

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE, EDILE ED AMBIENTALE

Department of Civil, Environmental and Architectural Engineering

Corso di Laurea Triennale in Ingegneria Civile



TESI DI LAUREA

Analisi limite di strutture in acciaio

Relatore: PROF. PAOLO ZAMPIERI

Laureando: MORETTO GIACOMO

ANNO ACCADEMICO 2021-2022

Indice:

Introduzione	5
Capitolo 1: Cenni storici	7
1.1 Storia dei materiali	7
1.2 La determinazione delle tensioni e della stabilità	9
1.3 Analisi strutturale	10
1.4 Analisi plastica	11
Capitolo 2: La plasticità	13
2.1 Generalità	13
2.2 Legame tensioni-deformazioni	14
2.3 Metodi plastici di analisi strutturale	16
2.4 Formazione cerniere plastiche	16
Capitolo 3: Analisi limite	21
3.1 Descrizione	21
3.2 Ipotesi	21
3.3 Teoremi	22
Capitolo 4: Applicazione Analisi limite	27
4.1 Esempio 1: Trave soggetta a carichi concentrati	27
4.2 Esempio 2: Portale soggetto a carichi concentrati	35
4.3 Esempio 3: Telaio piano multipiano	44
Bibliografia	57

Introduzione

L'analisi limite di telai è un metodo di calcolo per la valutazione della resistenza ultima di una struttura che ha origine dalla teoria della plasticità. Questo metodo si avvale dell'ipotesi iniziale di un materiale elasto-plastico come l'acciaio, che permette una resistenza ai carichi non solo in fase elastica, ma anche in campo plastico.

Questa caratteristica, in una struttura iperstatica, permette la formazione di cerniere plastiche, cioè dei punti dove il momento flettente agente snerva l'acciaio nella sezione indebolendola, creando un punto debole nella struttura schematizzabile con una cerniera che può creare dei cinematismi.

Il metodo dell'analisi limite si propone di valutare il carico ultimo attraverso un coefficiente da affiancare al carico denominato moltiplicatore di collasso. Questo coefficiente, moltiplicato alle forze agenti, determina i valori dei carichi che generano abbastanza cerniere plastiche per l'avvio di un cinematismo, globale o locale, che porta al collasso la struttura intera o in una sua parte. La valutazione di tale moltiplicatore richiede lo studio di un moltiplicatore statico e di uno cinematico che determineranno il moltiplicatore di collasso in un intervallo da essi definito. Questi due moltiplicatori si basano su concetti diversi: mentre il moltiplicatore cinematico si propone di individuare i potenziali meccanismi di collasso sfruttando il teorema dei lavori virtuali, il metodo statico verifica le condizioni di plasticità nelle varie sezioni di interesse.

Questo metodo, seppur per ipotesi restrittivo e per questo poco usato, determina un risultato alquanto importante come il carico di collasso con una facilità estrema, basandosi sulla teoria della plasticità.

In questo elaborato riporteremo questa teoria, illustreremo le ipotesi e il funzionamento del metodo dell'analisi limite, andandolo ad applicare in tre esempi.

Capitolo 1: Cenni storici

1.1 Storia dei materiali

Fin dall'alba dei tempi possiamo considerare *struttura* ogni costruzione dei più svariati materiali, sia essa un'abitazione, un edificio pubblico, un'infrastruttura o un veicolo.

Sin dal Rinascimento si erigevano costruzioni senza calcoli, ma non senza teoria o quello che oggi chiameremmo un “*Codice di condotta*”. Nel 1440, durante i lavori della costruzione del duomo di Milano, l'architetto francese Mignot affermò: “*ars sine Scientia nihil est*”¹ ovvero che la pratica è nulla senza la teoria, frase che testimonia l'esistenza di un regolamento medievale per la costruzione di cattedrali. Le poche pagine del manuale del costruttore ritrovate nel libro di Ezechiele nel 600 a.C, mostrano che c'erano ancora regole precedenti che permisero persino agli egizi la costruzione delle piramidi con dei semplici blocchi di granito. Queste norme, per la costruzione nei due materiali disponibili, pietra e legno, sono state essenzialmente regole di proporzione e, in quanto tali, sono effettivamente corrette e dedotte dall'esperienza e dall'intuito dei costruttori dell'epoca.

Questo approccio portava ad un sovradimensionamento eccessivo della struttura, con tensioni nelle parti portanti di due o tre ordini di grandezza inferiori al valore di rottura delle pietre impiegate, evitando essenzialmente deflessioni dei componenti (anche avendo possibili spostamenti di alcuni elementi quali fondazioni mal disposte). Questi criteri erano basati sulla forma: un arco, in quanto tale, deve avere il proprio raggio, un ponte deve avere una larghezza minima, e così via dicendo. La forma corretta è una questione di corretta geometria, e le regole antiche e medievali di proporzione erano stabilite empiricamente per dare disegni soddisfacenti, in grado di lasciare all'umanità in età classica centri di pregio come templi, ville e luoghi della vita pubblica cittadina, ad esempio il Tempio di Efesto e l'Agorà di Atene, opere che segnarono culturalmente civiltà già evolute e permisero di porre le basi per l'architettura che segnerà le civiltà seguenti.

I romani appresero dai greci tecniche ed architettura, andando a lavorare dei materiali che diedero vita al calcestruzzo romano, un materiale da costruzione considerato uno dei più resistenti grazie alla sua composizione unica. Inoltre si diffusero nuovi materiali da costruzione e vennero implementate le tecniche di lavorazione dei materiali già esistenti: il mattone divenne lo standard per la costruzione, mentre la pietra un rivestimento per abbellire le strutture più importanti.

L'ambizione di costruzioni sempre più ardite trovò spazio nel Medioevo, dove nell'Europa cattolica si progettavano castelli e chiese con la riscoperta pietra. Nel successivo Rinascimento, cattedrali si innalzavano a notevoli altezze verso il cielo con costruzioni sempre più dettagliate. Assieme all'ambizione però si resero evidenti anche i limiti imposti dai materiali finora utilizzati: nel 1284 la Cattedrale di Beauvais fu

progettata per essere la cattedrale più alta del mondo cristiano. Come di consueto per le tecniche dell'epoca, la costruzione fu iniziata dal coro, che aveva un'abside con sette cappelle e che si distingueva per l'estrema riduzione della massa delle pareti, resa ancora più inconsueta dall'altezza di ben 48 metri, superiore ad ogni edificio allora conosciuto. L'esigenza di un'illuminazione notevole per risaltare le ampie vetrate portò a luci estreme e nel 1284 la costruzione, troppo ardita, non resse, e la volta cedette.



Fig. 1.1: Cattedrale di Beauvais ai giorni nostri

L'introduzione due secoli fa del ferro, e poi dell'acciaio grazie alla rivoluzione industriale, regalò agli ingegneri un materiale in grado di generare nuove forme strutturali, come la trave reticolare di grande portata. Con il progresso della siderurgia, l'acciaio venne utilizzato sempre più con funzione strutturale, andando a sostituire il legno per la costruzione di travi, ponti e strutture di coperture. La prima struttura metallica di rilievo è il ponte in ghisa costruito da Darby nel 1779 sul fiume Seven (*Fig. 1.2*), in Inghilterra. Con luce di 30 m, fu realizzato con una struttura ad arco in modo che la ghisa, materiale fragile, lavorasse a compressione.

Nell'Ottocento, per superare luci maggiori, iniziò la realizzazione di ponti sospesi in ferro. Notevole è il ponte sul Menai Strait, in Galles, realizzato da Telford nel 1826, con una luce centrale di 166 m. La storia delle costruzioni civili in acciaio ha sostanzialmente preso piede nel 1851 a Londra con il Crystal Palace a opera di Joseph Paxton, costruito per la prima Esposizione Universale a Londra, che mise sotto gli occhi del mondo i vantaggi dell'acciaio, dando vita ad una costruzione snella e semplice visto l'uso di elementi prefabbricati.

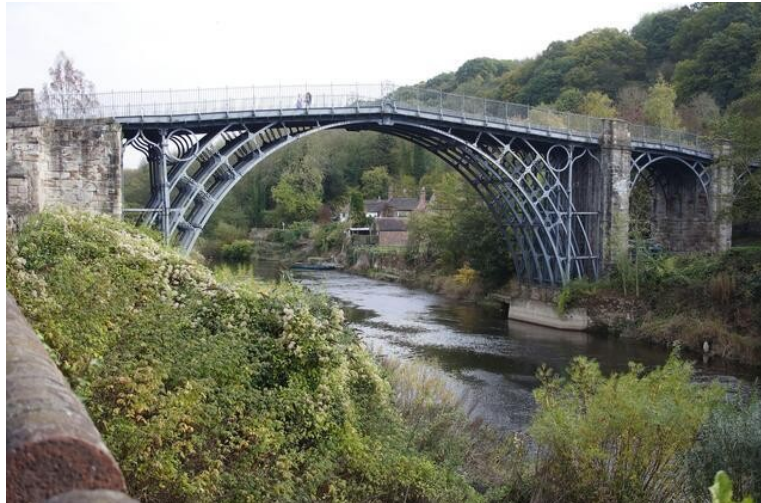


Fig. 1.2: Ponte in ghisa costruito da Abraham Darby III sul fiume Seven in Inghilterra nel 1779.

Parlando della supremazia dell'acciaio è impossibile non citare la Tour Eiffel, costruita nel 1887 per l'esposizione universale del 1889, da un gruppo di ingegneri e architetti capitanati da Alexandre Gustave Eiffel. Tutti gli elementi furono preparati nella fabbrica di Eiffel, situata a Levallois-Perret, alla periferia di Parigi. Ognuno dei 18.000 pezzi usati per costruire la torre fu progettato specificatamente, tracciato con una precisione di un decimo di millimetro e poi messo insieme formando nuovi pezzi di circa cinque metri ciascuno e 2 milioni e mezzo di rivetti. Evidente come già alla fine del diciannovesimo secolo anche la lavorazione dell'acciaio avesse preso piede e si fosse ormai presa la scena del panorama delle opere civili in Europa.

Queste strutture "moderne" sottopongono i loro materiali a regole più dure rispetto agli edifici precedenti in pietra e legno. All'aumentare dei carichi l'acciaio passa da una fase elastica con deformazioni recuperabili ad una fase plastica con deformazioni non recuperabili e notevoli. La scoperta di un nuovo materiale, permettente l'aumento della complessità delle strutture e dei carichi, comportò la necessità di redigere una teoria strutturale non più basata su regole empiriche di proporzione.

1.2 La determinazione delle tensioni e della stabilità

Si iniziarono così a considerare tre criteri: resistenza, stabilità locale e stabilità della struttura. Per una semplice compressione, Heyman ² suggerisce di pensare ad un tavolo: durante una cena si possono avere dei carichi che potrebbero romperne le gambe o se molto snelle farle sbandare. Inoltre un carico in estremità potrebbe far capovolgere il tavolo intero.

Galileo osservò già nel 1638, in un esperimento per determinare la resistenza limite di una trave un comportamento lineare per effetto della flessione, un problema che rientra in quello che oggi è noto come un problema di resistenza dei materiali. Si tratta del calcolo delle tensioni interne in una sezione e la relazione di tali tensioni con una forza applicata. Galileo ha dedotto correttamente che la resistenza di un fascio di sezione rettangolare è proporzionale alla larghezza e il quadrato della profondità del fascio, supponendo che, al momento della frattura, l'intera sezione trasversale fosse in uno stato di tensione uniforme, in modo che l'asse neutro giacesse nella superficie del fascio.

Mariotte, effettuando esperimenti nel 1686, ha esteso la teoria, non senza errori, sostenendo che le tensioni dovrebbero variare linearmente con la distanza dall'asse neutro. Fu James Bernulli nel 1705 a determinare un procedimento valido alla determinazione corretta dell'asse neutro per flessione elastica, ma è attribuita a Coulomb una prima teoria della soluzione del problema elastico. Egli utilizza infatti esplicitamente una relazione lineare sforzo-deformazione per derivare una tensione linearmente variabile su una sezione soggetta a flessione.

Navier ha dato nel 1826 (con qualche correzione e espansione di Saint- Venant nel 1864) un resoconto completo della flessione elastica delle travi, cioè della determinazione delle tensioni elastiche in una sezione trasversale risultante dalla flessione di quella sezione da un momento flettente specificato.

Il problema della stabilità venne introdotto da James Bernulli, il quale affermò nel 1691, a valle di evidenti risultati teorici, che la curvatura in un punto di un elemento uniforme inizialmente dritto e sottoposto poi a una forza concentrata all'estremità sarebbe proporzionale al momento flettente in quel punto. L'affermazione, per quanto ovvia ai giorni nostri, rese possibile a Eulero, nel 1744, la formulazione di un'analisi elastica che permise di trovare delle escursioni molto piccole, ma di grande importanza pratica. Eulero ha dimostrato che queste escursioni sono sinusoidali, e che tali deformazioni avvengono solo in presenza di un valore calcolabile di carico assiale: questo è conosciuto oggi come 'Problema dell'instabilità di Eulero'.

1.3 Analisi strutturale

Tra i vari tipi di analisi strutturale uno dei più interessanti e fondamentali è quello statico (oltre a quelli dinamico e lineare), dove le forze vincolari interne della struttura devono essere in equilibrio con i carichi esterni sollecitanti la struttura stessa, trovando le reazioni dalle equazioni di equilibrio statico interne, determinando una struttura staticamente determinata. Navier però ritenne che le equazioni della sola statica possono non essere sufficienti a determinare le forze interne per una struttura iperstatica: mentre per una trave caricata poggiate su due semplici supporti, le reazioni possono essere agevolmente

trovate dalla statica, se la stessa trave poggia su tre supporti le sole equazioni della statica non sono sufficienti per determinare i valori delle tre reazioni. È necessario infatti aggiungere delle ipotesi di lavoro, come le ipotesi di congruenza nel metodo delle Forze, o ipotesi che permettano di determinare i parametri della sollecitazione nella struttura, che, come specificato da Navier, non dovrebbero superare una percentuale del limitare le sollecitazioni del materiale. Le equazioni di equilibrio sembrano darci delle risposte facili a meccanismi complessi, ma non tengono conto di caratteristiche come le proprietà dei materiali, i moduli elastici degli acciai influenzati da leghe chimiche variabili, le miscele aleatorie del calcestruzzo o l'isotropia del legno.

