



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”
Corso di Laurea Magistrale in Fisica

Tesi di Laurea

Teoria secolare per un sistema di n corpi

Relatore
Prof. Francesco Marzari

Laureando
Alberto Pagin

Anno Accademico 2018–2019

Alla mia famiglia

Abstract

This study aims to treat the problem of secular perturbations in the motions of planets from the analytical point of view, adopting a Hamiltonian approach. Starting from a generic many-body system made of N planets revolving around a massive star, we will first derive the Hamiltonian in appropriate action-angle variables by means of the Liouville-Arnold-Jost theorem, separating the integrable part and its perturbation. Then, applying the Lie series method to the quasi-integrable system thus obtained, we will compute the secular normal form (at order one in the masses) of the Hamiltonian, thus eliminating the dependence on the fast variables. From here we will develop the so called Lagrange-Laplace secular theory, which considers only linear contributions to the equations of motion (and whose validity is restricted to values of the eccentricities and inclinations close to zero), in order to suggest two possible ways to overcome the aforementioned theory when dealing with coplanar three-body systems. It will then be shown that by retaining also terms of order higher than two in the expansion of the perturbative potential in power series of the eccentricities it is possible to obtain a more precise analytical description of the long-term evolution of various extrasolar systems (away from mean motion resonances), up to surprisingly high values of the eccentricities. Finally, we'll take a brief look at the results of an analytical model extending the Lagrange-Laplace theory up to order two in the masses, verifying their excellent agreement with the solutions obtained by directly integrating the equations of motion.

Sommario

Questo studio si propone di trattare il problema delle perturbazioni secolari dei moti planetari dal punto di vista analitico, adottando un approccio hamiltoniano. Partendo da un generico sistema a molti corpi gravitazionalmente interagenti costituito da N pianeti orbitanti attorno a una stella massiccia, se ne ricaverà dapprima l'Hamiltoniana in opportune variabili d'angolo-azione mediante il teorema di Liouville-Arnold-Jost, separando la parte integrabile dalla sua perturbazione. Dopodiché, applicando il metodo delle serie di Lie al sistema quasi-integrabile così ottenuto, si effettuerà la riduzione in forma normale secolare (all'ordine uno nelle masse) dell'Hamiltoniana, eliminando in tal modo la dipendenza dalle variabili veloci. Da qui si procederà a sviluppare la teoria secolare di Lagrange-Laplace, che considera solamente i contributi lineari alle equazioni del moto (e la cui validità è circoscritta a valori delle eccentricità e delle inclinazioni vicini a zero), allo scopo di indicare un paio di modi per raffinare detta teoria nel caso semplice di sistemi formati da una stella centrale e due pianeti in moto lungo orbite complanari. Si mostrerà quindi che trattenendo nello sviluppo del potenziale perturbativo in serie di potenze delle eccentricità anche termini di ordine superiore al secondo è possibile ottenere una descrizione analitica più precisa dell'evoluzione a lungo termine di diversi sistemi extrasolari (lontano dalle risonanze di moto medio), fino a valori sorprendentemente elevati delle eccentricità. Infine si fornirà un breve cenno ai risultati di un modello analitico che estende la teoria di Lagrange-Laplace all'ordine due nelle masse, constatandone l'ottimo accordo con le soluzioni ottenute per integrazione diretta delle equazioni del moto.

Indice

Introduzione	xi
1 Problema a molti corpi	1
1.1 Equazioni del moto	1
1.2 Coordinate eliocentriche	3
1.3 Elementi orbitali	7
1.4 Hamiltoniana di un sistema a molti corpi	10
2 Hamiltoniana planetaria	13
2.1 Trasformazioni canoniche	13
2.2 Sistemi integrabili	15
2.3 Trasformazioni lineari delle variabili coniugate	18
2.4 Eliminazione del baricentro	20
2.5 Teorema di Arnold-Jost	24
2.6 Termine \mathcal{H}_0 in variabili d'angolo-azione	27
2.7 Sviluppo della funzione perturbatrice	31
2.8 Momento angolare in variabili d'angolo-azione	34
3 Forma normale secolare	37
3.1 Introduzione alla teoria delle perturbazioni	38
3.2 Metodo delle serie di Lie	41
3.3 Piccoli divisori	43
3.4 Forme normali	47
3.5 Media sugli angoli veloci	52
3.6 Forma normale secolare planetaria	54
4 Dinamica secolare dei pianeti	63
4.1 Teoria di Lagrange-Laplace	64
4.2 Integrali primi per il sistema secolare	70
4.3 Estensione della teoria di Lagrange-Laplace	74
4.4 Conclusioni	80
Bibliografia	85

Introduzione

Al 13 ottobre 2019 sono ben 3063 i sistemi extrasolari confermati, 670 dei quali formati da più di un pianeta.¹ Essi appaiono tuttavia piuttosto diversi da sistemi di tipo solare, eventualmente anche a causa di un bias osservativo che favorisce la rivelazione di pianeti massicci e vicini alle rispettive stelle a scapito di quelli più piccoli e distanti.

Non è raro imbattersi in oggetti di massa elevata in moto lungo orbite molto eccentriche, con periodi di rivoluzione anche di pochi giorni, o in una coppia di pianeti bloccata in una risonanza di moto medio, o ancora in sistemi che, seppur non risonanti, subiscono effetti secolari tali da determinare ampie oscillazioni nei valori delle eccentricità. Per tutti questi motivi lo studio dell'evoluzione a lungo termine dei sistemi extrasolari è affidato sempre più all'integrazione numerica delle equazioni del moto, mentre la validità della teoria perturbativa classica di Lagrange-Laplace, che prende come riferimento le orbite circolari, è messa in discussione. Da qui l'esigenza di ricercare approssimazioni migliori.

Questo elaborato affronta il problema della dinamica secolare dei pianeti dal punto di vista analitico, adottando un approccio hamiltoniano, ed è strutturato come segue:

- Capitolo 1. Verterà sulla determinazione dell'espressione dell'Hamiltoniana di un generico sistema a molti corpi (possibilmente un sistema planetario) in un riferimento cartesiano ortogonale solidale con le stelle fisse.
- Capitolo 2. Sarà dedicato all'introduzione dei concetti e degli strumenti matematici necessari per effettuare un cambiamento di variabili che consenta di porre l'Hamiltoniana del problema planetario in una forma più conveniente. A tal proposito, in primo luogo si introdurranno canonicamente le variabili eliocentriche (o di Jacobi), mediante le quali sarà possibile abbassare il numero di gradi di libertà del sistema eliminando il moto del centro di massa, dopodiché, avvalendosi del noto teorema di Liouville-Arnold-Jost sui sistemi integrabili, si esprimerà l'Hamiltoniana in nuove variabili canoniche d'angolo-azione (legate agli elementi orbitali da semplici relazioni).

¹ [21]

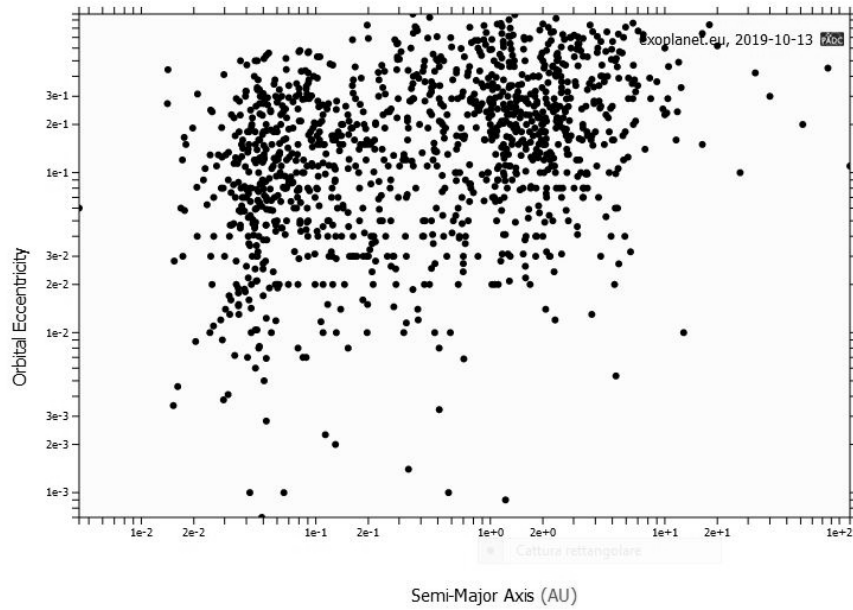


Figura 1 – *Tratta da [21]. Eccentricità orbitali osservate dei pianeti extrasolari in funzione del semiasse maggiore.*

Tale Hamiltoniana risulterà composta da una parte kepleriana integrabile – funzione solo delle azioni – e da una piccola perturbazione sviluppabile in serie di Fourier degli angoli.

- Capitolo 3. Illustrerà il metodo perturbativo delle serie di Lie, che verrà usato per ridurre l'Hamiltoniana quasi-integrabile del problema planetario, così come ottenuta al punto precedente, nella cosiddetta forma normale secolare al primo ordine nelle masse, eliminando in tal modo la dipendenza dagli angoli veloci.
- Capitolo 4. Riguarderà lo studio delle variazioni degli elementi orbitali che avvengono su tempi lunghi (in relazione alla durata della vita umana), e metterà in luce i limiti di applicazione della teoria classica di Lagrange-Laplace dedotta a partire dalla forma normale secolare al primo ordine nelle masse. In particolare si mostrerà come raffinare la teoria di Lagrange-Laplace mediante una modellazione analitica più accurata dei sistemi a tre corpi, che trattenga nello sviluppo del potenziale perturbativo in serie di potenze delle eccentricità anche termini di ordine superiore al secondo. Seguirà quindi qualche breve cenno a un'estensione della teoria di Lagrange-Laplace all'ordine due nelle masse.

Capitolo 1

Problema a molti corpi

Il problema a molti corpi rappresenta la naturale generalizzazione del noto problema dei due corpi, che a sua volta estende il basilare modello kepleriano del singolo pianeta in moto rispetto al Sole (supposto fisso nello spazio). Si tratta di un problema di non facile soluzione, in quanto un sistema con un elevato numero di gradi di libertà non è più, in generale, integrabile (o, meglio, non è mai stato integrato analiticamente). Ciò ha portato allo sviluppo dei metodi perturbativi classici, sulla scia dei lavori di Lagrange e Laplace.

Nel corso del capitolo si arriverà a scrivere le equazioni del problema a molti corpi in coordinate eliocentriche, ovvero, più precisamente, le $3N$ equazioni differenziali del second'ordine che descrivono la dinamica di un sistema isolato costituito da $N + 1$ punti materiali. Tale risultato servirà da appiglio per introdurre una più potente formulazione hamiltoniana delle equazioni del moto, indispensabile per la costruzione della cosiddetta *forma normale secolare* che sta alla base dello studio delle *perturbazioni secolari* delle orbite planetarie oggetto di questo elaborato.

1.1 Equazioni del moto

Sia dunque fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale (O, X, Y, Z) , solidale con le stelle fisse, e rispetto a esso si considerino $N + 1$ corpi puntiformi mutuamente interagenti aventi masse m_0, \dots, m_N e coordinate $\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_N$. L'indice 0 contraddistingua da qui in avanti il corpo di massa maggiore (la stella ospitante nel caso di un sistema planetario).

Detto \mathbf{x}_i il punto i -esimo, e denotando rispettivamente con \mathbf{F}_{ij} e $\|\cdot\|$ la forza esercitata da \mathbf{x}_j su \mathbf{x}_i e la distanza euclidea in \mathbb{R}^3 , si prendano per buone le seguenti ipotesi¹:

¹ Per una trattazione più estesa e rigorosa si rimanda il lettore interessato ai testi di Meccanica Analitica, come ad esempio [5]

TEORIA SECOLARE PER UN SISTEMA DI n CORPI

i. *principio di sovrapposizione delle forze*

$$\mathbf{F}_i = \sum_{\substack{0 \leq j \leq N \\ (j \neq i)}} \mathbf{F}_{ij} ;$$

ii. *principio di azione e reazione*

$$\mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_{ji} = 0 ;$$

iii. *principio delle forze centrali*

$$(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \wedge \mathbf{F}_{ij} = 0 ;$$

iv. *principio di invarianza per rotazioni*

$$\mathbf{F}_{ij} = F_{ij}(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|) .$$

Se tutte e quattro queste condizioni risultano soddisfatte la forza assumerà l'espressione generale

$$(1.1) \quad \mathbf{F}_{ij} = f_{ij}(r_{ij}) \frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j}{r_{ij}} ,$$

dove $f_{ij}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione sufficientemente regolare della sola variabile $r_{ij} = \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|$, e le equazioni di Newton per il sistema di punti materiali si scriveranno

$$(1.2) \quad m_i \ddot{\mathbf{x}}_i = \sum_{\substack{0 \leq j \leq N \\ (j \neq i)}} \mathbf{F}_{ij} \quad (0 \leq i \leq N) .$$

Questo è un sistema di $3(N + 1)$ equazioni differenziali del second'ordine, che ammette i sette ben noti integrali primi del moto

$$\mathbf{P} = \sum_i m_i \dot{\mathbf{x}}_i$$

$$\mathbf{\Gamma} = \sum_i \mathbf{x}_i \wedge m_i \dot{\mathbf{x}}_i$$

$$E = T + U = \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i \dot{\mathbf{x}}_i^2 + \sum_{i \neq j} U_{ij}(r_{ij}) \right) ,$$

ovvero le sei componenti dei due vettori quantità di moto totale e momento angolare totale rispetto a O (origine del riferimento cartesiano) e lo scalare energia totale, dato dalla somma di energia cinetica ed energia potenziale.²

² $U_{ij}(r_{ij})$ è l'energia potenziale della coppia $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$, definita (a meno di una costante additiva arbitraria) mediante la relazione $f_{ij}(r_{ij}) = -U'_{ij}(r_{ij})$, dove $f_{ij}(r_{ij})$ è l'intensità della forza (1.1).

L'esistenza di sette integrali primi indipendenti³ per il sistema (1.2) ne garantisce la cosiddetta integrabilità per quadrature nel caso $N = 1$ (due corpi, contrassegnati con i pedici 0 e 1 secondo la notazione adottata). Se invece $N > 1$ non si riesce a ridurre il problema alle quadrature (cioè, in sostanza, al calcolo di integrali di funzioni note), tuttavia, almeno in linea teorica, è possibile sfruttare la conoscenza degli integrali primi per diminuire l'ordine del sistema. Si ritornerà in seguito su questi argomenti, propedeutici all'enunciazione del fondamentale *teorema di Liouville*.

1.2 Coordinate eliocentriche

Conviene ora introdurre un cambiamento di notazione che tenga conto del ruolo privilegiato del Sole all'interno del nostro sistema planetario (o della stella ospitante nel caso di un sistema extrasolare).

Se la massa m_0 del corpo in \mathbf{x}_0 è preponderante rispetto alla massa degli altri corpi, cioè $m_0 \gg m_i$ ($i = 1, \dots, N$), il sistema (1.2) si può riscrivere come

$$(1.3) \quad \begin{aligned} m_0 \ddot{\mathbf{x}}_0 &= \mathbf{F}_{0i} + \sum_{\substack{1 \leq j \leq N \\ (j \neq i)}} \mathbf{F}_{0j} \\ m_i \ddot{\mathbf{x}}_i &= \mathbf{F}_{i0} + \sum_{\substack{1 \leq j \leq N \\ (j \neq i)}} \mathbf{F}_{ij}, \end{aligned}$$

dove si è messa in evidenza l'equazione per il punto P_0 (il Sole). Detti \mathbf{r}_i e \mathbf{X} rispettivamente il vettore congiungente \mathbf{x}_0 e \mathbf{x}_i (che specifica la posizione della massa m_i relativamente a m_0) e il vettore che individua la posizione del baricentro, mediante le trasformazioni di coordinate

$$(1.4) \quad \begin{aligned} \mathbf{r}_i &= \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0 \quad (1 \leq i \leq N) \\ \mathbf{X} &= \frac{\sum_{i=0}^N m_i \mathbf{x}_i}{\sum_{i=0}^N m_i}, \end{aligned}$$

si ottiene – derivando due volte rispetto al tempo e poi sostituendo le (1.3) nella prima delle (1.4) – il sistema

³ I teoremi di Bruns e Poincaré dimostrano che non se ne possono trovare altri.

$$(1.5) \quad \ddot{\mathbf{r}}_i = \left(\frac{1}{m_0} + \frac{1}{m_i} \right) \mathbf{F}_{i0} + \sum_{\substack{1 \leq j \leq N \\ (j \neq i)}} \left(\frac{\mathbf{F}_{ij}}{m_i} - \frac{\mathbf{F}_{0j}}{m_0} \right) \quad (1 \leq i \leq N)$$

$$\ddot{\mathbf{X}} = 0.$$

L'introduzione delle coordinate relative \mathbf{r}_i (*coordinate eliocentriche*) comporta quindi l'eliminazione del baricentro (che si muove di moto rettilineo uniforme) e la riduzione del numero di equazioni da $3(N+1)$ a $3N$.

Ponendo ora $f_{ij}(r_{ij}) = -Gm_i m_j / r_{ij}^2$ in (1.1) la forza assumerà la forma familiare della legge di gravitazione newtoniana, cioè (nelle nuove coordinate)

$$(1.6) \quad \mathbf{F}_{ij} = -Gm_i m_j \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|^3}.$$

Notando infine che

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{i0} &= f_{i0}(\|\mathbf{r}_i\|) \frac{\mathbf{r}_i}{\|\mathbf{r}_i\|} = -Gm_i m_0 \frac{\mathbf{r}_i}{\|\mathbf{r}_i\|^3} \\ \mathbf{F}_{0j} &= -f_{0j}(\|\mathbf{r}_j\|) \frac{\mathbf{r}_j}{\|\mathbf{r}_j\|} = Gm_0 m_j \frac{\mathbf{r}_j}{\|\mathbf{r}_j\|^3}, \end{aligned}$$

dopo qualche passaggio algebrico si otterranno, dalla prima delle (1.5), le cosiddette *equazioni delle perturbazioni planetarie*

$$(1.7) \quad \ddot{\mathbf{r}}_i = -G(m_0 + m_i) \frac{\mathbf{r}_i}{\|\mathbf{r}_i\|^3} - G \sum_{\substack{1 \leq j \leq N \\ (j \neq i)}} m_j \left(\frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|^3} + \frac{\mathbf{r}_j}{\|\mathbf{r}_j\|^3} \right).$$

Queste formano un sistema di $3N$ equazioni differenziali (accoppiate) del second'ordine, descrittive il moto orbitale reale⁴ dei pianeti in un sistema di riferimento cartesiano centrato nel Sole (in generale nel corpo di indice 0). A destra dell'uguale si possono distinguere due termini: il primo (*termine imperturbato* o *kepleriano*) esprime l'accelerazione (relativa) impressa dal Sole al pianeta i -esimo e coincide con l'equazione del moto di un corpo in un campo centrale; il secondo (*termine di disturbo* o *di accoppiamento*) è una sommatoria estesa agli $N-1$ perturbatori j , nella quale si concentra l'azione gravitazionale esercitata sul pianeta i -esimo (e sul Sole) da tutti gli altri pianeti del sistema.

Nel valutare il peso relativo dei diversi contributi che concorrono alla determinazione del moto complessivo del pianeta i -esimo occorrerà dunque tener conto sia delle masse che compaiono in (1.7) come fattori moltiplicativi, sia dei quadrati delle distanze che invece compaiono come divisori.

⁴ Se si ignora il contributo dei termini residui, i quali incidono su scala temporale lunga ($\sim 10^6$ anni) e comprendono: effetti della natura estesa dei corpi (all'origine dei termini quadrupolari delle interazioni gravitazionali mutue); correzioni relativistiche; perdita di massa del Sole.

Se le distanze reciproche tra i pianeti non diventano troppo piccole, tali cioè da compensare il fatto che $m_j \ll m_0$, allora l'evoluzione del sistema sarà ben approssimata – almeno per tempi non troppo lunghi – dal termine kepleriano.

In generale, i sistemi planetari formati da $N > 2$ pianeti risultano essere instabili, almeno per valori della separazione orbitale (cfr. infra) inferiori a dieci volte il *raggio di Hill* (R_H). Quest'ultimo, calcolato relativamente alla coppia di pianeti P_i - P_j (con P_i e P_j assunti in moto lungo orbite contigue caratterizzate da bassi valori di eccentricità e inclinazione⁵), è dato da

$$(1.8) \quad R_H = \left(\frac{m_i + m_j}{3m_0} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{a_i + a_j}{2},$$

dove m_i e $m_j \approx m_i$ sono le masse di P_i e P_j e $m_0 \gg m_i, m_j$ è la massa della stella ospitante S_0 (ad esempio il Sole); la differenza $\Delta = a_j - a_i$ tra i semiassi maggiori a_j e $a_i < a_j$ delle orbite j -esima e i -esima esprime la separazione orbitale.

Nel caso di un sistema di tre corpi ($N = 2$), formato da due pianeti (P_1 e P_2) di piccola massa orbitanti attorno alla stella centrale S_0 , è dimostrato che, se la separazione orbitale iniziale $\Delta(t_0) = a_2 - a_1$ (misurata in raggi di Hill) supera il valore critico $\Delta_* \simeq 2\sqrt{3}$, allora P_1 e P_2 non sperimenteranno mai incontri ravvicinati (cioè, in altre parole, seguiranno indefinitamente a percorrere orbite non intersecantesi); più precisamente, la separazione orbitale $\Delta(t)$ rimarrà sempre superiore a R_H per ogni $t > t_0$ (condizione di stabilità). Nell'approssimazione di Hill i due pianeti hanno masse tendenti a zero ($m_1 = m_2 = m \rightarrow 0$) e si muovono idealmente su orbite molto distanti da S_0 (sicché l'attrazione gravitazionale esercitata da quest'ultima risulta ben approssimata dalle forze mareali). Una tale configurazione ammette l'integrale primo del moto

$$(1.9) \quad \mathcal{C} = \frac{e^2 + i^2}{\mathcal{K}^2} - \frac{3}{4}\Delta^2 - \frac{6}{r},$$

analogo all'integrale primo di Jacobi del problema (ristretto) dei tre corpi, dove $e^2 = e_1^2 + e_2^2 - 2e_1e_2 \cos(\omega_1 - \omega_2)$, $i^2 = i_1^2 + i_2^2 - 2i_1i_2 \cos(\Omega_1 - \Omega_2)$, $\mathcal{K} = [(m_1 + m_2)/3m_0]^{1/3}$ e r è la distanza istantanea tra P_1 e P_2 (espressa in raggi di Hill). Poiché \mathcal{C} deve rimanere costante per ogni t , a un eventuale aumento di e causato dalle perturbazioni mutue tra i pianeti corrisponderà un aumento di Δ e viceversa: questo meccanismo assicura che la distanza di massimo avvicinamento s_{\min} tra P_1 e P_2 (che tenderebbe a ridursi a ogni successiva congiunzione per effetto dell'aumento di e) non scenderà mai al di sotto di R_H per valori della separazione orbitale iniziale $\Delta > \Delta_*$.

⁵ Per la definizione degli elementi orbitali $a, e, \omega, i, \Omega, \tau$ si veda il paragrafo successivo, in particolare la tabella 1.1 a pagina 7.

Sfortunatamente tale risultato non è estrapolabile a sistemi planetari più complessi, infatti, già aggiungendo un terzo pianeta (P_3) si può vedere che, anche per valori delle separazioni orbitali iniziali $\Delta > \Delta_*$, i pianeti di almeno uno dei due sottosistemi $S_0-P_1-P_2$ e $S_0-P_2-P_3$ esperiranno sicuramente un incontro ravvicinato a un dato istante \bar{t} (nella maggior parte dei casi inferiore a 10^7 anni). In particolare, i dati delle simulazioni numeriche effettuate da *Chambers et al.* in [4] per sistemi di tre o più pianeti (relativamente a vari set di condizioni iniziali) mostrano un'evidente tendenza a disporsi lungo una retta di equazione $\log \bar{t} = b\Delta + c$, con il coefficiente angolare b dipendente in una qualche misura dal numero e dalle masse dei pianeti.

Sebbene, come detto, le interazioni mutue tra sottosistemi “adiacenti” di tre corpi (tipo i sucitati $S_0-P_1-P_2$ e $S_0-P_2-P_3$) rendano i sistemi multi-pianeta generalmente instabili⁶, si stima che gli incroci tra due orbite planetarie limitrofe (i quali possono portare a incontri ravvicinati e/o a collisioni tra i pianeti e quindi alla destabilizzazione dell'intero sistema) avvengano su una scala temporale esponenzialmente crescente con Δ . In ragione di tale risultato, sistemi costituiti da $N > 2$ pianeti in moto lungo orbite (poco eccentriche e poco inclinate) sufficientemente distanziate tra loro ($> 10R_H$) si possono considerare stabili con buona approssimazione.

Ritornando, dopo questo excursus sul tema della stabilità dei sistemi multi-pianeta, alle equazioni (1.7), è ben noto che gli effetti cumulativi delle perturbazioni indotte dal termine di disturbo cominciano a diventare rilevanti su tempi scala dell'ordine dei secoli (da qui il nome di *perturbazioni secolari*), risultando di fatto non più trascurabili (ai fini di una descrizione maggiormente accurata delle orbite planetarie) su tempi scala dell'ordine di 10^4 anni. In altre parole, immaginando di poter osservare le orbite reali, soluzioni esatte delle (1.7), per un arco di tempo abbastanza lungo si noterebbe che queste si discostano significativamente dalle orbite imperturbate o kepleriane, soluzioni delle medesime equazioni però disaccoppiate (cioè private del termine di disturbo). Un'orbita di tipo kepleriano risulta completamente individuata date sei condizioni iniziali relative alla posizione e alla velocità, $\mathbf{r}(t_0)$ e $\dot{\mathbf{r}}(t_0)$, o in alternativa sei costanti, dette *elementi orbitali*, legate agli integrali primi del moto. Le variabili di Delaunay e Poincaré, che saranno introdotte più avanti allo scopo di trasformare l'Hamiltoniana del problema a molti corpi in una forma più congeniale allo sviluppo della teoria secolare, si costruiscono proprio a partire dagli elementi orbitali, pertanto è utile ora passarli brevemente in rassegna.

⁶ La quantità \mathcal{C} , definita dalla relazione (1.9), è una costante del moto per il problema dei tre corpi ($S_0-P_1-P_2$) di Hill. Aggiungendo il pianeta P_3 , l'interazione tra questo e il suo vicino P_2 comporterà la variazione temporale degli integrali primi $\mathcal{C}_{(12)}$ e $\mathcal{C}_{(23)}$ relativi ai due sottosistemi (separatamente stabili) $S_0-P_1-P_2$ e $S_0-P_2-P_3$, con conseguente rottura dell'equilibrio preesistente.

