



**Università degli Studi di Padova**

Dipartimento di Ingegneria

Corso di Laurea Triennale in Ingegneria dell'Informazione

tesi di laurea

# Modellizzazione e Controllo del Sistema Meccanico SEA

**Relatore:** Prof. Maria Elena Valcher

**Laureando:** Mattia Donami

11 luglio 2013

---

Autore: Mattia Donami

# Indice

## **1 Introduzione**

- 1.1 Utilizzo nel campo pratico . . . . .
- 1.2 Scopo e Organizzazione della Tesi . . . . .

## **2 Descrizione del Modello Dinamico**

- 2.1 Introduzione al modello . . . . .
- 2.2 Linearizzazione del Modello . . . . .

## **3 Stabilità del Sistema Linearizzato**

## **4 Funzione di trasferimento**

## **5 Controllore Stabilizzante**

## **6 Soddisfacimento delle ulteriori specifiche**

## **Bibliografia**

## **Elenco delle figure**



# Capitolo 1

## Introduzione

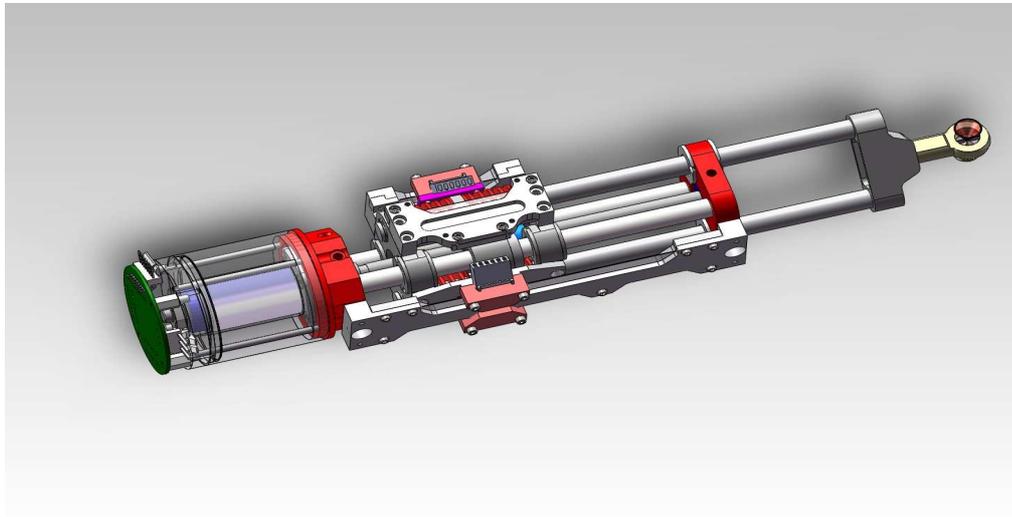


Figura 1.1: Rappresentazione del componente SEA

### 1.1 Utilizzo nel campo pratico

Il componente SEA (series elastic actuator) è un attuatore, cioè un componente in grado di trasformare un segnale di input in movimento e trova largo spazio di applicazione nel campo della robotica. Un robot che deve operare in qualsiasi tipo di situazione, necessita di un'adeguata precisione e velocità, ma soprattutto di un accurato controllo: le forze che agiscono tra i suoi componenti e l'ambiente circostante devono essere monitorate in modo tale che non ci siano problemi accidentali che possano compromettere il normale funzionamento del dispositivo.

Il SEA permette di soddisfare queste specifiche, grazie ad una molla elastica messa in serie tra un motore (di solito di tipo elettrico) e il carico da pilotare, facilitando il controllo in retroazione di tutto il sistema. Inoltre comporta altri benefici, tra cui bassa impedenza, basso attrito e buona larghezza di banda operativa. Esso usa un elemento cedevole per ridurre intenzionalmente la sua rigidità, in modo da avere una maggiore tolleranza agli urti intrinseci. Un sensore misura la deformazione della molla e grazie ad un anello di controllo l'attuatore è in grado di calcolare con precisione la forza di uscita da applicare mediante la legge di Hooke ( $F = Kx$ ). Queste caratteristiche sono desiderabili in molte applicazioni, tra cui robot bipedi, esoscheletri per l'amplificazione delle prestazioni umane, bracci robotici e sospensioni attive.

## 1.2 Scopo e Organizzazione della Tesi

Lo scopo di questa tesi è quello di progettare un controllore che riesca a soddisfare tutti i requisiti di progetto per il SEA, mediante una serie di metodi e accorgimenti visti nel corso dei tre anni accademici, partendo dallo studio di un modello matematico che descrive il principale funzionamento dell'attuatore.

La tesi è strutturata come segue.

Nel **capitolo 2** si introduce il modello del SEA, e se ne ricerca una forma più agevole per lo studio.

Nel **capitolo 3** si verifica la stabilità del sistema nei suoi punti di equilibrio.

Nel **capitolo 4** si ricerca la funzione di trasferimento del sistema, che servirà come base di appoggio per la progettazione di un controllore relativo.

Nel **capitolo 5** e nel **capitolo 6** si progettano i controllori necessari per soddisfare tutte le specifiche di progetto.

## Capitolo 2

# Descrizione del Modello Dinamico

### 2.1 Introduzione al modello

Dopo aver visto l'utilizzo in campo pratico del SEA, possiamo rappresentare il suo funzionamento, in modo approssimato, attraverso il seguente schema:

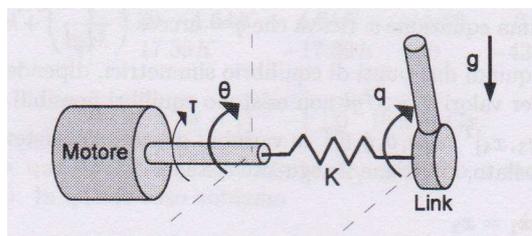


Figura 2.1: Modello del SEA

Si può notare dalla figura che l'attuatore è composto da un motore il cui albero è connesso attraverso un elemento elastico (molla torsionale) ad un link, dove esso agisce verticalmente. Il modello risulta descritto dalle seguenti equazioni differenziali:

$$\begin{cases} I\ddot{q} = -T\dot{q} - K(q - \theta) - Mgl \cos(q) \\ B\ddot{\theta} = -D\dot{\theta} - K(\theta - q) + \tau \end{cases}$$

dove  $I$  rappresenta l'inerzia del link,  $T$  il coefficiente di attrito viscoso del link,  $K$  la costante elastica della molla torsionale che collega l'albero motore al link e  $q$  lo spostamento angolare del link,  $B$  l'inerzia dell'albero motore,  $D$  il coefficiente di attrito viscoso dell'albero motore e  $\theta$  la posizione angolare dell'albero motore.

$\tau$  è la coppia motrice che agisce sull'albero del motore e rappresenta l'ingresso di controllo al sistema.  $M$ ,  $g$  e  $l$  sono rispettivamente la massa e la lunghezza *del link* e l'accelerazione di gravità. Si suppone di conoscere in ogni momento la misura della deflessione  $\sigma = \theta - q$ .

## 2.2 Linearizzazione del Modello

Si può notare che il modello derivato per il SEA è non lineare e non siamo quindi in grado di studiarne la stabilità con il metodo degli autovalori e con quello dell'equazione di Lyapunov. Pertanto si deve determinare una rappresentazione lineare approssimata del modello attorno ai suoi punti di equilibrio per applicare i metodi elencati in precedenza. Come primo passo per la ricerca di questi punti si porta il modello in forma di stato non lineare, assumendo come ingresso  $\tau$  e come vettore di stato quadridimensionale  $\mathbf{x}(t) = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T = [q, \theta, \dot{q}, \dot{\theta}]^T$ . Con queste indicazioni si riscrive il sistema come:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 = x_4 \\ \dot{x}_3 = -\frac{T}{I}x_3 - \frac{K}{I}(x_1 - x_2) - \frac{Mgl}{I}\cos(x_1) \\ \dot{x}_4 = -\frac{D}{B}x_4 - \frac{K}{B}(x_2 - x_1) + \frac{1}{B}\tau. \end{cases}$$

Dalla definizione di punto di equilibrio ad ingresso costante,

$$\begin{cases} \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_e \\ \tau(t) = \bar{\tau} = \text{costante}, \forall t \geq 0, \end{cases} \quad \rightarrow \quad \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_e, \quad \forall t \geq 0.$$

si deduce che un punto di equilibrio corrisponde ad una soluzione costante e quindi la sua derivata è nulla. Pertanto i punti di equilibrio ad ingresso costante si trovano studiando le soluzioni dell'equazione algebrica associata al modello di stato, ottenuta imponendo nulle le derivate delle variabili di stato, cioè  $[\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, \dot{x}_4]^T = [0, 0, 0, 0]^T$ , e assumendo per l'ingresso il valore costante desiderato. In tal modo si può notare la notevole semplificazione del sistema, dal momento che  $\dot{x}_1 = \dot{x}_3 = 0$  e  $\dot{x}_2 = \dot{x}_4 = 0$ . Le rimanenti due equazioni da risolvere sono:

$$\begin{cases} 0 = -\frac{K}{I}(x_1 - x_2) - \frac{Mgl}{I}\cos(x_1) \\ 0 = -\frac{K}{B}(x_2 - x_1) + \frac{1}{B}\bar{\tau}. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ricava che  $\bar{x}_2 = \bar{x}_1 + \frac{\bar{\tau}}{K}$ , che sostituita nella prima equazione porta a

$$\bar{\tau} = Mgl \cos(x_1).$$

Questa equazione ha infinite soluzioni  $\bar{x}_1 = \arccos\left(\frac{\bar{\tau}}{Mgl}\right) + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , tuttavia dal punto di vista fisico ha senso conservarne solo due. Poiché la funzione  $\arccos(\cdot)$

