

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Esperimenti a scelta ritardata in Meccanica Quantistica

Relatore

Prof. PIERALBERTO MARCHETTI

Laureando

SEBASTIANO COCCHI

Anno Accademico 2018/2019

Indice

Introduzione	1
1. Preambolo sulla meccanica quantistica	3
1.1 Stati misti, stati puri e matrice densità	3
1.2 Esperimento di Young a singolo fotone	5
1.3 Perché è necessario abbandonare i concetti classici di onda e corpuscolo	7
2. Gli esperimenti a scelta ritardata	13
2.1 L'esperimento di Young con scelta ritardata	13
2.2 Interferometro Mach-Zender con scelta ritardata	14
2.3 La scelta ritardata su scala cosmologica	17
2.4 Verifiche sperimentali: il contributo dei ricercatori di Padova	18
3. Il ruolo dell'informazione nel collasso della funzione d'onda	23
3.1 L'esperimento di Mandel	23
3.2 Descrizione della <i>parametric down-conversion</i>	24
3.3 Descrizione matematica dell'esperimento di Mandel	25
4. L'interpretazione di de Broglie-Bohm	29
Conclusioni	33
Bibliografia	35

Introduzione

Alla fine degli anni Settanta John Archibald Wheeler individuò una nuova questione legata al comportamento onda/corpuscolo della materia. Partendo dal noto esperimento di Young a singolo fotone, egli si chiese cosa sarebbe accaduto se si fosse ritardata la scelta di osservare o meno le fenditure attraverso le quali passa il fotone, fino all'ultimo istante prima del suo arrivo sulla lastra fotografica. L'esperimento di Young a singolo fotone, infatti, mostra che l'osservazione e la mancata osservazione delle fenditure, dette 1 e 2, producono due distribuzioni di probabilità incompatibili: nel primo caso si ha una distribuzione normale di probabilità $p_{12}(x) = p_1(x) + p_2(x)$, nel secondo invece si ha una distribuzione analoga alla distribuzione di probabilità delle onde, cioè $p_{12}(x) \neq p_1(x) + p_2(x)$ a causa dei termini di interferenza. Il risultato è paradossale in quanto la sola osservazione porta a due distribuzioni di probabilità differenti. Proprio per questo motivo, uno dei primi tentativi di dare merito a tali evidenze, fu la dualità onda/corpuscolo che risale al dibattito tra Niels Bohr ed Albert Einstein[3]. Secondo questa prima intuizione, i sistemi quantici si comportano sempre in modo definitivo come una particella oppure come un'onda. Questo è precisamente ciò che si cerca di escludere tramite gli esperimenti a scelta ritardata, in cui, nell'idea di Wheeler, l'osservatore ritarda, fino a subito prima della rilevazione finale, la scelta se eseguire un'operazione che cancella o permette l'interferenza di probabilità tra due alternative mutuamente esclusive.

Nella tesi verranno presentati alcuni esperimenti mentali di meccanica quantistica, basati sulla proposta originale di Wheeler, mentre altri sono stati effettivamente realizzati e sono interpretabili in termini di dualità onda/particella, ma ammettono altre interpretazioni che vengono criticamente discusse.

Nel primo capitolo vengono mostrati gli strumenti utili a descrivere in chiave moderna gli esperimenti a scelta ritardata, come ad esempio l'utilizzo della matrice densità, in luogo del dualismo onda/corpuscolo. Viene inoltre riportata una critica del dualismo onda/particella, intesa come manifestazioni complementari di due qualità classiche che si riferiscono alla materia.

Nel secondo capitolo vengono esposti gli esperimenti a scelta ritardata descritti da Wheeler[14, 15] attraverso diversi apparati, come l'apparato a doppia fenditura di Young, l'interferometro Mach-Zender e un esperimento a scelta ritardata su scala cosmologica; viene inoltre mostrata in supporto alla tesi, una verifica sperimentale sviluppata da un team di ricercatori dell'Università di Padova.

Nel terzo capitolo si discute, per mezzo dell'esperimento di Leonard Mandel *et al.*[13], l'importanza dell'informazione *which path*¹ in merito alla modifica dello stato.

Nel quarto capitolo verrà discussa l'interpretazione di de Broglie-Bohm, una teoria a variabili nascoste non locali che viola la località di Einstein² e verrà mostrato come l'interpretazione ortodossa e l'interpretazione di de Broglie-Bohm possono descrivere in modo ugualmente consistente gli esperimenti a scelta ritardata.

¹ *Which path* significa 'quale percorso' segue il fotone durante l'intervallo di tempo in cui rimane, ad esempio, in un interferometro. Questa informazione equivale a sapere 'quale fenditura' è attraversata dalla particella quantistica nell'esperimento di Young a singolo fotone.

² Principio di località: una operazione eseguita su un sistema non può avere influenza sulle proprietà fisiche di un altro sistema quando questi sono separati da una distanza di tipo spazio.

Capitolo 1

Preambolo sulla meccanica quantistica

1.1 Stati misti, stati puri e matrice densità

Con l'intento di spiegare in un chiave più moderna gli esperimenti a scelta ritardata, è bene introdurre la nozione di stato puro, di stato misto e di matrice densità.

In meccanica quantistica uno stato puro è uno stato che contiene l'informazione massimale del sistema, è descritto da un raggio vettore in uno spazio di Hilbert \mathcal{H} complesso con dimensione $\dim \mathcal{H} > 1$. In questa tesi gli stati apparterranno sempre a spazi di Hilbert di dimensione finita.

Nel caso di uno stato misto, si pensi di preparare il sistema in modo tale che esso possa trovarsi in uno tra gli $|\phi_1\rangle, \dots, |\phi_n\rangle$ stati puri con relative probabilità c_1, \dots, c_n tali che $\sum_{i=1}^n c_i = 1$. Se accade questo, si dice allora che lo stato è una miscela, o miscela, statistica. Sia Σ uno stato misto e A un'osservabile, allora il valore medio di A in Σ sarà dato da

$$\langle A \rangle_{\Sigma} = \sum_{i=1}^n c_i \langle \phi_i | A | \phi_i \rangle. \quad (1.1)$$

Poiché vale

$$\langle \phi_i | A | \phi_i \rangle = \text{Tr} (|\phi_i\rangle\langle\phi_i| A),$$

sostituendo in (1.1) si ottiene

$$\langle A \rangle_{\Sigma} = \sum_{i=1}^n c_i \text{Tr} (|\phi_i\rangle\langle\phi_i| A) = \text{Tr} \left(\sum_{i=1}^n c_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i| A \right) \quad (1.2)$$

ove si indica con ρ la matrice densità definita da

$$\rho = \sum_{i=1}^n c_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i|. \quad (1.3)$$

Essa verifica:

1. $\rho = \rho^\dagger$, in quanto $(|\phi\rangle\langle\phi|)^\dagger = |\phi\rangle\langle\phi|$;
2. $\rho \geq 0$, in particolare si ha che il valore medio $\langle \rho \rangle_{\psi} = \langle \psi | \rho | \psi \rangle \geq 0$. Infatti

$$\langle \rho \rangle_{\psi} = \sum_{i=1}^n c_i \langle \psi | \phi_i \rangle \langle \phi_i | \psi \rangle = \sum_{i=1}^n c_i (\langle \phi_i | \psi \rangle)^* \langle \phi_i | \psi \rangle = \sum_{i=1}^n c_i |\langle \psi | \phi_i \rangle|^2 \geq 0;$$

3. $\text{Tr}(\rho) = 1$. Sia $\{|\chi_j\rangle\}_j$ una base ortonormale di \mathcal{H} ; si può scegliere la base in modo che $|\phi\rangle$ coincida con un elemento della base $\{|\chi_j\rangle\}_j$, ad esempio $|\chi_i\rangle = |\phi\rangle$. Dal fatto che $\text{Tr}(|\phi\rangle\langle\phi|) = \sum_{j=1}^n \langle\chi_j|\phi\rangle\langle\phi|\chi_j\rangle = |\langle\phi|\phi\rangle|^2 = 1$ segue che

$$\text{Tr}(\rho) = \sum_{i=1}^n c_i \text{Tr}(|\phi_i\rangle\langle\phi_i|) = \sum_{i=1}^n c_i = 1.$$

Uno stato in meccanica quantistica si può descrivere tramite un operatore ρ che soddisfa le proprietà 1-3.

Il processo di misura, ipotizzando che si tratti di misura proiettiva, viene descritto nel formalismo delle matrici densità tramite i proiettori $P_m = |\phi_m\rangle\langle\phi_m|$, con m autovalore non degenere relativo all'autovettore $|\phi_m\rangle$ di un osservabile. Supponendo che lo stato iniziale sia nello stato $|\psi_i\rangle$, la probabilità di trovare come risultato m sarà data da

$$p(m|i) = \langle\psi_i|P_m^\dagger P_m|\psi_i\rangle \stackrel{(a)}{=} \langle\psi_i|P_m^2|\psi_i\rangle \stackrel{(b)}{=} \langle\psi_i|P_m|\psi_i\rangle = \text{Tr}[P_m|\psi_i\rangle\langle\psi_i|]$$

ove in (a) e in (b) si sono usate le proprietà dei proiettori, rispettivamente $P = P^\dagger$ e $P^2 = P$. Se invece lo stato iniziale è descritto dalla matrice densità ρ che rappresenta la mistura statistica di stati possibili $|\psi_i\rangle$ ciascuno con probabilità p_i , si trova

$$p(m) = \sum_i p(m|i)p_i = \sum_i p_i \text{Tr}(P_m|\psi_i\rangle\langle\psi_i|) = \text{Tr}(P_m\rho) = \langle\phi_m|\rho|\phi_m\rangle.$$

Grazie alla matrice densità, si possono caratterizzare gli stati puri e gli stati misti. Un modo per caratterizzare gli stati puri è verificare che $\rho = \rho^2$, quindi, dato che soddisfa anche la proprietà 1, bisogna solo verificare che ρ sia un proiettore.

In meccanica quantistica un metodo per definire uno stato misto, è quello di verificare che l'espressione della matrice densità contenga almeno due proiettori unidimensionali.

Come esempio, si consideri una coppia di particelle quantistiche entangled, ad esempio fotoni³ di cui si considera solo lo spin. Supponendo che lo stato del sistema, costituito da due sottosistemi I e II, sia descritto da una funzione d'onda che rappresenta lo stato puro prima della misura

$$|\Psi\rangle = \frac{|\uparrow\rangle_I \otimes |\uparrow\rangle_{II} + |\downarrow\rangle_I \otimes |\downarrow\rangle_{II}}{\sqrt{2}} = \frac{|\uparrow\rangle_I |\uparrow\rangle_{II} + |\downarrow\rangle_I |\downarrow\rangle_{II}}{\sqrt{2}}$$

ove $|\uparrow\rangle_I, |\downarrow\rangle_I \in \mathcal{H}_I \cong \mathbb{C}^2$ e $|\uparrow\rangle_{II}, |\downarrow\rangle_{II} \in \mathcal{H}_{II} \cong \mathbb{C}^2$.

Dopo aver eseguito una misura di spin lungo la direzione considerata, si potrà ottenere una sola delle due possibilità, vale a dire $|\psi_1\rangle = |\uparrow\rangle_I |\uparrow\rangle_{II}$ oppure $|\psi_2\rangle = |\downarrow\rangle_I |\downarrow\rangle_{II}$. Di conseguenza la matrice densità sarà, utilizzando la convenzione $|\uparrow\rangle_I |\uparrow\rangle_{II} = |\uparrow\rangle_I \otimes |\uparrow\rangle_{II} \equiv |\uparrow\uparrow\rangle$ e $|\downarrow\rangle_I |\downarrow\rangle_{II} = |\downarrow\rangle_I \otimes |\downarrow\rangle_{II} \equiv |\downarrow\downarrow\rangle$

$$\rho = \frac{(|\uparrow\uparrow\rangle\langle\uparrow\uparrow| + |\downarrow\downarrow\rangle\langle\downarrow\downarrow|)}{2}$$

che rappresenta uno stato misto in quanto $\rho^2 \neq \rho$.

La matrice densità associata a $|\psi\rangle$ e la matrice densità ρ sono diverse, infatti

$$\frac{1}{2}|\psi_1\rangle\langle\psi_1| + \frac{1}{2}|\psi_2\rangle\langle\psi_2| = \frac{|\uparrow\uparrow\rangle\langle\uparrow\uparrow| + |\downarrow\downarrow\rangle\langle\downarrow\downarrow|}{2} \neq |\psi\rangle\langle\psi| = \frac{(|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle)(\langle\uparrow\uparrow| + \langle\downarrow\downarrow|)}{2}.$$

Nei due casi la matrice densità può essere rappresentata, con un'opportuna convenzione, nella base di $\mathcal{H}_I \otimes \mathcal{H}_{II}$ formata da

$$\begin{aligned} |\uparrow\rangle_I \otimes |\uparrow\rangle_{II} &= e_1 = (1000)^T \\ |\downarrow\rangle_I \otimes |\uparrow\rangle_{II} &= e_2 = (0100)^T \\ |\uparrow\rangle_I \otimes |\downarrow\rangle_{II} &= e_3 = (0010)^T \\ |\downarrow\rangle_I \otimes |\downarrow\rangle_{II} &= e_4 = (0001)^T \end{aligned}$$

³In quanto fotoni lo spin di entrambe le particelle sarà up (\uparrow) oppure down (\downarrow).

ove e_1, e_2, e_3, e_4 sono i vettori della base canonica di \mathbb{I}^4 e T indica il trasposto.

Nel caso in cui ancora non sia stata eseguita la misura il sistema si trova in una sovrapposizione coerente dei due stati e nella matrice densità compaiono termini fuori della diagonale principale

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tali termini, detti termini di coerenza, danno origine ai fenomeni di interferenza.

Nel caso in cui si è eseguita la misura, il sistema può trovarsi in $|\psi_1\rangle$ oppure in $|\psi_2\rangle$ con equiprobabilità, allora nella matrice densità

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

appariranno solo termini sulla diagonale principale, detti termini di popolazione.

1.2 Esperimento di Young a singolo fotone

Per esporre l'esperimento di Young, verrà adottata la trattazione presentata da Wheeler[14].

L'esperimento di Young a singolo fotone ha come obiettivo di registrare frange di interferenza ben definite attraverso un dispositivo, ad esempio una lastra fotografica (oppure un piano contenente molti fotorivelatori) che registra l'arrivo di fotoni provenienti da due fenditure, chiamate 1 e 2, e viene posto ad una distanza L dalle fenditure, come in figura 1.1.

