

Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI FISICA E ASTRONOMIA "GALILEO GALILEI"

Corso di Laurea in Fisica

TESI DI LAUREA

**Soluzioni delle equazioni di Maxwell
in regime ultrarelativistico**

Candidato:
Lorenzo Coccia
Matricola 1069512

Relatore:
Prof. Kurt Lechner

Indice

Introduzione	v
1 Sul metodo della funzione di Green ed i suoi limiti	1
2 Particelle di massa nulla: moti limitati	5
3 Particelle di massa nulla: moti illimitati	9
3.1 Moto rettilineo uniforme	9
3.2 Traiettorie asintoticamente rettilinee	10
4 Particelle massive: moti rettilinei illimitati asintoticamente di tipo luce	13
4.1 Moto iperbolico	13
4.2 Generica traiettoria rettilinea illimitata	21
A Richiami sulla teoria delle distribuzioni	23
Bibliografia	25

Introduzione

La determinazione del campo elettromagnetico generato da una particella carica che percorre un'arbitraria traiettoria di tipo tempo è un problema che ha trovato la sua soluzione al termine del secolo diciannovesimo, per opera di A.-M. Liénard (1898) ed E.J. Wiechert (1900). Questo risultato è di primaria importanza all'interno dell'*Elettrodinamica* ed è quindi spontaneo interrogarsi circa una sua possibile estensione a traiettorie di tipo luce, descritte dunque da particelle cariche prive di massa. Attualmente non vi è alcuna evidenza sperimentale in favore dell'esistenza di queste particelle; mancano però al tempo stesso motivazioni teoriche di fondo che forniscano una risposta chiara circa la possibilità (o meno) di avere congiuntamente carica elettromagnetica e massa nulla. In altri termini, non ci è permesso di escludere che queste particelle esistano ma che non siano ancora state rivelate, ad esempio perché debolmente interagenti. Un'indagine volta a determinare le soluzioni delle equazioni di Maxwell in regime ultrarelativistico appare dunque legittima e rappresenta l'oggetto di questo lavoro.

In generale la quadricorrente associata a una particella carica puntiforme costituisce un campo vettoriale a valori nelle distribuzioni, a causa della presenza nella sua espressione della delta di Dirac (si veda la (1.7)). Le equazioni di Maxwell (1.1) che ci prefiggiamo di risolvere (o la loro equivalente riscrittura in termini del quadripotenziale) non possono essere dunque affrontate nello spazio delle funzioni ma vanno immerse nell'ambito della teoria distribuzionale. Alla luce di ciò, una particolare attenzione è necessaria nel caso in cui si utilizzino metodi risolutivi come quello della funzione di Green; quest'ultimo infatti, come mostreremo nel Capitolo 1, coinvolge la convoluzione tra due distribuzioni (1.6) che a priori è una scrittura *formale*, alla quale si potrebbe dare senso, ad esempio, se una delle due distribuzioni fosse a supporto compatto. Una ricerca corretta di soluzioni con questo metodo deve dunque preoccuparsi di verificare che:

- i potenziali ottenuti siano delle distribuzioni;
- i campi ricavati risolvano effettivamente le equazioni di Maxwell.

Entrambi i requisiti sono soddisfatti nel caso di traiettorie di tipo tempo, siano esse limitate o illimitate, purché la velocità non tenda asintoticamente a quella della luce: campi e potenziali risultanti sono, come anticipato, quelli di Liénard-Wiechert. Le due richieste, invece, non sono in generale soddisfatte nei rimanenti casi, che sono quelli di nostro interesse. Dovremo dunque ricorrere ad altre strategie quando, nel corso del lavoro, studieremo:

- a) traiettorie limitate di tipo luce;
- b) traiettorie illimitate di tipo luce che tendano, per $t \rightarrow -\infty$, ad un moto rettilineo;
- c) traiettorie rettilinee illimitate di tipo tempo che tendano, per $t \rightarrow -\infty$, ad un moto rettilineo di tipo luce.

L'ultimo caso, come si vede, coinvolge traiettorie che solo asintoticamente sono di tipo luce, il che potrebbe far pensare all'applicabilità del metodo di Green (ovvero ai risultati di Liénard-Wiechert), come è stato discusso in precedenza in [1]. In realtà, come mostreremo, un simile

approccio risulta *errato*, perché i campi così ricavati non risolvono le equazioni di Maxwell. Notiamo inoltre fin d’ora che l’unico comportamento asintotico di cui ci interesseremo è quello *rettilineo nel passato*: la prima richiesta costituisce effettivamente una limitazione, la seconda no, perché l’andamento della traiettoria per $t \rightarrow +\infty$ non può influire sulla forma del campo elettromagnetico a istanti temporali finiti.

Per quanto riguarda le traiettorie illimitate di tipo luce, il nostro punto di partenza sarà un risultato “storico” (si veda [2]), ovvero che il campo prodotto da un moto rettilineo consiste in una shock wave della forma “universale” (3.11). Muoveremo poi di qui per far vedere, brevemente e senza dimostrazioni, un risultato più recente e generale (si veda [3]): una shock wave universale viene prodotta anche da un moto illimitato curvo di tipo luce, purché diventi asintoticamente rettilineo con sufficiente rapidità.

Il problema invece rimasto aperto, e che costituirà la parte principale e originale di questa tesi, è l’esistenza e l’eventuale forma di una shock wave anche nel caso di moti di tipo tempo illimitati con velocità tendente, nel passato, a quella della luce. In particolare ci concentreremo su traiettorie rettilinee, ricercando dapprima un approccio efficace per il cosiddetto moto iperbolico (4.1) descritto da una particella soggetta a un’accelerazione costante. La scelta dello studio di questo caso specifico ha la sua motivazione nell’interesse che esso esercita da più di un secolo nella letteratura. Il campo di una particella carica in moto iperbolico è stato infatti considerato per la prima volta da Born nel 1909 [4] per poi essere studiato, negli anni immediatamente successivi, da molti altri autori tra i quali ricordiamo Sommerfeld [5] e Schott [6]. A quest’ultimo, in particolare, possiamo far risalire la prima scrittura del contributo regolare del campo (si vedano le (4.4) e (4.5)), quello che si può ottenere dall’applicazione, spontanea e in un certo senso “ingenua”, dei risultati di Liénard-Wiechert; in realtà, come mostrato Bondi e Gold nel 1955 [7], il campo così ottenuto manca, per poter essere effettivamente soluzione delle equazioni di Maxwell, di un termine proporzionale alla delta di Dirac. L’analisi fatta dai due autori non fornisce però una dimostrazione rigorosa di questo risultato e tale carenza non è stata colmata dagli articoli prodotti negli anni successivi. Sebbene, infatti, l’interesse intorno a questo problema sia rimasto vivo fino ad oggi (come dimostrano [1], [8], [9]), le derivazioni proposte si presentano in alcuni casi matematicamente carenti (come per [9]) e comunque non tali da poter considerare risolto il problema della determinazione del campo prodotto da una particella carica in moto iperbolico. Per dirla con le parole di Griffiths, a conclusione di [1] (recente, siamo nel 2014), tutte le derivazioni proposte lasciano irrisolta la domanda: “*how can they [=standard derivations] be generalized to cover the hyperbolic case?*” .

Nel corso della tesi, risponderemo a questa domanda, dando una dimostrazione *rigorosa* della comparsa di una shock wave nel caso del moto iperbolico; generalizzando poi questo risultato riusciremo a mostrare, sempre rigorosamente, che

1. una shock wave si produce anche nel caso di moti rettilinei che siano asintoticamente di tipo luce;
2. la sua forma, diversa da quella universale, dipende attraverso due parametri dalla legge oraria della traiettoria a tempi finiti.

La strategia di risoluzione che useremo per questo problema sarà basata sull’individuazione di un moto per il quale siano validi i risultati di Liénard-Wiechert e che abbia come caso limite la traiettoria di nostro interesse: in particolare, risulterà conveniente troncare il moto originario (che rimarrà tale per $t > L$) e raccordarlo con uno rettilineo uniforme strettamente di tipo tempo (per $t < L$). Il calcolo dei campi si ridurrà in questo modo alla valutazione di opportuni limiti distribuzionali (come $L \rightarrow -\infty$): se infatti la quadricorrente “regolarizzata” tende a quella associata al moto originario, il limite (distribuzionale) del tensore elettromagnetico “regolarizzato”, se esiste, non può che avere come risultato la soluzione

ritardata dell'equazione di Maxwell per la traiettoria di partenza, come faremo vedere nella parte conclusiva del Capitolo 1

Nella procedura di regolarizzazione descritta, sarà utile la riscrittura del tensore elettromagnetico $F^{\mu\nu}$ in termini delle sue componenti coulombiana $C^{\mu\nu}$ e di radiazione $R^{\mu\nu}$ (rispettivamente (2.11) e (2.12)) secondo la relazione $F^{\mu\nu} = C^{\mu\nu} + R^{\mu\nu}$. Oltre a rendere più maneggevoli i vari passaggi, questa suddivisione permetterà di studiare e confrontare la forma assunta da $C^{\mu\nu}$ nei tre casi a), b) e c); studio che si rivelerà particolarmente istruttivo e che affiancherà osservazioni sulle singolarità dei campi complessivi.

Parallelamente ai tensori elettromagnetici, dedicheremo parte della nostra attenzione anche ai corrispondenti quadripotenziali A^μ ; in questo caso, per ottenere distribuzioni ben definite, è possibile sfruttare l'invarianza di gauge congiuntamente a procedure di regolarizzazione e di limite. La questione è però alquanto spinosa e la tratteremo, peraltro in maniera euristica, solo per il moto rettilineo uniforme con $|\vec{v}| = c$ e per quello iperbolico.

Organizzazione del materiale. Il primo capitolo di questo lavoro è dedicato al metodo della funzione di Green; dopo averne richiamato gli aspetti fondamentali sfrutteremo degli esempi per mostrare come esso permetta di ricavare A^μ nel caso di traiettorie con $|\vec{v}(t)| < M < c \forall t$ ma fallisca per traiettorie di tipo luce.

Nel Capitolo 2 ci interesseremo di generici moti limitati con velocità pari a quella della luce, caso nel quale i potenziali possono essere ricavati tramite il metodo di Green. Facendo riferimento alla trattazione di [3] (così come per il capitolo successivo) riporteremo i principali risultati relativi ai campi elettromagnetici generati.

Nel Capitolo 3 verranno considerate traiettorie illimitate di tipo luce, per le quali il metodo di Green non produce distribuzioni. Come caso preliminare sarà affrontato il moto rettilineo e, necessariamente, uniforme: tramite un'opportuna trasformazione di gauge e una procedura di limite otterremo un potenziale che sia effettivamente una distribuzione, da cui poi ricavare i campi. Ci concentreremo poi sul tensore elettromagnetico associato a traiettorie più generiche (ma asintoticamente rettilinee) della cui derivazione riporteremo l'idea: regolarizzare il moto di partenza immaginandolo percorso con velocità $|\vec{v}(t)| < 1$, sfruttare i risultati di Liénard-Wiechert e prenderne il limite.

Lo stesso modo di procedere sarà adottato nel Capitolo 4, in cui la trattazione di una generica traiettoria rettilinea illimitata di tipo tempo con andamento asintotico descritto da $\vec{v} \rightarrow \vec{c} = cost$ sarà preceduta dall'analisi del moto iperbolico. In questo caso, però, la regolarizzazione usata sarà diversa in quanto, come accennato, consisterà nella suddivisione del moto in una componente "vera" ed una rettilinea di tipo tempo.

