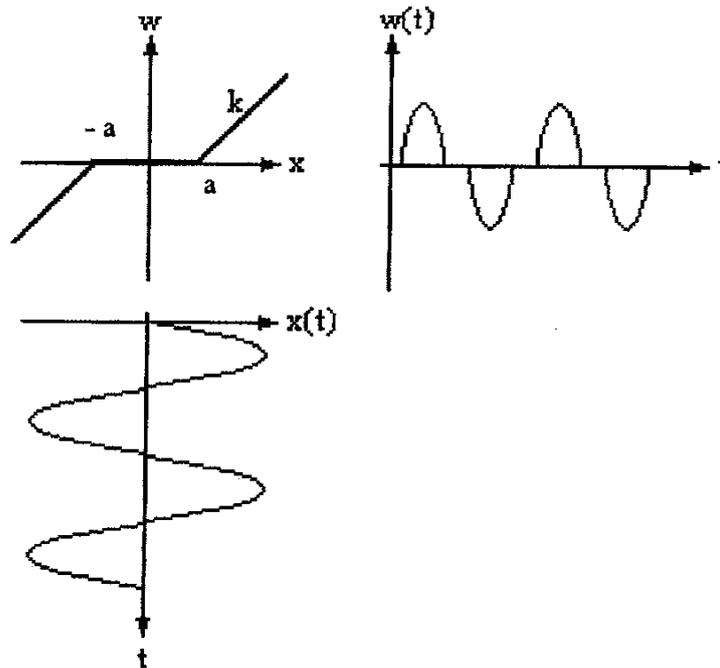
**ANDAMENTO DELLA FUNZ. $-1/N(A)$
SUL PIANO COMPLESSO**



Zona morta

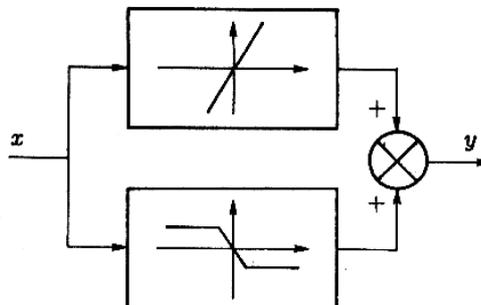
La zona morta è una non linearità dovuta al gioco nei sistemi meccanici che fa sì che l'uscita rimanga identicamente nulla finché l'ingresso ha ampiezza inferiore ad una certa soglia. Si può produrre come esempio un motore elettrico per il quale, finché la tensione di alimentazione non sarà sufficiente a vincere l'attrito statico, non si avrà spostamento angolare.

NON-LINEARITA' DI TIPO "DEAD-ZONE"



La zona morta viene sfruttata per l'eliminazione delle auto-oscillazioni (nella caratteristica reale dei relè è presente una zona morta) o dei disturbi di piccola ampiezza intorno allo zero.

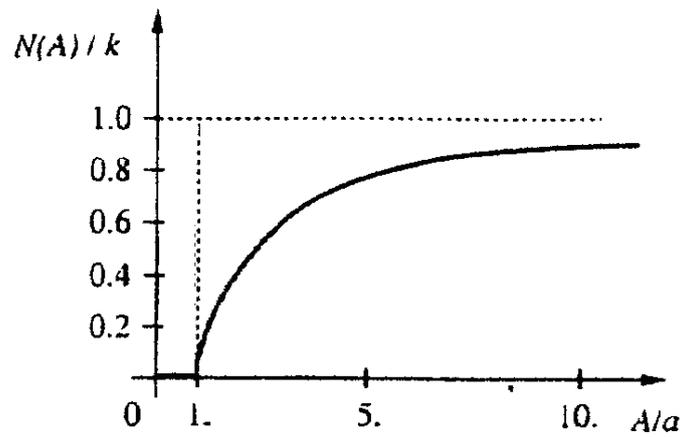
Per il calcolo della funzione descrittiva si sfrutta il fatto che un blocco "dead zone" può essere riprodotto con il parallelo di un blocco lineare e di una saturazione cambiata di segno:



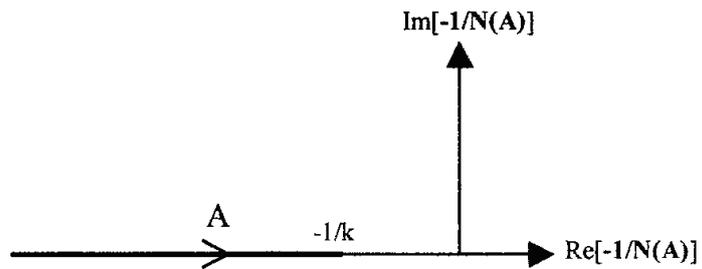
quindi, denotando con $\Phi(A/a)$ la funzione descrittiva della saturazione, la funzione descrittiva della zona morta è la seguente:

$$N(A) = \begin{cases} 0 & \text{per } A \leq a \\ k(1 - \Phi(\frac{A}{a})) & \text{per } A > a \end{cases}$$

Il cui andamento (normalizzato) in funzione di A/a è rappresentato nel seguente grafico:



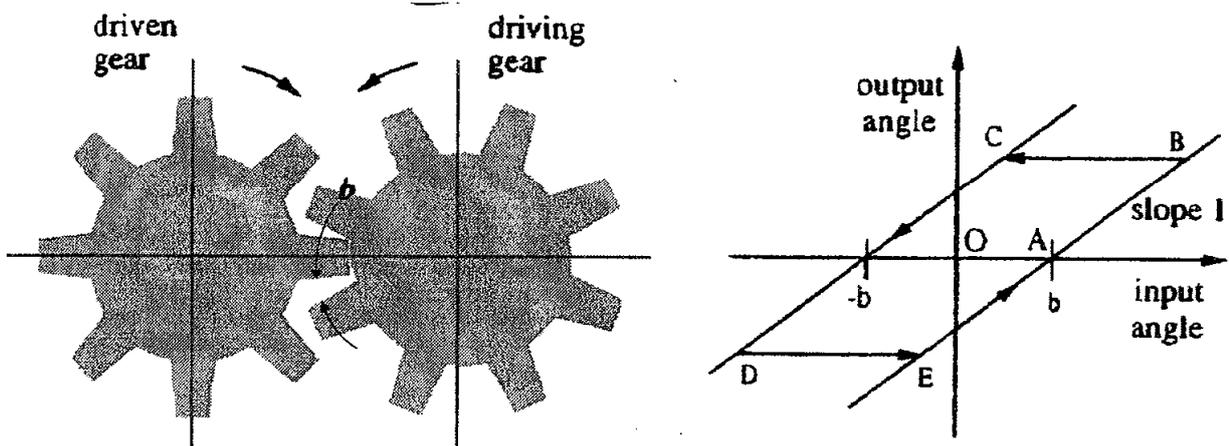
**ANDAMENTO DELLA FUNZ. $-1/N(A)$
SUL PIANO COMPLESSO**