Divenne così chiaro che piccole variazioni geometriche e ambientali esterne potessero variare e nel 1930, con le pubblicazioni dei Rapporti del “*Steel Structures Research Committee*” (Comitato di ricerca inglese), fu enunciato che le sollecitazioni nelle strutture reali ponevano pochissime deformazioni nel campo elastico e notevole lavoro in campo plastico; questa osservazione portò allo sviluppo di metodi plastici di progettazione, qual è l'analisi limite, oggetto del seguente lavoro.

1.4 Analisi plastica

I metodi plastici o di analisi strutturale sono oggi ampiamente utilizzati nella progettazione di telai in acciaio, questi sopportano il carico in virtù della resistenza dei propri elementi sottoposti all'azione di flessione. I telai rettangolari a più piani e a più campate e i portali a tetto spiovente a una o più campate sono esempi di notevole fama di questo tipo di analisi, la definizione include anche travi continue e semplicemente sostenute. Per tali strutture Baker (1949) ha sottolineato che i progetti più economici e razionali si ottengono mediante l'uso dei metodi plastici. I metodi plastici hanno anche il vantaggio della semplicità e per questo sono stati adoperati largamente all'inizio dello scorso secolo per determinare i carichi sui quali una struttura intelaiata cederà a causa dello sviluppo di flessioni eccessive.

I metodi plastici sfruttano le proprietà duttili dell'acciaio definito il legame costitutivo e le sue caratteristiche; la duttilità dell'acciaio distribuisce gli sforzi dei carichi applicabili che possono essere aumentati fino a valori calcolabili con una precisione spettacolare, non essendo influenzate dalle imperfezioni di fabbricazione e costruzione che alterano marcatamente la distribuzione elastica delle forze interne.

La problematica del comportamento non lineare dei materiali (e delle strutture) era presente fin dai primordi della Meccanica, ne erano a conoscenza già Leonardo e Galileo, ma lo studio del fenomeno si è protratto fino a tempi più maturi per la complessità dovuta sia al comportamento irreversibile del fenomeno plastico, sia al suo carattere anolonomo: nel senso che la deformazione finale raggiunta dipende non solo dal valore finale del

carico, ma anche dal percorso di carico, cioè dalla storia passata della modalità di applicazione del carico stesso. I primi studi si trovano nel XIX secolo con grandi autori quali Tresca e S. Venant, ma solo nel XX secolo si trovano delle teorie del tutto affidabili. Ad oggi si trovano molte teorie e applicazioni formulate alla fine del secolo scorso.

Capitolo 2: Plasticità

2.1 Generalità

La scienza delle costruzioni, così come molte applicazioni utili all'ingegneria, si fondano sull'ipotesi che i materiali siano perfettamente elastici: cioè che non abbiano deformazioni permanenti e si deformino seguendo modelli come la legge di Hooke. Questo rende possibile una teoria semplice e intuitiva che consente lo studio di casi anche complessi che senza questa semplificazione farebbero riferimento a una teoria molto laboriosa. Si ammette così una certa elasticità anche a quei materiali (come calcestruzzo, legno, ecc.) che si scostano notevolmente da questa, anche se si può ben approssimare alla realtà finché si hanno deformazioni abbastanza piccole. Nella situazione di esercizio, l'usuale condizione di resistenza $\sigma < k$, con k un carico di sicurezza, assicura che le tensioni siano $\sigma < \sigma_e < \sigma_p$, cioè persino inferiore al limite di elasticità. È perciò la scienza delle costruzioni classica da considerarsi come una teoria limite, soggetta appunto a limitazioni al non verificarsi dell'ipotesi di deformazioni perfettamente elastiche. Nella realtà si ha spesso la necessità di conoscere il carico limite di una struttura composta da materiali che non lavorano solamente in campo elastico, come l'acciaio. Sorge così la necessità di fare un ulteriore passo, consistente nella considerazione di possibili deformazioni non elastiche e nello studio delle loro conseguenze.

Le deformazioni, legate alle tensioni, sono costituite da una parte elastica che rientra al cessare delle forze esterne, e da una anelastica (o plastica) che permane anche dopo. È quest'ultima parte che spesso spaventa per il comportamento irreversibile del materiale. Non è però detto che questo limite non possa essere superato, sia a fronte di fatti imprevisti come cedimenti, che al considerare deformazioni permanenti come parti accettate nel progetto della struttura a seguito di carichi crescenti, nella vita della struttura, e deformazioni di rilassamento.

In genere quando avvengono deformazioni non elastiche, il regime statico provocato dalle forze date risulta diverso da quello generato dalle sole forze che generano deformazioni elastiche: si modifica soltanto la distribuzione di tensioni se la struttura è isostatica, mentre se la struttura è iperstatica si modificano anche i valori delle reazioni vincolari e quindi la distribuzione delle sollecitazioni nella struttura. Infatti nella determinazione di equilibri staticamente indeterminati, fra le infinite soluzioni si considera solo e soltanto la configurazione congruente ai vincoli. Però la soluzione congruente è unica se rispetta la legge che lega tensioni e deformazioni come ad esempio proprio la legge di Hooke, ma se si hanno deformazioni plastiche è naturale che a parità di carichi cambino i valori delle reazioni, quindi delle sollecitazioni, capaci di ricondurre nuovamente al rispetto dei vincoli, cioè alla congruenza.

Di conseguenza variando la legge della deformazione la soluzione non risulta più unica, ma diventa ogni configurazione possibile nel rispetto della congruenza con i vincoli della struttura.

Lo studio della statica delle strutture sotto gli aspetti appena citati è uno degli aspetti generali della teoria della plasticità, branca che interessa l'ingegneria civile. In questo studio non è possibile considerare il legame generale $\varepsilon = f(\sigma)$ per la complessità che per i diversi legami che intercorrono per ogni materiale, ciò rende la risoluzione dei problemi tutt'altro che generale.

L'oggetto considerato in questo elaborato considera la teoria della plasticità come teoria di base per la determinazione dei limiti di resistenza dell'acciaio che permettono alla struttura di creare cinematici che ne determinano il collasso, fenomeno studiato dall'analisi limite.

2.2 Legame tensioni – deformazioni

La legge che lega la deformazione ε e la tensione σ si determina sperimentalmente sottoponendo un campione di materiale, nel nostro caso l'acciaio, a trazione e compressione. Tale legge risulta molto diversa per i vari materiali considerati, distinguendo materiali fragili e duttili principalmente per la presenza o meno dello snervamento.

Gli acciai comuni sono una lega di ferro e carbonio, con percentuali che cambiano a seconda delle necessità, dove gli atomi si organizzano secondo una struttura cristallina. L'effetto dell'applicazione di uno sforzo crescente causa nella struttura cristallina ordinata delle dislocazioni che aumentano all'aumentare dello sforzo fino ad un allungamento non recuperabile: la deformazione plastica.

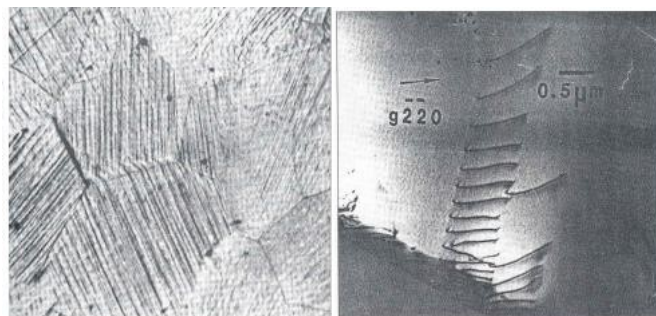


Fig. 2.1: Bande di scorrimento nei bordi dei grani, le linee cambiano direzione ai bordi dei grani.

Nei materiali duttili la ε cresce proporzionalmente alla tensione σ , questa crescita costante segue il modulo di elasticità E definito tra il rapporto degli incrementi di tensione nello stesso intervallo di incremento della deformazione, fino a un certo valore detto di snervamento a cui corrispondono σ_s e ε_s . Il fenomeno dello snervamento è costituito da un anomalo aumento di deformazioni che si muove tra due estremi, ε'_s e ε''_s (punto Y in Fig.2.2), senza che occorrono aumenti di tensione, che anzi oscilla irregolarmente. Queste deformazioni anomale sono dovute alla rottura del reticolo cristallino che dà inizio alle dislocazioni dei grani. Superata la fase di snervamento, aumentando la tensione, si giunge a deformazioni irreversibili a seguito dell'incrudimento del materiale, giungendo a una fase di grandi allungamenti, nella quale aumenti moderati di σ comportano grandi aumenti di ε , fino alla fine della curva che corrisponde alla rottura. Nei materiali fragili questo non si ha, avendo solitamente pendenze maggiori, e la mancanza dello snervamento che si sostituisce la rottura.

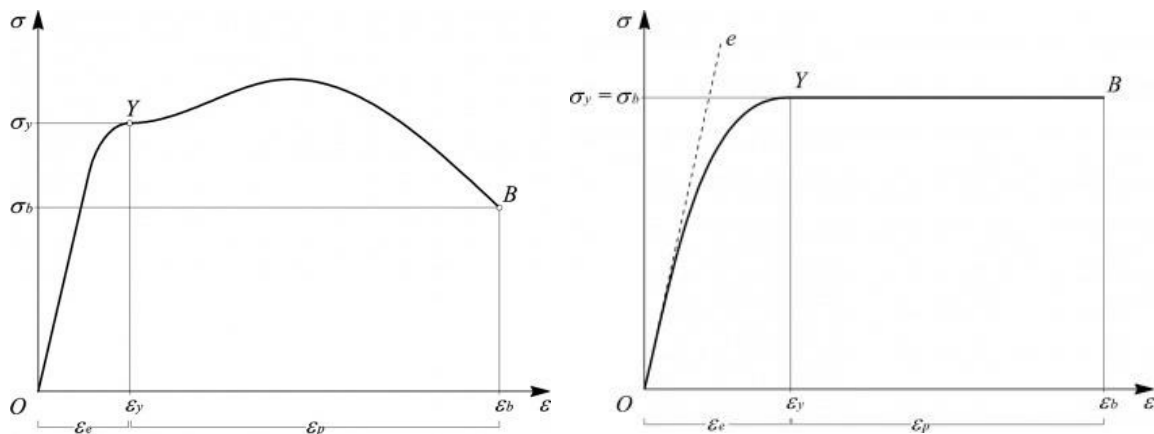


Fig. 2.2: Grafici Tensione-Deformazione, spesso si utilizza il grafico semplificato a sinistra dove oltre lo snervamento una tensione costante causa deformazioni irreversibili crescenti fino a rottura.

I diagrammi tensione – deformazione sono rappresentati con espressioni molto più semplici, ammettendo valida per l'acciaio la legge di Hooke fino allo snervamento σ_s , e considerando tensioni costanti e pari a σ durante lo snervamento e la fase seguente, trascurando le oscillazioni.

Sorge così il problema della progettazione di strutture: si possono usare approcci prettamente elastici, facendo lavorare la struttura solamente in fase elastica, questo porta a un sovradimensionamento che ignora la reale resistenza anche in campo plastico della struttura.

Un approccio plastico invece considera e accetta che la struttura nella sua vita potrà lavorare in fase plastica in parte o in totalità dei suoi elementi.

Considerando un acciaio S275 si ha che lo snervamento avviene per una tensione di snervamento di 275 N/mm^2 e con un valore a rottura di 430 N/mm^2 , questo significa che non considerare la fase plastica equivale a ignorare in grande range dove il materiale, in gran parte, riesce a lavorare facendo restare in equilibrio la struttura.

2.3 Metodi plastici di analisi strutturale

I metodi cosiddetti plastici sono metodi correlati allo snervamento del materiale, basati sull'ipotesi della formazione di cerniere plastiche. Questi metodi consentono di trovare rapidamente i carichi di collasso plastico di telai, come vedremo applicato nei capitoli successivi. La loro utilità come strumento per la progettazione di telai in acciaio dipende dal fatto che è improbabile che si sviluppino grandi deformazioni, prima che venga raggiunto il carico di collasso della fase plastica. Tuttavia, potrebbe essere necessario garantire che le deformazioni sviluppate prima del collasso siano accettabili e conformi alla geometria della struttura; questa parte riguarda soprattutto all'assegnazione della posizione di dove si formeranno le cerniere plastiche.

I metodi plastici dovrebbero essere utilizzati solo se il criterio di progettazione dominante è evitare il collasso plastico. Esistono casi in cui il problema principale è quello di evitare altri tipi di cedimento, ad esempio per fatica o fratture fragili. Questi sono al di fuori dell'ambito della teoria plastica semplice. Si presume inoltre implicitamente che nessuna parte della struttura si rompa per instabilità prima che venga raggiunto il carico di collasso della fase plastica. Sono stati ampiamente studiati i problemi di instabilità delle colonne nelle condizioni che si verificano effettivamente nei telai rigidi quando gli elementi hanno ceduto parzialmente, e di instabilità laterale e altre forme di instabilità in condizioni simili a quanto formulato da Eulero come descritto nel capitolo precedente.

Si prenderà in considerazione nel capitolo successivo il metodo plastico dell'analisi limite, metodo che con un semplice coefficiente mira a definire il carico massimo che porterebbe a collasso la struttura.

2.3 Formazione cerniere plastiche

Finora abbiamo menzionato vagamente il concetto di formazione di cerniere plastiche e la conseguente perdita di un certo grado di ridondanza. Per capire meglio questo, dobbiamo analizzare più da vicino cosa succede esattamente quando una cerniera plastica si forma in una struttura.

Perché si formi una cerniera plastica, dobbiamo avere a che fare con un materiale elastoplastico; ovvero questo comportamento non corrisponde a un procedimento che porta la rottura di materiali fragili. Quindi, l'acciaio strutturale (duatile) può sicuramente sviluppare cerniere plastiche, mentre il vetro (fragile) non può, così come il calcestruzzo, ma il cemento armato può farlo nelle giuste circostanze a causa della presenza dell'acciaio d'armatura. L'acciaio strutturale è un ottimo esempio di materiale elastoplastico:

- Ha un punto di snervamento ben definito.
- Subisce grandi sollecitazioni durante la resa.
- Presenta lo stesso comportamento del materiale in trazione e compressione.