Affideremo infine alle Appendici i richiami matematici necessari riguardanti la teoria delle distribuzioni.

Notazione. Nel seguito, salvo diversa indicazione, porremo $c = 1$. Inoltre:

- gli indici greci, come μ e ν , varieranno da 0 a 3;
- gli indici latini, come i e j , varieranno da 1 a 3, verranno usati per le grandezze vettoriali e per le componenti spaziali dei quadrivettori;
- adotteremo la metrica $\eta^{\mu\nu}$ dello spaziotempo di Minkowski con segnatura (1,3), quindi $\eta = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$;
- lo spazio delle funzioni di prova sarà indicato con \mathcal{S} e quello delle distribuzioni temperate con \mathcal{S}' ;
- il limite nel senso distribuzionale verrà indicato con il simbolo "*Lim*".

Capitolo 1

Sul metodo della funzione di Green ed i suoi limiti

Incominciamo la nostra trattazione dalle equazioni di Maxwell

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu, \quad \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial^\nu F^{\rho\sigma} = 0 \quad (1.1)$$

con $F^{\mu\nu}$ tensore elettromagnetico. In seguito torner  utile anche la loro riscrittura in termini del quadripotenziale A^μ (con $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$) che porta, nella gauge di Lorenz $\partial A = 0$, a

$$\square A^\mu = J^\mu, \quad (1.2)$$

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \quad (1.3)$$

Le differenti formulazioni delle equazioni rispondono a due differenti approcci al problema, entrambi utili ed entrambi utilizzati nel seguito, che permettono in un caso di premiare l'intuizione fisica e nell'altro di sfruttare l'invarianza di gauge.

Una tecnica per risolvere la (1.2)   fornita dal *metodo della funzione di Green*, la cui applicazione al nostro caso ripercorriamo brevemente. Nel seguito indicheremo la linea di universo di una generica particella con $y^\mu(\lambda)$ e la sua quadrivelocit  con $u^\mu(\lambda) \equiv dy^\mu/d\lambda$ (si noti che, avendo usato un parametro λ generico, u^μ   definita anche per traiettore di tipo luce). Procedendo in maniera formale e senza soffermarsi sulle propriet  di regolarit  delle quantit  coinvolte, si pu  cercare, vista la linearit  di (1.2) in A^μ e J^μ , una soluzione della forma

$$A^\mu = G * J^\mu = \int G(x-y) J^\mu(y) d^4y, \quad (1.4)$$

in cui il simbolo “*” indica la convoluzione. Affinch  la (1.4) soddisfi la (1.2)   necessario che

$$\square G(x) = \delta^4(x) \quad (1.5)$$

e richiedendo la causalit  del campo generato ($A^\mu(x)$ non pu  dipendere da $J^\mu(y)$ se $y^0 > x^0$) si trova che la (1.5) ammette un'unica soluzione data da

$$G_r = \frac{1}{2\pi} H(x^0) \delta(x^2),$$

in cui H   la funzione di Heaviside. G_r prende il nome di *funzione di Green ritardata*. L'introduzione della funzione di Green ritardata nell'espressione (1.4) d 

$$A^\mu = G_r * J^\mu = \frac{1}{2\pi} \int H(x^0 - y^0) \delta((x-y)^2) J^\mu(y) d^4y. \quad (1.6)$$

Abbiamo per  finora taciuto un aspetto di cruciale importanza. La quadricorrente di una particella puntiforme   infatti data da

$$J^\mu(x) = e \int \delta^4(x-y) dy^\mu \quad (1.7)$$

e quindi le sue componenti sono elementi dello spazio delle distribuzioni $\mathcal{S}' \equiv \mathcal{S}'(\mathbb{R}^4)$; ciò ha notevoli conseguenze. Innanzitutto quelle di Maxwell *non* sono equazioni differenziali nello spazio delle funzioni ma è necessario reinterpretarle all'interno della teoria delle distribuzioni, di cui richiamiamo gli aspetti fondamentali nell'Appendice A. Sia le componenti di $F^{\mu\nu}$ che quelle di A^μ vanno quindi intese come elementi di \mathcal{S}' . Inoltre quella scritta nell'equazione (1.6) è una *convoluzione tra distribuzioni*, in generale mal definita.

Per poter proseguire dobbiamo dunque dare un significato alla soluzione trovata e verificare che il risultato ottenuto sia una distribuzione. Per farlo, risulta utile la riscrittura della (1.6)

$$A^\mu(x) = \frac{e}{2\pi} \int H(x^0 - z^0) \delta((x - z)^2) \delta^4(z - y(\lambda)) u^\mu(\lambda) d^4z d\lambda = \quad (1.8)$$

$$= \frac{e}{2\pi} \int H(x^0 - y^0(\lambda)) \delta((x - y(\lambda))^2) u^\mu(\lambda) d\lambda. \quad (1.9)$$

Valutiamo ora, procedendo ancora in maniera formale, quello che abbiamo trovato in due esempi distinti, in grado di mostrare la bontà e i limiti del metodo di Green.

Esempio (*Traiettoria di tipo tempo limitata*). Consideriamo una particella massiva che viaggia con velocità $|\vec{v}| < M < 1$ compiendo una traiettoria limitata: $|\vec{y}(t)| < L, \forall t$. In questo caso il potenziale dato dalla (1.9) definisce effettivamente un elemento di \mathcal{S}' . Per vederlo, applichiamo una funzione $\phi(x)$ dello spazio di Schwartz \mathcal{S} e sfruttiamo l'arbitrarietà del parametro λ che prendiamo in questo caso uguale al tempo $\lambda = y^0 = t$. Chiamando $v^\mu \equiv dy^\mu/dt = (1, \vec{v})$, possiamo allora scrivere

$$\begin{aligned} A^\mu(\phi) &= \frac{e}{2\pi} \int H(x^0 - t) \delta((x - y(t))^2) v^\mu(t) \phi(x) d^4x dt = \\ &= \frac{e}{4\pi} \int \frac{\delta(x^0 - t - (\vec{x} - \vec{y}(t)))}{|\vec{x} - \vec{y}(t)|} v^\mu(t) \phi(x) d^4x dt. \end{aligned}$$

Operiamo ora la sostituzione $\vec{x} \rightarrow \vec{x} + \vec{y}(t)$ e integriamo rispetto a x^0 :

$$A^\mu(\phi) = \frac{e}{4\pi} \int \frac{v^\mu(t)}{r} \phi(t + r, \vec{x} + \vec{y}(t)) dt d^3x, \quad (1.10)$$

in cui è stato posto $r \equiv |\vec{x}|$.

Da questa espressione si può vedere che A^μ definisce una distribuzione, poichè, per ogni ϕ , è possibile maggiorare $|A^\mu(\phi)|$ con una somma finita di seminorme. Il fatto che ciò sia vero è abbastanza intuitivo, anche senza una dimostrazioni rigorosa: $|\vec{y}(t)|$ rimane limitato per ogni t quindi, al crescere di r , la funzione di prova $\phi(x)$ va a zero più rapidamente dell'inverso di ogni polinomio (in particolare di r) evitando eventuali divergenze dell'integrale all'infinito. In questo caso, dunque, *il metodo di Green produce effettivamente una distribuzione*. Analogamente si può vedere che anche per traiettorie di tipo tempo illimitate il potenziale risultante appartiene a \mathcal{S}' .

Dall'espressione (1.9) si può ottenere il noto *potenziale di Liénard-Wiechert*

$$A^\mu(x) = \frac{e}{4\pi} \frac{u^\mu(\lambda)}{(x - y(\lambda))u(\lambda)} \Big|_{\lambda=\lambda'(x)}, \quad (1.11)$$

con $\lambda'(x)$, parametro ritardato, definito univocamente da

$$x^0 - y^0 \geq 0 \quad (x - y(\lambda))^2 = 0. \quad (1.12)$$

Esempio (*Traiettoria rettilinea di tipo luce*). Consideriamo ora una particella senza massa che si muova di moto rettilineo (e, necessariamente, uniforme); scriviamo la sua linea di universo come

$$y^\mu(\lambda) = u^\mu \lambda, \quad u^2 = 0.$$

Possiamo procedere formalmente come nel caso delle particelle massive e scrivere

$$\begin{aligned} A^\mu &= \frac{eu^\mu}{2\pi} \int H(x^0 - u^0\lambda) \delta((x - u\lambda)^2) d\lambda = \frac{eu^\mu H(ux)}{4\pi|(x - u\lambda)u|} \Big|_{\lambda=\frac{x^2}{2ux}} \\ &= \frac{ev^\mu H(vx)}{4\pi(vx)}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Quella ottenuta, però, non è una distribuzione a causa della singolarità non integrabile lungo $x^0 - \vec{x} \cdot \vec{v} = 0$ e quindi *non* siamo giunti ad una soluzione dell'equazione (1.2); in particolare, calcolando *formalmente* il tensore $F^{\mu\nu}$, troveremmo $F^{\mu\nu} \propto v_{[\mu}v_{\nu]} = 0$. In questo caso, dunque, *il metodo della funzione di Green fallisce*.

Metodo alternativo. Nel seguito del lavoro incontreremo vari moti di tipo luce per i quali, analogamente a quanto visto nell'ultimo esempio, il metodo di Green non è valido e sarà dunque necessario avere a disposizione sistemi risolutivi alternativi. Salvo indicazione contraria, indichiamo per comodità, ora e nel seguito, con le lettere maiuscole *corsive* $\mathcal{J}^\mu, \mathcal{A}^\mu, \mathcal{F}^{\mu\nu}$ le grandezze elettromagnetiche (quadricorrente, quadripotenziale, tensore elettromagnetico) relative a moti di *tipo luce* o, più in generale, asintoticamente tali. L'esigenza di questa notazione nasce dal fatto che il nostro "metodo alternativo" si basa sull'introduzione di traiettorie di *tipo tempo*, dipendenti da un parametro generico V e che diremo *regolarizzate*, alle cui grandezze elettromagnetiche associate riserveremo invece le lettere maiuscole usuali $J^\mu, A^\mu, F^{\mu\nu}$.