Tabella 1.1 – *Legenda dei simboli utilizzati nel testo per indicare i sei elementi orbitali che caratterizzano il moto kepleriano di un pianeta.*

<i>Parametro</i>	<i>Definizione</i>
a	semiasse maggiore dell'orbita
e	eccentricità dell'orbita
ω	argomento del perielio
i	inclinazione del piano dell'orbita
Ω	longitudine del nodo ascendente
τ	istante di passaggio al perielio

1.3 Elementi orbitali

Si considerino due sistemi di riferimento con origine comune coincidente con il Sole, (\odot, x, y, z) e (\odot, q_1, q_2, q_3) . Il primo, costruito ricorrendo alle stelle fisse mediante una traslazione del sistema di riferimento (O, X, Y, Z) , potrà dirsi assoluto – e in esso ci si è posti per dedurre le equazioni (1.7) –, mentre il secondo sia scelto con l'asse q_3 ortogonale al piano orbitale e il semiasse positivo q_1 orientato in direzione del perielio P . L'asse q_2 formi con gli assi q_1 e q_3 una terna ortogonale destrorsa. In quest'ultimo riferimento le componenti cartesiane del vettore posizione del pianeta i -esimo si scrivono $(q_1, q_2, 0)$, dove $q_1 = q_1(a, e, \vartheta_0, \tau, t)$ e $q_2 = q_2(a, e, \vartheta_0, \tau, t)$.

Nell'approssimazione kepleriana il pianeta i -esimo non subisce l'influenza degli altri $N-1$ pianeti del sistema, quindi percorrerà un'orbita imperturbata di forma ellittica (figura 1.1). La sua posizione (e velocità) nel riferimento assoluto risulta univocamente determinata noti sei parametri, gli elementi orbitali $a, e, \omega, i, \Omega, \tau$, ricavabili dalle osservazioni. Quattro di essi $(a, e, \vartheta_0, \tau)$ identificano la posizione del pianeta sulla sua orbita, tre (ω, i, Ω) la giacitura del piano orbitale nello spazio (figura 1.2). Se si conviene di misurare ϑ_0 , cioè la posizione angolare del perielio, a partire dall'asse nodale (la linea d'intersezione tra il piano orbitale (q_1, q_2) e il piano (x, y) di riferimento), allora $\vartheta_0 \equiv \omega$. Il significato dei simboli è schematizzato nella tabella 1.1.

In luogo di τ è consuetudine considerare l'anomalia media $\ell = n(t - \tau)$, dove $n = 2\pi/T$ è il moto medio (o frequenza orbitale) del pianeta i -esimo, la quale però non è definita né per $i = 0, \pi$ (posizione del nodo ascendente imprecisabile) né per $e = 0$ (posizione del perielio imprecisabile). Nel primo caso nemmeno ω e Ω sono definite. Per superare queste ambiguità, al posto di ω ed ℓ si introducono convenzionalmente la longitudine del perielio $\varpi = \omega + \Omega$ e la longitudine media $\lambda = \ell + \omega + \Omega$, sicché l'insieme degli elementi orbitali diventa $a, e, \varpi, i, \Omega, \lambda$.

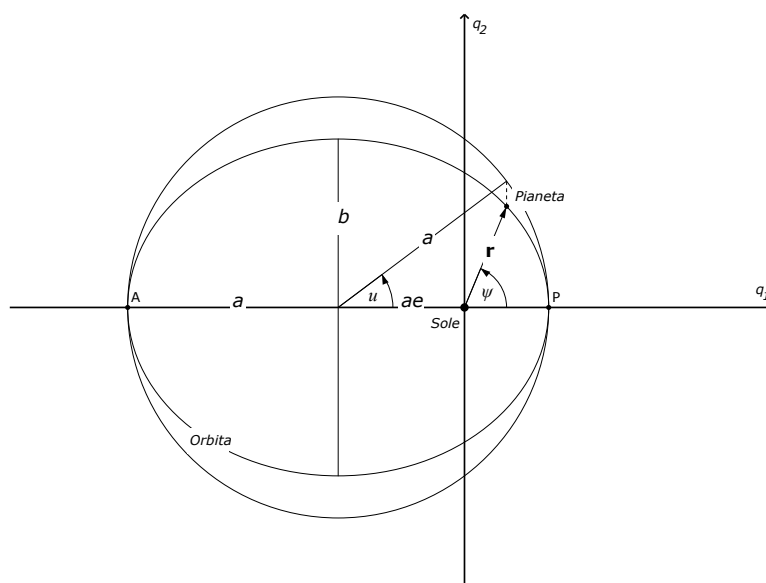


Figura 1.1 – Orbita ellittica di equazione $r = a(1 - e \cos u)$ descritta da un pianeta nel riferimento $(\odot, q_1, q_2, q_3 = 0)$. Gli angoli ψ e u sono rispettivamente l'anomalia vera e l'anomalia eccentrica. Il segmento di lunghezza ae è la distanza tra il centro dell'ellisse e uno dei due fuochi. I punti A (afelio) e P (perielio) sull'asse q_1 delimitano la cosiddetta linea degli apsidi.

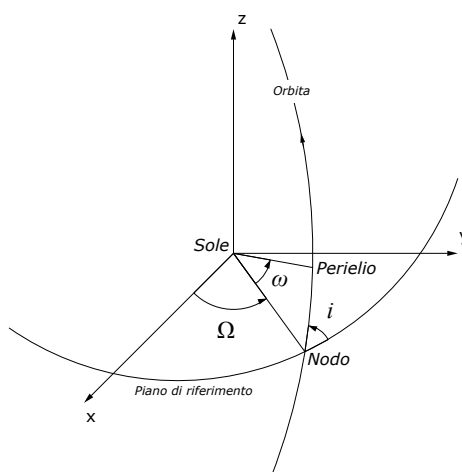


Figura 1.2 – A illustrazione degli elementi orbitali ω , i e Ω , i tre angoli che descrivono l'orientazione dell'orbita nello spazio.

Esiste una corrispondenza biunivoca tra $x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i$ – componenti di \mathbf{r}_i e $\dot{\mathbf{r}}_i$ – e gli elementi orbitali $a, e, \omega, i, \Omega, \ell$ (ovvero $a, e, \varpi, i, \Omega, \lambda$) tale per cui coordinate e velocità del pianeta i -esimo nel sistema di riferimento assoluto potranno ottenersi da $\mathbf{q}_i = (q_1^i, q_2^i, 0)$ e $\dot{\mathbf{q}}_i = (\dot{q}_1^i, \dot{q}_2^i, 0)$ mediante la composizione di tre rotazioni piane $\mathbf{R} = \mathbf{R}_\Omega \cdot \mathbf{R}_i \cdot \mathbf{R}_\omega$.

Assumendo che le masse dei pianeti siano molto inferiori a quella del Sole, e che nessuna delle distanze mutue $\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|$ diventi troppo piccola, è noto dal paragrafo precedente che le equazioni (1.7) si discostano da quelle del problema dei due corpi per la sola presenza del termine dipendente da m_j , il quale rappresenta una piccola perturbazione rispetto all'interazione binaria Sole-pianeta. Pertanto, il moto risultante sarà prossimo al moto kepleriano. Riscrivendo ora le (1.7) in termini degli elementi orbitali, tramite la matrice di rotazione \mathbf{R} , le equazioni per a, e, ω, i, Ω e per ℓ avranno rispettivamente la forma

$$(1.10) \quad \begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= O\left(\frac{m_j}{m_0}\right) \approx 0 \\ \frac{d\ell}{dt} &= n + O\left(\frac{m_j}{m_0}\right) \approx n, \end{aligned}$$

dove α denota sinteticamente ciascuno dei parametri a, e, ω, i, Ω e $O(m_j/m_0)$ rappresenta una funzione che può assumere valori dell'ordine delle masse dei pianeti espresse in unità di massa solare; n è il moto medio imperturbato risultante dal problema dei due corpi.

Le equazioni del moto per gli elementi orbitali, altresì dette *equazioni di Lagrange*, mostrano come a, e, ω, i, Ω si mantengano quasi costanti nel tempo, mentre ℓ devii lentamente dal suo moto lineare imperturbato. Per tale ragione risulta ancora conveniente caratterizzare i pianeti del Sistema Solare ricorrendo ai loro elementi orbitali, atteso che, in generale, questi elementi cambieranno molto poco in un arco temporale paragonabile alla durata media della vita umana (motivo per cui Keplero scoprì le leggi dell'interazione a due corpi sebbene stesse osservando il moto reale dei pianeti).

Ciò detto non bisogna comunque dimenticare che le orbite reali sono le soluzioni delle equazioni (1.7) comprensive del termine di disturbo, perciò gli elementi orbitali dipenderanno certamente dal tempo. Se a un dato istante t_0 si immagina di spegnere improvvisamente tutte le interazioni mutue tra i pianeti, ciascuno di essi inizierà a muoversi lungo un'orbita imperturbata di forma ellittica caratterizzata dagli elementi orbitali $a_i(t_0), e_i(t_0)$, ecc. L'ellisse percorsa dal pianeta i -esimo a partire dall'istante t_0 , detta *ellisse osculatrice*, rappresenta appunto l'orbita kepleriana tangente all'orbita reale al tempo $t = t_0$. Ne consegue che, reiterando lo spegnimento ideale delle interazioni planetarie a ogni istante $t_s = t_{s-1} + \Delta t$ successivo a t_0 (con Δt piccolo incremento temporale), il moto reale potrà ottenersi come involuppo di infinite ellissi osculatrici (ciascuna determinata a un dato istante t_s).

I procedimenti perturbativi si fondano sulla congettura che le variazioni delle ellissi osculatrici siano lente e regolari, cioè, in altre parole, si cerca di ricostruire il moto reale dei pianeti pensando a ellissi i cui parametri variano lentamente nel tempo.⁷ Dal punto di vista operativo si assume che gli elementi orbitali siano funzioni derivabili del tempo, quindi, sfruttando il fatto che le forze di disturbo sono piccole, si procede alla risoluzione delle equazioni accoppiate di Lagrange (1.10) per approssimazioni successive. È questo il punto di partenza della *teoria delle perturbazioni secolari*.

1.4 Hamiltoniana di un sistema a molti corpi

L'approccio lagrangiano al problema secolare consiste dunque nel ricercare soluzioni approssimate delle (1.10).⁸ Tali equazioni sono tuttavia piuttosto difficili da maneggiare, per cui nel prosieguo si sceglierà di porle in una forma leggermente diversa – la *forma hamiltoniana* – adottando un approccio alternativo.

Indicate con $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$ e $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$ le $2n$ componenti di una $2n$ -pla \mathbf{x} , un sistema di equazioni differenziali del second'ordine del tipo

$$(1.11) \quad \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = -\nabla_{\mathbf{x}} V(\mathbf{x})$$

si definisce in forma hamiltoniana se, in virtù dell'esistenza di una funzione $\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$, lo si può riscrivere come

$$(1.12) \quad \dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \quad (1 \leq i \leq n)$$

oppure, in modo equivalente, come

$$(1.13) \quad \dot{\mathbf{q}} = \nabla_{\mathbf{p}} \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \quad \dot{\mathbf{p}} = -\nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}).$$

Le $2n$ variabili $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$ e $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$, rispettivamente *coordinate* e *momenti*, sono dette *canonicamente coniugate*, mentre la funzione $\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ è detta *Hamiltoniana* del sistema.⁹ Infine, lo spazio vettoriale $\mathcal{F} := (\mathbf{q}, \mathbf{p})$ di dimensione $2n$, nel quale un punto identifica lo stato di un sistema meccanico a n gradi di libertà, è detto *spazio delle fasi*.

Più in generale, ogni sistema fisico che conservi una quantità definita, con leggero abuso di linguaggio, “energia”, esprimibile nelle variabili \mathbf{x} e $\dot{\mathbf{x}}$ come somma di una “energia cinetica” $T(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ e una “energia potenziale” $U(\mathbf{x})$, ammette per le equazioni che ne descrivono il comportamento una forma hamiltoniana.

⁷ Gli elementi orbitali riferiti al tempo t sono anche detti osculatori.

⁸ Per una trattazione dettagliata si vedano ad esempio [19] e [23].

⁹ $\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ dipende dalla scelta delle variabili coniugate, pertanto non è, in generale, unica.

Le equazioni delle perturbazioni planetarie (1.7) non sono riconducibili alla forma (1.11), in quanto il secondo membro non si può riscrivere come gradiente di una funzione scalare $V(\mathbf{x})$ (potenziale). Allo scopo di ottenere l'Hamiltoniana di un sistema a molti corpi gravitazionalmente interagenti sarà pertanto necessario riferirsi alle equazioni (1.2), valide nel riferimento inerziale (O, X, Y, Z) descritto all'inizio del paragrafo 1.1, dove \mathbf{F}_{ij} denoterà la forza attrattiva esercitata da \mathbf{x}_j su \mathbf{x}_i . In formule:

$$(1.14) \quad m_i \ddot{\mathbf{x}}_i = \sum_{\substack{0 \leq j \leq N \\ (j \neq i)}} \mathbf{F}_{ij} = -G m_i \sum_{\substack{0 \leq j \leq N \\ (j \neq i)}} m_j \frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j}{r_{ij}^3} \quad (0 \leq i \leq N).$$

Il potenziale V , somma dei contributi V_{ij} di ciascuna coppia di pianeti, si scriverà

$$(1.15) \quad V = \sum_{0 \leq i < j \leq N} V_{ij}(r_{ij}) = -G \sum_{0 \leq i < j \leq N} \frac{m_j}{r_{ij}},$$

così da ottenere le equazioni del moto per il problema a molti corpi proprio nella forma desiderata. Infatti, dividendo le (1.14) per m_i risulta¹⁰

$$(1.16) \quad \frac{d^2 \mathbf{x}_i}{dt^2} = - \sum_{\substack{0 \leq j \leq N \\ (j \neq i)}} \frac{dV_{ij}(r_{ij})}{dr_{ij}} \frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j}{r_{ij}} = -\nabla V(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|).$$

A questo punto rimane soltanto da esplicitare l'Hamiltoniana del sistema planetario, mediante la quale le equazioni (1.16) potranno esprimersi nella forma canonica (1.12). Dette $\mathbf{x}_i = (X_i, Y_i, Z_i)$ e $\mathbf{y}_i = \partial T / \partial \dot{\mathbf{x}}_i = m_i \dot{\mathbf{x}}_i$ le variabili coniugate ($i = 0, \dots, N$), la funzione \mathcal{H} assumerà la forma ben nota

$$(1.17) \quad \mathcal{H}(\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_N, \mathbf{y}_0, \dots, \mathbf{y}_N) = \sum_{i=0}^N \frac{\mathbf{y}_i^2}{2m_i} - G \sum_{0 \leq i < j \leq N} \frac{m_i m_j}{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|},$$

cioè $\mathcal{H} = T + U$. Essa determina l'evoluzione temporale di un sistema canonico a $n = 3(N + 1)$ gradi di libertà, rappresentata dalle $6(N + 1)$ funzioni $(\mathbf{x}_i(t), \mathbf{y}_i(t))$.¹¹

Il passo successivo sarà quello di introdurre canonicamente le coordinate eliocentriche illustrate nel paragrafo 1.2 (o in alternativa quelle di Jacobi) per eliminare il moto del baricentro, riducendo in tal modo il numero di gradi di libertà del sistema. Dopodiché occorrerà rimaneggiare l'Hamiltoniana così ottenuta al fine di porla in una forma più adatta allo studio delle variazioni secolari dei moti planetari con i metodi della teoria perturbativa.

¹⁰ Il potenziale $V_{ij}(r_{ij})$ della coppia $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$ è legato all'energia potenziale gravitazionale $U_{ij}(r_{ij})$ dalla relazione $m_i V_{ij} = U_{ij}$.

¹¹ Si osservi che l'espressione di \mathcal{H} data da (1.17) non presenta una dipendenza esplicita dal tempo. I sistemi per i quali $\partial \mathcal{H} / \partial t = 0$ si definiscono *autonomi*.

Ciò comporterà un ulteriore cambiamento di variabili, da quelle “cartesiane” a quelle cosiddette *d’angolo-azione*.¹²

A tal proposito, nella prima parte del prossimo capitolo ci si soffermerà brevemente sul concetto di *trasformazione canonica*, includendo anche dei cenni ad alcuni utili criteri ai quali si farà ampio ricorso per individuare, fra le possibili trasformazioni di variabili, quelle che preservano la forma hamiltoniana (1.12) delle equazioni del moto. Forti di questo bagaglio di nozioni si passerà quindi a discutere, nella seconda parte del capitolo, di *sistemi integrabili nel senso di Arnold-Jost*, per giungere infine alla riscrittura dell’Hamiltoniana completa di un sistema planetario in opportune variabili d’angolo-azione.

¹² L’uso estensivo dell’aggettivo “cartesiane” per qualificare le variabili coniugate $(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i)$ appare giustificato se si considera che, nel presente contesto, lo spazio delle configurazioni è $\mathcal{C} := (X_i, Y_i, Z_i)$.

Capitolo 2

Hamiltoniana planetaria

Volendo riscrivere l'Hamiltoniana (1.17) in una forma che si presti allo studio dettagliato del problema planetario, e in particolare delle perturbazioni secolari, non si può prescindere dall'enunciazione del *teorema di Arnold-Jost* sui sistemi integrabili, che estende il ben noto *teorema di Liouville*. Prima di procedere in tal senso si rende tuttavia necessario fare una breve digressione relativamente a una classe alquanto ristretta di trasformazioni nello spazio delle fasi – le trasformazioni canoniche – poiché i cambiamenti di variabili ai quali si ricorrerà nel seguito per modificare la funzione \mathcal{H} non dovranno in alcun modo intaccare la forma hamiltoniana delle equazioni del moto.

2.1 Trasformazioni canoniche

Una trasformazione $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \rightarrow (\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{p}})$ nello spazio delle fasi \mathcal{F} si definisce canonica se ad ogni Hamiltoniana $\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ associa un'altra funzione $\mathcal{K}(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{p}})$ tale che, nelle nuove variabili coniugate, il sistema (1.12) si potrà scrivere come

$$\dot{\bar{q}}_i = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \bar{p}_i}(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{p}}), \quad \dot{\bar{p}}_i = -\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \bar{q}_i}(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{p}}) \quad (1 \leq i \leq n),$$

lasciando cioè invariata la forma canonica delle equazioni. Se ci si restringe a considerare sistemi hamiltoniani autonomi e trasformazioni indipendenti dal tempo (il caso generale è sempre riconducibile a questo) si può richiedere che l'Hamiltoniana $\mathcal{K}(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{p}})$ del sistema trasformato sia la trasformata dell'Hamiltoniana $\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ del sistema di partenza, ovvero

$$\bar{\mathcal{H}}(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{p}}) = \mathcal{H}(\mathbf{q}(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{p}}), \mathbf{p}(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{p}})).$$

Alla luce di ciò, emerge con chiarezza la necessità di stabilire dei criteri univoci che permettano di discernere le trasformazioni canoniche fra tutte le possibili trasformazioni di coordinate e momenti; lungi dal voler fornire un quadro esaustivo, che esula dallo scopo di questa trattazione (e per il quale si rimanda ad esempio a [10]), nel seguito se ne prenderanno in esame tre.

Il primo, e più utile, tra i *criteri di canonicità* è senz'altro il cosiddetto criterio delle parentesi di Poisson. Assegnate le variabili dinamiche¹ $f(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ e $g(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, la loro *parentesi di Poisson* sarà una nuova funzione definita come

$$(2.1) \quad \{f, g\} = \nabla_{\mathbf{q}}f \cdot \nabla_{\mathbf{p}}g - \nabla_{\mathbf{p}}f \cdot \nabla_{\mathbf{q}}g = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right),$$

dove n denota il numero di gradi di libertà. Si può dimostrare che una trasformazione $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \rightarrow (\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{p}})$ è canonica se e solo se conserva le parentesi di Poisson fondamentali, ovvero, considerando le componenti $(\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_n)$ di $\bar{\mathbf{q}}$ e $(\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_n)$ di $\bar{\mathbf{p}}$ come funzioni di (\mathbf{q}, \mathbf{p}) , se valgono le relazioni

$$(2.2) \quad \{\bar{q}_i, \bar{q}_j\} = 0, \quad \{\bar{p}_i, \bar{p}_j\} = 0, \quad \{\bar{q}_i, \bar{p}_j\} = \delta_{ij},$$

con δ_{ij} simbolo di Kronecker.

Il secondo criterio, ancorché di non agevole applicazione pratica, mostra come si possano costruire trasformazioni che siano certamente canoniche mediante l'utilizzo di *funzioni generatrici*. Più nello specifico, esso afferma che una data trasformazione $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \rightarrow (\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{p}})$ è canonica se esiste una funzione differenziabile $S(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{p}})$, detta appunto funzione generatrice, soddisfacente la condizione (di invertibilità)

$$(2.3) \quad \det \left(\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \bar{p}_j} \right) \neq 0$$

e tale che

$$(2.4) \quad \bar{q}_i = \frac{\partial S}{\partial \bar{p}_i}(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{p}}), \quad p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{p}}) \quad (1 \leq i \leq n).$$

Il terzo e ultimo criterio è alla base del metodo perturbativo di Lie per lo studio dei sistemi hamiltoniani, metodo al quale si farà ricorso nel prossimo capitolo per sviluppare la teoria secolare. Tale criterio asserisce che la trasformazione $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \rightarrow (\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{p}})$ è canonica se esistono una Hamiltoniana $\chi(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{p}})$, detta Hamiltoniana generatrice, e un parametro ε tali che

$$(2.5) \quad \mathbf{q} = \bar{\mathbf{q}} + \int_0^\varepsilon \dot{\bar{\mathbf{q}}} dt \equiv \bar{\mathbf{q}}(\varepsilon), \quad \mathbf{p} = \bar{\mathbf{p}} + \int_0^\varepsilon \dot{\bar{\mathbf{p}}} dt \equiv \bar{\mathbf{p}}(\varepsilon),$$

dove le funzioni integrande $\dot{\bar{\mathbf{q}}}$ e $\dot{\bar{\mathbf{p}}}$ sono date dalle equazioni di Hamilton

$$\dot{\bar{\mathbf{q}}} = \nabla_{\bar{\mathbf{p}}}\chi(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{p}}), \quad \dot{\bar{\mathbf{p}}} = -\nabla_{\bar{\mathbf{q}}}\chi(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{p}}).$$

In altre parole, una trasformazione nello spazio delle fasi è canonica se la si può interpretare come il risultato di un flusso hamiltoniano² a un certo tempo ε .

¹ Si definisce *variabile dinamica* $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile delle coordinate $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$ e dei momenti coniugati $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$. L'Hamiltoniana $\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, ad esempio, è una variabile dinamica.

² Con l'espressione *flusso hamiltoniano* si intende l'evoluzione temporale di coordinate e momenti indotta dalla funzione Hamiltoniana (e descritta dalle equazioni canoniche).

2.2 Sistemi integrabili

La soluzione del sistema di n equazioni differenziali ordinarie

$$(2.6) \quad \frac{dx_i}{dt} = \psi_i(\mathbf{x}), \quad \text{con } \mathbf{x} = \mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)),$$

può sempre scriversi – in forma implicita – come il seguente sistema di equazioni integrali:

$$(2.7) \quad \int \frac{dx_i}{\psi_i(\mathbf{x})} = \int dt + \mathcal{C}.$$

Premesso ciò, il sistema (2.6) si definisce *integrabile* se gli integrali al primo membro di (2.7) possono essere esplicitamente calcolati, e se le relazioni risultanti da tali calcoli, ovvero $\Psi_i(\mathbf{x}(t)) = t + \mathcal{C}$ (dove le Ψ_i sono le primitive delle $1/\psi_i$), possono essere invertite³ per dare $\mathbf{x}(t)$ come esplicita funzione del tempo.

Adottando la definizione di integrabilità appena fornita può risultare tuttavia particolarmente difficile stabilire se un dato sistema di equazioni differenziali sia integrabile oppure no. Il motivo di questa difficoltà risiede sostanzialmente nel fatto che il calcolo esplicito degli integrali al primo membro di (2.7) può rivelarsi alquanto proibitivo e, quindi, l'eventualità di non riuscire a trovare le primitive Ψ_i potrebbe dipendere non tanto dall'effettiva non integrabilità del sistema quanto piuttosto da una mancanza di abilità da parte di chi si cimenta nella risoluzione degli integrali.

Nel caso dei sistemi hamiltoniani, un aiuto, ancorché parziale, viene dal

Teorema (di Liouville). *Sia assegnato un sistema canonico autonomo a n gradi di libertà, con Hamiltoniana $\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, che nello spazio delle fasi \mathcal{F} ammetta n integrali primi indipendenti $\{\varphi_1(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \dots, \varphi_n(\mathbf{q}, \mathbf{p})\}$ formanti un sistema completo in involuzione. Sotto l'ipotesi non restrittiva*

$$(2.8) \quad \det \left(\frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}{\partial(p_1, \dots, p_n)} \right) \neq 0,$$

si può costruire per quadrature la funzione

$$(2.9) \quad S(\mathbf{q}, \varphi) = \int \sum_i p_i(\mathbf{q}, \varphi) dq_i$$

generatrice di una trasformazione canonica $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \rightarrow (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\varphi})$ tale che l'Hamiltoniana trasformata dipenda solo dai nuovi momenti $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$.⁴

³ Assegnate opportunamente le condizioni iniziali $\Psi_i(\mathbf{x}(t_0)) = t_0 + \mathcal{C}$.

⁴ Le $p_i(\mathbf{q}, \varphi), \dots, p_n(\mathbf{q}, \varphi)$ si ottengono per inversione delle $\varphi_1(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \dots, \varphi_n(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ se la condizione (2.8) risulta soddisfatta. Inoltre, per il secondo criterio di canonicità (2.4), vale la relazione

$$p_i(\mathbf{q}, \varphi) = \frac{\partial S}{\partial q_i}(\mathbf{q}, \varphi).$$

Le equazioni canoniche per $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\boldsymbol{\varphi})$ si scriveranno dunque

$$(2.10) \quad \dot{\alpha}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi_i}(\boldsymbol{\varphi}), \quad \dot{\varphi}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \alpha_i}(\boldsymbol{\varphi}) = 0 \quad (1 \leq i \leq n),$$

le cui soluzioni sono

$$(2.11) \quad \alpha_i(t) = \alpha_{i,0} + t \left. \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi_i} \right|_{(\varphi_{1,0}, \dots, \varphi_{n,0})}, \quad \varphi_i(t) = \varphi_{i,0} \quad (1 \leq i \leq n),$$

con $\alpha_{i,0}$ e $\varphi_{i,0}$ costanti determinate dalle condizioni iniziali.

In altri termini, un sistema hamiltoniano a n gradi di libertà è integrabile se ammette n costanti del moto $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ indipendenti⁵ e in involuzione. Un insieme di r funzioni $\{\varphi_1, \dots, \varphi_r\}$ forma un sistema in involuzione se

$$\text{rank} \left(\frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_r)}{\partial(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)} \right) = r$$

e se la parentesi di poisson tra due φ_i, φ_j qualunque si annulla, ovvero

$$(2.12) \quad \{\varphi_i, \varphi_j\} = 0 \quad (i \neq j).$$

Nel caso in cui r coincida con il numero di gradi di libertà n , il sistema in involuzione $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ si dirà anche completo.

La condizione (2.12), se soddisfatta, consente di decomporre il flusso hamiltoniano del sistema in n flussi indipendenti, ciascuno generato da una delle n funzioni $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ (considerate come altrettante Hamiltoniane a un grado di libertà). Concretamente, ciò significa che l'evoluzione del sistema al tempo t , data da $(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$, si potrà ottenere seguendo il flusso di φ_1 , per un tempo t , dal punto iniziale $(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0)$ fino al punto $(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1)$, quindi seguendo il flusso di φ_2 , sempre per un tempo t , dal punto $(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1)$ fino al punto $(\mathbf{q}_2, \mathbf{p}_2)$, e così via. Il punto finale $(\mathbf{q}_n, \mathbf{p}_n)$ coinciderà con $(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$.