Abbiamo visto che l'acciaio è un materiale elastoplastico, che segue la legge di Hooke fino allo snervamento σ_s . A questo punto, non è possibile compensare un ulteriore aumento della sollecitazione e il materiale cede plasticamente sotto sollecitazione costante: cioè il materiale è caratterizzato da un aumento della deformazione a un'entità di sollecitazione costante come si nota dal grafico.

Prendendo una sollecitazione di trazione, quando raggiunge lo snervamento si è in una regione plastica dove c'è la formazione di cerniere plastiche.

Di minore interesse ma comunque degne di nota sono le regioni che seguono la regione plastica: la zona di incrudimento termina alla sollecitazione finale σ_u , ed è immediatamente seguita dalla regione di *necking* prima della rottura del materiale.

Il punto chiave da trarre è che la regione plastica è caratterizzata da un aumento della deformazione a un valore di sollecitazione costante (la sollecitazione di snervamento), che indebolisce una sezione di trave, schematizzata in un solo punto ma che coinvolge in generale un tratto di trave delle dimensioni di circa 0,5 volte la grandezza totale dell'asta e che genera un cedimento nella struttura schematizzata con una cerniera detta cerniera plastica.

Considerando una trave sotto l'influenza di un carico concentrato esterno progressivamente crescente (e del risultante momento flettente interno) posto a metà della campata si faccia riferimento al momento di resistenza interno, indotto dal carico puntuale.

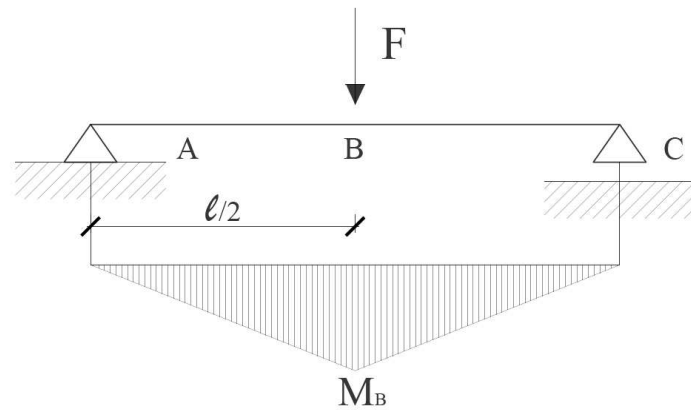


Fig. 2.3: Trave soggetta a un carico concentrato a metà campata e relativo grafico del momento flettente

Il momento raggiunto in campata in B crescerà con il crescere del carico concentrato, aumentando fino al punto di snervamento, questo guardando la sezione si raggiunge ai margini e causa la plasticizzazione; aumentando ancora il carico può diffondersi, in accordo con le ipotesi di conservazione che permettono di considerare momento lineare nelle sezioni, una tensione plastica in tutta la sezione, allontanandoci dal punto di snervamento e andando verso la rottura.

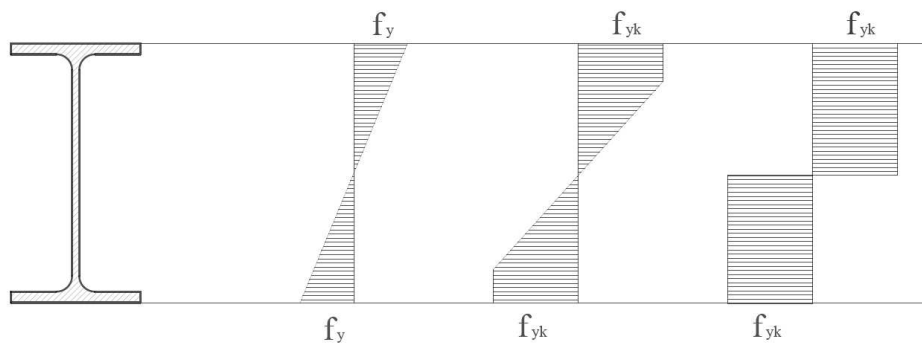


Fig. 2.4: Plasticizzazione della sezione

Da questa discussione possiamo vedere che se abbiamo un materiale duttile, definito il momento di snervamento, come momento massimo ammissibile è alquanto conservativo: in realtà la sezione ha un'ulteriore riserva di capacità fino al completo cedimento della sezione completa.

La formazione di regioni plastiche in una sezione mentre persiste un nucleo elastico è nota come comportamento di flessione elastoplastico. Quando abbiamo esaurito la capacità elastoplastica del materiale e la sezione diventa completamente plastica, si dice che si sia formata una cerniera plastica. Avendo una struttura Isostatica tolta una

condizione di vincolo si genererà una labilità, mentre se avessimo avuto una struttura, anche con diversi gradi di iperstaticità avremmo potuto conservare l'equilibrio.

Capitolo 3: Analisi Limite

2.1 Descrizione

Il metodo dell'analisi limite, oggetto di questo elaborato e già introdotto nella descrizione della plasticità, è un metodo che consente di calcolare direttamente lo stato limite ultimo di una struttura, ovvero quel carico che porterà al collasso del sistema. Questo viene raggiunto alla formazione di un numero tale di cerniere plastiche che rendono labile il sistema, perdendo l'equilibrio iniziale; connesso a questo concetto si nota che una struttura isostatica sarà soggetta al collasso alla perdita di un qualsiasi vincolo mentre una struttura simile ma iperstatica dovrà avere tante cerniere quant'era la ridondanza iniziale per un collasso globale, quest'ultimi saranno infatti i sistemi di studio per il maggiore interesse.

L'uso del teorema si ha affiancando ai carichi a cui una struttura è sottoposta, un coefficiente detto *moltiplicatore di collasso* da determinare. Questo moltiplicatore definisce il carico che porterà alla labilità e quindi al collasso la struttura.

Questo metodo ha il vantaggio di essere immediatamente interpretabile e non è di complessità esagerata. Peraltro come osservato in precedenza il moltiplicatore di collasso dei carichi non dipende da eventuali stati di coazione o cedimenti vincolari né dalla rigidità degli elementi strutturali e fornisce quindi una valutazione molto più affidabile e sintetica del grado di sicurezza di una struttura di quella che può fornire una analisi in campo elastico.

Ha però il grande svantaggio di limitare il suo impiego per le sole strutture in acciaio in grado, vista la duttilità, di formare delle cerniere plastiche. Inoltre come previsto dalla OPCM 3274 è da considerarsi inadatto per la sicurezza in zone sismiche, visto le integrazioni necessarie per spostamenti e deformazioni non descritte nel teorema, inoltre non è molto usato nei codici di calcolo. A questi svantaggi si aggiungono le ipotesi piuttosto stringenti in seguito descritte.

Nonostante ciò questo metodo è degno di essere analizzato per la semplicità con cui fornisce il carico di collasso.

2.2 Ipotesi

Considerando il metodo dell'analisi limite viene necessario stipulare delle ipotesi che andranno a definirne il campo di impiego:

- I. piccoli spostamenti
- II. piccole deformazioni: necessarie per l'uso delle equazioni di equilibrio scritte con riferimento alla configurazione non deformata; quest'ipotesi equivale a poter trascurare gli effetti del second'ordine

- III. Conservazione delle sezioni piane: semplificazione della realtà tridimensionale.
- IV. Duttilità illimitata: il materiale subisce deformazioni indefinite $p\sigma = \sigma_0$ nel verso della plasticizzazione.
- V. Plasticità perfetta: ogni sezione è in grado di raggiungere potenzialmente momento flettente massimo, cioè il momento plastico. inoltre raggiunto il momento plastico le sezioni conservano sufficiente capacità rotazionale e la formazione di cerniere plastiche si considera puntuale.
- VI. il collasso non avviene per fenomeni di instabilità locale: si considera un'instabilità globale, delicata per strutture in acciaio dove l'analisi strutturale presuppone che le sezioni siano tutte in classe 1.
- VII. le connessioni sono in grado di trasmettere interamente il momento plastico.

Si semplifica ulteriormente non considerando l'influenza di taglio e sforzo normale, considerando solamente il momento flettente.

2.3 Teoremi

Per lo studio dell'analisi limite sono necessari altri teoremi di seguito esposti:

2.3.1 Teorema dei Lavori Virtuali e della Potenza virtuale

È uno strumento poderoso che serve a determinare le componenti di spostamento o rotazione nei sistemi deformabili. Lavora sotto ipotesi di piccoli spostamenti cioè spostamenti virtuali facendo valere la sovrapposizione degli effetti; nei capitoli successivi invece andremo ad abbandonare questa ipotesi, portando al collasso la struttura tenendo però valido il teorema.

Il teorema considera un sistema cartesiano dove si prende un continuo V libero nello spazio e soggetto a forze di massa F , su unità di volume dv , e di superficie f su unità di superficie $d\pi$, che siano staticamente ammissibili con il tensore delle tensioni σ del corpo trovando un sistema di equazioni, sempre determinabile, di ammissibilità statica. Suppone inoltre che gli spostamenti virtuali δ devono essere cinematicamente ammissibili alle deformazioni ϵ e così il lavoro svolto dalle forze esterne di massa e superficie sugli spostamenti è uguale al lavoro interno svolto dalle tensioni sulle corrispondenti deformazioni. Il teorema così descritto identifica un sistema A definito staticamente ammissibile dove si ha un equilibrio statico tra forze esterne e tensioni interne. Viceversa si identifica un sistema B cinematicamente ammissibile dove si hanno deformazioni congruenti agli spostamenti. Il teorema si può così scrivere:

$$\delta L_e = \delta L_i$$

cioè:

$$\int_v F^a \delta s^b dv + \int_\pi f^a \delta s^b d\pi = \int_v \sigma^a \varepsilon^b dv$$

Similmente a TLV si può definire il Teorema della Potenza virtuale usato nell'analisi limite. Quest'ultimo, a differenza del precedente, è usato in configurazioni dinamiche. Si definisce indicando con $\dot{\varepsilon}_c$ la velocità di deformazione assiale, $\dot{\theta}$ la curvatura, $\dot{\gamma}_c$ lo scorrimento e trascurando le forze agenti sulla superficie, così si può scrivere:

$$L_{ve} = \mu_c \left[\int_v F^a s^b dv + \sum F^a s^b \right] = L_{vi} = \int_v (N^a \varepsilon \dot{\varepsilon} + M^a \theta \dot{\theta} + T^a \dot{\gamma}_c) dz + D_{int}$$

Dove L_{ve} indica la potenza esterna, ossia il lavoro per unità di tempo compiuto dai carichi per le velocità nei loro punti di applicazione. Così descritta si può porre così: $L_{ve} = L_{\dot{\varepsilon}} \mu_c$

Aggiungendo un'ulteriore semplificazione si può considerare il meccanismo di collasso come rigido, così evitando deformazioni nelle aste il primo termine della potenza interna diventa nullo: $N^a \dot{\varepsilon}_c + M^a \dot{\theta} + T^a \dot{\gamma}_c = 0$

Con D_{int} si considera la dissipazione di forza che avviene a causa di un cedimento, che considerando la formazione di cerniere plastiche che permettono la rotazione delle aste nel punto di cedimento al raggiungimento del momento plastico, ricordando l'ipotesi dove si ha semplificato il problema considerando solo il momento, dà come risultato:

$$D_{int} = M_0 |\dot{\theta}|$$

Dalla Teoria della potenza virtuale si trova così la relazione fondamentale:

$$\mu_c = \frac{D_{int}}{L_e}$$

2.3.2 Postulato della dissipazione massima (o di Hill)

Dato uno stato plasticamente ammissibile in tutto il volume di controllo, cioè uno stato dove si verifica la condizione $M_s \leq M_0$, risulta:

$$M_s \dot{\theta} \leq |M_s| |\dot{\theta}| \leq M_0 |\dot{\theta}| = D_{int}(\dot{\theta})$$

Dove con $\theta\dot{p}$ si intende le velocità di deformazione plastica. Pertanto l'azione del momento interno che rende massimo il valore di queste deformazioni altro non è che:

$$\max (D_{int}(\theta\dot{p})) = M_0 |\theta\dot{p}| \quad , \quad M \in \varepsilon$$

Dove:

$$\varepsilon = [-M_0; +M_0]$$

Questo insieme rappresenta il campo degli stati plasticamente ammissibili. Questo risultato introdotto da R. Hill nel 1950 vale per mezzi continui solo se la funzione di snervamento è convessa. Questo teorema per quanto semplice ci permette di definire:

- Uno stato di sollecitazione Staticamente ammissibile se le condizioni di equilibrio, con i carichi applicati, sono soddisfatte, e se in nessuna sezione interna le azioni non raggiungono il valore limite plastico $M_x < M_0$. Il valore del moltiplicatore dei carichi associato al seguente stato di sollecitazione viene definito moltiplicatore staticamente ammissibile μ_s .
- Una struttura è definita in un meccanismo cinematicamente ammissibile se il numero di articolazioni plastiche introdotto nella configurazione originaria è tale da trasformare la struttura (o una sua parte) in un meccanismo cinematico e rappresenta ogni potenziale meccanismo di collasso per cui la potenza esterna risulti positiva e quindi la struttura risulta non essere più in grado di opporre resistenza ad una deformazione impressa. Il moltiplicatore dei carichi associato a tale meccanismo viene definito moltiplicatore cinematico μ_k .

2.3.2 Teoremi fondamentali del calcolo a rottura

Il metodo dell'analisi limite per la ricerca del carico massimo è basato su due teoremi fondamentali comunemente chiamati teorema statico o del limite inferiore, e teorema cinematico o del limite superiore. Il primo dà un valore del carico di collasso approssimato per difetto, mentre il secondo dà un valore approssimato per eccesso. Tali teoremi sono dovuti a Gvozdev (1954) per le strutture ed a Greenberg e Prager per le travature.

Teorema statico: La struttura non perviene al collasso sotto un sistema di carichi in corrispondenza del quale esista un insieme di azioni interne in equilibrio con i carichi ed all'interno del dominio di ammissibilità. Per questo il moltiplicatore dei carichi μ_s di ogni distribuzione di momenti staticamente ammissibili è sempre inferiore, o al più uguale al carico di collasso μ_c .

$$\mu_s \leq \mu_c$$

Teorema cinematico: afferma che il sistema certamente collassa sotto un sistema di carichi esterni a cui è associata una potenza esterna maggiore o uguale della potenza dissipata nelle cerniere plastiche in corrispondenza ad un potenziale meccanismo di collasso cinematicamente ammissibile. Allora il moltiplicatore μ_k è sempre maggiore, o al più uguale, all'effettivo moltiplicatore critico. In altre parole il moltiplicatore di collasso è il più piccolo fra tutti i moltiplicatori cinematicamente ammissibili, per cui tale teorema si definisce anche Teorema del limite superiore.

$$\mu_c \leq \mu_k$$

E determinabile seguendo il TPV.