Come l'introduzione delle traiettorie regolarizzate permetta di risolvere le equazioni

$$\partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} = \mathcal{J}^\nu, \quad \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial^\nu \mathcal{F}^{\rho\sigma} = 0 \quad (1.14)$$

è presto detto. Ipotizziamo di avere due moti, uno asintoticamente di tipo luce e uno di tipo tempo, con quadricorrenti \mathcal{J}^μ e J^μ tali che per un opportuno limite distribuzionale, ad esempio $V \rightarrow 1$, si abbia

$$\mathcal{L}im_{V \rightarrow 1} J^\mu = \mathcal{J}^\mu \quad (1.15)$$

in cui abbiamo indicato con il simbolo " $\mathcal{L}im$ " il limite nel senso distribuzionale. Tramite i risultati del metodo di Green (nel seguito chiamato anche di Liénard-Wiechert), che valgono per le traiettorie di tipo tempo, possiamo ricavare il tensore elettromagnetico $F^{\mu\nu}$ soddisfacente le equazioni di Maxwell (1.1); allora *se* esiste il limite (distribuzionale) di $F^{\mu\nu}$ per $V \rightarrow 1$

$$\mathcal{L}im_{V \rightarrow 1} F^{\mu\nu} = \mathcal{F}^{\mu\nu} \quad (1.16)$$

grazie alla continuità dell'operazione di derivata in \mathcal{S}' , $\mathcal{F}^{\mu\nu}$ è soluzione di (1.14), infatti usando (1.15) e (1.16) si ha

$$\partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{L}im_{V \rightarrow 1} F^{\mu\nu} = \mathcal{L}im_{V \rightarrow 1} \partial_\mu F^{\mu\nu} = \mathcal{L}im_{V \rightarrow 1} J^\nu = \mathcal{J}^\nu \quad (1.17)$$

e similmente

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial^\nu \mathcal{F}^{\rho\sigma} = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial^\nu \mathcal{L}im_{V \rightarrow 1} F^{\rho\sigma} = \mathcal{L}im_{V \rightarrow 1} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial^\nu F^{\rho\sigma} = 0. \quad (1.18)$$

Un ragionamento del tutto analogo può essere svolto per i potenziali sfruttando l'equazione (1.2) anziché la (1.1).

Capitolo 2

Particelle di massa nulla: moti limitati

Il precedente capitolo ci ha insegnato come nella ricerca di soluzioni delle equazioni di Maxwell per particella singola tramite il metodo di Green sia necessaria una verifica della natura distribuzionale dei risultati ottenuti, a causa delle scritture puramente formali coinvolte. Questa osservazione ci accompagnerà quando, di qui in avanti, studieremo vari moti in regime ultrarelativistico partendo dalle traiettorie limitate di tipo luce, argomento di questo capitolo. Ricordiamo la notazione utilizzata: le grandezze scritte in corsivo maiuscolo sono associate a moti di tipo luce, quelle in maiuscolo usuale a moti di tipo tempo.

Potenziale e singolarità. Abbiamo già mostrato, anche se in maniera intuitiva, come per particelle massive che compiano moti limitati (vale a dire $|\vec{y}(t)| < L, \forall t$) i potenziali ricavati dal metodo di Green siano effettivamente delle distribuzioni. Lo stesso risultato è immediatamente estendibile a moti limitati di particelle di massa nulla, per i quali (procedendo anche in questo caso in maniera formale) si ottiene

$$\mathcal{A}^\mu = \frac{e}{4\pi} \frac{u^\mu}{(ul)} \Big|_{\lambda=\lambda'(x)}, \quad (2.1)$$

in cui $u^2 = 0$, $l^\mu \equiv x^\mu - y^\mu(\lambda)$ e $\lambda'(x)$ è determinato univocamente da (1.12).

Il fatto che il potenziale così ottenuto rappresenti effettivamente una distribuzione non è però a priori sufficiente a identificarlo come soluzione di (1.2). La (2.1), infatti, contiene al denominatore il prodotto scalare (ul) che *per generiche traiettorie di tipo luce* si può riscrivere come $(ul) = u^0 l^0 - \vec{u} \cdot \vec{l} = |\vec{u}| |\vec{l}| - \vec{u} \cdot \vec{l}$, espressione che si annulla quando \vec{u} è parallelo a \vec{l} , oltre che sulla traiettoria. È dunque necessario verificare a posteriori che la soluzione trovata soddisfi effettivamente le equazioni di Maxwell poiché la scrittura

$$\square \mathcal{A}^\mu = \square(G * \mathcal{J}^\mu) = (\square G) * \mathcal{J}^\mu = \delta^4 * \mathcal{J}^\mu = \mathcal{J}^\mu, \quad (2.2)$$

in cui \mathcal{J}^μ è la quadricorrente associata al moto di tipo luce, ha una validità puramente formale, a causa delle singolarità coinvolte.

Il luogo geometrico di quest'ultime, inoltre, risulterà nel seguito particolarmente importante, comparando esplicitamente nell'espressione dei campi elettromagnetici (per moti limitati e non); ne diamo dunque una descrizione più efficace ed elegante notando che, ad un istante t fissato, la condizione di parallelismo tra \vec{u} e \vec{l}

$$\vec{v}(\lambda') = \frac{\vec{u}(\lambda')}{|\vec{u}(\lambda')|} = \frac{\vec{x} - \vec{y}(\lambda')}{|\vec{x} - \vec{y}(\lambda')|}$$

può essere tradotta (tramite la riscrittura della definizione (1.12) per il tempo ritardato nella forma $|\vec{x} - \vec{y}(\lambda')| = t - \lambda'$) nell'espressione

$$\vec{x} = \vec{y}(\lambda') + (t - \lambda') \vec{v}(\lambda'), \quad t - \lambda' \geq 0. \quad (2.3)$$

Ponendo $b = t - \lambda'$ la (2.3) diventa

$$\vec{\gamma}(t, b) \equiv \vec{y}(t - b) + b\vec{v}(t - b), \quad b \geq 0 \quad (2.4)$$

da cui si vede che, a causa della condizione $b \geq 0$, la forma della singolarità è quella di una curva con un'estremità sulla particella; curva che, nel moto della particella, descrive la superficie

$$\Gamma^\mu(\lambda', b) = y^\mu(\lambda') + b v^\mu(\lambda'), \quad b \geq 0, \quad (2.5)$$

ottenuta riscaldando il parametro b .

Campo elettromagnetico. Dal potenziale (2.1) è possibile ricavare i campi corrispondenti secondo la relazione

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} = \partial^\mu \mathcal{A}^\nu - \partial^\nu \mathcal{A}^\mu \quad (2.6)$$

in cui le derivate vanno intese nel senso distribuzionale. La presenza delle singolarità sopra evidenziate rende però anche questo passaggio particolarmente delicato e può risultare più conveniente sfruttare idee differenti per ricavare i campi.

Si può, ad esempio, ricorrere al metodo descritto sul finire del Capitolo 1 e sostituire la traiettoria di interesse $y^\mu(\lambda)$, che è di tipo luce, con un'altra di tipo tempo, $y_V^\mu(\lambda)$, definita da

$$y_V^0(\lambda) = \frac{y^0(\lambda)}{V}, \quad \vec{y}_V(\lambda) = \vec{y}(\lambda), \quad V < 1 \quad (2.7)$$

che ha il pregio di soddisfare la relazione

$$\underline{\mathcal{L}im}_{V \rightarrow 1} J^\mu = \underline{\mathcal{L}im}_{V \rightarrow 1} e \int \delta^4(x - y_V(\lambda)) dy_V^\mu = e \int \delta^4(x - y(\lambda)) dy^\mu = \mathcal{J}^\mu \quad (2.8)$$

con J^μ quadricorrente relativa alla linea di universo $y_V^\mu(\lambda)$. Questa sostituzione equivale a considerare una particella che percorre l'orbita originaria ma con una velocità

$$\vec{v}_V(t) = \frac{d\vec{y}_V}{dy_V^0} = V\vec{v}(Vt) \quad (2.9)$$

minore di quella della luce. Il vantaggio di questa procedura, come detto, risiede nel fatto che per il nuovo moto considerato valgono i risultati di Liénard-Wiechert ed è dunque immediato il calcolo del tensore elettromagnetico $F^{\mu\nu}$. Se poi esiste il limite

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} \equiv \underline{\mathcal{L}im}_{V \rightarrow 1} F^{\mu\nu} = \underline{\mathcal{L}im}_{V \rightarrow 1} (C^{\mu\nu} + R^{\mu\nu}) \equiv C^{\mu\nu} + \mathcal{R}^{\mu\nu}, \quad (2.10)$$

allora $\mathcal{F}^{\mu\nu}$ è proprio il campo che cerchiamo, soluzione di (1.17) per il generico moto limitato di tipo luce considerato. Nell'ultima scrittura si è usato il fatto se il campo coulombiano (omettendo i pedici V)

$$C^{\mu\nu} = \frac{e}{4\pi} \frac{(l^\mu u^\nu - l^\nu u^\mu) u^2}{(ul)^3} \quad (2.11)$$

e quello di radiazione

$$R^{\mu\nu} = \frac{e}{4\pi} \frac{l^\mu((ul)w^\nu - (wl)u^\nu) - (\mu \leftrightarrow \nu)}{(ul)^3} \quad (2.12)$$

(in cui si è posto $w^\mu = du^\mu/d\lambda$) ammettono separatamente limite allora lo ammette anche il campo $F^{\mu\nu} = C^{\mu\nu} + R^{\mu\nu}$. Non valuteremo esplicitamente i limiti in (2.10) ma, per brevità, ci limiteremo a fornirne il risultato. Partendo dal campo coulombiano, si può vedere come questo, nel limite, svanisca

$$C^{\mu\nu} = \underline{\mathcal{L}im}_{V \rightarrow 1} C^{\mu\nu} = 0, \quad (2.13)$$

risultato che sarà interessante confrontare con quelli che otterremo nei capitoli successivi. L'espressione del campo di radiazione $\mathcal{R}^{\mu\nu}$ può invece essere scritta nella forma

$$\mathcal{R}^{\mu\nu} = \mathcal{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \mathcal{Q}^{\mu\nu} + \mathcal{P}(\mathcal{F}_{reg}^{\mu\nu}) \quad (2.14)$$

in cui $\mathcal{P}(\mathcal{F}_{reg})$ rappresenta il termine “regolare” del campo, quello cioè che si otterrebbe da (2.1) e (2.6) mediante derivazioni ordinarie che non tengano opportunamente conto delle singolarità¹:

$$\mathcal{F}_{reg}^{\mu\nu} = (\partial^\mu \mathcal{A}^\nu - \partial^\nu \mathcal{A}^\mu)|_{\mathbb{R}^4 \setminus \Gamma} = \frac{e}{4\pi} \frac{l^\mu ((ul)w^\nu - (wl)u^\nu)}{(ul)^3} - (\mu \leftrightarrow \nu). \quad (2.15)$$

Il contributo delle singolarità, che si “perderebbe” con il metodo della funzione di Green, è invece portato dal primo addendo, nelle vesti della distribuzione

$$\mathcal{Q}^{\mu\nu}(x) = e \int bH(b) (u^\mu(\lambda)w^\nu(\lambda) - u^\nu(\lambda)w^\mu(\lambda)) \delta^4(x - \Gamma(\lambda, b)) dbd\lambda \quad (2.16)$$

che ha supporto sulla superficie Γ definita in (2.5).

¹Il simbolo \mathcal{P} in $\mathcal{P}(\mathcal{F}_{reg})$, usato nel seguito per la parte principale, sta qui ad indicare il fatto che, per una generica funzione di prova ϕ , l'integrale $\mathcal{F}_{reg}^{\mu\nu}(\phi)$ converge in maniera condizionata, vale a dire rispettando un preciso ordine di integrazione. Per maggiori dettagli, si veda [3]

Capitolo 3

Particelle di massa nulla: moti illimitati

L'esempio conclusivo del Capitolo 1, sul moto rettilineo di tipo luce, era stato proposto con lo scopo di mettere in risalto i limiti del metodo di Green, non sempre efficace nel risolvere le equazioni di Maxwell. In quel contesto non ci eravamo dunque preoccupati di fornire la forma corretta di potenziale e campi, problema che invece affronteremo esplicitamente nella prima parte di questo capitolo. I risultati che ricaveremo per questo moto, storici, saranno poi di riferimento quando, nella seconda parte, tratteremo generiche traiettorie illimitate di tipo luce che tendano in maniera sufficientemente rapida a un moto rettilineo.

