UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI SCIENZE ECONOMICHE ED AZIENDALI "M.FANNO"

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

CORSO DI LAUREA IN ECONOMIA

PROVA FINALE

"APPLICAZIONI ECONOMICHE DEL CONTROLLO OTTIMO LINEARE-QUADRATICO"

RELATORE:

CH.MO PROF. LUCA GROSSET

LAUREANDO: GIACOMO REGHELIN

MATRICOLA N. 1113120

ANNO ACCADEMICO 2017 – 2018

APPLICAZIONI ECONOMICHE DEL CONTROLLO OTTIMO LINEARE-QUADRATICO

GIACOMO REGHELIN*

Università degli Studi di Padova
Scuola di Economia e Scienze Politiche
Dipartimento di Matematica Tullio Levi-Civita

Sommario

Nella seguente prova finale abbiamo studiato il problema di controllo ottimo lineare-quadratico e lo abbiamo risolto utilizzando tre diverse tecniche analitiche: il principio del massimo di Pontryagin, la Programmazione Dinamica, e il completamento dei quadrati. Il problema viene poi letto in chiave microeconomica attraverso il modello dello sticky price che viene risolto applicando il principio del massimo di Potryagin.

SPESSO in ambito economico o gestionale nasce l'esigenza di considerare dei modelli che descrivano l'evoluzione nel tempo di un insieme di variabili, rappresentando le leggi che legano lo stato presente del sistema a quelli passati. I sistemi che presentano tali caratteristiche vengono chiamati dinamici, così come i modelli che usiamo per rappresentarli. Ci si trova quindi a dover prendere delle decisioni che influiscono sull'evoluzione di un sistema dinamico, allo scopo di ottenere il miglior risultato desiderabile: questo problema prende il nome di problema di controllo ottimo. Un particolare tipo di problema di controllo ottimo è quello in cui il decisore si trova nella situazione di compiere scelte rappresentate da una funzione quadratica: il cosidetto problema di controllo ottimo lineare-quadratico (Buratto et al. 2017) (Engwerda 2005). Tale modello matematico trova molte applicazioni nel mondo della microeconomia, dove è probabile che un'impresa che voglia massimizzare i propri profitti debba fronteggiare un costo di produzione espresso da una fuzione quadratica. In particolare, questo tipo di funzione porta ad avere un costo marginale crescente e proporzionale alla quantità prodotta, quindi, la variazione del costo totale conseguente alla produzione di un'unità aggiuntiva aumenta al crescere del volume di output (Katz et al. 2015). Un modello che presenta tali caratteristiche è quello dello sticky price (si veda Long 2010) in cui il controllo ottimo è il risultato di un problema lineare-quadratico.

Nella prima sezione verrà formulato il problema di controllo ottimo in generale e introdotto il caso più specifico del lineare-quadratico. La seconda sezione tratterà del principio del massimo di Pontryagin quale tecnica risolutiva del problema di controllo ottimo. Partendo dal principio di Bellman, nella terza sezione verrà presentata la tecnica della programmazione dinamica, con la quale si risolverà il problema lineare-quadratico. Nella quarta sezione invece il problema verrà risolto con il metodo del completamento dei quadrati. Infine, la quinta sezione tratterà del modello dello sticky price, al quale verrà applicata una delle tecniche risolutive presentate nelle sezioni precedenti.

*Relatore: Dott. Luca Grosset

I. Formulazione problema di controllo ottimo

Per la formulazione del problema di controllo ottimo si fa riferimento ai testi di Buratto et al. (2017) e Pontryagin et al. (1962). Il *sistema dinamico* preso in considerazione viene studiato nell'intervallo di tempo [0,T], dove il tempo è continuo e T è il tempo finale, $T > 0$. Lo *stato* del sistema all'istante $t \in [0, T]$ è rappresentato dalla *funzione di stato* $x(t) \in \mathbb{R}$.
Supponiamo che $x : [0, T] \to \mathbb{R}$ sia una funzione continua (e differenziabile a tratti in t), diciamo che $x(0)$ è lo *stato iniziale* ed è assegnato, nel senso che si richiede che assuma un valore particolare, indicato con x^0.
L'evoluzione dello stato nel tempo è influenzata da *decisioni* in ogni istante, rappresentate dalla *funzione di controllo* $u(t) \in \mathbb{R}$, con $u(t)$ funzione continua a tratti. Una funzione $u : [0, T] \to \mathbb{R}$ di questo tipo è un *controllo ammissibile*: indichiamo con U l'insieme dei controlli ammissibili, chiamato anche regione di controllo. Nella definizione matematica del problema la scelta dell'insieme U è considerata arbitraria, ma nei problemi tecnici, dove il controllo può essere soggetto a vincoli, il caso in cui U sia un insieme chiuso è una condizione importante che denota che anche gli estremi sono ammissibili e possono essere controllo ottimo del problema. Nella pratica, il fatto che la regione di controllo sia limitata impedisce allo stato del sistema di assumere valori eccessivamente grandi: un esempio è la quantità di combustibile fornita al motore (si veda Pontryagin et al. 1962, p.3).
L'evoluzione dello stato nell'intervallo $[0, T]$ è determinata dal sistema delle *equazioni del moto:*