Teorema di Greenberg-Prager: Il moltiplicatore di collasso è il massimo dei moltiplicatori staticamente ammissibili e il minimo dei moltiplicatori cinematicamente ammissibili ovvero:

$$\mu_s \leq \mu_c \leq \mu_k$$

Questo teorema semplifica il problema in quanto risulta sufficiente determinare il moltiplicatore staticamente ammissibile o il moltiplicatore cinematico per determinare la soluzione del problema.

Capitolo 4: Applicazione Analisi Limite

Esempio n.1: Trave soggetta a carichi concentrati

Si consideri la trave una volta iperstatica in *Fig. 4.1*, che si assume dotata di un momento limite superiore ed inferiore costante e pari a M_0 . Si assuma inoltre che lo sforzo normale (ed il taglio) non influenzino la condizione di ammissibilità plastica delle cerniere.

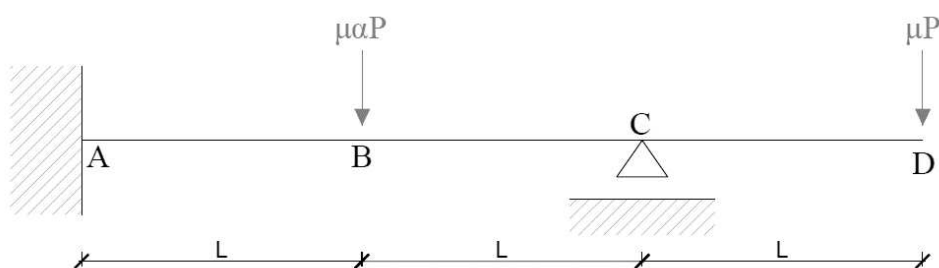


Fig.4.1 : Trave con sbalzo soggetta a due carichi concentrati

L'applicazione del teorema cinematico consiste nel considerare i potenziali meccanismi di collasso.

Come già detto le sezioni potenzialmente sede di cerniere plastiche si trovano in corrispondenza dei carichi concentrati e dei vincoli.

1. Meccanismo Nr. 1:

Considera il meccanismo che esamina la mensola che si sviluppa dopo l'appoggio, nel tratto *C-D*. Tuttavia una cerniera plastica sull'appoggio corrisponde ad un meccanismo che coinvolge solo un tratto della trave: è così un meccanismo locale.

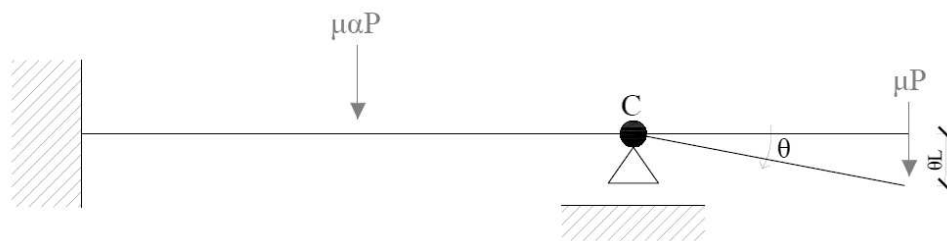


Fig.4.2 : Meccanismo 1 di tipo locale.

Il lavoro esterno compiuto solo dalla forza applicata nello sbalzo vale:

$$L_e = P(\delta L)$$

La dissipazione vale:

$$D_i = M_0 \delta$$

Il moltiplicatore di collasso cinematicamente ammissibile:

$$\mu_1 = \frac{D_i}{L_e} = \frac{M_0}{P L}$$

2. Meccanismo Nr. 2

Si considera il meccanismo ad un grado di labilità in Fig 4.3 dove le cerniere plastiche sono poste all'incastro e a metà campata A-C; l'intera struttura risulta labile, con grado di labilità $i=1$.

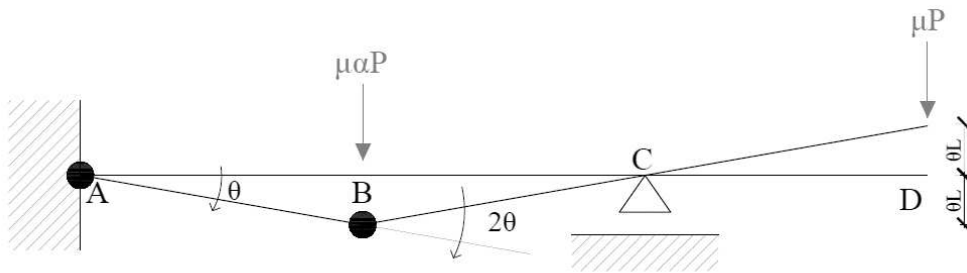


Fig.4.3 : Meccanismo 2 di tipo globale.

$$L_e = \alpha P (\delta L) - P (\delta L) = (\alpha - 1) P \delta L$$

$$D_i = 3 M_0 \delta$$

Il moltiplicatore di collasso cinematicamente ammissibile:

$$\mu_2 = \frac{D_i}{L_e} = \frac{3 M_0}{(\alpha - 1) P L}$$

Nell'ultima relazione si nota una dipendenza del parametro μ da α , che è un coefficiente cui valore influenza la nostra modalità di collasso della struttura. Al su

variare di α abbiamo un cambio del meccanismo di collasso in accordo con il teorema cinematico del calcolo a rottura già citato.

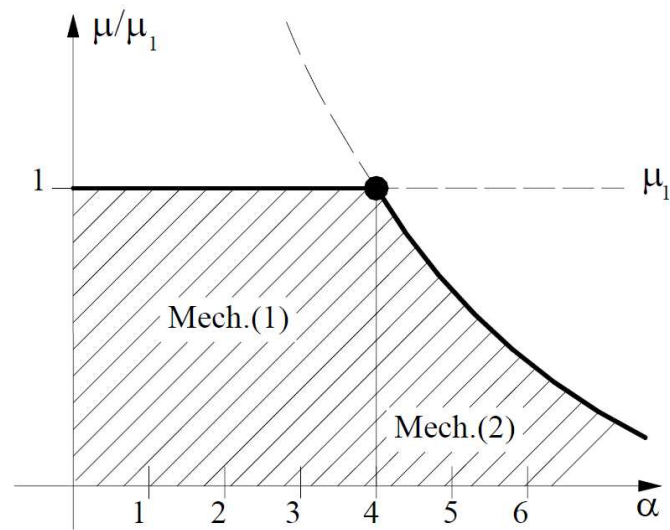


Fig.4.4 : Meccanismo predominante al variare del parametro α

Il teorema cinematico per il calcolo a rottura impone di prendere il coefficiente dinamico minimo tra i vari moltiplicatori per ogni meccanismo di collasso.

$$\min \{ \mu_1; \mu_2 \} = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{M_0}{PL} & \text{Per } \alpha < 4 \\ \frac{3M_0}{(\alpha - 1)PL} & \text{Per } \alpha > 4 \end{array} \right\}$$

Considerando un meccanismo con $\alpha = 5$ si fa riferimento al meccanismo 2, in particolare avremo:

$$\mu = \frac{3M_0}{4PL}$$

Che applicato risulta:

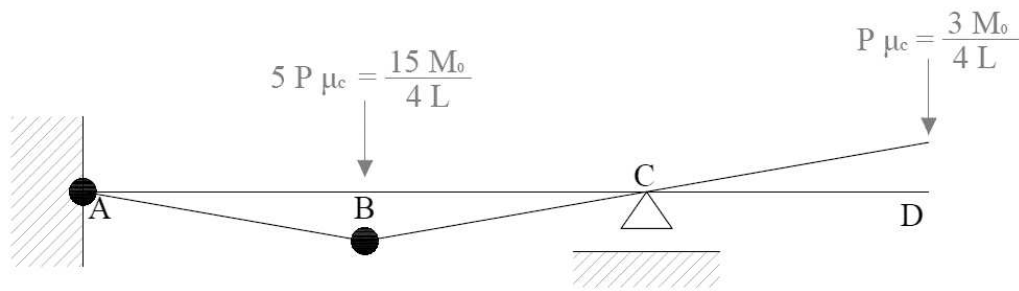


Fig.4.5: Determinazione carichi per Meccanismo 2.

Dato lo schema della seguente trave si può andare a dimensionare la struttura con un profilo IPE200 che segue le seguenti caratteristiche:

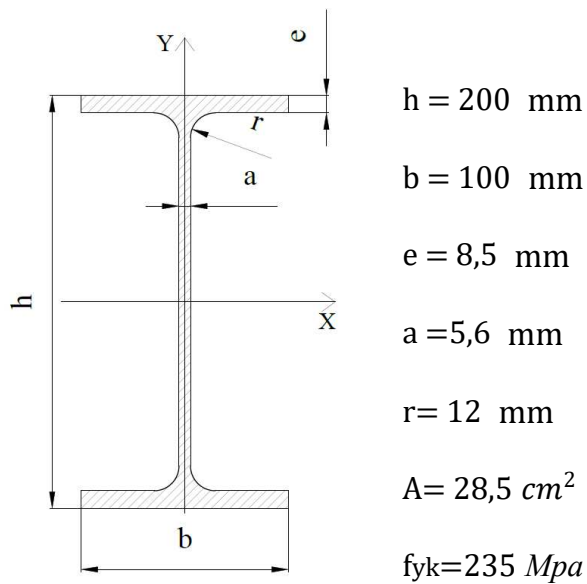
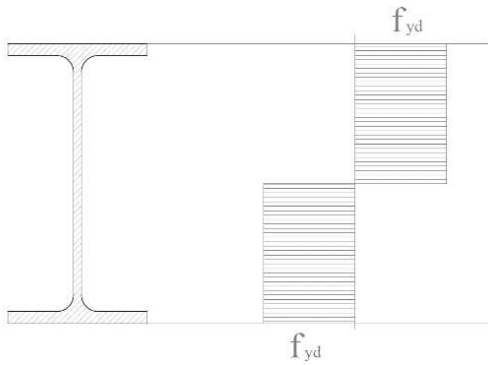


Fig.4.6 : Profilo in acciaio IPE200

Per determinare il Momento resistente, che vogliamo uguale al momento plastico vista la formazione, in corrispondenza di tale momento, delle cerniere plastiche che danno il via al meccanismo di labilità, calcoliamo il modulo di resistenza plastico:



$$W_{pl} = \frac{h^2 b}{4} = \frac{(200^2 \cdot 100)}{4} - 2 \frac{(183^2 \cdot 7,2)}{4} = 209,66 \text{ cm}^3$$

Fig.4.7: Diagramma delle tensioni nel profilo: si evidenzia la plasticità ottenuta.

Il momento plastico risulta dunque:

$$M_{pl} = W_{pl} f_{yk} = 209,66 \cdot 235 \cdot 10^{-3} = 49,27 \text{ KN}$$

Prendendo una forza $P = 5 \text{ KN}$ che potrebbe essere il peso della copertura, o delle travi secondarie che posano sulla principale soggetta allo studio, andiamo a determinare i carichi nella seguente struttura:

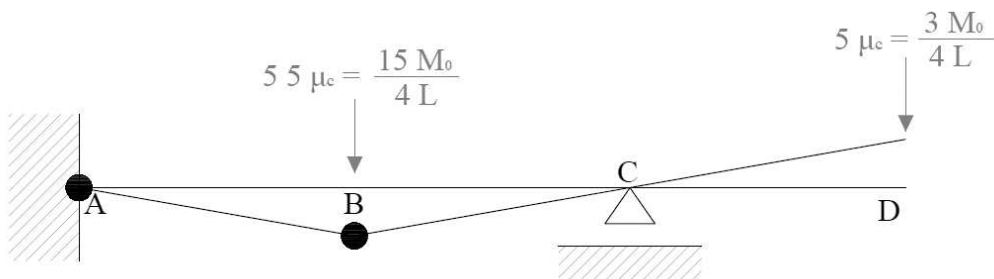


Fig.4.8 : Carichi sulla struttura.

Possiamo andare a calcolare il moltiplicatore di collasso:

$$\mu_c = \frac{15 M_{pl}}{25 \cdot 4L} = \frac{15 \cdot 49,27}{25 \cdot 4 \cdot 3} = 2,46$$

$$\mu_c = \frac{3 M_{pl}}{5 \cdot 4L} = \frac{3 \cdot 49,27}{5 \cdot 4 \cdot 3} = 2,46$$

Che chiaramente viene ad essere uguale, determinando un Carico di collasso:

$$\text{Carico di collasso 1: } 5 \cdot P \cdot \mu_c = 61,5 \text{ kN}$$

$$\text{Carico di collasso 2: } P \cdot \mu_c = 12,3 \text{ kN}$$

Il diagramma del momento relativo ai seguenti carichi dimostra come i punti dove si vanno a formare le cerniere plastiche derivano da i luoghi dove, per geometria o posizione dei carichi il momento risulta massimo.

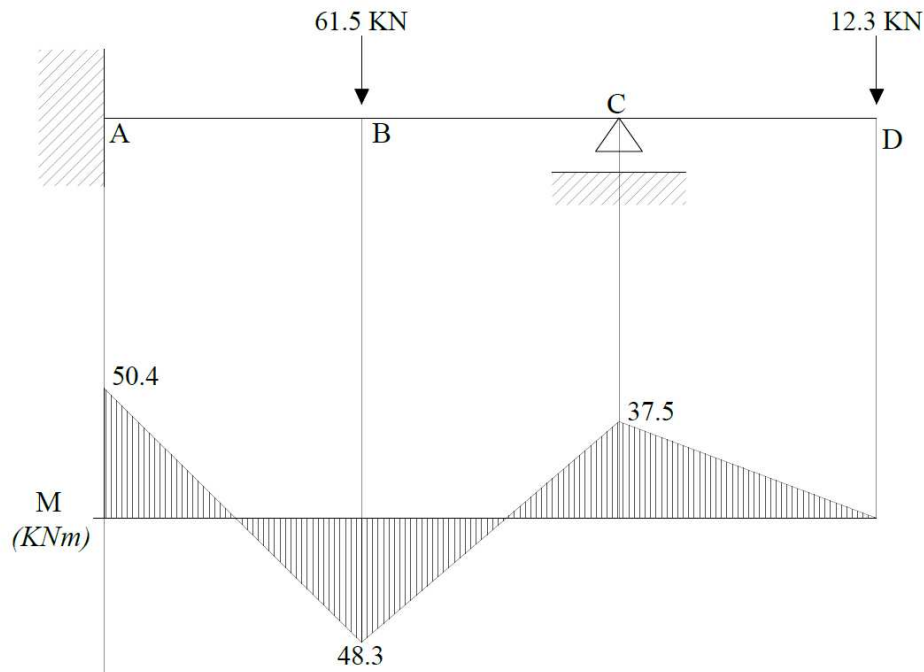


Fig.4.9 : Diagramma del momento per la struttura sottoposta ai carichi determinati.