3.1 Moto rettilineo uniforme

Affidata la *pars destruens* al primo capitolo, cerchiamo ora per il moto rettilineo di tipo luce

$$y^\mu(\lambda) = u^\mu \lambda, \quad u^2 = 0$$

un'alternativa al metodo di Green con il quale, ricordiamo, non si ottiene un potenziale che appartenga allo spazio delle distribuzioni \mathcal{S}' . L'idea che sfrutteremo è la stessa descritta nel Capitolo 2 per i moti limitati e anticipata nel Capitolo 1: immaginare l'orbita originaria percorsa da una particella con $V < 1$ in modo da poter utilizzare i risultati di Liénard-Wiechert, per poi prendere il limite distribuzionale per $V \rightarrow 1$. In questo caso la (2.7) diviene

$$y_V^\mu(\lambda) = \left(\frac{u^0 \lambda}{V}, \vec{u} \lambda \right) \quad (3.1)$$

che soddisfa come in (2.8)

$$\mathcal{L}im_{V \rightarrow 1} J^\mu = \mathcal{J}^\mu \quad (3.2)$$

con \mathcal{J}^μ quadricorrente associata al moto rettilineo di tipo luce. A differenza, però, di quanto detto per i moti limitati applicheremo ora la procedura di limite (anziché al campo) al potenziale che, per il moto (3.1), ha la forma

$$A^\mu(x) = \frac{e}{4\pi} \frac{v_V^\mu}{\sqrt{(xv_V)^2 - x^2 v_V^2}}, \quad v_V^\mu = (1, V\vec{v}). \quad (3.3)$$

Ripetiamo ancora una volta il nostro ragionamento: poiché l'espressione (3.3) soddisfa per costruzione $\square A^\mu = J^\mu$, se A^μ ammette il limite \mathcal{A}^μ (per $V \rightarrow 1$) nel senso distribuzionale allora, grazie alla continuità della derivata, \mathcal{A}^μ , grazie alla (3.2), è automaticamente soluzione di

$$\square \mathcal{A}^\mu = \mathcal{J}^\mu. \quad (3.4)$$

Possiamo inoltre scrivere

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} = \mathcal{L}im_{V \rightarrow 1} F^{\mu\nu} = \partial^\mu \left(\mathcal{L}im_{V \rightarrow 1} A^\nu \right) - \partial^\nu \left(\mathcal{L}im_{V \rightarrow 1} A^\mu \right) \quad (3.5)$$

e ottenere anche il tensore elettromagnetico $\mathcal{F}^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$.

Purtroppo, però, sebbene il potenziale (3.3) ammetta il limite puntuale

$$\lim_{V \rightarrow 1} A^\mu(x) = \frac{e}{4\pi} \frac{v^\mu}{|vx|}, \quad (3.6)$$

quest'ultimo non definisce una distribuzione a causa della singolarità non integrabile lungo $x^0 - \vec{x} \cdot \vec{v} = 0$ e si può verificare che, in effetti, (3.3) *non* ammette limite nel senso distribuzionale.

Un modo per ovviare a questo problema è ricordare (e sfruttare) la libertà concessa dalle trasformazioni di gauge: i potenziali vettori A^μ e $A^\mu + \partial^\mu \Lambda$ sono infatti fisicamente equivalenti poiché generano lo stesso campo elettromagnetico $F^{\mu\nu}$. L'idea è quindi quella di trasformare il potenziale (3.3) mediante un campo scalare Λ in grado di prevenire “patologie” come quelle di (3.6). Per riuscire in questo obiettivo, il termine $\partial^\mu \Lambda$ deve dare a sua volta origine a delle singolarità e una buona scelta è

$$\Lambda(x) = \frac{e}{4\pi} \ln \left| (xv_V) - \sqrt{(xv_V)^2 - x^2 v_V^2} \right| \in \mathcal{S}'. \quad (3.7)$$

In questo modo, il nuovo potenziale

$$A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \Lambda = \frac{ex^\mu}{4\pi} \left(1 + \frac{xv_V}{\sqrt{(xv_V)^2 - x^2 v_V^2}} \right) \mathcal{P} \left(\frac{1}{x^2} \right), \quad (3.8)$$

in cui abbiamo indicato con il simbolo \mathcal{P} la parte principale, *ammette* il limite distribuzionale

$$\mathcal{A}^\mu = \underset{V \rightarrow 1}{\mathcal{L}im} A'^\mu = \frac{ex^\mu}{2\pi} H(vx) \mathcal{P} \left(\frac{1}{x^2} \right) \in \mathcal{S}' \quad (3.9)$$

che è, per costruzione, la soluzione di (1.2) che cerchiamo. Inoltre, sfruttando la relazione (3.5) e dato che per l'invarianza di gauge vale

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A'^\nu - \partial^\nu A'^\mu = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (3.10)$$

tramite derivazione di (3.9) otteniamo

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} = \frac{e}{2\pi} \frac{(v^\mu x^\nu - v^\nu x^\mu)}{x^2} \delta(vx). \quad (3.11)$$

Il risultato ottenuto nella (3.11), “storico”, rappresenta una *shock wave*, un campo diverso da zero solo su un piano, in questo caso perpendicolare alla direzione del moto e passante, in ogni istante, per la posizione della particella in quell'istante e che si propaga con la velocità della luce.

3.2 Traiettorie asintoticamente rettilinee

Analizziamo ora il caso di generiche traiettorie di tipo luce che tendano, nel passato, a moti rettilinei, come avviene per particelle asintoticamente libere. Richiediamo, in particolare, che il moto nel limite $t \rightarrow -\infty$ possa essere scritto nella forma

$$\vec{y}(t) = \vec{v}_\infty t + \vec{\Delta}(t) \quad (3.12)$$

con (necessariamente) $|\vec{v}_\infty| = 1$ e $\vec{\Delta}(t)$ tale che per ogni t sufficientemente grande e negativo ($t < T$) si abbia

$$|\vec{\Delta}(t)| < \frac{\alpha}{|t|^2}, \quad |\dot{\vec{\Delta}}(t)| < \frac{\beta}{|t|^2}, \quad |\ddot{\vec{\Delta}}(t)| < \frac{\gamma}{|t|^3}, \quad (3.13)$$

con α , β e γ costanti positive. Non ci interesseremo mai agli andamenti per $t \rightarrow +\infty$ perché questi, per causalità, non possono influire sulla forma del campo elettromagnetico ad un istante t finito quindi, nel seguito del capitolo e nel successivo, spesso non specificheremo che il moto asintotico è considerato *nel passato*.

Abbiamo visto che nel caso della traiettoria rettilinea con $V = 1$ il metodo di Green fallisce. In realtà questo è un risultato più generale che vale anche per una qualsiasi traiettoria di tipo luce che tenda asintoticamente al moto rettilineo. Per mostrarlo, facciamo vedere perché non sia possibile applicare a questo caso il ragionamento svolto per i moti limitati nel primo esempio del Capitolo 1. Riscriviamo per facilità di lettura l'espressione (1.10)

$$A^\mu(\phi) = \frac{e}{4\pi} \int \frac{v^\mu(t)}{r} \phi(t+r, \vec{x} + \vec{y}(t)) dt d^3x.$$

Nelle nostre ipotesi, la linea di universo delle particelle soddisfa

$$\vec{y}(t) \approx \vec{v}_\infty t \quad \text{per } t \rightarrow -\infty, \quad (3.14)$$

e dunque asintoticamente la funzione di prova che compare nell'integrale assume la forma $\phi(t+r, \vec{x} + \vec{v}_\infty t)$. Conseguenza di ciò è che lungo la linea $\vec{x} = -\vec{v}_\infty t$ l'argomento della ϕ rimane finito per ogni $r = |\vec{x}|$ e quindi nulla bilancia la divergenza portata dal resto dell'integrale, che cresce come r (si ricordi che $d^3x = r^2 dr d\Omega$). Ricorriamo quindi, anche in questo caso, alla regolarizzazione della traiettoria (2.7) sfruttando ancora una volta

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} \equiv \lim_{V \rightarrow 1} F^{\mu\nu} = \lim_{V \rightarrow 1} (C^{\mu\nu} + R^{\mu\nu}) \equiv C^{\mu\nu} + \mathcal{R}^{\mu\nu}.$$

Si può così ottenere l'espressione

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \mathcal{Q}^{\mu\nu} + \mathcal{P}(\mathcal{F}_{reg}^{\mu\nu}) + C^{\mu\nu} \quad (3.15)$$

in cui il primo termine (si veda (2.16)) è proporzionale alla distribuzione δ con supporto sulla singolarità definita da (2.4), il secondo corrisponde essenzialmente al limite puntuale dei campi di Liénard-Wiechert, mentre l'ultimo è il limite del campo coulombiano che, a differenza di quanto accade nei moti limitati, non è nullo ma vale

$$C^{\mu\nu} = \frac{e}{2\pi} \frac{(v_\infty^\mu x^\nu - v_\infty^\nu x^\mu)}{x^2} \delta(v_\infty x) \quad (3.16)$$

con v_∞^μ quadrivelocità ($v^\mu \equiv dy^\mu/dt$) asintotica.

La comparsa dal termine coulombiano, di una shock wave della forma (3.11), è la principale differenza rispetto a quanto accade nei moti limitati. Il fatto che la particella non percorra una traiettoria rettilinea ma vi tenda solo asintoticamente sembra infatti essere compensato dalla durata infinita del moto, permettendo in questo modo la creazione di una shock wave che si propaga linearmente alla velocità della luce. È questo, per così dire, il ricordo al finito dell'andamento asintotico, necessario perché le equazioni di Maxwell siano risolte e indipendenti dalla successiva forma della traiettoria, che invece incide sui rimanenti termini di (3.15). Si può inoltre vedere che complessivamente il campo svanisce proprio in corrispondenza della shock wave. Per quanto riguarda il termine $\mathcal{Q}^{\mu\nu}$ ciò è dovuto al fatto che (per ogni t fissato) la curva delle singolarità (2.4) (diversamente dai moti limitati) ha due estremità al finito

$$\vec{\gamma}(t, 0) = \vec{y}(t), \quad \vec{\gamma}(t, \infty) = \vec{v}_\infty t \quad (3.17)$$

di cui una proprio sulla shock wave. Il termine $\mathcal{P}(\mathcal{F}_{reg}^{\mu\nu})$ è invece diverso da zero solo *dietro* la shock wave perché per $\vec{x} \cdot \vec{v}_\infty > t$ le equazioni del tempo ritardato non ammettono soluzione.

Capitolo 4

Particelle massive: moti rettilinei illimitati asintoticamente di tipo luce

In quest'ultimo capitolo studieremo traiettorie rettilinee di tipo tempo che siano *asintoticamente* di tipo luce. Per individuare un modo fecondo di affrontare il problema, ci limiteremo inizialmente al caso particolare del moto iperbolico (4.1) sul quale, come discusso nell'Introduzione, si è esercitata parte della letteratura in tempi più o meno recenti (per una storia dettagliata del problema si veda [10]) mostrando come l'applicazione "ingenua" dei risultati di Liénard-Wiechert conduca a soluzioni in chiara contraddizione con l'equazioni di Maxwell e dunque non accettabili. Nella nostra trattazione dimostreremo come la causa di ciò sia la perdita del contributo relativo al moto rettilineo asintotico, una shock wave di cui forniremo per la prima volta una derivazione rigorosa. Generalizzeremo poi il risultato a generiche traiettorie rettilinee di tipo tempo che siano asintoticamente di tipo luce, mostrando che anche in questo caso è prodotta una shock wave, funzione della legge oraria tramite due parametri. In questo capitolo, per semplicità, indicheremo le quantità fisiche relative al moto originale con A^μ , $F^{\mu\nu}$ e J^μ e quelle relative al moto regolarizzato con A_L^μ , $F_L^{\mu\nu}$ e J_L^μ .