## 2.2 Linearizzazione del Modello

assume valori in  $[0, \pi]$ , prendiamo le due determinazioni per  $k = 0$  e per  $k = -1$ , in tal modo avremo un valore positivo in  $[0, \pi]$  ed un valore negativo in  $(-\pi, 0)$ . Tali soluzioni, sostituite nella precedente, portano alla determinazione dei due punti di equilibrio

$$\mathbf{x}_{eq} = \left( \arccos\left(\frac{\bar{\tau}}{Mgl}\right) + k\pi, \arccos\left(\frac{\bar{\tau}}{Mgl}\right) + k\pi + \frac{\bar{\tau}}{K}, 0, 0 \right), \quad k \in \{-1, 0\}. \quad (2.1)$$

Si noti che la presenza di  $\arccos(\cdot)$ , il cui argomento non deve essere mai maggiore di uno, introduce un vincolo sull'ingresso per l'esistenza dei punti di equilibrio:  $|\bar{\tau}| \leq Mgl$ . Finchè questa condizione è soddisfatta, il sistema presenta i due punti di equilibrio appena ricavati.

Ora si può determinare il sistema linearizzato attorno a ciascuno dei punti di equilibrio, partendo dal seguente sviluppo arrestato ai termini del prim'ordine:

$$\dot{x}_i = f_i(\mathbf{x}) \simeq f_i(\mathbf{x}_{eq}) + \frac{\partial}{\partial x_1} f_i(\mathbf{x}_{eq})(x_1 - \bar{x}_1) + \dots + \frac{\partial}{\partial x_4} f_i(\mathbf{x}_{eq})(x_4 - \bar{x}_4)$$

$\dot{x}_i$  rappresenta la derivata di una variabile di stato del sistema, mentre  $f_i$  rappresenta la sua espressione relativa. Il termine  $f_i(\mathbf{x}_{eq})$  è nullo per definizione di punto di equilibrio, semplificando di molto la formula. Grazie a questo possiamo scrivere il sistema in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_1} & \frac{\partial f_4}{\partial x_2} & \frac{\partial f_4}{\partial x_3} & \frac{\partial f_4}{\partial x_4} \end{bmatrix}_{(\mathbf{x}=\mathbf{x}_{eq})} \begin{bmatrix} (x_1 - \bar{x}_1) \\ (x_2 - \bar{x}_2) \\ (x_3 - \bar{x}_3) \\ (x_4 - \bar{x}_4) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{B} \end{bmatrix} (\tau - \bar{\tau})$$

Attraverso le seguenti sostituzioni  $z_i = x_i - \bar{x}_i$ ,  $u = \tau - \bar{\tau}$  ne consegue  $\dot{z}_i = \dot{x}_i$ , e si ottiene un sistema linearizzato del tipo:

$$\dot{\mathbf{z}} = F\mathbf{z} + Nu$$

ovvero, sostituendo le espressioni, si giunge a:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{K}{I} + \frac{Mgl}{I} \sin(\bar{x}_1) & \frac{K}{I} & -\frac{T}{I} & 0 \\ \frac{K}{B} & -\frac{K}{B} & 0 & -\frac{D}{B} \end{bmatrix}}_F \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{B} \end{bmatrix}}_N u$$

## Descrizione del Modello Dinamico

---

dove  $\bar{x}_1$  vale  $\arccos\left(\frac{\bar{\tau}}{Mgl}\right)$  oppure  $\arccos\left(\frac{\bar{\tau}}{Mgl}\right) - \pi$ .

Nel seguito assumeremo la deflessione  $\sigma = \theta - q$ , introdotta nell'introduzione del capitolo, come l'uscita del sistema linearizzato. In forma matriciale l'equazione relativa risulta:

$$\sigma = [1 \quad -1 \quad 0 \quad 0] \mathbf{z} = H\mathbf{z}.$$

## Capitolo 3

# Stabilità del Sistema Linearizzato

Lo studio della stabilità ci permette di valutare se lo stato del sistema rimane “ancorato” ad un suo punto di equilibrio, con ciò intendendo che l’effetto di piccole perturbazioni attorno ad esso viene annullato per  $t$  tendente all’infinito, e quindi lo stato del sistema ritorna asintoticamente nel punto di equilibrio, oppure no. Esistono vari metodi per capire il tipo di stabilità di un punto di equilibrio, di seguito verrà applicato il metodo di ricerca e studio degli autovalori del sistema linearizzato. Questo criterio fornisce una risposta in due casi:

**asintotica stabilità del punto di equilibrio** se tutti gli autovalori della matrice iacobiana  $F$ , valutata attorno al punto di equilibrio, risultano a parte reale negativa. In questa situazione, lo stato del sistema converge perfettamente al punto di equilibrio.

**instabilità** se la matrice  $F$  ha anche un solo autovalore a parte reale positiva. Lo stato del sistema asintoticamente diverge dal punto di equilibrio.

Nel caso ci fosse la presenza di uno o più autovalori a parte reale nulla, ma nessun autovalore a parte reale positiva, nulla si potrebbe dire sulla stabilità del punto di equilibrio per il sistema non lineare.

Di seguito viene presa in considerazione per prima la stabilità del sistema linearizzato attorno al punto di equilibrio dato in (2.1) e corrispondente a  $k = 0$ .

Per semplificare lo studio, vengono introdotti i valori numerici di progetto per i vari parametri introdotti in precedenza. I valori sono i seguenti:  $B = 0.0575$  Kg m<sup>2</sup>/rad;  $D = 2.5185$  Kg m<sup>2</sup>/(rad s);  $M = 0.15$  Kg;  $l = 0.5$  m;  $g = 9.81$  m/s<sup>2</sup>;  $I = 0.2156$  Kg m<sup>2</sup>/rad;  $T = 1.2$  Kg m<sup>2</sup>/(rad s);  $K = 200$  Nm/rad;  $\tau = 0.2$  Nm.

In particolare si nota che l’ingresso  $\tau(t) = \bar{\tau} = 0.2$  soddisfa la condizione  $|\bar{\tau}| \leq Mgl = 0.74$  trovata precedentemente. La costante elastica,  $K$ , in prima battuta viene lasciata in forma parametrica ai fini di una ricerca di un intervallo di valori nel quale la molla torsionale possa lavorare mantenendo l’equilibrio del

sistema asintoticamente stabile.

Di seguito viene riportato il sistema linearizzato attorno al primo punto di equilibrio in cui tutti i parametri, tranne  $K$ , sono stati sostituiti con i loro valori numerici. Sapendo che il valore della prima coordinata del punto di equilibrio (l'unica che compare esplicitamente nella matrice Iacobiana) è  $\bar{x}_1 = \arccos(\frac{u}{Mgl}) = 1.2955$ , si trova:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3.28 - 4.64K & 4.64K & -5.56 & 0 \\ 17.39K & -17.39K & 0 & -43.8 \end{bmatrix}}_F \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 17.39 \end{bmatrix}}_N u$$

Per dedurre il comportamento del sistema si ricercano gli autovalori della matrice  $F$ , ovvero gli zeri del polinomio caratteristico  $\det(\lambda I_4 - F) = 0$ , dove  $I_4$  è la matrice d'identità di dimensione 4:

$$\det \left( \begin{bmatrix} s & 0 & -1 & 0 \\ 0 & s & 0 & -1 \\ -3.28 + 4.64K & -4.64K & s + 5.56 & 0 \\ -17.39K & +17.39K & 0 & s + 43.8 \end{bmatrix} \right) =$$

$$= s^4 + 49.36s^3 + (240.248 + 22.03K)s^2 + (-143.684 + 299.92K)s - 57.039K.$$

Il calcolo esplicito degli zeri (in forma parametrica) di un polinomio di questo tipo è un'operazione alquanto ostica, tuttavia si può applicare il criterio di Routh: esso ci permette di determinare il numero delle radici a parte reale positiva di un generico polinomio di grado  $n$ , in modo da trarre una conclusione sulla sua stabilità. Si parte dalla costruzione di una tabella. Essendo  $n = 4$  e quindi pari, nella prima riga vanno i coefficienti dei termini di grado pari del polinomio in ordine decrescente, nella seconda riga quelli dispari sempre nello stesso ordine. Le righe vengono numerate in ordine decrescente, partendo dall'alto verso il basso. Ogni elemento delle righe successive corrisponde al determinante della matrice composta dai valori delle due righe superiori, più precisamente la prima colonna e la colonna successiva a quella dell'elemento da calcolare, diviso il primo coefficiente (cambiato di segno) della riga immediatamente sopra l'elemento che si sta calcolando. Se la tabella giunge a compimento e tutti gli elementi sulla prima colonna sono non nulli allora il numero di variazioni (di segno) nella sequenza

degli elementi consecutivi in prima colonna è pari al numero di radici a parte reale positiva. Se invece la tabella non giunge a compimento, si è in presenza di radici immaginarie o a parte reale positiva. Di seguito viene applicato il criterio di Routh al precedente polinomio caratteristico:

|   |  |                      |            |
|---|--|----------------------|------------|
| 4 | 1  | $240.248 + 22.03K$   | $-57.039K$ |
| 3 | 49.36  | $-143.684 + 299.92K$ | 0          |
| 2 | $243.17 + 15.95K$  | $-57.039K$           | 0          |
| 1 | $\frac{4783.72(-0.4617 + K)(15.817 + K)}{243.17 + 15.95K}$ | 0                    | 0          |
| 0 | $-57.039K$   | 0                    | 0          |