Si può procedere inoltre alla verifica del rispetto del teorema statico che è invece determinato considerando delle distribuzioni di momento staticamente ammissibile e verificandone, a posteriori, l'ammissibilità con la soluzione dinamica.

Prendendo $M=M_0$ in A e B, come viene riportato nella soluzione trovata, si procede imponendo l'ammissibilità plastica, ovvero, che in ogni sezione ad eccezione di A e B dove si trova la cerniera plastica si abbia un momento inferiore a quello plastico.

Per far ciò rendo la struttura isostatica e considero un sistema fittizio dove è presente un momento X Che sostituisce il vincolo alla rotazione dato dall'incastro in A, ottenendo così:

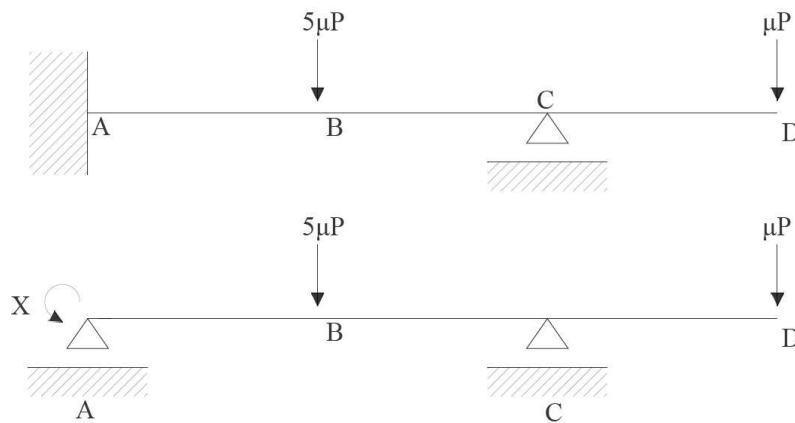


Fig.4.10 : Determinazione del sistema iperstatico.

Determinando la reazioni vincolari, a meno dell'incognita iperstatica X si ottiene:

$$Y_A = 2\mu P + Xl/2$$

$$Y_C = 4\mu P - Xl/2$$

È possibile determinare il momento flettente della struttura iperstatica come la somma del momento nella struttura isostatica e del sistema fittizio con l'incognita iperstatica, cui la soluzione segue:

$$M_{(Z)} = M_{(Z)}^0 + X_i M_{(Z)}^*$$

Da cui otteniamo:

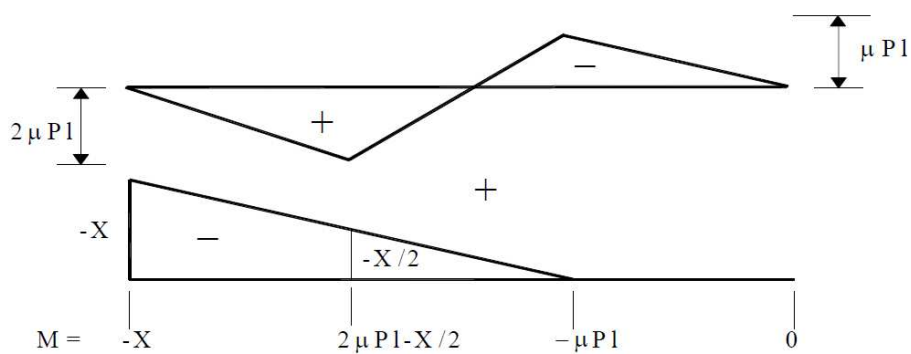


Fig.4.11 : Diagramma del momento rispettivamente delle strutture in Fig.4.10.

esso è di facile determinazione. Imponendo l'ammissibilità plastica, cioè come già detto di non aver momento plastico in nessuna parte della trave si ottiene:

Sez. A: $|X| \leq M_0$

Sez. B: $|2\mu PL + \frac{X}{2}| \leq M_0$

Sez. C: $|-\mu PL| \leq M_0$

Prendendo la soluzione staticamente ammissibile nel *meccanismo di collasso 2* analizzato, con $M_0 = M_A = M_B$ si ottiene:

$$\begin{cases} X = M_0 \\ 2\mu_{S3}PL - \frac{X}{2} = M_0 \end{cases} \quad \text{Sostituendo: } 2\mu_{S3}PL - \frac{M_0}{2} = M_0 \quad \text{Ottenendo: } \mu_{S3} = \frac{3M_0}{4PL}$$

Che risulta soluzione staticamente ammissibile: $\mu_{S3} = \mu_c$

Nel caso avessimo preso un altro meccanismo di collasso, come il meccanismo 1 dove $M_0 = M_c$ avremmo ottenuto:

$$\mu PL = M_0 \quad \text{Da cui esplicitando si ottiene: } \mu_{S1} = \frac{M_0}{PL}$$

Dove però A e B risultano ancora indeterminate, e ponendo il momento plastico $|2M_0 - X/2| \leq M_0$ da cui si ottiene $X > M_0$, ma è una soluzione plasticamente non ammissibile.

Esempio n.2: Portale soggetto a carichi concentrati

Prendendo come struttura di applicazione un telaio, come in *Fig. 4.12*, tre volte iperstatico, dove sono applicati due carichi concentrati, si vuole determinare il moltiplicatore di collasso e il carico conseguente. Come nell' esempio precedente si assume che lo sforzo normale (ed il taglio) non influenzino la condizione di ammissibilità plastica.

Risulta che le forze applicate siano $F=50 \text{ KN}$ e $L=3,00 \text{ m}$.

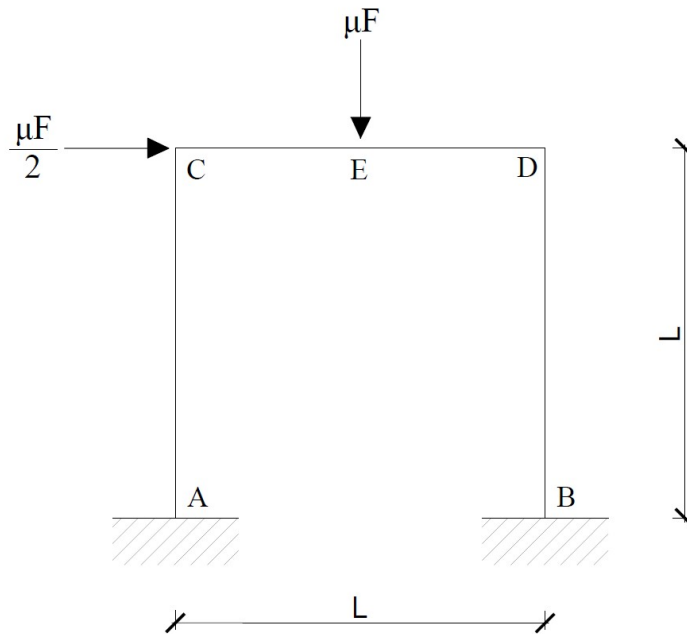


Fig. 4.12: Portale sottoposto a carichi concentrati.

Come nel caso precedente si parte considerando il Teorema cinematico cioè i possibili cinematismi che possono essere localizzati nei nodi, nei punti di applicazione dei carichi e nei vincoli.

Meccanismo Nr. 1: Le cerniere plastiche si formano in corrispondenza dei nodi C, E e D come illustrato nella *Fig. 4.13*.

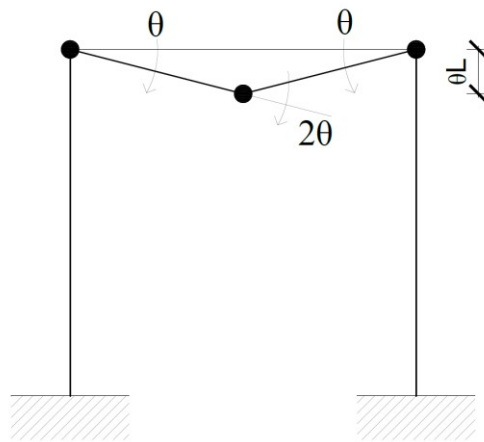


Fig. 4.13: Meccanismo 1 di tipo locale.

Così facendo si ha un cinematismo locale che coinvolge solo la trave superiore. Come prima si procede analizzando il lavoro compiuto dalle forze esterne e della Dissipazione prodotta dai carichi, ottenendo:

$$D_i = 4M_0 \delta \quad , \quad L_e = F\delta L/2 \quad \longrightarrow \quad \mu_1 = \frac{D_i}{L_e} = \frac{8M_0}{FL}$$

Meccanismo Nr. 2: è un meccanismo di tipo globale, come mostrato nella figura seguente:

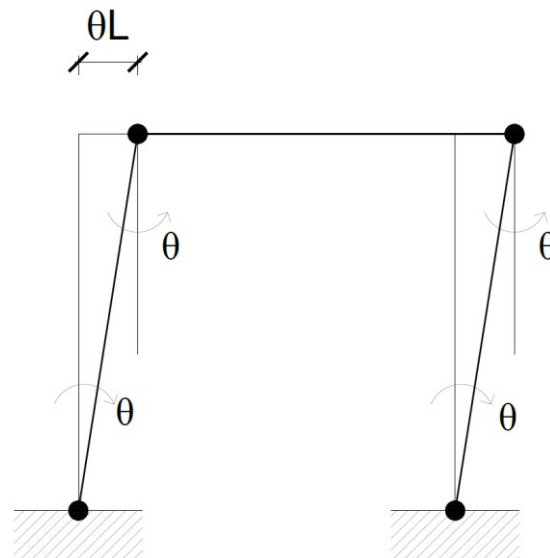


Fig. 4.14: Meccanismo 2 di tipo globale.

$$D_i = 4M_0 \delta / FL \quad , \quad L_e = F\delta L/2 \quad \longrightarrow \quad \mu_2 = \frac{D_i}{L_e} = \frac{8M_0}{FL}$$

Meccanismo Nr. 3: è anch'esso un meccanismo di tipo globale, come in Fig. 1.13:

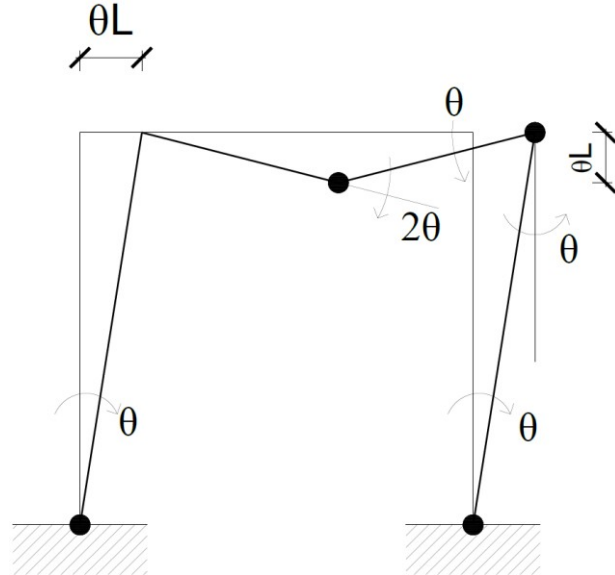


Fig. 4.15: Meccanismo 3 di tipo locale.

$$D_i = 6M_0 \delta \quad , \quad L_e = F\delta L/2 + F\delta L/2 \quad \longrightarrow \quad \mu_3 = \frac{D_i}{L_e} = \frac{6M_0}{FL}$$

Andando ad analizzare altre tipologie di meccanismi, alcuni di questi vengono considerati impossibile come quello riportato in Fig. 4.16. Il seguente meccanismo risulta impossibile vista la distribuzione dei carichi, dove la forza verticale è considerata positiva. I carichi così distribuiti esplicano un lavoro esterno positivo.

Per il teorema statico si assume come meccanismo di collasso sia quello che soddisfi:

$$\min(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = \mu_3$$

Così il Meccanismo di collasso coincide con il terzo.

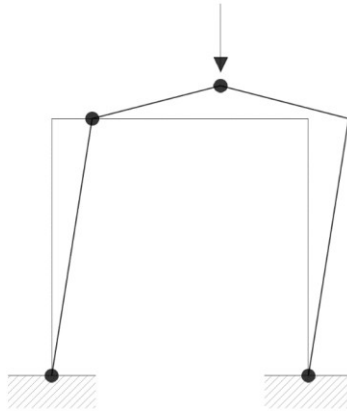


Fig. 4.16: Meccanismo non congruente all'azione delle forze

Si procede con l'applicazione del teorema statico andando solamente a verificare che il meccanismo scelto sia staticamente ammissibile e non andando a determinare la minima soluzione staticamente ammissibile. Segue il problema della determinazione del momento per la struttura mostrata in Fig. 4.15.