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t).$$

Una funzione di stato è detta ammissibile se è determinata dal problema di Cauchy costruito dall'equazione del moto e dalla condizione dello stato iniziale:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \qquad \text{e} \qquad x(0) = x^0.$$

Chiamiamo *soluzione ammissibile* una coppia $(u(t), x(t))$ in cui $u(t)$ sia funzione di controllo ammissibile e $x(t)$ sia la funzione di stato associata al controllo $u(t)$ e anch'essa ammissibile.
Definiamo *funzionale obiettivo* l'applicazione

$$J : U \to \mathbb{R}$$
$$u \to J(u) = \int_0^T f_0(x(t), u(t), t)dt.$$

Se il problema è minimizzare il fuzionale obiettivo, chiamiamo *soluzione ottima* una soluzione ammissibile $(u(t), x(t))$ che, al tempo T, comporta il più basso valore del funzionale obiettivo possibile. Al contrario, come osserva Engwerda (2005), se lo stato del sistema rappresenta un insieme di variabili economiche alle quali sono collegati i ricavi, che aumentano al crescere di queste variabili, e $u(t)$ rappresenta le azioni di investimento che portano ad un incremento di tali variabili, lo scopo è trovare il controllo che massimizzi il funzionale obiettivo. In altre parole nello studio di un problema di controllo ottimo siamo interessati alla ricerca di quei controlli, tra tutti quelli ammissibili e che determinano funzioni di stato ammissibili, che portino il sistema da uno stato iniziale a uno finale in modo che $J(u)$ assuma il volore minimo, o massimo in base al problema trattato.

I.1 Problema di controllo ottimo lineare-quadratico

Questa prova finale verterà principalmente sull'analisi di un particolare tipo di problema di controllo ottimo, il cosiddetto *problema lineare-quadratico.*
Un problema di controllo ottimo lineare-quadratico si riferisce ad un sistema lineare e ad una funzione (per esempio di costo) quadratica. In linea con una visione economica del problema, si

ritiene opportuno studiare il modello nel tempo continuo e, in particolare, nell'intervallo $[0, T]$. Come riportato da Van Den Broek et al. (2003) il problema consiste nel trovare la funzione di controllo $u(t)$ tale da minimizzare il funzionale obiettivo, dove la variabile di stato $x(t)$ è la soluzione di un'equzione differenziale (ovvero l'equazione del moto). Tuttavia nei suoi studi il problema lineare-quadratico viene affrontato in forma matriciale mentre noi ci concentreremo in un modello in cui compaiono funzioni in forma unidimensionale.
In particolare chiamiamo problema di controllo lineare-quadratico il seguente:

$$\begin{array}{ll} \text{massimizza} & \frac{1}{2}\int_0^T [\alpha x^2(t) - \beta u^2(t) + \omega x(t)u(t)]\, dt \\ \text{soggetto a} & \dot{x}(t) = \delta x(t) + \gamma u(t), \\ & u(t) \in \mathbb{R}, \\ & x(0) = x^0. \end{array}$$

La seguente prova finale presenterà tre metodi diversi per affrontare tale problema, e questi sono:

- il principio del Massimo di Pontryagin;
- la Programmazione Dinamica;
- il metodo del Completamento dei Quadrati.

II. Principio del massimo

Di seguito vengono presentate le condizioni necessarie per l'ottimalità di una soluzione fornite dal Principio del Massimo di Pontryagin, (Lev Pontryagin, 1908 - 1988) per il problema di controllo ottimo nella forma di Lagrange. In particolare, verrà prima enunciato il principio in maniera generale (si veda Buratto et al. 2017, p.15-17), per poi applicarlo al modello lineare-quadratico.

II.1 Principio del Massimo. Formulazione generale

Sia dato il problema di controllo nella forma di Lagrange e relativo all'intervallo di tempo $[0; T]$:

$$\begin{array}{ll} \text{massimizza} & \int_0^T f_0(x(t), u(t), t)dt, \\ \text{soggetto a} & \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \\ & u(t) \in \mathbb{R} \\ & x(0) = x^0. \end{array}$$

Per formulare le condizioni necessarie per l'ottimalità si introduce la *variabile aggiunta* $\lambda \in \mathbb{R}$, e si definisce la funzione *hamiltoniana*:

$$H(x, u, \lambda, t) = f_0(x, u, t) + \lambda f(x, u, t).$$

La funzione hamiltoniana è una combinazione lineare delle funzioni che caratterizzano il funzionale obiettivo e di quelle che entrano nella definizione delle equazioni del moto. Per ipotesi tali funzioni sono continue e dotate di derivate parziali prime continue in x, proprietà che vengono eriditate dalla funzione hamiltoniana.
Teorema del massimo. *Sia $u^*(t)$ un controllo ottimo continuo a tratti, definito sull'intervallo $[0, T]$, a cui sia associata la funzione di stato $x^*(t)$. Allora esiste una funzione continua di classe C^1 a tratti $\lambda(t)$ $(\lambda : [0, T] \to \mathbb{R})$ tale che, per ogni $t \in [0, T]$, valgano le seguenti condizioni:*
i) $u^*(t)$ massimizza $H(x^*(t), u^*(t), \lambda(t), t) \qquad$ per $u \in \mathbb{R}$;
ii) tranne che per i tempi t per cui $u^*(t)$ è discontinua, $\lambda(t)$ è differenziabile e

$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H(x^*(t),u^*(t),\lambda(t),t)}{\partial x}$;

iii) $\lambda(T) = 0$.