Riducendo l'intensità del fascio di fotoni si può pensare di poter ridurre il flusso da molti fotoni ad uno alla volta. Collezionando un set sufficiente di fotoni il risultato è ancora una figura di interferenza. Tale risultato è assurdo, apparentemente, se si pensa al fotone come ad un corpuscolo, in quanto non può essere passato interamente da entrambe le fessure ed interferire con se stesso, ma deve essere passato solo da una di queste. Se tuttavia il fotone venisse interpretato come un'onda il paradosso scomparirebbe, poiché a questo punto l'interferenza risulterebbe accettabile, ma questa affermazione è assurda in quanto il fotone viene sempre ritrovato sul rivelatore in un unico punto, proprio come una particella.

Gli stessi argomenti varrebbero anche per particelle dotate di massa come gli elettroni, e, con più difficoltà, protoni e neutroni.

Successivamente Einstein[3] notò che in principio si può determinare la quantità di moto che ogni quantum di energia in arrivo trasmette all'apparato recettore.

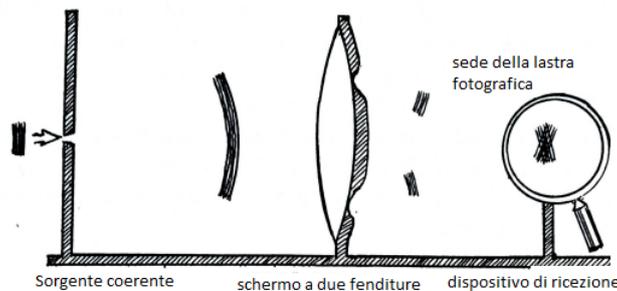


Figura 1.1: Schema esperimento di Young a due fenditure. La lente in corrispondenza dello schermo con le due fenditure ha lo scopo di far convergere sulla lastra le direzioni dei due fasci.

Einstein propose di misurare non solo la posizione del fotone giunto sulla lastra fotografica, ma anche il momento che esso ha impresso sulla lastra. In tal modo si potrebbe risalire, attraverso la direzione del momento, alla fessura dalla quale il fotone è passato e allo stesso tempo di registrare la figura di interferenza.

La risposta di Bohr, presente nel dibattito tra Bohr ed Einstein[3], è diventata ormai una lezione centrale della fisica quantistica. Si possono registrare le frange o gli impulsi, ma non entrambi contemporaneamente, infatti la preparazione per registrare l'una esclude il verificarsi dell'altra. Misurando gli impulsi di ciascun fotone, dunque risalendo a quale fenditura il fotone ha attraversato, la figura di interferenza scompare.

Il quantum ha momento p , lunghezza d'onda di de Broglie $\lambda = h/p$ e lunghezza d'onda ridotta⁴ $\bar{\lambda} = \hbar/p$. Per registrare frange di interferenza più definite bisogna fissare la sede del ricevitore entro una latitudine

$$\Delta y < \frac{(\text{spaziatura della frangia})}{2\pi} = \left(\frac{L}{2S}\right) \bar{\lambda} \quad (1.4)$$

ove S è la distanza di ogni fessura dall'asse ottico mentre L è la distanza delle fessure dalla lastra fotografica.

Per poter dire da quale fessura il quantum di energia arrivi, si deve registrare l'impulso che esso trasmette al ricevitore entro una latitudine piccola abbastanza da distinguere chiaramente se il momento $p = \hbar/\bar{\lambda}$ arrivi da sotto, cioè con una inclinazione S/L , oppure se il momento arriva da sopra con una inclinazione simile; si ha

$$\Delta p_y < \frac{S \hbar}{L \bar{\lambda}}. \quad (1.5)$$

Il fatto che il ricevitore possa servire per registrare simultaneamente entrambe le grandezze, ossia sia posizione che momento, è incompatibile con il principio di indeterminazione rispetto alla direzione \hat{y} di propagazione del quantum di energia

$$\Delta y \Delta p_y > \frac{\hbar}{2}. \quad (1.6)$$

Non essendo in grado di osservare contemporaneamente le due caratteristiche complementari della radiazione, è naturale concentrarsi su una ed escludere l'altra. Nel libro di M. Jammer si trova un frase significativa a tal riguardo:

The only way to avoid contradiction would be by imposing certain limitations on the use of classical terms: The contradiction will be avoided if and only if the use of classical terminology is delimited in such a way that it never encompasses a complete classical mode of description.[...]Moreover, the indeterminacies, expressed by Heisenberg's relations, are precisely the price we have to pay if we nevertheless attempt to apply such mutually exclusive sets of classical conceptions simultaneously.[5, p.101]

Bohr denomina il principio appena esposto con il nome di complementarità.

Il sistema quantico composto da un set di misurazioni adeguate si comporta in maniera da mostrare un pattern di interferenza se l'osservatore non può risalire a quale fenditura viene percorsa da ciascun fotone, oppure mostra due picchi in corrispondenza delle fenditure se l'osservatore può conoscere da quale fenditura passa il fotone.

L'esperimento di Young a singolo fotone ammette una caratterizzazione aderente alla meccanica quantistica. Il primo passo è scrivere la funzione d'onda nel caso in cui si presenta la figura di interferenza e nel caso in cui non si presenta, e calcolare lo stato in termini di matrice densità.

Si esegua l'esperimento con un numero adeguato di fotoni, senza mai osservare quale fenditura viene attraversata dal quantum di energia. Ad ogni iterazione, lo stato del sistema è descritto dallo stato puro che mostra la possibilità del fotone di passare dalla fessura 1 o 2

$$|\psi\rangle = \frac{(|1\rangle + |2\rangle)}{\sqrt{2}}.$$

⁴La lunghezza d'onda ridotta è definita come $\bar{\lambda} \equiv \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{\hbar}{mc^2}$.

Il modulo quadro $|\langle x|\psi\rangle|^2$ rappresenta la densità di probabilità di trovare il fotone nella posizione x ; l'espressione di tale densità di probabilità presenta dei termini di interferenza. Ogni particella, quando viene impressa sulla lastra, segue una legge di probabilità non classica, e nel momento in cui si raccoglie un campione adeguato di misure, si trova la figura di interferenza. Questo fatto si può anche dimostrare osservando che nell'espressione della matrice densità appaiono dei termini di coerenza

$$\rho_{puro} = |\psi\rangle\langle\psi| = \left(\frac{|1\rangle + |2\rangle}{\sqrt{2}}\right) \left(\frac{\langle 1| + \langle 2|}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}(|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2| + \underbrace{|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|}_{\text{termini di coerenza}}).$$

Quando viene introdotta, per ogni iterazione dell'esperimento, l'informazione su quale fenditura sia passato il fotone, lo stato viene proiettato in uno dei possibili stati $|\psi_1\rangle = |1\rangle$ oppure $|\psi_2\rangle = |2\rangle$. Dunque, utilizzando la (1.3) si ottiene la matrice densità

$$\rho_{misto} = \frac{1}{2}(|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|) \neq \rho_{puro}.$$

In effetti in ρ_{misto} mancano totalmente i termini di coerenza, e sulla lastra fotografica dopo che si è acquisito un set sufficiente di fotoni, non si registra alcuna interferenza ma solo una distribuzione che segue le regole della probabilità classica, con due picchi centrati nelle zone in corrispondenza delle fenditure.

1.3 Perché è necessario abbandonare i concetti classici di onda e corpuscolo

Il principio di complementarietà elaborato da Bohr fu un tentativo utilitaristico per conciliare gli evidenti paradossi prodotti dalla teoria dei quanta. Secondo Bohr, la meccanica quantistica doveva riuscire a comunicare concetti non classici attraverso nozioni classiche, un esempio su tutti è il dualismo onda/corpuscolo, posizione che viene criticata oggi da alcuni fisici. Secondo Anton Zeilinger, il fatto di poter attribuire integralmente al fotone la natura corpuscolare oppure ondulatoria porta a grosse inconsistenze. Egli propose un particolare esperimento[6], effettivamente osservato sulla scala dei metri e addirittura di chilometri.

Viene mostrato che nell'ipotesi di località di Einstein, l'interpretazione dualistica onda/corpuscolo implica l'invio di un'informazione a velocità superluminale con evidente violazione della località. Zeilinger utilizza coppie di fotoni entangled ibridi, con entanglement tra due diversi gradi di libertà, vale a dire il percorso di un fotone indicato come fotone di sistema (*system photon*), e la polarizzazione dell'altro fotone denotato come il fotone dell'ambiente (*environment photon*). Il fotone di sistema viene inviato ad un interferometro e il fotone dell'ambiente viene raccolto da un analizzatore di polarizzazione, che esegue una misurazione in base a una scelta causalmente disconnessa rispetto agli eventi correlati all'interferometro. La polarizzazione del fotone dell'ambiente trasporta l'informazione *welcher-weg* (ossia *which-path*) del fotone di sistema a causa dell'entanglement tra i due fotoni.

Le due basi utilizzate nell'esperimento sono $|H\rangle/|V\rangle$ di polarizzazione orizzontale e verticale e $|R\rangle/|L\rangle$ di polarizzazione circolare destrorsa e sinistrorsa. A seconda della base di polarizzazione in cui viene misurato il fotone dell'ambiente, si può acquisire l'informazione *welcher-weg* del fotone di sistema e non osservare alcuna interferenza, oppure cancellare l'informazione *welcher-weg* e osservare la figura di interferenza.

Il primo passo per eseguire l'esperimento è preparare il sistema dei due fotoni entangled, il cui stato è descritto da

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle_s|V\rangle_e + |V\rangle_s|H\rangle_e)$$

ove s ed e si riferiscono, rispettivamente, al fotone di sistema e dell'ambiente.

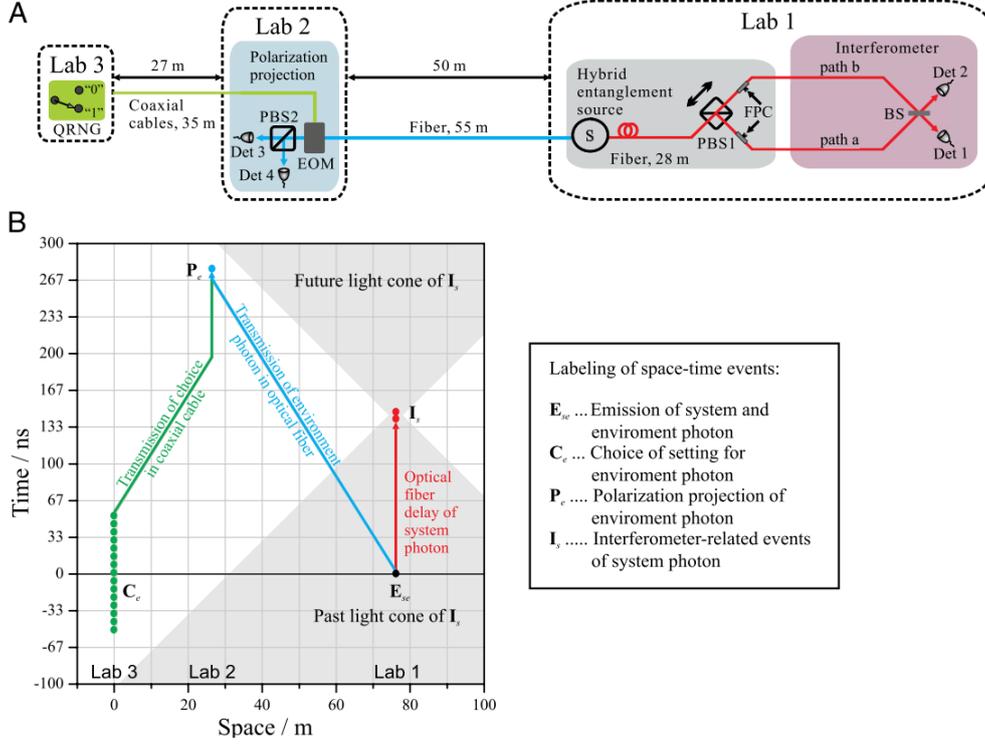


Figura 1.2: (A) Schema dell'esperimento. (B) Diagramma spazio-temporale degli eventi significativi dell'esperimento.

Gli stati di polarizzazione ortogonale del fotone di sistema sono coerentemente convertiti in due diversi stati del percorso dell'interferometro $|a\rangle_s$ e $|b\rangle_s$ tramite uno *splitter* a fascio polarizzante e due regolatori di polarizzazione a fibra ottica (PBS1). La funzione d'onda della coppia entangled ibrida è dunque

$$|\Psi_{ibrido}\rangle_{se} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|a\rangle_s|H\rangle_e + e^{i\phi}|b\rangle_s|V\rangle_e), \quad (1.7)$$

nella quale è stata aggiunta una fase ϕ tra i due stati $|a\rangle$ e $|b\rangle$, dovuta ad uno sfasamento effettuato appositamente nell'interferometro. Il fotone dell'ambiente trasporta quindi l'informazione *welcher-weg* del fotone di sistema. Si è in grado, pertanto, di eseguire due misurazioni di proiezione di polarizzazione complementari del fotone dell'ambiente, decidendo rispettivamente di acquisire o di cancellare l'informazione *welcher-weg* del fotone di sistema.

In particolare si avranno due configurazioni differenti:

1. proiettando la polarizzazione del fotone dell'ambiente nella base $|H\rangle/|V\rangle$, viene rivelata l'informazione *welcher-weg* di fotone di sistema e nessuna interferenza può essere osservata.

Si consideri la base computazionale in cui $|a\rangle_s|V\rangle_e = e_1, |b\rangle_s|V\rangle_e = e_2, |a\rangle_s|H\rangle_e = e_3, |b\rangle_s|H\rangle_e = e_4$ ove $\{e_i\}_{i=1}^4$ rappresenta la base canonica di \mathbb{I}^4 .