È utile ricordare che una variabile dinamica $\varphi(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ si definisce costante – o integrale primo – del moto se mantiene inalterato il suo valore sotto il flusso hamiltoniano descritto dalle equazioni (1.12). In altre parole, se $(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$ è la soluzione delle equazioni canoniche corrispondente al dato iniziale $(\mathbf{q}(0), \mathbf{p}(0)) = (\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0)$ deve valere $\varphi(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) = \varphi(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0)$ per ogni istante t . Ciò implica che $\dot{\varphi} = 0$, con $\dot{\varphi}$ data da

$$(2.13) \quad \dot{\varphi} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right) = \{\varphi, \mathcal{H}\}.$$

⁵ L'esistenza di n integrali primi indipendenti $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ per un sistema a n gradi di libertà assicura che ogni orbita giace su una superficie di livello n -dimensionale M_φ immersa nello spazio delle fasi $2n$ -dimensionale \mathcal{F} .

La (2.13) altro non è che la derivata temporale di φ lungo il flusso indotto da \mathcal{H} , altresì detta derivata di Lie $L_{\mathcal{H}}\varphi$. Ne consegue che ogni variabile dinamica $\varphi(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ soddisfacente l'equazione alle derivate parziali $L_{\mathcal{H}}\varphi = 0$ è un integrale primo del moto.⁶

Ritornando, dopo questa precisazione, al teorema di Liouville, si può condensare quanto esso stabilisce – con particolare riferimento alle equazioni (2.10) e (2.11) – nell'enunciato seguente: se l'Hamiltoniana di un sistema a n gradi di libertà dipende esclusivamente dai momenti $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$, cioè $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathbf{p})$, allora tale sistema è integrabile, poiché ammette i momenti stessi come integrali primi del moto ($\partial\mathcal{H}/\partial q_i = 0$).⁷ In tal caso le coordinate $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$ seguiranno un andamento lineare in t , variando alla velocità costante $\omega_i = \partial\mathcal{H}/\partial p_i$.

L'Hamiltoniana completa di un sistema planetario, una volta trasformata in opportune variabili con l'aiuto del teorema di Liouville (esteso), risulterà composta di due parti:

- un *termine imperturbato*, dominante, che rappresenterà l'approssimazione integrabile della dinamica reale;
- un *termine perturbativo*, meno significativo, che apporterà lievi (ma non trascurabili sul lungo periodo) correzioni al moto imperturbato.

Da qui l'esigenza di partire dallo studio dei sistemi integrabili per giungere, mediante l'applicazione del metodo perturbativo, a una formulazione della teoria secolare per molti corpi in termini hamiltoniani.

Sebbene sia in generale più agevole individuare le costanti del moto anziché risolvere direttamente le equazioni di Hamilton, una ricetta universale che consenta di ricavarle tutte sfortunatamente non esiste. In particolare, se si conoscono soltanto l costanti del moto (con $l < n$) è arduo stabilire se ve ne siano una $(l+1)$ -esima, una $(l+2)$ -esima, ecc. (fino a n) ancora da trovare oppure se effettivamente non ne esistano altre. In effetti si può dimostrare che una via d'uscita da questa spinosa situazione viene dalla comparsa del caos (ovvero dalla transizione del sistema verso un regime dinamico caotico), che fornisce un criterio di non integrabilità utilizzabile sia analiticamente che numericamente.

⁶ Essendo $\dot{\varphi} = L_{\mathcal{H}}\varphi = \{\varphi, \mathcal{H}\}$, la meccanica hamiltoniana potrà esprimersi in termini parentesi di Poisson. In particolare, le equazioni canoniche assumeranno la forma

$$\dot{q}_i = \{q_i, \mathcal{H}\}, \quad \dot{p}_i = \{p_i, \mathcal{H}\} \quad (1 \leq i \leq n).$$

⁷ Esistono altri due tipi di sistemi integrabili, ovvero i sistemi autonomi a un grado di libertà, per i quali $\mathcal{H}(q, p)$ è l'unica costante del moto, e i sistemi autonomi dipendenti da una sola coordinata, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}(q_h, p_1, \dots, p_n)$, i quali ammettono come costanti del moto \mathcal{H} stessa e gli $n-1$ momenti $p_1, \dots, p_{h-1}, p_{h+1}, \dots, p_n$.

2.3 Trasformazioni lineari delle variabili coniugate

Come già accennato verso la fine dello scorso capitolo, si pone ora il problema di introdurre canonicamente le *coordinate eliocentriche* o le *coordinate di Jacobi* al fine di ridurre di tre il numero di gradi di libertà del sistema a molti corpi descritto, in variabili cartesiane, dall'Hamiltoniana (1.17).

Tale procedura di prima riduzione, definita comunemente *eliminazione del baricentro*, fa uso della conservazione della quantità di moto totale \mathbf{P} , e per realizzarla concretamente ci si avvarrà (nel prossimo paragrafo) di due *trasformazioni canoniche lineari* – alternative tra loro – delle variabili cartesiane (\mathbf{x}, \mathbf{y}) . Ciò che si otterrà una volta effettuata quest'operazione sarà un'Hamiltoniana suddivisa in una parte principale, coincidente col precitato termine imperturbato (benché non ancora in forma integrabile), e una parte secondaria, anche detta funzione perturbatrice, la quale renderà conto delle deviazioni dal moto kepleriano causate dalle mutue interazioni tra i pianeti. Dopodiché bisognerà ricorrere a un'ulteriore trasformazione canonica per convertire l'Hamiltoniana in una forma trattabile con il metodo perturbativo, come si vedrà a tempo debito.

Ora invece vale la pena di gettare un rapido sguardo alle trasformazioni lineari delle variabili coniugate, cui peraltro è intitolato il presente paragrafo. A questo proposito si consideri il sistema canonico autonomo a $n = 3(N + 1)$ gradi di libertà, con Hamiltoniana data da

$$(2.14) \quad \mathcal{H}(\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_N, \mathbf{y}_0, \dots, \mathbf{y}_N) = \sum_{i=0}^N \frac{\mathbf{y}_i^2}{2m_i} - G \sum_{0 \leq i < j \leq N} \frac{m_i m_j}{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|}$$

(espressione ripresa pari pari dal paragrafo 1.4 e qui riportata per comodità). Tale sistema ammette i noti integrali primi del moto

$$(2.15) \quad \mathcal{H} = T + U, \quad \mathbf{P} = \sum_{i=0}^N \mathbf{y}_i, \quad \mathbf{\Gamma} = \sum_{i=0}^N \mathbf{x}_i \wedge \mathbf{y}_i.$$

Sia dunque assegnata una matrice \mathbf{A} con $(N + 1) \times (N + 1)$ elementi a_{ij} ($i, j = 0, \dots, N$), non singolare, tale che una trasformazione lineare dalle coordinate $\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_N$ alle nuove coordinate $\mathbf{r}_0, \dots, \mathbf{r}_N$ possa scriversi come

$$(2.16) \quad \mathbf{r}_i = \sum_{j=0}^N a_{ij} \mathbf{x}_j,$$

la cui inversa è

$$(2.17) \quad \mathbf{x}_j = \sum_{i=0}^N \tilde{a}_{ji} \mathbf{r}_i,$$

avendo denotato con \tilde{a}_{ji} gli elementi della matrice \mathbf{A}^{-1} , inversa di \mathbf{A} , soddisfacenti la relazione $\sum_{j=0}^N a_{ij} \tilde{a}_{jl} = \delta_{il}$.

Tabella 2.1 – *Trasformazioni lineari delle variabili coniugate, dirette (prima colonna) e inverse (seconda colonna).*

$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow (\mathbf{r}, \mathbf{p})$	$(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \rightarrow (\mathbf{x}, \mathbf{y})$
$\mathbf{r} = \mathbf{A}\mathbf{x}$	$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{r}$
$\mathbf{p} = (\mathbf{A}^{-1})^\top \mathbf{y}$	$\mathbf{y} = \mathbf{A}^\top \mathbf{p}$

Una trasformazione di questo tipo si definisce puntuale, e può essere estesa a una trasformazione canonica ricorrendo alla funzione generatrice

$$S(\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_N, \mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_N) = \sum_{i,j=0}^N a_{ij} \mathbf{p}_i \mathbf{x}_j,$$

dove con $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_N$ si sono indicati i momenti coniugati alle nuove coordinate $\mathbf{r}_0, \dots, \mathbf{r}_N$. Se ne deduce che la trasformazione

$$(2.18) \quad \mathbf{y}_i = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}_i} = \sum_{j=0}^N a_{ji} \mathbf{p}_j$$

dai nuovi ai vecchi momenti è anch'essa lineare, con a_{ji} elementi di una matrice \mathbf{A}^\top trasposta della matrice \mathbf{A} di partenza.

Confrontando la (2.18) con la (2.17), che trasforma le coordinate nella stessa direzione, ci si accorge che le matrici delle due trasformazioni sono la trasposta dell'inversa una dell'altra. Si tratta di un risultato generale, convertibile nel seguente enunciato: se si esegue una trasformazione lineare delle coordinate facendo agire la matrice \mathbf{A} , allora la corrispondente trasformazione dei momenti è lineare e si ottiene facendo agire la matrice $(\mathbf{A}^{-1})^\top$, trasposta dell'inversa di \mathbf{A} (tabella 2.1).

Il cambiamento di variabili $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow (\mathbf{r}, \mathbf{p})$, con \mathbf{r} a indicare indifferentemente le coordinate eliocentriche o quelle di Jacobi, appartiene giustappunto alla classe delle trasformazioni lineari, le quali sono a loro volta comprese in un insieme più vasto di trasformazioni, quelle che godono della proprietà di lasciare invariata la forma del momento angolare $\mathbf{\Gamma}$. Infatti, com'è immediato verificare,

$$\mathbf{\Gamma} = \sum_{i=0}^N \mathbf{x}_i \wedge \mathbf{y}_i = \sum_{i=0}^N \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{p}_i.$$

2.4 Eliminazione del baricentro

Senza voler entrare nel dettaglio dei calcoli, si può dimostrare che la trasformazione lineare da coordinate cartesiane a coordinate eliocentriche

$$(2.19) \quad \mathbf{r}_0 = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{r}_i = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0 \quad (i = 1, \dots, N),$$

costruita mediante la matrice

$$(2.20) \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

produce⁸ l'Hamiltoniana trasformata

$$(2.21) \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \varepsilon \mathcal{H}_1,$$

dove (indicata con $\mu_i = m_0 m_i / (m_0 + m_i)$) la massa ridotta del pianeta i -esimo calcolata rispetto alla massa del Sole m_0)

$$(2.22) \quad \begin{aligned} \mathcal{H}_0 = T_0 + U_0 &= \sum_i \mathcal{H}_0^{(i)} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\mathbf{p}_i^2}{2\mu_i} - G \frac{(m_0 + m_i)\mu_i}{\|\mathbf{r}_i\|} \right) \\ \varepsilon \mathcal{H}_1 = T_1 + U_1 &= \sum_{i < j} \mathcal{H}_1^{(ij)} = \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j}{m_0} - G \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{m_i m_j}{\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|}. \end{aligned}$$

Tale Hamiltoniana dipende evidentemente solo dalle $2N$ variabili canoniche $(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N)$, il che significa che si è effettivamente ridotto di tre il numero di gradi di libertà eliminando il moto del baricentro (in forza del fatto che $\mathbf{p}_0 = \text{costante}$). Inoltre, come atteso, il termine \mathcal{H}_0 risulta dalla somma di N Hamiltoniane imperturbate distinte $\mathcal{H}_0^{(i)}$, una per ogni possibile coppia Sole-pianeta, mentre il termine \mathcal{H}_1 include il contributo ad \mathcal{H} di tutte le singole interazioni pianeta-pianeta $\mathcal{H}_1^{(ij)}$.

⁸ Occorre naturalmente specificare anche come trasformano i momenti coniugati. La tabella 2.1 mostra che il passaggio da \mathbf{y} a \mathbf{p} si realizza usando la matrice $(\mathbf{L}^{-1})^T$, trasposta dell'inversa di 2.20, pertanto è facile ottenere per i nuovi momenti le relazioni

$$\mathbf{p}_0 = \sum_{i=0}^N \mathbf{y}_i, \quad \mathbf{p}_j = \mathbf{y}_j \quad (1 \leq j \leq N),$$

dove \mathbf{p}_0 è la quantità di moto totale (costante).

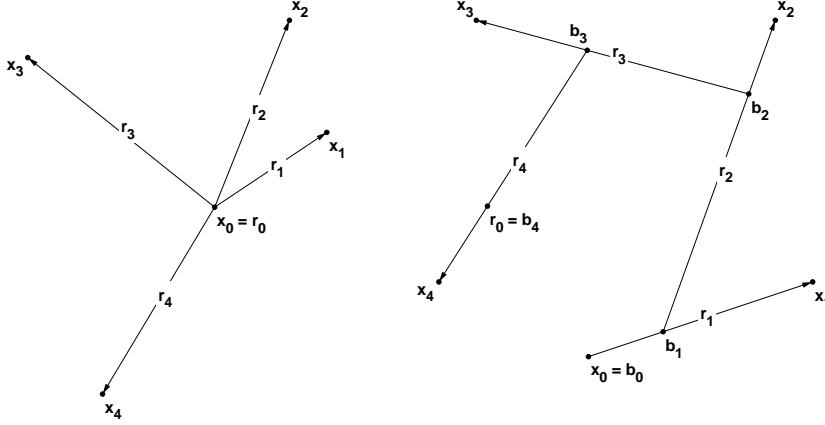


Figura 2.1 – Costruzione delle coordinate eliocentriche (sinistra) e di Jacobi (destra) per un sistema formato da $N + 1$ corpi mutuamente interagenti, con $N = 4$.

Il parametro $\varepsilon \sim \max_i \{\mu_i/m_0\}$ anteposto ad \mathcal{H}_1 – la cui utilità si apprezzerà meglio in seguito – evidenzia come quest’ultimo termine sia sensibilmente meno rilevante rispetto ad \mathcal{H}_0 . Nel caso del Sistema Solare ε equivale al rapporto tra la massa di Giove e quella del Sole, cioè $\varepsilon \simeq 10^{-3}$.

Si consideri ora la successione definita per ricorrenza

$$M_0 \mathbf{b}_0 = m_0 \mathbf{x}_0, \quad M_i \mathbf{b}_i = m_i \mathbf{x}_i + M_{i-1} \mathbf{b}_{i-1} \quad (i = 1, \dots, N),$$

dove

$$M_i = \sum_{a=0}^i m_a \quad (i = 0, \dots, N)$$

designa la massa del sistema formato dai primi i corpi.⁹ Il punto \mathbf{b}_0 individua la posizione del baricentro del primo corpo (cioè \mathbf{x}_0 stesso), il punto \mathbf{b}_1 la posizione del baricentro dei primi due, ecc. fino a \mathbf{b}_N , che è il baricentro del sistema formato da tutti gli $N + 1$ corpi (figura 2.1).

⁹ Si osservi in particolare che M_0 coincide con m_0 , mentre M_N indica la massa complessiva degli $N + 1$ corpi.

Premesso ciò, e alla luce di quanto riportato nella tabella 2.1, moltiplicando la matrice $(N + 1) \times (N + 1)$

$$(2.23) \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{m_0}{M_N} & \frac{m_1}{M_N} & \frac{m_2}{M_N} & \cdots & \frac{m_{N-1}}{M_N} & \frac{m_N}{M_N} \\ -\frac{m_0}{M_0} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\frac{m_0}{M_1} & -\frac{m_1}{M_1} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -\frac{m_0}{M_{N-2}} & -\frac{m_1}{M_{N-2}} & -\frac{m_2}{M_{N-2}} & \cdots & 1 & 0 \\ -\frac{m_0}{M_{N-1}} & -\frac{m_1}{M_{N-1}} & -\frac{m_2}{M_{N-1}} & \cdots & -\frac{m_{N-1}}{M_{N-1}} & 1 \end{pmatrix}$$

per il vettore colonna formato dagli elementi $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N$ si otterranno le relazioni ricorsive che definiscono la trasformazione lineare da coordinate cartesiane a coordinate di Jacobi, ovvero

$$(2.24) \quad \mathbf{r}_0 = \mathbf{b}_N, \quad \mathbf{r}_i = \mathbf{x}_i - \mathbf{b}_{i-1} \quad (i = 1, \dots, N),$$

dalle quali si potrà risalire ai nuovi momenti $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_N$ sempre tramite la trasposta della matrice inversa, in questo caso $(\mathbf{J}^{-1})^\top$.

L'applicazione di (2.24) all'Hamiltoniana (2.14) si realizza in concreto tramite una sequenza di passaggi algebrici piuttosto laboriosa (qui omessa per ragioni di brevità). È richiesto infatti uno sviluppo in serie di potenze del piccolo parametro ε dell'energia potenziale U , che condurrà a un'espressione del tipo

$$(2.25) \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \varepsilon \mathcal{H}_1 + \varepsilon^2 \mathcal{H}_2 + \varepsilon^3 \mathcal{H}_3 + \dots$$

per l'Hamiltoniana trasformata, in cui

$$(2.26) \quad \begin{aligned} \mathcal{H}_0 = T_0 + U_0 &= \sum_i \mathcal{H}_0^{(i)} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{M_i}{2M_{i-1}m_i} \mathbf{p}_i^2 - G \frac{m_0 m_i}{\|\mathbf{r}_i\|} \right), \\ \varepsilon \mathcal{H}_1 = U_1 &= -G \sum_{j=i+1}^N \sum_{i=1}^{N-1} \frac{m_i m_j}{\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|} + G \sum_{j=1}^N \frac{m_0 m_j}{\|\mathbf{r}_j\|^3} \sum_{l=1}^{j-1} \frac{m_l}{M_l} \mathbf{r}_j \cdot \mathbf{r}_l, \\ \varepsilon^2 \mathcal{H}_2 &= U_2, \quad \varepsilon^3 \mathcal{H}_3 = U_3, \quad \dots \end{aligned}$$

Anche in questo caso l'eliminazione del baricentro determina l'abbassamento di tre del numero di gradi di libertà del sistema, deducibile dal fatto che \mathcal{H} dipende soltanto – al pari di (2.22) – dalle $2N$ variabili canoniche $(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N)$.

Il termine \mathcal{H}_0 si presenta identico in forma al suo corrispettivo in variabili eliocentriche (fermo restando che, ovviamente, coordinate e momenti coniugati differiscono nei due casi), fatta eccezione per il coefficiente della parte cinetica.¹⁰ Esso risulta dalla sovrapposizione degli N moti kepleriani compiuti dal primo pianeta ($i = 1$) attorno al Sole, dal secondo pianeta ($i = 2$) attorno al baricentro del sistema formato dal Sole e dal primo pianeta, dal terzo pianeta ($i = 3$) attorno al baricentro del sistema formato dal Sole e dai precedenti due pianeti e via dicendo fino a $i = N$.¹¹ Quanto ai termini che seguono \mathcal{H}_0 , invece, essi rappresentano la perturbazione sviluppata in serie di potenze del parametro $\varepsilon \sim m_i/M_i \ll 1$ (avendo assunto in principio che $M_i \simeq m_0$ sia preponderante rispetto alla massa m_i di un singolo pianeta e che le distanze mutue tra i vari pianeti del sistema non diventino mai troppo piccole), secondo una consuetudine adottata nella stragrande maggioranza delle trattazioni classiche.

Il principale svantaggio derivante dall'utilizzo delle variabili di Jacobi consiste nel fatto che l'energia potenziale U assume una forma sensibilmente più complicata rispetto al caso eliocentrico, considerato che per scriverla in modo completo bisogna ricorrere a uno sviluppo in serie delle masse (anche se in pratica ci si arresta quasi sempre al primo ordine, poiché già solo isolare il termine U_2 risulta un'operazione alquanto disagiata). Malgrado ciò, dall'espressione (2.26) per l'Hamiltoniana trasformata risulta che l'energia cinetica T si riduce al solo termine diagonale T_0 , eliminando in tal modo il difetto intrinseco alle variabili eliocentriche. La presenza in \mathcal{H} di termini non diagonali dell'energia cinetica, come T_1 nella seconda delle (2.22), si ripercuote infatti sulle equazioni canoniche, facendo venir meno la proporzionalità tra i momenti \mathbf{p}_i e le velocità $\dot{\mathbf{r}}_i$.

Chiusa quest'ampia, ma doverosa, parentesi, si passerà ora a discutere di sistemi integrabili nel senso di Arnold-Jost, per arrivare in primis a scrivere il termine imperturbato \mathcal{H}_0 in opportune variabili d'angolo-azione, e successivamente a proporre uno sviluppo nelle medesime variabili per la funzione perturbatrice.

¹⁰ Si verifica facilmente che, in luogo della massa ridotta μ_i del pianeta i -esimo calcolata rispetto alla massa del Sole m_0 , al denominatore del coefficiente della parte cinetica di \mathcal{H}_0 in (2.22) compare la massa ridotta

$$\mu_i^* = \frac{M_{i-1}m_i}{M_{i-1} + m_i}$$

del pianeta i -esimo calcolata rispetto alla massa $M_{i-1} = \sum_{a=0}^{i-1} m_a$ ($i = 1, \dots, N$).

¹¹ Le coordinate relative di Jacobi individuano la posizione del pianeta i -esimo rispetto al baricentro del sistema formato dal Sole e dai precedenti $i - 1$ pianeti. Tale punto (indicato con \mathbf{b}_{i-1}) evidentemente non è fisso, a differenza di quanto accade nel caso delle coordinate eliocentriche, le quali esprimono la posizione del pianeta i -esimo sempre relativamente allo stesso punto (\mathbf{x}_0 , il Sole) qualunque sia $i \neq 0$. Questo spiacevole inconveniente si supera considerando che le distanze tra i vari baricentri $\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_N$, deliberatamente esagerate nella figura 2.1, sono di ordine ε .

2.5 Teorema di Arnold-Jost

Per quanto riguarda i sistemi hamiltoniani integrabili, riveste un'importanza cruciale il seguente

Teorema (di Arnold-Jost). *Sia assegnato un sistema canonico autonomo a n gradi di libertà, con Hamiltoniana $\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$. Se valgono le seguenti ipotesi:*

- i. in un dominio aperto \mathcal{D} nello spazio delle fasi \mathcal{F} il sistema ammette n integrali primi indipendenti $\{\varphi_1(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \dots, \varphi_n(\mathbf{q}, \mathbf{p})\}$ formanti un sistema completo in involuzione;*
- ii. dato $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$, la superficie di livello n -dimensionale M_{φ} , definita implicitamente in $\mathcal{D} \subset \mathcal{F}$ dalle equazioni $\varphi_1 = c_1, \dots, \varphi_n = c_n$, contiene una componente M_c connessa e compatta.*

Allora:

- i. M_c è una varietà differenziabile diffeomorfa a un toro \mathbb{T}^n , e su di essa si possono individuare n cicli $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ indipendenti;*
- ii. in un intorno aperto $U(M_c) \subset \mathcal{D}$ si possono introdurre, mediante una trasformazione canonica¹² $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \rightarrow (\vartheta, \mathbf{I})$, nuove variabili (usualmente dette "d'angolo-azione") $\vartheta \in \mathbb{T}^n$ e $\mathbf{I} \in \mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$ (\mathcal{G} aperto) tali che:*
 - i nuovi momenti $\{I_1, \dots, I_n\}$, o azioni, definiti come¹³*

$$(2.27) \quad I_i = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_i} \sum_j p_j(\mathbf{q}, \varphi) dq_j,$$

formano un sistema completo di integrali primi indipendenti e in involuzione, con la proprietà di essere in involuzione anche con $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ senza tuttavia esserne indipendenti;

- le nuove coordinate $\{\vartheta_1, \dots, \vartheta_n\}$ che si ottengono dall'applicazione del metodo di Liouville ai nuovi integrali primi $\{I_1, \dots, I_n\}$, ovvero*

$$(2.28) \quad \vartheta_i = \frac{\partial S}{\partial I_i}(\mathbf{q}, \mathbf{I}),$$

sono angoli, cioè $\vartheta_i = \vartheta_i + 2k\pi$ dopo il k -esimo completamento del ciclo γ_i ;

¹² Per costruzione. Conformemente al secondo criterio di canonicità (2.4) si fa ricorso alla funzione generatrice

$$S(\mathbf{q}, \mathbf{I}) = \int \sum_j p_j(\mathbf{q}, \mathbf{I}) dq_j.$$

¹³ Le trasformazioni canoniche godono della proprietà di conservare l'integrale lungo una curva chiusa γ della forma differenziale $\sum_j p_j dq_j$, dove le funzioni $p_j(\mathbf{q}, \varphi)$ si ottengono per inversione delle $\varphi_j(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ se è soddisfatta la condizione (2.8).

- nelle nuove variabili l'Hamiltoniana è funzione solamente dei nuovi momenti, $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathbf{I})$, pertanto il flusso canonico corrispondente si scriverà

$$(2.29) \quad \begin{aligned} \boldsymbol{\vartheta}(t) &= \boldsymbol{\vartheta}_0 + \boldsymbol{\omega}(\mathbf{I}_0)t \\ \mathbf{I}(t) &= \mathbf{I}_0, \end{aligned}$$

dove $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{I}_0) = \dot{\boldsymbol{\vartheta}}(t) = \nabla_{\mathbf{I}}\mathcal{H}(\mathbf{I}_0)$ sono le frequenze (costanti) associate agli angoli $\boldsymbol{\vartheta} \in \mathbb{T}^n$.

In virtù di questo teorema, o per meglio dire enunciato (in quanto riportato senza dimostrazione¹⁴), sostanzialmente qualsiasi Hamiltoniana integrabile potrà ridursi – previa definizione di appropriate variabili d'angolo-azione – a una funzione dei soli momenti. Tale ragguardevole risultato costituisce il primo passo in direzione dello sviluppo di una teoria perturbativa funzionale allo studio della dinamica dei sistemi cosiddetti *quasi-integrabili*, quali sono ad esempio i sistemi formati da N pianeti sufficientemente distanti tra loro in orbita attorno a stelle di massa $m_0 \gg m_i$ ($i = 1, \dots, N$).

Prima di procedere all'introduzione delle variabili d'angolo-azione per l'Hamiltoniana integrabile del problema dei due corpi, ovvero per ciascuno degli N termini $\sum_i \mathcal{H}_0^{(i)}$ in (2.22) o in (2.26), conviene riportarsi alla notazione tradizionale, indicando con \mathbf{q} e \mathbf{p} le variabili coniugate. Siano dunque $\mathcal{F} := \mathbb{T}^n \times \mathcal{G}$ lo spazio delle fasi a $2n$ dimensioni ($\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$ aperto), $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{T}^n$ le variabili angolari e $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n) \in \mathcal{G}$ le azioni del sistema. Si consideri inoltre un'Hamiltoniana

$$(2.30) \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}(p_1, \dots, p_n)$$

che dipenda solamente dalle azioni \mathbf{p} . Le equazioni canoniche assumeranno allora, in questa notazione, la forma particolarmente semplice (2.10), cioè

$$(2.31) \quad \dot{q}_i = \omega_i(p_1, \dots, p_n), \quad \dot{p}_i = 0 \quad (1 \leq i \leq n),$$

dove

$$(2.32) \quad \omega_i(p_1, \dots, p_n) = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}(p_1, \dots, p_n)$$

sono le frequenze associate alle variabili angolari q_i . Ne consegue che le orbite nello spazio delle fasi si scriveranno come in (2.29), oppure, in termini delle componenti q_i e p_i , come in (2.11):

$$(2.33) \quad q_i(t) = q_{i,0} + t\omega_i(p_{1,0}, \dots, p_{n,0}) \pmod{2\pi}, \quad p_i(t) = p_{i,0},$$

con $q_{i,0}$ e $p_{i,0}$ costanti determinate dalle condizioni iniziali.