4.1 Moto iperbolico

Iniziamo dunque dal caso particolare del moto iperbolico

$$\vec{y}(t) = (0, 0, \sqrt{b^2 + t^2}), \quad (4.1)$$

con b generico parametro reale che assumeremo positivo. Il senso fisico della (4.1) può essere trovato nella traiettoria descritta da una particella relativistica di massa m soggetta ad una forza "costante" F , come accade con una carica e in un campo elettrico E costante, uniforme e infinitamente esteso (in tal caso $b = m/F = m/(eE)$). Analogamente ai casi studiati nel Capitolo 3 il moto che consideriamo tende, nel passato, ad uno rettilineo di tipo luce e sarà dunque interessante ed istruttivo il confronto dei risultati ottenuti.

Non applicabilità di Liénard-Wiechert. Come già ripetuto, è stato mostrato da diversi autori che l'approccio probabilmente più spontaneo, quello basato sull'applicazione dei risultati di Liénard-Wiechert, non è in questo caso efficace. Una simile scoperta non deve però sorprendere eccessivamente perché, ricordiamo ancora una volta, l'applicazione del metodo di Green ha carattere formale ed è necessario verificare a posteriori che i campi ricavati risolvano effettivamente le equazioni di Maxwell, in particolare quando $|\vec{v}(t)| \rightarrow 1$ per $t \rightarrow -\infty$. Mostriamo però più esplicitamente in che modo i risultati di L.-W. falliscano scrivendo in

maniera separata i contributi di accelerazione e di velocità dei loro campi

$$\vec{E}_v = \frac{e}{4\pi R^2} \frac{(1-v^2)(\vec{m}-\vec{v})}{(1-\vec{v}\cdot\vec{m})^3}, \quad \vec{B}_v = \vec{m} \times \vec{E}_v, \quad (4.2)$$

$$\vec{E}_a = \frac{e}{4\pi R} \frac{\vec{m} \times ((\vec{m}-\vec{v}) \times \vec{a})}{(1-\vec{v}\cdot\vec{m})^3}, \quad \vec{B}_a = \vec{m} \times \vec{E}_a, \quad (4.3)$$

in cui $\vec{m} = \frac{\vec{x}-\vec{y}(t)}{|\vec{x}-\vec{y}(t)|}$, $R = |\vec{x}-\vec{y}(t)|$ e tutte le quantità cinematiche (\vec{y} , \vec{v} e \vec{a}) sono valutate all'istante ritardato t' definito da (1.12), con $\lambda = t$. Valutando i campi per la traiettoria (4.1) si ottengono le espressioni (ricavate per la prima volta da [6])

$$\vec{E}(\rho, \phi, z, t) = \frac{eb^2}{\pi} \frac{(z^2 - \rho^2 - b^2 - t^2)\hat{z} + 2z\vec{\rho}}{((z^2 + \rho^2 + b^2 - t^2)^2 - 4b^2(z^2 - t^2))^{3/2}} H(t+z), \quad (4.4)$$

$$\vec{B}(\rho, \phi, z, t) = \frac{eb^2}{\pi} \frac{2t\rho\hat{\phi}}{((z^2 + \rho^2 + b^2 - t^2)^2 - 4b^2(z^2 - t^2))^{3/2}} H(t+z), \quad (4.5)$$

in cui si sono usate le coordinate cilindriche (ρ, ϕ, z) e l'espressione del tempo ritardato (si veda [1])

$$t' = -\frac{1}{2(t^2 - z^2)} \left(t(\rho^2 + z^2 + b^2 - t^2) - z\sqrt{4b^2(t^2 - z^2) + (\rho^2 + z^2 + b^2 - t^2)^2} \right). \quad (4.6)$$

che vale per $z+t > 0$, mentre per $z+t < 0$ non si hanno soluzioni con $t > t'$. L'elemento cruciale nelle espressioni (4.4)-(4.5) è la funzione di Heaviside $H(t+z)$ che fa sì che i campi terminino "a mezz'aria", ovvero per ogni $z < -t$ per t fissato, e che le equazioni di Maxwell non siano soddisfatte in tutto lo spazio. Lo vediamo rapidamente, valutando il campo elettrico all'istante $t = 0$:

$$\vec{E}_0(\rho, \phi, z) = \frac{eb^2}{\pi} \frac{(z^2 - \rho^2 - b^2)\hat{z} + 2z\vec{\rho}}{((z^2 + \rho^2 + b^2)^2 - (2zb)^2)^{3/2}} H(z). \quad (4.7)$$

Se adesso si considera un cilindro centrato nell'origine con altezza infinitesima e parallelo all'asse z si ottiene che

$$\int \vec{E}_0 \cdot d\vec{\Sigma} = -\frac{eb^2}{\pi} \int_0^r \frac{1}{(\rho^2 + b^2)^2} 2\pi\rho d\rho = -e \left(\frac{r^2}{r^2 + b^2} \right), \quad (4.8)$$

nonostante non vi siano cariche nella regione considerata. La condizione imposta (nel vuoto) dalle equazioni di Maxwell, $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$, non è dunque soddisfatta.

Traiettoria regolarizzata. Il ragionamento appena svolto fa pensare che un contributo (nel caso particolare un termine in $z = 0$ quando $t = 0$) non venga considerato nei campi di Liénard-Wiechert e un'idea interessante è ritenere che il termine possa provenire dalla componente asintotica del moto. Le traiettorie considerate nel Capitolo 3 hanno infatti lo stesso andamento, per $t \rightarrow -\infty$, del moto iperbolico ed anche in quel caso i campi "regolari" terminano "a mezz'aria", in corrispondenza del piano della shock wave. Le equazioni di Maxwell sono però lì soddisfatte dall'espressione (3.15) del campo complessivo (anche) grazie alla presenza del termine $C^{\mu\nu}$ originato dal moto rettilineo asintotico, proporzionale a una delta di Dirac e quindi di una forma potenzialmente in grado di curare anche i problemi nel caso del moto iperbolico. Questa è solo un'intuizione e non significa che il campo corretto si ottenga sommando la (3.16) ai risultati di Liénard-Wiechert. In effetti, mostreremo nella Sezione 4.2 che nel caso di un più generico moto rettilineo asintoticamente di tipo luce si assiste alla formazione di una shock wave ma la forma di questa dipende dalle caratteristiche asintotiche della traiettoria ed è in generale funzione della legge oraria tramite due parametri.

Nel caso particolare del moto iperbolico il contributo asintotico del tensore elettromagnetico (in termini del quale continueremo la nostra trattazione) ha la forma

$$F_{\infty}^{\mu\nu} = \frac{e}{2\pi} \frac{v_{\infty}^{\mu} x^{\nu} - v_{\infty}^{\nu} x^{\mu}}{x^2 - b^2} \delta(t + z), \quad (4.9)$$

che, si noti, differisce da (3.16) per il denominatore. Come detto nell'Introduzione, sebbene questo risultato sia noto da tempo (si veda [7]), *non è mai stata data una sua derivazione rigorosa* che invece noi forniremo in questo paragrafo. Nel seguito proveremo, dunque, che il campo associato al moto iperbolico, soluzione delle equazioni di Maxwell, è dato da

$$F_{Tot}^{\mu\nu} = F_{LW}^{\mu\nu} + F_{\infty}^{\mu\nu} = C_{LW}^{\mu\nu} + R_{LW}^{\mu\nu} + F_{\infty}^{\mu\nu} \quad (4.10)$$

in cui $F_{LW}^{\mu\nu}$ è il tensore elettromagnetico relativo ai campi (4.4)-(4.5) e $C_{LW}^{\mu\nu}$ e $R_{LW}^{\mu\nu}$ sono le sue componenti coulombiana e di radiazione.

Per dimostrarlo in maniera rigorosa, deriviamo la traiettoria (4.1) tramite un'opportuna procedura di limite; seguendo ad esempio [11], si può considerare

$$\vec{y}_L(t) = \begin{cases} \frac{b^2 + Lt}{\sqrt{L^2 + b^2}}(0, 0, 1), & \text{per } t \leq L, \\ \sqrt{b^2 + t^2}(0, 0, 1), & \text{per } t > L, \end{cases} \quad (4.11)$$

(con $L < 0$) che tende alla (4.1) per $L \rightarrow -\infty$ e in cui i parametri del moto sono stati scelti in modo tale da avere $\vec{y}_L(t)$ e $\vec{v}_L(t) = d\vec{y}_L/dt$ continue. Notiamo che questa regolarizzazione è sensibilmente diversa da quelle adottate nei precedenti capitoli, quando l'idea fisica soggiacente era quella di una particella che percorreva la stessa orbita di partenza ma con $V < 1$. In questo caso, invece, abbiamo troncato il moto iperbolico originario, raccordandolo con uno rettilineo uniforme di tipo tempo. Prendere il limite per $L \rightarrow -\infty$ di questa nuova traiettoria significherà far variare proprio il punto di raccordo, "spostandolo" nel passato.

Derivazione del campo elettromagnetico come limite. Chiamiamo $F_L^{\mu\nu}$ il tensore elettromagnetico relativo al moto regolarizzato (4.11) che scomponiamo nelle sue componenti coulombiana $C_L^{\mu\nu}$ e di radiazione $R_L^{\mu\nu}$. Ancora una volta l'idea risolutiva è sfruttare i risultati di Liénard-Wiechert per la traiettoria regolarizzata per poi prenderne il limite distribuzionale, in questo caso per $L \rightarrow -\infty$. In particolare *se* le due componenti $C_L^{\mu\nu}$ e $R_L^{\mu\nu}$ ammettono separatamente limite *allora* lo ammette anche $F_L^{\mu\nu} = R_L^{\mu\nu} + C_L^{\mu\nu}$ e in tal caso, poiché la quadricorrente associata al moto regolarizzato J_L^{μ} tende a quella del moto iperbolico J^{μ}

$$\mathcal{L}\lim_{L \rightarrow -\infty} J_L^{\mu} = \mathcal{L}\lim_{L \rightarrow -\infty} e \int \delta^4(x - y_L(\lambda)) dy_L^{\mu} = e \int \delta^4(x - y(\lambda)) dy^{\mu} = J^{\mu}, \quad (4.12)$$

si ha necessariamente, come mostrato nel primo capitolo, che

$$\mathcal{L}\lim_{L \rightarrow -\infty} F_L^{\mu\nu} = F_{Tot}^{\mu\nu}. \quad (4.13)$$

ovvero che il campo ottenuto dalla procedura di limite è soluzione delle equazioni di Maxwell (1.1) per il moto iperbolico.