Si può risolvere, essendo una struttura iperstatica, con diverse modalità quali il metodo delle forze con l'ausilio di alcune equazioni ausiliarie e un sistema fittizio. Lo scopo è quello di determinare le reazioni vincolari e di conseguenza il diagramma del momento che va a impegnare la struttura.

$$\begin{aligned}
 & Y_A + Y_B - \frac{6M_0}{l} = 0 \\
 \text{Eq. Di equilibrio:} \quad & -X_A - X_B + \frac{3M_0}{l} = 0 \\
 & \left\{ \begin{aligned} Y_B l + 2M_0 - \frac{6M_0 l}{2l} - \frac{3M_0 l}{l} &= 0 \end{aligned} \right. \\
 \text{Eq. ausiliarie:} \quad & \left\{ \begin{aligned} E: \frac{Y_A l}{2} - M_0 + X_A l - M_0 &= 0 \\ D: M_0 - X_B l + M_0 &= 0 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Dalla risoluzione dell'iperstatica si determinano le reazioni vincolari e il relativo grafico del momento flettente:

$$Y_A = \frac{2M_0}{l}, \quad X_A = \frac{M_0}{l}, \quad Y_B = \frac{4M_0}{l}, \quad X_B = \frac{2M_0}{l}$$

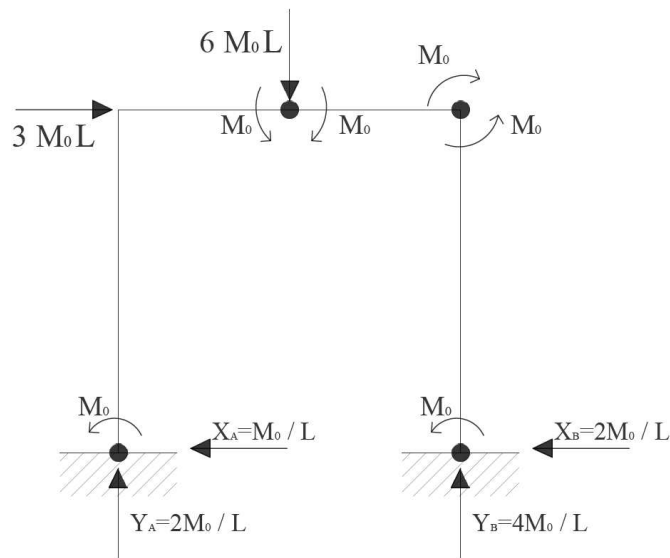
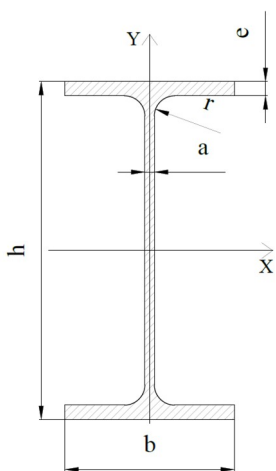


Fig.4.17: Determinazione delle reazioni vincolari.

La soluzione, mostra un risultato staticamente ammissibile, così la nostra soluzione a tale meccanismo, per il teorema cinematico, in accordo con quello statico dà:

$$\mu_c = 6M_0/FL$$



Il dimensionamento dell'opera impone l'utilizzo per tale portale di un Profilo IPE200, cui caratteristiche seguono quelle usate nell'esempio precedente, si procede calcolando il Modulo di resistenza plastico:

$$W_{pl} = \frac{h^2 b}{4} = \frac{(200^2 \cdot 100)}{4} - 2 \frac{(183^2 \cdot 7,2)}{4} = 209,66 \text{ cm}^3$$

Del corrispondente momento plastico:

$$M_{pl} = W_{pl} f_{yk} = 209,66 \cdot 235 \cdot 10^{-3} = 49,27 \text{ KN}$$

Avendo così a disposizione il momento plastico si può ricavare il coefficiente di collasso:

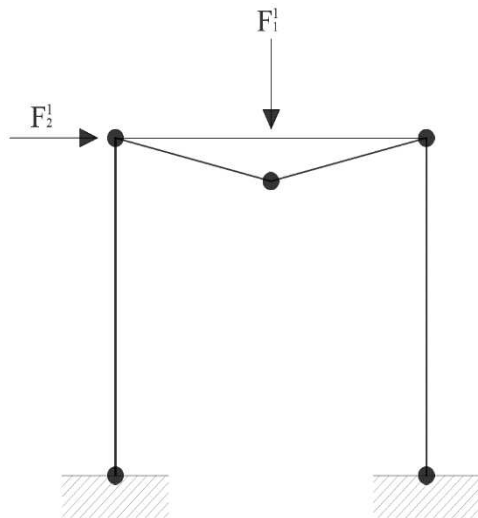
$$\mu_c = \frac{6M_0}{Fl} = 6 \cdot \frac{49,27}{50 \cdot 3} = 1,97$$

Si vanno a determinare così i carichi critici che porterebbero al collasso della struttura:

$$F_1 = \mu_c F/2 = 1,97 \cdot 50/2 = 49,25 \text{ KN}$$

$$F_2 = \mu_c F = 1,97 \cdot 50 = 98,5 \text{ KN}$$

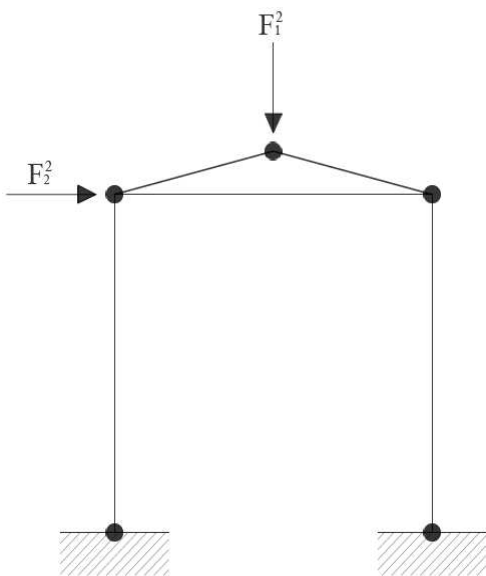
Si osserva però che l'analisi così riportata è strettamente legata alla distribuzione dei carichi imposta inizialmente, mentre se questi risultassero variabili non risulterebbe più significativa e bisognerebbe ripetere la procedura appena effettuata. Si può ovviare costruendo un dominio di appartenenza per la struttura in esame, che al variare dell'intensità delle forze F_1 e F_2 riesca ad identificare, o meno, una configurazione di equilibrio:



Considerando il meccanismo 1 dove si nota a priori che il responsabile del collasso sia la forza verticale, senza l'influenza di quella orizzontale. Procedendo come nell'esempio precedente relativo al meccanismo di collasso 2, andiamo a determinare la forza verticale responsabile del collasso, che vale:

$$F_1^1 = 8M_0/l$$

Volendo rappresentare il seguente meccanismo in un diagramma F_1 - F_2 come in Fig. 4.19 essa è una retta identificata dagli estremi 1-1, e per essere in equilibrio con tale soluzione si deve essere nello spazio inferiore definito da tale retta: $F < F_1^1$.



Per il meccanismo 2 si può determinare la soluzione reciproca a quella appena definita dove il carico verticale risulta negativo e responsabile del cinematismo di trave, similmente al caso precedente si scrive:

$$F_1 > \frac{8M_0}{l}$$

Determinando così una retta specchiata rispetto all'origine rispetto alla precedente, rispecchiando un cinematismo opposto.

Fig. 4.18: Possibili Meccanismi 1, 2 per variazioni di F_1 e F_2

Si procede così a determinare altri meccanismi di collasso per determinare i possibili estremi del dominio.

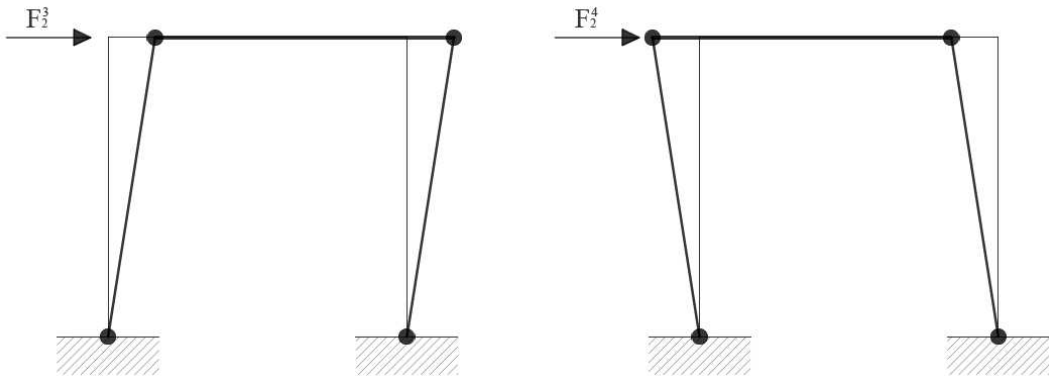


Fig. 4.19: Meccanismi di collasso 3 e 4

In Fig. 4.19 si notano i meccanismi 3 e 4 che hanno come carico responsabile del cinematismo evidentemente il carico orizzontale, con carichi critici:

$$F_2^3 < \frac{4M_0}{l} \quad , \quad F_2^4 > -4M_0l$$

Il collasso relativo al meccanismo 3 è associato alla retta 3-3, mentre per il meccanismo 4 si associa la retta 4-4.

I meccanismi globali indicati in Fig. 1.17 e Fig. 1.18 sono di tipo globali e vanno a identificare nel diagramma F_1 - F_2 le rette rispettivamente al proprio carico critico.

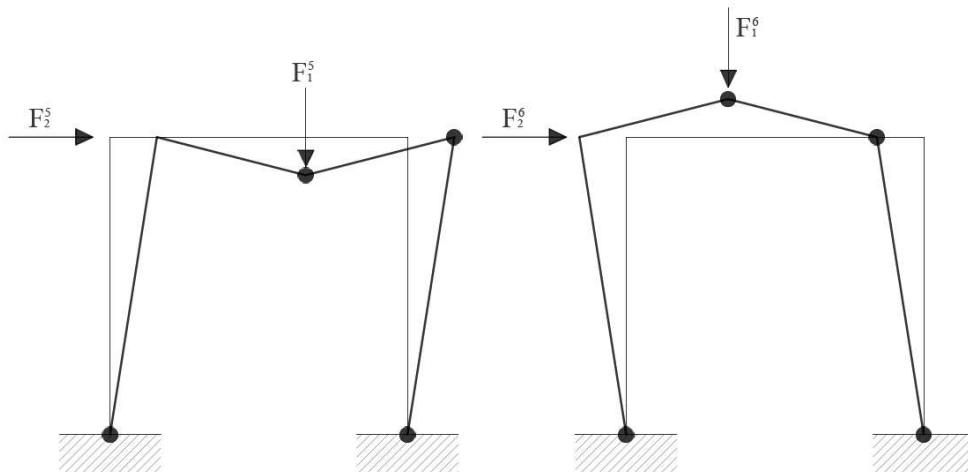


Fig.4.20: Meccanismi di collasso 5 e 6

$$\frac{F_1 l}{2} + F_2 l < 6M_0 \quad , \quad \frac{F_2 l}{2} + F_1 l > -6M_0$$

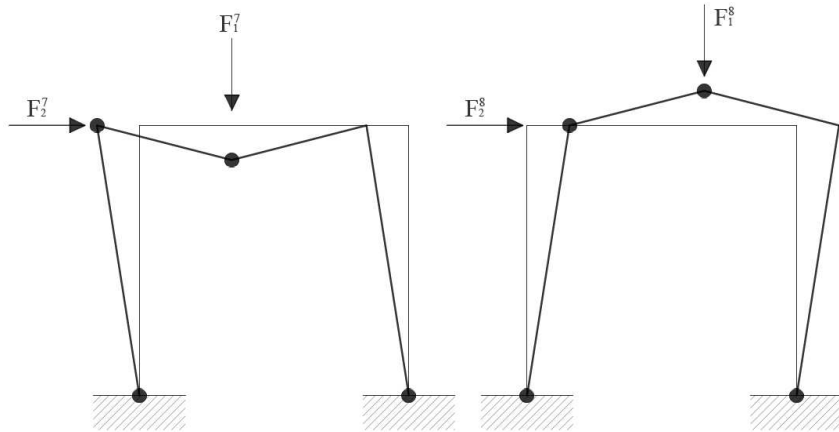


Fig. 4.21: Meccanismi di collasso 7 e 8

$$-F_2 l + \frac{F_1 l}{2} < 6M_0 \quad , \quad \frac{F_2 l}{2} - F_2 l + \frac{F_1 l}{2} > -6M_0$$

Andando a inserire le informazioni trovate nel nostro grafico F_1 - F_2 , reso adimensionale rispetto a $F_0 = M_0 l$, si ottiene un dominio convesso, chiuso e limitato come indicato nella Fig.4.22.

Gli estremi di questa figura rappresentano le condizioni limite a cui la struttura può essere sottoposta per i nostri sistemi di forze variabili:

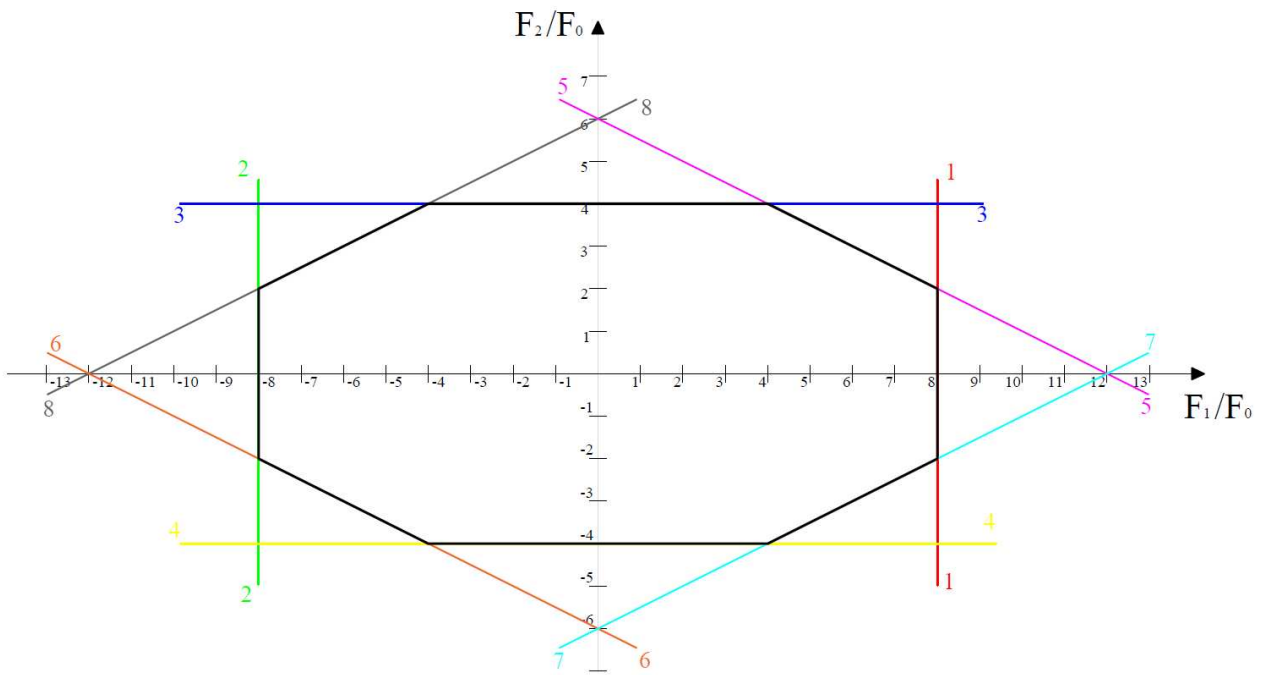


Fig.4.22: Dominio di resistenza strutturale del portale in Fig. 4.12 sottoposto a carichi verticali e orizzontali.