¹⁴ Il lettore interessato può consultare ad esempio [3].

Nel moto descritto da un'Hamiltoniana integrabile, gli angoli \mathbf{q} circolano con frequenze costanti $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{p}_0)$ su tori \mathbb{T}^n parametrizzati da valori costanti delle azioni \mathbf{p} . I tori $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0$ risultano perciò invarianti per la dinamica (nel senso che una traiettoria il cui punto iniziale appartenga a un dato toro non abbandonerà mai tale toro), essendo appunto le azioni \mathbf{p} costanti del moto. Si dice in questo caso che lo spazio delle fasi è foliato in tori invarianti, poiché qualunque condizione iniziale $(\mathbf{q}(0), \mathbf{p}(0)) = (\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0)$ produrrà orbite giacenti su un toro invariante.

Il flusso lineare sul toro \mathbb{T}^n dato da (2.33) dipende dalle frequenze (2.32), e se queste sono tali che l'insieme¹⁵

$$(2.34) \quad \mathcal{M}_{\boldsymbol{\omega}} = \{ \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n \mid \langle \mathbf{k}, \boldsymbol{\omega} \rangle = 0 \},$$

dove

$$(2.35) \quad \langle \mathbf{k}, \boldsymbol{\omega} \rangle = \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^n k_i \omega_i = 0$$

è definita *risonanza*, ha dimensione nulla ($\dim \mathcal{M}_{\boldsymbol{\omega}} = 0$), cioè (2.35) ammette come unica soluzione intera $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n) = (0, \dots, 0)$, allora il moto degli angoli risulterà ovunque denso sul toro. Ciò significa che, dato un intorno arbitrariamente piccolo $U(\mathbf{q}_0)$ di un punto $\mathbf{q}_0 \in \mathbb{T}^n$ qualsiasi, la traiettoria $\mathbf{q}(t)$ degli angoli presto o tardi intersecherà $U(\mathbf{q}_0)$. In tal caso le frequenze $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^n$ si diranno *non risonanti*, e il moto corrispondente si dirà *quasi-periodico*.

Viceversa, se $\dim \mathcal{M}_{\boldsymbol{\omega}} = n - 1$, cioè (2.35) ammette per soluzioni $n - 1$ vettori indipendenti a componenti intere non nulle $\mathbf{k}^1, \dots, \mathbf{k}^{n-1}$, il moto degli angoli si dirà *periodico*, in quanto gli $n - 1$ angoli q_1, \dots, q_{n-1} potranno sempre esprimersi come funzioni periodiche dell'unico angolo q_n . Le frequenze associate alle variabili angolari q_i si diranno allora *completamente risonanti*.

Infine, nel caso intermedio in cui (2.35) ammetta per soluzioni solo m vettori indipendenti a componenti intere non nulle $\mathbf{k}^1, \dots, \mathbf{k}^m$ ($\dim \mathcal{M}_{\boldsymbol{\omega}} = m$, con $m < n - 1$), il moto risultante sul toro non si dirà né denso né periodico. Gli angoli q_1, \dots, q_m potranno esprimersi come funzioni periodiche degli altri $n - m$ angoli q_{m+1}, \dots, q_n , pertanto il moto proiettato sul toro \mathbb{T}^{n-m} , definito da q_{m+1}, \dots, q_n , sarà denso, mentre quello proiettato sul toro \mathbb{T}^m , definito da q_1, \dots, q_m , sarà periodico. Il numero m si definisce *molteplicità della risonanza*, mentre la quantità

$$(2.36) \quad \min_{1 \leq i \leq m} |\mathbf{k}^i| \quad \text{con } |\mathbf{k}^i| = |k_1^i| + \dots + |k_n^i|$$

è l'*ordine della risonanza*.

¹⁵ Anche detto *modulo di risonanza*.

In generale, dunque, le frequenze associate al moto delle variabili angolari dipenderanno dal toro considerato, ovvero dai valori iniziali assunti dalle azioni, tuttavia, nel caso in cui l'Hamiltoniana sia lineare nelle azioni, le frequenze risulteranno indipendenti da $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0$ e il sistema si dirà *isocrono*. I sistemi isocroni rappresentano una classe particolare di sistemi *degeneri*, i quali soddisfano la condizione

$$(2.37) \quad \det \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i \partial p_j} \right) = 0,$$

detta appunto condizione di degenerazione. Se un dato sistema è degenero allora esisterà almeno una direzione nello spazio delle azioni lungo la quale le frequenze non cambiano. Il problema dei due corpi ricade precisamente in questa casistica, e ciò influenzerà inevitabilmente anche la descrizione del moto perturbato di un pianeta in un sistema a molti corpi.¹⁶

2.6 Termine \mathcal{H}_0 in variabili d'angolo-azione

Si consideri ora la parte “kepleriana” \mathcal{H}_0 delle Hamiltoniane (2.22) e (2.26), che per semplicità si può riscrivere come somma di N contributi $\mathcal{H}_0^{(i)}$ del tipo

$$(2.38) \quad \mathcal{H}_0^{(i)} = \mathcal{H}_{\text{kep}} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{k}{r} \quad (1 \leq i \leq N),$$

con $r = \|\mathbf{r}_i\|$ e le grandezze m e k da declinarsi come segue:

$$m \rightarrow \mu_i, \quad k \rightarrow G(m_0 + m_i)\mu_i,$$

nel caso delle variabili eliocentriche;

$$m \rightarrow \mu_i^*, \quad k \rightarrow Gm_0m_i,$$

nel caso delle variabili di Jacobi.

Ciascun addendo (2.38) descriverà ovviamente la dinamica di un sistema hamiltoniano a $n = 3$ gradi di libertà, in quanto l'eliminazione del moto del baricentro della generica coppia (m_0, m_i) comporta la riduzione del problema dei due corpi al problema del moto di un corpo di massa m in un campo di forze centrali. Ponendosi a questo punto in un sistema di coordinate polari sferiche (r, ϑ, φ) con origine nel centro di forza, la (2.38) diventa

$$(2.39) \quad \mathcal{H}_{\text{kep}} = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\vartheta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \vartheta} \right) - \frac{k}{r},$$

dove $(p_r, p_\vartheta, p_\varphi) = (m\dot{r}, m r^2 \dot{\vartheta}, m r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi})$ sono i momenti coniugati a (r, ϑ, φ) nello spazio delle fasi $\mathcal{F} := [0, +\infty[\times [0, \pi] \times \mathbb{T} \times \mathbb{R}^3$.

¹⁶ Si ricordi che il cosiddetto *problema planetario* risulta dall'applicazione di una piccola perturbazione al moto kepleriano descritto dal problema dei due corpi.

Si può facilmente dimostrare che $\{\Gamma_z, \|\mathbf{\Gamma}\|^2, \mathcal{H}_{\text{kep}}\}$ formano un sistema completo di integrali primi indipendenti e in involuzione per la coppia composta da Sole e pianeta i -esimo¹⁷, quindi, per il teorema di Arnold-Jost, è possibile costruire le variabili d'angolo-azione. Individuati infatti i tre cicli indipendenti $\gamma_r, \gamma_\vartheta$ e γ_φ , e invertite le espressioni di $\Gamma_z, \|\mathbf{\Gamma}\|^2$ e \mathcal{H}_{kep} rispetto a p_r, p_ϑ e p_φ , le azioni discendono direttamente dal calcolo (qui omissso, si veda per esempio [cit.]) degli integrali di linea (2.27):

$$(2.40) \quad p_1 = \Gamma_z, \quad p_2 = \|\mathbf{\Gamma}\| - \Gamma_z, \quad p_3 = -\|\mathbf{\Gamma}\| + k\sqrt{-\frac{m}{2\mathcal{H}_{\text{kep}}}}.$$

Gli angoli coniugati q_1, q_2 e q_3 si otterranno applicando il metodo di Liouville ai nuovi integrali primi $\{p_1, p_2, p_3\}$, indipendenti e in involuzione, previa definizione della funzione generatrice

$$S(r, \vartheta, \varphi, p_1, p_2, p_3) = \int p_r(r, p_1, p_2, p_3) dr + p_\vartheta(\vartheta, p_1, p_2) d\vartheta + p_\varphi(p_1) d\varphi.$$

Poiché le variabili d'angolo-azione testé introdotte non sono le uniche possibili, ma se ne possono sempre definire di nuove a partire da esse mediante trasformazioni lineari (si veda la tabella 2.1 a pagina 19), risulta particolarmente conveniente la scelta seguente:

$$(2.41) \quad \begin{aligned} L &= p_1 + p_2 + p_3 & \ell &= q_3 \\ G &= p_1 + p_2 & g &= q_2 - q_3 \\ H &= p_1 & h &= q_1 - q_2. \end{aligned}$$

In queste nuove variabili canoniche, comunemente designate con il nome di *variabili di Delaunay*, l'Hamiltoniana $\mathcal{H}_{\text{kep}}(p_1, p_2, p_3)$, deducibile dalle azioni (2.40), si scriverà semplicemente

$$(2.42) \quad \mathcal{H}_{\text{kep}}(L) = -\frac{mk^2}{2L^2},$$

e quindi il termine imperturbato \mathcal{H}_0 del problema planetario, risultante dalla sovrapposizione di N termini come (2.42), assumerà infine la forma integrabile desiderata

$$(2.43) \quad \mathcal{H}_0(L_1, \dots, L_N) = -\sum_{i=1}^N \frac{m_i k_i^2}{2L_i^2}.$$

¹⁷ Nel caso del moto in un campo di forze centrali caratterizzato dal potenziale kepleriano $V(r) \sim 1/r$ si possono individuare sette integrali primi (che sono l'Hamiltoniana \mathcal{H}_{kep} , il momento angolare $\mathbf{\Gamma} = (\Gamma_x, \Gamma_y, \Gamma_z)$ e il vettore $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$ di Runge-Lenz), dei quali cinque indipendenti. Ne consegue che l'orbita giace su una superficie di livello 1-dimensionale (cioè una curva) nello spazio delle fasi \mathcal{F} tale che $\dim \mathcal{F} = 2n = 6$.

Le variabili di Delaunay (2.41) sono legate ai sei elementi orbitali elencati nella tabella 1.1 del paragrafo 1.3 dalle relazioni

$$(2.44) \quad \begin{aligned} L &= \sqrt{mka} & \ell &= n(t - \tau) \\ G &= L\sqrt{1 - e^2} & g &= \omega \\ H &= G \cos i & h &= \Omega, \end{aligned}$$

dove L si ricava ricordando che l'Hamiltoniana \mathcal{H}_{kep} assume il valore costante $E = -k/2a$, mentre G e H coincidono rispettivamente con la norma $\|\mathbf{\Gamma}\|$ del momento angolare e con la proiezione Γ_z del momento angolare lungo l'asse z del riferimento solidale con le stelle fisse.

Esplicitata l'Hamiltoniana \mathcal{H}_{kep} non rimane che scrivere le equazioni del moto corrispondenti, ovvero

$$(2.45) \quad \begin{aligned} \dot{\ell} &= \frac{\partial \mathcal{H}_{\text{kep}}}{\partial L} = \frac{mk^2}{L^3} & \dot{L} &= -\frac{\partial \mathcal{H}_{\text{kep}}}{\partial \ell} = 0 \\ \dot{g} &= \frac{\partial \mathcal{H}_{\text{kep}}}{\partial G} = 0 & \dot{G} &= -\frac{\partial \mathcal{H}_{\text{kep}}}{\partial g} = 0 \\ \dot{h} &= \frac{\partial \mathcal{H}_{\text{kep}}}{\partial H} = 0 & \dot{H} &= -\frac{\partial \mathcal{H}_{\text{kep}}}{\partial h} = 0, \end{aligned}$$

dalle quali si evince immediatamente che la condizione di degenerazione (2.37) risulta soddisfatta (in quanto l'unico elemento h_{ij} della matrice hessiana diverso da zero è $h_{11} = \partial^2 \mathcal{H}_{\text{Kep}} / \partial L^2$). In particolare, poiché \mathcal{H}_{kep} dipende soltanto da un'azione (L) su tre, l'unica frequenza non nulla sarà quella del moto di ℓ , anch'essa dipendente soltanto da L . Ciò significa che $\ell = \omega(L)$ non cambierà al variare di G e H (degenerazione lungo due direzioni nello spazio delle azioni), mentre \dot{g} e \dot{h} , identicamente nulle, produrranno le due costanti del moto aggiuntive g e h (degenerazione lungo tutte le direzioni nello spazio delle azioni). Appare perciò chiaro come anche piccole perturbazioni del problema dei due corpi, tipo il problema planetario, possano dare origine a una dinamica molto complicata.

Volendo ora determinare il moto imperturbato del pianeta i -esimo nelle variabili originarie, $\mathbf{x}_i = (X_i, Y_i, Z_i)$, occorrerà compiere in sequenza i passi del seguente algoritmo:

- i. invertire le (2.44) per ricavare gli elementi orbitali;
- ii. risolvere l'equazione di Keplero $u_i - e_i \sin u_i = \ell_i$ per trovare l'anomalia eccentrica u_i in funzione dell'anomalia media ℓ_i (si tratta di un'equazione trascendente, la cui soluzione analitica non è banale);
- iii. calcolare $q_1^i = q_1^i(a_i, e_i, u_i(\ell_i))$ e $q_2^i = q_2^i(a_i, e_i, u_i(\ell_i))$, le componenti cartesiane del vettore posizione $\mathbf{q}_i = (q_1^i, q_2^i, 0)$ del pianeta i -esimo sul piano orbitale (si veda la figura 1.1 a pagina 8);

- iv. effettuare la rotazione $\mathbf{R} = \mathbf{R}_\Omega \cdot \mathbf{R}_i \cdot \mathbf{R}_\omega$ per ottenere $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$, cioè le coordinate relative (eliocentriche o di Jacobi) del pianeta i -esimo;
- v. applicare le trasformazioni inverse rispetto alle (2.19) o alle (2.24), mediante le matrici \mathbf{L}^{-1} e \mathbf{J}^{-1} rispettivamente, per risalire alle coordinate cartesiane $\mathbf{x}_i = (X_i, Y_i, Z_i)$.

Le variabili di Delaunay sono soggette all'ovvia limitazione, inerente al momento angolare, $|H| \leq G$, inoltre presentano delle singolarità (peraltro già evidenziate nel paragrafo 1.3) in corrispondenza dei valori $e = 0$ (orbita circolare) e $i = 0, \pi$ (orbita giacente sul piano orizzontale). Nel primo caso, che si verifica per $L = G$, l'impossibilità di specificare la posizione del perielio comporta la perdita di significato degli angoli g (cioè ω) ed ℓ , mentre nel secondo caso, che si verifica per $G = H$, l'impossibilità di specificare la posizione del nodo comporta la perdita di significato degli angoli h (cioè Ω), g ed ℓ . In aggiunta a queste singolarità se ne può identificare un'altra, in corrispondenza di $G = 0$ (traiettoria collisionale).

È possibile ovviare al problema ricorrendo a una trasformazione canonica lineare delle (2.44) per costruire le cosiddette *variabili di Delaunay modificate*

$$\begin{aligned}
 \Lambda_i &= L_i & \lambda_i &= \ell_i + g_i + h_i = \ell_i + \omega_i + \Omega_i \\
 (2.46) \quad P_i &= L_i - G_i = L_i(1 - \sqrt{1 - e_i^2}) & p_i &= -g_i - h_i = -\varpi_i \\
 Q_i &= G_i - H_i = 2G_i \sin^2 \frac{i_i}{2} & q_i &= -h_i = -\Omega_i,
 \end{aligned}$$

dove, al solito, l'indice $i = 1, \dots, N$ è stato aggiunto per contrassegnare il pianeta i -esimo. Dalle (2.46) si evince che le orbite singolari (caratterizzate ancora dai valori $e = 0$ e $i = 0, \pi$), in corrispondenza delle quali gli angoli $p = -\varpi$ e $q = -\Omega$ perdono di significato¹⁸, sono associate alle azioni $P = 0$ e $Q = 0$. Questo difetto intrinseco alle variabili di Delaunay modificate, tipico dei sistemi di coordinate polari, si può eliminare introducendo canonicamente le *variabili di Poincaré* (ξ, η) in luogo di (P, p) e (Q, q) :

$$\begin{aligned}
 (2.47) \quad \xi_i &= \sqrt{2P_i} \cos p_i & \eta_i &= \sqrt{2P_i} \sin p_i \\
 \xi_{N+i} &= \sqrt{2Q_i} \cos q_i & \eta_{N+i} &= \sqrt{2Q_i} \sin q_i.
 \end{aligned}$$

In conclusione, indicando con $\mathbf{\Lambda} = (\Lambda_1, \dots, \Lambda_N)$ le azioni dipendenti dai semiassi maggiori a_i delle orbite dei vari pianeti, sia che si adottino le variabili di Delaunay modificate che quelle di Poincaré il termine \mathcal{H}_0 manterrà la forma (2.43), ovvero

$$(2.48) \quad \mathcal{H}_0(\mathbf{\Lambda}) = - \sum_{i=1}^N \frac{m_i k_i^2}{2\Lambda_i^2}.$$

¹⁸ Al contrario la longitudine media λ risulta sempre ben definita.

2.7 Sviluppo della funzione perturbatrice

L'utilità delle variabili d'angolo-azione si apprezza maggiormente nell'istante in cui ci si pone il problema di dare ai termini perturbativi che compaiono in (2.22) e in (2.26) una forma che sia effettivamente sfruttabile per la ricerca di soluzioni, almeno approssimate, delle equazioni del moto. In variabili di Delaunay tali equazioni, che di fatto sostituiscono quelle di Lagrange (1.10) per gli elementi orbitali, si scrivono

$$(2.49) \quad \begin{aligned} \dot{\ell}_i &= \frac{m_i k_i^2}{L_i^3} + \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial L_i} & \dot{L}_i &= -\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial \ell_i} \\ \dot{g}_i &= \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial G_i} & \dot{G}_i &= -\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial g_i} \\ \dot{h}_i &= \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial H_i} & \dot{H}_i &= -\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial h_i}, \end{aligned}$$

dove con \mathcal{H}_1 si è indicata genericamente la funzione perturbatrice.

Intuitivamente ci si aspetta che \mathcal{H}_1 risulti essere una funzione periodica degli angoli ℓ_i , g_i e h_i – o in alternativa degli angoli λ_i , p_i e q_i se si usano le variabili di Delaunay modificate –, pertanto, in linea di principio, se ne dovrebbe poter fornire lo sviluppo in serie di Fourier degli angoli stessi. In particolare, seguendo Poincaré [22], si può dimostrare che \mathcal{H}_1 :

- è una funzione *analitica* (o più precisamente olomorfa) sia in variabili di Delaunay modificate che in variabili di Poincaré, ovvero una funzione localmente esprimibile come una serie di potenze (convergente);
- in variabili di Delaunay modificate assume la forma di una serie di Fourier degli angoli λ_i , p_i e q_i , con coefficienti polinomiali in $\sqrt{P_i}$ e $\sqrt{Q_i}$;
- in variabili di Poincaré assume la forma di una serie di Fourier degli angoli λ_i , con coefficienti polinomiali in ξ_i ed η_i .

Denotando con $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\beta}$ due vettori a N componenti intere non negative e con \mathbf{k} , \mathbf{m} ed \mathbf{s} tre vettori a N componenti intere, l'espressione più generale per lo sviluppo in serie di Fourier di \mathcal{H}_1 in variabili di Delaunay modificate sarà dunque data da

$$(2.50) \quad \mathcal{H}_1 = \sum_{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{Z}_+^N} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{m}, \mathbf{s} \in \mathbb{Z}^N} c_{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{k}, \mathbf{m}, \mathbf{s}}(\boldsymbol{\Lambda}) \mathbf{P}^{\boldsymbol{\alpha}/2} \mathbf{Q}^{\boldsymbol{\beta}/2} \cdot \exp(i \langle \mathbf{k}, \boldsymbol{\lambda} \rangle + i \langle \mathbf{m}, \mathbf{p} \rangle + i \langle \mathbf{s}, \mathbf{q} \rangle),$$

dove $c_{\alpha,\beta,\mathbf{k},\mathbf{m},\mathbf{s}}(\mathbf{\Lambda})$ sono degli appropriati coefficienti dipendenti dalle azioni $\mathbf{\Lambda} = (\Lambda_1, \dots, \Lambda_N)$ da determinarsi con il calcolo¹⁹,

$$\mathbf{P}^{\alpha/2} \mathbf{Q}^{\beta/2} = \prod_{i=1}^N P_i^{\alpha_i/2} Q_i^{\beta_i/2}$$

e infine

$$\langle \mathbf{k}, \boldsymbol{\lambda} \rangle = \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\lambda} = \sum_{i=1}^N k_i \lambda_i.$$

Analogamente, ridefinendo $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\beta}$ come vettori a $2N$ componenti intere non negative, in variabili di Poincaré la funzione perturbatrice si scriverà

$$(2.51) \quad \mathcal{H}_1 = \sum_{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{Z}_+^{2N}} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^N} c_{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{k}}(\mathbf{\Lambda}) \boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{\alpha}} \boldsymbol{\eta}^{\boldsymbol{\beta}} \exp(i \langle \mathbf{k}, \boldsymbol{\lambda} \rangle).$$

Le serie (2.50) e (2.51) risultano convergere uniformemente per tutti i valori degli angoli, per $\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}$ in un intorno dell'origine e per $\mathbf{\Lambda}$ in un dominio da specificare opportunamente (cfr. paragrafi 3.3, 3.4 e 3.6).²⁰

Invero non tutte le combinazioni di angoli sono permesse, giacché esistono alcune regole di selezione, note come *caratteristiche di D'Alembert*, alle quali la funzione perturbatrice deve necessariamente sottostare. Più precisamente, nel caso delle variabili di Delaunay modificate:

- i. \mathcal{H}_1 dev'essere una funzione reale, invariante rispetto a un cambiamento simultaneo di segno di tutti gli angoli λ_i, p_i e q_i . Ne consegue che i coefficienti $c_{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{k}, \mathbf{m}, \mathbf{s}}$ assumeranno valori reali soddisfacenti alla condizione $c_{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{k}, \mathbf{m}, \mathbf{s}} = c_{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, -\mathbf{k}, -\mathbf{m}, -\mathbf{s}}$, e lo sviluppo (2.50) conterrà solo coseni.
- ii. \mathcal{H}_1 dev'essere invariante per una rotazione (di un angolo δ arbitrario) del sistema di riferimento attorno alla direzione individuata dall'asse $z \parallel Z$. Ne consegue che $\sum_i (k_i - m_i - s_i) = 0$.
- iii. \mathcal{H}_1 dev'essere invariante sotto un cambiamento simultaneo di segno di tutte le inclinazioni, ovvero sotto la trasformazione $Q_i^{1/2} \rightarrow Q_i^{-1/2} \forall i$. Ne consegue che $\sum_i \beta_i$ sarà un numero pari.

¹⁹ Si veda per esempio [2].

²⁰ Si osservi, en passant, che se la funzione perturbatrice "di partenza" fosse quella espressa in variabili di Jacobi, ovvero $\varepsilon \mathcal{H}_1 + \varepsilon^2 \mathcal{H}_2 + \varepsilon^3 \mathcal{H}_3 + \dots$, la sua espansione in serie di Fourier dovrebbe contenere in linea di principio anche uno sviluppo in serie di potenze del piccolo parametro ε . Tuttavia, nella pratica, i termini di ordine superiore al primo in ε vengono solitamente trascurati, sicché, come in variabili eliocentriche, la funzione perturbatrice si riduce ad \mathcal{H}_1 (il che tra l'altro giustifica la scelta della notazione).

iv. \mathcal{H}_1 dev'essere sviluppabile in serie di potenze delle variabili $\xi(P, p)$ ed $\eta(Q, q)$, date dalle (2.47), in un intorno dell'origine. Ne consegue che $|m_i| \leq \alpha_i$ e $|s_i| \leq \beta_i$ per $i = 1, \dots, N$, inoltre m_i ed s_i avranno la stessa parità di α_i e β_i rispettivamente. In altre parole, m_i potrà assumere solamente i valori $-\alpha_i, -\alpha_i + 2, \dots, \alpha_i - 2, \alpha_i$ e s_i solamente i valori $-\beta_i, -\beta_i + 2, \dots, \beta_i - 2, \beta_i$.

Passando ora alle variabili di Poincaré, in base ad analoghe considerazioni sulle proprietà analitiche e di simmetria di \mathcal{H}_1 , si può dimostrare che:

- i. i coefficienti $c_{\alpha, \beta, \mathbf{k}}$ assumeranno valori complessi soddisfacenti alla condizione $c_{\alpha, \beta, \mathbf{k}} = c_{\alpha, \beta, -\mathbf{k}}^*$, e lo sviluppo (2.51) conterrà seni in corrispondenza dei termini con $|\beta|$ dispari e coseni in corrispondenza dei termini con $|\beta|$ pari;
- ii. la somma $\alpha_{N+1} + \dots + \alpha_{2N} + \beta_{N+1} + \dots + \beta_{2N}$ sarà un numero pari;
- iii. le due somme $k_1 + \dots + k_N$ e $\alpha_1 + \dots + \alpha_{2N} + \beta_1 + \dots + \beta_{2N}$ saranno legate dalla relazione $k_1 + \dots + k_N \leq \alpha_1 + \dots + \alpha_{2N} + \beta_1 + \dots + \beta_{2N}$, e avranno la stessa parità.

In definitiva, dunque, l'applicazione del teorema di Arnold-Jost al caso semplice del moto kepleriano ha consentito di introdurre nuove variabili, le variabili d'angolo-azione, mediante le quali l'Hamiltoniana di un sistema isolato costituito da $N + 1$ corpi gravitazionalmente interagenti (il Sole e la sua corte di pianeti) è stata trasformata nella somma di:

- un termine imperturbato $-\mathcal{H}_0$ – dipendente solo dalle azioni (e quindi integrabile);
- una piccola perturbazione $-\mathcal{H}_1$ – sviluppabile in serie di Fourier degli angoli coniugati alle azioni stesse.

Più precisamente

$$(2.52) \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \boldsymbol{\Lambda}, \mathbf{P}, \mathbf{Q}) = \mathcal{H}_0(\boldsymbol{\Lambda}) + \varepsilon \mathcal{H}_1(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \boldsymbol{\Lambda}, \mathbf{P}, \mathbf{Q})$$

in variabili di Delaunay modificate e

$$(2.53) \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\Lambda}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = \mathcal{H}_0(\boldsymbol{\Lambda}) + \varepsilon \mathcal{H}_1(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\Lambda}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$$

in variabili di Poincaré, dove:

- \mathcal{H}_0 sarà data da (2.48) in entrambi i casi;
- \mathcal{H}_1 sarà data da (2.50) per la (2.52) e da (2.51) per la (2.53), cioè dagli sviluppi di Fourier del termine perturbativo (opportunamente riformulato nelle variabili d'angolo-azione prescelte) che compare in (2.22) o in (2.26).