In questa base la matrice densità del sistema è

$$\begin{aligned} \rho &= |\Psi_{ibrido}\rangle_{se}\langle\Psi_{ibrido}|_{se} = \\ &= \frac{1}{2} \left(|a\rangle_s|H\rangle_e\langle a|_s\langle H|_e + e^{i\phi}|b\rangle_s|V\rangle_e\langle a|_s\langle H|_e + e^{-i\phi}|a\rangle_s|H\rangle_e\langle b|_s\langle V|_e + |b\rangle_s|V\rangle_e\langle b|_s\langle V|_e \right) = \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & e^{-i\phi} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ e^{i\phi} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Per conoscere quale sia la probabilità di rilevamento del detector a oppure b , misurando il fotone dell'ambiente, bisogna calcolare le seguenti probabilità condizionate

$$\begin{aligned} p(a|H) &= \frac{P(a, H)}{P(H)} = \frac{\text{Tr}(P_a \otimes P_H \rho)}{\text{Tr}(\mathbb{I} \otimes P_H \rho)} & p(b|H) &= \frac{P(b, H)}{P(H)} = \frac{\text{Tr}(P_b \otimes P_H \rho)}{\text{Tr}(\mathbb{I} \otimes P_H \rho)} \\ p(a|V) &= \frac{P(a, V)}{P(V)} = \frac{\text{Tr}(P_a \otimes P_V \rho)}{\text{Tr}(\mathbb{I} \otimes P_V \rho)} & p(b|V) &= \frac{P(b, V)}{P(V)} = \frac{\text{Tr}(P_b \otimes P_V \rho)}{\text{Tr}(\mathbb{I} \otimes P_V \rho)}. \end{aligned}$$

Svolgendo i conti per la polarizzazione H , se $|a\rangle = (0\ 1)^T$, $|b\rangle = (1\ 0)^T$ e $|H\rangle = (0\ 1)^T$ allora

$$P_a = |a\rangle\langle a| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad P_b = |b\rangle\langle b| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad P_H = |H\rangle\langle H| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

I calcoli portano a

$$\begin{aligned} p(a|H) &= \frac{\text{Tr} \left(\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & e^{-i\phi} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ e^{i\phi} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)}{\text{Tr} \left(\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & e^{-i\phi} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ e^{i\phi} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)} = \frac{1/2}{1/2} = 1 \\ p(b|H) &= \frac{\text{Tr} \left(\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & e^{-i\phi} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ e^{i\phi} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)}{\text{Tr} \left(\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & e^{-i\phi} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ e^{i\phi} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)} = \frac{0}{1/2} = 0, \end{aligned}$$

dunque misurando il fotone dell'ambiente con polarizzazione verticale H , sarà solo il detector a a rivelare con probabilità unitaria il fotone, mentre il detector b non segnalerà mai l'arrivo del fotone. Viceversa calcoli analoghi porteranno a $P(a|L) = 0$ e $P(b|L) = 1$, perciò se la misura del fotone dell'ambiente rivela la polarizzazione verticale V , si trova che sarà il detector b a rivelare l'arrivo del fotone con probabilità unitaria, mentre il rivelatore a non lo segnalerà mai. Nella base $\{H, V\}$ quindi non è possibile rilevare interferenza, cioè la misura del fotone dell'ambiente rivela l'informazione *welcher-weg*;

2. proiettando la polarizzazione del fotone dell'ambiente nella base

$$|R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + i|V\rangle) \quad |L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle - i|V\rangle)$$

si cancella l'informazione *welcher-weg*. Contrariamente al caso i), la rivelazione del fotone dell'ambiente nella polarizzazione $|R\rangle$ o $|L\rangle$ si traduce in una sovrapposizione coerente con pari probabilità per gli stati $|a\rangle_s$ e $|b\rangle_s$. La funzione d'onda dell'equazione (1.7) si può scrivere come

$$|\Psi'_{ibrido}\rangle_{se} = \frac{1}{2}[(|a\rangle_s + i|b\rangle_s)|L\rangle_e + (|a\rangle_s - i|b\rangle_s)|R\rangle_e]. \quad (1.8)$$

La matrice densità dello stato (1.8) nella base $|a\rangle_s|R\rangle_e = e_1, |a\rangle_s|L\rangle_e = e_2, |b\rangle_s|R\rangle_e = e_3, |b\rangle_s|L\rangle_e = e_4$ è

$$\rho' = |\Psi'_{ibrido}\rangle_{se}\langle\Psi'_{ibrido}| = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & ie^{-i\phi} & -ie^{-i\phi} \\ 1 & 1 & ie^{-i\phi} & -ie^{-i\phi} \\ -ie^{i\phi} & -ie^{i\phi} & 1 & -1 \\ ie^{i\phi} & ie^{i\phi} & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per sapere qual è la probabilità di rilevamento del detector a oppure b , misurando il fotone dell'ambiente, bisogna calcolare le seguenti probabilità condizionate

$$\begin{aligned} p(a|R) &= \frac{P(a, R)}{P(R)} = \frac{\text{Tr}(P_a \otimes P_R \rho)}{\text{Tr}(\mathbb{I} \otimes P_R \rho)} & p(b|R) &= \frac{P(b, R)}{P(R)} = \frac{\text{Tr}(P_b \otimes P_R \rho)}{\text{Tr}(\mathbb{I} \otimes P_R \rho)} \\ p(a|L) &= \frac{P(a, L)}{P(L)} = \frac{\text{Tr}(P_a \otimes P_L \rho)}{\text{Tr}(\mathbb{I} \otimes P_L \rho)} & p(b|L) &= \frac{P(b, L)}{P(L)} = \frac{\text{Tr}(P_b \otimes P_L \rho)}{\text{Tr}(\mathbb{I} \otimes P_L \rho)}. \end{aligned}$$

Svolgendo calcoli analoghi a quelli del punto precedente

$$p(a|R) = \frac{\text{Tr} \left(\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & ie^{-i\phi} & -ie^{-i\phi} \\ 1 & 1 & ie^{-i\phi} & -ie^{-i\phi} \\ -ie^{i\phi} & -ie^{i\phi} & 1 & -1 \\ ie^{i\phi} & ie^{i\phi} & -1 & 1 \end{pmatrix} \right)}{\text{Tr} \left(\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & ie^{-i\phi} & -ie^{-i\phi} \\ 1 & 1 & ie^{-i\phi} & -ie^{-i\phi} \\ -ie^{i\phi} & -ie^{i\phi} & 1 & -1 \\ ie^{i\phi} & ie^{i\phi} & -1 & 1 \end{pmatrix} \right)} = \frac{1/4}{1/2} = 1/2 = p(b|R)$$

viene dimostrato che, se il fotone dell'ambiente viene trovato con polarizzazione R tramite una misura proiettiva, i detector a e b hanno la stessa probabilità di rilevare il fotone di sistema. Si trova analogamente per la misura di polarizzazione L del fotone dell'ambiente $p(a|L) = p(b|L) = 1/2$. Questi risultati indicano la presenza di interferenza tra gli stati $|a\rangle_s$ e $|b\rangle_s$, anche dopo aver misurato la polarizzazione del fotone dell'ambiente. In questa base si perde l'informazione sul ramo dell'interferometro che viene percorso dal fotone di sistema, con conseguente comparsa della figura di interferenza.

Tornando all'esperimento, gli eventi temporali rilevanti sono:

- E_{se} è l'emissione sia del fotone di sistema che del fotone dell'ambiente dalla sorgente,
- C_e è la scelta della base di misurazione della polarizzazione del fotone dell'ambiente,
- P_e è la proiezione di polarizzazione del fotone dell'ambiente,
- I_s sono tutti eventi correlati al fotone di sistema all'interno dell'interferometro, incluso il suo ingresso, la sua propagazione e la sua uscita dall'interferometro.

Per garantire la località di Einstein ai fini di un test conclusivo, non deve verificarsi alcuna influenza causale tra C_e e P_e con I_s . Sotto tale ipotesi, si eseguono misure sequenziali in funzione della tensione applicata al modulatore elettro-ottico (EOM), che cambia la base di proiezione della polarizzazione del fotone dell'ambiente (figura 1.2).

Si verifica così una transizione continua tra le configurazioni di misura 1 e 2. Per ogni misurazione, in base all'uscita QRNG⁵, la tensione dell'EOM passa casualmente e rapidamente da 0 ad un valore definito.

Zeilinger dimostra che nel caso di pochi metri (55 m per l'esattezza) nei quali viene inviato il fotone dell'ambiente, cioè dalla sua creazione alla sua proiezione, la velocità di

⁵Generatore casuale quantistico di numeri.

un ipotetico segnale superluminale, dall'evento di scelta C_e agli eventi relativi all'interferometro I_s , dovrebbe essere circa 96 volte la velocità della luce. Il risultato sarebbe in netta contraddizione con i postulati della relatività generale e suggerisce di abbandonare interamente i concetti classici di onda e corpuscolo.

Per evitare questa incongruenza si utilizzerà il concetto di particella quantistica, vale a dire una particella la cui probabilità di essere trovata con una misura in una certa posizione x è data dal modulo quadro della funzione d'onda complessa $\psi(x)$.

Zeilinger suggerisce che è sufficiente qualcosa di molto più evanescente di una misurazione per far cambiare lo stato fisico di un sistema, basta la 'conoscenza potenziale' che si può ottenere di tale sistema:

The presence of path information anywhere in the universe is sufficient to prohibit any possibility of interference. It is irrelevant whether a future observer might decide to acquire it. The mere possibility is enough. [...]. If the observer measures the photons, his choice of the type of measurement decides whether the atoms can be described by a wave or a particle picture.[6, pp.1221-1222]

Capitolo 2

Gli esperimenti a scelta ritardata

2.1 L'esperimento di Young con scelta ritardata

Al fine di operare la scelta ritardata nell'esperimento di Young a singolo fotone, Wheeler[14] delinea le caratteristiche del dispositivo che deve operare il cambio di configurazione dell'apparato di misura. A tale scopo si dovrà rinunciare a misurare il momento che il quantum di energia fornisce alla lastra fotografica.

L'apparato sperimentale di Young deve essere modificato per mezzo di una cerniera ortogonale all'asse di propagazione del fotone, munendola di una lastra fotografica stretta e alta affinché possa essere rimossa dalla direzione della luce incidente più velocemente di quanto impieghi la luce a passare dallo schermo con le fenditure alla lastra. Si pone una lente prima dello schermo con le due fenditure affinché le direzioni dei fotoni emergenti convergano esattamente nel punto in cui si inserisce la lastra fotografica. I fasci provenienti dalla fessura superiore e inferiore cessano di sovrapporsi e si separano sufficientemente lontano dalla regione della lastra fotografica. Si pongano in quel punto i fotorivelatori, che avranno il compito di segnalare da quale fessura passa il fotone come in figura 2.1. Si ipotizzi inoltre che essi abbiano una efficienza massima, cioè che siano in grado di registrare l'arrivo del fotone dal proprio fascio con 100% di probabilità e con lo 0% di probabilità di misurare un fotone proveniente dall'altro fascio.

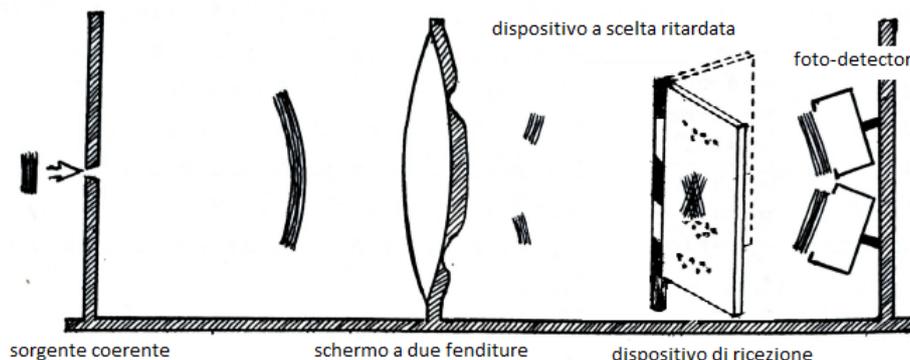


Figura 2.1: Schema dell'esperimento a doppia fenditura con scelta ritardata. Il dispositivo a scelta ritardata è illustrato come un'asta su cui viene fissata una lastra fotografica basculante, cioè può essere posta in funzione oppure può essere rimossa, in modo tale che non misuri l'interferenza. Il dispositivo a scelta ritardata illustrato nello schema non è in prospettiva per apprezzarne meglio il funzionamento.

Le due possibili disposizioni sperimentali del nostro apparato di Young sono evidentemente:

- (A) La lastra fotografica è inserita nella propria sede, dunque non si intende osservare da quale fenditura il quantum di energia passi.

(B) La lastra fotografica viene posta da parte rispetto all'asse ottico in modo da lasciare che i fotorivelatori possano rivelare da quale fessura passi il quantum di energia.

Il punto essenziale è il tempismo della scelta, tra l'osservazione di un effetto a due fenditure e quello a una fessura, non appena il singolo quantum di energia in questione sia già passato attraverso lo schermo delle due fenditure. Seguendo la definizione di Wheeler:

1. per una scelta all'ultimo istante, dopo che l'energia in arrivo ha già attraversato lo schermo con doppia fenditura, il meccanismo deve spostare la lastra o lasciarla sul cammino del raggio;
2. deve completare quel movimento prima che l'energia arrivi alla lastra.

Per ottenere un risultato corretto è indispensabile ripetere l'esperimento per un considerevole numero di iterazioni, in modo tale da poter scorgere la figura di interferenza sulla lastra, se si è preparato il sistema in tal modo, oppure per poter conteggiare il numero di fotoni che arrivano su ciascun fotorivelatore, se si è preparato il sistema nell'altra configurazione. A questo punto risulta chiaro lo scopo di tale dispositivo a scelta ritardata, dato che la configurazione con lastra fotografica rivelerà, su un campione elevato di misurazioni, il risultato dei termini di interferenza della funzione d'onda dei fotoni, mentre la configurazione con i fotorivelatori rivelerà una distribuzione classica di fotoni in arrivo.

Ponendo il sistema in una certa configurazione, subito dopo il passaggio del quantum attraverso lo schermo con le due fenditure, viene modificato il sistema nell'altra configurazione. Concentrandosi su uno di questi fotoni, per poi ripetere il procedimento per l'intero set, si prepara il sistema nella configurazione (A). Una volta fatto partire il fotone, esso giungerà in prossimità dello schermo a due fenditure per poi attraversare lo schermo grazie ad una delle due fenditure. Il quantum è all'interno dell'apparato di Young, e un'istante prima che questi si imprima sulla lastra fotografica si aziona il meccanismo della scelta ritardata. Come conseguenza, la lastra si pone di lato rispetto al fascio e dunque il quantum di energia prosegue e finisce, in uno dei due fotorivelatori. Ci si aspetterebbe che, siccome prima dell'ingresso di ciascun fotone nell'apparato, il sistema era nella configurazione (A), alla fine delle iterazioni nei fotorivelatori si possa ritrovare il pattern di interferenza. Il risultato invece di questa scelta ritardata, ritardata in quanto eseguita un istante prima che ogni iterazione fosse portata a termine, è stata la cancellazione della figura di interferenza. Viceversa se la configurazione iniziale è (B), e all'ultimo istante si aziona, per ogni iterazione, il meccanismo a scelta ritardata inserendo la lastra fotografica nel cammino dei fotoni, allora alla fine di tutte le iterazioni, osservando la lastra, si ritrova la figura di interferenza, in accordo con i postulati della meccanica quantistica.