Ci riferiamo alla condizione (i) parlando di *condizione di massimo*, alla condizione (ii) parlado di *equazione aggiunta* e alla condizione (iii) come *equazione di trasversalità*.

II.2 Principio del massimo e il problema lineare-quadratico

Applicando il teorema appena enunciato al problema lineare-quadratico si riesce a determinare il controllo ottimo tale da massimizzare il funzionale obiettivo.
La funzione hamiltoniana è

$$H(x, u, \lambda, t) = \tfrac{1}{2}(\alpha x^2 - \beta u^2 + \omega x u) + \lambda(\delta x + \gamma u).$$

Osservando la condizione di massimo (i) ne deriva:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -\beta u(t) + \frac{\omega}{2}x(t) + \lambda(t)\gamma$$
e
$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = -\beta < 0$$

Per il teorema di Fermat (Pierre de Fermat 1601-1665), se una funzione è derivabile e ha un punto di massimo o minimo relativo, la sua derivata in quel punto è nulla. Inoltre sappiamo che la derivata seconda è negativa, quindi la funzione è concava e il punto stazionario in questione è punto di massimo. Quindi il controllo ottimo u* è quello che massimizza il funzionale obiettivo ed equivale a:

$$u^*(t) = \tfrac{\gamma}{\beta}\lambda(t) + \tfrac{\omega}{2\beta}x(t),$$

purchè $\gamma\lambda(t)/\beta + \omega x(t)/2\beta \in \mathbb{R}$.
Per la condizione (ii), nei punti t in cui $u(t)$ è continua, la funzione λ è differenziabile e la sua derivata è:

$$\dot{\lambda}(t) = -(\alpha x(t) + \tfrac{\omega}{2}u(t) + \delta\lambda(t)),$$

che, sostituendo la funzione di controllo, diventa:

$$\dot{\lambda}(t) = -\alpha x(t) - \tfrac{\omega\gamma}{2\beta}\lambda(t) - \tfrac{\omega^2}{4\beta}x(t) - \delta\lambda(t).$$

Sostituendo la funzione di controllo nell'equazione del moto, e, richiamando la condizione iniziale, si ottiene il seguente *two point boundary value problem*:

- $\dot{\lambda}(t) = -\alpha x(t) - \frac{\omega\gamma}{2\beta}\lambda(t) - \frac{\omega^2}{4\beta}x(t) - \delta\lambda(t)$,
  $\lambda(T) = 0$;

- $\dot{x}(t) = \delta x(t) + \frac{\gamma^2}{\beta}\lambda(t) + \frac{\gamma\omega}{2\beta}x(t)$,
  $x(0) = x^0$.

A questo punto si cerca una soluzione $(x(t), \lambda(t))$ tale che $\lambda(t) = \psi(t)x(t)$.
Ora la funzione $\psi(t)$ è differenziabile e $\dot{\lambda}(t) = \dot{\psi}(t)x(t) + \psi(t)\dot{x}(t)$. Sostituendo $\dot{\lambda}(t)$ e $\dot{x}(t)$ con le equazioni del two point boundary value problem otteniamo la seguente equazione:

$$-\alpha x(t) - \tfrac{\omega\gamma}{2\beta}\lambda(t) - \tfrac{\omega^2}{4\beta}x(t) - \delta\lambda(t) = \dot{\psi}(t)x(t) + \psi(t)(\delta x(t) + \tfrac{\gamma^2}{\beta}\lambda(t) + \tfrac{\gamma\omega}{2\beta}x(t)).$$

Dividendo ambo i membri dell'equazione per $x(t)$ e ricordando che $\lambda(t) = \psi(t)x(t)$, si ottiene la seguente equazione:

$$\dot{\psi}(t) + \frac{\gamma^2}{\beta}\psi^2(t) + \psi(t)(2\delta + \frac{\gamma\omega}{\beta}) + \alpha + \frac{\omega^2}{4\beta} = 0. \tag{1}$$

Si tratta di un'equazione di Riccati con condizione al tempo finale $T : \psi(T) = 0$; risolvendo quest'ultimo problema di Cauchy si ha una soluzione alle condizioni imposte dal principio di Pontryagin e quindi il seguente controllo ottimo:

$$u(t) = \frac{\gamma}{\beta}\psi(t)x(t) + \frac{\omega}{2\beta}x(t). \tag{2}$$

I problemi di controllo lineari-quadratici portano a studiare un problema di Cauchy contenente l'equazione di Riccati. Questo tipo di funzione deriva dal matematico italiano Jacopo Francesco Riccati (1676-1754), che nel 1724 studia un'equazione differenziale ordinaria, quadratica nella funzione incognita (Reid 1972). L'equazione di Riccati appare nelle sua forma generale come segue:

$$\dot{\psi}(t) = a\psi^2(t) + b\psi(t) + c.$$

In particolare nel caso trattato sopra (1) $a = -\frac{\gamma^2}{\beta}$, $b = -\left(2\delta + \frac{\gamma\omega}{\beta}\right)$ e $c = -\left(\alpha + \frac{\omega^2}{4\beta}\right)$. Conoscendo una soluzione particolare dell'equazione di Riccati, $\psi^*(t)$, è possibile ricondurne lo studio a quello di un'equazione differenziale ordinaria lineare, trasformando prima il problema di Cauchy in uno in cui l'equazione con incognita al quadrato appartiene alla famiglia di ODE di Bernoulli.
Sia dato il problema di Cauchy:

$$\dot{\psi}(t) = a\psi^2(t) + b\psi(t) + c, \qquad\qquad \psi(T) = 0,$$

e sia $\psi^*(t)$ una soluzione particolare dell'equazione di Riccati. Allora la soluzione al problema si rappresenta come:

$$\psi(t) = \psi^*(t) + z(t),$$

dove $z(t)$ è la soluzione del nuovo problema di Cauchy in cui l'equazione differenziale è del tipo di Bernoulli:

$$\dot{z}(t) = az^2(t) + (2a\psi^*(t) + b), \qquad\qquad z(T) = 0 - \psi^*(T).$$

Ora, attraverso una sostituzione è possibile rimuovere la presenza del termine quadrarico nella funzione incognita e ottenere un'equazione differenziale ordinaria. In particolare si introduce $w(t) = 1/z(t)$, con $z(t)$ mai nulla. Così facendo è possibile risolvere il nuovo problema di Cauchy in cui non compare il termine quadratico nella funzione incognita (si veda Buratto et al. 2017, p. 372-374).

III. Programmazione Dinamica

Vi è un secondo approccio alla soluzione del problema, che va sotto il nome di Programmazione Dinamica, tecnica sviluppata da Bellman e Isaacs alla RAND Corporation alla fine del 1940 (Engwerda 2005, p. 154). Il modello si sviluppa a partire dal *principio di ottimalità* formulato da Bellman (Richard Belmann, 1920-1984) e si è poi sviluppato nel tempo dando un contributo fondamentale ad una vasta gamma di applicazioni nello studio dei problemi di controllo ottimo. Il principio formulato da Bellman è riportato di seguito: "*An optimal policy has the property that whatever the initial state and initial decision are, the remaining decisions must constitute an optimal policy with regard to the state resulting from the first decision*" (si veda Sniedovich 1978, p. 586).
Come per il metodo precedente, anche la programmazione dinamica verrà in un primo momento presentata in termini generali e poi applicata al problema di controllo ottimo lineare-quadratico.

III.1 Programmazione Dinamica. Formulazione generale

L'approccio della Programmazione Dinamica riconduce il problema a tutta una famiglia di problemi di controllo ottimo dove l'intervallo di tempo considerato è $[t, T]$ con $t \in [0, T]$ e il valore iniziale per la variabile di stato pari a x. Riuscendo a risolvere questo problema più generale per ogni t e x si riesce anche a risolvere il caso particolare in cui tempo e stato iniziale sono rispettivamente 0 e x^0. Ora si supponga di saper risolvere tutti i problemi appartenenti a questa famiglia il cui valore ottimo è indicato con $V(t, x)$ e prende il nome di *funzione valore*:

$$V(t,x) = \max \left[\int_t^T f_0(x(t), u(t), t)dt\right].$$

Analizzando le proprietà della funzione valore si arriva a dimostrare (Buratto et al. 2017, p. 237) che essa deve soddisfare a un'equazione differenziale alle derivate parziali.
Pricipio di Ottimalità. *Supponiamo che per ogni $t \in [0, T]$ e per ogni $x \in \mathbb{R}$ sia possibile definire la funzione valore $V(t, x)$ e che questa funzione sia differenziabile con continuità in tutto il suo dominio, allora essa deve soddisfare nell'insieme $[0, T) \times \mathbb{R}$ alla seguente equazione differenziale alle derivate parziali*

$$-\frac{\partial V(t,x)}{\partial t} = \max \left[\frac{\partial V(t,x)}{\partial x} f(x,u,t) + f_0(x,u,t)\right],$$

dove $f(x, u, t)$ è la funzione all'interno dell'integrale del funzionale obiettivo e $f_0(x, u, t)$ è la funzione dell'equzione di stato.
Tale equazione alle derivate parziali prende il nome di equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman.
In alcune situazioni pratiche il controllo ottimo $u(t)$ introdotto nel principio del massimo di Pontryagin, che ha effetto sulla funzione di stato e quindi sul valore del funzionale obiettivo, appare restrittivo e viene adottato un nuovo modo di concepire una strategia di intervento sull'evoluzione del sistema. A tal proposito si introduce una funzione che tenga conto di informazioni che si rendono disponibili anche dopo l'istante iniziale: il controllo *feedback*. L'idea è quella di rilevare lo stato $x(t)$ in qualunque istante t e scegliere la strategia di controllo $u(t)$ istantanea come funzione dello stato allo stesso tempo in modo tale che: $u(t) = \varphi(t, x(t))$, dove φ non dipende né dal tempo né dallo stato iniziale.
Teorema di verifica: *"supponiamo che $V(t, x)$ sia una funzione differenziabile con continuità che soddisfa all'equazione delle derivate parziali (HJB). Supponiamo inoltre che esista una funzione di controllo feedback continua $\varphi(0, T) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che*

$$\frac{\partial V(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial V(t,x)}{\partial x} f(x, \varphi(t,x), t) + f_0(x, \varphi(t,x), t) = 0,$$

allora una strategia ottima per il problema di controllo è $u^*(t) = \varphi(t, x(t))$" (Buratto et al. 2017, p. 243).