Viene messa la prima colonna sotto forma di sistema, per trovare i valori di  $K$  che permettano di avere i coefficienti della prima colonna tutti del medesimo segno:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 > 0 \\ 49.36 > 0 \\ 243.17 + 15.95K > 0 \\ \frac{4783.72(-0.4617 + K)(15.817 + K)}{243.17 + 15.95K} > 0 \\ -57.039K > 0 \end{array} \right.$$

Semplificando si ottiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} K > -15.2458 \\ K \in (-15.817, -15.2458) \cup (0.4617, \infty) \\ K < 0 \end{array} \right.$$

Si può notare che non esiste nessun valore di  $K$  che soddisfi tutte e tre le disequazioni. Ne consegue che il polinomio caratteristico non può mai avere radici tutte negative e quindi il sistema linearizzato attorno al punto di equilibrio positivo risulta essere instabile per qualunque valore assunto dalla costante  $K$ .

Si vuole ora studiare di nuovo la stabilità del sistema, ma stavolta focalizzando l'attenzione attorno al punto di equilibrio (2.1) corrispondente a  $k = -1$ , lasciando sempre variare la costante elastica  $K$ . Ricalcolando il punto usando sempre gli stessi parametri progettuali, si trova il valore  $\bar{x}_1 = \arccos\left(\frac{u}{Mgl}\right) - \pi = -1.2955$ , simmetrico rispetto al punto di equilibrio con  $k = 0$ . In corrispondenza a questo

## Stabilità del Sistema Linearizzato

---

nuovo punto la matrice Iacobiana  $F$  diventa:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3.28 - 4.64K & 4.64K & -5.56 & 0 \\ 17.39K & -17.39K & 0 & -43.8 \end{bmatrix}}_F$$

Il suo polinomio caratteristico è:

$$\det(\lambda I_4 - F) = s^4 + 49.36s^3 + (246.81 + 22.03K)s^2 + (143.66 + 299.92K)s + 57.04K$$

Applicando il criterio di Routh anche in questo caso si trova:

$$\begin{array}{c|cccc} 4 & 1 & 246.81 + 22.03K & +57.04K & \\ 3 & 49.36 & +143.66 + 299.92K & 0 & \\ 2 & 243.9 + 15.95K & +57.04K & 0 & \\ 1 & \frac{4783.72(0.5+K)(14.68+K)}{243.9+15.95K} & 0 & 0 & \\ 0 & +57.04K & 0 & 0 & \end{array}$$

da cui deriva il sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 > 0 \\ 49.36 > 0 \\ 243.9 + 15.95K > 0 \\ \frac{4783.72(0.5+K)(14.68+K)}{243.9+15.95K} > 0 \\ 57.04K > 0 \end{array} \right.$$

Semplificando si ottiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} K > -15.29 \\ K \in (-15.29, -14.68) \cup (-0.5, \infty) \\ K > 0 \end{array} \right.$$

e in questo caso la soluzione del sistema esiste ed è  $K > 0$ . Quindi per valori positivi della costante elastica (ovvero per tutti i valori della costante elastica, visto che valori negativi della stessa non avrebbero fisicamente senso!) il sistema

---

linearizzato è stabile attorno al punto di equilibrio negativo. In conclusione si può considerare il parametro di progetto  $K = 200$  valido per entrambe le configurazioni del sistema linearizzato, sia per quella con punto di equilibrio negativo che per quella positivo, essendo quest'ultimo instabile per qualsiasi valore della costante elastica. Proprio per questo motivo, lo studio successivo si concentrerà sul sistema linearizzato instabile, cercando una soluzione per risolvere il problema. Prima di proseguire, si vuole valutare il numero di autovalori instabili della matrice iacobiana del punto di equilibrio instabile per  $K = 200$ , guardando il cambio di segni nella prima colonna della tabella di Routh. La colonna risulta:

|   |  |        |
|---|--|--------|
| 4 |  | 1      |
| 3 |  | 49.36  |
| 2 |  | 3433.2 |
| 1 |  | 60004  |
| 0 |  | -11419 |

e si può osservare un solo cambio di segno tra le due ultime righe, che si traduce nella presenza di un solo polo a parte reale positiva.



## Capitolo 4

# Funzione di trasferimento

Sebbene si sia constatato che, con i valori di progetto dati, l'equilibrio del sistema linearizzato attorno al punto di equilibrio scelto risulti instabile, si può lo stesso cercare di stabilizzarlo mediante un controllore stabilizzante. Per prima cosa, bisogna ricavare la funzione di trasferimento: essa è una funzione razionale a coefficienti reali di variabile complessa che descrive completamente il comportamento del sistema, mettendone in relazione l'ingresso e l'uscita.

Si può ricavare mediante la seguente formula:

$$G(s) = H(sI - F)^{-1}N.$$

Il calcolo della matrice inversa

$$(sI - F)^{-1} = \frac{\text{adj}(sI - F)}{\det(sI - F)}$$

di dimensione  $4 \times 4$  risulta un'operazione difficoltosa da eseguire. Tuttavia si può trovare solo le componenti significative che contribuiscono alla funzione di trasferimento, in base alla forma di  $H$  ed  $N$ . Detto ciò, si sviluppa il calcolo di  $G(s)$ :

$$\frac{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +\det(A_{1,1}) & -\det(A_{2,1}) & +\det(A_{3,1}) & -\det(A_{4,1}) \\ -\det(A_{1,2}) & +\det(A_{2,2}) & -\det(A_{3,2}) & +\det(A_{4,2}) \\ +\det(A_{1,3}) & -\det(A_{2,3}) & +\det(A_{3,3}) & -\det(A_{4,3}) \\ -\det(A_{1,4}) & +\det(A_{2,4}) & -\det(A_{3,4}) & +\det(A_{4,4}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 17.39 \end{bmatrix}}{\det(sI - F)}$$

dove  $A_{i,j}$  rappresenta il determinante della sottomatrice di  $F$  ottenuta eliminando la riga  $i$  e colonna  $j$ . Risolvendo il prodotto tra matrici al numeratore risulta:

$$\frac{-17.39(\det(A_{4,1}) + \det(A_{4,2}))}{\det(sI - F)}$$

In tal caso basta solo calcolare i tre determinanti. Sostituendo a  $K$  il valore 200 la matrice  $F$  risulta:

$$\begin{bmatrix} s & 0 & -1 & 0 \\ 0 & s & 0 & -1 \\ 924.72 & -928 & s + 5.56 & 0 \\ -3478 & +3478 & 0 & s + 43.8 \end{bmatrix}$$

e il primo determinante è dato dalla sottomatrice:

$$\det(A_{4,1}) = \det \left( \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ s & 0 & -1 \\ -928 & s + 5.56 & 0 \end{bmatrix} \right) = -928$$

mentre il secondo è:

$$\det(A_{4,2}) = \det \left( \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 924.72 & s + 5.56 & 0 \end{bmatrix} \right) = s^2 + 5.56s + 924.72$$

e con una serie di semplici calcoli si possono trovare le sue radici:  $s_1 = 0.538$ ,  $s_2 = -6.097$ . Il polinomio caratteristico risulta:

$$\det(sI - F) = s^4 + 49.36s^3 + 4646.248s^2 + 59840.316s - 11407.8$$

e le sue radici sono:

$$s_1 = -17.449 + 61.966i, s_2 = -17.449 - 61.966i, s_3 = -14.65, s_4 = 0.188.$$

Si conosce tutto quello che serve per scrivere la funzione di trasferimento:

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{-17.39(s + 6.097)(s - 0.538)}{(s + 17.449 - 61.966i)(s + 17.449 + 61.966i)(s + 14.65)(s - 0.188)} = \\ &= \frac{-17.39(s + 6.097)(s - 0.538)}{(s^2 + 34.898s + 4144.253)(s + 14.65)(s - 0.188)} \end{aligned}$$

che presenta un polo a parte reale positiva (+0.188), il che comporta, come già detto in precedenza, che il sistema non sia BIBO stabile. Di seguito viene inserita la risposta al gradino assegnato  $u(t) = \delta_{-1}(t)$ , chiaramente divergente:

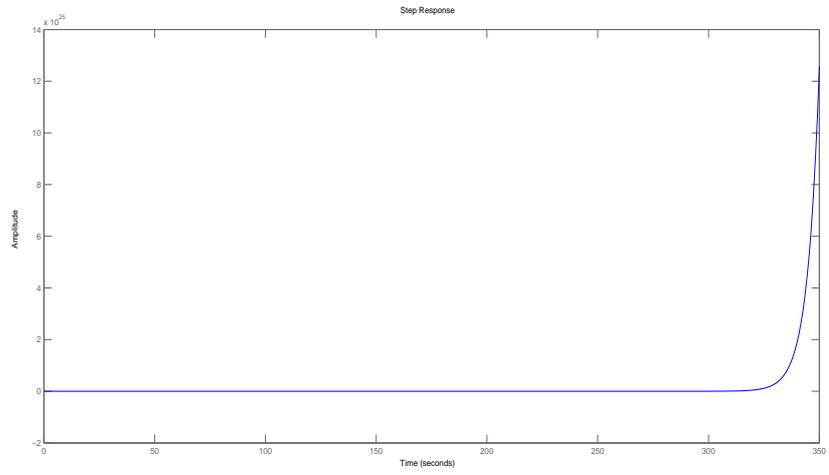


Figura 4.1: Risposta al Gradino  $u(t) = \delta_{-1}(t)$



## Capitolo 5

# Controllore Stabilizzante

Per risolvere il problema della stabilità di  $G(s)$ , come primo passo si procede con il progetto di un primo controllore  $C_1(s)$  con l'obiettivo di rendere il sistema retroazionato BIBO stabile.