2.2 Interferometro Mach-Zender con scelta ritardata

L'esperimento di Young rappresenta solo un esempio di come possa essere realizzata la scelta ritardata. È possibile creare esperimenti a scelta ritardata, complementari all'esperienza di Young, con una opportuna modifica dell'apparato.

Si consideri un fotone singolo in ingresso in un interferometro Mach-Zender (MZI) rappresentato in figura 2.2. Il fotone ha origine in S per poi incontrare il primo *beam-splitter*⁶ BS-1 da cui hanno origine due rami ortogonali fra loro a e b . Sa e Sb sono due specchi completamente riflettenti che hanno lo scopo di far convergere nuovamente i due rami. La configurazione (I) prevede due rivelatori in corrispondenza dei punti contrassegnati dal numero (I). Nella configurazione (II) i due rivelatori vengono ruotati su b' e a' e nell'intersezione tra i due rami viene posto il secondo *beam-splitter* BS-2.

⁶Un *beam-splitter* può essere costruito tramite uno specchio semiargentato.

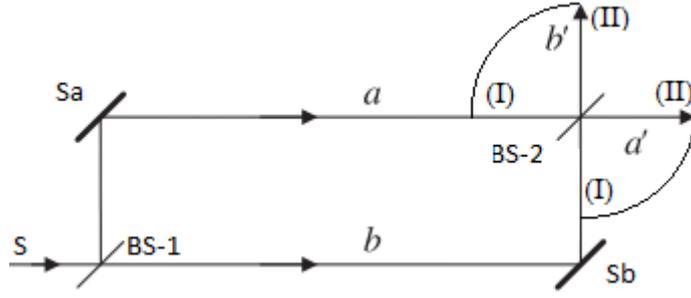


Figura 2.2: Schema di un interferometro Mach-Zehnder nelle configurazioni (I) e (II).

Il fotone incide sul primo divisore di fascio semitrasparente o *beam-splitter* (BS-1), con probabilità 50% di essere riflesso (proseguendo nel braccio a) oppure 50% di essere trasmesso (proseguendo nel braccio b).

Se il fotone viene riflesso dal *beam-splitter* acquista una fase relativa $\omega = \pi/2$.

Può essere utile rifarsi ad una visuale in cui il *beam-splitter* agisce come un operatore lineare \hat{B} che in ipotesi di idealità⁷ verifica

$$\hat{B} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Il *beam-splitter* ha quattro porte, due in ingresso a_{in} e b_{in} e due in uscita chiamate a_{out} e b_{out} (figura 2.3.i). Nel seguente caso lo stato iniziale è $|\Psi_{in}\rangle = |b_{in}\rangle$.

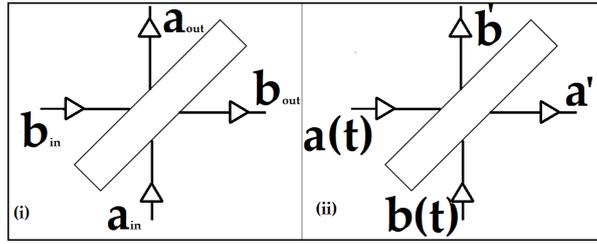


Figura 2.3: Schema delle porte di input e output di un *beam-splitter*.

Applicando l'operatore \hat{B} allo stato iniziale e scrivendo $|a_{in}\rangle = (1, 0)^T$, $|b_{in}\rangle = (0, 1)^T$ si ottiene

$$\begin{aligned} |\Psi_{out}\rangle &= \hat{B}|\Psi_{in}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} |b_{in}\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|b_{out}\rangle + i|a_{out}\rangle) \\ \Rightarrow |\Psi_{out}\rangle &\equiv |\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|b\rangle + i|a\rangle) \end{aligned} \quad (2.2)$$

avendo indicato con $|a\rangle \equiv |a_{out}\rangle \equiv |a_{in}\rangle$ lo stato in cui il fotone percorre il ramo a , e $|b\rangle \equiv |b_{out}\rangle \equiv |b_{in}\rangle$ lo stato in cui il fotone percorre il ramo b . Ciò corrisponde all'interazione del fotone con BS-1 al tempo $t = 0$.

Il ramo a e il ramo b generalmente possono avere lunghezze diverse. Il risultato è che lo stato $|a\rangle$ introduce una ulteriore fase φ rispetto a $|b\rangle$. Questa differenza di cammino è equivalente ad applicare allo stato (2.2) l'operatore \hat{P} definito da

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} \end{pmatrix}.$$

⁷In ipotesi di idealità, viene soddisfatta la condizione $\hat{B}^{-1}\hat{B} = \hat{B}^\dagger\hat{B} = 1 \Rightarrow \hat{B}^{-1} = \hat{B}^\dagger$.

Si giunge dunque allo stato, più generale di (2.2), dato da

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= \frac{\hat{P}}{\sqrt{2}}(|b\rangle + i|a\rangle) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} \end{pmatrix} \frac{|b\rangle + i|a\rangle}{\sqrt{2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|b\rangle + ie^{i\varphi}|a\rangle). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Se si volesse sapere da quale dei due percorsi emerga il fotone, bisogna posizionare su ciascun ramo un rivelatore. Fino alla misurazione il sistema è considerato in una sovrapposizione di entrambi i percorsi. Lo stato (2.3) evolve nel tempo come

$$|\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t) \frac{1}{\sqrt{2}}(|b\rangle + ie^{i\varphi}|a\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|b(t)\rangle + ie^{i\varphi}|a(t)\rangle) \quad (2.4)$$

fino al momento in cui il fotone giunge ad uno dei due rivelatori al tempo $t = \bar{t}$.

La matrice densità sarà

$$\rho(t) = |\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)| = \frac{1}{2}(|b(t)\rangle\langle b(t)| + |a(t)\rangle\langle a(t)| + ie^{i\varphi}|a(t)\rangle\langle b(t)| - ie^{-i\varphi}|b(t)\rangle\langle a(t)|). \quad (2.5)$$

Al tempo $t = \bar{t}$ viene eseguita una misura in a' oppure in b' . Le probabilità che il fotone arrivi sul rivelatore posto sul braccio a oppure sul braccio b sono

$$p_a = \langle a|\rho(t)|a\rangle = \frac{1}{2} = \langle b|\rho(t)|b\rangle = p_b.$$

Si può notare che queste stesse probabilità si possono ottenere partendo da uno stato classico, per esempio uno stato che si può trovare con probabilità $p_a = 1/2$ in $|a\rangle$ oppure con probabilità $p_b = 1/2$ in $|b\rangle$. Lo stato tuttavia sarebbe diverso da quello descritto da (2.5), in quanto è una mistura statistica dello stato $|a\rangle$ e $|b\rangle$ data da

$$\rho_{classica} = \frac{1}{2}|a\rangle\langle a| + \frac{1}{2}|b\rangle\langle b| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

da cui si ottiene $p_{a,classica} = \langle a|\rho_{classica}|a\rangle = 1/2$ e $p_{b,classica} = \langle b|\rho_{classica}|b\rangle = 1/2$. La matrice densità ρ descritta in (2.5), sebbene sia uno stato puramente quantistico, riproduce le stesse probabilità date dalla mistura statistica $\rho_{classica}$ per le misure di a e b . In questo specifico caso, benché il sistema si comporti per tali misure come un sistema classico, in realtà lo stato corretto che descrive il sistema è (2.5), cioè uno stato puro. Il dualismo onda/corpuscolo non è valido, in quanto, grazie allo studio del sistema tramite matrice densità, si comprende che il fotone è sempre una particella quantistica descritta da una certa funzione d'onda, e non una mistura statistica di stati possibili.

Si supponga di ruotare di 90° i rivelatori a' e b' fino alla configurazione (II). I due bracci dell'interferometro si intersecano su un secondo divisore di fascio BS-2 con percorsi in uscita a' e b' . Data la presenza del secondo *beam-splitter*, la particella quantistica nel ramo b può arrivare al rivelatore a' oppure al rivelatore b' , così come se percorresse il cammino a , potrebbe arrivare in b' o in a' . Infatti applicando \hat{B} a $|\Psi(t)\rangle$ si ottiene

$$|\Psi'\rangle = \hat{B}|\Psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} |\Psi(t)\rangle = \frac{1}{2} \left(i(1 + e^{i\varphi})|a(t)\rangle + (1 - e^{i\varphi})|b(t)\rangle \right), \quad (2.6)$$

la cui matrice densità è

$$\rho' = |\Psi'\rangle\langle\Psi'| = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} |1 + e^{i\varphi}|^2 & i(1 + e^{i\varphi})(1 - e^{-i\varphi}) \\ -i(1 + e^{-i\varphi})(1 - e^{i\varphi}) & |1 - e^{i\varphi}|^2 \end{pmatrix}.$$

Il fotone ha le seguenti probabilità di arrivare, rispettivamente, nel rivelatore b' oppure a'

$$p_b = \langle b|\rho'|b \rangle = \frac{1}{4}|1 - e^{i\varphi}|^2$$

$$p_a = \langle a|\rho'|a \rangle = \frac{1}{4}|1 + e^{i\varphi}|^2.$$

Prendendo ad esempio $\varphi = 0$ si trova $p_b = 0$ e $p_a = 1$, la totalità dei fotoni che partono da b in configurazione (II) giungono con probabilità unitaria al rivelatore posto in a' .

Si introduca ora nell'interferometro Mach-Zender un dispositivo a scelta ritardata, in cui la scelta di quale proprietà verrà osservata, tramite lo spostamento dalla configurazione (I) alla configurazione (II), e viceversa da (II) a (I), viene effettuata dopo che il fotone ha superato il primo divisore di fascio BS-1 per garantire la separazione causale. La conseguenza, secondo Wheeler[15, p.184], sarà che il fotone si comporterà adeguatamente alla modifica che si è operato all'ultimo istante sul sistema: "We, now, by moving the mirror in or out have an unavoidable effect on what we have a right to say about the already past history of that photon".

Accantonando il dualismo onda/corpuscolo e utilizzando i termini della meccanica quantistica, il sistema verrà descritto, in base alla specifica scelta operata sull'apparato, da uno dei due possibili stati dati da (2.3) oppure (2.6), manifestando, come dimostrato in precedenza, rispettivamente una distribuzione di probabilità classica oppure quantistica.

2.3 La scelta ritardata su scala cosmologica

Nell'ordine di rendere gigantesche le conseguenze che seguono dalla scelta ritardata, Wheeler[15, p.190] propone un esperimento su distanze astronomiche, in cui la sorgente della radiazione è un quasar e il ricevitore un telescopio sulla Terra.

Si supponga che ad un quarto della distanza Terra-quasar ci sia una galassia che fa convergere due raggi provenienti dal quasar, ma lontani molti anni luce, verso la Terra come in figura 2.4.

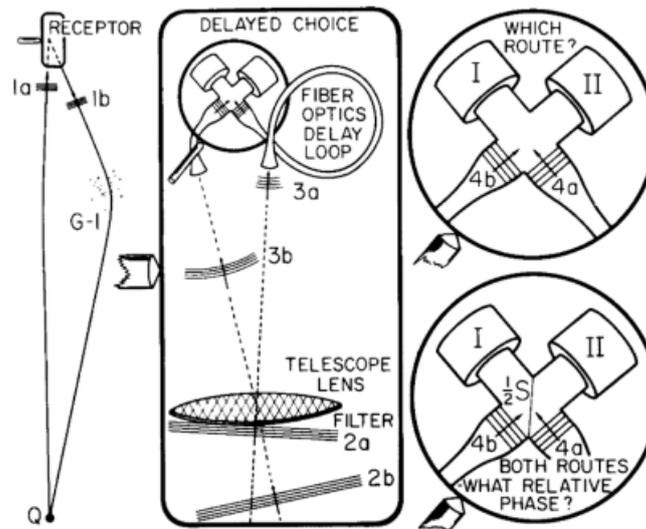


Figura 2.4: Schema dell'esperimento a scelta ritardata su scala cosmologica. A sinistra: schema della convergenza dei raggi grazie alla lente gravitazionale $G-1$, Q è la sorgente quasar. Centro: l'impostazione del recettore. I filtri vengono utilizzati per aumentare la lunghezza di coerenza della luce, consentendo quindi di eseguire l'esperimento di interferenza. Un anello di ritardo in fibra ottica regola la fase dell'interferometro. A destra: la scelta di non inserire (in alto) o inserire (in basso) lo specchio semiargentato.

Si scelga di introdurre o di non introdurre il separatore di fascio all'interno del telescopio. Il filtro monocromatico posto sopra il telescopio abbassa la velocità di conteggio. In un caso, quando si innesca il contatore, viene rivelata 'per quale via' è arrivato il fotone; nell'altro caso, viene rivelata quale sia la fase relativa delle onde associate al passaggio del fotone dalla sorgente al ricevitore 'da entrambe le vie'. L'aspetto paradossale è che il fotone ha già superato quella galassia miliardi di anni prima che venisse presa la decisione.

Per essere più precisi bisogna discriminare che tipo di fotoni si intende utilizzare, come viene illustrato da Zeilinger *et al.*[7, p.6]. Zeilinger spiega che sebbene Wheeler abbia suggerito di utilizzare la luce termica⁸ da un quasar, è concettualmente importante utilizzare veri singoli fotoni anziché luce termica, questo perché la natura indivisibile delle particelle dei singoli fotoni garantisce che i due rivelatori non scattino mai contemporaneamente. Altrimenti, si potrebbero spiegare i risultati con quella che viene spesso chiamata teoria semiclassica della luce, in cui la luce si propaga come un'onda classica e viene quantizzata solo alla rivelazione stessa.