III.2 Programmazione Dinamica e problema lineare-quaratico

In linea con il principio di Bellman ci serviamo di seguito della tecnica della programmazione dinamica per risolvere il problema di controllo ottimo lineare-quadratico. In particolare abbiamo che il valore ottimo del problema è:

$$V(t,x) = \max \left[\int_t^T \frac{1}{2}(\alpha x^2(t) - \beta u^2(t) + \omega x(t)u(t))dt\right].$$

Applicando il principio di ottimalità si ottiene la seguente equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman:

$$\frac{\partial V(t,x)}{\partial t} + \max \left[\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}(\delta x + \gamma u) + \frac{\alpha}{2}x^2 - \frac{\beta}{2}u^2 + \frac{\omega}{2}xu\right] = 0.$$

La funzione da massimizzare ha derivata prima rispetto a u : $\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}\gamma - \beta u + \frac{\omega}{2}x$;
e derivata seconda: $-\beta < 0$.
Se $\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}\gamma > 0$ possiamo costruire la funzione di feedback:

$$\varphi(t,x) = \frac{\gamma}{\beta}\frac{\partial V(t,x)}{\partial x} + \frac{\omega}{2\beta}x,$$

e unico punto di massimo per $u = \varphi$ purchè $\varphi \in \mathbb{R}$. Sostituendo la funzione feedback nell'equazione HJB essa diventa:

$$\frac{\partial V(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial V(t,x)}{\partial x}\left(\delta x + \frac{\gamma^2}{\beta}\frac{\partial V(t,x)}{\partial x} + \frac{\gamma\omega}{2\beta}x\right) + \frac{\alpha}{2}x^2 - \frac{\beta}{2}\left(\frac{\gamma}{\beta}\frac{\partial V(t,x)}{\partial x} + \frac{\omega}{2\beta}x\right)^2 + \frac{\gamma\omega}{2\beta}\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}x + \frac{\omega^2}{4\beta}x^2 = 0$$

Cercando una soluzione del tipo $V(t,x) = \frac{\psi(t)}{2}x^2$, per qualche funzione differenziabile $\psi(t)$, si ha:

$$\frac{\partial V(t,x)}{\partial x} = \psi(t)x, \qquad \frac{\partial V(t,x)}{\partial t} = \frac{\dot{\psi}(t)}{2}x^2.$$

Sostituendo i risutati appena trovati, l'equazione di HJB diventa:

$$\frac{\dot{\psi}(t)}{2}x^2 + \delta\psi(t)x^2 + \frac{\gamma^2}{\beta}\psi^2(t)x^2 + \frac{\gamma\omega}{2\beta}\psi(t)x^2 + \frac{\alpha}{2}x^2 - \frac{\beta}{2}\left(\frac{\gamma^2}{\beta^2}\psi^2(t)x^2 + \frac{\omega^2}{4\beta}x^2 + \frac{\gamma\omega}{\beta^2}\psi(t)x^2\right) + \frac{\gamma\omega}{2\beta}\psi(t)x^2 + \frac{\omega^2}{4\beta}x^2 = 0$$

Moltiplicando entrambi i membri dell'equazione HJB per 2 e dividendoli per x^2 ci si riconduce all'equazione di Riccati

$$\dot{\psi}(t) + \frac{\gamma^2}{\beta}\psi^2(t) + \psi(t)\left(2\delta + \frac{\gamma\omega}{\beta}\right) + \alpha + \frac{\omega^2}{4\beta} = 0;$$

si tratta della stessa equazione differenziale di Riccati già incontrata con il metodo precedente (1).
Se $\psi(t)$ è una soluzione di tale problema, allora il corrispondente controllo feedback è dato da:

$$\varphi(t;x) = \frac{\gamma}{\beta}\psi(t)x + \frac{\omega}{2\beta}x$$

che si tratta dello stesso risultato del paragrafo precedente (2).

Il metodo appena trattato trova molte applicazioni in campo economico, a tal proposito viene riportato di seguito un esempio di problema di controllo L-Q proposto da Engwerda (2005, p. 160-162):

$$\begin{array}{ll} \text{minimizzare} & \int_0^T x^2(t) + u^2(t)dt, \\ \text{soggetto a} & \dot{x}(t) = ax(t) + bu(t), \\ & x(0) = 1. \end{array}$$

In questo problema la variabile di stato $x(t)$ viene interpretata come deviazione di una certa quantità dal valore desiderato. Se nessuna decisione viene presa a riguardo ($u(t) = 0$) la variabile $x(t)$ crescerà al tasso a, con $a > 0$. La variabile $x(t)$ può essere portata vicino allo zero scegliendo un controllo $u(t)$ non nullo, il cui utilizzo implica l'esistenza di un qualche costo. L'integrale esprime il bilancio tra l'avere una deviazione $x(t)$ dovuta ad un controllo nullo, e il costo di avere un controllo che minimizzi la deviazione dall'output desiderato. Essendo la condizione iniziale $x(0) = 1$, la funzione di controllo ottimo $u(t)$ risulta probabilmente negativa.
L'equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman per la funzione valore $V(t,x)$ è:

$$-\frac{\partial V}{\partial t}(t,x) = min\left[\frac{\partial V}{\partial x}(t,x)(ax+bu) + x^2 + u^2\right]$$

con condizione finale $V(T, x) = 0$.
Nel punto in cui la derivata della funzione da minimizzare si annulla si ha:

$$\varphi(t, x) = -\tfrac{1}{2} b \tfrac{\partial V}{\partial x}(t, x).$$

Si cerca ora una soluzione nella forma $V(t, x) = \psi(t)x^2$; si ha quindi:
$\frac{\partial V}{\partial t}(t, x) = \dot{\psi}(t)x^2$ e $\frac{\partial V}{\partial x}(t, x) = 2\psi(t)x$. Sostituendo i risultati appena ottenuti e il valore di u^* nell'equazione HJB si ottiene:

$$-\dot{\psi}(t)x^2 = 2a\psi(t)x^2 - 2b^2\psi^2(t)x^2 + x^2 + b^2\psi^2(t)x^2, \qquad \psi(T)x^2 = 0.$$

Una funzione nella forma cercata soddisfa il problema se $\psi(t)$ soddisfa la seguente equazione di Riccati

$$\dot{\psi}(t) + 2a\psi(t) - b^2\psi^2(t) + 1 = 0 \ ,$$

con condizione finale $\psi(T) = 0$.
In caso affermativo la strategia di controllo ottimo come funzione del tempo e dello stato corrente è

$$u^*(t, x) = -b\psi(t)x.$$

Sostituendo u^* nell'equazione di moto con condizione iniziale si ottiene infine lo stato ottimo x^*.

III.3 Completamento dei quadrati

Vi è poi un terzo metodo che si può applicare ai problemi lineari-quadratici, noto come completamento dei quadrati. In particolare, come riportato da Wang et al. (2011) nei loro studi, questa tecnica consiste nel completare il funzionale obiettivo in modo da ricondursi ad una funzione quadratica e, così facendo, ottenere immediatamente il controllo ottimo che massimizza il funzionale obiettivo. In altre parole questo significa cercare di ricondurre il funzionale obiettivo ad una funzione che sia il quadrato di un polinomio di primo grado.
Di seguito viene applicato il principio del completamento dei quadrati al problema di controllo ottimo lineare-quadratico.
Sia φ una qualsiasi funzione di classe C^1 per cui valga la condizione al tempo finale $\varphi(T) = 0$, e $x(t)$ che soddisfi l'equazione di moto, si ha che:

$$\tfrac{d}{dt}\left[\varphi \tfrac{x^2(t)}{2}\right] = \dot{\varphi}\tfrac{x^2(t)}{2} + \varphi(t)x(t)\dot{x}(t)$$

e, sostituendo con l'equazione di moto si ottiene:

$$\tfrac{d}{dt}\left[\varphi \tfrac{x^2(t)}{2}\right] = \left(\tfrac{1}{2}\dot{\varphi}(t) + \delta\varphi(t)\right) x^2(t) + \gamma\varphi(t)x(t)u(t).$$

Integrando su [0;T] si ha:

$$\varphi(T)\tfrac{x^2(T)}{2} - \varphi(0)\tfrac{x^2(0)}{2} = \int_0^T \left(\tfrac{1}{2}\dot{\varphi}(t) + \delta\varphi(t)\right) x^2(t) + \gamma\varphi(t)x(t)u(t)dt.$$

Sommando il funzionale obbiettivo J ad entrambi i membri dell'equazione si ottiene:

$$\int_0^T \left[\tfrac{\alpha}{2}x^2(t) - \tfrac{\beta}{2}u^2(t) + \tfrac{\omega}{2}x(t)u(t)\right] dt - \varphi(0)\tfrac{x^2(0)}{2} =$$
$$\int_0^T \left[\tfrac{\alpha}{2}x^2(t) - \tfrac{\beta}{2}u^2(t) + \tfrac{\omega}{2}x(t)u(t) + \left(\tfrac{1}{2}\dot{\varphi}(t) + \delta\varphi(t)\right) x^2(t) + \gamma\varphi(t)x(t)u(t)\right] dt - \varphi(T)\tfrac{x^2(T)}{2}.$$

Si noti che massimizzando il secondo membro dell'equazione si ottiene la soluzione del problema di controllo ottimo lineare-quadratico. Ci concentriamo perciò su quest'ultimo che, richiamando la condizione al tempo finale $\varphi(T) = 0$, diventa:

$$\frac{1}{2}\int_0^T \left[x^2(t)(\dot{\varphi}(t)+2\delta\varphi(t)+\alpha)-\beta u^2(t)+x(t)u(t)(\omega+2\gamma\varphi(t))\right] dt.$$

Per completare il quadrato all'interno della funzione integrale bisogna che valga la seguente equazione di Riccati

$$\dot{\varphi}(t)+2\delta\varphi(t)+\alpha=-\frac{\omega\gamma}{\beta}\varphi(t)-\frac{\gamma^2}{\beta}\varphi^2(t)-\frac{\omega^2}{4\beta}.$$

Questa equazione è la stessa trattata in precedenza negli altri due metodi (1) e, nel caso in cui sia verificata, la seconda parte della precedente equazione diventa:

$$\frac{1}{2}\int_0^T \left[-x^2(t)\left(\frac{4\gamma^2\varphi^2(t)+4\omega\gamma\varphi(t)+\omega^2}{4\beta}\right)-\beta u^2(t)+x(t)u(t)(2\gamma\varphi(t)+\omega)\right] dt.$$

L'argomento dell'integrale è il quadrato di un binomio ed effettuando il raccoglimento si può scrivere:

$$-\frac{1}{2}\int_0^T \left(\frac{(2\gamma\varphi(t)+\omega)}{2\sqrt{\beta}}x(t)-\sqrt{\beta}u(t)\right)^2 dt.$$

Quindi otteniamo il valore massimo ponendo

$$u(t)=\frac{\gamma}{\beta}\varphi(t)x(t)+\frac{\omega}{2\beta}x(t).$$

Si tratta dello stesso risultato ottenuto con i due metodi precedenti (2).