La retroazione di un sistema, o controllo ad anello chiuso, è di fondamentale importanza per un sistema dinamico: essa permette di tenere conto dei valori della variabile in uscita, che vengono riportati in ingresso al controllore che agisce modificando l'ingresso del sistema. La retroazione può essere sia di tipo positivo che di tipo negativo, e in questo caso viene usata quest'ultima, perchè permette ai risultati del sistema di correggere le deviazioni del sistema stesso stabilizzandolo. Il nuovo sistema in retroazione avrà la seguente funzione di trasferimento:

$$W_1(s) = \frac{C_1(s)G(s)}{1 + C_1(s)G(s)}$$

mentre per il controllore assumiamo la struttura:

$$C_1(s) = k \cdot \frac{(s + z_1) \dots (s + z_m)}{(s + p_1) \dots (s + p_n)}$$

dove  $k$  rappresenta il suo guadagno di Evans. Dalle equivalenze appena trovate, si può dedurre che, a meno di cancellazioni, il sistema retroazionato di funzione di trasferimento  $W_1(s)$  ha un numero di poli pari al grado di:

$$d(s) = \text{den}(C_1)\text{den}(G) + k \cdot \text{num}(C_1)\text{num}(G)$$

dove  $\text{num}(\cdot)$  e  $\text{den}(\cdot)$  sono rispettivamente il numeratore e denominatore della funzione tra parentesi. Conseguentemente,  $W_1$  avrà nel denominatore un parametro incognito, il guadagno del controllore  $k$ . Quindi impostando a piacere i poli e gli zeri del controllore, si potrà trovare un valore (o un intervallo di valori) di  $k$  in modo da avere solo poli a parte reale negativa per il sistema di funzione di trasferimento  $W_1$ , il che equivale ad avere un sistema retroazionato BIBO stabile. Invece di applicare metodi algebrici come il criterio di Routh, viene

applicato il Luogo delle radici, che permette uno studio del sistema retroazionato in base alla forma del controllore: in questo caso vengono considerati controllori con due strutture. Prima un controllore di tipo puramente proporzionale e poi uno proprio, avente uno zero e un polo ( $n = m = 1$ ).

Il Luogo delle radici è il luogo geometrico dei poli della funzione complessa  $W_1$  descritto su un piano di Gauss al variare del parametro (reale)  $k$ . Di norma si assume che numeratore e denominatore della funzione di trasferimento siano polinomi monici e in tal caso si parla di luogo delle radici positivo per il luogo corrispondente a valori positivi del parametro  $k$  e di luogo negativo per quello corrispondente a valori negativi di  $k$ . Nel caso specifico la rappresentazione a nostra disposizione per la funzione  $G(s)$  ha denominatore monico ma numeratore non monico e con coefficiente conduttore negativo. Di conseguenza, lo studio dei poli di  $W_1(s) = kG(s)/[1 + kG(s)]$  al variare di  $k$  tra i numeri reali positivi corrisponde (a meno di una ritaratura) al luogo negativo associato alla famiglia di poli e zeri della  $G(s)$ . Analogo discorso vale per ogni scelta di  $C_1(s)$  con la struttura precedentemente indicata.

Il Luogo risulta composto da rami: essi rappresentano i punti del luogo e descrivono nel piano una curva continua avente una sua direzione specifica. Partono sempre da una sorgente (un polo di  $G$ , rappresentato con una croce nel grafico) e possono terminare o in un punto terminale (uno zero di  $G$ , rappresentato con un cerchio nel grafico), oppure in uno zero all'infinito, detto anche punto asintotico. In particolare l'ultimo caso si verifica se la funzione in questione presenta più poli che zeri. Più precisamente, un ramo rappresenta una radice di  $d(s) + kn(s)$ , la quale varia con continuità al variare del parametro reale  $k$ : in tal modo, per un dato valore di  $k$ , si possono determinare i valori relativi delle varie radici, compresa la posizione dei loro punti nel Luogo. Intuitivamente si capisce che punti appartenenti al luogo e collocati vicino ai poli corrispondono a valori del parametro  $k$  prossimi a zero, mentre punti del luogo collocati vicino agli zeri (o al punto improprio) corrispondono a valori di  $k$  molto elevati. In definitiva, la BIBO stabilità del sistema retroazionato si ottiene in corrispondenza a quell'intervallo di valori di  $k$  per i quali tutti i punti del Luogo si trovano nel semipiano negativo, asse immaginario escluso.

Prima di iniziare il progetto del controllore, bisogna notare che la funzione  $C_1$  deve essere propria o strettamente propria, cioè il numero  $m$  di zeri deve essere non superiore al numero  $n$  di poli. In questo modo il numero di radici si conserva, e coincidono sempre con il numero di sorgenti del Luogo.

In prima analisi si considera il luogo delle radici di  $C_1G$  assumendo che  $C_1$  sia un controllore di tipo puramente proporzionale, ovvero  $C_1 = k$  con  $k > 0$ :

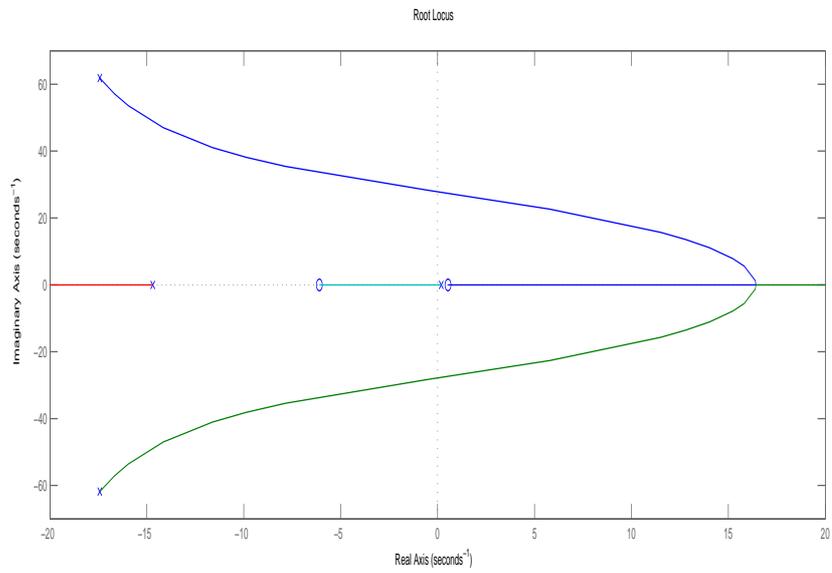


Figura 5.1: Luogo delle radici di  $G(s)$  ( $C_1(s) = k$ )

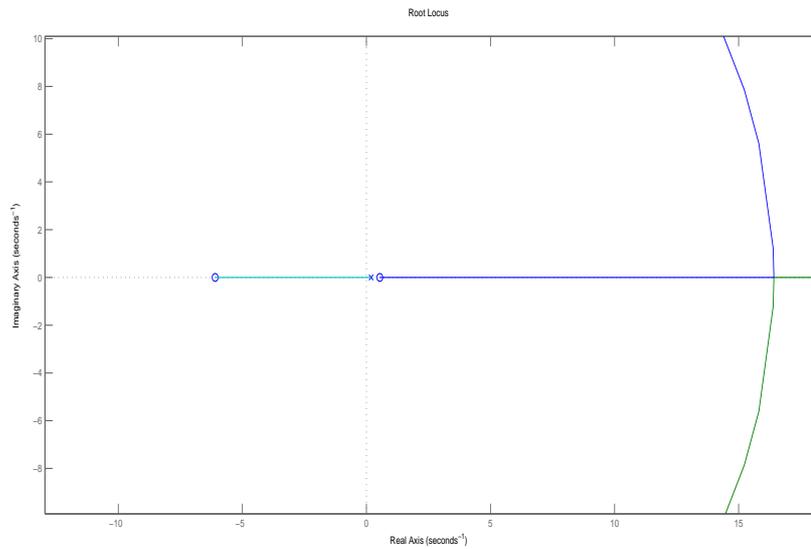


Figura 5.2: Ingrandimento del Luogo delle radici di  $G(s)$  ( $C_1(s) = k$ )