Studiamo dunque separatamente $C_L^{\mu\nu}$ e $R_L^{\mu\nu}$ iniziando dalla componente *coulombiana*. Usando il tempo proprio s come parametro, possiamo riscrivere il contributo $C^{\mu\nu}(x)$ di un generico campo di Liénard-Wiechert

$$C^{\mu\nu}(x) = \frac{e}{4\pi} \frac{l^{\mu} u^{\nu} - l^{\nu} u^{\mu}}{(ul)^3} \Big|_{s=s'(x)}$$

nella forma

$$C^{\mu\nu}(x) = \frac{e}{2\pi} \int \frac{l^\mu u^\nu - l^\nu u^\mu}{(ul)^2} H(x^0 - y^0(s)) \delta((x - y(s))^2) ds. \quad (4.14)$$

Applicando una funzione di test ϕ ed operando il cambio $x \rightarrow x + y(s)$, si ottiene

$$C^{\mu\nu}(\phi) = \frac{e}{4\pi} \int (1 - v^2) \frac{(r, \vec{x})^\mu v^\nu - (r, \vec{x})^\nu v^\mu}{r(r - \vec{v} \cdot \vec{x})^2} \phi(r + t, \vec{x} + \vec{y}(t)) d^3x dt \quad (4.15)$$

in cui $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $v^\mu = dy^\mu/dt = (1, \vec{v}(t))$, $v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$ e si è ricordata la relazione $ds = \sqrt{1 - v^2} dt$. Fin qui il risultato è generale; inseriamo ora nella (4.15) la traiettoria (4.11) e spezziamo l'integrale temporale in due contributi distinti, relativi alle due porzioni del moto regolarizzato

$$C_L^{\mu\nu}(\phi) = \int_{-\infty}^L (\dots) dt + \int_L^\infty (\dots) dt \equiv A_L^{\mu\nu}(\phi) + B_L^{\mu\nu}(\phi). \quad (4.16)$$

Di entrambi i termini, $A_L^{\mu\nu}$ e $B_L^{\mu\nu}$, occorre eseguire il limite distribuzionale $L \rightarrow -\infty$ che, ricordiamo, consiste per definizione nella valutazione dei limiti ordinari $\lim_{L \rightarrow -\infty} A_L^{\mu\nu}(\phi)$ e $\lim_{L \rightarrow -\infty} B_L^{\mu\nu}(\phi)$, per ogni $\phi \in \mathcal{S}$ (si veda l'Appendice A).

Per $B_L^{\mu\nu}(\phi)$, vale a dire il termine generato dalla porzione iperbolica del moto regolarizzato, si ha banalmente che

$$\mathcal{L}im_{L \rightarrow -\infty} B_L^{\mu\nu} = C_{LW}^{\mu\nu}. \quad (4.17)$$

Il termine $A_L^{\mu\nu}(\phi)$ è invece quello relativo alla porzione rettilinea, in cui riponiamo le nostre aspettative sulla comparsa della shock wave. Notando che la componente rettilinea di (4.11) è espressa da (ometteremo i pedici per semplicità di notazione)

$$\vec{y}(t) = (0, 0, -V)t + (0, 0, 1) \frac{b^2}{\sqrt{b^2 + L^2}}, \quad v^\mu = (1, 0, 0, -V) \quad (4.18)$$

con

$$V = -\frac{L}{\sqrt{b^2 + L^2}}, \quad (4.19)$$

otteniamo

$$A_L^{\mu\nu}(\phi) = \frac{e}{4\pi} \int_{t \leq L} (1 - V^2) \frac{(r, \vec{x})^\mu v^\nu - (r, \vec{x})^\nu v^\mu}{r(r + Vz)^2} \phi\left(r + t, \vec{x} + \left(-Vt + \frac{b^2}{\sqrt{b^2 + L^2}}\right) \hat{z}\right) dx dy dz dt. \quad (4.20)$$

Un'osservazione: la condizione sull'estremo di integrazione, $t \leq L$, non è posta sul tempo fisico del problema, vale a dire quello in cui un osservatore misura il campo. L'argomento della funzione di prova, infatti, non è nella forma (t, x, y, z) quindi le variabili su cui integriamo sono solo ausili matematici. Il significato fisico delle condizioni che compaiono nella (4.20) (e nelle espressioni successive in cui cambieremo variabili) sarà, per così dire, nascosto durante la trattazione; ci preoccuperemo solo in un secondo momento di ricavarlo, controllandone la sensatezza. Con questo spirito, operiamo ora nella (4.20) i cambiamenti di variabile $(t, z) \rightarrow (t', z')$ definiti da

$$t' = t + r, \quad z' = \frac{z + Vr}{\sqrt{1 - V^2}}, \quad (4.21)$$

con le trasformazioni inverse

$$z = \frac{z' - VR}{\sqrt{1 - V^2}}, \quad t = t' - \frac{R - Vz'}{\sqrt{1 - V^2}} \quad \text{con } R \equiv \sqrt{x^2 + y^2 + z'^2}.$$

Torneranno inoltre utili le relazioni

$$r = \frac{R - Vz'}{\sqrt{1 - V^2}}, \quad r + Vz = \sqrt{1 - V^2} R \quad \frac{\partial z}{\partial z'} = \frac{r}{R}. \quad (4.22)$$

Nel cambiare le variabili abbiamo poi un'ultima preoccupazione data dai nuovi estremi d'integrazione; è immediato vedere che mentre z' varia tra $-\infty$ e $+\infty$ (come z in precedenza), la variabile t' assume i valori tra $-\infty$ e $r + L$. Scrivendo quest'ultima condizione tramite una funzione di Heaviside H , otteniamo

$$A_L^{\mu\nu}(\phi) = \frac{e}{4\pi} \int \frac{X^\mu v^\nu - X^\nu v^\mu}{R^3} \phi \left(t', x, y, -Vt' + \sqrt{1 - V^2}z' + \frac{b^2}{\sqrt{b^2 + L^2}} \right) H(-t' + L + r) dx dy dz' dt' \quad (4.23)$$

in cui

$$X^\mu = \left(\sqrt{\frac{1 - V}{V(1 + V)}}(R + z'), x, y, 0 \right). \quad (4.24)$$

Compiamo infine un'ultima riscrittura della (4.23) e precisamente dell'argomento di H ; invertendo la relazione (4.19) che lega V ed L

$$L = -\frac{bV}{\sqrt{1 - V^2}} \quad (4.25)$$

possiamo scrivere

$$r + L = \frac{R - Vz'}{\sqrt{1 - V^2}} - \frac{bV}{\sqrt{1 - V^2}} = \frac{R - V(z' + b)}{\sqrt{1 - V^2}} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z'^2} - V(z' + b)}{\sqrt{1 - V^2}} \quad (4.26)$$

così da ottenere

$$A_L^{\mu\nu}(\phi) = \frac{e}{4\pi} \int \frac{X^\mu v^\nu - X^\nu v^\mu}{R^3} \phi(\dots) H \left(R - \sqrt{1 - V^2}t' - V(z' + b) \right) dx dy dz' dt'. \quad (4.27)$$

Tutti i passaggi precedenti sono stati preparatori alla procedura di limite per $V \rightarrow 1$, equivalente a $L \rightarrow -\infty$ (si veda la (4.19)), che vogliamo ora applicare alla (4.27); per portare il limite sotto il segno di integrale in modo rigoroso dovremmo ricorrere al seguente

Teorema (della convergenza dominata). *Sia f_k una successione di funzioni appartenenti a $L^1(\mathbb{R}^D)$ convergente q.o. a una funzione (misurabile) f . Se esiste $g \in L^1(\mathbb{R}^D)$ tale che $|f_k| \leq g$ quasi ovunque e $\forall k$, allora $f \in L^1(\mathbb{R}^D)$ e vale*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k d^D x = \int f d^D x.$$

Nel seguito ci limiteremo a verificare la prima ipotesi: $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x) \in L^1$ e ci concentreremo, dunque, solo sulla valutazione del limite degli integrandi. Poiché si ha che

$$\lim_{V \rightarrow 1} H(-\sqrt{1 - V^2}t' - V(z' + b) + R) = H(\sqrt{x^2 + y^2 + z'^2} - z' - b) \quad (4.28)$$

possiamo scrivere immediatamente $A^{\mu\nu}(\phi) = \lim_{V \rightarrow 1} A_L^{\mu\nu}(\phi)$ nella forma

$$A^{\mu\nu}(\phi) = \frac{e}{4\pi} \int \frac{m^\mu v_\infty^\nu - m^\nu v_\infty^\mu}{(x^2 + y^2 + z'^2)^{3/2}} \phi(t', x, y, -t') H \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z'^2} - z' - b \right) dx dy dz' dt', \quad (4.29)$$

in cui le variabili assumono tutti i valori tra $-\infty$ e $+\infty$, $v_\infty^\mu = (1, 0, 0, -1)$ e $m^\mu = (0, x, y, 0)$.

Per comprendere come agisce il campo sulla funzione di prova, riscriviamo l'integrale eliminando (si noti, dopo aver preso il limite) la funzione di Heaviside. Possiamo farlo studiando sotto quali condizioni l'argomento di H è positivo, nel nostro caso

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z'^2} \geq z' + b. \quad (4.30)$$

Abbiamo a questo punto due scenari possibili

- $z' < -b$ e in questo caso la (4.30) è soddisfatta;
- $z' \geq -b$ e possiamo quindi elevare al quadrato entrambi i membri della (4.30) così da ottenere $-b \leq z' < (x^2 + y^2 - b^2)/(2b)$.

Mettendo insieme i due casi si ottiene

$$z' \leq \frac{\rho^2 - b^2}{2b}, \quad (4.31)$$

con $\rho^2 = x^2 + y^2$, che è dunque la condizione che dobbiamo imporre sul dominio di integrazione di z' per poter eliminare la funzione di Heaviside. Integriamo ora rispetto a z' ; svolgendo separatamente il calcolo abbiamo

$$\int_{-\infty}^{\frac{\rho^2 - b^2}{2b}} \frac{dz'}{(\rho^2 + z'^2)^{3/2}} = \frac{2}{\rho^2 + b^2}.$$

In definitiva, dunque, rimuovendo gli apici:

$$\begin{aligned} A^{\mu\nu}(\phi) &= \frac{e}{2\pi} \int \frac{m^\mu v_\infty^\nu - m^\nu v_\infty^\mu}{x^2 + y^2 + b^2} \phi(t, x, y, -t) dx dy dt \\ &= \frac{e}{2\pi} \int \frac{v_\infty^\mu x^\nu - v_\infty^\nu x^\mu}{x_\sigma x^\sigma - b^2} \delta(t + z) \phi(t, x, y, z) dx dy dz dt \end{aligned} \quad (4.32)$$

che è il risultato (4.9) in cui speravamo. Abbiamo così dimostrato, recuperando la (4.17), che

$$\mathcal{L}im_{L \rightarrow -\infty} C_L^{\mu\nu} = C_{LW}^{\mu\nu} + F_\infty^{\mu\nu}. \quad (4.33)$$

Per quanto riguarda invece il contributo del termine di *radiazione* $R_L^{\mu\nu}$ si può svolgere un ragionamento analogo a quello appena mostrato. In questo caso, però, la porzione rettilinea del moto fornisce un contributo nullo (perché nulla è la quadriaccelerazione) e dunque, dalla sola porzione iperbolica, si ottiene (come nella (4.17))

$$\mathcal{L}im_{L \rightarrow -\infty} R_L^{\mu\nu} = R_{LW}^{\mu\nu}. \quad (4.34)$$

Unendo i risultati (4.33) e (4.34) si vede che la nostra procedura di limite ha effettivamente prodotto il campo (4.10), come volevamo.