I sistemi descritti da Hamiltoniane di questo tipo (ai quali peraltro sarà interamente dedicato il prossimo capitolo) si definiscono quasi-integrabili, e la loro trattazione richiederà l'utilizzo del metodo perturbativo.

2.8 Momento angolare in variabili d'angolo-azione

Prima di procedere allo studio dei sistemi quasi-integrabili vale la pena di fare una breve digressione sul momento angolare. Nelle pagine precedenti è stato più volte rimarcato come le componenti del vettore $\mathbf{\Gamma}$ lungo gli assi x, y, z di un riferimento cartesiano solidale con le stelle fisse rappresentino altrettanti integrali primi del moto per il sistema a molti corpi descritto dall'Hamiltoniana (2.14). Ovviamente, poiché le trasformazioni da variabili cartesiane a variabili eliocentriche (o di Jacobi) e da queste ultime a variabili d'angolo-azione sono entrambe canoniche, le quantità $\Gamma_x, \Gamma_y, \Gamma_z$ rimarranno integrali primi del moto per il sistema a molti corpi anche una volta posta l'Hamiltoniana nella forma (2.52) o (2.53), come il lettore può verificare direttamente calcolando le relative derivate di Lie.²¹

Lo scopo del presente paragrafo è appunto quello di fornire le espressioni di $\Gamma_x, \Gamma_y, \Gamma_z$ nei sistemi di coordinate di Delaunay e Poincaré introdotti nel paragrafo 2.6. Si consideri dunque, per semplicità, il caso di un singolo pianeta in moto attorno alla propria stella e, con l'aiuto della figura 1.2 di pagina 8, si osservi che (per costruzione):

- $G = \|\mathbf{\Gamma}\|$ e $H = \Gamma_z$;
- il piano orbitale è ortogonale alla direzione del vettore $\mathbf{\Gamma}$;
- l'angolo i formato da $\mathbf{\Gamma}$ con l'asse z rappresenta l'inclinazione del piano orbitale rispetto al piano xy di riferimento;
- l'angolo h coincide con la longitudine del nodo ascendente Ω ;
- l'asse dei nodi è ortogonale sia a $\mathbf{\Gamma}$ che a z .

Dai punti precedenti segue che, in variabili di Delaunay, le componenti del momento angolare si possono scrivere

$$\begin{aligned}
 \Gamma_x &= G \sin i \sin h = \sqrt{G^2 - H^2} \sin h \\
 \Gamma_y &= G \sin i \cos h = -\sqrt{G^2 - H^2} \cos h \\
 \Gamma_z &= G \cos i = H,
 \end{aligned}
 \tag{2.54}$$

facilmente generalizzabili al caso di un sistema multi-pianeta formato da $N + 1$ corpi (cfr. infra).

Passando alle variabili di Delaunay modificate tramite le relazioni

$$G = \Lambda - P, \quad H = G - Q, \quad h = -q,$$

²¹ Si ricordi che le trasformazioni canoniche conservano le parentesi di Poisson fondamentali (2.2).

e poi sommando su tutti i pianeti, si ottengono per $\Gamma_x, \Gamma_y, \Gamma_z$ le espressioni

$$\begin{aligned}
 \Gamma_x &= - \sum_{i=1}^N \sqrt{2Q_i} \sin q_i \sqrt{\Lambda_i - P_i - \frac{Q_i}{2}} \\
 \Gamma_y &= - \sum_{i=1}^N \sqrt{2Q_i} \cos q_i \sqrt{\Lambda_i - P_i - \frac{Q_i}{2}} \\
 \Gamma_z &= \sum_{i=1}^N [\Lambda_i - P_i - Q_i] ,
 \end{aligned}
 \tag{2.55}$$

che riportate in variabili di Poincaré diventano

$$\begin{aligned}
 \Gamma_x &= - \sum_{i=1}^N \eta_{N+i} \sqrt{\Lambda_i - \frac{\xi_i^2 + \eta_i^2}{2} - \frac{\xi_{N+i}^2 + \eta_{N+i}^2}{4}} \\
 \Gamma_y &= - \sum_{i=1}^N \xi_{N+i} \sqrt{\Lambda_i - \frac{\xi_i^2 + \eta_i^2}{2} - \frac{\xi_{N+i}^2 + \eta_{N+i}^2}{4}} \\
 \Gamma_z &= \sum_{i=1}^N \left[\Lambda_i - \frac{\xi_i^2 + \eta_i^2}{2} - \frac{\xi_{N+i}^2 + \eta_{N+i}^2}{2} \right] .
 \end{aligned}
 \tag{2.56}$$

Per la conservazione del momento angolare si avrà che

$$\{\Gamma_x, \mathcal{H}\} = \{\Gamma_y, \mathcal{H}\} = \{\Gamma_z, \mathcal{H}\} = 0 ,$$

quali che siano le variabili d'angolo-azione utilizzate. Questo importante risultato tornerà utile in seguito, quando si parlerà degli integrali primi per il sistema secolare.

Capitolo 3

Forma normale secolare

L'Hamiltoniana di un sistema planetario espressa in variabili di Delaunay modificate (2.52) o in variabili di Poincaré (2.53) si presenta nella forma

$$(3.1) \quad \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \mathcal{H}_0(\mathbf{p}) + \varepsilon \mathcal{H}_1(\mathbf{q}, \mathbf{p}),$$

dove $\varepsilon \ll 1$ è il cosiddetto “parametro di piccolezza”, mentre con $\mathbf{q} \in \mathbb{T}^n$ e $\mathbf{p} \in \mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$ si sono indicate, coerentemente con la notazione convenzionale richiamata nel paragrafo 2.5, le $2n$ variabili coniugate d'angolo-azione. Posto che $\nabla_{\mathbf{p}} \mathcal{H}_0 = \boldsymbol{\omega}_0$ e \mathcal{H}_1 sono grandezze da intendersi dell'ordine dell'unità, un sistema descritto da un'Hamiltoniana del tipo (3.1) viene usualmente definito *quasi-integrabile* (e la funzione \mathcal{H} stessa potrà dirsi a sua volta, seppur impropriamente, quasi-integrabile),

Appare dunque naturale trattare il termine principale \mathcal{H}_0 come l'approssimazione integrabile e il termine secondario \mathcal{H}_1 come la sua perturbazione; infatti, il flusso (2.33) indotto da \mathcal{H}_0 approssima all'ordine ε la dinamica reale (generata dall'Hamiltoniana completa \mathcal{H}), nel senso che la traiettoria del moto devierà da quella effettiva di una quantità $O(\varepsilon)$ in un tempo dell'ordine dell'unità (e di una quantità dell'ordine dell'unità in un tempo $\sim \varepsilon^{-1}$). Se ci si pone l'obiettivo di fornire una descrizione maggiormente accurata della dinamica reale, oppure di studiare il comportamento di un sistema quasi-integrabile su tempi scala più lunghi di ε^{-1} , allora la sola conoscenza del flusso indotto da \mathcal{H}_0 non è più sufficiente, e diventa pertanto necessario ricorrere ai *metodi perturbativi* per affinare l'approssimazione.

Nel caso specifico dei sistemi planetari occorre inoltre tener conto di un'ulteriore complicazione, peraltro già rilevata in precedenza: il termine imperturbato \mathcal{H}_0 , dato in variabili di Delaunay modificate e in variabili di Poincaré da (2.48), dipende soltanto da una parte delle azioni, ovvero $\boldsymbol{\Lambda}$. Ne risulta che, considerando ad esempio le variabili di Delaunay modificate, all'ordine zero in ε le azioni \mathbf{P} e \mathbf{Q} rimarranno costanti nel tempo e, contestualmente, le frequenze associate al moto degli angoli \mathbf{p} e \mathbf{q} , coniugati a \mathbf{P} e \mathbf{Q} , si annulleranno ($\dot{\mathbf{p}} = \dot{\mathbf{q}} = 0$, degenerazione). Come conseguenza, essendo $\varepsilon \ll 1$, le variabili angolari si potranno distinguere in:

- *angoli veloci*, ovvero le longitudini medie $\boldsymbol{\lambda}$, che evolvono nel tempo con velocità sostanzialmente pari a $\nabla_{\boldsymbol{\Lambda}} \mathcal{H}_0 = \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\Lambda}_0)$. Sono associati ai moti orbitali dei corpi costituenti il sistema planetario.
- *angoli lenti*, ovvero le longitudini dei perielii \mathbf{p} e dei nodi \mathbf{q} , che evolvono lentamente nel tempo (con velocità di ordine ε). Sono associati ai moti di precessione delle orbite dei corpi costituenti il sistema planetario.

Ciò assumerà particolare rilievo più avanti, quando si affronterà in concreto il cosiddetto *problema secolare*.

Diversamente dai trattati classici, e in ottemperanza all'approccio metodologico prescelto – che essenzialmente ricalca quello adottato in [6] e [17] da *A. Morbidelli* e *A. Giorgilli* – la ricerca di migliori approssimazioni della dinamica di un sistema planetario non sarà condotta a partire dalle equazioni del moto, bensì operando direttamente sull'Hamiltoniana (3.1). In particolare, la trattazione analitica delle perturbazioni secolari richiederà di porre la funzione \mathcal{H} , opportunamente declinata in variabili di Delaunay modificate o in variabili di Poincaré, nella cosiddetta *forma normale*.

3.1 Introduzione alla teoria delle perturbazioni

Dati una funzione arbitraria $f(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{p}})$ e un parametro reale ε , si consideri la funzione

$$S(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{p}}) = \sum_i \bar{p}_i q_i + \varepsilon f(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{p}}),$$

soddisfacente alla condizione di invertibilità (2.3) per valori di ε sufficientemente vicini a zero ($\varepsilon \ll 1$), generatrice di una trasformazione canonica $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \rightarrow (\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{p}})$ prossima all'identità. In forma implicita, per il secondo criterio di canonicità (2.4), la trasformazione indotta da S si scriverà

$$\bar{q}_i = q_i + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial \bar{p}_i}(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{p}}), \quad p_i = \bar{p}_i + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial q_i}(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{p}}) \quad (1 \leq i \leq n),$$

la quale potrà porsi nella sua forma esplicita mediante uno sviluppo in serie nel piccolo parametro ε . In prima approssimazione, invertendo la prima relazione rispetto a q_i e sostituendo nella seconda, si otterranno le espressioni

$$q_i = \bar{q}_i - \varepsilon \frac{\partial f}{\partial \bar{p}_i}(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{p}}) + O(\varepsilon^2)$$

$$p_i = \bar{p}_i + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial q_i}(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{p}}) + O(\varepsilon^2),$$

da cui risulta che per $\varepsilon = 0$ la trasformazione considerata si riduce effettivamente all'identità, mentre per $\varepsilon \neq 0$ le variabili coniugate si deformano di una quantità piccola.

La strategia comune a ogni moderna teoria delle perturbazioni per i sistemi hamiltoniani consiste appunto nella ricerca di una trasformazione canonica prossima all'identità

$$(3.2) \quad \mathbf{q} = \mathbf{q}^1 + \varepsilon \mathbf{f}_1(\mathbf{q}^1, \mathbf{p}^1), \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}^1 + \varepsilon \mathbf{g}_1(\mathbf{q}^1, \mathbf{p}^1)$$

che consenta di porre l'Hamiltoniana $\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ data da (3.1) nella forma

$$(3.3) \quad \mathcal{H}^1(\mathbf{q}^1, \mathbf{p}^1) = \mathcal{H}_0(\mathbf{p}^1) + \varepsilon \bar{\mathcal{H}}_1(\mathbf{p}^1) + \varepsilon^2 \mathcal{H}_2(\mathbf{q}^1, \mathbf{p}^1),$$

con $\bar{\mathcal{H}}_1$ e \mathcal{H}_2 nuove funzioni dell'ordine dell'unità.¹ Se la ricerca dà esito positivo, allora il termine $\mathcal{H}_0 + \varepsilon \bar{\mathcal{H}}_1$ in (3.3) costituirà l'approssimazione integrabile di ordine ε^2 della dinamica reale. Tale procedura può essere iterata, almeno in linea di principio, se si riesce a individuare una sequenza di trasformazioni canoniche prossime all'identità

$$(3.4) \quad \mathbf{q}^{r-1} = \mathbf{q}^r + \varepsilon^r \mathbf{f}_r(\mathbf{q}^r, \mathbf{p}^r), \quad \mathbf{p}^{r-1} = \mathbf{p}^r + \varepsilon^r \mathbf{g}_r(\mathbf{q}^r, \mathbf{p}^r)$$

tali che, nelle nuove variabili d'angolo-azione $(\mathbf{q}^r, \mathbf{p}^r)$, \mathcal{H} diventi:

$$(3.5) \quad \mathcal{H}^r(\mathbf{q}^r, \mathbf{p}^r) = \mathcal{H}_0(\mathbf{p}^r) + \varepsilon \bar{\mathcal{H}}_1(\mathbf{p}^r) + \cdots + \varepsilon^r \bar{\mathcal{H}}_r(\mathbf{p}^r) + \varepsilon^{r+1} \mathcal{H}_{r+1}(\mathbf{q}^r, \mathbf{p}^r).$$

Il termine $\mathcal{H}_0 + \varepsilon \bar{\mathcal{H}}_1 + \cdots + \varepsilon^r \bar{\mathcal{H}}_r$ costituirà in questo caso l'approssimazione integrabile di ordine ε^{r+1} della dinamica reale.

È bene precisare fin d'ora che esiste un limite all'accuratezza raggiungibile con questo metodo, nel senso che è ingenuo sperare di poter raffinare indefinitamente l'approssimazione fino a trasformare l'Hamiltoniana di partenza $\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ in un'Hamiltoniana integrabile $\mathcal{H}^\infty(\mathbf{p}^\infty)$. In termini pratici, ciò vuol dire dover arrestare lo sviluppo della funzione $\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ in corrispondenza di un certo ordine r , definito *ordine ottimale*, sicché la migliore approssimazione integrabile della dinamica reale sarà data da

$$(3.6) \quad \mathbf{q}^r(t) = \mathbf{q}^r(0) + \boldsymbol{\omega}^r t, \quad \mathbf{p}^r(t) = \mathbf{p}^r(0),$$

con $\boldsymbol{\omega}^r = \nabla_{\mathbf{p}^r} [\mathcal{H}_0(\mathbf{p}^r) + \cdots + \varepsilon^r \bar{\mathcal{H}}_r(\mathbf{p}^r)]|_{\mathbf{p}^r(0)}$ frequenze (costanti) associate alla variazione degli angoli \mathbf{q}^r . Si osservi, incidentalmente, che il moto descritto dalle equazioni (3.6) potrà sempre esprimersi nelle variabili originarie (\mathbf{q}, \mathbf{p}) componendo in ordine inverso la sequenza di trasformazioni canoniche prossime all'identità (3.4). La traiettoria $(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$ così ottenuta risulterà oscillare attorno ai valori $(\mathbf{q}^r(t), \mathbf{p}^r(t))$ con ampiezza $\sim \varepsilon^r$.

Per realizzare in maniera concreta il passaggio da $\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ a $\mathcal{H}^1(\mathbf{q}^1, \mathbf{p}^1)$ si dovrà dunque necessariamente individuare una particolare trasformazione di variabili $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \rightarrow (\mathbf{q}^1, \mathbf{p}^1)$, fra tutte quelle possibili, che sia canonica.

¹ Tipicamente $\bar{\mathcal{H}}_1$ rappresenta la media di \mathcal{H}_1 sugli angoli \mathbf{q} .

Il problema di attribuire un'espressione analitica precisa alla trasformazione prossima all'identità (3.2) non è in generale di facile soluzione, tuttavia si può dimostrare che esiste un modo astuto per aggirarlo, ovvero restringendo convenientemente il campo di ricerca a una classe specifica di trasformazioni che siano tutte canoniche per costruzione.

Prima di procedere in tal senso è indispensabile ritornare brevemente sul concetto di derivata di Lie. Come ricordato nel paragrafo 2.2, la derivata di Lie esprime la derivata temporale di una variabile dinamica $\varphi(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ lungo il flusso indotto dall'Hamiltoniana,

$$(3.7) \quad L_{\mathcal{H}}\varphi = \dot{\varphi} = \{\varphi, \mathcal{H}\},$$

e di conseguenza il valore di φ calcolato al tempo t , $\varphi(t) = \varphi(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$, rappresenta l'evoluzione temporale di φ lungo il flusso di \mathcal{H} . Posto l'istante iniziale in corrispondenza di $t_0 = 0$, se t è sufficientemente piccolo si può espandere φ in serie di McLaurin,

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\varphi^{(i)}(0)}{i!} t^i,$$

dove $\varphi(0) = \varphi(\mathbf{q}(0), \mathbf{p}(0))$ e $\varphi^{(i)}(0) = d^i\varphi/dt^i(\mathbf{q}(0), \mathbf{p}(0))$; a questo punto, se si esplicitano le derivate successive di φ in termini delle parentesi di Poisson² mediante la (3.7), cioè

$$\varphi^{(1)} = \dot{\varphi} = \{\varphi, \mathcal{H}\}, \quad \varphi^{(2)} = \ddot{\varphi} = \{\varphi^{(1)}, \mathcal{H}\} = \{\{\varphi, \mathcal{H}\}, \mathcal{H}\}, \quad \text{ecc.},$$

e si introduce la notazione

$$L_{\mathcal{H}}^{(1)}\varphi = \{\varphi, \mathcal{H}\}, \quad L_{\mathcal{H}}^{(i)}\varphi = L_{\mathcal{H}}^{(1)}L_{\mathcal{H}}^{(i-1)}\varphi,$$

lo sviluppo in serie di φ assumerà la forma

$$(3.8) \quad \varphi(t) = \varphi(0) + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{L_{\mathcal{H}}^{(i)}\varphi(0)}{i!} t^i.$$

La (3.8) è detta *serie di Lie* di φ sotto il flusso di \mathcal{H} , abbreviata in $S_{\mathcal{H}}^t\varphi$. Essa permette di ottenere $\varphi(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$ in funzione di $(\mathbf{q}(0), \mathbf{p}(0))$, il tempo t svolgente il ruolo di un parametro.

In base a questa definizione, le trasformazioni (2.5) – canoniche per costruzione – si potranno riscrivere

$$(3.9) \quad \mathbf{q} = S_{\chi}^{\varepsilon}\bar{\mathbf{q}}, \quad \mathbf{p} = S_{\chi}^{\varepsilon}\bar{\mathbf{p}},$$

dove $\boldsymbol{\alpha} = S_{\chi}^{\varepsilon}\bar{\boldsymbol{\alpha}}$ sta ovviamente per $\alpha_1 = S_{\chi}^{\varepsilon}\bar{\alpha}_1, \dots, \alpha_n = S_{\chi}^{\varepsilon}\bar{\alpha}_n$.

² Vale la seguente proprietà:

$$\frac{d}{dt}\{f, g\} = \left\{ \frac{df}{dt}, g \right\} + \left\{ f, \frac{dg}{dt} \right\}.$$

Se $g = \mathcal{H}$ e il sistema canonico considerato è autonomo, il secondo addendo a destra dell'uguale scompare.

Una volta ridenominate le variabili coniugate $\bar{\mathbf{q}}$ e $\bar{\mathbf{p}}$ rispettivamente in \mathbf{q}^1 e \mathbf{p}^1 , le relazioni (3.9) consentiranno infine di esplicitare $\mathcal{H}^1(\mathbf{q}^1, \mathbf{p}^1)$ – la trasformata di $\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ – previa definizione di un'opportuna Hamiltoniana generatrice χ . Nel seguito si rivolgerà quindi l'attenzione a quest'ultima funzione, che compare al pedice dell'operatore di Lie S_χ^ε , in quanto se χ è determinata allora lo sarà necessariamente anche la trasformazione canonica prossima all'identità $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \rightarrow (\mathbf{q}^1, \mathbf{p}^1)$ da essa generata.

3.2 Metodo delle serie di Lie

Alla luce di quanto affermato nel paragrafo appena concluso, la trasformazione (3.2) potrà porsi in forma esplicitamente canonica sviluppando le variabili coniugate (che sono esse stesse variabili dinamiche) in serie di Lie nel piccolo parametro ε :

$$(3.10) \quad \begin{aligned} \mathbf{q} &= \mathbf{q}^1 + \int_0^\varepsilon \dot{\mathbf{q}}^1 dt = \mathbf{q}^1(\varepsilon) \equiv S_\chi^\varepsilon \mathbf{q}^1 \\ \mathbf{p} &= \mathbf{p}^1 + \int_0^\varepsilon \dot{\mathbf{p}}^1 dt = \mathbf{p}^1(\varepsilon) \equiv S_\chi^\varepsilon \mathbf{p}^1. \end{aligned}$$

Queste equazioni esprimono \mathbf{q} e \mathbf{p} come il risultato di un flusso hamiltoniano a un certo tempo ε , generato da una funzione χ tale che

$$\dot{\mathbf{q}}^1 = \nabla_{\mathbf{p}^1} \chi = \{\mathbf{q}^1, \chi\}, \quad \dot{\mathbf{p}}^1 = -\nabla_{\mathbf{q}^1} \chi = \{\mathbf{p}^1, \chi\}.$$

È chiaro dunque che, per ricavare correttamente l'Hamiltoniana nelle nuove variabili $\mathbf{q}^1 = (q_1^1, \dots, q_n^1)$ e $\mathbf{p}^1 = (p_1^1, \dots, p_n^1)$, bisognerà andare a sostituire a \mathbf{q} e \mathbf{p} in \mathcal{H} i loro rispettivi sviluppi in serie di Lie (3.10), dati in forma esplicita da

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^1(\varepsilon) &= \mathbf{q}^1 + \varepsilon \{\mathbf{q}^1, \chi\} + \frac{\varepsilon^2}{2} \{\{\mathbf{q}^1, \chi\}, \chi\} + \dots \\ \mathbf{p}^1(\varepsilon) &= \mathbf{p}^1 + \varepsilon \{\mathbf{p}^1, \chi\} + \frac{\varepsilon^2}{2} \{\{\mathbf{p}^1, \chi\}, \chi\} + \dots \end{aligned}$$

per la (3.8).³ In sintesi:

$$(3.11) \quad \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \rightarrow \mathcal{H}(\mathbf{q}^1(\varepsilon), \mathbf{p}^1(\varepsilon)) \equiv \mathcal{H}^1(\mathbf{q}^1, \mathbf{p}^1).$$

La funzione trasformata $\mathcal{H}^1(\mathbf{q}^1, \mathbf{p}^1)$ appare come l'evoluzione al tempo ε di $\mathcal{H}(\mathbf{q}^1, \mathbf{p}^1)$ (la quale risulta dalla sostituzione formale di \mathbf{q} e \mathbf{p} con \mathbf{q}^1 e \mathbf{p}^1 in \mathcal{H}) lungo il flusso indotto dall'Hamiltoniana χ , ovvero

$$(3.12) \quad \mathcal{H}^1 = S_\chi^\varepsilon \mathcal{H}.$$

³ Si osservi che $\mathbf{q}^1 = \mathbf{q}^1(0)$ e $\mathbf{p}^1 = \mathbf{p}^1(0)$ rappresentano rispettivamente il primo termine dello sviluppo di $\mathbf{q} = \mathbf{q}^1(\varepsilon)$ e il primo termine dello sviluppo di $\mathbf{p} = \mathbf{p}^1(\varepsilon)$. Ne consegue che $\|\mathbf{q} - \mathbf{q}^1\| = O(\varepsilon)$ e $\|\mathbf{p} - \mathbf{p}^1\| = O(\varepsilon)$, cioè $\mathbf{q} = \mathbf{q}^1$ e $\mathbf{p} = \mathbf{p}^1$ all'ordine zero in ε .

Il problema diventa perciò quello di individuare un'opportuna Hamiltoniana generatrice χ tale che, se \mathcal{H} è data da (3.1), \mathcal{H}^1 assumerà la forma (3.3). A tal proposito è utile scrivere esplicitamente lo sviluppo (3.12) fino all'ordine ε^2 :

$$(3.13) \quad \mathcal{H}^1 = \mathcal{H}_0 + \varepsilon \mathcal{H}_1 + \varepsilon \{\mathcal{H}_0, \chi\} + \varepsilon^2 \{\mathcal{H}_1, \chi\} + \frac{\varepsilon^2}{2} \{\{\mathcal{H}_0, \chi\}, \chi\} + O(\varepsilon^3).$$

Premesso che, in questa equazione, \mathcal{H}_0 , \mathcal{H}_1 e χ sono da intendersi tutte funzioni di \mathbf{q}^1 e \mathbf{p}^1 , si vede immediatamente che il termine di ordine zero in ε coincide con $\mathcal{H}_0(\mathbf{p}^1)$; di conseguenza, \mathcal{H}^1 potrà riportarsi nella forma (3.3) se e soltanto se il termine di ordine uno in ε non dipende dalle coordinate \mathbf{q}^1 , ovvero se e soltanto se l'equazione⁴

$$(3.14) \quad \mathcal{H}_1 + \{\mathcal{H}_0, \chi\} = \bar{\mathcal{H}}_1$$

risulta soddisfatta per talune funzioni $\chi(\mathbf{q}^1, \mathbf{p}^1)$ e $\bar{\mathcal{H}}(\mathbf{p}^1)$ da determinarsi.

Poiché le coordinate \mathbf{q}^1 sono angoli, e l'Hamiltoniana $\mathcal{H}(\mathbf{q}^1, \mathbf{p}^1)$ sulla quale agisce l'operatore di Lie S_χ^ε presenta un andamento periodico in \mathbf{q}^1 , la strategia da seguire per risolvere l'equazione (3.14) sarà quella di espandere $\mathcal{H}_1(\mathbf{q}^1, \mathbf{p}^1)$ in serie di Fourier come segue:

$$(3.15) \quad \mathcal{H}_1(\mathbf{q}^1, \mathbf{p}^1) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n} c_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}^1) \exp(i \langle \mathbf{k}, \mathbf{q}^1 \rangle)$$

(avendo denotato al solito con \mathbf{k} e n un vettore a componenti intere e il numero di gradi di libertà del sistema rispettivamente).⁵ Il passo successivo consisterà nella ricerca di una funzione χ che abbia la stessa forma di (3.15), cioè

$$(3.16) \quad \chi(\mathbf{q}^1, \mathbf{p}^1) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n} d_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}^1) \exp(i \langle \mathbf{k}, \mathbf{q}^1 \rangle),$$

così da ottenere per la parentesi di Poisson tra \mathcal{H}_0 e χ , data in questo caso da $\{\mathcal{H}_0, \chi\} = -\nabla_{\mathbf{p}^1} \mathcal{H}_0 \cdot \nabla_{\mathbf{q}^1} \chi$, la relazione

$$(3.17) \quad \{\mathcal{H}_0, \chi\} = -i \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n} d_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}^1) \langle \mathbf{k}, \boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{p}^1) \rangle \exp(i \langle \mathbf{k}, \mathbf{q}^1 \rangle),$$

dove con $\boldsymbol{\omega}_0$ si è indicato il gradiente rispetto a \mathbf{p}^1 di \mathcal{H}_0 . Sostituendo (3.15) e (3.17) in (3.14), e raccogliendo a fattor comune l'esponenziale, si perviene facilmente all'equazione

$$(3.18) \quad \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n} \left[c_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}^1) - i d_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}^1) \langle \mathbf{k}, \boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{p}^1) \rangle \right] \exp(i \langle \mathbf{k}, \mathbf{q}^1 \rangle) = \bar{\mathcal{H}}_1(\mathbf{p}^1),$$

⁴ Nota come *equazione omologica*.