Al di là di questa specifica questione, è importante notare che data la distanza tra il quasar e il ricevitore (miliardi di anni luce), la scelta è fatta dallo sperimentatore molto tempo dopo l'ingresso del fotone nell'interferometro cosmico (cioè dall'emissione dal quasar). A seconda dei parametri specifici, la scelta ritardata di Wheeler può quindi essere separata da un intervallo di tipo tempo oppure di tipo spazio dall'emissione di fotoni. Wheeler non discute questa problematica.

Tuttavia i requisiti importanti per un esperimento ideale a scelta ritardata sono una scelta di misura libera o casuale con intervallo di tipo spazio tra la scelta e l'ingresso del sistema quantistico nell'interferometro, e l'uso di fotoni singoli.

Il fatto notevole rimarcato nell'esperimento è quello di rendere paradossale pensare che il fotone 'decida' che strada intraprendere. Infatti se la separazione tra l'ingresso nell'interferometro e la scelta fosse di tipo spazio, come in questo caso, allora è esclusa una qualsiasi comunicazione tra questa decisione da parte del singolo sistema quantico e la scelta dello sperimentatore.

2.4 Verifiche sperimentali: il contributo dei ricercatori di Padova

Una difficoltà che si trova nel realizzare un esperimento a scelta ritardata risiede proprio nel produrre il meccanismo che deve effettuare la scelta ritardata, come precedentemente affermato. Tuttavia esso non è un ostacolo insuperabile, e nel corso degli ultimi anni, utilizzando strumentazioni all'avanguardia nell'ambito dell'ottica quantistica, sono stati costruiti diversi apparati atti alla realizzazione in laboratorio di esperimenti a scelta ritardata.

Le comunicazioni quantistiche satellitari, ad esempio, consentono di investigare i principi di base della meccanica dei quanta su distanze dell'ordine di migliaia di chilometri. Questi sviluppi favoriscono l'implementazione nello spazio di test fondamentali della fisica, come i *gedankenexperiment* proposti da Wheeler sulla scelta ritardata.

È proprio questa la direzione seguita da un team di ricercatori dell'Università di Padova guidato dal professor Paolo Villoresi *et al.*[12], che, in collaborazione con il Laser Ranging Observatory di Matera (MLRO) dell'Agenzia Spaziale Italiana, ha realizzato un interferometro satellitare⁹ che si estende per migliaia di chilometri nello spazio.

⁸La radiazione termica è una radiazione elettromagnetica emessa dalla superficie di un corpo ed è dovuta alla temperatura di questo corpo.

⁹Si tratta di un interferometro Mach-Zender posizionato in un laboratorio del MLRO di Matera, con invio di segnale laser verso un satellite LEO (low-Earth-orbit), in particolare Beacon-C con una distanza di inclinazione variabile da 1264 a 1376 km rispetto del MLRO e Starlette con una distanza inclinata compresa tra 1454 e 1771 km.

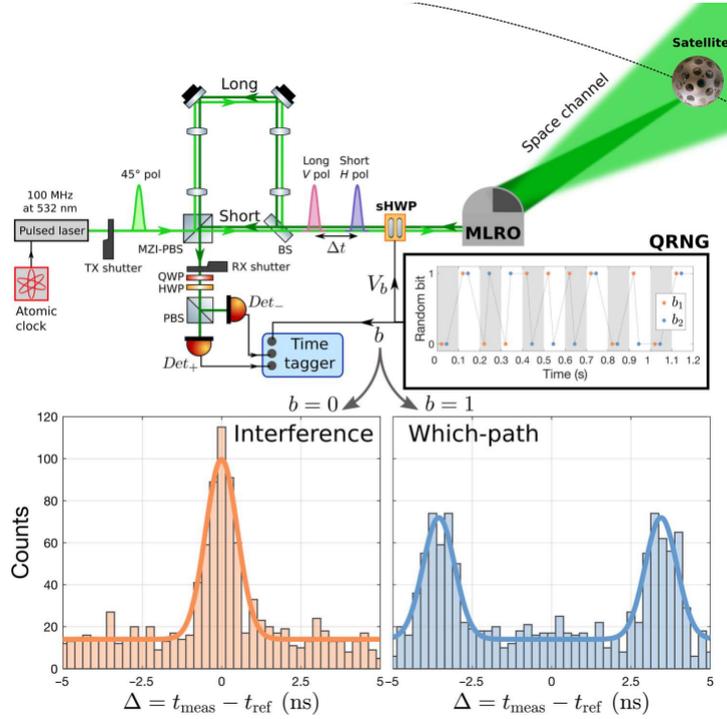


Figura 2.5: Schema dell'impostazione sperimentale e istogrammi di rilevamento.

Un laser produce un fascio di fotoni¹⁰, polarizzati diagonalmente e stimolati da un orologio atomico; i fotoni entrano in un interferometro Mach-Zender (MZI) non simmetrico, come schematizzato in figura 2.5. L'azione combinata del primo *beam-splitter* polarizzante (MZI-PBS) e della lunghezza diversa tra i due rami del MZI, trasforma ciascun impulso laser in una sovrapposizione di due modalit , una temporale e una di polarizzazione. Il braccio lungo del MZI   percorso dalla componente polarizzata verticalmente del fascio, mentre la componente polarizzata orizzontalmente viaggia lungo il braccio corto. La separazione tra le due modalit  temporali   di circa $\Delta t \approx 3,5$ ns. Gli impulsi quindi passano attraverso due ritardatori a cristalli liquidi (LCRs)¹¹. Lo stato del sistema diviene

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + |V\rangle).$$

Durante il periodo di trasmissione, lo sHWP   sempre spento, lasciando imperturbato il raggio in uscita. La luce viene diretta tramite un telescopio verso un satellite bersaglio dotato di specchi retroriflettori che mantengono inalterata la polarizzazione. Gli specchi del satellite bersaglio reindirizzano il raggio verso la stazione di terra. Il movimento radiale del satellite introduce uno sfasamento cinematico tra i due intervalli temporali dato da

$$\varphi(t) = \frac{2\beta(t)}{1 + \beta(t)} \frac{2\pi c}{\lambda} \Delta t \quad (2.7)$$

ove $\beta(t) = v_r(t)/c$ e $v_r(t)$   la velocit  radiale istantanea del satellite rispetto al suolo e c   la velocit  della luce nel vuoto. Con questa ulteriore fase, lo stato si pu  scrivere come

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + e^{i\varphi(t)}|V\rangle). \quad (2.8)$$

I fotoni che ritornano dal satellite sono raccolti dallo stesso telescopio e iniettati nel tavolo ottico.

¹⁰Sono riportate le specifiche del fascio: frequenza di ripetizione 100 MHz, lunghezza d'onda $\lambda = 532$ nm, energia per impulso ~ 1 nJ.

¹¹L'azione combinata dei LCRs   equivalente a una singola piastra a semionda commutabile (sHWP) inclinata di 45° rispetto all'asse.

Ad una porta di uscita di MZI-PBS (figura 2.5), si esegue una misura di polarizzazione diagonale e antidiagonale nella base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ ove $|\pm\rangle = (|H\rangle \pm |V\rangle)/\sqrt{2}$ con $|H\rangle$ e $|V\rangle$, rispettivamente, lo stato di polarizzazione orizzontale e verticale. Mentre i fotoni si stanno propagando di nuovo a MLRO, un generatore di numeri casuali quantistici su richiesta (QRNG) estrae un bit casuale $b \in \{0, 1\}$ con una probabilità del 50% di ottenere $b = 0$ oppure $b = 1$. Il valore del bit imposta le tensioni V_b applicate ai ritardatori a cristalli liquidi LCR, determinando il comportamento on o off dello sHWP. Quest'ultimo determina se verrà eseguita una misura che rivela il comportamento delle particelle (sHWP on) o ondulatorio (sHWP off) dei fotoni che ritornano dal satellite. La separazione tra la scelta della misurazione e l'ultima interazione con l'apparato, cioè la riflessione dal satellite verso il laboratorio, è certamente un intervallo di tipo spazio, in quanto i bit casuali vengono generati dal QRNG mentre i fotoni stanno viaggiando dal satellite verso la stazione di Matera.

Si supponga ora che il QRNG estragga un bit $b = 0$, causando la disattivazione dello sHWP e lasciando invariata la polarizzazione del fotone mentre rientra nel MZI. Alla porta di uscita del MZI-PBS verso i rivelatori di figura 2.5, possono essere rilevate solo la componente polarizzata orizzontalmente, che si propagava attraverso il braccio lungo, e la componente polarizzata verticalmente, che viaggiava lungo il braccio corto. Infatti osservando il percorso dei fotoni in arrivo dal satellite, una volta che giungono in prossimità del BS essi hanno probabilità 50% di propagarsi lungo il braccio inferiore oppure superiore. Ma se un fotone polarizzato verticalmente passasse di nuovo nel braccio superiore, una volta giunto sul MZI-PBS verrebbe deflesso e non trasmesso verso il rivelatore. Analogamente se i fotoni polarizzati orizzontalmente percorressero il braccio inferiore, il MZI-PBS li lascerebbe passare orizzontalmente senza quindi arrivare al rivelatore. In altre parole, il sistema permette di identificare la polarizzazione dei fotoni provenienti dal braccio superiore (sicuramente H) oppure quelli provenienti dal braccio inferiore (sicuramente V).

Poiché questa è la situazione opposta rispetto alla situazione iniziale, in cui il fotone passava dal laser verso il satellite, i due modi di polarizzazione si ricombinano in una singola modalità temporale, perdendo tutte le informazioni sul percorso e permettendo di osservare un'interferenza φ -dipendente.

Nella realtà lo stato non è descritto da (2.8) a causa degli effetti della decoerenza, cioè della mancata sovrapposizione perfetta dei due fotoni. Indicando con $\mathcal{V}(t)$ la visibilità teorica¹², si può scrivere più correttamente lo stato (2.8) come

$$\begin{aligned} \rho &= \mathcal{V}(t)|\psi\rangle\langle\psi| + (1 - \mathcal{V}(t)) \left(\frac{1}{2}|H\rangle\langle H| + \frac{1}{2}e^{-i\varphi(t)}e^{i\varphi(t)}|V\rangle\langle V| \right) \\ \Rightarrow \rho &= \mathcal{V}(t)|\psi\rangle\langle\psi| + (1 - \mathcal{V}(t)) \left(\frac{1}{2}|H\rangle\langle H| + \frac{1}{2}|V\rangle\langle V| \right). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Si vede che per $\mathcal{V}(t) \rightarrow 1$ il secondo termine a secondo membro si cancella e dunque si ha uno stato puro

$$|\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & e^{i\varphi(t)} \\ e^{-i\varphi(t)} & 1 \end{pmatrix},$$

mentre per $\mathcal{V}(t) \rightarrow 0$ lo stato diventa misto

$$\frac{1}{2}|H\rangle\langle H| + \frac{1}{2}|V\rangle\langle V| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

¹²Essa rappresenta il grado di bontà di correlazione in un campionamento. La visibilità teorica è data da $\mathcal{V}(t) = e^{-\frac{\lambda^2 \varphi^2(t)}{8\pi c^2 \tau_c^2}} = e^{-2\pi \frac{\Delta t}{\tau_c} \frac{\beta(t)}{1+\beta(t)}}$ come mostrato da Villorese *et al.*[11, p.2]. Il parametro τ_c rappresenta il tempo di coerenza dell'impulso. A livello pratico la visibilità sperimentale è inferiore dell'unità a causa delle imperfezioni microscopiche degli apparati sperimentali come l'interferometro oppure effetti di birifrangenza delle lenti del telescopio.

Andando a calcolare il termine di matrice $\langle +|\rho|+\rangle = \mathcal{V}(t)|\langle +|\psi\rangle|^2 + (1 - \mathcal{V}(t))(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) = \mathcal{V}(t)|\frac{1}{2}(1 + e^{i\varphi(t)})|^2 + (1 - \mathcal{V}(t))(\frac{1}{2})$ si trova che le probabilità di un rilevamento nei detector Det_{\pm} sono date da

$$P_{\pm}^{b=0}(t) = \mathcal{V}(t) \left(\frac{1 + \cos(\varphi(t))}{2} \right) + \frac{1 - \mathcal{V}(t)}{2} = \frac{1}{2}[1 + \mathcal{V}(t) \cos \varphi(t)]. \quad (2.10)$$

Si supponga ora che il QRNG estragga un bit $b = 1$, accendendo lo sHWP e scambiando le polarizzazioni orizzontali e verticali prima che il fotone rientri nel MZI.

La trasformazione della polarizzazione fa sì che ogni componente dello stato ritorni nello stesso braccio percorso durante il cammino in uscita dal MZI verso il satellite. Di conseguenza, il fotone può essere rilevato in due tempi distinti separati da $2\Delta t$. La separazione temporale permette di distinguere le due componenti della polarizzazione all'arrivo nei detector Det_{\pm} , infatti il fotone con polarizzazione $|V\rangle$ arriverà dopo $2\Delta t$ rispetto al fotone polarizzato $|H\rangle$. La visibilità del campionamento sarà nulla, dato che i due fotoni sono totalmente non correlati. Lo stato del sistema diviene

$$\begin{aligned} \rho &= \mathcal{V}(t)|\psi\rangle\langle\psi| + (1 - \mathcal{V}(t)) \left(\frac{1}{2}e^{-i\varphi(t)}e^{i\varphi(t)}|H\rangle\langle H| + \frac{1}{2}|V\rangle\langle V| \right) \Big|_{\mathcal{V}(t)=0} \\ &= \frac{1}{2}|H\rangle\langle H| + \frac{1}{2}|V\rangle\langle V| \end{aligned} \quad (2.11)$$

che è uno stato misto, con probabilità classiche $P_{\pm}^{b=1}(t) = 1/2$.

Una realizzazione fedele dell'esperimento di Wheeler richiede che l'ingresso del fotone nell'interferometro non sia nel cono luce futuro della scelta di eseguire la misurazione. Inoltre, quest'ultimo deve essere realizzato in modo casuale, in modo da impedire qualsiasi influenza causale della scelta della misura sul comportamento del fotone.

L'implementazione della scelta ritardata viene eseguita su un canale spaziale con una lunghezza dell'ordine di migliaia di chilometri, corrispondente a un tempo di volo del fotone rtt dell'ordine di 10 ms. La disposizione sperimentale che consente di cambiare le due polarizzazioni è impostata casualmente in base a due configurazioni alternative, mentre i fotoni sono già all'interno dell'apparecchiatura, come richiesto nel paradigma della scelta ritardata.