Backlash

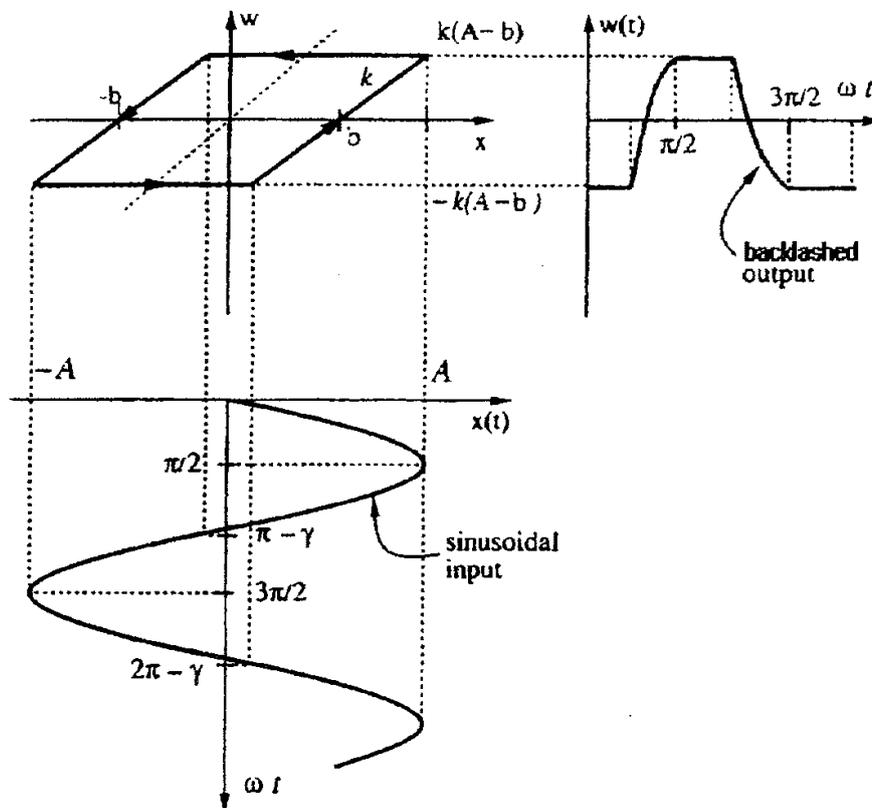
Il backlash è il gioco che esiste fra dente attivo e dente passivo di due ingranaggi per il semplice fatto che le tolleranze meccaniche non permettono di avere un accoppiamento perfetto. Ne risulta una pesante non-linearità che in un sistema closed loop può essere causa di instabilità ed auto-oscillazione.

BACKLASH NELL'ACCOPIAMENTO FRA RUOTE DENTATE



Esistono zone morte in tutti i sistemi meccanici di trasmissione che utilizzano ruote dentate e qualora queste siano sottoposte a moto periodico, si avrà un andamento grafico ad isteresi del legame ingresso-uscita dovuto alle due zone morte in corrispondenza dell'inversione di moto.

NON-LINEARITA' DI TIPO "BACKLASH"



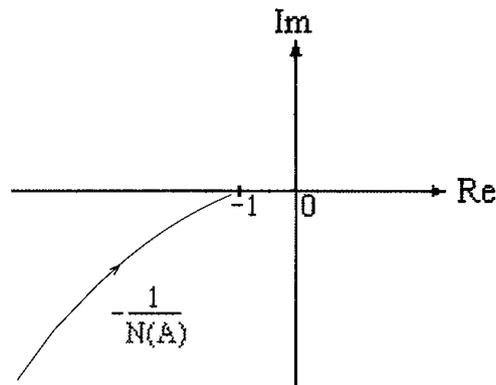
La funzione descrittiva risulta identicamente nulla per $A < b$, mentre per $A \geq b$ si ha:

$$\Re N(A) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} + \arcsin(1 - 2b/A) \right]$$

$$\Im N(A) = -\frac{4b}{\pi A} \left(1 - \frac{b}{A} \right)$$

Che dà il seguente grafico:

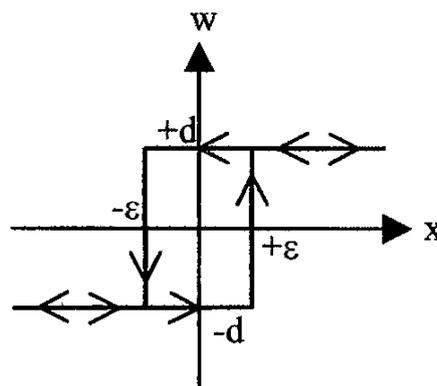
**ANDAMENTO DELLA FUNZ. $-1/N(A)$
SUL PIANO COMPLESSO**



Relè con isteresi

I dispositivi a soglia del tipo “trigger di Schmidt” sono descritti da una caratteristica I/O includente il classico “ciclo d’isteresi”

ISTERESI “TRIGGER DI SCHMIDT”

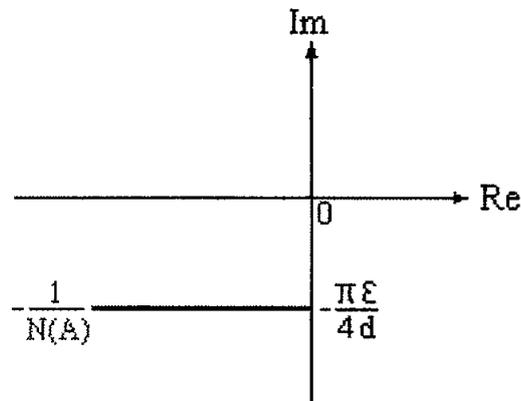


Questo tipo di non linearità è utilizzato nella procedura di autotuning dei controllori PID mediante identificazione in linea dei parametri.

Se $\pm d$ sono i livelli di uscita del relè, segue dallo sviluppo in serie di Fourier che la prima armonica della forma d’onda in uscita dal relè avrà ampiezza $4d/\pi$ ed uno sfasamento ϕ . La funzione descrittiva $N(A)$ risulta quindi data da:

$$N(A) = \frac{4d}{\pi A} (\cos\phi - j\sin\phi) \qquad \sin\phi = \frac{\varepsilon}{A}$$

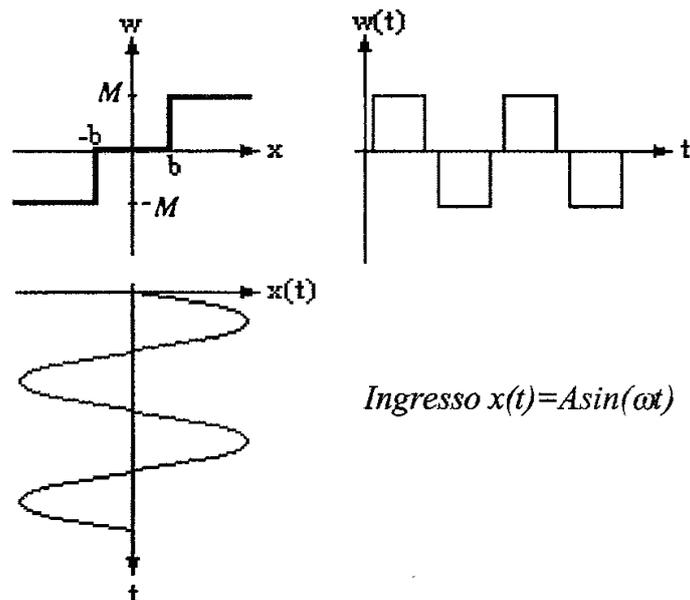
$$-\frac{1}{N(A)} = -\frac{\pi}{4d}\sqrt{A^2 - \varepsilon^2} - j\frac{\pi\varepsilon}{4d}$$



Relè con zona morta

Il relè con zona morta previene eventuali auto-oscillazioni indesiderate del relè ideale nell'intorno dello zero. La sua utilizzazione è molto vasta (ad esempio per il controllo della temperatura negli ambienti chiusi). Si supponga di inviare in ingresso alla non linearità un segnale sinusoidale con ampiezza $A > b$.

RELE' CON ZONA MORTA



Lo scatto nell'uscita della non linearità si avrà quando:

$$A \sin(\alpha) = b$$

quindi:

$$\alpha = \arcsin \frac{b}{A}$$

All'aumentare dell'ampiezza A del segnale sinusoidale d'ingresso, la larghezza degli impulsi in uscita aumenta; l'allargamento massimo si ha per $A \rightarrow \infty$.