⁵ A rigore, prima si esegue l'espansione in serie di Fourier del termine perturbativo $\varepsilon \mathcal{H}_1(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ che compare nell'Hamiltoniana (3.1) (si veda il paragrafo 2.7) e dopo si effettua la sostituzione formale delle variabili d'angolo-azione (\mathbf{q}, \mathbf{p}) originarie con le nuove variabili $(\mathbf{q}^1, \mathbf{p}^1)$ introdotte tramite gli sviluppi in serie di Lie (3.10).

la cui soluzione sarà data, come anticipato, da un'Hamiltoniana generatrice χ e da una funzione $\bar{\mathcal{H}}_1$ tali che:

- $\forall \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$

$$(3.19) \quad d_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}^1) = -i \frac{c_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}^1)}{\langle \mathbf{k}, \boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{p}^1) \rangle};$$

- per $\mathbf{k} = \mathbf{0}$

$$(3.20) \quad d_{\mathbf{0}} = 0, \quad c_{\mathbf{0}}(\mathbf{p}^1) = \bar{\mathcal{H}}_1(\mathbf{p}^1).$$

Noti i coefficienti $d_{\mathbf{k}}$ la funzione χ risulta completamente determinata, e così anche la trasformazione canonica $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \rightarrow (\mathbf{q}^1, \mathbf{p}^1)$ che mette in relazione le variabili coniugate d'angolo-azione originarie con quelle nuove.⁶

Si osservi che il procedimento fin qui illustrato conduce a una soluzione dell'equazione omologica puramente formale, pertanto se ne dovrà accertare l'effettiva applicabilità andando a verificare che l'Hamiltoniana generatrice χ sia ben definita come funzione analitica, cioè come una funzione tale che il suo sviluppo in serie di Fourier – dato da (3.16) – *converge assolutamente*.⁷

3.3 Piccoli divisori

Da (3.19) discende subito che, se esiste almeno un vettore $\mathbf{k}_* \in \mathbb{Z}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ tale che

- il coefficiente $c_{\mathbf{k}_*}(\mathbf{p}^1)$ al numeratore è diverso da zero e
- il prodotto scalare

$$\langle \mathbf{k}_*, \boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{p}^1) \rangle$$

al denominatore si annulla per un qualche valore delle azioni \mathbf{p}^1 ,

allora l'Hamiltoniana generatrice $\chi(\mathbf{q}^1, \mathbf{p}^1)$ non è definita. Più in generale, richiamando quanto esposto nella seconda metà del paragrafo 2.5, si dirà che χ non è definita se $\dim \mathcal{M}_{\boldsymbol{\omega}_0} = m \neq 0$, ovvero se esistono $1 \leq m \leq n - 1$ vettori indipendenti non nulli a componenti intere $\mathbf{k}_*^1, \dots, \mathbf{k}_*^m$ soddisfacenti alla condizione di risonanza $\langle \mathbf{k}_*^i, \boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{p}^1) \rangle = 0 \quad \forall i = 1, \dots, m$.

⁶ Volendo calcolare i termini dell'Hamiltoniana trasformata \mathcal{H}^1 di ordine superiore al primo in ε basterà utilizzare l'espressione completa del suo sviluppo in serie di Lie (3.13).

⁷ A rigore andrebbe verificata anche la convergenza assoluta della serie di Lie (3.13), ma si può dimostrare che tale verifica risulta superflua se, per valori di ε sufficientemente vicini a zero, \mathcal{H} e χ sono funzioni analitiche. Nella fattispecie, il secondo membro della (3.13) rappresenta appunto, per definizione, lo sviluppo in serie di McLaurin dell'evoluzione temporale di una funzione analitica (\mathcal{H}) lungo un flusso analitico (quello generato da χ), che è noto essere convergente purché l'intervallo di tempo $[0, \varepsilon]$ non sia troppo ampio.

Il moto imperturbato delle variabili angolari $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$ sul toro \mathbb{T}^n è il risultato del flusso lineare indotto dalla parte integrabile $\mathcal{H}_0(\mathbf{p})$ dell'Hamiltoniana $\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ di partenza, e avviene quindi con frequenze costanti $\boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{p}) = (\omega_{0,1}(\mathbf{p}), \dots, \omega_{0,n}(\mathbf{p}))$ tali che $\boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{p}) = \nabla_{\mathbf{p}} \mathcal{H}_0(\mathbf{p})$. Nel caso in cui il sistema descritto da \mathcal{H}_0 sia non degenere, almeno una frequenza $\omega_{0,i}$ deve cambiare in corrispondenza di uno spostamento (piccolo a piacere) lungo una qualsiasi direzione nello spazio delle azioni; ciò determina una fitta presenza di risonanze⁸, sicché, in generale, non c'è alcuna possibilità che la funzione χ risulti definita in un dominio aperto dello spazio delle fasi. La situazione non migliora particolarmente se si considerano i sistemi degeneri, in quanto, nella maggior parte dei casi più rilevanti (ivi compreso il problema planetario), l'elevata concentrazione di risonanze condurrà inevitabilmente al fallimento del metodo perturbativo delle serie di Lie delineato nel paragrafo precedente.

Inoltre, anche imponendo come preconditione l'esclusione delle frequenze risonanti – in modo da evitare che l'annullamento dei divisori $\langle \mathbf{k}, \boldsymbol{\omega}_0 \rangle$ per $\mathbf{k} = \mathbf{k}_*^1, \dots, \mathbf{k}_*^m$ mandi all'infinito i relativi coefficienti $d_{\mathbf{k}_*^i}$ – non si è in grado di garantire la convergenza (né, a maggior ragione, la convergenza a una funzione regolare) della serie (3.16). Può accadere infatti che, in corrispondenza di certi \mathbf{k} (grandi), i divisori $\langle \mathbf{k}, \boldsymbol{\omega}_0 \rangle$, pur non annullandosi, assumano valori arbitrariamente vicini a zero, tali da causare la divergenza della serie di Fourier di χ (e quindi, di nuovo, il fallimento del metodo perturbativo).

Fortunatamente esistono un paio di modi per uscire da questa impasse, il primo dei quali consiste in sostanza nel valersi del carattere analitico di \mathcal{H}_1 . Una funzione $f(\boldsymbol{\varphi})$, periodica di periodo 2π negli angoli $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ e analitica sul toro complesso

$$\mathbb{T}_\sigma^n = \{ \boldsymbol{\varphi} \in \mathbb{C}^n \mid \operatorname{Re} \varphi_i \in [0, 2\pi] \wedge |\operatorname{Im} \varphi_i| < \sigma \} \quad (1 \leq i \leq n),$$

ammette l'espansione in serie di Fourier

$$f(\boldsymbol{\varphi}) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}_{\mathbf{k}} \exp(i \langle \mathbf{k}, \boldsymbol{\varphi} \rangle),$$

con coefficienti dati da

$$\hat{f}_{\mathbf{k}} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} f(\boldsymbol{\varphi}) \exp(-i \langle \mathbf{k}, \boldsymbol{\varphi} \rangle) d\boldsymbol{\varphi}$$

e tali che

$$(3.21) \quad |\hat{f}_{\mathbf{k}}| \leq F \exp(-|\mathbf{k}|\sigma).$$

⁸ In termini più rigorosi, se il sistema imperturbato è non degenere allora si potrà sempre individuare un insieme di punti \mathbf{p} (denso nello spazio delle azioni) tale che, in corrispondenza di ciascuno di questi punti, la condizione di risonanza risulti soddisfatta da un vettore $\mathbf{k}_* \in \mathbb{Z}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$.

Fissato $\sigma > 0$, e ricordando che

$$F = \sup_{\varphi \in \mathbb{T}_\sigma^n} |f(\varphi)|$$

per l'analiticità di f , la diseguaglianza (3.21) esprime la rapida decrescita dei coefficienti $\hat{f}_{\mathbf{k}}$ per $|\mathbf{k}| \rightarrow \infty$. In altre parole, al crescere di $|\mathbf{k}|$ le armoniche $\hat{f}_{\mathbf{k}} \exp(i \langle \mathbf{k}, \varphi \rangle)$, ovvero i termini dello sviluppo in serie di Fourier di $f(\varphi)$, peseranno via via sempre di meno.⁹

Sfruttando questa proprietà, nota come *decadimento esponenziale dei coefficienti*, si potrà dunque scrivere lo sviluppo della perturbazione $\mathcal{H}_1(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ come somma di due contributi, cioè $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_1^{<K} + \mathcal{H}_1^{\geq K}$, con $\mathcal{H}_1^{<K}$ e $\mathcal{H}_1^{\geq K}$ dati rispettivamente da

$$(3.22) \quad \begin{aligned} \mathcal{H}_1^{<K} &= \sum_{\substack{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n \\ |\mathbf{k}| < K}} c_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}) \exp(i \langle \mathbf{k}, \mathbf{q} \rangle) \\ \mathcal{H}_1^{\geq K} &= \sum_{\substack{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n \\ |\mathbf{k}| \geq K}} c_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}) \exp(i \langle \mathbf{k}, \mathbf{q} \rangle) \end{aligned}$$

e tali che, per K abbastanza grande, $\mathcal{H}_1^{\geq K}$ è di ordine ε rispetto a $\mathcal{H}_1^{<K}$. Se ne deduce che, nell'equazione (3.13), solo quest'ultimo termine (da esprimersi naturalmente in funzione delle nuove variabili \mathbf{q}^1 e \mathbf{p}^1) apparirà all'ordine ε (in quanto $\varepsilon \mathcal{H}_1^{\geq K}$ è una quantità di ordine ε^2), e di conseguenza l'equazione omologica (3.14) ammetterà per soluzione la funzione

$$(3.23) \quad \chi(\mathbf{q}^1, \mathbf{p}^1) = \sum_{\substack{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \\ |\mathbf{k}| < K}} -i \frac{c_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}^1)}{\langle \mathbf{k}, \boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{p}^1) \rangle} \exp(i \langle \mathbf{k}, \mathbf{q}^1 \rangle).$$

Dal momento che \mathbf{k} è un vettore a componenti intere, se vale la condizione $|\mathbf{k}| < K$ allora la serie di Fourier (3.23) che definisce χ conterrà un numero finito di armoniche, e sarà dunque possibile individuare nello spazio delle azioni un sottoinsieme aperto \mathcal{U}_K tale che, $\forall \mathbf{p}^1 \in \mathcal{U}_K$, i denominatori in (3.23) non si annullino, ovvero

$$\langle \mathbf{k}, \boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{p}^1) \rangle \neq 0 \quad \forall \mathbf{p}^1 \in \mathcal{U}_K \quad \text{con } \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{\mathbf{0}\}, |\mathbf{k}| < K.$$

Il dominio \mathcal{U}_K si dirà non risonante fino all'ordine K . In definitiva, se ci si restringe a considerare tutte e sole le frequenze $\boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{p}^1)$ tali che $\mathbf{p}^1 \in \mathcal{U}_K$, la serie di Fourier di χ non soltanto risulterà definita (essendo i coefficienti $d_{\mathbf{k}}$ funzioni limitate), ma anche convergente (poiché costituita da un numero finito di termini sempre meno rilevanti man mano che $|\mathbf{k}|$ cresce).¹⁰

⁹ $|\mathbf{k}| = |k_1| + \dots + |k_n|$ è l'ordine dell'armonica di indice $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n)$.

¹⁰ Intuitivamente, posto che i numeratori dei coefficienti $d_{\mathbf{k}}$ decadono esponenzialmente con $|\mathbf{k}|$ secondo la (3.21), la convergenza della serie (3.23) segue dalla soppressione delle armoniche di ordine $|\mathbf{k}| \geq K$ (che impedisce ai denominatori dei coefficienti $d_{\mathbf{k}}$ di scendere in valore assoluto al di sotto una certa soglia "di sicurezza").

Il secondo modo per risolvere il problema dei cosiddetti *piccoli divisori*, oltre a puntare sulle proprietà di analiticità di \mathcal{H}_1 , prevede di scegliere un dato punto \mathbf{p}_* nello spazio delle azioni tale che, $\forall \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, le frequenze $\boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{p}_*)$ soddisfino la condizione

$$(3.24) \quad |\langle \mathbf{k}, \boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{p}_*) \rangle| \geq \frac{\gamma}{|\mathbf{k}|^\tau},$$

nota come *condizione diofantea*, per degli appropriati valori positivi di γ e τ . È possibile dimostrare che queste particolari frequenze in effetti esistono (e costituiscono un sottoinsieme di \mathbb{R}^n il cui volume ha misura positiva), purché venga rispettato il vincolo $\tau > n - 1$.

In generale, oltre a una contrazione sufficientemente rapida dei soliti coefficienti $d_{\mathbf{k}}$, al fine di assicurare la convergenza della serie (3.16) – evitando di troncarla – sarà altresì necessario richiedere che i divisori $\langle \mathbf{k}, \boldsymbol{\omega}_0 \rangle$ non crescano troppo in fretta con $|\mathbf{k}|$. All’atto pratico si tratta di selezionare una certa funzione $\xi(|\mathbf{k}|)$ tale che

$$(3.25) \quad |\langle \mathbf{k}, \boldsymbol{\omega}_0 \rangle| \geq \xi(|\mathbf{k}|),$$

con $\xi \rightarrow 0$ in modo “graduale” per $|\mathbf{k}| \rightarrow \infty$. Indicativamente, se ξ andasse a zero troppo velocemente ne potrebbe risentire la convergenza (o la regolarità) della serie, viceversa, se andasse a zero troppo lentamente, si riuscirebbe a ottenere solo un numero esiguo di frequenze $\boldsymbol{\omega}_0$ soddisfacenti alla (3.25) (eventualmente nessuna). Una scelta conveniente per la funzione ξ risulta essere appunto $\xi(|\mathbf{k}|) = \gamma|\mathbf{k}|^{-\tau}$.

Sia

$$\mathcal{H}_0(\mathbf{p}) = \sum_{j \geq 1} \mathcal{H}_0^{(j)}(\hat{\mathbf{p}})$$

lo sviluppo in serie di potenze di \mathcal{H}_0 in un intorno del punto \mathbf{p}_* (con $\mathcal{H}_0^{(j)}$ polinomio omogeneo di grado j in $\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{p} - \mathbf{p}_*$), e si consideri il sottoinsieme dello spazio delle azioni di ampiezza ε centrato in \mathbf{p}_*

$$\mathcal{U}_\varepsilon(\mathbf{p}_*) = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \mid \|\hat{\mathbf{p}}\| < \varepsilon\}$$

tale che i termini $\mathcal{H}_0^{(j)}$ con $j \geq 2$ siano di ordine superiore in ε rispetto al termine $\mathcal{H}_0^{(1)}$ di primo grado in $\hat{\mathbf{p}}$. È evidente allora che, nel passaggio da $\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ a $\mathcal{H}^1(\mathbf{q}^1, \mathbf{p}^1)$ mediante l’espansione in serie di Lie

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}^1 + \varepsilon\{\mathbf{q}^1, \chi\} + \dots, \mathbf{p}^1 + \varepsilon\{\mathbf{p}^1, \chi\} + \dots) = \mathcal{H}(\mathbf{q}^1, \mathbf{p}^1) + \varepsilon\{\mathcal{H}, \chi\} + \dots,$$

$\mathcal{H}_0^{(1)}$ assumerà il ruolo di \mathcal{H}_0 , mentre $\mathcal{H}_0^{(2)}$, $\mathcal{H}_0^{(3)}$, ecc. saranno relegati in \mathcal{H}_1 .

Di conseguenza, al primo membro dell'equazione omologica (3.14) si avrà, quale argomento della parentesi di Poisson assieme all'Hamiltoniana generatrice χ , una funzione $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_0^{(1)}(\hat{\mathbf{p}})$ isocrona – essendo lineare in $\hat{\mathbf{p}}$ – con frequenze fisse $\boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{p}_*)$ tali che lo sviluppo di Fourier di χ potrà scriversi formalmente come:

$$(3.26) \quad \chi(\mathbf{q}^1, \mathbf{p}^1) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} -i \frac{c_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}^1)}{\langle \mathbf{k}, \boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{p}_*) \rangle} \exp(i \langle \mathbf{k}, \mathbf{q}^1 \rangle).$$

Richiamando a questo punto la proprietà di decadimento esponenziale dei coefficienti $c_{\mathbf{k}}$ e la definizione di disuguaglianza diofantea (3.24), si verifica facilmente che χ è una serie assolutamente convergente sul toro complesso $\mathbb{T}_{\sigma-\delta}^n$, $\forall \delta < \sigma$ positivo.¹¹

Nei calcoli pratici, solitamente svolti al computer mediante l'implementazione di appropriati algoritmi di manipolazione algebrica, al fine di superare il problema dei piccoli divisori si utilizza di fatto una combinazione di entrambi i metodi suesposti. Per funzionare in maniera efficiente, i manipolatori algebrici necessitano di rappresentare le funzioni in serie di potenze delle azioni e in serie di Fourier degli angoli, il che conduce direttamente a sviluppare \mathcal{H}_0 in serie di potenze di $\hat{\mathbf{p}}$. Tale procedura assicura tra l'altro che nell'espressione dell'Hamiltoniana generatrice χ , data da (3.26), non compaiano denominatori dipendenti dalle azioni, essendo \mathbf{p}_* fissato. D'altro canto, per comprensibili ragioni di limitata capacità di archiviazione, a un certo punto tutte le espansioni in serie dovranno subire un troncamento, pertanto è naturale trattenerne in \mathcal{H}_1 e χ soltanto le armoniche di ordine $|\mathbf{k}| < K$.

3.4 Forme normali

Si consideri l'insieme

$$(3.27) \quad \mathcal{K} = \{ \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n, |\mathbf{k}| < K \mid \langle \mathbf{k}, \boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{p}) \rangle = 0 \text{ per qualche } \mathbf{p} \in \mathcal{U} \},$$

detto *insieme risonante*, dove con \mathcal{U} si è indicato quel sottoinsieme dello spazio delle azioni contenente i punti \mathbf{p} associati alle armoniche risonanti di ordine $|\mathbf{k}| < K$. Possono verificarsi due situazioni:

- i. $\mathcal{K} = \emptyset$. L'assenza di risonanze garantisce la possibilità di trasformare l'Hamiltoniana originaria $\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ in una nuova Hamiltoniana $\mathcal{H}^1(\mathbf{q}^1, \mathbf{p}^1)$ della forma (3.3).
- ii. $\mathcal{K} \neq \emptyset$. La presenza di risonanze non consente di effettuare la trasformazione di cui al punto i.

¹¹ Il lettore interessato ad approfondire l'impianto matematico della teoria delle perturbazioni può consultare per esempio [1].

Nel primo caso ci si limiterà a considerare le sole azioni appartenenti a un dominio locale non risonante fino all'ordine K , cioè, in altre parole, si sceglierà l'insieme \mathcal{U} in modo che sia coincidente con \mathcal{U}_K (definito nel paragrafo precedente). Alternativamente ci si potrà porre in un intorno di ampiezza ε del punto \mathbf{p}_* , $\mathcal{U}_\varepsilon(\mathbf{p}_*)$, tale che le frequenze $\boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{p}_*)$ soddisfino la condizione diofantea. In generale, ogniqualvolta sia possibile ricondurre l'Hamiltoniana $\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ di un sistema quasi-integrabile alla forma (3.3), cioè

$$\mathcal{H}^1(\mathbf{q}^1, \mathbf{p}^1) = \mathcal{H}_0(\mathbf{p}^1) + \varepsilon \bar{\mathcal{H}}_1(\mathbf{p}^1) + \varepsilon^2 \mathcal{H}_2(\mathbf{q}^1, \mathbf{p}^1),$$

in un qualche sottoinsieme dello spazio delle azioni, si dirà che essa ammette la *forma normale di Birkhoff* al primo ordine in ε .¹²

Nel secondo caso, invece, più generale, armoniche risonanti di ordine inferiore a K “intersecano” il dominio \mathcal{U} di interesse, che pertanto differirà da \mathcal{U}_K . L'esistenza di queste risonanze fa sì che i termini corrispondenti nello sviluppo di Fourier della perturbazione \mathcal{H}_1 – di ordine ε – non possano essere né relegati tra i termini di ordine ε^2 o superiore né soppressi (a causa del problema dei piccoli divisori).

Ritornando alla definizione (3.27) dell'insieme \mathcal{K} , risulta conveniente esprimere \mathcal{H}_1 come somma di tre parti,

$$\mathcal{H}_1 = \underbrace{\mathcal{H}_1^{\text{R}} + \mathcal{H}_1^{\text{NR}}}_{\mathcal{H}_1^{<K}} + \mathcal{H}_1^{\geq K},$$

dove

$$(3.28) \quad \begin{aligned} \mathcal{H}_1^{\text{R}} &= \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{K}} c_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}) \exp(i \langle \mathbf{k}, \mathbf{q} \rangle) \\ \mathcal{H}_1^{\text{NR}} &= \sum_{\substack{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n \setminus \mathcal{K} \\ |\mathbf{k}| < K}} c_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}) \exp(i \langle \mathbf{k}, \mathbf{q} \rangle) \end{aligned}$$

e $\mathcal{H}_1^{\geq K}$ è data dalla seconda delle (3.22).¹³ Il termine di ordine ε della serie di Lie (3.13) si scriverà dunque $\varepsilon [\mathcal{H}_1^{\text{R}} + \mathcal{H}_1^{\text{NR}} + \{\mathcal{H}_0, \chi\}]$, con l'Hamiltoniana generatrice χ opportunamente scelta in modo che $\mathcal{H}_1^{\text{NR}} + \{\mathcal{H}_0, \chi\} = 0$ (cioè in modo da eliminare le armoniche non risonanti con $|\mathbf{k}| < K$):

$$(3.29) \quad \chi(\mathbf{q}^1, \mathbf{p}^1) = \sum_{\substack{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n \setminus \mathcal{K} \\ |\mathbf{k}| < K}} -i \frac{c_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}^1)}{\langle \mathbf{k}, \boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{p}^1) \rangle} \exp(i \langle \mathbf{k}, \mathbf{q}^1 \rangle).$$

¹² Nel problema planetario la degenerazione del termine \mathcal{H}_0 non consente di ridurre \mathcal{H} in forma normale di Birkhoff, in quanto non è possibile scegliere una funzione generatrice χ tale che $\bar{\mathcal{H}}_1$ dipenda solamente dalle variabili d'azione. Nel paragrafo ?? verrà mostrato come usare la forma normale di Birkhoff per estendere la teoria di Lagrange-Laplace, in modo da ottenere una descrizione analitica più accurata della dinamica secolare dei pianeti.

¹³ Si noti, en passant, che l'insieme \mathcal{K} include anche il vettore $\mathbf{k} = \mathbf{0}$, dal quale deriva l'armonica di Fourier $c_0(\mathbf{p})$ in \mathcal{H}_1^{R} .

La funzione χ è analitica $\forall \mathbf{p}^1 \in \mathcal{U}$, in quanto:

- per $\mathbf{p}^1 \in \mathcal{U}$ e $\mathbf{k} \notin \mathcal{K}$ nessun denominatore $\langle \mathbf{k}, \boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{p}^1) \rangle$ si annulla;
- il suo sviluppo in serie di Fourier (3.29) è troncato all'ordine K , e quindi contiene un numero finito di armoniche.¹⁴

Il fatto che χ sia ben definita come funzione analitica comporta che anche la trasformazione canonica prossima all'identità (3.10) sia ben definita, sicché l'Hamiltoniana originaria $\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ potrà porsi nella forma

$$(3.30) \quad \mathcal{H}^1(\mathbf{q}^1, \mathbf{p}^1) = \mathcal{H}_0(\mathbf{p}^1) + \varepsilon \mathcal{H}_1^R(\mathbf{q}^1, \mathbf{p}^1) + O(\varepsilon^2),$$

detta *forma normale risonante* al primo ordine in ε .

Le forme normali risonanti risultano particolarmente efficaci nell'analisi della dinamica risonante, in quanto trattengono all'ordine più basso solo i termini risonanti essenziali, mentre quelli non risonanti vengono relegati agli ordini superiori. Sfortunatamente, se l'insieme \mathcal{K} contiene più di una risonanza¹⁵ (oppure una risonanza di molteplicità $m > 1$), l'Hamiltoniana $\mathcal{H}_0(\mathbf{p}^1) + \varepsilon \mathcal{H}_1^R(\mathbf{q}^1, \mathbf{p}^1)$ non è, in generale, integrabile. Viceversa, nel caso in cui \mathcal{K} contenga una singola risonanza di molteplicità $m = 1$, si può dimostrare che $\mathcal{H}_0(\mathbf{p}^1) + \varepsilon \mathcal{H}_1^R(\mathbf{q}^1, \mathbf{p}^1)$ è integrabile.

Il metodo fin qui esposto per la costruzione delle forme normali si può iterare estendendo la definizione di \mathcal{K} , cioè dell'insieme delle risonanze fino all'ordine K , nel modo seguente:

$$(3.31) \quad \mathcal{K}_r = \{ \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n, |\mathbf{k}| < K_r \mid \langle \mathbf{k}, \boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{p}) \rangle = 0 \text{ per qualche } \mathbf{p} \in \mathcal{U} \}.$$

K_r sarà scelto in modo tale che tutte le armoniche di ordine superiore a K_r abbiano coefficienti inferiori a ε^r . Più precisamente, si cerca una sequenza di Hamiltoniane χ_r , generatrici della sequenza di trasformazioni canoniche prossime all'identità

$$\mathbf{q}^{r-1} = S_{\chi_r}^{\varepsilon^r} \mathbf{q}^r, \quad \mathbf{p}^{r-1} = S_{\chi_r}^{\varepsilon^r} \mathbf{p}^r \quad (r > 1),$$

tale che

- i. se $\mathcal{K}_r = \emptyset$, cioè se nessuna armonica risonante interseca il dominio \mathcal{U} di interesse, allora si potrà porre l'Hamiltoniana (3.1) di partenza nella forma normale di Birkhoff all'ordine r -esimo in ε , data dalla (3.5);

¹⁴ Una precisazione sull'insieme \mathcal{U} è d'uopo. Poiché $\|\mathbf{p} - \mathbf{p}^1\| = O(\varepsilon)$, per garantire che $\mathbf{p}^1 \in \mathcal{U}$ bisognerà scegliere \mathbf{p} in modo tale che $\mathbf{p} \in \mathcal{U} - O(\varepsilon)$, dove $\mathcal{V} := \mathcal{U} - O(\varepsilon)$ rappresenta l'insieme più grande che, congiuntamente a un intorno di raggio $O(\varepsilon)$, può essere contenuto in \mathcal{U} . Ciò implica che la dimensione di \mathcal{U} dovrà essere almeno $O(\varepsilon)$.