Sull'istogramma di destra di figura 2.5, il bit estratto è $b = 1$ e l'istogramma presenta due picchi laterali ben separati, manifestando una distribuzione normale come atteso. Un'indicazione di buona valutazione per l'impostazione è data dal fatto che il picco ottenuto quando $b = 0$ è paragonabile alla somma dei due picchi laterali ottenuti quando $b = 1$, perché il numero di bit 0 e 1 dal QRNG è equilibrato. Va notato che se si prevede un'interferenza nel caso $b = 0$, non è evidente in figura 2.5 perché l'istogramma non tiene in considerazione lo sfasamento $\varphi(t)$ introdotto dal satellite, e quindi l'effetto di interferenza è completamente mediato su tutti i dati.

Per il sottoinsieme dei dati in cui si ottengono interferenze, si possono osservare le relative informazioni di fase cancellando l'informazione *welcher-weg* del fotone. Considerando questi dati con $P_{\pm} = (1 \pm \mathcal{V}_{exp} \cos \varphi)/2$ dato dall'equazione (2.10), il gruppo di Villoresi *et al.* ha ottenuto un valore di visibilità sperimentale $\mathcal{V}_{exp} \approx 40\%$ per entrambi i satelliti¹³ e una chiara modulazione dipendente dalla fase nei due risultati del rivelatore. Inoltre, la visibilità ottenuta durante i test preliminari, in cui lo sHWP viene fissato in modalità off, è compatibile con i risultati che si ottengono durante l'esecuzione della scelta ritardata, attestando che quest'ultimo non ha influenza sul pattern di interferenza osservato. D'altra parte, le frequenze relative ai casi in cui si misura l'informazione *welcher-weg* sono costanti (all'interno di fluttuazioni statistiche) per tutti i valori di φ , come previsto dal modello teorico $P_{\pm} = 1/2$. In questo caso, la misurazione del percorso distrugge qualsiasi informazione sulla fase relativa dei due intervalli temporali.

¹³Il valore della visibilità sperimentale, inferiore al valore teorico del 100%, è dovuto alle imperfezioni sperimentali nel MZI e alla birifrangenza residua causata dagli specchi del telescopio.

Quando il fotone viene rilevato in uno dei due picchi laterali, cioè rilevato in configurazione *which-path*, e viene recuperata l'informazione su quale percorso ha seguito, si ottengono informazioni conclusive sul percorso con probabilità $p_{wp} = 88 \pm 1\%$ ($86 \pm 1\%$) per Beacon-C (Starlette)¹⁴. Poiché le particelle classiche dovrebbero sempre fornire informazioni su quale percorso seguono, si potrebbe ingenuamente concludere che i fotoni si comportino come particelle classiche per almeno l'86% delle volte. Se tale interpretazione fosse corretta, la figura di interferenza avrebbe una visibilità al massimo del 14%, che è in notevole contrasto con la visibilità misurata, che è distante almeno 5σ da quella previsione, permettendo di escludere qualsiasi modello in cui il fotone si comporti come una particella puramente classica.

Osservando l'interferenza di un singolo fotone dopo la propagazione lungo un canale spaziale di 3500 km, viene confutata con la chiara evidenza statistica di 5σ la descrizione dei quanti di luce come particelle classiche.

¹⁴Beacon-c e Starlette sono i nomi dei due satelliti utilizzati.

Capitolo 3

Il ruolo dell'informazione nel collasso della funzione d'onda

3.1 L'esperimento di Mandel

Si consideri la situazione sperimentale illustrata in figura 3.1, in cui due cristalli non lineari NL1 e NL2 sono irradiati da due onde di luce classicamente coerenti tra loro, di ampiezze complesse V_1 e V_2 , e prodotte dalla separazione di un fascio di fotoni su un *beam-splitter* BS_P . Su entrambi i cristalli avviene il processo di *parametric down-conversion*¹⁵, ciascuno con l'emissione di un fotone di segnale (*signal photon*) e di un fotone di controllo (*idler photon*).

I cristalli sono allineati in modo tale che i_1 proveniente da NL1 passi attraverso NL2 e la sua traiettoria coincida con i_2 . I due fotoni di controllo i_1 e i_2 sovrapposti arrivano sul fotorivelatore D_i , come mostrato in figura 3.1. I due fotoni di segnale s_1 e s_2 si riuniscono al *beam-splitter* BS_0 dove interferiscono e giungono infine al fotorilevatore D_s . La differenza di percorso tra s_1 e s_2 varia leggermente.

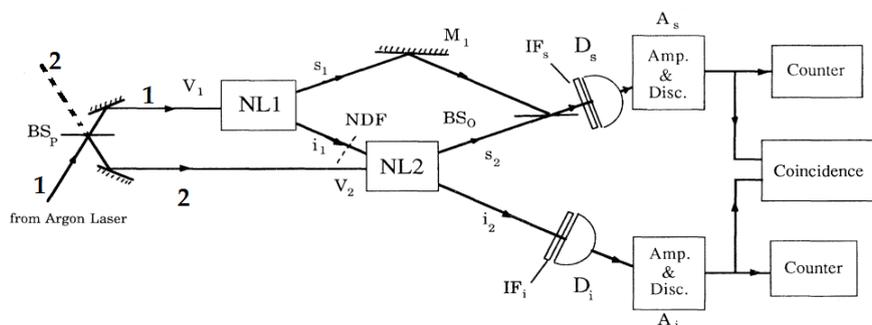


Figura 3.1: Schema dell'esperimento di Mandel.

Se l'intensità del campo prodotto tramite *parametric down-conversion* i_1 è molto elevata, ci si aspetterebbe che questo induca processi di *parametric down-conversion* su NL2, cosicché i campi di i_1 e i_2 siano mutualmente coerenti e quindi anche s_1 e s_2 lo siano. Tuttavia Mandel[13, p.318] trova che s_1 e s_2 interferiscono anche se non vi è alcuna emissione indotta in NL2 e dunque le emissioni sono spontanee; s_1 e s_2 interferiscono persino quando un fotone s_2 proveniente da NL2 non è prodotto dall'emissione tramite *parametric down-conversion* del fotone i_1 proveniente da NL1. L'interferenza prodotta dalla asimmetria dell'interferometro mostra una figura di interferenza fino al secondo ordine.

¹⁵Un cristallo non lineare, per esempio di calcite, separa i fotoni incidenti in coppie di fotoni a più bassa energia, conservando nel processo l'energia totale e il momento totale.

Si supponga che D_s e D_i rilevino rispettivamente i fotoni di segnale e i fotoni di controllo. Nel caso in cui le modalità di propagazione di i_1 e i_2 coincidano, vale a dire se

$$\mathbf{k}_{i_1} = \mathbf{k}_{i_2}$$

$$\omega_{i_1} = \omega_{i_2}$$

ove con \mathbf{k} si intende il vettore d'onda e con ω la pulsazione, allora i rivelatori non possono distinguere tra le coppie di fotoni s_1, i_1 e s_2, i_2 . Come risultato le corrispondenti ampiezze di probabilità a due fotoni si sommano e la percentuale R_{si} del rilevamento a due fotoni di D_s e D_i mostra una figura di interferenza fino al quarto ordine.

Si immagini di frapporre un oggetto NDF¹⁶ tra i_1 e i_2 (oppure di disallineare le direzioni dei fasci i_1 e i_2 in modo tale che uno di questi abbia probabilità nulla di arrivare a D_i), affinché questi ultimi non siano più correlati. A prima vista questo non dovrebbe avere alcun effetto sull'interferenza del secondo ordine tra i due fotoni di segnale s_1 e s_2 , perché i fotoni vengono emessi spontaneamente e il rivelatore D_s non può svelare se il fotone rilevato provenga da NL1 o da NL2. Tuttavia questo è vero solo fino a quando i_1 e i_2 sono sovrapposti e allineati. Una volta interrotta la connessione o l'allineamento, è possibile in linea di principio determinare dai conteggi registrati da D_i (specialmente se D_i ha un'efficienza vicina al 100%) se il fotone di segnale registrato da D_s provenga da NL1 o da NL2. Se entrambi i rivelatori D_s e D_i registrano l'arrivo di una coppia, allora il fotone viene da NL2 e se D_i non scatta assieme a D_s , il fotone proviene da NL1.

3.2 Descrizione della *parametric down-conversion*

Viene riportato il meccanismo di *parametric down-conversion* così come descritto da Shih *et al.*[10].

Si consideri un fotone pompa p che incide su un cristallo non lineare, come mostrato in figura 3.2. Il processo di *parametric down-conversion* porterà all'emissione di due fotoni, chiamati fotone di segnale s (*system photon*) e fotone di controllo i (*idler photon*).

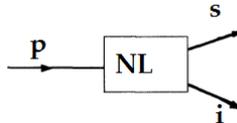


Figura 3.2: Schema del meccanismo di *parametric down-conversion* tramite un cristallo non lineare NL.

Lo stato verrà descritto dalla somma di tutti i possibili prodotti tensore delle coppie di fotoni s e i

$$|\psi\rangle = \sum_{s,i} \delta(\omega_s + \omega_i - \omega_p) \delta(\mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_p) |\mathbf{k}_s\rangle \otimes |\mathbf{k}_i\rangle \quad (3.1)$$

ove ω_j e \mathbf{k}_j ($j = p, s, i$) sono, rispettivamente la pulsazione e il vettore d'onda dei fotoni pompa, segnale e controllo. Lo stato descritto in (3.1) (appartenente allo spazio $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\mathbf{k}_s} \otimes \mathcal{H}_{\mathbf{k}_i}$) può essere visto come sovrapposizione di infinite ampiezze di probabilità di due fotoni, corrispondenti agli infiniti modi con cui i fotoni creati tramite *parametric down-conversion* soddisfano le condizioni di conservazione della quantità di moto e di conservazione dell'energia

$$\mathbf{k}_p = \mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i \quad (3.2)$$

$$\omega_p = \omega_s + \omega_i. \quad (3.3)$$

¹⁶Filtro a densità neutra, riduce l'intensità della luce; nel nostro caso la riduce totalmente.

Si supponga senza perdita di generalità che $\omega_i \simeq \omega_s \simeq \omega_p/2$, così da poter scrivere

$$|\psi\rangle = \sum_{s,i} \delta(\mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_p) |\mathbf{k}_s\rangle \otimes |\mathbf{k}_i\rangle. \quad (3.4)$$

In ultimo, dato che lo stato (3.4) è una sommatoria di infiniti termini, si consideri lo stato $|\psi\rangle$ sempre normalizzabile ad 1. Questo significa che lo stato corretto in realtà è

$$|\psi\rangle = \frac{\sum_{s,i} \delta(\mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_p) |\mathbf{k}_s\rangle \otimes |\mathbf{k}_i\rangle}{\|\sum_{s,i} \delta(\mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_p) |\mathbf{k}_s\rangle \otimes |\mathbf{k}_i\rangle\|}.$$

Per chiarezza espositiva, si farà riferimento a (3.4), sapendo che in realtà lo stato deve essere sempre normalizzato ad 1.

3.3 Descrizione matematica dell'esperimento di Mandel

La prima osservazione che si può avanzare riguardo al circuito dei fotoni di sistema s_1 e s_2 è che esso costituisce un interferometro Mach-Zender formato dai due *beam-splitter* BS_P e BS_O . In quanto tale, il fotone pompa proveniente dal fascio inferiore emergente da BS_P , termina con certezza in D_s . Viene indicato per chiarezza espositiva con 1 il braccio superiore e con 2 il braccio inferiore. Supponendo che il fotone pompa provenga dalla direzione $|1\rangle$ prima del BS_P , allora lo stato del sistema appena dopo il primo *beam-splitter* è dato da

$$|\psi\rangle = \hat{B}|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle + i|2\rangle) \quad (3.5)$$

ove \hat{B} è l'operatore che descrive il *beam-splitter* sullo stato ψ ¹⁷. Per quanto visto nel paragrafo precedente, una volta che il fotone passa o per il braccio 1 (e dunque giunge al cristallo nonlineare NL1) oppure per il braccio 2 (e dunque giunge su NL2), si può scrivere sulla base di (3.4) che

$$|1\rangle = \sum_{s_1, i_1} \delta(\mathbf{k}_{s_1} + \mathbf{k}_{i_1} - \mathbf{k}_p) |\mathbf{k}_{s_1}\rangle \otimes |\mathbf{k}_{i_1}\rangle \quad (3.6)$$

$$|2\rangle = \sum_{s_2, i_2} \delta(\mathbf{k}_{s_2} + \mathbf{k}_{i_2} - \mathbf{k}_p) |\mathbf{k}_{s_2}\rangle \otimes |\mathbf{k}_{i_2}\rangle \quad (3.7)$$

$$\Rightarrow |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sum_{s_1, i_1} \delta(\mathbf{k}_{s_1} + \mathbf{k}_{i_1} - \mathbf{k}_p) |\mathbf{k}_{s_1}\rangle \otimes |\mathbf{k}_{i_1}\rangle + i \sum_{s_2, i_2} \delta(\mathbf{k}_{s_2} + \mathbf{k}_{i_2} - \mathbf{k}_p) |\mathbf{k}_{s_2}\rangle \otimes |\mathbf{k}_{i_2}\rangle \right). \quad (3.8)$$

Per avere una visibilità maggiore nei risultati, è necessario far collassare la sommatoria presente in (3.8) in un unico termine. Lo stato allora diviene

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\mathbf{k}_{s_1}\rangle \otimes |\mathbf{k}_{i_1}\rangle + i|\mathbf{k}_{s_2}\rangle \otimes |\mathbf{k}_{i_2}\rangle). \quad (3.9)$$

Si possono distinguere due casi:

- senza NDF, le direzioni \mathbf{k}_{i_1} e \mathbf{k}_{i_2} coincidono perfettamente ed è possibile scrivere $\mathbf{k}_{i_1} = \mathbf{k}_{i_2} \equiv \mathbf{k}_i$. Di conseguenza il fotone pompa, dopo il primo *beam-splitter* può aver intrapreso sia il braccio 1 che il braccio 2, ma per come è costruito l'esperimento non c'è modo di capire quale dei due rami viene percorso dal fotone pompa. Lo stato allora è, considerato il perfetto allineamento dei fotoni di controllo i_1 e i_2 , dato da

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\left(|\mathbf{k}_{s_1}\rangle + i|\mathbf{k}_{s_2}\rangle \right) \otimes |\mathbf{k}_i\rangle \right]. \quad (3.10)$$

¹⁷Una descrizione più dettagliata si trova nella sezione 2.2 a pagina 15.