Si possono notare i due poli complessi coniugati  $(-17.449 \pm 61.966i)$ , da cui partono due rami che attraversano l'asse immaginario, convergono allo stesso

punto del semiasse reale positivo, chiamato punto doppio. Questi due rami godono di simmetria coniugata rispetto all'asse reale. Per valori di  $k$  più grandi, uno dei due rami termina in uno zero positivo (+0.538, ramo blu) mentre l'altro tende a  $\infty$  (ramo verde). Sempre sull'asse reale, si nota un ramo che parte da un polo negativo (-14.65) e va a  $-\infty$  (ramo rosso), ed un ramo che parte da un polo positivo (+0.188) e si dirige verso uno zero negativo (-6.097) (ramo celeste). Per verificare l'intervallo di valori di  $k > 0$  per cui si ha stabilità BIBO del sistema retroazionato, è necessario determinare i valori di  $k$  che corrispondono alle intersezioni tra i rami del Luogo e l'asse immaginario: trovando il valore di  $k$  corrispondente a ciascuno di questi punti e sapendo il comportamento dei vari rami, si riesce a determinare l'intervallo di stabilità. In questo caso, sebbene i rami che attraversano l'asse immaginario siano tre, i valori di  $k$  da considerare sono solo due, essendoci due punti di attraversamento complessi coniugati che corrispondono al medesimo valore di  $k$ , per via della simmetria tra il ramo verde e blu. Si possono considerare allora i due valori  $k_1$  e  $k_2$ , dove il primo è il valore di  $k$  nel punto di attraversamento da parte del ramo celeste, mentre il secondo è quello per il ramo blu. Il ramo blu, come visto in precedenza, è orientato dal semipiano negativo al positivo, mentre per quello celeste è orientato in verso opposto. Quindi si può concludere che esistono valori di  $k$  in corrispondenza a cui il sistema retroazionato è BIBO stabile se e solo se  $k_1 < k_2$  e in tal caso il sistema è BIBO stabile per  $k_1 < k < k_2$ . Non resta che trovare i valori per questi due parametri. Per determinare  $k_1$  e  $k_2$ , si riprende l'equazione del Luogo delle radici del sistema retroazionato  $d(s) = \text{den}(C_1)\text{den}(G) + k \cdot \text{num}(C_1)\text{num}(G)$ , e la si eguaglia a zero, ponendo  $s = i\omega$ , essendo la parte reale di  $s$  nulla, visto che si cercano radici che appartengono all'asse immaginario. In definitiva l'equazione da studiare è la seguente:

$$d(i\omega) = \text{den}(G) + k\text{num}(G) = 0$$

che si riscrive come:

$$(i\omega + 14.65)(i\omega - 0.188)((i\omega)^2 + 34.898i\omega + 4144.253) - 17.39k(i\omega + 6.097)(i\omega - 0.538) = 0.$$

Semplificandola si ottiene:

$$\omega^4 + (17.39k - 4646.194)\omega^2 - 11414.1 + 57.04 + i(-49.36\omega^3 + (59838.07 - 96.67k)\omega) = 0.$$

Separando la parte reale e quella immaginaria si ottiene un sistema in due equazioni e due incognite:

$$\begin{cases} \omega^4 + (17.39k - 4646.194)\omega^2 - 11414.1 + 57.04 = 0 \\ \omega(-49.36\omega^2 + 59838.07 - 96.67k) = 0 \end{cases}$$

---

il quale ha le seguenti soluzioni:  $(\omega = 0, k = 200.1), (\omega = \pm 27.86, k = 222.42),$   
 $(\omega = 1.97i, k = 620.984)$ . Tuttavia le soluzioni valide sono quelle che hanno  
 $k > 0$  e  $\omega \in \mathfrak{R}$ , quindi l'ultima soluzione può essere scartata. Notando il valore  
di  $\omega$ , si può constatare che il valore di  $k_1$  è rappresentato da 200.1, mentre il  
valore di  $k_2$  da 222.42 e ciò porta ad avere un intervallo di stabilità per il sistema  
retroazionato pari a 200,  $1 < k < 222.42$ .

Tuttavia esso risulta molto piccolo, e pertanto può rendere più difficoltosi i passi  
successivi di progetto, permettendo una scarsa libertà di scelta nel guadagno.  
Avendo completa libertà nella scelta del controllore  $C_1(s)$ , si può cercare di pro-  
gettarne uno in grado di aumentare l'intervallo di stabilità.

Come primo passo, si potrebbe cercare di eliminare il percorso positivo dei due  
poli complessi coniugati, e fare in modo che i loro rami esistano solo nel semipia-  
no negativo. Inserendo un polo negativo nel ramo celeste, esattamente tra la sua  
sorgente e il suo terminale, si assiste ad una modifica netta del luogo delle radici:  
il cambiamento più vistoso si ha per i rami dei due poli complessi coniugati, che  
ora esistono solo nel semipiano negativo, favorendo così un intervallo di stabilità  
più ampio. Tuttavia esistono ancora rami definiti nel semipiano positivo: uno  
collega il polo appena inserito con lo zero instabile (+0.538) del precedente ramo  
blu mediante un punto doppio negativo, formatosi assieme all'altro ramo positivo  
che ha come sorgente il polo instabile (+0.188). Questo secondo ramo raggiunge  
il suddetto punto doppio e successivamente ritorna nel semipiano positivo verso  
uno zero improprio.

Si sceglie quindi come valore del polo del controllore  $p_1 = -5$ , secondo le con-  
siderazioni fatte. Volendo rendere il controllore una funzione propria andiamo  
ad inserire anche uno zero, cercando un punto che non comprometta il risultato  
appena ottenuto. Per fare ciò, basterà impostare uno zero negativo più grande  
in modulo della sorgente della ramo rosso (-14.65), in modo da attirare i due  
poli complessi coniugati. Assumiamo, quindi, come zero  $z_1 = -20$ .

Il risultato finale viene rappresentato dal grafico:

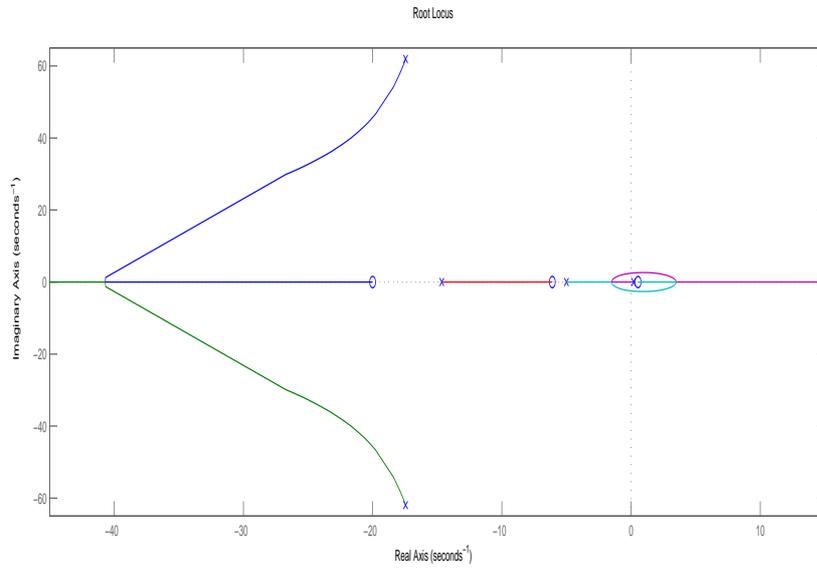


Figura 5.3: Luogo delle radici di  $C_1G(s)(C_1 = k\frac{(s+20)}{(s+5)})$

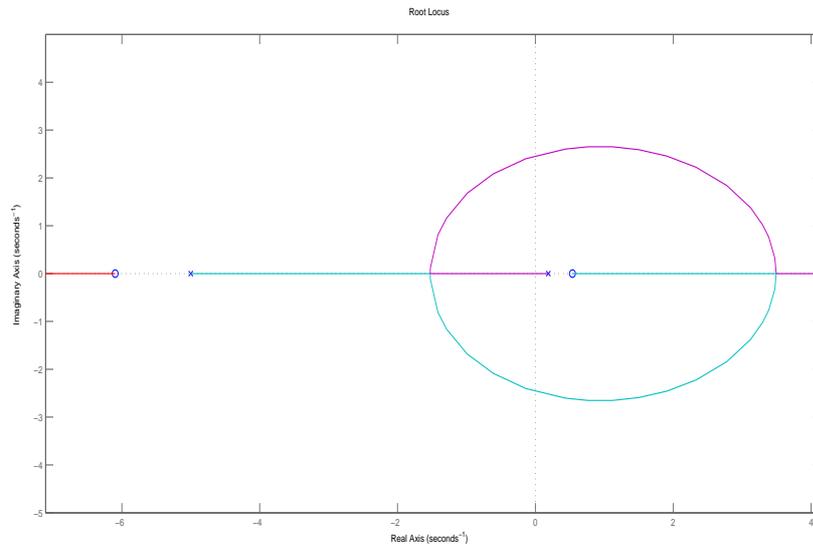


Figura 5.4: Ingrandimento del Luogo delle radici di  $C_1G(s)(C_1 = k\frac{(s+20)}{(s+5)})$

Cerchiamo ora, il nuovo intervallo di stabilità, applicando lo stesso metodo usato nel controllore di tipo puramente proporzionale. Guardando il grafico,

---

si può notare che l'intervallo di stabilità corrisponde ai valori di  $k$  per cui sia i punti del ramo viola che quelli del ramo celeste appartengono al semipiano reale negativo. Anche in questo caso, ci sono tre punti di attraversamento, ma ne vengono considerati solo due, per via della simmetria coniugata tra il ramo viola e quello celeste. Quindi si possono tenere in considerazione solo i due punti di attraversamento del ramo viola, uno all'origine e uno complesso, ai quali corrisponde il valore  $k_1$  e  $k_2$  rispettivamente, ricordando che deve risultare  $k_1 < k_2$  e che l'intervallo di stabilità viene definito come  $k_1 < k < k_2$ . In questo caso l'equazione del Luogo delle radici risulta:

$$(i\omega + 5)(i\omega + 14.65)(i\omega - 0.188)((i\omega)^2 + 34.898i\omega + 4144.253) - 17.39k(i\omega + 20)(i\omega + 6.097)(i\omega - 0.538) = 0$$

che semplificata diventa:

$$54.36\omega^4 + (444.47k - 83069.04)\omega^2 + 1140.8k - 57070.5 + i(\omega^5 + (17.39k - 4892.994)\omega^3 + (287776.25 - 1876.36k)\omega) = 0$$

Risolvendo il sistema delle equazioni relative alla parte reale e a quella immaginaria, come fatto in precedenza, si ottengono le seguenti soluzioni:  $(\omega = 0, k = 50.03)$ ,  $(\omega = \pm 2.47, k = 145.75)$ ,  $(\omega = \pm 7.79i, k = 200.69)$ ,  $(\omega = \pm 34.6i, k = 333.96)$ , delle quali solo le prime due sono valide. Stavolta si ottiene l'intervallo di stabilità  $50.03 < k < 145.75$ .