Esempio n.3: Telaio piano multipiano

Considerando il telaio in figura, dove sono presenti carichi verticali e orizzontali, si vuole determinare il moltiplicatore di collasso che porterebbe al raggiungimento del carico limite della struttura. Per semplicità si assume che la struttura sia formata da travi omogenee, così come le colonne, ottenendo così due momenti plastici diversi: M_{0c} per colonne e M_{0t} per i travi; come nei casi precedenti si trascurano sforzo normale e taglio.

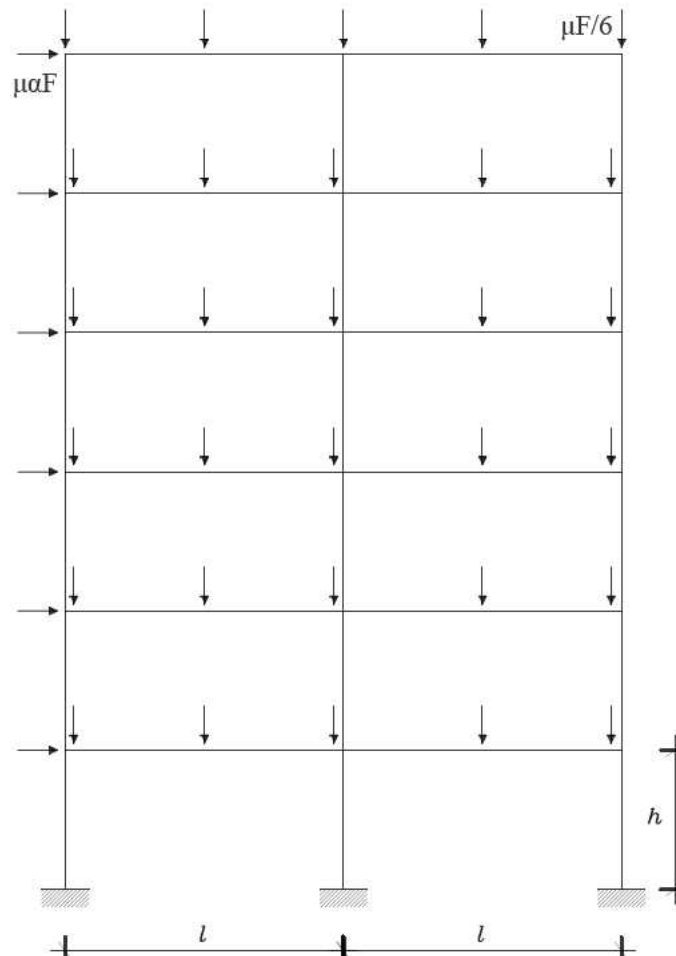


Fig.4.23: telaio multipiano in esame

Il telaio così riportato, considera le colonne verticali come corpi unici, così come i travi di piano, ottenendo così una struttura composta da tre colonne e sei travi. Il telaio risulta 36 volte iperstatico; la struttura è soggetta a carichi verticali di intensità $\mu F/6$ e da carichi orizzontali pari a $\mu \alpha F$ dove α , come nell'esempio 1 risulta un coefficiente che regola l'intensità del carico.

Nell'analisi di seguito si eseguirà una semplificazione considerando 3 possibili meccanismi atti ad individuare il moltiplicatore μ , ma data l'elevata iperstaticità considerare solamente tre meccanismi può sembrare riduttivo, questa semplificazione

risulta estremamente restrittiva e si discosta notevolmente dalla realtà ma risulta comunque utile per l'applicazione del teorema in oggetto.

Meccanismo Nr. 1:

Considerando un meccanismo di tipo globale che coinvolga la formazione di cerniere alle estremità delle travi e alla base delle colonne si fa riferimento a un meccanismo simile a quello indicato in Fig. 4.24.

Come si nota è i soli carichi orizzontali sono i responsabili del cinematismo.

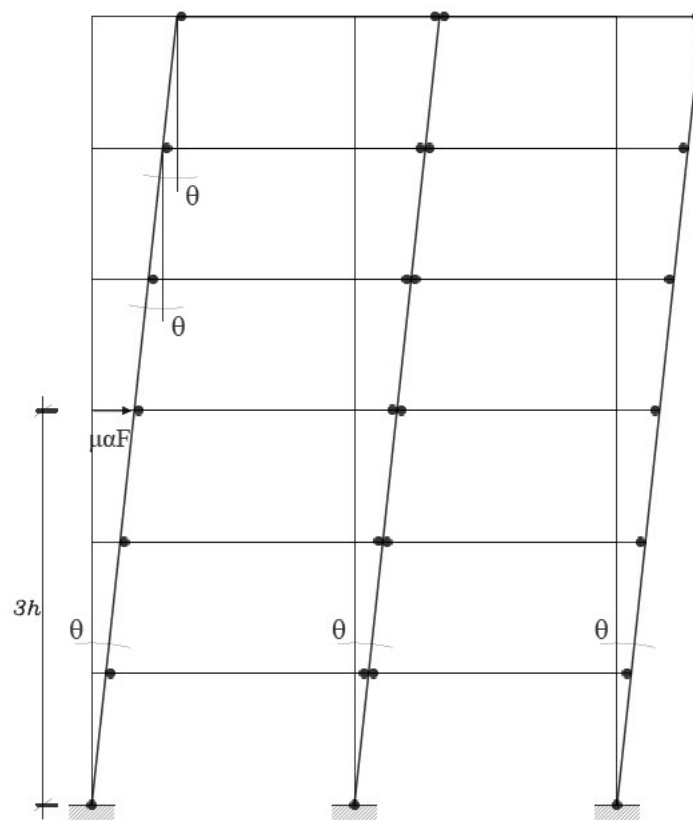


Fig.4.24: Meccanismo 1 di collasso della struttura multipiano

Come nei casi precedenti si procede all'applicazione teorema cinematico determinando il lavoro delle forze esterne e la dissipazione, dove teniamo conto dei diversi momenti plastici per colonne e travi:

$$L_e = \alpha F \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)h \theta = 21\alpha Fh\theta$$

$$D_i = 3M_{0c}\theta + 4 \cdot 6M_{0t}\theta = 3\theta(M_{0c} + 8M_{0t})$$

Determinando il moltiplicatore cinematico:

$$\mu_1 = \frac{D_i}{L_e} = \frac{3\theta(M_{0c} + 8M_{0t})}{21\alpha Fh\theta} = \frac{M_{0c} + 8M_{0t}}{7\alpha Fh}$$

Meccanismo Nr. 2:

Si considera un altro meccanismo globale che permette la formazione di cerniere plastiche nel mezzo delle 2 campate, nelle estremità delle travi e nelle basi delle colonne.

Si va a considerare rispetto il caso precedente anche i carichi verticale come responsabili del cinematismo, quindi la labilità sarà più complessa rispetto il caso precedente come mostra la Fig. 4.25.

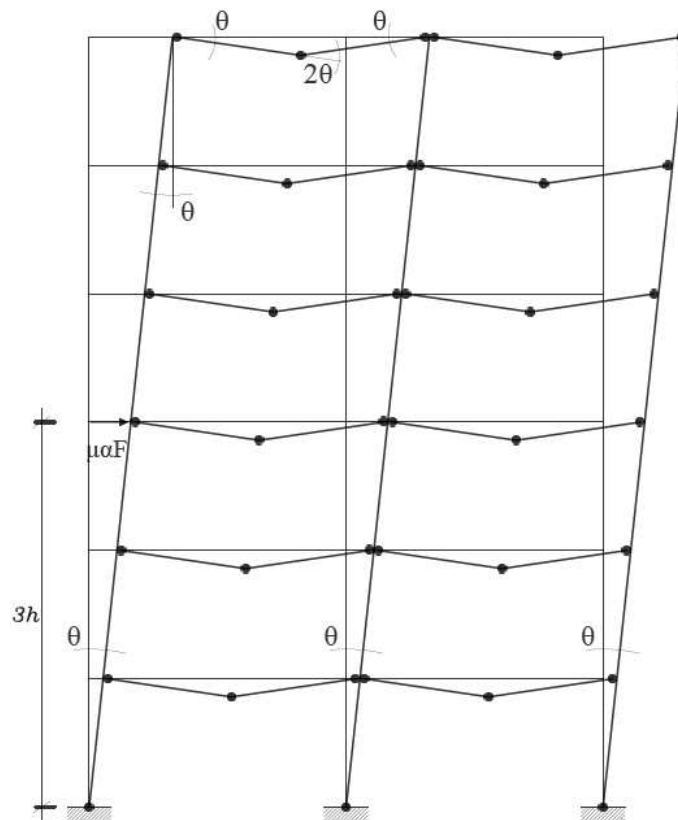


Fig. 4.25: Meccanismo 2 di collasso della strutta multipiano

Si aggiunge, a una labilità delle colonne, un cinematismo nelle campate delle travi per l'evidente aumento, rispetto ai casi precedenti, dei carichi verticali. Si procede, come di consuetudine determinando il lavoro svolto dalle forze esterne e nel calcolo della dissipazione:

$$L_e = 21\alpha Fh\theta + 2 \cdot \frac{F l}{6} \theta = \theta F \left(\frac{l}{6} + 21\alpha h \right)$$

$$D_i = 3M_{0c}\theta + 2 \cdot 6M_{0t}\theta + 2 \cdot 6M_{0t}2\theta = 3\theta(M_{0c} + 12M_{0t})$$

Che determinano il moltiplicatore cinematico:

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \frac{D_i}{L_e} = \frac{3\theta(M_{0c} + 12M_{0t})}{\theta F \left(\frac{l}{6} + 21\alpha h \right)} = \frac{3(M_{0c} + 12M_{0t})}{\frac{Fh}{6} \left(\frac{l}{h} + 126\alpha \right)} = \frac{18(M_{0c} + 12M_{0t})}{Fh \left(\frac{l}{h} + 126\alpha \right)} = \\ &= \frac{M_{0c} + 12M_{0t}}{7\alpha Fh \left(1 + \frac{l}{126\alpha h} \right)} \end{aligned}$$

Meccanismo Nr. 3:

Nell'ultimo caso si può considerare la formazione di cerniere plastiche nelle basi delle colonne e nelle estremità delle stesse nel nodo con il solaio nel piano primo, come mostrato in *Fig. 4.26*.

Si nota come sia un meccanismo locale ma che porterebbe comunque ad un collasso deciso nella nostra struttura, questo a causa del carico orizzontale evidentemente maggiore del verticale.

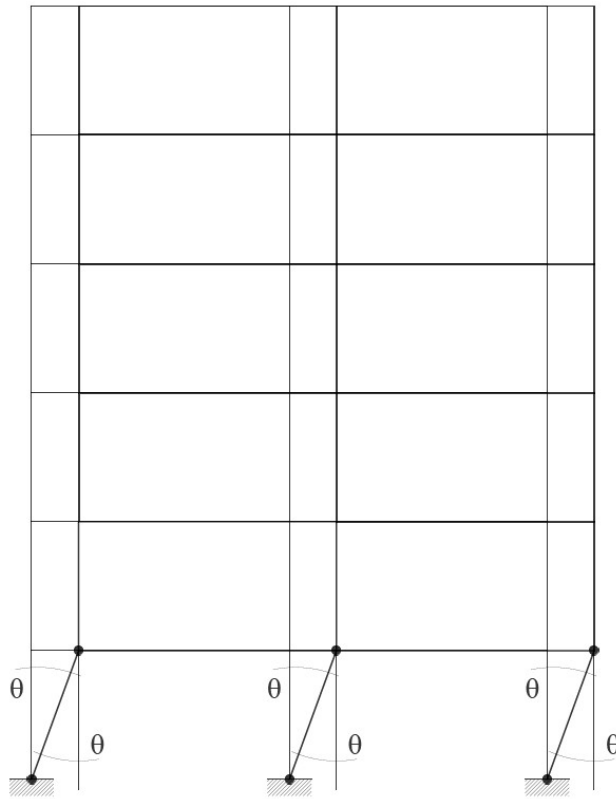


Fig. 4.26: Meccanismo 3 di collasso della strutta multipiano

Il lavoro esterno e la Dissipazione per questo caso valgono rispettivamente:

$$L_e = 6h\theta \alpha F$$

$$D_i = 6M_{0c}\theta$$

Che determinano il moltiplicatore cinematico:

$$\mu_3 = \frac{D_i}{L_e} = \frac{M_{0c}}{\alpha F h}$$

Si può ora seguire un approccio grafico, consigliato dall'autore B.G. Neal che nel suo elaborato "The Plastic methods of structural analysis" dove afferma che un approccio grafico, come quello usato nell'esempio precedente, sia migliore per strutture complesse nell'applicazione dell'Analisi Limite.