Come osservato all'inizio, il percorso dei fotoni segnale è assimilabile ad un interferometro Mach-Zender, quindi bisogna applicare un'ultima volta l'operatore \hat{B} che descrive il *beam-splitter* BS_0 . È necessario rilevare, come detto nella descrizione dell'esperimento, la lieve differenza di cammino tra s_1 e s_2 . Essa si può ottenere applicando una fase relativa tra le due parti della funzione d'onda, oppure applicando l'operatore $\hat{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} \end{pmatrix}$ alla parte del sistema percorsa dai fotoni segnale. Matematicamente l'operatore corretto è $\hat{P} \otimes \mathbb{I}_i$, e si applica allo stato nel seguente modo

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{P} \otimes \mathbb{I}_i) \left(|\mathbf{k}_{s_1}\rangle + i|\mathbf{k}_{s_2}\rangle \right) \otimes |\mathbf{k}_i\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\mathbf{k}_{s_1}\rangle + ie^{i\varphi}|\mathbf{k}_{s_2}\rangle \right) \otimes |\mathbf{k}_i\rangle \end{aligned}$$

ove \mathbb{I}_i indica la matrice identità ed è tale che $\mathbb{I}_i|\mathbf{k}_i\rangle = |\mathbf{k}_i\rangle$. Applicando a questo punto il secondo operatore \hat{B} , che rappresenta il *beam-splitter* BS_0 , ricordando che esso agisce solo sui fotoni di segnale s , si giunge a

$$\begin{aligned} |\psi'\rangle &= (\hat{B} \otimes \mathbb{I}_i)|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{B} \otimes \mathbb{I}_i) \left(|\mathbf{k}_{s_1}\rangle + ie^{i\varphi}|\mathbf{k}_{s_2}\rangle \right) \otimes |\mathbf{k}_i\rangle = \\ &= \frac{1}{2} \left((1 - e^{i\varphi})|\mathbf{k}_{s_1}\rangle + i(1 + e^{i\varphi})|\mathbf{k}_{s_2}\rangle \right) \otimes |\mathbf{k}_i\rangle. \end{aligned} \quad (3.11)$$

La matrice densità del sistema è

$$\begin{aligned} \rho_{s,i} &= |\psi'\rangle\langle\psi'| = \\ &= \frac{1}{4} \left(|1 - e^{i\varphi}|^2 |\mathbf{k}_{s_1}\rangle\langle\mathbf{k}_{s_1}| + |1 + e^{i\varphi}|^2 |\mathbf{k}_{s_2}\rangle\langle\mathbf{k}_{s_2}| + \right. \\ &\quad \left. \underbrace{-2 \sin \varphi |\mathbf{k}_{s_1}\rangle\langle\mathbf{k}_{s_2}| - 2 \sin \varphi |\mathbf{k}_{s_2}\rangle\langle\mathbf{k}_{s_1}|}_{\text{termini di coerenza}} \right) \otimes |\mathbf{k}_i\rangle\langle\mathbf{k}_i|. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Dalla condizione $\mathbf{k}_{i_1} = \mathbf{k}_{i_2}$, segue che $|\mathbf{k}_i\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, il cui proiettore è dato da

$$P_i = |\mathbf{k}_i\rangle\langle\mathbf{k}_i| = \mathbb{I}_i.$$

Il calcolo delle probabilità condizionate dalla misura di \mathbf{k}_i porta a

$$\begin{aligned} p(\mathbf{k}_{s_1}|\mathbf{k}_i) &= \frac{\text{Tr} \left(P_{\mathbf{k}_{s_1}} \otimes P_{\mathbf{k}_i} \rho_{s,i} \right)}{\text{Tr} \left(\mathbb{I} \otimes P_{\mathbf{k}_i} \rho_{s,i} \right)} = \frac{\text{Tr} \left(|\mathbf{k}_{s_1}\rangle\langle\mathbf{k}_{s_1}| \otimes |\mathbf{k}_i\rangle\langle\mathbf{k}_i| \rho_{s,i} \right)}{\text{Tr} \left(\mathbb{I} \otimes |\mathbf{k}_i\rangle\langle\mathbf{k}_i| \rho_{s,i} \right)} = \\ &= \frac{|1 - e^{i\varphi}|^2}{|1 - e^{i\varphi}|^2 + |1 + e^{i\varphi}|^2} = \sin^2 \frac{\varphi}{2} \\ p(\mathbf{k}_{s_2}|\mathbf{k}_i) &= \frac{\text{Tr} \left(P_{\mathbf{k}_{s_2}} \otimes P_{\mathbf{k}_i} \rho_{s,i} \right)}{\text{Tr} \left(\mathbb{I} \otimes P_{\mathbf{k}_i} \rho_{s,i} \right)} = \frac{\text{Tr} \left(|\mathbf{k}_{s_2}\rangle\langle\mathbf{k}_{s_2}| \otimes |\mathbf{k}_i\rangle\langle\mathbf{k}_i| \rho_{s,i} \right)}{\text{Tr} \left(\mathbb{I} \otimes |\mathbf{k}_i\rangle\langle\mathbf{k}_i| \rho_{s,i} \right)} = \\ &= \frac{|1 + e^{i\varphi}|^2}{|1 - e^{i\varphi}|^2 + |1 + e^{i\varphi}|^2} = \cos^2 \frac{\varphi}{2}. \end{aligned}$$

Queste probabilità condizionate dimostrano che se i fotoni di controllo i_1 e i_2 sono indistinguibili, allora la misura del detector D_i non permette di stabilire con probabilità unitaria da quale ramo sia passato il fotone di sistema. Il risultato è che sono visibili le frange di interferenza dovute ai termini di coerenza della matrice densità;

- inserendo il meccanismo NDF, si bloccano i fotoni i_1 provenienti da NL1. É possibile imporre un vincolo meno stringente, ad esempio richiedere semplicemente che i_1 e i_2 siano disallineati e dunque $\mathbf{k}_{i_1} \neq \mathbf{k}_{i_2}$. Lo stato allora è ancora descritto da (3.9).

Esattamente come prima, i fotoni di segnale s hanno una fase relativa φ , dunque è necessario applicare \hat{P} allo stato

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{P} \otimes \mathbb{I}_i)(|\mathbf{k}_{s_1}\rangle \otimes |\mathbf{k}_{i_1}\rangle + i|\mathbf{k}_{s_2}\rangle \otimes |\mathbf{k}_{i_2}\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\mathbf{k}_{s_1}\rangle \otimes |\mathbf{k}_{i_1}\rangle + ie^{i\varphi}|\mathbf{k}_{s_2}\rangle \otimes |\mathbf{k}_{i_2}\rangle).$$

A questo punto si applica l'operatore \hat{B} dovuto al BS_0

$$|\psi'\rangle = (\hat{B} \otimes \mathbb{I}_i)|\psi\rangle = \frac{1}{2} \left[\left(|\mathbf{k}_{s_1}\rangle - e^{i\varphi}|\mathbf{k}_{s_2}\rangle \right) \otimes |\mathbf{k}_{i_1}\rangle + i \left(|\mathbf{k}_{s_1}\rangle + e^{i\varphi}|\mathbf{k}_{s_2}\rangle \right) \otimes |\mathbf{k}_{i_2}\rangle \right].$$

Tuttavia, di nuovo dalla condizione (3.2), se $\mathbf{k}_{i_1} \neq \mathbf{k}_{i_2}$ allora

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{i_1} + \mathbf{k}_{s_2} &= \mathbf{k}_{i_1} + \mathbf{k}_p - \mathbf{k}_{i_2} = \underbrace{\mathbf{k}_{i_1} - \mathbf{k}_{i_2}}_{\neq 0} + \mathbf{k}_p \neq \mathbf{k}_p \\ \Rightarrow \mathbf{k}_{i_1} + \mathbf{k}_{s_2} &\neq \mathbf{k}_p. \end{aligned}$$

Analogamente vale $\mathbf{k}_{i_2} + \mathbf{k}_{s_1} \neq \mathbf{k}_p$, perciò i termini $|\mathbf{k}_{s_1}\rangle \otimes |\mathbf{k}_{i_2}\rangle$ e $|\mathbf{k}_{s_2}\rangle \otimes |\mathbf{k}_{i_1}\rangle$ non sono ammessi poiché non soddisfano la condizione di conservazione del momento data da (3.2) e lo stato si riduce a

$$|\psi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\mathbf{k}_{s_1}\rangle \otimes |\mathbf{k}_{i_1}\rangle + ie^{i\varphi}|\mathbf{k}_{s_2}\rangle \otimes |\mathbf{k}_{i_2}\rangle \right). \quad (3.13)$$

La matrice densità del sistema è

$$\begin{aligned} \rho'_{s,i} &= |\psi'\rangle\langle\psi'| = \\ &= \frac{1}{2} \left(|\mathbf{k}_{s_1}\rangle\langle\mathbf{k}_{s_1}| \otimes |\mathbf{k}_{i_1}\rangle\langle\mathbf{k}_{i_1}| + |\mathbf{k}_{s_2}\rangle\langle\mathbf{k}_{s_2}| \otimes |\mathbf{k}_{i_2}\rangle\langle\mathbf{k}_{i_2}| + \right. \\ &\quad \left. + ie^{i\varphi}|\mathbf{k}_{s_2}\rangle\langle\mathbf{k}_{s_1}| \otimes |\mathbf{k}_{i_2}\rangle\langle\mathbf{k}_{i_1}| - ie^{-i\varphi}|\mathbf{k}_{s_1}\rangle\langle\mathbf{k}_{s_2}| \otimes |\mathbf{k}_{i_1}\rangle\langle\mathbf{k}_{i_2}| \right). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Se $|\mathbf{k}_{i_1}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $|\mathbf{k}_{i_2}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $|\mathbf{k}_{s_1}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $|\mathbf{k}_{s_2}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, si proceda con il calcolo delle probabilità condizionate dalla misura sul fotone di controllo i .

Supponendo di misurare i_1 , si trova

$$\begin{aligned} P(\mathbf{k}_{s_1}|\mathbf{k}_{i_1}) &= \frac{P(\mathbf{k}_{s_1}, \mathbf{k}_{i_1})}{P(\mathbf{k}_{i_1})} = \frac{\text{Tr} \left[|\mathbf{k}_{s_1}\rangle\langle\mathbf{k}_{s_1}| \otimes |\mathbf{k}_{i_1}\rangle\langle\mathbf{k}_{i_1}| \rho'_{s,i} \right]}{\text{Tr} \left[\mathbb{I} \otimes |\mathbf{k}_{i_1}\rangle\langle\mathbf{k}_{i_1}| \rho'_{s,i} \right]} = \frac{1/2}{1/2} = 1 \\ P(\mathbf{k}_{s_2}|\mathbf{k}_{i_1}) &= \frac{P(\mathbf{k}_{s_2}, \mathbf{k}_{i_1})}{P(\mathbf{k}_{i_1})} = \frac{\text{Tr} \left[|\mathbf{k}_{s_2}\rangle\langle\mathbf{k}_{s_2}| \otimes |\mathbf{k}_{i_1}\rangle\langle\mathbf{k}_{i_1}| \rho'_{s,i} \right]}{\text{Tr} \left[\mathbb{I} \otimes |\mathbf{k}_{i_1}\rangle\langle\mathbf{k}_{i_1}| \rho'_{s,i} \right]} = \frac{0}{1/2} = 0. \end{aligned}$$

Se invece il detector D_i trova il fotone i_2 , calcoli analoghi portano a

$$\begin{aligned} P(\mathbf{k}_{s_1}|\mathbf{k}_{i_2}) &= \frac{P(\mathbf{k}_{s_1}, \mathbf{k}_{i_2})}{P(\mathbf{k}_{i_2})} = \frac{0}{1/2} = 0 \\ P(\mathbf{k}_{s_2}|\mathbf{k}_{i_2}) &= \frac{P(\mathbf{k}_{s_2}, \mathbf{k}_{i_2})}{P(\mathbf{k}_{i_2})} = \frac{1/2}{1/2} = 1. \end{aligned}$$

Queste probabilità indicano che se i due fotoni di controllo i_1 e i_2 sono distinguibili, la misura del detector D_i è correlata fortemente alla conoscenza del vettore d'onda del fotone in arrivo su D_s come dimostrato dalle probabilità condizionate calcolate precedentemente. Dunque se i due fotoni di controllo sono distinguibili, allora scompare ogni interferenza sul detector dei fotoni di sistema.

É interessante sottolineare alcuni risultati importanti. Preparando l'esperimento senza NDF, il registratore D_s mostra due peculiarità:

1. una figura di interferenza fino al secondo ordine dovuta alla leggera asimmetria tra le lunghezze dei percorsi di s_1 rispetto a s_2 dovuta a termini che dipendono da φ nella matrice densità;
2. una figura di interferenza fino al quarto ordine dovuta alla presenza di termini di coerenza nella matrice densità del sistema, ossia termini fuori dalla diagonale principale.

La presenza del pattern di interferenza al second'ordine è strettamente legato al pattern di interferenza al quarto ordine, dato che la asimmetria tra i due percorsi s_1 e s_2 si osserva solo se il fotone percorre il ramo 1 e 2, in accordo con lo stato descritto da (3.5), che contempla entrambe le possibilità.

Se al sistema viene aggiunto l'ostacolo NDF, si è in grado di risalire potenzialmente a quale dei due percorsi viene intrapreso dal fotone pompa, in quanto le probabilità condizionate dimostrano una forte correlazione tra la conoscenza del fotone rilevato in D_i e il fotone in arrivo su D_s . La conseguenza è che non si registra né l'interferenza al quarto ordine né al secondo ordine. Le probabilità condizionate dimostrano che non serve operare una vera e propria misura per eliminare le interferenze, dato che lo stato descritto da (3.14) è uno stato puro, in cui ancora non è avvenuto il processo di collasso dovuto alla misura. Citando il lavoro di Mandel *et al.*:

It should be noted that the disappearance of the interference pattern here is not the result of a large uncontrollable disturbance acting on the system, [...], but simply a consequence of the fact that the two possible photon paths s_1 or s_2 have become distinguishable. [...] Because signal and idler photons are always emitted together, once the i_1, i_2 connection is broken it becomes feasible, in principle, to determine from the counts registered by an efficient detector D_i whether the detected signal photon comes from NL1 or NL2, and this destroys the interference. Whether or not this auxiliary measurement with D_i is actually made, or whether detector D_i is even in place, appears to make no difference. It is sufficient that it could be made, and that the photon path would then be identifiable, in principle, for the interference to be wiped out.[13, p.321]

Capitolo 4

L'interpretazione di de Broglie-Bohm

In aggiunta a quanto discusso sinora, viene esposta qui l'interpretazione di de Broglie-Bohm che spiega in maniera altrettanto consistente gli esperimenti a scelta ritardata.