Poichè il segnale d'ingresso è a simmetria dispari, nello sviluppo in serie di Fourier saranno nulli il termine costante e i coefficienti a_n dei coseni. Ricavando il coefficiente del seno di prima armonica dall'uscita $w(t)$ si ottiene:

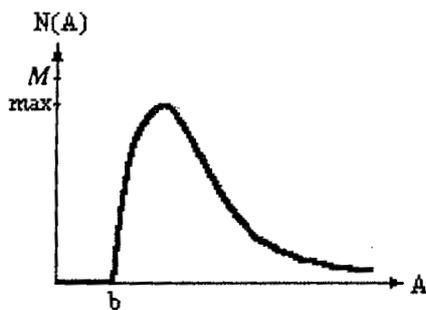
$$b_1 = \frac{4}{\pi} \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} M \sin(\omega t) d(\omega t) = \frac{4M}{\pi} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}}$$

la funzione descrittiva risulta pertanto:

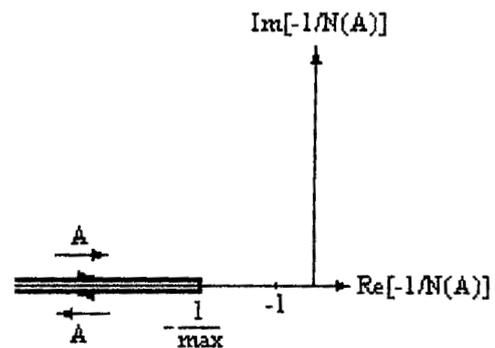
$$N(A) = \begin{cases} 0 & A < b \\ \frac{4M}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}} & A \geq b \end{cases}$$

Osservando che per $A < b$ l'uscita $w(t)$ rimane stabile a zero, mentre per $A \rightarrow \infty$ il dispositivo assume il comportamento di un relè ideale e $w(t)$ si presenta come un'onda quadra con $b_1 = 4M/\pi$, si ottiene il grafico di $N(A)$:

FUNZ. DESCRITTIVA DEL RELE' CON ZONA MORTA



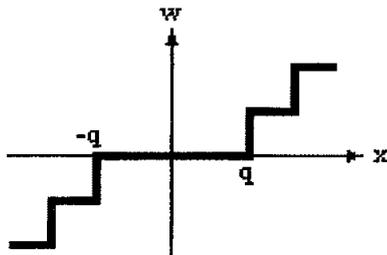
ANDAMENTO DI $-1/N(A)$ SUL PIANO COMPLESSO



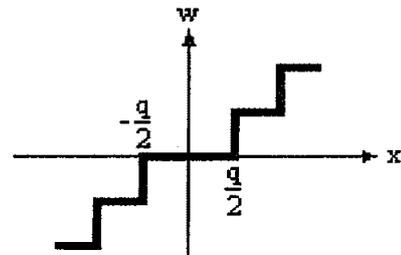
Quantizzazione

La quantizzazione è una non linearità presente in tutti i sistemi di controllo digitali: i segnali devono essere discretizzati in ampiezza per ottenere un numero finito di livelli e realizzare la conversione da analogico a digitale.

TRONCAMENTO SIMMETRICO



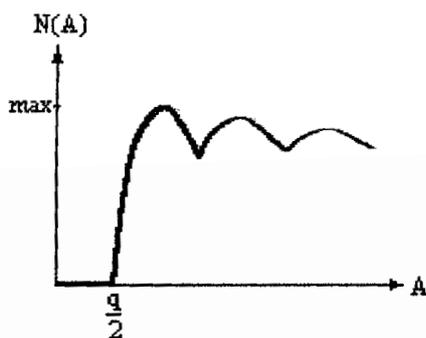
ARROTONDAMENTO



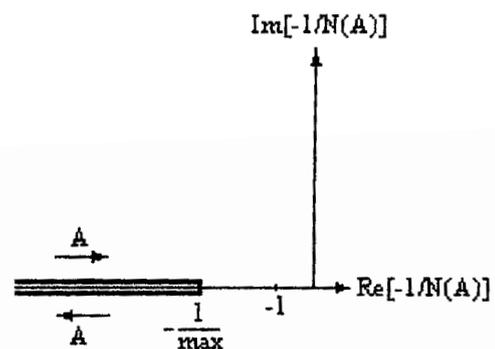
Con un procedimento che ricalca quello utilizzato per il relè con zona morta si ottiene la seguente funzione descrittiva:

$$N(A) = \begin{cases} 0 & A < \frac{q}{2} \\ \frac{4q}{\pi A} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 - \left(\frac{2i-1}{2A}q\right)^2} & \frac{2n-1}{2}q < A < \frac{2n+1}{2}q \end{cases}$$

FUNZ. DESCRITTIVA

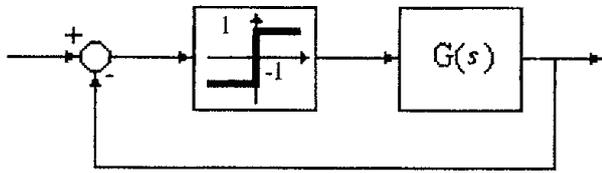


ANDAMENTO DI $-1/N(A)$ SUL PIANO COMPLESSO



Esempio di ricerca dei cicli limite con metodo grafico

Nell'esempio seguente sarà svolta la ricerca dei cicli limite applicando il metodo grafico a un sistema di controllo basato su controllore non lineare: un relè ideale.

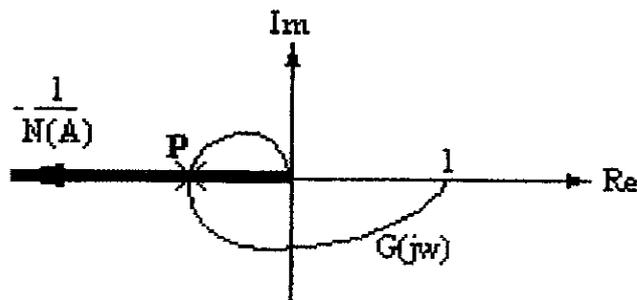


$$G(s) = \frac{6}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

Prendendo in considerazione la funzione descrittiva dell'elemento non lineare $N(A)$, si ricercano le radici dell'equazione

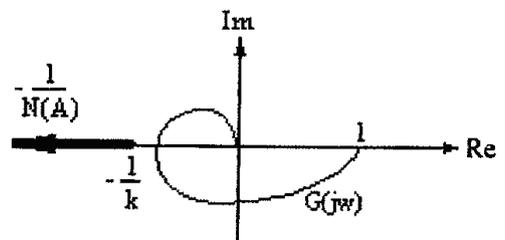
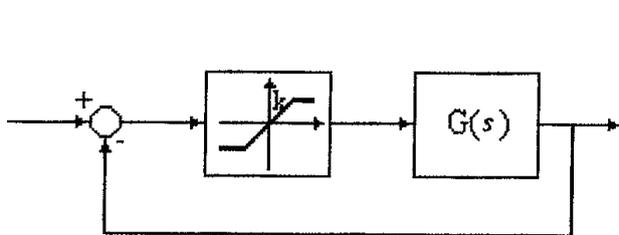
$$G(j\omega) = -\frac{1}{N(A, j\omega)}$$

La ricerca per via grafica sul piano complesso conduce al seguente:



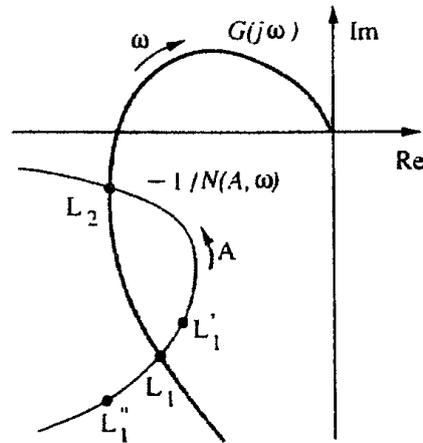
l'intersezione in P rivela l'esistenza di un ciclo limite, la cui ampiezza e frequenza possono essere determinate con precisione per via analitica.

Sostituendo nel sistema di controllo il relè con una saturazione di pendenza k si può notare che l'esistenza di un ciclo limite risulta vincolata al valore della costante k . Infatti, per k sufficientemente piccolo, il punto $-1/k$ viene a trovarsi all'esterno della curva di $G(j\omega)$; non c'è intersezione e il ciclo limite non è presente.



7- Analisi di stabilità dei cicli limite con il metodo grafico

Data una rappresentazione grafica alla funzione di trasferimento del processo $G(j\omega)$ unitamente a quella della funzione $-1/N(A,\omega)$ dove $N(A,\omega)$ è la funzione descrittiva dell'elemento non lineare



le due intersezioni nei punti L_1 e L_2 denotano la presenza di due cicli limite di ampiezza e pulsazione rispettivamente A_1, ω_1 e A_2, ω_2 .