IV. Sticky Price Model

Spesso gli economisti nelle analisi di oligopolio si sono concentrati su modelli statici. Una ragione per tale scelta nasce dal fatto che tali modelli sono più semplici e immediati, e vengono perciò utilizzati come semplicistica approssimazione delle interazioni che vengono a crearsi tra i giocatori di un gioco dinamico. Spesso però, come evidenzia Long (2010), tale interpretazione risulta ottimistica e non in grado di spiegare in modo soddisfacente la realtà.
Katz et al. (2015) definiscono l'oligopolio come un mercato in cui operano pochi venditori caratterizzati da interdipendenza reciproca, ovvero quando le scelte di una qualunque impresa operante nell'industria, riguardo al prezzo e al volume di produzione, influiscono sui profitti di tutte le altre. Al contrario, il lato della domanda è caratterizzato da numerosi acquirenti, nessuno dei quali acquista una quantità di prodotto abbastanza rilevante da poter influire sul prezzo. Un semplice caso di oligopolio dinamico è lo sticky price oligopoly. Fershtman and Kamien (si veda Long 2010, p. 137) considerano un duopolio (forma di oligopolio caratterizzato da due soli giocatori) che produce un unico bene omogeneo. Sia $q_i(t)$ l'output dell'impresa i al tempo t; la quantità totale offerta nel mercato è quindi $S(t)=q_1(t)+q_2(t)$. Dato il prezzo $p(t)$ la domanda del mercato è definita $D(t)=a-p(t)$. Il prezzo è per l'appunto "sticky", in quanto non si aggiusta istantaneamente per eguagliare la domanda con l'offerta. In particolare gli aggiustamenti del prezzo avvengono lentamente e in modo proporzionale all'eccesso di domanda sull'offerta:

$$\dot{p}(t)=\theta[D(t)-S(t)]=\theta(a-p(t)-q_1(t)-q_2(t));$$

con il prezo all'istante iniziale dato $p(0)=p^0$. Ogni impresa prende il prezzo come dato e cerca di massimizzare il profitto. Il costo di produzione di ciascuna impresa è $C_i(q_i)=\frac{1}{2}kq_i^2$. Sotto tali ipotesi il modello dello sticky price si presenta nella forma di un equilibrio di Cournot, in cui la strategia di ciascuna impresa consiste nella scelta del proprio volume di produzione.

In particolare in questa prova finale consideriamo il modello in un intervallo di tempo $[0;T]$ finito, sufficientemente breve da rendere trascurabile il fattore di attualizzazione. Come detto in precedenza

le imprese operanti in un oligopolio sono interconnesse tra loro; in questo modello analizziamo il comportameto di un giocatore, $i = 1$, ipotizzando che nell'intervallo di tempo considerato il secondo giocatore non sia in grado di modificare il volume di output. Sotto tale condizione la quantità prodotta dall'altra impresa q_2 è per il giocatore 1 una variabile esogena e fissa $= \bar{q}_2$.
L'impresa che prendiamo in analisi opera nel mercato con l'obiettivo di massimizzare i propri profitti. La situazione appena descritta può essere trattata come un problema di controllo ottimo lineare-quadratico: di seguito verrà presentata la risoluzione usando il principio del massimo di Pontryagin.

$$\begin{gathered}\text{Massimizza } \int_0^T \left(p(t)q(t) - \tfrac{1}{2}kq^2(t)\right) dt \\ \text{Soggetto a } \dot{p}(t) = \theta(a - p(t) - q_1(t) - q_2(t)).\end{gathered}$$

In questo problema $p(t)$ è la variabile di stato mentre $q(t)$ è la funzione di controllo. Possiamo scrivere la funzione hamiltoniana:

$$H(p, q, \lambda, t) = pq - \tfrac{1}{2}kq^2 + \lambda\theta(a - p - q - \bar{q}_2).$$

Per la condizione di massimo si ha che $q^*(t) = \frac{1}{k}p(t) - \frac{\theta}{k}\lambda(t)$, mentre l'equazione aggiunta è $\dot{\lambda}(t) = \theta\lambda(t) - q(t)$. Sostituendo $q^*(t)$ nell'equazione aggiunta e nell'equazione di moto si ottiene:

$$\begin{gathered}\dot{\lambda}(t) = \theta\lambda(t)\left(1 + \tfrac{1}{k}\right) - \tfrac{1}{k}p(t), \text{ e} \\ \dot{p}(t) = \theta\left(a - p(t)\left(1 + \tfrac{1}{k}\right) + \tfrac{\theta}{k}\lambda(t) - \bar{q}_2\right).\end{gathered}$$