Si può notare che questo intervallo è molto più grande del precedente, quindi, come detto in precedenza, modificare il controllore in modo saggio permette di avere una flessibilità maggiore. Il controllore allora assume la seguente forma:

$$C_1 = k \frac{\left(\frac{s}{20} + 1\right)}{\left(\frac{s}{5} + 1\right)}$$

con il valore di  $k$  scelto in modo tale da garantire non solo la stabilità BIBO ma anche un buon transitorio per la risposta al gradino. Di seguito vengono riportate varie risposte al gradino per il sistema retroazionato  $W_1$  al variare di  $k$ :

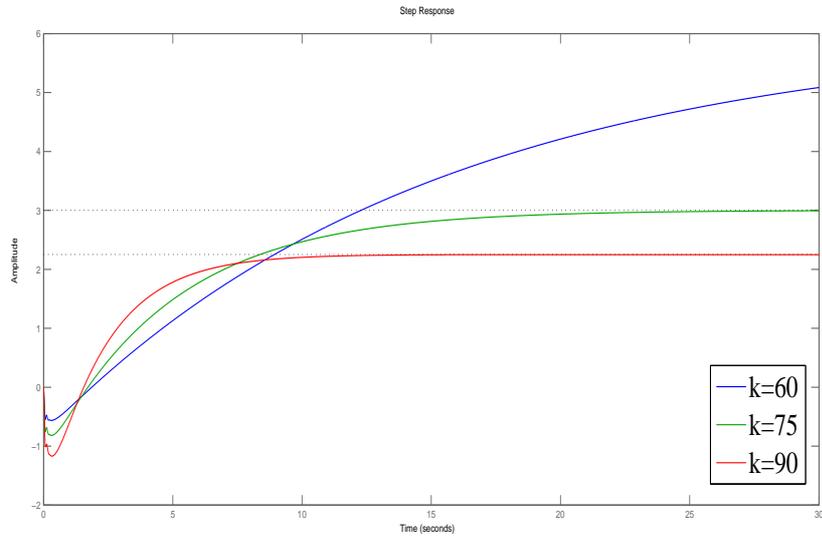


Figura 5.5: Risposta al Gradino  $u(t) = \delta_{-1}(t)$

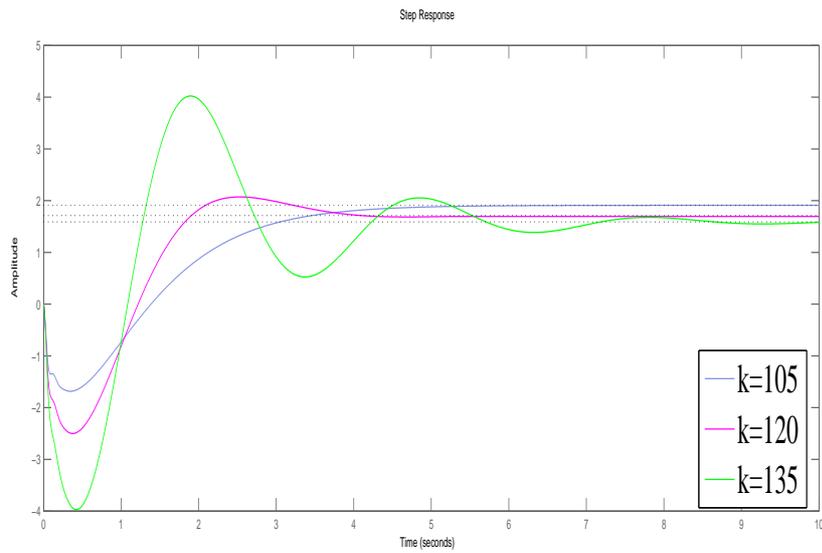


Figura 5.6: Risposta al Gradino  $u(t) = \delta_{-1}(t)$

Osservando i grafici si possono fare delle osservazioni: all'aumentare del guadagno del controllore diminuisce il tempo per raggiungere il valore a regime,

tuttavia abbiamo un degrado nel transitorio, giacché si può notare un aumento crescente delle oscillazioni, prima che esso si stabilizzi. Inoltre all'inizio si può notare che la risposta al gradino assume valori negativi, per poi crescere fino a portarsi ad un valore positivo a regime. Questo picco negativo è chiamato undershoot ed è causato dallo zero instabile della funzione di trasferimento  $G(s)$ , che si riporta in  $W_1$ . Tale zero purtroppo non si può eliminare dal sistema, ma si può contenere i suoi eventuali danni. Infatti i fenomeni oscillatori, sia positivi che negativi sono da evitare perchè se troppo elevati potrebbero danneggiare fisicamente le parti del sistema stesso. Tuttavia avere un sistema che ha dei tempi di salita lunghi è controproducente per l'efficienza del sistema stesso. Quindi si può dedurre che un valore di compromesso per il guadagno si ha per  $k = 90$ . Applicando la formula della retroazione vista in precedenza si ottiene la nuova funzione di trasferimento del sistema retroazionato:

$$\begin{aligned}
 W_1(s) &= \frac{-1565s^3 - 40000s^2 - 168900s + 102700}{s^5 + 54.36s^4 + 3328s^3 + 43070s^2 + 118900s + 45610} = \\
 &= \frac{(s + 20)(s + 6.097)(s - 0.538)}{(s + 19.479 - 48.005i)(s + 19.479 + 48.005i)(s + 11.786)(s + 3.159)(s + 0.456)} = \\
 &= \frac{(s + 20)(s + 6.097)(s - 0.538)}{(s^2 + 38.96s + 2684)(s + 11.786)(s + 3.159)(s + 0.456)}
 \end{aligned}$$

In questo caso la risposta al gradino  $u(t) = \delta_{-1}(t)$  risulta:

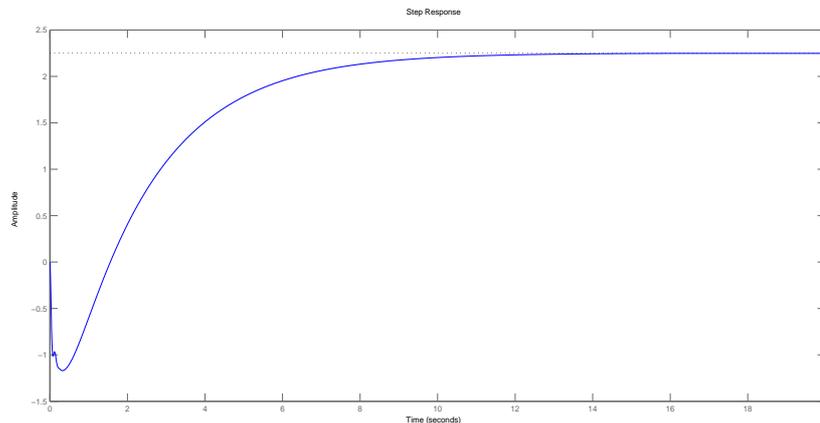


Figura 5.7: Risposta al Gradino  $u(t) = \delta_{-1}(t)$

Si è raggiunto un buon risultato grazie alla proprietà della retroazione e al controllore, che hanno permesso al sistema di risultare BIBO stabile. Tuttavia una risposta al gradino limitata non basta per avere un sistema adatto per determinate esigenze: essa deve anche rispettare le eventuali specifiche di progetto su tempi di assestamento e ampiezza delle oscillazioni. In caso contrario, bisognerà rimediare con l'introduzione di un ulteriore controllore.