Se il sistema si trovasse inizialmente a operare nel punto L_1 e, a causa di un disturbo esterno, l'ampiezza A dovesse aumentare, il sistema passerebbe al punto di lavoro L_1' che risulta essere, per il criterio di Nyquist, un punto di instabilità in quanto "circondato" dal tracciato di $G(j\omega)$. Questo significa che il punto di lavoro si sposterà lungo il tracciato di $-1/N(A,\omega)$ nella direzione delle ampiezze crescenti fino a raggiungere il ciclo limite in L_2 .

Al contrario, se da L_1 l'ampiezza A cominciasse a diminuire il punto di lavoro uscirebbe dalla curva $G(j\omega)$ (punto L_1'') e l'ampiezza dell'oscillazione continuerebbe a decrescere conferendo stabilità al sistema.

Appare evidente che una qualsiasi variazione di A dal valore A_1 porta il sistema ad allontanarsi sempre più dal ciclo limite in L_1 : questo risulta perciò un ciclo limite instabile.

L_2 è invece un ciclo limite stabile: infatti una diminuzione dell'ampiezza porta il sistema verso l'instabilità, ma questo farà di nuovo aumentare A riportando il sistema in L_2 ; mentre una variazione positiva di A verrà immediatamente compensata per effetto della stabilità.

8- Affidabilità dell'analisi mediante funzione descrittiva

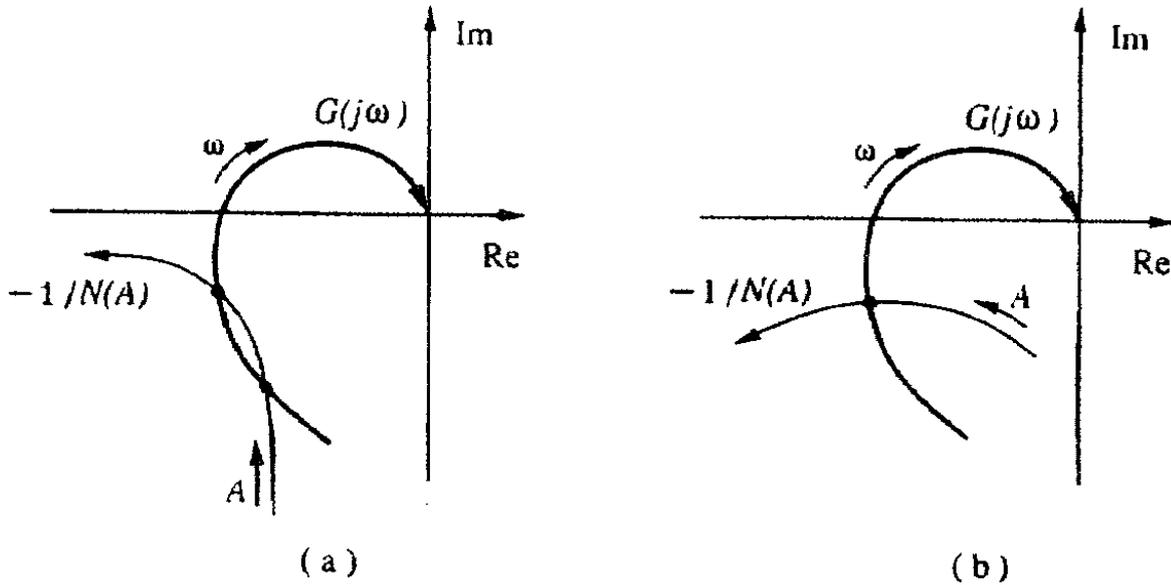
Il metodo della funzione descrittiva è un metodo approssimato che non offre conclusioni precise e in qualche caso può fornire indicazioni molto distanti dalla realtà. Queste incertezze sono dovute sia al grado di soddisfacimento delle ipotesi di applicabilità (in particolar modo la "filtering hypothesis"), sia al carattere grafico del metodo:

- VIOLAZIONE DELLA FILTERING HYPOTHESIS:

Il metodo della funzione descrittiva si basa sull'ipotesi che l'elemento lineare $G(j\omega)$ sia tale da rendere di ampiezza trascurabile tutte le armoniche di ordine superiore al primo del segnale in ingresso, funzionando in pratica da filtro passa basso. Se questo nella realtà non è sufficientemente verificato, ci saranno conseguenze negative sulla attendibilità della previsione dei cicli limite.

• **PROBLEMI DI NATURA GRAFICA:**

Quello che caratterizza i metodi grafici sono grande praticità e semplicità, ma a questi vantaggi si contrappone l'imprecisione dei risultati, che in certe situazioni può risultare critica. Ad esempio prendendo in considerazione la figura:



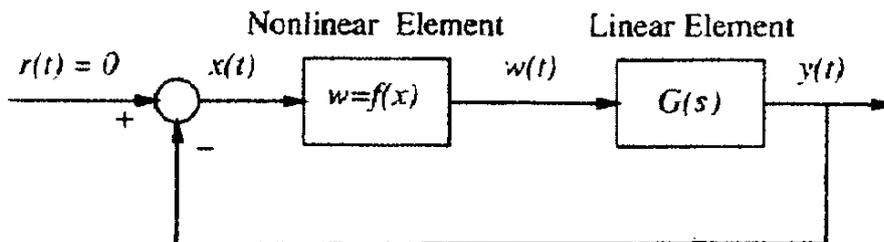
Il caso (a) risulta problematico in quanto le due curve sono quasi tangenti: non è possibile stabilire con certezza se esistano due, uno (tangenza vera e propria) o nessun punto di incrocio fra i due tracciati. Molto più affidabile è la conclusione che si può trarre dal grafico (b) nel quale le due curve sono localmente quasi perpendicolari.

Soluzioni molto più precise possono essere ottenute per via numerica grazie alla simulazione del sistema non lineare. Infatti, per evitare di prevedere cicli limite in realtà inesistenti o scoprire l'esistenza di cicli limite non identificati precedentemente, conviene sottoporre comunque a sperimentazione tutti i risultati dell'analisi grafica.

9- Criterio del cerchio (ridotto)

La verifica della stabilità può essere condotta mediante tecniche molto più affidabili di quanto non sia il metodo della funzione descrittiva: una di queste è il cosiddetto "criterio ridotto del cerchio", che tuttavia costituisce "solo" condizione necessaria ma non sufficiente.

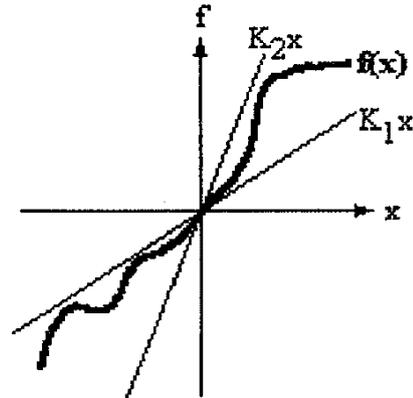
Dato il sistema di figura, con $f(\cdot)$ unico elemento non lineare:



l'applicabilità del criterio ridotto del cerchio presuppone il soddisfacimento di tre ipotesi:

- Esistenza di due numeri reali K_1 e K_2 tali che:

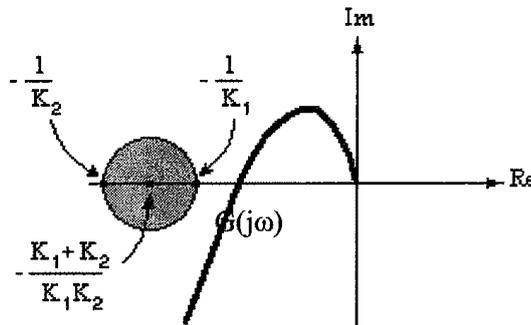
$$K_2 < \frac{f(x)}{x} < K_1$$



- $f(0) = 0$
- $G(s)$ BIBO stabile.