¹⁵ Significa che esistono almeno due vettori $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \in \mathcal{U}$ e due vettori $\mathbf{k}_*^1, \mathbf{k}_*^2 \in \mathbb{Z}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ tali che $\langle \mathbf{k}_*^1, \boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{p}_1) \rangle = \langle \mathbf{k}_*^2, \boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{p}_2) \rangle = 0$ e $\langle \mathbf{k}_*^1, \boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{p}_2) \rangle = \langle \mathbf{k}_*^2, \boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{p}_1) \rangle \neq 0$.

- ii. se $\mathcal{K}_r \neq \emptyset$, cioè se armoniche risonanti di ordine $|\mathbf{k}| < K_r$ intersecano il dominio \mathcal{U} di interesse, allora si potrà porre l'Hamiltoniana (3.1) di partenza nella forma

$$(3.32) \quad \mathcal{H}^r(\mathbf{q}^r, \mathbf{p}^r) = \mathcal{H}_0(\mathbf{p}^r) + \varepsilon \mathcal{H}_1^{\text{R}}(\mathbf{q}^r, \mathbf{p}^r) + \dots \\ \dots + \varepsilon^r \mathcal{H}_r^{\text{R}}(\mathbf{q}^r, \mathbf{p}^r) + \varepsilon^{r+1} \mathcal{H}_{r+1}(\mathbf{q}^r, \mathbf{p}^r),$$

detta forma normale risonante all'ordine r -esimo in ε rispetto a \mathcal{K}_r , con $\mathcal{H}_1^{\text{R}}, \dots, \mathcal{H}_r^{\text{R}}$ funzioni contenenti solo armoniche $\sim \exp(i \langle \mathbf{k}, \mathbf{q}^r \rangle)$ tali che $\mathbf{k} \in \mathcal{K}_r$.

Nelle applicazioni pratiche, dunque, una volta stabilito il dominio \mathcal{U} di interesse, l'obiettivo sarà quello di trasformare l'Hamiltoniana di partenza nella forma normale più semplice possibile in quel dato dominio. Se $\mathcal{K}_r \neq \emptyset$ (caso ii.), il punto chiave di tutta la procedura verterà sull'individuazione di un K_r opportuno, cioè tale che, come anticipato, i coefficienti delle armoniche con $|\mathbf{k}| \geq K_r$ siano più piccoli di ε^r . In modo analogo a quanto fatto per costruire la forma normale risonante al primo ordine in ε , data dalla (3.30), si decompone la perturbazione \mathcal{H}_r nella somma $\mathcal{H}_r^{\text{R}} + \mathcal{H}_r^{\text{NR}} + \mathcal{H}_r^{\geq K_r}$, con \mathcal{H}_r^{R} e $\mathcal{H}_r^{\text{NR}}$ come in (3.28) (a condizione di sostituire \mathcal{K} e K con \mathcal{K}_r e K_r rispettivamente). Per la definizione stessa di \mathcal{K}_r , i primi due addendi, \mathcal{H}_r^{R} e $\mathcal{H}_r^{\text{NR}}$, conterranno tutte le armoniche (risonanti e non) con coefficienti di ordine ε^r , mentre l'ultimo addendo, $\mathcal{H}_r^{\geq K_r}$, accorperà le armoniche residue, aventi coefficienti più piccoli di ε^r . Pertanto, la funzione generatrice χ_r sarà scelta in modo tale da trattenere all'ordine ε^r solo i termini risonanti con $|\mathbf{k}| < K_r$ cioè, equivalentemente, in modo tale da relegare la parte non risonante della perturbazione all'ordine ε^{r+1} (assieme alle armoniche con $|\mathbf{k}| \geq K_r$). In breve, si tratta di risolvere l'equazione $\mathcal{H}_r^{\text{NR}} + \{\mathcal{H}_0, \chi_r\} = 0$.

Posto che i coefficienti $c_{\mathbf{k}}$ decadono esponenzialmente secondo la (3.21), se le armoniche di ordine compreso tra 1 e K della perturbazione originaria $\varepsilon \mathcal{H}_1$ hanno coefficienti $c_{\mathbf{k}} \sim \varepsilon$, va da sé che le armoniche di ordine compreso tra $(r-1)K$ e rK avranno coefficienti $c_{\mathbf{k}} \sim \varepsilon^r$. Di conseguenza, per quanto detto nel precedente capoverso, si dovrà scegliere un K_r soddisfacente alla condizione $K_r \geq rK$, cioè tale per cui il numero di termini risonanti contenuti in \mathcal{K}_r cresce rapidamente con r . Sfortunatamente, poiché tutti questi termini risonanti sono trattenuti in $\mathcal{H}_1^{\text{R}}, \dots, \mathcal{H}_r^{\text{R}}$, appare decisamente improbabile che $\mathcal{H}^r(\mathbf{q}^r, \mathbf{p}^r)$ possa assumere una forma molto più vantaggiosa rispetto all'Hamiltoniana $\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ di partenza.

Se da un lato, quindi, a un aumento dell'ordine r dell'approssimazione corrisponderà un miglioramento del livello di accuratezza (nella descrizione della dinamica) raggiungibile con il metodo perturbativo, dall'altro la popolazione di risonanze, rappresentata da \mathcal{K}_r , crescerà irrimediabilmente, con ovvie ripercussioni sulla scelta del dominio \mathcal{U} di interesse.

In particolare, l'individuazione di un insieme \mathcal{U}_{K_r} non risonante, cioè tale che $\mathcal{K}_r = \emptyset$ (caso i.), risulterà tanto più problematica quanto maggiore sarà r , appunto perché le armoniche risonanti non comprese in \mathcal{K}_r – ovvero quelle con coefficienti di ordine ε^{r+1} – caleranno drasticamente man mano che r aumenta. Nemmeno l'accorgimento di porsi in prossimità di tori diofantei¹⁶ consente di aggirare il problema posto dalla presenza sempre più numerosa di risonanze da considerare ad ogni passo perturbativo; infatti, assumendo l'Hamiltoniana imperturbata $\mathcal{H}_0 \sim \mathcal{H}_0^1 \propto \hat{\mathbf{p}}$ non degenera, da stime rigorose e non banali della norma di \mathcal{H}_r risulta che la quantità $\varepsilon^r \mathcal{H}_r$, dopo aver raggiunto un minimo (si veda più avanti), diverge per $r \rightarrow \infty$.

Dunque, come peraltro già osservato nel paragrafo 3.1, non c'è in generale alcuna speranza di riuscire a costruire Hamiltoniane \mathcal{H}^r in forma normale di Birkhoff all'ordine r -esimo in ε per r arbitrariamente grande, ovvero di riuscire a trasformare l'Hamiltoniana originaria $\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ nell'Hamiltoniana integrabile $\mathcal{H}^\infty(\mathbf{p}^\infty)$. In altre parole, sebbene a prima vista non sembrano esserci ostacoli formali alla costruzione della forma normale di Birkhoff fino a un ordine qualsiasi (almeno all'interno di un dominio \mathcal{U}_ε centrato in \mathbf{p}_*), ci si dovrà giocoforza arrestare a un certo ordine r , l'ordine ottimale, e la forma normale risultante sarà detta di conseguenza *forma normale ottimale*.

In sintesi, la forma normale ottimale si ottiene in corrispondenza di quel valore di r che minimizza il resto non normalizzato, perciò:

- i. se $\mathcal{K}_r = \emptyset$ si parlerà di *forma normale ottimale di Birkhoff* all'ordine r -esimo in ε

$$\mathcal{H}^{r-1} = \mathcal{H}_0 + \bar{\mathcal{H}}_{r-1}^{\text{norm}} + \varepsilon^r \mathcal{H}_r + O(\varepsilon^{r+1}),$$

dove $\bar{\mathcal{H}}_{r-1}^{\text{norm}} = \varepsilon \bar{\mathcal{H}}_1 + \dots + \varepsilon^{r-1} \bar{\mathcal{H}}_{r-1}$ e $\varepsilon^r \mathcal{H}_r + O(\varepsilon^{r+1})$ rappresenta il resto non normalizzato;

- ii. se $\mathcal{K}_r \neq \emptyset$ si parlerà di *forma normale ottimale risonante* all'ordine r -esimo in ε

$$\mathcal{H}^{r-1} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{r-1}^{\text{norm}} + \varepsilon^r \mathcal{H}_r + O(\varepsilon^{r+1}),$$

dove $\mathcal{H}_{r-1}^{\text{norm}} = \varepsilon \mathcal{H}_1^{\text{R}} + \dots + \varepsilon^{r-1} \mathcal{H}_{r-1}^{\text{R}}$ e $\varepsilon^r \mathcal{H}_r + O(\varepsilon^{r+1})$ rappresenta il resto non normalizzato.

Per gli addetti ai lavori è ormai una prassi consolidata trattenerne in $\mathcal{H}_{r-1}^{\text{norm}}$ solo le armoniche $\sim \exp(\langle \mathbf{k}, \mathbf{q}^r \rangle)$ tali che $\mathbf{k} = n_1 \mathbf{k}_*^1 + \dots + n_m \mathbf{k}_*^m \in \mathbb{Z}^n$, dove $\mathbf{k}_*^1, \dots, \mathbf{k}_*^m$ sono gli m vettori indipendenti (a componenti intere) corrispondenti alle principali risonanze da tenere in conto una volta fissato \mathcal{U} e n_1, \dots, n_m sono le m componenti del vettore $(n_1, \dots, n_m) \in \mathbb{Z}^m$.

¹⁶ Tori diofantei sono semplicemente tori con frequenze diofantee. Più precisamente, si tratta di quei tori, parametrizzati dalle azioni \mathbf{p}_* , con frequenze $\boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{p}_*)$ soddisfacenti alla (3.24). Porsi in prossimità di un toro diofanteo significa pertanto interessarsi alle frequenze $\boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{p})$ comprese in un intorno di ampiezza ε centrato in $\boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{p}_*)$, cioè tali che $\langle \mathbf{k}, \boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{p}) \rangle = 0$ se e solo se $|\mathbf{k}| \geq (\gamma/\varepsilon)^{1/(\tau+1)}$.

Questa necessaria semplificazione comporta l'interruzione del processo di normalizzazione¹⁷ al raggiungimento di un ordine r ottimale, il che significa, in termini pratici, che quando si incontra la prima armonica risonante con \mathbf{k} appartenente a \mathcal{K}_r ma non allo spazio vettoriale generato dalla base $\mathbf{k}_*^1, \dots, \mathbf{k}_*^m$ lo sviluppo perturbativo si arresta. Se $|\mathbf{k}| = k_{\min}$ designa l'ordine di tale armonica, la quale per la (3.21) avrà un coefficiente non superiore a $\exp(-k_{\min}\sigma)$ (con $\sigma > 0$ parametro dipendente dalle proprietà analitiche dell'Hamiltoniana originaria), allora si può dimostrare che, in generale, per l'ordine ottimale vale la relazione $r = -k_{\min}\sigma / \ln \varepsilon$.

Con riferimento al caso i., invece, prendendo in considerazione il più piccolo dominio nel quale è ragionevole tentare di costruire la forma normale di Birkhoff, cioè $\mathcal{U}_\varepsilon(\mathbf{p}_*)$, e richiamando quanto detto alla pagina precedente (in particolare il fatto che in prossimità di tori diofantei soltanto le armoniche con $|\mathbf{k}| \geq (\gamma/\varepsilon)^{1/(\tau+1)}$ soddisfano la condizione di risonanza), si può dedurre che il resto non normalizzato $\varepsilon^r \mathcal{H}_r + O(\varepsilon^{r+1})$ assumerà il suo valore minimo per $r \sim \varepsilon^{-1/(\tau+1)}$ (ordine ottimale).¹⁸ Questo resto minimo, dell'ordine di $\exp[-\varepsilon^{-1/(\tau+1)}]$, pone dunque un limite oggettivo all'accuratezza della forma normale; ne consegue che, in un intorno di ampiezza ε di un toro diofanteo, la dinamica reale risulterà ben approssimata dalla dinamica di un sistema integrabile su tempi esponenzialmente lunghi in $1/\varepsilon$.

Rimane ora da affrontare la questione, lasciata in sospeso, dell'estensione del metodo perturbativo fin qui delineato alla sottoclasse di sistemi realmente interessante ai fini del presente studio, ovvero quella a cui appartengono i sistemi (quasi-integrabili) descritti da un'Hamiltoniana del tipo (3.1) con la parte imperturbata soddisfacente alla condizione di degenerazione (2.37).

3.5 Media sugli angoli veloci

All'Hamiltoniana di un sistema quasi-integrabile a n gradi di libertà

$$\mathcal{H}(\boldsymbol{\vartheta}, \mathbf{I}) = \mathcal{H}_0(\mathbf{I}) + \varepsilon \mathcal{H}_1(\boldsymbol{\vartheta}, \mathbf{I}),$$

con $\boldsymbol{\vartheta} = (\vartheta_1, \dots, \vartheta_n) \in \mathbb{T}^n$ e $\mathbf{I} = (I_1, \dots, I_n) \in \mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$ variabili coniugate, corrisponde il sistema di $2n$ equazioni differenziali

$$(3.33) \quad \frac{d\boldsymbol{\vartheta}}{dt} = \boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{I}) + \varepsilon \cdot \mathbf{F}(\boldsymbol{\vartheta}, \mathbf{I}), \quad \frac{d\mathbf{I}}{dt} = \varepsilon \cdot \mathbf{G}(\boldsymbol{\vartheta}, \mathbf{I}),$$

dove $\boldsymbol{\omega}_0 = \nabla_{\mathbf{I}} \mathcal{H}_0$, $\mathbf{F} = \nabla_{\mathbf{I}} \mathcal{H}_1$ e $\mathbf{G} = -\nabla_{\boldsymbol{\vartheta}} \mathcal{H}_1$.

¹⁷ La procedura di normalizzazione, ovvero la riduzione in forma normale (risonante) dell'Hamiltoniana $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \varepsilon \mathcal{H}_1$ di partenza, si esplica concretamente attraverso la risoluzione dell'equazione $\mathcal{H}_r^{\text{NR}} + \{\mathcal{H}_0, \chi_r\} = 0$ per r via via crescenti.

¹⁸ Una trattazione matematicamente più rigorosa delle forme normali, incentrata sulla definizione formale dell'ordine ottimale, si può trovare in [18].

Osservando la struttura del sistema (3.33) si è indotti a distinguere tra due tipi di variabili: variabili lente (le azioni \mathbf{I}) e variabili veloci (gli angoli $\boldsymbol{\vartheta}$). In virtù di tale distinzione, valida per $\varepsilon \ll 1$, la funzione $\mathbf{G}(\boldsymbol{\vartheta}, \mathbf{I})$ può essere scomposta nella somma di una parte oscillante $\tilde{\mathbf{G}}(\boldsymbol{\vartheta}, \mathbf{I})$, la quale contribuirà solo marginalmente al moto delle variabili lente (in quanto, se ε è piccolo, le oscillazioni tenderanno a compensarsi), e di una parte media

$$(3.34) \quad \langle \mathbf{G}(\mathbf{I}) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \mathbf{G}(\boldsymbol{\vartheta}, \mathbf{I}) d\vartheta_1 \dots d\vartheta_n,$$

la quale invece darà un contributo sistematico (preponderante su tempi lunghi) all'evoluzione delle medesime variabili.

Accanto al sistema (3.33) ha dunque senso considerare il *sistema mediato*

$$(3.35) \quad \frac{d\mathbf{J}}{dt} = \varepsilon \cdot \langle \mathbf{G}(\mathbf{J}) \rangle$$

e interrogarsi sulla relazione esistente tra le soluzioni $\mathbf{J}_\varepsilon(t)$ e $\mathbf{I}_\varepsilon(t)$ a parità di dato iniziale $\mathbf{J}_0 = \mathbf{I}_0$. Più precisamente ci si chiede se

$$|\mathbf{I}_\varepsilon(t) - \mathbf{J}_\varepsilon(t)| \rightarrow 0 \quad \text{per } \varepsilon \rightarrow 0$$

nell'intervallo $0 \leq t \leq \varepsilon^{-1}$. Poiché \mathbf{G} risulta dal gradiente rispetto a $\boldsymbol{\vartheta}$ della funzione \mathcal{H}_1 , 2π -periodica in $\boldsymbol{\vartheta}$, si avrà che $\langle \mathbf{G} \rangle = 0$, e di conseguenza la soluzione del sistema (3.35) sarà banalmente $\mathbf{J}_\varepsilon(t) = \mathbf{J}_0 = \mathbf{I}_0$. Si tratta allora di verificare se le azioni $\mathbf{I}_\varepsilon(t)$, che sono costanti del moto per $\varepsilon = 0$, si mantengano o meno vicine al valore iniziale \mathbf{I}_0 per $\varepsilon \ll 1$ e $t \sim \varepsilon^{-1}$, analogamente a quanto accade per le soluzioni del sistema mediato.¹⁹ In assenza di risonanze, e ipotizzando per semplicità che non vi siano divisori $\langle \mathbf{k}, \boldsymbol{\omega}_0 \rangle$ assumentisi valori prossimi a zero, si può dimostrare che lo scostamento da \mathbf{I}_0 risulta, in generale, piccolo. Viceversa, se sono presenti delle risonanze, ovvero se compaiono dei *termini secolari*²⁰ nella soluzione $\mathbf{I}_\varepsilon(t)$, allora quest'ultima si allontanerà di una quantità $O(1)$ dal valore iniziale \mathbf{I}_0 (cioè da $\mathbf{J}_\varepsilon(t)$, soluzione del sistema mediato) in un tempo $t \sim \varepsilon^{-1}$.

Si consideri ora l'Hamiltoniana di un sistema planetario (costituito da una stella e N pianeti) nella forma (2.52),

$$\mathcal{H}(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \boldsymbol{\Lambda}, \mathbf{P}, \mathbf{Q}) = \mathcal{H}_0(\boldsymbol{\Lambda}) + \varepsilon \mathcal{H}_1(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \boldsymbol{\Lambda}, \mathbf{P}, \mathbf{Q}),$$

dalla quale discendono le $6N$ equazioni canoniche del moto per le variabili di Delaunay modificate (2.46).

¹⁹ Si osservi che ε^{-1} è un'unità di tempo naturale per il sistema mediato, mentre rappresenta un tempo lungo per il sistema reale (a causa del moto veloce degli angoli).

²⁰ In prima approssimazione si definiscono secolari quei termini di $\mathbf{I}_\varepsilon(t)$ in cui la variabile temporale t compare come fattore moltiplicativo di una funzione trigonometrica. Se presenti, l'ampiezza delle oscillazioni corrispondenti tenderà a crescere con t (causando la deriva sistematica della soluzione), fino a divergere per $t \rightarrow \infty$.

A differenza del caso precedente, qui il termine $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_0(\mathbf{\Lambda})$ dipende solo da una parte delle azioni, il che significa, in altre parole, che il sistema imperturbato soddisfa la condizione di degenerazione (2.37). L'approccio perturbativo delle serie di Lie rimane comunque valido, e lo si potrà applicare direttamente all'Hamiltoniana (2.52) per costruire una forma normale che sia indipendente dalle longitudini medie $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)$, cioè dagli angoli veloci coniugati alle azioni $\mathbf{\Lambda} = (\Lambda_1, \dots, \Lambda_N)$. Tale procedura, nel gergo della Meccanica Celeste, prende il nome di *metodo della media*, in quanto (al primo ordine in ε) equivale appunto a mediare sugli angoli veloci.

Come anticipato nella parte introduttiva del capitolo, per angoli veloci si intendono le variabili angolari che evolvono rapidamente nel tempo (ad esempio $\boldsymbol{\vartheta}$ o $\boldsymbol{\lambda}$), mentre per angoli lenti si intendono le variabili angolari che evolvono con velocità dell'ordine di $\varepsilon \ll 1$. Il moto degli angoli lenti è precisamente ciò a cui si allude parlando del cosiddetto *problema secolare*, ovvero del problema concernente lo studio della dinamica descritta dalla forma normale secolare (sulla quale ci si soffermerà tra breve). Se il sistema imperturbato è parzialmente degenere, dunque, accanto agli angoli veloci bisognerà considerare anche gli angoli di ampiezza lentamente variabile con il tempo, la dipendenza (della forma normale) dai quali non potrà essere soppressa con un'operazione di media.

3.6 Forma normale secolare planetaria

Esplicitandone il termine imperturbato tramite la (2.48), l'Hamiltoniana planetaria (2.52) diventa

$$(3.36) \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \varepsilon \mathcal{H}_1 = - \sum_{i=1}^N \frac{m_i k_i^2}{2\Lambda_i^2} + \varepsilon \mathcal{H}_1(\lambda_1, p_1, q_1, \Lambda_1, P_1, Q_1, \dots, \lambda_N, p_N, q_N, \Lambda_N, P_N, Q_N),$$

dove $m_i = \mu_i$ e $k_i = G(m_0 + m_i)\mu_i$ (posto che la trasformazione canonica a variabili di Delaunay modificate avvenga a partire da variabili eliocentriche), il parametro ε indica il rapporto m_J/m_0 tra la massa del pianeta più grande e la massa della stella ospitante (che vale circa 10^{-3} nel caso del Sistema Solare) e infine

$$(3.37) \quad \mathcal{H}_1 = \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{m}, \mathbf{s} \in \mathbb{Z}^N} c_{\mathbf{k}, \mathbf{m}, \mathbf{s}}(\mathbf{\Lambda}, \mathbf{P}, \mathbf{Q}) \exp(i \langle \mathbf{k}, \boldsymbol{\lambda} \rangle + i \langle \mathbf{m}, \mathbf{p} \rangle + i \langle \mathbf{s}, \mathbf{q} \rangle).$$

Denotando con β_i la massa del pianeta i -esimo espressa in masse gioviane, $\beta_i = m_i/m_J$, e scegliendo le unità di misura in modo tale che $G = m_0 = 1$, si avrà che $\varepsilon = m_J$, per cui

$$m_i = \varepsilon \beta_i$$

$$\mu_i = \frac{m_0 m_i}{m_0 + m_i} = \frac{m_i}{1 + m_i} = \frac{\varepsilon \beta_i}{1 + \varepsilon \beta_i}$$

$$k_i = (1 + m_i) \mu_i = m_i = \varepsilon \beta_i .$$

Si definiscano ora delle nuove variabili d'azione, $\Lambda'_i = \Lambda_i/\varepsilon$, $P'_i = P_i/\varepsilon$ e $Q'_i = Q_i/\varepsilon$, mediante una trasformazione di scala²¹ che lasci ferme le variabili angolari λ_i , p_i e q_i . È triviale verificare che le equazioni del moto preservano la forma canonica purché venga introdotta la nuova Hamiltoniana

$$(3.38) \quad \mathcal{H}' = \mathcal{H}'_0 + \varepsilon \mathcal{H}'_1 = \frac{\mathcal{H}}{\varepsilon} = - \sum_{i=1}^N \frac{(1 + \varepsilon \beta_i)^{-1} \beta_i^3}{2(\Lambda'_i)^2} + \varepsilon \mathcal{H}'_1(\lambda_1, p_1, q_1, \Lambda'_1, P'_1, Q'_1, \dots, \lambda_N, p_N, q_N, \Lambda'_N, P'_N, Q'_N) .$$

Ricordando le espressioni della perturbazione \mathcal{H}_1 in variabili eliocentriche e di Jacobi, dedotte nel paragrafo 2.4, appare evidente come \mathcal{H}'_1 in (3.38) risulti di fatto dalla sovrapposizione di funzioni descriventi le interazioni tra coppie di pianeti,

$$(3.39) \quad \mathcal{H}_1 = \sum_{i < j} \mathcal{H}_1^{(ij)}(\lambda_i, p_i, q_i, \Lambda_i, P_i, Q_i, \lambda_j, p_j, q_j, \Lambda_j, P_j, Q_j) ,$$

il che comporterà, di conseguenza, l'assenza nelle armoniche del suo sviluppo in serie di Fourier di combinazioni di angoli di più di due pianeti.²²

L'applicazione del metodo delle serie di Lie all'Hamiltoniana (3.38) esige appunto l'espansione in serie di Fourier della funzione perturbatrice (3.39) come passo preliminare. Soltanto le armoniche aventi coefficienti di ordine ε saranno quindi trattate in $\varepsilon \mathcal{H}_1$, mentre quelle con coefficienti di ordine ε^2 o più elevato saranno relegate nella funzione perturbatrice $\varepsilon^2 \mathcal{H}_2$, di ordine superiore rispetto a $\varepsilon \mathcal{H}_1$. A seguito di quest'operazione si otterrà la nuova Hamiltoniana $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \varepsilon \mathcal{H}_1 + \varepsilon^2 \mathcal{H}_2$, nella quale $\varepsilon \mathcal{H}_1$ e $\varepsilon^2 \mathcal{H}_2$ giocano rispettivamente il ruolo dei termini $\mathcal{H}_1^{<K}$ e $\mathcal{H}_1^{\geq K}$ definiti in (3.22). Le proprietà analitiche dell'Hamiltoniana (3.38), congiuntamente alle caratteristiche di D'Alembert enumerate nel paragrafo 2.7, assicurano che $\varepsilon \mathcal{H}_1$ sarà composta da un numero finito di termini armonici (esplicitamente calcolabili).

²¹ Le trasformazioni di scala appartengono a una classe più generale di trasformazioni canoniche, non trattata nel paragrafo 2.1, in cui al cambiamento delle variabili coniugate si accompagna un cambiamento anche della funzione Hamiltoniana.

²² Gli apici in (3.39) sono stati omissi per praticità di notazione, essendo implicito da qui in avanti il riferimento alle nuove variabili scalate.

La forma normale secolare al primo ordine in ε si costruisce, come detto, sviluppando la funzione \mathcal{H} in serie di Lie, ovvero calcolando $\mathcal{H}^1 = S_\chi^\varepsilon \mathcal{H}$, dove \mathcal{H} si intende espressa nelle variabili $(\boldsymbol{\lambda}^1, \mathbf{p}^1, \mathbf{q}^1, \mathbf{\Lambda}^1, \mathbf{P}^1, \mathbf{Q}^1)$ di cui al paragrafo 3.2. Queste ultime – anche dette variabili di Delaunay modificate *medie* – saranno dunque, per costruzione, le variabili d'angolo-azione associate all'Hamiltoniana in forma normale secolare, dalle quali si potranno ricavare gli *elementi orbitali medi* $(a_i^1, e_i^1, \varpi_i^1, i_i^1, \Omega_i^1, \lambda_i^1)$ per ciascun pianeta tramite le relazioni (2.46).

È chiaro che il buon esito dell'espansione di \mathcal{H} in serie di Lie richiede che la funzione perturbatrice $\varepsilon \mathcal{H}_1$ (o meglio il suo sviluppo in serie di Fourier depurato dalle armoniche con coefficienti di ordine superiore a ε) e la funzione generatrice χ – espresse a loro volta in termini delle variabili di Delaunay modificate medie – soddisfino l'equazione omologica $\mathcal{H}_1 + \{\mathcal{H}_0, \chi\} = \bar{\mathcal{H}}_1$. Nel caso planetario, essendo il termine \mathcal{H}_0 degenere, non si può scegliere χ tale che $\bar{\mathcal{H}}_1$ dipenda solamente dalle variabili d'azione; in altre parole, la presenza di degenerazione nell'approssimazione di ordine zero rende le frequenze del moto (imperturbato) degli angoli \mathbf{p} e \mathbf{q} identicamente nulle ($\dot{\mathbf{p}} = \dot{\mathbf{q}} = 0$), sicché le armoniche indipendenti dalle longitudini medie, ma dipendenti dalle longitudini dei perielii e dei nodi, non potranno essere eliminate.