La presenza del contributo asintotico nel campo (4.10) può risultare inaspettata; possiamo comunque provare a darne una interpretazione fisica anche alla luce di quanto imparato dai capitoli precedenti. Abbiamo infatti visto nel caso di traiettorie illimitate che la shock wave che si forma nel moto asintotico acquista una sua propria “autonomia” e continua a propagarsi in maniera rettilinea alla velocità della luce indipendentemente dal mutamento di traiettoria a cui può andare incontro la particella. Anche per il moto iperbolico il meccanismo appare lo stesso ed il fatto che il piano della singolarità sia spostato “in avanti” rispetto alla posizione della particella è dovuto alla decelerazione subita da questa che non agisce invece sulla shock wave.

Interpretazione. L'ultimo problema rimasto in sospeso è l'interpretazione fisica della condizione corrispondente all'argomento della Heaviside nella (4.27). Le variabili (t', x, y, z') usate sono infatti solo ausili matematici perché la funzione di prova nella (4.27) è nella forma (si veda la (4.23))

$$\phi \left(t', x, y, -Vt' + \sqrt{1 - V^2} z' + \frac{b^2}{\sqrt{b^2 + L^2}} \right) \quad (4.35)$$

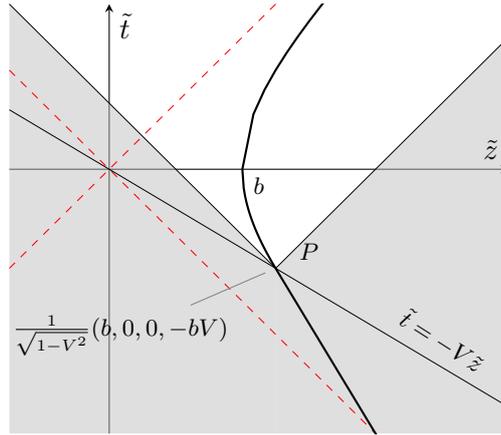


Figura 4.1: La figura mostra, in grigio, la regione individuata dalla condizione (4.38). Il moto rappresentato (con tratto più marcato) è quello regolarizzato con punto di raccordo in $P = \frac{1}{\sqrt{1-V^2}}(b, 0, 0, -bV)$ e la porzione bianca del disegno individua il cono luce futuro centrato in P . Le linee tratteggiate sono le bisettrici degli assi a cui il moto iperbolico originario tende asintoticamente.

anziché $\phi(\tilde{t}, x, y, \tilde{z})$; per poter dare dunque un senso alla condizione

$$-\sqrt{1-V^2}t' - V(z' + b) + \sqrt{x^2 + y^2 + z'^2} \geq 0 \quad (4.36)$$

dobbiamo compiere il cambiamento di coordinate $(t', z') \rightarrow (\tilde{t}, \tilde{z})$ definito da

$$\begin{cases} t' = \tilde{t} \\ z' = \frac{V\tilde{t} + \tilde{z} - b\sqrt{1-V^2}}{\sqrt{1-V^2}} \end{cases} \quad (4.37)$$

in cui, per la componente z' , si è fatto uso della (4.25). Sostituendo nella (4.36) si ottiene

$$-\sqrt{1-V^2}\tilde{t} - V \left(\frac{V\tilde{t} + \tilde{z} - b\sqrt{1-V^2}}{\sqrt{1-V^2}} + b \right) + \sqrt{x^2 + y^2 + \left(\frac{V\tilde{t} + \tilde{z} - b\sqrt{1-V^2}}{\sqrt{1-V^2}} \right)^2} \geq 0$$

e dopo della semplice algebra si arriva a (ricordiamo che $\rho^2 = x^2 + y^2$)

$$\begin{cases} \rho^2 + \left(\tilde{z} - \frac{b}{\sqrt{1-V^2}} \right)^2 - \left(\tilde{t} + \frac{bV}{\sqrt{1-V^2}} \right)^2 \geq 0 \\ \tilde{t} > -V\tilde{z} \end{cases} \cup \quad \tilde{t} < -V\tilde{z}. \quad (4.38)$$

Quest'ultima scrittura definisce l'insieme (in grigio in Figura 4.1) di tutti i punti al di fuori del cono di luce futuro con origine in

$$P = \frac{1}{\sqrt{1-V^2}}(b, 0, 0, -bV) \quad (4.39)$$

che è proprio il punto di raccordo tra moto rettilineo e iperbolico. Immaginando lo spostamento del cono di luce lungo la traiettoria rettilinea del moto si vede che la condizione (4.38) equivale a considerare tutti e soli i punti che nell'intervallo temporale $] -\infty, L]$ sono stati raggiunti dal campo coulombiano del moto rettilineo.

Potenziale, derivazione euristica. Per le stesse ragioni mostrate nella Sezione 3.2 per i moti illimitati, anche il potenziale di Liénard-Wiechert associato al moto iperbolico

$$A^\mu = \frac{e}{4\pi} \frac{u^\mu}{(ul)} H(v_\infty x) \quad (4.40)$$

non definisce una distribuzione a causa della singolarità non integrabile lungo $t + z = 0$ (la presenza del fattore $H(v_\infty x)$ è dovuta al fatto che l'equazione del tempo ritardato non ha soluzione per $t + z = v_\infty x < 0$). Possiamo però sfruttare le trasformazioni di gauge per ricavare, in maniera *intuitiva*, un potenziale A'^μ che sia effettivamente soluzione di (1.2). Nel “costruirlo”, chiamando $F'^{\mu\nu}$ il tensore elettromagnetico relativo al potenziale A'^μ , dovremo verificare che

- $A'^\mu \in \mathcal{S}'$;
- $F'^{\mu\nu}|_{v_\infty x \neq 0} = F_{LW}^{\mu\nu}$;
- il campo $F'^{\mu\nu}$ contenga al suo interno la shock wave.

Prima di procedere, però, scriviamo delle identità di facile verifica¹, utili nel seguito:

$$y^2 = -b^2, \quad yu = 0, \quad wy = -1, \quad w^\mu = \frac{y^\mu}{b^2}, \quad 1 - (wl) = -(wx). \quad (4.41)$$

Per soddisfare la prima delle nostre richieste, dobbiamo rimuovere la singolarità del potenziale lungo $t + z = v_\infty x = 0$; questo, come abbiamo già avuto modo di notare per il moto rettilineo di tipo luce, può essere realizzato solo introducendo, tramite la trasformazione di gauge, un'altra singolarità in grado di compensare la prima. Una scelta possibile è

$$\Lambda = \frac{e}{4\pi} \ln \left(\frac{ul}{v_\infty x} \right). \quad (4.42)$$

Dobbiamo a questo punto ricavare il nuovo potenziale $A'^\mu(x) = A^\mu + \partial^\mu \Lambda$; nella procedura di derivazione risulta conveniente parametrizzare la linea di universo con il tempo proprio s in maniera tale da sfruttare il fatto che

$$\partial^\mu s' = \frac{l^\mu}{ul}$$

con s' tempo proprio ritardato. In questo modo si ottiene che

$$\begin{aligned} A'^\mu(x) &= A^\mu(x) + \frac{e}{4\pi} \left(\frac{\partial^\mu (ul)}{ul} - \frac{v_\infty^\mu}{v_\infty x} \right) H(v_\infty x) \\ &= \frac{e}{4\pi} \left(\frac{2v^\mu}{vx} + \frac{xy}{b^2 (ux)^2} (x^\mu - y^\mu) - \frac{v_\infty^\mu}{v_\infty x} \right) H(v_\infty x) \end{aligned} \quad (4.43)$$

in cui si sono usate le proprietà (4.41).

Nella regione $t + z = v_\infty x \neq 0$, la trasformazione di gauge fatta è regolare quindi il campo non differisce da quello (da noi chiamato $F_{LW}^{\mu\nu}$) che si può ottenere da A^μ tramite derivazioni ordinarie. Per scoprire il comportamento di A'^μ in prossimità di $v_\infty x = 0$ è invece necessario indagare l'andamento del tempo ritardato t' per $t \rightarrow -\infty$; dalla (4.6) si ha

$$t' \rightarrow -\frac{\rho^2 + b^2}{2(v_\infty x)}. \quad (4.44)$$

Sostituendo la (4.44) nella (4.43) si ottiene l'andamento di A'^μ per $v_\infty x \rightarrow 0$

$$A'^\mu(x) \rightarrow \frac{e}{4\pi} \left(\frac{2v_\infty^\mu}{v_\infty x} - \frac{2}{\rho^2 + b^2} (x^\mu - t' v_\infty^\mu) - \frac{v_\infty^\mu}{v_\infty x} \right) H(v_\infty x) = -\frac{e}{2\pi} \frac{x^\mu}{\rho^2 + b^2} H(v_\infty x). \quad (4.45)$$

Come si vede, è sparita la singolarità in $v_\infty x = 0$ e si può verificare che il risultato ottenuto appartiene effettivamente allo spazio delle distribuzioni. Inoltre il campo elettromagnetico corrispondente all'ultima espressione è proprio la shock wave (4.9).

¹Per la verifica, può risultare utile scrivere il moto nella forma covariante $y^\mu = b(\sinh(s/b), 0, 0, \cosh(s/b))$

4.2 Generica traiettoria rettilinea illimitata

Un pregio della derivazione della shock wave della Sezione 4.1 è che può essere facilmente estesa a moti più generali. Consideriamo infatti una generica traiettoria *rettilinea* di tipo tempo, lungo una direzione che sarà per noi l'asse z , richiedendo che il suo andamento asintotico per $t \rightarrow -\infty$ sia della forma

$$z(t) = -t + \alpha - \frac{\beta}{t} + O\left(\frac{1}{t^2}\right), \quad (4.46)$$

$$v(t) = -\left(1 - \frac{\beta}{t^2}\right) + O\left(\frac{1}{t^3}\right), \quad (4.47)$$

con $\beta > 0$. Regularizziamo la traiettoria come fatto nella (4.11) per il moto iperbolico

$$\vec{y}_L(t) = \begin{cases} -V(0, 0, 1)t + q & \text{per } t \leq L, \\ (0, 0, z(t)) & \text{per } t > L \end{cases}$$

con le condizioni di raccordo, ottenute imponendo la continuità di posizione e velocità,

$$\begin{cases} q(L) = z(L) + VL, \\ V(L) = -v(L), \end{cases} \quad (4.48)$$

che nel caso iperbolico si traducono in (si veda (4.18))

$$q(L) = \frac{b^2}{\sqrt{b^2 + L^2}} \quad (4.49)$$

e nell'espressione (4.19) per $V(L)$.

Nella trattazione svolta nella Sezione 4.1, dopo aver ricavato i parametri della traiettoria regularizzata, non entra più in gioco la forma del moto successiva all'istante $t = L$. Giunti al sistema (4.48), possiamo quindi procedere in maniera del tutto analoga a quanto fatto per il moto iperbolico fino ad ottenere, usando anche ora i cambiamenti di variabile (4.21), la scrittura

$$\tilde{A}_L^{\mu\nu}(\phi) = \frac{e}{4\pi} \int \frac{X^\mu v^\nu - X^\nu v^\mu}{R^3} \phi\left(t', x, y, -Vt' + \sqrt{1 - V^2}z' + q\right) H(-t' + L + r) dx dy dz' dt' \quad (4.50)$$

che generalizza la (4.23). Prendiamo dunque il limite per $L \rightarrow -\infty$ (o in maniera equivalente $V \rightarrow 1$, si veda la (4.48)) dell'integrando della (4.50) studiando separatamente la funzione di prova ϕ e quella di Heaviside H .