Se tali ipotesi sono verificate è possibile procedere con la rappresentazione grafica di $G(j\omega)$ nel piano complesso per studiarne le intersezioni con il “cerchio”:

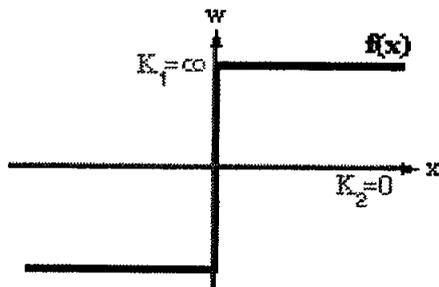
IL CRITERIO DEL CERCHIO



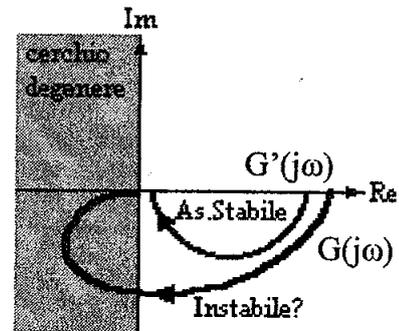
In assenza di intersezioni tra i due tracciati il criterio del cerchio garantisce la stabilità asintotica, mentre nulla si può dire in caso di intersezione (condizione necessaria ma non sufficiente).

Segue un esempio dell'applicazione del metodo del cerchio nel caso in cui il regolatore sia un relè ideale; in questo caso le due rette di "delimitazione" della curva della funzione non lineare assumono pendenze estreme:

RELE' IDEALE



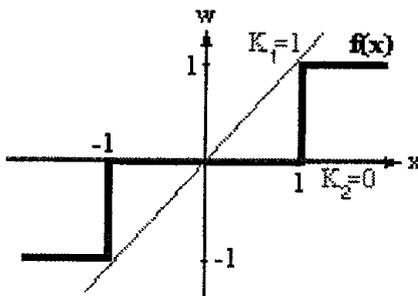
RELE' IDEALE: ESEMPIO DI APPLICAZIONE DEL METODO DEL CERCHIO



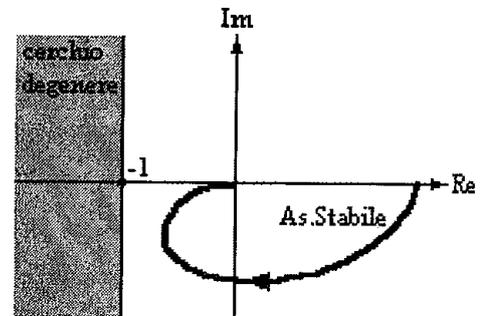
Se per quanto riguarda la funzione $G'(j\omega)$ si può constatare con assoluta certezza la stabilità asintotica del sistema closed loop, altrettanto non si può dire per $G(j\omega)$ il cui grafico passa per il semipiano $\text{Re}(s) < 0$ (cerchio degenere).

Si noti come l'utilizzo di un relè con zona morta potrebbe risolvere l'incertezza riguardo alla stabilità del sistema avente $G(j\omega)$ come elemento lineare:

RELE' CON ZONA MORTA



ESEMPIO DI APPLICAZIONE DEL CRITERIO DEL CERCHIO



10- Simulazione

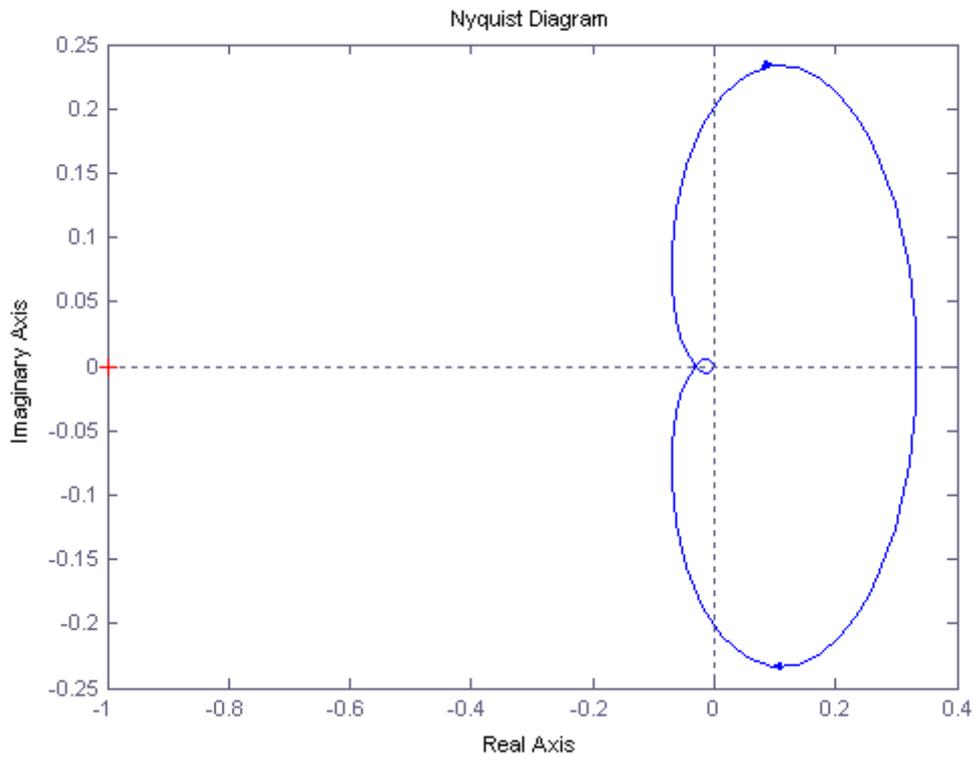
Per un'analisi più accurata degli effetti dei cicli limite sono state effettuate delle simulazioni al calcolatore.

Relè ideale

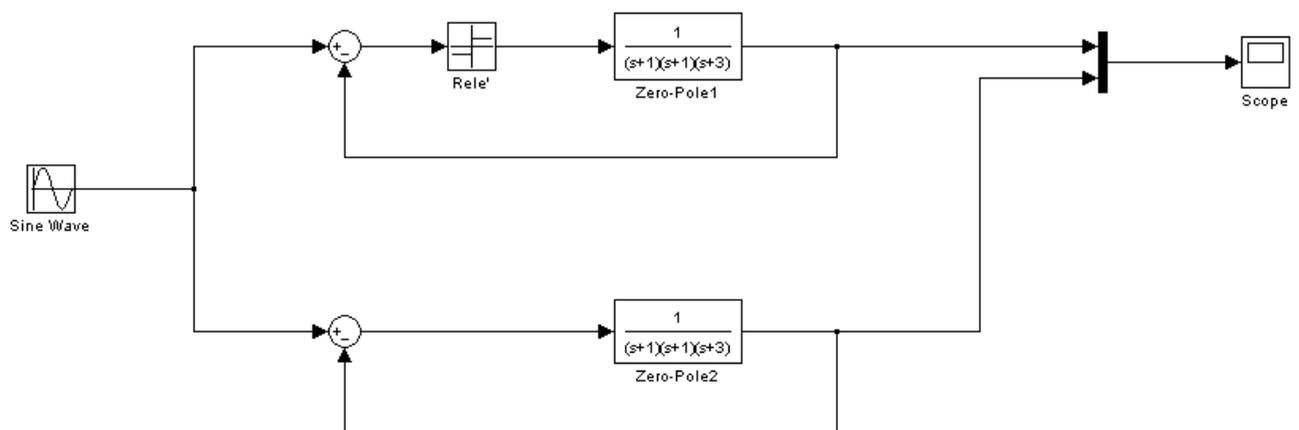
E' stato fatto riferimento alla funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{1}{(s + 1)^2(s + 3)}$$

Il cui diagramma di Nyquist risulta:

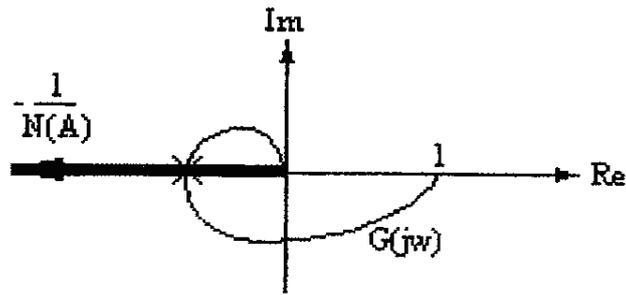


E' stato quindi costruito il seguente sistema inserendo prima della funzione di trasferimento un relè ideale unitario:

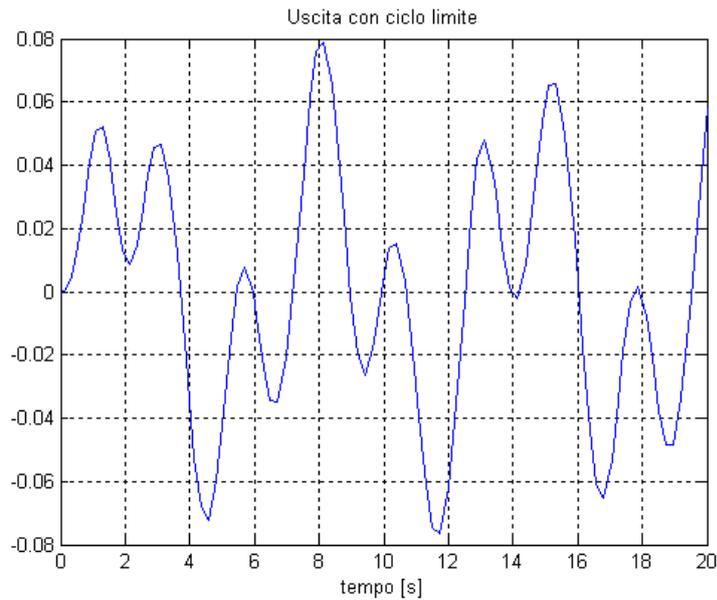


e si è aggiunto un secondo anello di retroazione privo di non linearità per operare il confronto.

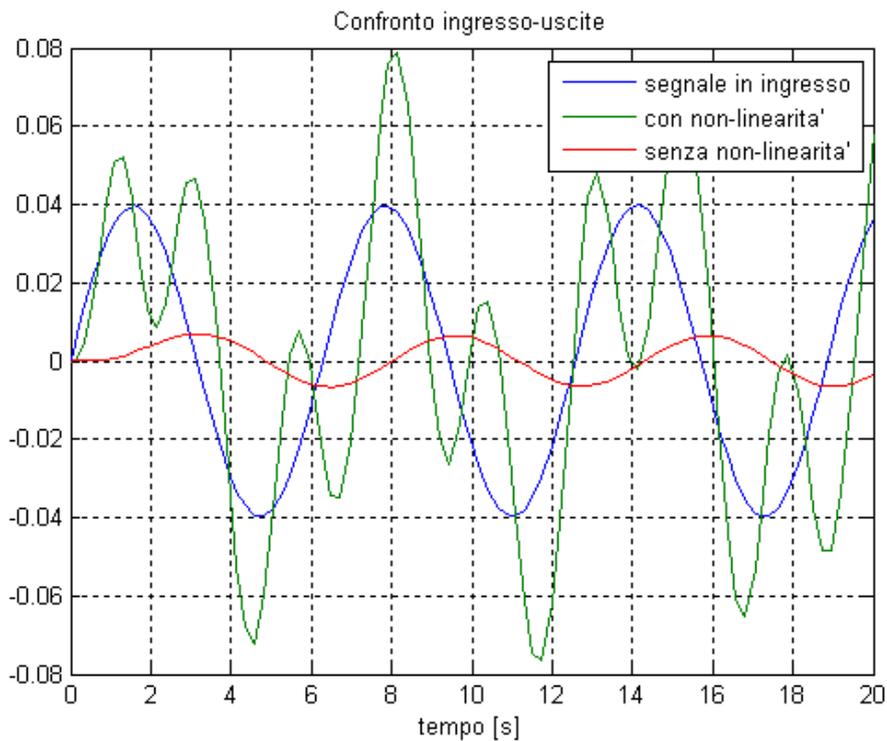
Il punto d'intersezione tra $-1/N(A)$ e la curva di $G(s)$ si trova in $(-1/32, 0)$, dove l'ampiezza A vale $1/8\pi$.



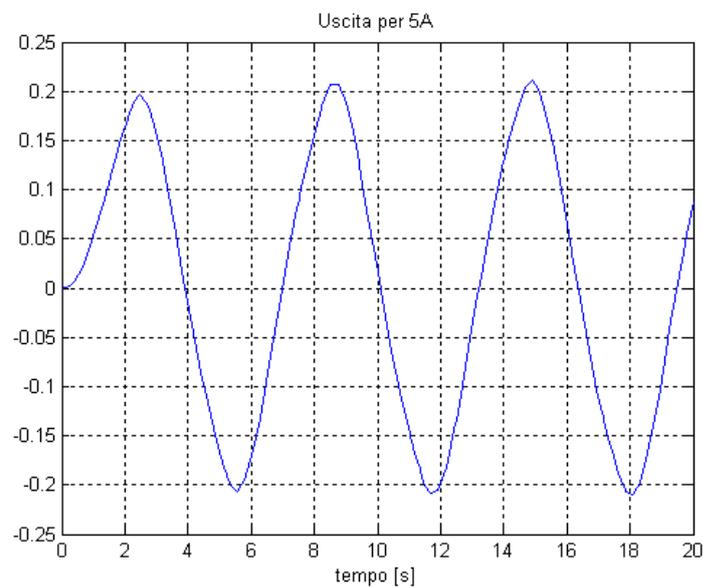
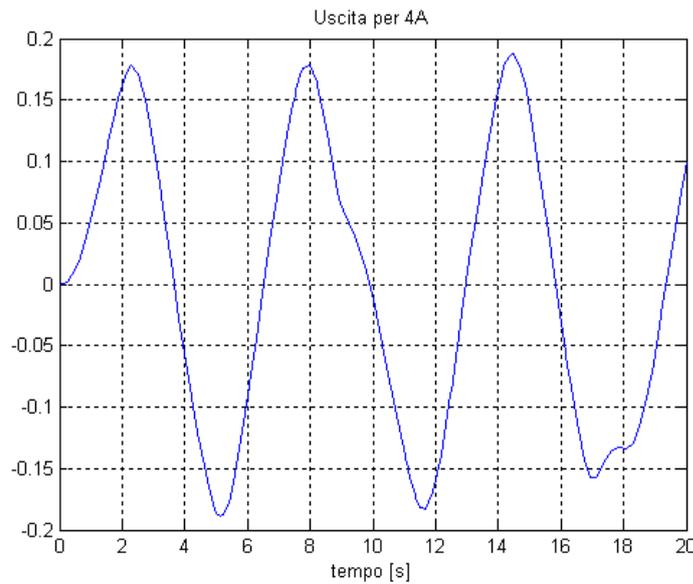
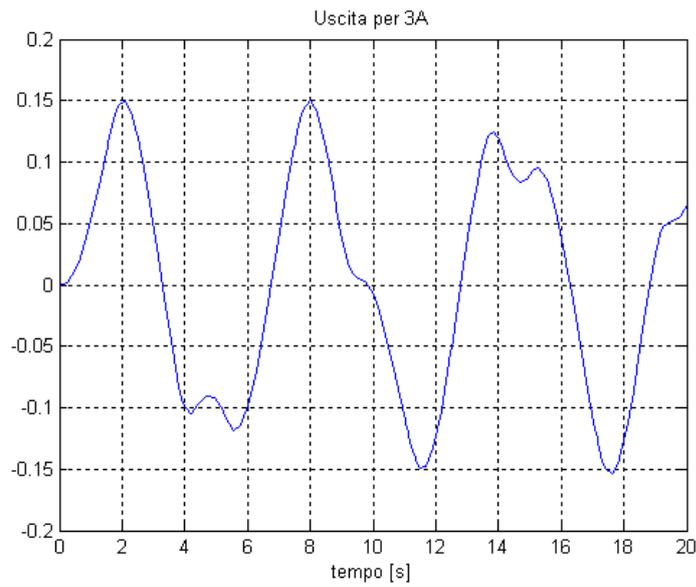
Il sistema è stato eccitato mediante una sinusoide di ampiezza pari a quella del ciclo limite. Si è ottenuta la seguente uscita:



Dal confronto con l'uscita del sistema senza non linearità emerge chiaramente come il ciclo limite distorca il segnale aggiungendo oscillazioni permanenti di ampiezza limitata:



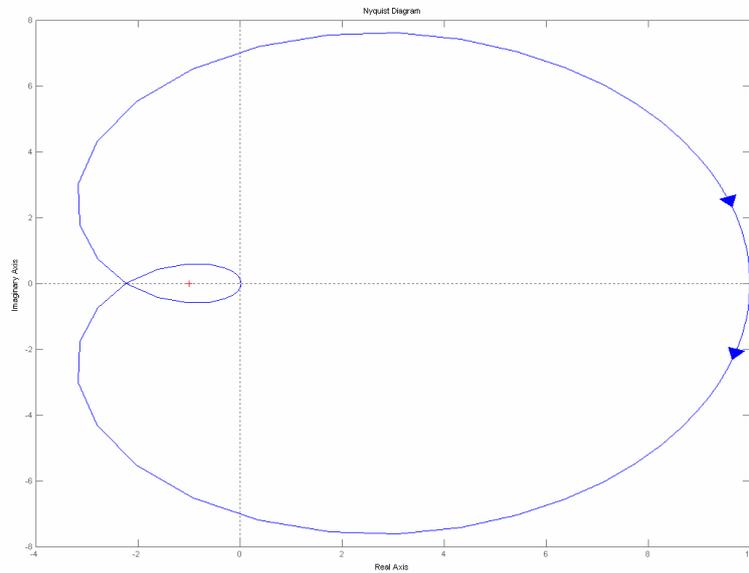
All'aumentare dell'ampiezza A della sinusoide in ingresso (allontanandosi dal punto di intersezione con la curva di $G(s)$) l'effetto del ciclo limite si attenua fino a non esser più significativo:



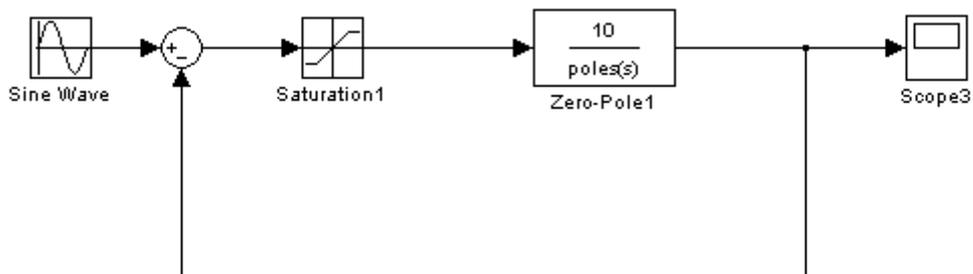
Saturazione

Per la seconda simulazione si è fatto riferimento alla funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{10}{(s+1)^2(0.5s+1)^2}$$

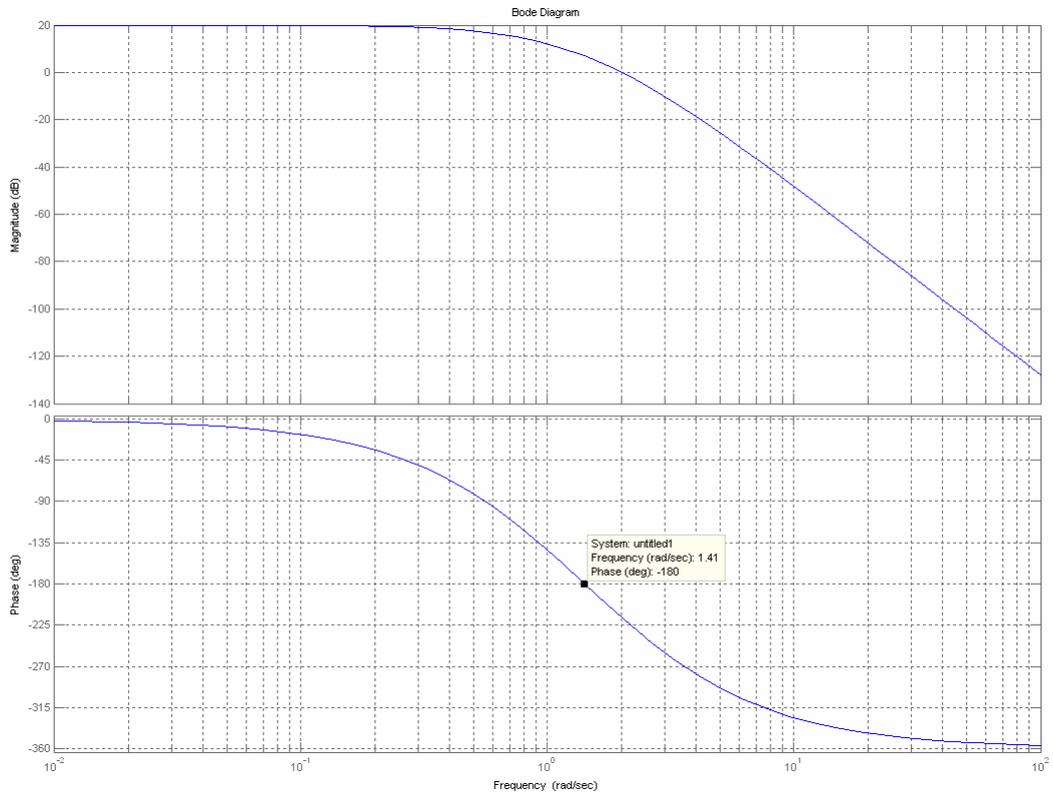


e si è costruito un anello di retroazione con saturazione di ampiezza unitaria.

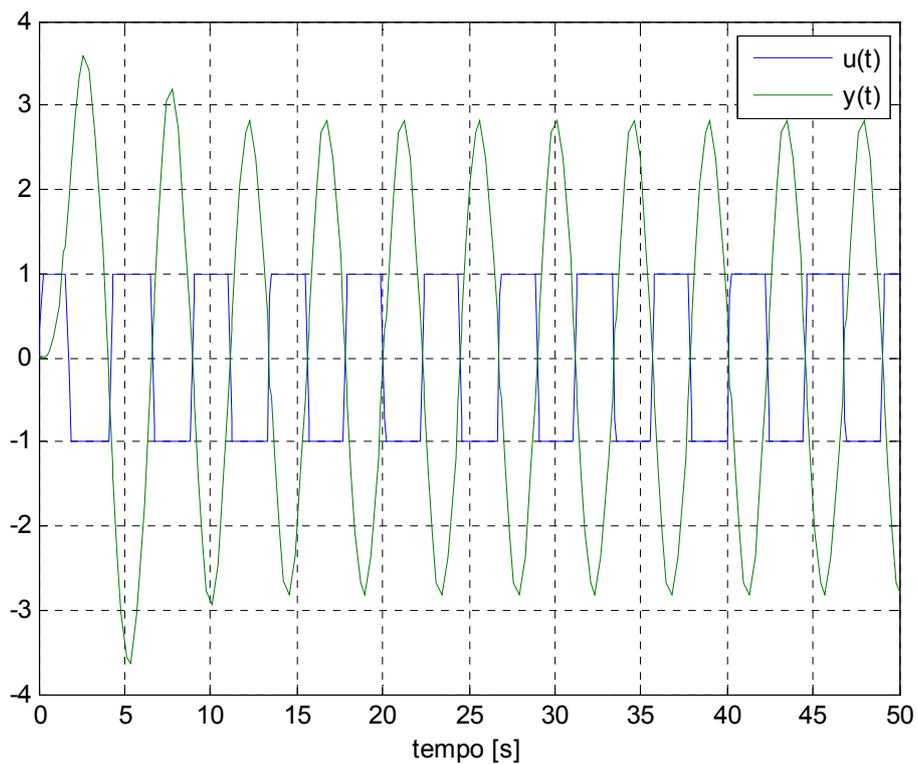


Con lo stesso procedimento utilizzato nell'esempio precedente si è ottenuto $A=2.8$.