A differenza del modello trattato nelle sezioni precedenti qui si ha un'equazione del moto differenziale non omogenea, quindi la soluzione che cerchiamo deve essere adattata al particolare problema e risulta essere del tipo $\lambda(t) = \psi(t)p(t) + \mu(t)$; quindi si può scrivere la seguente equazione:

$$\dot{\lambda}(t) = \dot{\psi}(t)p(t) + \psi(t)\dot{p}(t) + \dot{\mu}(t).$$

Per comodità poniamo $A = a - \bar{q}_2$, e $C = 1 + \frac{1}{k}$. Sostituendo i risultati sopra ottenuti si ha

$$\begin{gathered}\theta C\psi(t)p(t) + \theta C\mu(t) - \tfrac{1}{k}p(t) = \\ \dot{\psi}(t)p(t) + \theta A\psi(t) - \theta C\psi(t)p(t) + \tfrac{\theta^2}{k}\psi^2(t)p(t) + \tfrac{\theta^2}{k}\psi(t)\mu(t) + \dot{\mu}(t);\end{gathered}$$

quindi raccogliendo $p(t)$ si ha:

$$p(t)\left(\theta C\psi(t) - \tfrac{1}{k} - \dot{\psi}(t) + \theta C\psi(t) - \tfrac{\theta^2}{k}\psi^2(t)\right) + \left(\theta C\mu(t) - A\theta\psi(t) - \tfrac{\theta^2}{k}\psi(t)\mu(t) - \dot{\mu}(t)\right) = 0.$$

Tale equazione si può riscrivere come un sistema di equazioni differenziali dove la prima è un'equazione di Riccati e la seconda una differenziale omegenea lineare in $\mu(t)$, e dove valgano le condizioni al tempo finale $\psi(T) = 0$ e $\mu(T) = 0$:

- $\dot{\psi}(t) = 2\theta C\psi(t) - \frac{\theta^2}{k}\psi^2(t) - \frac{1}{k}$
- $\dot{\mu}(t) = \mu(t)\left(\theta C - \frac{\theta^2}{k}\psi(t)\right) - \theta A\psi(t)$

Date le soluzioni di queste due equazioni differenziali possiamo definire il controllo ottimo:

$$q^*(t) = p(t)\left(\frac{1}{k} - \frac{\theta}{k}\psi(t)\right) - \frac{\theta}{k}\mu(t). \tag{3}$$

V. Conclusione

In questo lavoro abbiamo analizzato il problema di controllo ottimo lineare-quadratico (un modello mai trattato nel corso degli studi universitari), andandone a determinare il controllo ottimo che permette di massimizzare (o minimizzare) il funzionale obiettivo. In particolare abbiamo applicato a questo tipo di problema tre tecniche risolutive: il principio del massimo di Pontryagin, la Programmazione Dinamica e il completamento dei quadrati. La corretta applicazione dei tre principi porta in tutti i casi alla stessa equazione differenziale del tipo di Riccati (1). Tale risultato ci permette di giungere ad una soluzione implicita del problema di controllo ottimo (2), in quanto per ottenere un risultato più preciso bisogna risolvere un'equazione differenziale ordinaria quadratica nella sua incognita (1). Infine abbiamo coniugato il problema del controllo ottimo lineare-quadratico con gli studi di microeconomia, presentando il modello degli sticky price. Questa forma particolare di oligopolio è caratterizzata da una funzione di costo quadratica ed un prezzo che non si aggiusta immediatamente per compensare domanda e offerta. Abbiamo quindi applicato al modello microeconomico il principio del massimo, arrivando a definire la quantità di output ottimale (3) per massimizzare i profitti di un'azienda sotto le particolari condizioni di cui il modello è dotato.

Riferimenti bibliografici

[1] BURATTO, A., GROSSET, L. e VISCOLANI, B., 2017. *Ottimizzazione Dinamica. Modelli economici e gestionali.* Padova: Libreria Progetto.

[2] ENGWERDA, J. C., 2005. *LQ Dynamic Optimization and Differential Games.* Chichester: Wiley & Sons.

[3] KATZ, M. L., ROSEN, H. S., BOLINO, C. A., e MORGAN W., 2015. *Microeconomia.* Quinta edizione. Milano: McGraw-Hill Education.

[4] LONG, N. V., 2010. *A Survey of Dynamic Games in Econmoics.* Singapore: World Scientific Publishing.

[5] PONTRYAGIN, L. S., BOLTYANSKII, V. G., GAMKRELIDZE, R. V., e MISHCHENKO, E. F., 1962. *The Mathematical Theory of Optimal Processes.* New York: Wiley & Sons.

[6] REID, W. T., 1972. *Riccati Differential Equation.* New York: Academic Press.

[7] SNIEDOVICH, M., 1978. Dynamic Programming and Principle of Optimality. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 65, 586-606.

[8] VAN DEN BROEK, W. A., ENGWERDA, J. C. e SHUMACHER, J. M., 2003. An equivalence result in linear-quadratic theory. *Automatica*, 39 (2), 355-359.

[9] WANG, D. X., CAO, X. R., e QIU, L., 2011. Completion-of-squares: revisited and extended. *Systems & Control Letters*, 60 (10), 840-844.