Si procede quindi a definire delle equazioni per i moltiplicatori di collasso da rappresentare in seguito in un Diagramma (M;μ); si adoperano le seguenti semplificazioni:

$$\mu'_k = \frac{\mu_k F h}{M_{0c}}$$

$$M' = \frac{M_{0t}}{M_{0c}}$$

Sostituendo queste semplificazioni nelle equazioni ottenute si ottiene per il Meccanismo di collasso numero uno:

$$\frac{M_{0c} + 8M_{0t}}{7\alpha F h \mu_k} = \frac{M_{0c}}{7\alpha F h \mu_k} + \frac{8M_{0t}}{7\alpha F h \mu_k} = \frac{1}{7\alpha \mu'_k} + \frac{8M_{0t}}{7\alpha M_{0c} \mu'_k}$$

Da cui si ottiene:

$$\mu'_{k1} = \frac{1}{7\alpha} + \frac{8M'}{7\alpha}$$

Che risulta una retta nel diagramma (M;μ); si procede analogamente per il Meccanismo di collasso numero 2:

$$\begin{aligned} \frac{M_{0c} + 12M_{0t}}{7\alpha F h \mu_k \left(1 + \frac{l}{126\alpha h}\right)} &= \frac{M_{0c}}{7\alpha F h \mu_k \left(1 + \frac{l}{126\alpha h}\right)} + \frac{12M_{0t}}{7\alpha F h \mu_k \left(1 + \frac{l}{126\alpha h}\right)} = \\ &= \frac{1}{7\mu'_k \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{l}{126h}\right)} + \frac{12M_{0t}}{7\mu'_k M_{0c} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{l}{126h}\right)} \end{aligned}$$

Da cui si ottiene un'ulteriore equazione di una retta:

$$\mu'_{k2} = \frac{1}{7 \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{l}{126h}\right)} + \frac{12M'}{7 \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{l}{126h}\right)}$$

E nel terzo caso si conclude semplicemente:

$$\mu'_{k3} = \frac{1}{\alpha}$$

Per tracciare queste rette nel diagramma (M;μ) si notificano diverse varianti: avendo applicato un coefficiente α si nota che al variare di quest'ultimo varieranno anche le rette, come al variare del Momento plastico del materiale, scelto a priori, e dalle sezioni oggetto dell'analisi. Si traccia così un diagramma qualitativo secondo le seguenti informazioni:

1. L'intercetta della retta relativa al meccanismo 1 è sempre maggiore rispetto alla retta che rappresenta il meccanismo 2: $A_1 > A_2$
2. La retta numero 3 è orizzontale.
3. Si possono determinare le intersezioni delle rette 1 e 3 in B_1 dal sistema seguente:

$$\begin{cases} \mu'_{k1} = \frac{1}{7\alpha} + \frac{8M'}{7\alpha} \\ \mu'_{k3} = \frac{1}{\alpha} \end{cases} \text{ che determinano l'intersezione nel punto: } B_1 : \left(\frac{3}{4}; \frac{1}{\alpha} \right)$$

E l'intersezione tra 2 e 3 in B_2 dal sistema:

$$\begin{cases} \mu'_{k2} = \frac{1}{7\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{l}{126h}\right)} + \frac{12M'}{7\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{l}{126h}\right)} \\ \mu'_{k3} = \frac{1}{\alpha} \end{cases}$$

che determinano l'intersezione nel punto: $B_2 : \left(\frac{1}{2} + \frac{l}{126h\alpha}; \frac{1}{\alpha} \right)$

Come indicato precedentemente si distinguono ora due casi in base al valore del coefficiente α ma anche per le caratteristiche geometriche della struttura:

- Caso 1: $B_1 > B_2$

Si ottiene dalla posizione nelle ascisse diversa, avendo stessa ordinata: $M'_1 > M'_2$

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} &> \frac{1}{2} + \frac{l}{126h\alpha} \\ \alpha &> \frac{l}{54h} \end{aligned}$$

Da cui otteniamo:

$$\frac{l}{h\alpha} < 54$$

- Caso 2: $B_1 < B_2$

Dalla posizione: $M'_1 < M'_2$

$$\frac{3}{4} < \frac{1}{2} + \frac{l}{126h\alpha}$$

Da cui otteniamo:

$$\frac{l}{h\alpha} > 54$$

Andando ad esaminare il caso 1 abbiamo che nell'applicazione del teorema cinematico, che ricordiamo impone di prendere il minimo moltiplicatore cinematicamente ammissibile per i vari meccanismi, si deve determinare il punto d'intersezione C tra le rette 1 e 2 come si mostra in Fig. 1.24. Si determina C, come nei casi precedenti dal sistema:

$$\begin{cases} \mu'_{k1} = \frac{1}{7\alpha} + \frac{8M'}{7\alpha} \\ \mu'_{k2} = \frac{1}{7(\frac{1}{\alpha} + \frac{l}{126h})} + \frac{12M'}{7(\frac{1}{\alpha} + \frac{l}{126h})} \end{cases}$$

che determina C: $(\frac{\frac{l}{126h\alpha}}{4(1-\frac{l}{63h\alpha})}; \frac{1}{7\alpha} + \frac{8}{7\alpha} \frac{\frac{l}{126h\alpha}}{4(1-\frac{l}{63h\alpha})})$

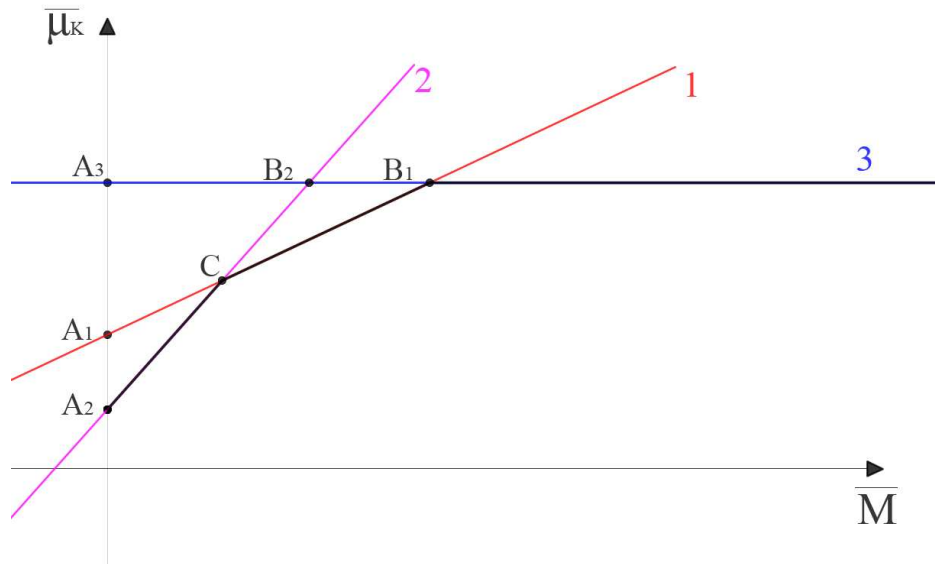


Fig. 4.27: Determinazione del minimo moltiplicatore cinematicamente ammissibile per il caso 1

Come mostrato in figura, si determina il minimo moltiplicatore cinematicamente ammissibile ed è la polilinea nera che ricalca la minima delle tre rette come segue:

Tra: $0 \leq M' \leq \frac{\frac{l}{126h\alpha}}{4(1-\frac{l}{63h\alpha})}$ il minimo moltiplicatore risulta: μ_{k2}

Tra: $\frac{\frac{l}{126h\alpha}}{4(1-\frac{l}{63h\alpha})} \leq M' \leq \frac{3}{4}$ il minimo moltiplicatore risulta: μ_{k1}

Oltre: $M' \geq \frac{3}{4}$ il minimo moltiplicatore risulta: μ_{k3}

Abbiamo così moltiplicatori diversi al crescere di M' .

Prendendo invece il caso 2, avendo $A_1 > A_2$, $B_1 < B_2$ non si determina un'intersezione tra le rette 1 e 2 e si segue il grafico qui riportato in Fig. 1.24:

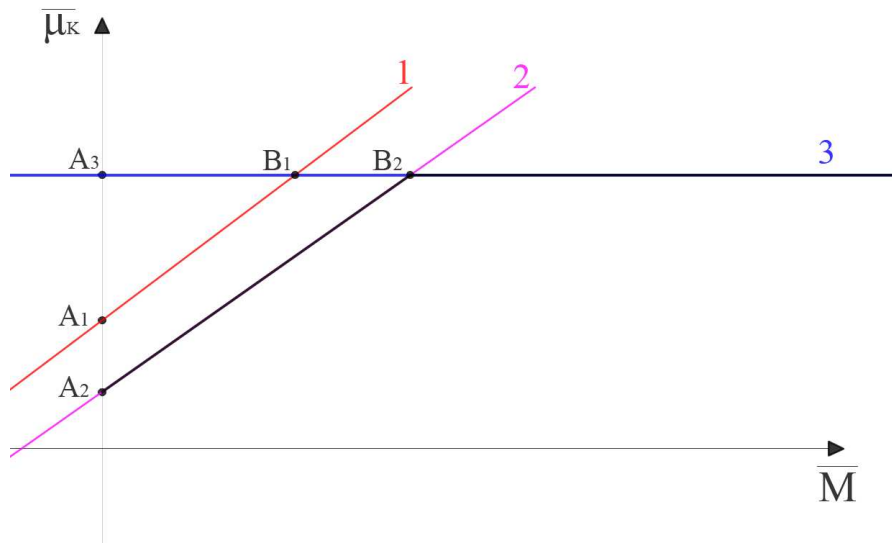


Fig.4.28: Determinazione del minimo moltiplicatore cinematicamente ammissibile per il caso 2

Dove si determinano facilmente gli intervalli con l'intersezione B2 che divide l'intervallo di funzionamento secondo i meccanismi 2 e 3:

Tra: $0 \leq M' \leq \frac{1}{2} + \frac{l}{126h\alpha}$ il minimo moltiplicatore risulta: μ_{k2}

Da: $M' \geq \frac{1}{2} + \frac{l}{126h\alpha}$ il minimo moltiplicatore risulta: μ_{k3}

Avendo così due moltiplicatori anziché tre del caso principale; si nota che in entrambi i casi si hanno diversi moltiplicatori per diversi intervalli, considerandone solamente tre meccanismi.

I moltiplicatori cinematicamente ammissibili a meno delle semplificazioni effettuate sono gli stessi, si può inoltre dimostrare che sono anche staticamente ammissibili.

Si conclude dimensionando la struttura ottenuta con dei profili IPE in acciaio, dove la struttura in esame rappresenta una semplificazione della struttura di 6 piani:

$$L = 7,00 \text{ m}$$

$$h = 3,00 \text{ m}$$

I carichi risultano per $\alpha = 0,1$ e $F = 200 \text{ KN}$: per il carico verticale $33,3\mu$ e da carichi orizzontali pari a 20μ

Verifichiamo essenzialmente in quale caso ci troviamo:

$$\frac{l}{h\alpha} = \frac{7,00}{3,00 \cdot 0,1} = 23,33 < 54$$

Trovandoci nel caso 1 si può proseguire con la determinazione del punto d'intersezione C:

$$C: \left(\frac{\frac{l}{126h\alpha}}{4 \left(1 - \frac{l}{63h\alpha}\right)} = 0,0105 ; \frac{1}{7\alpha} + \frac{8}{7\alpha} \frac{\frac{l}{126h\alpha}}{4 \left(1 - \frac{l}{63h\alpha}\right)} = 2,269 \right)$$

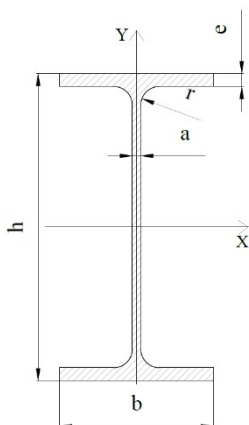
Quindi il moltiplicatore cinematicamente ammissibile adimensionalizzato:

Tra: $0 \leq M' \leq 0,0105$ il minimo moltiplicatore risulta:

$$\mu_{k2} = \frac{M_{0c} + 12M_{0t}}{7\alpha Fh \left(1 + \frac{l}{126\alpha h}\right)}$$

Tra: $0,0105 \leq M' \leq \frac{3}{4}$ il minimo moltiplicatore risulta: $\mu_{k1} = \frac{M_{0c} + 8M_{0t}}{7\alpha Fh}$

Oltre: $M' \geq \frac{3}{4}$ il minimo moltiplicatore risulta: $\mu_{k3} = \frac{1}{\alpha} = 10$



Per determinare il profili che useremo per travi e colonne consideriamo i carichi, ipotizzando che l'intero sforzo sia di flessione, trascurando quindi sforzo normale e di taglio, così il carico verticale provocherà flessione nella trave e il carico orizzontale nella colonna dove la flessione massima che si verifica a metà altezza risulta:

$$M_C = 20 \cdot 9 = 180 \text{ KNm}$$

Determinando il modulo di resistenza:

$$W_{el} = \frac{M_C}{f_{yd}} = \frac{180 \cdot 10^6}{235} = 765.957,45 \text{ mm}^3$$

Da sagomario si identifica un profilo IPE330 avente caratteristiche di resistenza maggiori cosicchè si abbia passato la zona elastica e si sia già in fase plastica per non sovradimensionare eccessivamente la struttura:

$A = 72,2 \text{ cm}^2$, $W = \frac{h^2b}{4} = 4.356.000 \text{ mm}^3$ che determina un momento plastico:

$$M_{0c} = W_{pl} f_{yk} = 4356,0 \cdot 235 \cdot 10^{-3} = 1023,66 \text{ KNm}$$

Facendo il medesimo procedimento per la trave risulta necessario un profilo IPE270 con momento plastico:

$$M_{0t} = 578,19 \text{ KNm}$$

Potendo così determinare il valore di M' dato dalla semplificazione effettuata:

$$M' = \frac{M_{0t}}{M_{0c}} = 0,565$$

Che risulta $0,0105 \leq M' \leq \frac{3}{4} = 0,75$ cioè si è nel caso 2 e il moltiplicatore che determina il collasso è quello relativo al meccanismo 1:

$$\mu_{k1} = \frac{M_{0c} + 8M_{0t}}{7\alpha Fh} = 13,45$$

Determinando così i carichi verticali di 447,88 KN e orizzontale di 269,00 KN.

BIBLIOGRAFIA

Heyman, J., **Elements of the theory of structures**, 1995, University of Cambridge, Cap. 1,7,8.

Brakefield P., Gates J., Keys D., **Development, plasticity and evolution of butterfly eyespot patterns**, 1996, Nature 384, 236–242. <https://doi.org/10.1038/384236a0> .

Massabò, R., **Resistenza del materiale e delle strutture**, 2009, Università di Genova, Materiale didattico.

Massonnet Ch., Olszak W., Phillips A., **Plasticity in structural engineering fundamentals and applications**, 1979, Springer-Verlag Wien, New York, Cap.3.

Neal, B.G., **The plastic methods of structural analysis**, 1985, University of Cambridge, Cap. 2, 3, 4.

Schulitz H.C., Sobek W., Habermann K.J., **Atlante dell' acciaio**, 2000, UTET, Cap. 5.

Valiani, A., **Analisi limite di telai**, 2012, Università di Firenze, materiale didattico.