Analizzando il diagramma di Bode di $G(s)$ si può ricavare anche la pulsazione del ciclo limite che in questo caso risulta essere $\omega=1.41$ rad/s

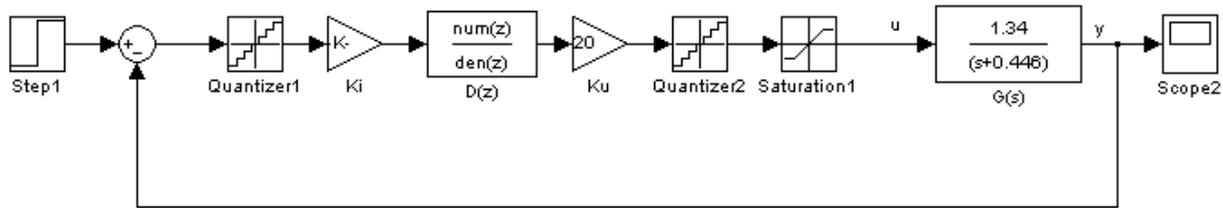


I parametri appena trovati sono stati imposti alla sinusoida in ingresso, che risulterà sovrapposta alle oscillazioni permanenti del ciclo limite, come si nota dall'uscita del blocco di saturazione $u(t)$ e della funzione di trasferimento $y(t)$:



Quantizzazione

Per un esempio più complesso ci si può riferire allo schema dato da:



dove $y(t)$ è l'uscita analogica del trasduttore ed $u(t)$ è il comando all'ingresso del processo da controllare. $D(z)$ è una funzione di trasferimento discreta con guadagno statico unitario in catena chiusa e poli in 0.3 e $0.5 \pm j0.3$.

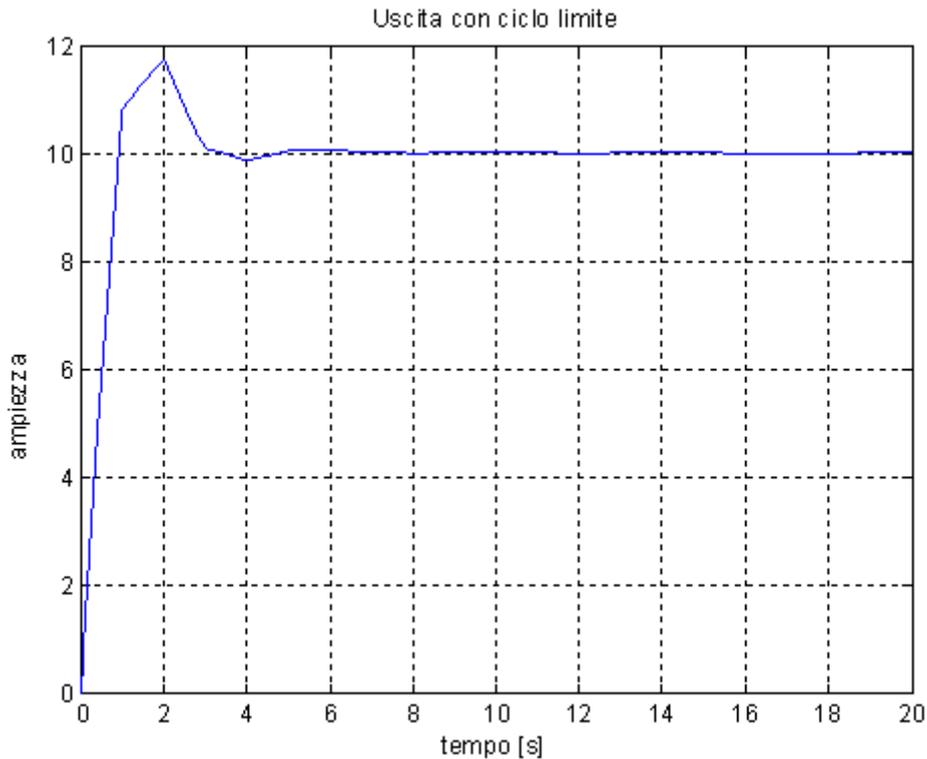
Il DAC è supposto non possa fornire una tensione di uscita al di fuori dell'intervallo $\pm 10V$, quindi è stato introdotto un blocco di saturazione con i limiti di ± 10 .

Imponendo un errore a regime della risposta a gradino non inferiore all'1%, ADC e DAC dovranno avere risoluzione dello 0.1% (10 bit: 9bit+segno).

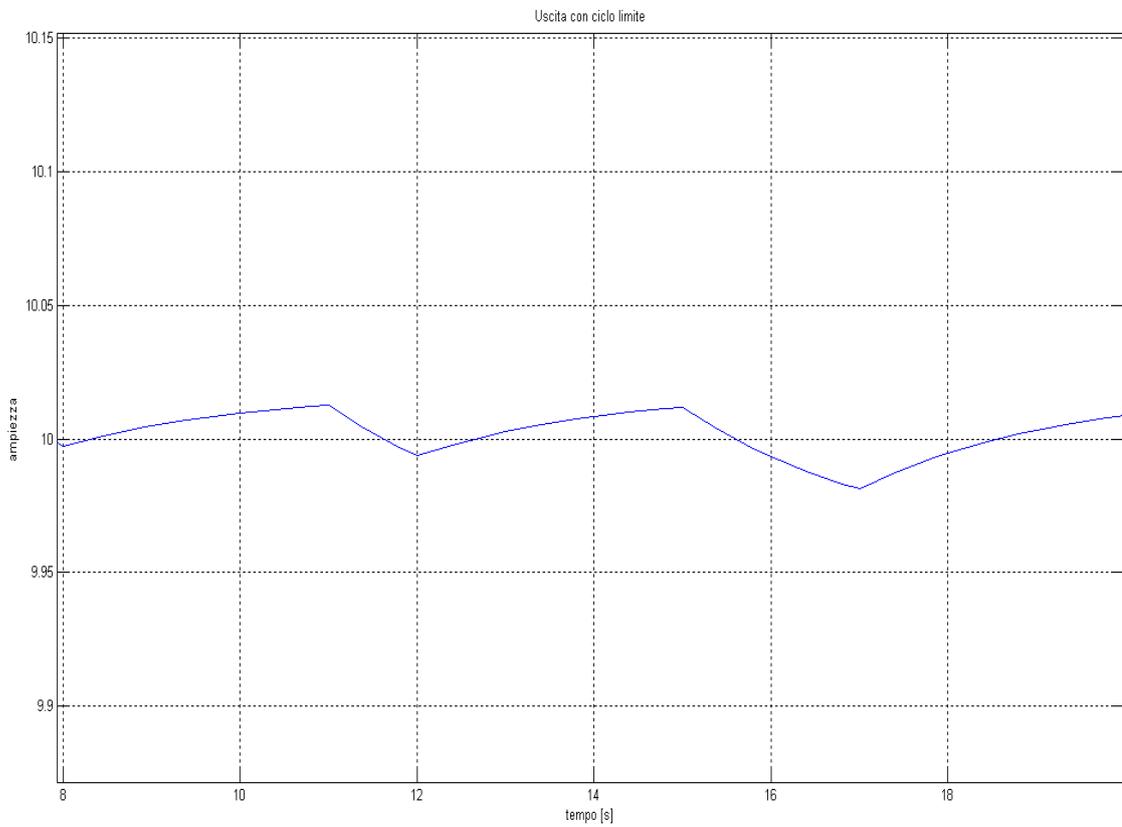
$$q_i = q_u = 20/2^{10} = 19.5mV$$

Con questa scelta $K_i = 1/20$ e, affinché il guadagno rimanga quello della $D(z)$, $K_u = 20$.

L'uscita $y(t)$ in risposta ad un gradino di $10V$ risulta:



Il ciclo limite sembra non esserci, ma se operiamo un ingrandimento le oscillazioni si vedono chiaramente: a regime l'uscita oscilla attorno al valore medio di 10 V con un ciclo limite di ampiezza circa ± 10 mV dovuto alla non linearità della quantizzazione.



La presenza del ciclo limite, anche se di piccola ampiezza, è quindi confermata dalle simulazioni.