## Capitolo 6

# Soddisfacimento delle ulteriori specifiche

L'obiettivo di controllo proposto è quello di far sì che il SEA, partendo da deflessione nulla, si porti a regime con errore nullo ad un valore  $\sigma = \bar{\sigma}$ , dove  $\bar{\sigma}$  è un valore arbitrario, raggiungendolo in un tempo di assestamento al 5% non superiore a 20 secondi e con un valore di massima sovraelongazione pari al 20%. La risposta al gradino del sistema retroazionato della funzione di trasferimento  $W_1$ , soddisfa sia la specifica della sovraelongazione che quella del tempo di assestamento, ma l'errore a regime non è nullo: questo perchè il sistema è di tipo 0, quindi non sarà mai in grado di portarsi a regime con un gradino in ingresso. Per rimediare a tale errore bisogna portare il sistema ad un tipo 1 e per fare ciò bisogna moltiplicarlo per un integratore, cioè una funzione avente un polo nell'origine, retroazionando l'intero sistema. In tal modo ora l'errore a gradino viene sistemato, tuttavia la risposta a gradino cambia drasticamente:

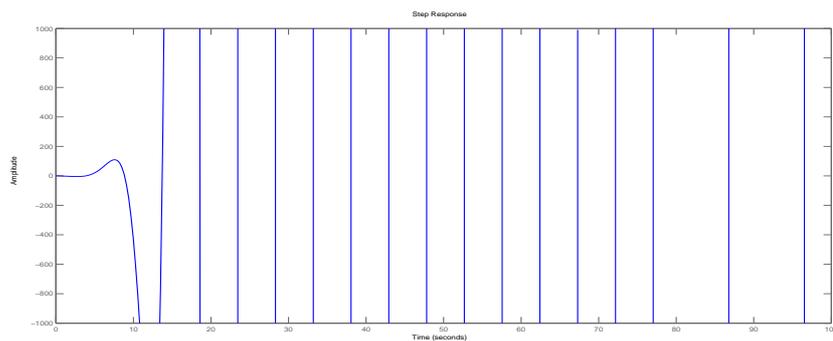


Figura 6.1: Risposta al Gradino  $u(t) = \delta_{-1}(t)$  di  $W_1/s$  retroazionato

## Soddisfacimento delle ulteriori specifiche

essa rende chiaramente il sistema instabile, quindi il solo integratore non basta. Tuttavia le cose si possono sistemare progettando un nuovo controllore  $C_2$  retroazionato alla funzione di trasferimento  $W_1$ , che ingloba al suo interno l'integratore descritto in precedenza. Se il tutto viene progettato in modo saggio, il sistema complessivo, oltre a risultare BIBO stabile, soddisferà tutte le specifiche di progetto descritte in precedenza. Di seguito viene riportato lo schema complessivo del sistema:

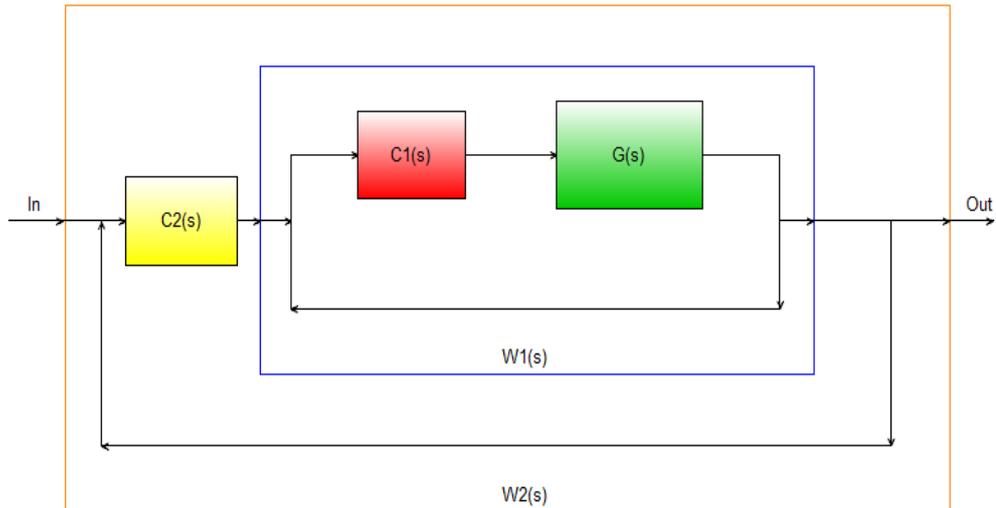


Figura 6.2: Schema complessivo del sistema

Una buona strada da intraprendere è quella di sfruttare i grafici di Bode assieme alla relazione che intercorre tra sovralongazione  $S$ , tempo di assestamento  $T_a$  e margine di fase  $M_\phi$ , pulsazione di attraversamento  $\omega_T$ . Ci sono varie formule a riguardo, vengono usate quelle che approssimano il sistema ad anello chiuso con un modello a due poli dominanti:

$$\begin{aligned} S &= e^{\left(-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)} \\ \omega_T &= \frac{3}{\xi T_a} \\ M_\phi &= 100\xi \end{aligned}$$

dove  $\xi$  è il coefficiente di smorzamento. Modificando la prima formula si ricava l'equazione di  $\xi$ :

$$\xi = \sqrt{\left(\frac{\log^2 S}{\pi^2 + \log^2 S}\right)}$$

---

da cui troviamo i valori dei restanti parametri:

$$\xi = 0.46 \Rightarrow \begin{cases} M_\phi \approx 45^\circ \\ \omega_T \approx 0.33 \text{ rad/s} \end{cases}$$

I valori appena trovati indicano le caratteristiche frequenziali alle quali il diagramma di Bode della funzione  $W_1$  deve adeguarsi per soddisfare tutte le specifiche di progetto. In particolare a livello frequenziale bisogna soddisfare le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} \omega_1 \approx \omega_T \\ M_1 \geq M_\phi \end{cases}$$

dove  $\omega_1$ ,  $M_1$  sono rispettivamente la pulsazione di taglio e il margine di fase della funzione  $W_1$ . Non resta che introdurre il diagramma di Bode di  $W_1$  per confrontare i valori appena trovati:

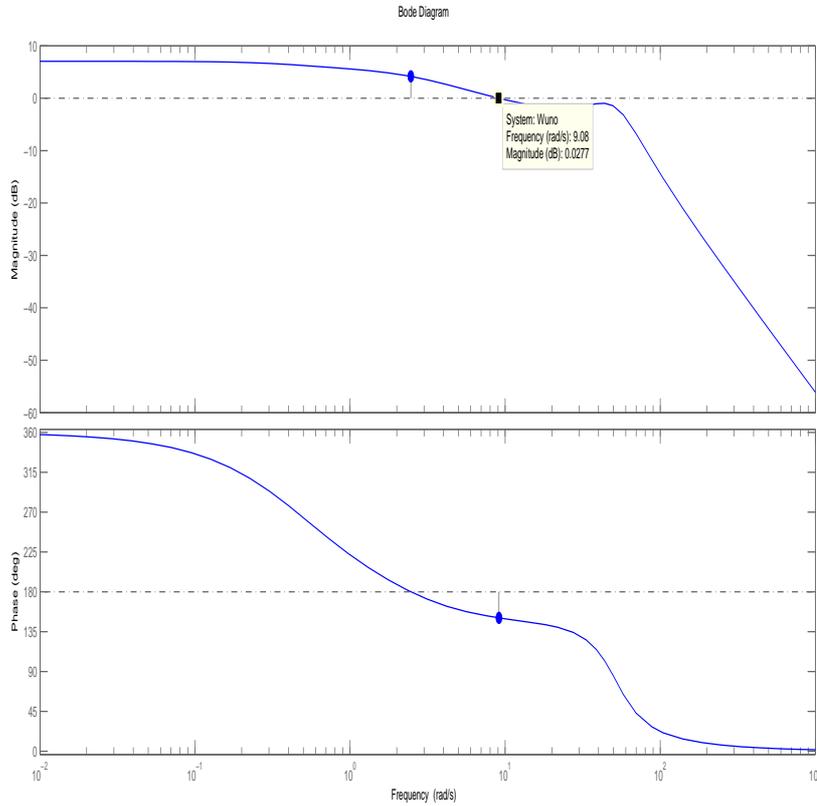


Figura 6.3: Diagramma di Bode di  $W_1$

## Soddisfacimento delle ulteriori specifiche

Dai grafici possiamo avere un'idea approssimata riguardo alla pulsazione di taglio: essa risulta all'incirca uguale a 9.1 rad/s, un valore molto diverso da quello di progetto (0.33 rad/s). Per risolvere questo problema bisogna progettare una rete ritardatrice, la quale è in grado di abbassare il modulo del diagramma di Bode, in modo da avere una pulsazione di taglio minore di quella attuale. Tra le varie reti ritardatrici, si fa riferimento al controllore di tipo PI, essendo una delle soluzioni di controllo più semplici. Il Proporzionale Integratore è un caso particolare del controllore PID, e come tale ha una sua struttura definita:

$$C_2(s) = \frac{k_i}{s}(1 + s(\alpha))$$

dove  $k_i$  è il guadagno del controllore e  $-1/\alpha$  il valore dello zero. Da notare che il PI, come si evince dal suo nome, include un integratore, risolvendo così il problema dell'errore a gradino per  $W_1$ . Per assegnare dei valori corretti ai suoi parametri, si può attuare la seguente strategia, partendo dalla definizione di pulsazione di taglio:

$$|\text{Fdt}(i\omega_a)| = 1$$

dove Fdt è una generica funzione di trasferimento, e  $\omega_a$  la sua pulsazione di taglio relativa. Se si considerasse ora la seguente sostituzione  $\text{Fdt} = C_2 * W_1$  e  $\omega_a = \omega_T = 0.33\text{rad/s}$ , ci si porta nelle condizioni di progetto prestabilite, ottenendo un'equazione con incognite  $k_i$  e  $\alpha$ :