Una regola cardine della meccanica quantistica è che la funzione d'onda rappresenti la conoscenza, o meglio l'informazione, più estesa che si può sperare di ottenere del sistema. L'interpretazione di de Broglie-Bohm[2] nasce sulla critica di questo assunto, pensando di poter ricostruire il determinismo nella teoria quantistica, attraverso l'introduzione di variabili nascoste non locali. Citando Bohm:

[...]we shall stress only the fact that it (l'interpretazione standard) requires us to give up the possibility of even conceiving precisely what might determine the behavior of an individual system at the quantum level, without providing adequate proof that such a renunciation is necessary.[2, p.168]

Nell'interpretazione bohmiana, le funzioni d'onda non sono solo oggetti matematici, ma oggetti fisici. Bohm tratta le funzioni d'onda in analogia con campi di forza classici, come i campi gravitazionali ed elettromagnetici. Nella sua teoria, le funzioni d'onda guidano le particelle lungo percorsi determinati dalle condizioni iniziali definite dalle variabili nascoste.

L'interpretazione bohmiana poggia sul concetto di evoluzione temporale deterministica, secondo l'equazione di Schrödinger. Ad esempio il caso con una particella di coordinate $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ verifica

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V(\mathbf{x})\psi$$

ove $\psi = Re^{(iS/\hbar)}$ è una funzione complessa, R e S sono reali e $V(\mathbf{x})$ è un potenziale generico. Valgono le seguenti equazioni

$$\begin{cases} \frac{\partial R}{\partial t} = -\frac{1}{2m}(R\nabla^2 S + 2\nabla R \cdot \nabla S) \\ \frac{\partial S}{\partial t} = -\left(\frac{(\nabla S)^2}{2m} + V(\mathbf{x}) - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R}\right) \end{cases}$$

Operando la sostituzione $R = P^{1/2}$, con P densità di probabilità, si ottiene

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial t} + \nabla \cdot \left(P \frac{\nabla S}{m}\right) = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\nabla S)^2}{2m} + V(\mathbf{x}) - \frac{\hbar^2}{4m} \left(\frac{\nabla^2 P}{P} - \frac{1}{2} \frac{(\nabla P)^2}{P^2}\right) = 0 \end{cases}$$

Nel limite classico, $S(\mathbf{x})$ è la soluzione dell'equazione di Hamilton-Jacobi.

Un ulteriore risultato è dato dall'evoluzione deterministica del moto della particella. Si consideri un insieme di traiettorie della particella, ossia l'insieme delle soluzioni dell'equazione del moto; esse sono ortogonali ad ogni insieme di livello determinato da un certo valore di S costante. Dunque il vettore tangente ad ogni superficie S sarà

$$v(\mathbf{x}) = \nabla S/m, \quad (4.1)$$

con $v(\mathbf{x})$ il vettore velocità del sistema, detto anche 'potenziale', che passa per il punto x . Si ottiene allora un'equazione di continuità

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \nabla \cdot (Pv) = 0. \quad (4.2)$$

Il termine Pv , in completa analogia con il caso di un campo elettromagnetico classico, rappresenta la corrente media di particelle in questo ensemble, e la (4.2) rappresenta un'equazione di continuità che esprime il principio di conservazione della probabilità. La (4.2) si può scrivere portando la massa m a primo membro, ottenendo il momento della particella

$$\mathbf{p} = \nabla S. \quad (4.3)$$

L'interpretazione bohmliana si può dunque schematizzare su tre concetti:

1. il ψ -campo soddisfa l'equazione di Schrödinger;
2. il momento della particella è ristretto a $\mathbf{P} = \nabla S$;
3. viene ancora negato che non si possa predire la posizione della particella, ma si ha un insieme statistico con densità di probabilità $P(\mathbf{x}) = |\psi(\mathbf{x})|^2$. In ogni caso questa struttura probabilistica non deriva direttamente dalla meccanica, bensì dall'ignoranza dello sperimentatore riguardo le condizioni iniziali della particella.

L'intento è quello di pensare ad un ψ -campo che agisce su ciascuna particella secondo le relazioni che sono state appena mostrate. Il moto delle particelle viene così completamente determinato una volta date le condizioni iniziali, poiché il sistema evolve in maniera completamente deterministica come un sistema di equazioni differenziali. Le traiettorie, inoltre, sono conoscibili semplicemente integrando l'equazione (4.3).

Prendendo per esempio l'esperimento di Young a singolo fotone della sezione 1.2, la funzione d'onda sperimenta tutti i possibili percorsi, vale a dire tutti quelli che implicano il passaggio per l'una o per l'altra fenditura, anche se la particella ne percorrerà uno solo e lo farà in accordo con le equazioni differenziali lineari del moto. La teoria di Bohm implica che la parte *empty* (cioè vuota) della funzione d'onda, la parte cioè che viaggia lungo il percorso che la particella stessa non intraprende, è completamente inosservabile. Una delle conseguenze dell'equazione (4.1) è che solo la parte non vuota della funzione d'onda di una data particella può avere effetti sui moti delle altre. La parte vuota della funzione d'onda, nonostante il fatto che sia fisicamente prevista dalla matematica, è completamente incapace di lasciare qualsiasi traccia osservabile di se stessa sui rivelatori o altro.

Si supponga diappare una delle due fenditure dell'interferometro di Young prima che passi il fotone. Le possibili traiettorie varieranno e si assesteranno istantaneamente, in accordo con le modifiche eseguite sull'apparato.

Si è appena presentato il conflitto con il principio di località di Einstein, secondo cui le operazioni eseguite a distanza di tipo spazio non possono avere influenza una sull'altra. Nell'interpretazione bohmliana, infatti, la funzione d'onda è un oggetto fisico, cioè determina le traiettorie fisiche delle particelle. Se essa cambia istantaneamente dopo una misura, le traiettorie fisiche mutano ovunque nello spazio, anche se separate da distanze di tipo spazio. Questo è esattamente ciò che si intende per violazione della località.

Viene ora mostrato come applicare l'interpretazione di de Broglie-Bohm agli esperimenti a scelta ritardata. Si prenda ad esempio l'esperimento descritto nella sezione 2.2, l'interferometro Mach-Zender.

Secondo l'interpretazione bohmlana, lo stato in configurazione (I), ossia con un singolo *beam-splitter*, è descritto da una certa funzione d'onda la cui espressione era (2.3). I due termini che esprimono la funzione d'onda (2.3) determinano due possibili famiglie di traiettorie, una si sviluppa nel ramo *a* e l'altra si sviluppa nel ramo *b*.

L'aspetto cruciale si manifesta attivando il meccanismo a scelta ritardata. In quell'istante la funzione d'onda reagisce al cambio del *set up* e descrive altre possibili traiettorie, mostrando in effetti traiettorie che interferiscono costruttivamente nel rivelatore *a'*, distruttivamente nel rivelatore *b'*. Operando questa scelta per ogni iterazione, si ottiene alla fine, come descritto nel capitolo 2, una figura di interferenza. In questo caso l'interferenza non è più data dalla presenza di termini di coerenza nella matrice densità, ma è data dalla presenza di traiettorie che interferiscono e riproducono esattamente le probabilità non classiche descritte dalla meccanica quantistica.

Conclusione

Gli esperimenti a scelta ritardata nascono come *gedankenexperiment* nei lavori di Wheeler[14, 15]. Tuttavia le predizioni di Wheeler sono state effettivamente confermate nei laboratori di ottica quantistica, con un buon grado di affidabilità, come dimostrato nella sezione 2.4. Da un lato questi risultati confermano la strabiliante potenza della meccanica quantistica in termini di predizioni teoriche, dall'altro pongono ulteriori quesiti riguardo la località. Infatti sia l'interpretazione ortodossa sia l'interpretazione di de Broglie-Bohm spiegano coerentemente gli esperimenti a scelta ritardata, si veda ad esempio il capitolo 4. Tuttavia l'interpretazione bohmiiana non soddisfa la località di Einstein; assumendo che la particella abbia in ogni istante, prima che lo sperimentatore scelga di cambiare il *set up* dell'esperimento, una posizione ben definita, la funzione d'onda, che produce traiettorie non interferenti, muta istantaneamente in favore di traiettorie che interferiscono. Implicitamente si sta ammettendo che sia avvenuto il passaggio di informazione tra due eventi che sono causalmente disconnessi, in quanto si sta cambiando istantaneamente una proprietà fisica del sistema, cioè la sua traiettoria.

Un'interpretazione lievemente più cauta in merito alla località emerge esaminando le posizioni attualmente condivise nell'ambito dell'ottica quantistica. La logica è di eseguire il ragionamento inverso, ossia assumendo sempre rispettato il principio di località, cosa si può dire sulle proprietà fisiche del sistema?

Una prima considerazione è che, in ipotesi di località di Einstein, il dualismo onda/corpuscolo, ricondotto ai concetti classici di onda e particella, non ha validità fisica, come mostrato nella sezione 1.3 e 2.4.

I risultati degli esperimenti qui esposti sono legati alla sovrapposizione o mancata sovrapposizione degli stati che compongono la funzione d'onda, intesa come onda di probabilità; inoltre nel caso ci sia una sovrapposizione di stati, è possibile riprodurre le probabilità classiche. Questo fenomeno ha un legame strettissimo con la conoscenza potenziale dell'informazione *welcher-weg* come mostrato dall'esperimento di Mandel.

La posizione appena esposta porta necessariamente ad interrogarsi sul concetto di 'fenomeno', e dunque alla soluzione del paradosso della misura a scelta ritardata. Citando Wheeler:

'No phenomenon is a phenomenon until it is an observed phenomenon.' In other words, it is not a paradox that we choose what shall have happened after 'it has *already* happened.' It has not really happened, it is not a phenomenon, until it is observed phenomenon.[14, p.14]

Quanto appena detto va precisato, in accordo con i risultati contenuti nei lavori di Mandel *et al.*. Si trova che in meccanica quantistica l'interferenza è sempre una manifestazione della intrinseca indistinguibilità dei percorsi dei fotoni, nel qual caso si sommano le corrispondenti ampiezze di probabilità. Mandel[13, p.321] fa notare che poiché i fotoni di segnale e di controllo vengono sempre emessi insieme, una volta interrotta la connessione tra i_1 e i_2 diventa possibile determinare dai conteggi registrati da un rivelatore efficiente D_i , se il fotone di segnale rilevato proviene da NL1 o NL2. Risulta quindi possibile in linea di principio conoscere l'informazione *welcher-weg*. Questo processo distrugge l'interferenza, come mostrato nel capitolo 3, sia che la misura ausiliaria con D_i sia realmente eseguita oppure no, citando Mandel *et al.*[13, p.321]: "It is sufficient that it (la misura) could be

made, and that the photon path would then be identifiable, in principle, for the interference to be wiped out.”

In questa ottica, negli esperimenti a scelta ritardata il meccanismo che cambia il *set up* dell'apparato introduce la possibilità di una misura, dunque di una possibile informazione, che cancella o ripristina la sovrapposizione di stati del sistema, ma non è affatto necessario che questa misura venga eseguita.

Il profondo concetto di informazione qui esposto sembra giocare un ruolo di primo piano nel processo di riduzione della funzione d'onda.

Bibliografia

- [1] Albert D. Z., *Bohm's Alternative to Quantum Mechanics*, Scientific American, 58-67, 1994.
- [2] Bohm D. J., *A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of "Hidden" Variables. I*, Phys. Rev. 85, 166-179, 1952.
- [3] Bohr N., *Discussions with Einstein on Epistemological Problems in Atomic Physics* in Schilpp P. A., *Albert Einstein: Philosopher-Scientist*, 199-241, Cambridge University Press, 1949.
- [4] Heisenberg W., *Fisica e filosofia*, Il saggiatore, Milano, 1994.
- [5] Jammer M., *The philosophy of quantum mechanics*, John Wiley and Sons, 1974.
- [6] Ma X.-S., Kofler J., Qarrya A., Tetika N., Scheidla T., Ursina R., Ramelowa S., Herbsta T., Ratschbacher L., Fedrizzia A., Jenneweina T., Zeilinger A., *Quantum erasure with causally disconnected choice*, PNAS, 110, 4, 1221-1226, 2013.
- [7] Ma X.-S., Kofler J., Zeilinger A., *Delayed-choice gedanken experiments and their realizations*, Rev. Mod. Phys. 88, 015005 (2016).
- [8] Nielsen M. A., Chuang I. L., *Quantum Computation and Quantum Information*, II ed., Cambridge: Cambridge University Press, 2010.
- [9] Penrose R., *La strada che porta alla realtà*, Rizzoli, 2005.
- [10] Pittnam T. B., Shih Y. H., Strekalov D. V., Sergienko A. V., *Optical imaging by means of two-photons quantum entanglement*, Phys. Rev. A 52, R3429-R3432, 1995.
- [11] Vallone G., Dequal D., Tomasin M., Vedovato F., Schiavon M., Luceri V., Bianco G., Villoresi P., *Interference at the single photon level along satellite-ground channels*, Phys. Rev. Lett. 116, 253601, 2016.
- [12] Vedovato F., Agnesi C., Schiavon M., Dequal D., Calderaro L., Tomasin M., Marangon D. G., Stanco A., Luceri V., Bianco G., Vallone G., Villoresi P., *Extending Wheeler's delayed-choice experiment to space*, Sci. Adv. 2017;3:e1701180, 2017.
- [13] Wang L. J., Zou X. Y., Mandel L., *Induced Coherence and Indistinguishability in Optical Interference*, Phys. Rev. A 44, 4614-4622, 1991.
- [14] Wheeler J. A., *The 'Past' and the 'delayed-choice' Double-Slit Experiment*, in Marlow A. R., *Mathematical Foundations of Quantum Theory*, Academic Press, 9-48, 1978.
- [15] Wheeler J. A., *Law without law*, in Wheeler J. A., Zurek W. H., *Quantum Theory and Measurement*, Princeton University Press, 182-213, 1984.