Per quanto riguarda la prima, abbiamo che

$$\lim_{L \rightarrow -\infty} \phi\left(t', x, y, -Vt' + \sqrt{1 - V^2}z' + q\right) = \phi\left(t', x, y, -t' + \alpha\right) \quad (4.51)$$

in cui si è notato che la costante q tende ad α per $L \rightarrow -\infty$ (si vedano la (4.48) e la (4.46)); nel caso del moto iperbolico (4.1), il cui sviluppo asintotico per $t \rightarrow -\infty$ è

$$z_{hyp}(t) = -t - \frac{b^2}{2t} + O\left(\frac{1}{t^3}\right), \quad (4.52)$$

il coefficiente α è nullo e quindi si arriva a $\phi(t', x, y, -t')$ come nell'espressione (4.29).

Per la funzione di Heaviside utilizziamo invece la riscrittura

$$H(-t' + r + L) = H\left(-\sqrt{1 - V^2}t' + L\sqrt{1 - V^2} + R - Vz'\right) \quad (4.53)$$

ottenuta sostituendo l'espressione di r (si vedano le (4.22)). Quando $V \rightarrow 1$, il primo termine di questa espressione si annulla mentre, nello stesso limite, Vz' tende a z' ; per $L\sqrt{1-V^2}$ invece si ha da (4.47)-(4.48) che

$$\lim_{L \rightarrow -\infty} L\sqrt{1-V^2} = \lim_{L \rightarrow -\infty} L\sqrt{1 - \left(-1 + \frac{\beta}{L^2} + O\left(\frac{1}{L^3}\right)\right)^2} = -\sqrt{2\beta} \quad (4.54)$$

e quindi

$$\lim_{L \rightarrow -\infty} H(-\sqrt{1-V^2}t' + L\sqrt{1-V^2} + R - Vz') = H\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z'^2} - z' - \sqrt{2\beta}\right). \quad (4.55)$$

Per il moto iperbolico $\beta = b^2/2$, come si vede dalla (4.52), e si ritrova dunque la (4.28).

In definitiva, chiamando $\tilde{A}^{\mu\nu}(\phi) = \lim_{V \rightarrow 1} \tilde{A}_L^{\mu\nu}(\phi)$ abbiamo

$$\tilde{A}^{\mu\nu}(\phi) = \frac{e}{4\pi} \int \frac{m^\mu v_\infty^\nu - m^\nu v_\infty^\mu}{(x^2 + y^2 + z'^2)^{3/2}} \phi(t', x, y, -t' + \alpha) H\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z'^2} - z' - \sqrt{2\beta}\right) dx dy dz' dt', \quad (4.56)$$

che è la generalizzazione del risultato (4.29). I successivi passaggi compiuti nel caso iperbolico, che portano dalla (4.29) alla (4.32), possono a questo punto essere ripetuti con la sola premura di sostituire b con $-\sqrt{2\beta}$. Si arriva in questo modo a

$$\tilde{A}^{\mu\nu}(\phi) = \frac{e}{2\pi} \int \frac{v_\infty^\mu x^\nu - v_\infty^\nu x^\mu}{x_\sigma x^\sigma - 2\beta} \delta(t + z - \alpha) \quad (4.57)$$

che mostra la presenza della shock wave anche per un generico moto che abbia la forma (4.46).

Riassumendo: abbiamo dimostrato *in maniera rigorosa* che un'arbitraria traiettoria rettilinea di tipo tempo che abbia per $t \rightarrow -\infty$ l'andamento asintotico

$$z(t) = -t + \alpha - \frac{\beta}{t} + o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

genera sempre una shock wave la cui espressione generale è

$$S^{\mu\nu} = \frac{e}{2\pi} \frac{v_\infty^\mu x^\nu - v_\infty^\nu x^\mu}{x^2 - 2\beta} \delta(t + z - \alpha), \quad (4.58)$$

ed è dunque funzione della legge oraria della traiettoria tramite i due parametri α e β ; quando sono entrambi nulli si ritrova la shock wave della forma "universale" (3.11).

Possibili estensioni. Nella trattazione del precedente paragrafo siamo riusciti a estendere il risultato ottenuto per il moto iperbolico alle generiche traiettorie rettilinee asintoticamente di tipo luce descritte dalla (4.46). La sensazione, però, è che si possa fare meglio e che anche per generiche traiettorie *curve* di tipo tempo che tendano asintoticamente a moti rettilinei di tipo luce si assista alla comparsa di una shock wave, eventualmente con parametri diversi e in maggior numero rispetto a quanto accade per la (4.58). Un'ulteriore indagine, in grado di provare (o meno) una simile congettura in maniera rigorosa, può dunque muovere dai risultati di questa tesi al fine di ottenere una maggiore generalizzazione.

Appendice A

Richiami sulla teoria delle distribuzioni

In questa appendice ci preoccupiamo di richiamare le definizioni e i risultati riguardanti la teoria delle distribuzioni utili per la nostra trattazione. Non vi è alcuna pretesa di rigore matematico e completezza, aspetti che possono essere trovati in un testo di *Analisi Funzionale*, come [12].

Consideriamo una generica n-upla di interi non negativi $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$; per ogni $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ definiamo $x^{(\alpha)} \equiv x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$. Diamo quindi la seguente

Definizione. Lo spazio delle funzioni di prova di Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è lo spazio vettoriale delle funzioni $\phi(x)$ di classe \mathcal{C}^∞ su \mathbb{R}^n (e, in generale, a valori complessi) per le quali

$$\|\phi\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^{(\alpha)} D^{(\beta)} \phi(x)| < \infty \quad (\text{A.1})$$

per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, con

$$D^{(\beta)} \equiv \frac{\partial^{\beta_1 + \dots + \beta_n}}{\partial x_1^{\beta_1} \cdots \partial x_n^{\beta_n}}$$

In termini meno formali, le funzioni di prova sono quelle che, ad ogni ordine di derivazione (quindi anche all'ordine 0), decrescono più rapidamente dell'inverso di qualsiasi polinomio. Nella (A.1) ciò è espresso mediante l'uso delle *seminorme* $\|\phi\|_{\alpha,\beta}$ che inducono una topologia su $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e lo rendono uno *spazio di Fréchet*. Non mostriamo qui quale struttura sia racchiusa dietro al nome di questo spazio vettoriale, ma ci limitiamo a riportare, quale conseguenza, un teorema di grande utilità. Prima diamo però un'altra

Definizione. Si dice *distribuzione* ogni funzionale lineare e continuo in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} F : \mathcal{S} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \phi &\longmapsto F(\phi). \end{aligned}$$

Lo spazio delle distribuzioni è indicato con $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Data una funzione $f(x)$ possiamo definire una distribuzione, mediante il suo effetto su una generica funzione di prova $\phi \in \mathcal{S}$, ponendo

$$f(\phi) = \int f(x) \phi(x) d^n x, \quad (\text{A.2})$$

che sicuramente soddisfa alla condizione di linearità; per sapere se rappresenta anche un funzionale continuo possiamo ricorrere al preannunciato

Teorema. Un funzionale lineare $F : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{C}$ è continuo (e rappresenta quindi una distribuzione) se e solo se esistono una costante $C > 0$ ed una somma finita di seminorme tali che

$$|F(\phi)| \leq C \sum_{\substack{|\alpha| \leq l \\ |\beta| \leq m}} \|\phi\|_{\alpha,\beta} \quad \forall \phi \in \mathcal{S}$$

Oltre a fornire un modo per dimostrare che siamo in presenza di una distribuzione, questo enunciato ci permette anche di dire che se le funzioni da noi considerate hanno singolarità al finito *non integrabili*, certamente *non rappresentano distribuzioni*. Ciò è esattamente quello che accade per il potenziale (1.13) ricavato nel Capitolo 1.

Richiamiamo infine le principali operazioni utilizzate nel corso della trattazione.

Definizione (limite distribuzionale). Si dice che una successione di distribuzioni $F_n \in \mathcal{S}'$ converge alla distribuzione $F \in \mathcal{S}'$ nella *topologia debole* di \mathcal{S}'

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n = F$$

se per ogni $\phi \in \mathcal{S}$ vale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(\phi) = F(\phi)$$

Definizione (derivata distribuzionale). Per ogni elemento $F \in \mathcal{S}'$ chiamamo la *derivata distribuzionale* di F rispetto alla generica coordinata x^μ l'elemento di \mathcal{S}' definito come

$$\partial_\mu F(\phi) \equiv -F(\partial_\mu \phi), \quad \forall \phi \in \mathcal{S}$$

Si può dimostrare che le derivate costituiscono operazioni continue di \mathcal{S}' : è dunque possibile scambiare tra loro limite e derivata.

Definizione (convoluzione). Ponendo $(T_y \phi)(x) \equiv \phi(y - x)$, si definisce *convoluzione* $F * \phi$ tra una distribuzione F ed una funzione di prova ϕ , la distribuzione regolare

$$(F * \phi)(x) = F(T_x \phi) = \int F(y) \phi(x - y) d^n y.$$

Bibliografia

- [1] J. Franklin and D. J. Griffiths, “The fields of a charged particle in hyperbolic motion,” *Am. J. Phys.*, vol. 82, 2014.
- [2] I. Robinson and K. Rozga, “Lightlike contractions on minkowski space-time,” *J. Math. Phys.*, vol. 25, p. 499, 1984.
- [3] F. Azzurli and K. Lechner, “Electromagnetic fields and potentials generated by massless charged particles,” *Annals Phys.*, vol. 349, p. 1, 2014.
- [4] M. Born, “Die Theorie des starren Elektrons in der Kinematik des Relativitätsprinzips,” *Ann. Phys.*, vol. 30, pp. 1–56, 1909.
- [5] A. Sommerfeld, “Zur Relativitätstheorie. II. Vierdimensionale Vektoranalysis,” *Ann. Phys.*, vol. 33, p. 649, 1910.
- [6] G. A. Schott, *Electromagnetic Radiation*. Cambridge: Cambridge University Press, 1912.
- [7] H. Bondi and T. Gold, “The field of a uniformly accelerated charge, with special reference to the problem of gravitational acceleration,” *Proc. R. Soc. London Ser. A*, vol. 229, pp. 416–424, 1955.
- [8] J. Franklin, “Completing the liénard-wiechert potentials: The origin of the delta function fields for a charged particle in hyperbolic motion,” *Am. J. Phys.*, vol. 83, 2015.
- [9] D. J. Cross, “Electric field of a point charge in truncated hyperbolic motion,” *Eur. J. Phys.*, vol. 36, no. 4, 2015.
- [10] E. Eriksen and Ø. Grøn, “Electrodynamics of hyperbolically accelerated charges: The electromagnetic field of a charged particle with hyperbolic motion,” *Ann. Phys.*, vol. 286, pp. 320–342, 2000.
- [11] W. Thirring, *A course in mathematical Physics: Classical field theory*. New York: Springer-Verlag, 1979.
- [12] M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics – I Functional Analysis*. New York: Academic Press, 1980.