$$\left| \frac{k_i(1 + (0.33i)\alpha)}{0.33i} \frac{-1565.1(0.33i + 20)(0.33i + 6.097)(0.33i - 0.538)}{((0.33i)^2 + 38.96(0.33i) + 2684)(0.33i + 11.786)(0.33i + 3.159)(0.33i + 0.456)} \right| = 1$$

dopo una serie di passaggi si ottiene la seguente:

$$\left| \frac{k_i(1 + (0.33i)\alpha)}{0.33i} (0.6873 - 2.0178i) \right| = 1$$

la quale può essere semplificata ulteriormente:

$$|(-6.1144 + 0.6873\alpha) + i(-2.0828 - 2.0178\alpha)| = \frac{1}{k_i}$$

risolvendo il modulo:

$$4.544\alpha^2 + 0.0004934\alpha + 41.72 = \frac{1}{k_i^2}$$

e grazie all'uso di un calcolatore, si può trovare una soluzione ottimale di quest'ultima equazione:  $k_i = 0.13971$  e  $\alpha = 1.5$ . In definitiva il controllore avrà la seguente forma:

$$C_2(s) = \frac{0.13971}{s}(1 + 1.5s) = \frac{0.2095}{s}(s + 0.666)$$

---

Per verificare se il procedimento effettuato ha dato esito positivo, viene introdotto ora il diagramma di Bode della funzione  $C_2 * W_1$ :

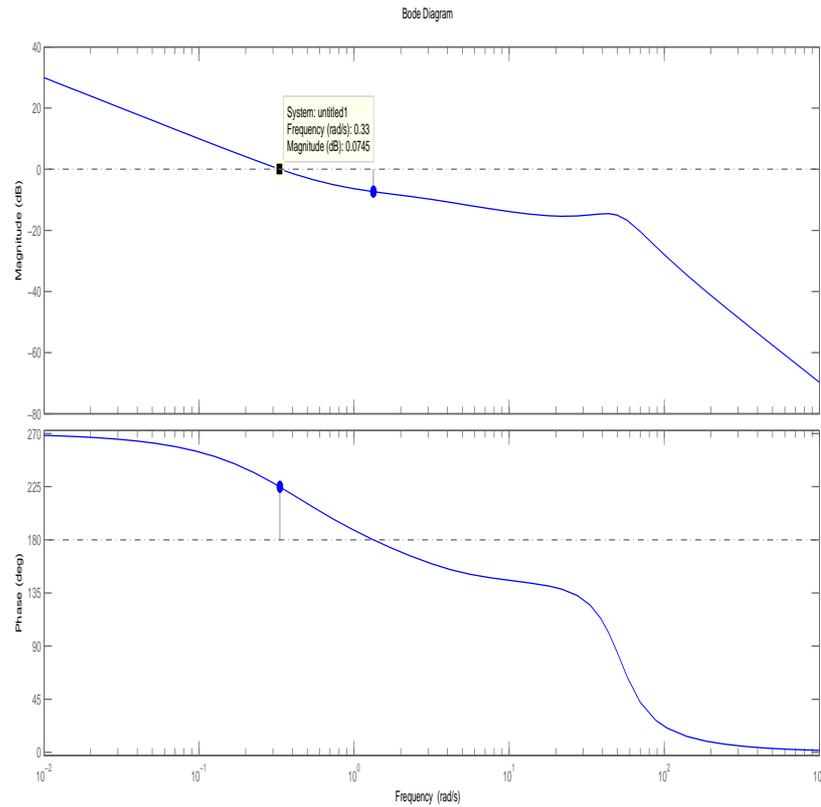


Figura 6.4: Diagramma di Bode di  $C_2 * W_1$

In questo caso si può notare che la pulsazione di taglio è all'incirca 0.33 rad/s, mentre il suo margine di fase è all'incirca  $225^\circ - 180^\circ = 45^\circ$ , soddisfacendo così le condizioni frequenziali descritte in precedenza. Per concludere, basta calcolare

## Soddisfacimento delle ulteriori specifiche

la funzione complessiva del sistema retroazionato  $W_2$ :

$$\begin{aligned} W_2(s) &= \frac{C_2 W_1}{1 + C_2 W_1} = \\ &= \frac{-328s^4 - 8602s^3 - 40980s^2 - 2076s + 14340}{s^6 + 54.36s^5 + 3000s^4 + 34460s^3 + 77920s^2 + 43530s + 14340} = \\ &= \frac{-328(s + 20)(s + 6.097)(s - 0.538)(s + 0.666)}{(s^2 + 40.61s + 2409)(s + 10.982)(s + 2.152)(s^2 + 0.62s + 0.252)} \end{aligned}$$

e la sua risposta al gradino relativa:

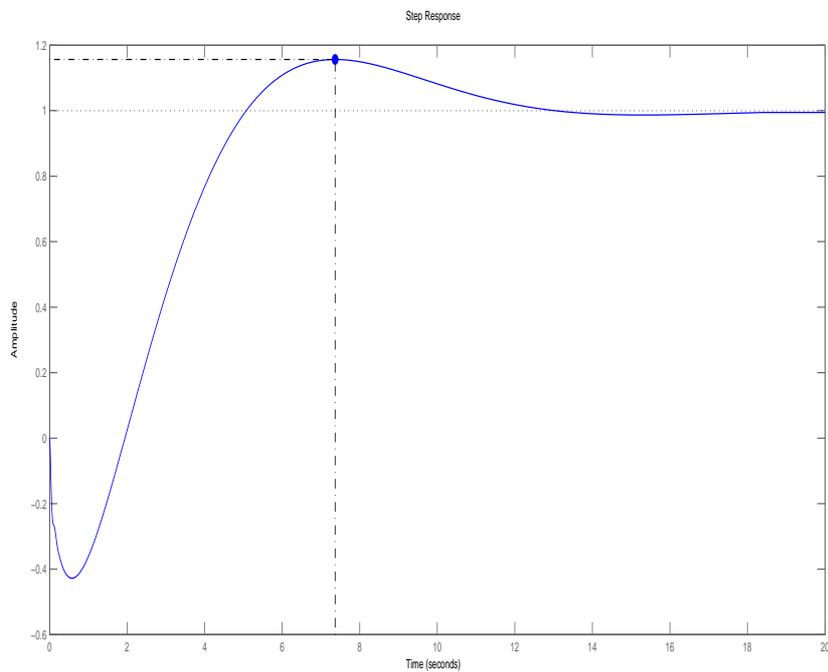


Figura 6.5: Risposta al Gradino  $u(t) = \delta_{-1}(t)$  di  $W_2$

dal quale si possono ricavare le seguenti caratteristiche: tipo 1 (ovvero errore a regime al gradino nullo), sovraelongazione massima del 15.6%, tempo di assestamento al 5% pari a circa 11.6 secondi, tutti valori che soddisfano in modo efficiente le specifiche di progetto. Sebbene il fenomeno dell'undershoot non sia stato eliminato completamente, la sua ampiezza è tale da non costituisce un problema per il funzionamento generale del sistema.

# Bibliografia

- [1] M. Bisiacco and M. Valcher, *Controlli Automatici*. Padova – Ita: Libreria Progetto, 2008.
- [2] M. Bisiacco and M. Valcher, *Lezioni di Controlli Automatici*. PADOVA – ITA: Edizioni Libreria Progetto, 2002.
- [3] M. Bisiacco and S. Braghetto, *Teoria dei Sistemi Dinamici*. BOLOGNA – ITA: Editrice Esculapio, 2010.
- [4] A. Bicchi. <http://www.centropiaggio.unipi.it/sites/default/files/course/material/20110623.pdf>.

## BIBLIOGRAFIA

---

# Elenco delle figure

|     |  |
|-----|--|
| 1.1 | Rappresentazione del componente SEA . . . . .  |
| 2.1 | Modello del SEA . . . . .  |
| 4.1 | Risposta al Gradino $u(t) = \delta_{-1}(t)$ . . . . .  |
| 5.1 | Luogo delle radici di $G(s)$ ( $C_1(s) = k$ ) . . . . .  |
| 5.2 | Ingrandimento del Luogo delle radici di $G(s)$ ( $C_1(s) = k$ ) . . . . .                      |
| 5.3 | Luogo delle radici di $C_1G(s)$ ( $C_1 = k \frac{(s+20)}{(s+5)}$ ) . . . . .                   |
| 5.4 | Ingrandimento del Luogo delle radici di $C_1G(s)$ ( $C_1 = k \frac{(s+20)}{(s+5)}$ ) . . . . . |
| 5.5 | Risposta al Gradino $u(t) = \delta_{-1}(t)$ . . . . .  |
| 5.6 | Risposta al Gradino $u(t) = \delta_{-1}(t)$ . . . . .  |
| 5.7 | Risposta al Gradino $u(t) = \delta_{-1}(t)$ . . . . .  |
| 6.1 | Risposta al Gradino $u(t) = \delta_{-1}(t)$ di $W_1/s$ retroazionato . . . . .                 |
| 6.2 | Schema complessivo del sistema . . . . .   |
| 6.3 | Diagramma di Bode di $W_1$ . . . . .   |
| 6.4 | Diagramma di Bode di $C_2 * W_1$ . . . . .   |
| 6.5 | Risposta al Gradino $u(t) = \delta_{-1}(t)$ di $W_2$ . . . . .                                 |