Al fine di chiarire il concetto si consideri il cosiddetto problema a molti corpi *ristretto*, sostanzialmente analogo al problema planetario per quanto concerne il procedimento di costruzione della forma normale secolare ma meno disagiata dal punto di vista della notazione.²³ Un corpo celeste di massa trascurabile (ad esempio un piccolo asteroide) e vettore posizione, riferito a un generico istante t , $\mathbf{x} = (X, Y, Z)$, si muova sotto l'azione della forza gravitazionale esercitata dal Sole (o dalla stella ospitante nel caso di un sistema extrasolare) e da N pianeti. Passando alle coordinate eliocentriche, le equazioni del moto per il corpo – che discendono direttamente dalle equazioni delle perturbazioni planetarie (1.7) ponendo $m_i \rightarrow 0$ e $\mathbf{r}_i = \mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ – si scriveranno

$$(3.40) \quad \ddot{\mathbf{r}} = -Gm_0 \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3} - G \sum_{1 \leq j \leq N} m_j \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_j}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j\|^3} + \frac{\mathbf{r}_j}{\|\mathbf{r}_j\|^3} \right).$$

È facile verificare che queste si presentano nella forma $\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla_{\mathbf{r}} V(\mathbf{r})$ se

$$(3.41) \quad V(\mathbf{r}) = -\frac{Gm_0}{\|\mathbf{r}\|} - G \sum_{1 \leq j \leq N} m_j \left(\frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j\|} - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_j}{\|\mathbf{r}_j\|^3} \right).$$

²³ È inoltre opportuno precisare che, riguardo al problema planetario, nella letteratura scientifica l'approssimazione di ordine ε^r della dinamica reale è stata sempre ottenuta mediante la risoluzione per serie delle equazioni del moto, e mai utilizzando l'approccio hamiltoniano delineato in questo capitolo. Nondimeno i risultati sono equivalenti. A tal proposito si vedano, tra gli altri, gli articoli [11] e [12] di *Laskar*.

Di conseguenza, posto $\mathbf{p} = \dot{\mathbf{r}}$, l'Hamiltoniana (per unità di massa) del problema ristretto risulta

$$(3.42) \quad \mathcal{H} = \frac{\|\mathbf{p}\|^2}{2} + V(\mathbf{r}),$$

che in variabili di Delaunay modificate diventa

$$(3.43) \quad \mathcal{H} = -\frac{G^2 m_0^2}{2\Lambda^2} + \varepsilon \mathcal{H}_1(\lambda, p, q, \Lambda, P, Q, t).$$

La dipendenza esplicita dal tempo del termine perturbativo $\varepsilon \mathcal{H}_1$ rende l'Hamiltoniana del problema ristretto *non autonoma* ($\partial \mathcal{H} / \partial t \neq 0$), contrariamente a quella del problema dei due corpi (e anche a quella del problema planetario). Si noti che il parametro t entra nell'espressione di \mathcal{H} attraverso i vettori posizione $\mathbf{r}_j(t)$ che compaiono in (3.41), dove l'indice j corre sui pianeti ($j = 1, \dots, N$). Riscrivendo tali vettori in termini degli elementi orbitali, e assumendo in prima approssimazione che i pianeti si muovano su orbite kepleriane (ipotesi ragionevole per valori sufficientemente piccoli delle frequenze associate ai moti di precessione delle orbite planetarie), la dipendenza temporale di $\varepsilon \mathcal{H}_1$ sarà interamente assorbita dalle longitudini medie λ_j , che pertanto risulteranno variare linearmente con t (ciascuna con la propria frequenza).

Un sistema non autonomo, descritto genericamente dall'Hamiltoniana $\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$, può essere sempre riportato a uno autonomo estendendo lo spazio delle fasi mediante l'introduzione di N coppie di variabili coniugate (τ_j, \mathcal{T}_j) tali che

$$\tilde{\mathcal{H}} = \sum_{j=1}^N \nu_j \mathcal{T}_j + \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \tau_1, \dots, \tau_N),$$

dove con ν_j si è indicata la j -esima di N frequenze indipendenti. Le equazioni canoniche $\dot{\tau}_j = \partial \tilde{\mathcal{H}} / \partial \mathcal{T}_j = \nu_j$ per le coordinate τ_1, \dots, τ_N ammettono le soluzioni banali $\tau_j(t) = \tau_{j,0} + \nu_j(t - t_0)$, sicché le equazioni del moto per \mathbf{q} e \mathbf{p} ricavate a partire da $\tilde{\mathcal{H}}$ coincideranno di fatto con quelle ricavate a partire da \mathcal{H} . Grazie a questo espediente, e osservando che l'Hamiltoniana trasformata $\tilde{\mathcal{H}}$ è funzione periodica di ciascuna delle coordinate τ_j (che quindi sono angoli), si potrà dunque procedere a espandere $\tilde{\mathcal{H}}$ in serie di Fourier di τ_1, \dots, τ_N e, successivamente, ad applicare il metodo perturbativo delle serie di Lie come illustrato per i sistemi autonomi.

Tornando al sistema descritto dall'Hamiltoniana (3.43), si introducano tante coppie di variabili coniugate quante sono le frequenze orbitali imperturbate (moti medi) n_j dei singoli pianeti. Ognuna di queste coppie, com'è facile intuire, sarà composta da una longitudine media λ_j e dalla rispettiva azione Λ_j , pertanto l'Hamiltoniana del problema ristretto (poste anche in questo caso $\varepsilon = m_j/m_0$ e $G = m_0 = 1$) si scriverà

$$(3.44) \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \varepsilon \mathcal{H}_1 = -\frac{1}{2\Lambda^2} + \sum_{j=1}^N n_j \Lambda_j + \varepsilon \mathcal{H}_1(\lambda, p, q, \Lambda, P, Q, \lambda_1, \dots, \lambda_N).$$

La perturbazione \mathcal{H}_1 , come deducibile dall'espressione di \mathcal{H} in coordinate eliocentriche, risulta dalla somma delle perturbazioni prodotte da ciascun pianeta preso separatamente, cioè

$$(3.45) \quad \mathcal{H}_1 = \sum_j \mathcal{H}_1^{(j)}(\lambda, p, q, \Lambda, P, Q, \lambda_j, p_j, q_j),$$

e quindi si avrà che angoli associati a pianeti diversi non potranno comparire all'interno della stessa armonica nello sviluppo di Fourier di \mathcal{H}_1 dato da

$$(3.46) \quad \mathcal{H}_1 = \sum_j \sum_{\substack{k, k_j \\ m, m_j \\ s, s_j}} c_{k, k_j, m, m_j, s, s_j}^{(j)}(\Lambda, P, Q) \\ \cdot \exp [i(k\lambda + k_j \lambda_j + mp + m_j p_j + sq + s_j q_j)],$$

dove k, k_j, m, m_j, s, s_j sono numeri interi. Si osservi che, in linea di principio, la perturbazione $\varepsilon \mathcal{H}_1$ dovrebbe essere funzione anche di p_j e q_j , ovvero delle longitudini dei perielii e delle longitudini dei nodi, tuttavia, avendo assunto per semplicità che i pianeti percorrano orbite kepleriane, queste quantità potranno considerarsi fisse (e svolgenti pertanto il ruolo di parametri).

Analogamente al caso planetario, anche nel problema ristretto la presenza di degenerazione nel termine imperturbato rende impraticabile la costruzione (per tramite di un'opportuna Hamiltoniana χ , generatrice della trasformazione canonica $\mathcal{H}^1 = S_\chi^\varepsilon \mathcal{H}$) di una forma normale (al primo ordine in ε) tale che la perturbazione "mediata" $\bar{\mathcal{H}}_1$ sia funzione solamente delle variabili d'azione; di conseguenza, le armoniche indipendenti dalle longitudini medie, ma dipendenti dalle longitudini dei perielii e dei nodi, non potranno essere eliminate. Poiché dunque lo sviluppo in serie di Fourier di \mathcal{H}_1 è espresso dalla (3.46), la funzione χ , di cui va calcolata la parentesi di Poisson con \mathcal{H}_0 , assumerà la forma

$$(3.47) \quad \chi = \sum_j \sum_{\substack{k, k_j \\ m, m_j \\ s, s_j}} -i \frac{c_{k, k_j, m, m_j, s, s_j}^{(j)}(\Lambda^1, P^1, Q^1)}{k \frac{1}{(\Lambda^1)^3} + k_j n_j} \\ \cdot \exp [i(k\lambda^1 + k_j \lambda_j^1 + mp^1 + m_j p_j^1 + sq^1 + s_j q_j^1)],$$

in cui le nuove variabili canoniche $\lambda = S_\chi^\varepsilon \lambda^1$, $\Lambda = S_\chi^\varepsilon \Lambda^1$, ecc. sono quelle introdotte mediante le serie di Lie (ovvero le già citate variabili di Delaunay modificate medie). Dalla (3.47) si evince che per $k = k_j = 0$ i denominatori $\langle \mathbf{k}, \boldsymbol{\omega}_0(\Lambda^1) \rangle = k(\Lambda^1)^{-3} + k_j n_j$ si annullano, ragion per cui le armoniche corrispondenti non potranno appunto essere eliminate, ma dovranno essere trattenute in $\bar{\mathcal{H}}_1$.

In definitiva, la migliore forma normale in cui si può sperare di porre l'Hamiltoniana (3.44) sarà del tipo

$$(3.48) \quad \mathcal{H}^1 = \mathcal{H}_0(\Lambda^1, \Lambda_j^1) + \varepsilon \bar{\mathcal{H}}_1(p^1, q^1, \Lambda^1, P^1, Q^1, p_j, q_j) + O(\varepsilon^2),$$

detta forma normale secolare al primo ordine in ε . Essa consta di due termini:

- $\bar{\mathcal{H}}_1$, che coincide con la media dello sviluppo in serie di Fourier di \mathcal{H}_1 sugli angoli veloci λ, λ_j (longitudini medie). Per ricavarlo conviene applicare il principio della media agendo direttamente sull'Hamiltoniana: si fissano i valori delle azioni lente Λ, Λ_j (semiassi maggiori), coniugate a λ, λ_j , e contestualmente si rimuovono da (3.46) i termini con $\mathbf{k} \neq 0$ (di breve periodo).
- \mathcal{H}_0 , che, in quanto dipendente dalle azioni Λ, Λ_j (i cui valori sono fissati), rappresenta una costante inessenziale ai fini dello studio delle variazioni secolari degli elementi orbitali. Può essere soppresso.

La (3.48) descriverà dunque l'evoluzione a lungo termine (secolare appunto) dell'orbita del piccolo oggetto di massa m , ossia l'oscillazione nel tempo dei valori di eccentricità (P^1) e inclinazione (Q^1) dovuta al lento moto di precessione del perielio (p^1) e del nodo (q^1).

Come ampiamente discusso nel paragrafo 3.3, per poter ridurre senza problemi un'Hamiltoniana in forma normale è necessario superare l'ostacolo posto dai piccoli divisori. Nel caso specifico detti divisori si presentano nella forma $k(\Lambda^1)^{-3} + k_j n_j$ e sono, al solito, i denominatori dei coefficienti di Fourier $d_{k, k_j, m, m_j, s, s_j}^{(j)}$ della funzione χ . Essi dovranno risultare diversi da zero per ogni valore assegnato agli interi k, k_j nell'espansione di Fourier di \mathcal{H}_1 , il che richiederà di rispettare determinati vincoli sul dominio \mathcal{U} nel quale è possibile costruire la forma normale secolare. Più precisamente, poiché la (3.46) contiene soltanto un numero finito di armoniche (k, k_j) – essendo le altre relegate in $\varepsilon^2 \mathcal{H}_2$ –, l'equazione $k(\Lambda^1)^{-3} + k_j n_j = 0$ nell'incognita Λ^1 ammetterà un numero finito di soluzioni $\Lambda_0(k, k_j, n_j)$; in conseguenza di ciò, i valori di Λ^1 prossimi a tali soluzioni dovranno essere esclusi dal dominio \mathcal{U} di cui sopra (figura 3.1). Ogniqualevolta, per una certa azione $\Lambda^1 = \Lambda_0$, la condizione $k(\Lambda^1)^{-3} + k_j n_j = 0$ risulta soddisfatta si ha una *risonanza di moto medio*. Le risonanze di moto medio sono così chiamate poiché (al primo ordine in ε) a ogni Λ_0 corrispondono specifici valori del moto medio rispettivamente del piccolo oggetto di massa m e del pianeta j -esimo.

Le considerazioni fin qui esposte per il problema ristretto si possono estendere in maniera naturale al problema planetario, con il risultato che l'Hamiltoniana (3.38) ammetterà una forma normale secolare al primo ordine in ε del tipo

$$(3.49) \quad \mathcal{H}^1 = \mathcal{H}_0(\Lambda^1) + \varepsilon \bar{\mathcal{H}}_1(\mathbf{p}^1, \mathbf{q}^1, \mathbf{P}^1, \mathbf{Q}^1; \Lambda^1) + O(\varepsilon^2),$$

altresì detta *forma normale secolare planetaria*.

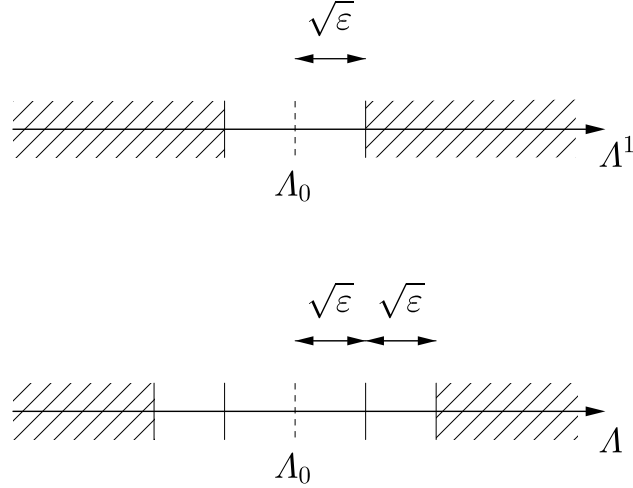


Figura 3.1 – In alto: rappresentazione euristica del dominio \mathcal{U} nel quale è possibile costruire la forma normale secolare (parti tratteggiate). I valori di Λ^1 compresi in un intorno di raggio $\sqrt{\varepsilon}$ centrato in Λ_0 , cioè tali che $|\Lambda^1 - \Lambda_0| \leq \sqrt{\varepsilon}$, devono essere esclusi. In basso: schizzo esplicativo del criterio di scelta delle variabili d'azione Λ originarie. Se $|\Lambda^1 - \Lambda_0| \sim \sqrt{\varepsilon}$ allora anche l'Hamiltoniana generatrice χ sarà di ordine $\sqrt{\varepsilon}$, così come la differenza $|\Lambda - \Lambda^1|$ tra le variabili d'azione originarie e quelle nuove (in quanto dipendente dagli angoli). Dunque, per assicurare che $\Lambda^1 \in \mathcal{U}$, le azioni originarie Λ dovranno necessariamente ricadere all'interno di un dominio che sia contenuto in \mathcal{U} insieme a un intorno di raggio $|\Lambda - \Lambda^1|$, cioè tale che $|\Lambda - \Lambda_0| > 2\sqrt{\varepsilon}$.

Per costruzione questa dovrà essere indipendente dalle longitudini medie dei pianeti $\boldsymbol{\lambda}^1 = (\lambda_1^1, \dots, \lambda_N^1)$, per cui le azioni $\boldsymbol{\Lambda}^1 = (\Lambda_1^1, \dots, \Lambda_N^1)$ svolgeranno il ruolo di semplici parametri (in quanto costanti del moto). La *dinamica secolare dei pianeti* al primo ordine in ε , che verrà esaminata in dettaglio nel prossimo capitolo, è la teoria dinamica che descrive il moto dei pianeti in accordo alla (3.49), una volta rimossi il termine $\mathcal{H}_0(\boldsymbol{\Lambda}^1)$ – ininfluenza ai fini dello studio delle fluttuazioni secolari delle orbite planetarie – e il resto non normalizzato. In sostanza, sottintendendo per comodità l'esponente 1 che identifica le variabili medie, l'Hamiltoniana per il sistema secolare \mathcal{H}_{sec} si potrà esprimere come

$$(3.50) \quad \mathcal{H}_{\text{sec}} = \sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^N} \sum_{\mathbf{m}, \mathbf{s} \in \mathbb{Z}^N} c_{\alpha, \beta, \mathbf{0}, \mathbf{m}, \mathbf{s}}(\Lambda) \mathbf{P}^{\alpha/2} \mathbf{Q}^{\beta/2} \exp[i \langle \mathbf{m}, \mathbf{p} \rangle + i \langle \mathbf{s}, \mathbf{q} \rangle]$$

in variabili di Delaunay modificate, oppure come

$$(3.51) \quad \mathcal{H}_{\text{sec}} = \sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^{2N}} c_{\alpha, \beta, \mathbf{0}}(\Lambda) \xi^\alpha \eta^\beta$$

se si utilizzano le variabili di Poincaré. La dinamica secolare approssima accuratamente la dinamica reale laddove la forma normale secolare può essere costruita, ovvero distante dalle risonanze di moto medio date dall'equazione

$$(3.52) \quad k_i(1 + \varepsilon\beta_i)^{-1} \left(\frac{\beta_i}{\Lambda_i} \right)^3 + k_j(1 + \varepsilon\beta_j)^{-1} \left(\frac{\beta_j}{\Lambda_j} \right)^3 = 0,$$

con i e j indici riferiti a due pianeti.

Il calcolo esplicito dei termini $\{\mathcal{H}_1, \chi\}$ e $\{\{\mathcal{H}_1, \chi\}, \chi\}$ dello sviluppo in serie di Lie dell'Hamiltoniana consente di verificare che, relativamente al problema planetario, le armoniche dipendenti da combinazioni di angoli di tre pianeti appaiono all'ordine ε^2 , quelle dipendenti da combinazioni di angoli di quattro pianeti all'ordine ε^3 , ecc. Analogamente, nel problema ristretto il termine $\{\mathcal{H}_1, \chi\}$ genera armoniche dipendenti dalle longitudini medie del piccolo oggetto di massa m e di due pianeti, mentre all'ordine ε^3 il termine $\{\{\mathcal{H}_1, \chi\}, \chi\}$ genera armoniche dipendenti dalle longitudini medie del piccolo oggetto di massa m e di tre pianeti, e così via. Perciò, sia la relazione (3.52) sia la sua corrispettiva per il problema ristretto si possono generalizzare come segue:

$$(3.53) \quad \sum_j k_j(1 + \varepsilon\beta_j)^{-1} \left(\frac{\beta_j}{\Lambda_j} \right)^3 = 0, \quad k\Lambda^{-3} + \sum_j k_j n_j = 0.$$

Per costruire una forma normale secolare di ordine ε^r qualsiasi (con $r > 1$) si dovrà iterare la procedura illustrata nelle pagine precedenti, temperando alle indicazioni contenute nel paragrafo 3.4. In breve, si cercano una sequenza di funzioni generatrici χ_r soddisfacenti l'equazione omologica $\{\mathcal{H}_0, \chi_r\} + \mathcal{H}_r = \bar{\mathcal{H}}_r$ (con $\bar{\mathcal{H}}_r$ dipendente dalle azioni e dalle longitudini medie di perielii e nodi) e una sequenza di trasformazioni canoniche indotte da dette funzioni χ_r (per es. $\boldsymbol{\lambda}^{r-1} = S_{\chi_r}^{\varepsilon^r} \boldsymbol{\lambda}^r$, $\boldsymbol{\Lambda}^{r-1} = S_{\chi_r}^{\varepsilon^r} \boldsymbol{\Lambda}^r$, ecc.) tali che l'Hamiltoniana trasformata $\mathcal{H}^r = S_{\chi_r}^{\varepsilon^r} \mathcal{H}^{r-1}$ risulti in forma normale secolare fino all'ordine ε^r . Se da un lato al crescere di r crescerà di pari passo anche l'accuratezza raggiungibile nella descrizione della dinamica, dall'altro, come peraltro già rilevato sempre nel paragrafo 3.4, si restringerà sempre di più il dominio \mathcal{U} nel quale è possibile costruire la forma normale secolare.

Infatti, più si aumenta l'ordine dell'approssimazione più diventerà elevato il numero delle armoniche da considerare (in quanto dovranno essere trattenute nello sviluppo di Fourier di \mathcal{H}_r tutte quelle con coefficienti di ordine ε^r) e, conseguentemente, maggiore sarà anche il numero delle risonanze di moto medio interessate, i cui intorni non possono far parte del dominio \mathcal{U} .²⁴ Ciò influirà direttamente sulla scelta del dominio delle azioni $\mathbf{\Lambda}$ originarie, che dovrà risultare non vuoto; l'imposizione di tale condizione pone un limite alla quantità totale di intorni (delle risonanze di moto medio) escludibili da \mathcal{U} , comportando di fatto l'arresto della procedura di riduzione in forma normale dell'Hamiltoniana al raggiungimento di un certo ordine r (l'ordine ottimale).

²⁴ Gli intorni delle risonanze di moto medio esclusi da \mathcal{U} avranno ampiezza $O(\sqrt{\varepsilon})$ qualunque sia r , poiché $|\Lambda - \Lambda^r| \sim |\Lambda - \Lambda^1| \sim \sqrt{\varepsilon}$.

Capitolo 4

Dinamica secolare dei pianeti

La dinamica secolare dei pianeti è – al primo ordine in ε – la dinamica che discende dalla forma normale secolare planetaria (3.49), una volta rimossi il termine costante \mathcal{H}_0 e il resto non normalizzato $\varepsilon^2\mathcal{H}_2$. Si tratta della disciplina deputata allo studio sistematico dell'evoluzione a lungo termine delle orbite planetarie, cioè allo studio delle variazioni su tempi lunghi (in relazione alla durata media della vita umana) dei valori di eccentricità e inclinazione e dei valori delle variabili angolari ad esse coniugate (cioè le longitudini dei perielii e dei nodi).

Come evidenziato nello scorso capitolo, la dinamica secolare rappresenta una descrizione attendibile della dinamica reale solamente nelle regioni in cui la forma normale secolare può essere costruita (lontano dalle risonanze di moto medio), descrizione tanto più accurata quanto più si aumenta l'ordine r della forma normale stessa. Nel seguito, per praticità di notazione, gli apici usati per contrassegnare le variabili di Delaunay modificate medie (ottenute dalle variabili di Delaunay originarie mediante i rispettivi sviluppi in serie di Lie) saranno omessi, così come sarà omesso l'aggettivo “medie” associato a tali variabili. Di conseguenza, anche gli elementi orbitali medi – definiti a partire dalle variabili di Delaunay modificate medie – saranno indicati nel testo semplicemente come elementi orbitali.

Prima di procedere a illustrare la *soluzione di Lagrange-Laplace*, che approssima all'ordine ε^2 la dinamica reale delle coppie coniugate (p_i, q_i) e (P_i, Q_i) , vale la pena di riportare un importante risultato sulla stabilità del Sistema Solare ottenuto nel secolo XIX da Lagrange (risultato anche noto come principio di invarianza dei semiassi maggiori), per la cui dimostrazione si rimanda, ad esempio, a [7]:

Teorema (di Lagrange). *Se le frequenze orbitali imperturbate (moti medi) dei pianeti non soddisfano la condizione di risonanza, allora, nell'approssimazione del primo ordine in ε , i semiassi maggiori delle orbite non saranno soggetti a variazioni secolari.*

In altre parole, su tempi scala dell'ordine di ε^{-1} i semiassi maggiori potranno presentare variazioni quasi-periodiche, ma non variazioni sistematiche.

Senza voler addentrarsi troppo nei meandri del calcolo, basti tenere a mente che la validità del precedente enunciato discende dall'applicazione del metodo delle approssimazioni successive alle equazioni $\dot{\mathbf{\Lambda}} = -\varepsilon \nabla_{\boldsymbol{\lambda}} \mathcal{H}_1$ (di cui al paragrafo 2.7). Infatti si può verificare che, al primo ordine in ε , le soluzioni $\mathbf{\Lambda}(t) = (\Lambda_1(t), \dots, \Lambda_N(t))$ – esprimenti il moto dei semiassi maggiori delle orbite planetarie o, più correttamente, l'evoluzione temporale delle azioni coniugate alle longitudini medie $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ – non contengono termini secolari, cioè termini non periodici nei quali la variabile t compare come fattore che moltiplica un'ampiezza costante (e in tal caso si parla di termini *secolari puri*) oppure come fattore che moltiplica una funzione trigonometrica $\sim \exp[i(\dots)]$ (e allora si parla di termini *secolari misti*).¹ Pertanto, se ci si arresta all'ordine $r = 1$ dello sviluppo perturbativo, appare ragionevole non considerare la dinamica dei semiassi maggiori come parte costitutiva del cosiddetto problema secolare, il quale riguarda appunto solo il moto degli angoli lenti \mathbf{p} e \mathbf{q} (e delle azioni ad essi coniugati) a semiassi maggiori fissati.²

4.1 Teoria di Lagrange-Laplace

La ricerca di soluzioni del primo ordine al problema secolare comporta lo studio del cosiddetto *sistema secolare*, ovvero, più precisamente, lo studio del sistema governato dalla forma normale (3.49). Quest'ultima non dipende, per definizione, dalle longitudini medie $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ dei pianeti, pertanto la dinamica risultante sarà completamente descritta in termini delle sole variabili canoniche d'angolo-azione p_i, q_i, P_i, Q_i ($i = 1, \dots, N$). Al netto del termine \mathcal{H}_0 e del resto non normalizzato, la (3.49) assumerà dunque la forma

$$(4.1) \quad \mathcal{H} = \varepsilon \mathcal{H}_1(p_1, q_1, P_1, Q_1, \dots, p_N, q_N, P_N, Q_N; \Lambda_1, \dots, \Lambda_N),$$

in cui le azioni coniugate alle longitudini medie svolgono il ruolo di semplici parametri (in quanto costanti del moto).

Nella (4.1) il piccolo parametro ε (dato da $m_J/m_0 \simeq 10^{-3}$ per il Sistema Solare) moltiplica l'intera Hamiltoniana, coincidente nella fattispecie con la media della perturbazione sugli angoli veloci (indicata con il simbolo $\bar{\mathcal{H}}_1$ nel capitolo precedente).

¹ Più in generale, considerando un ordine perturbativo r qualsiasi, i termini secolari si presentano nella forma di polinomi trigonometrici, ovvero come espressioni del tipo $\mathcal{A}t^s \exp[i(\dots)]$. Nel caso delle soluzioni $\mathbf{\Lambda}(t)$ si può dimostrare che l'esponente della variabile temporale t è soggetto alla limitazione $s < r$.

² Il *teorema di Poisson*, che generalizza il teorema di Lagrange riportato nella pagina precedente, stabilisce che, in assenza di risonanze di moto medio, le funzioni esprimenti il movimento dei semiassi maggiori – cioè le $\mathbf{\Lambda}(t)$ – non contengono termini secolari puri almeno fino al second'ordine in ε . Potrebbero tuttavia contenere dei termini secolari misti, pertanto non è possibile estendere il risultato di stabilità ottenuto da Lagrange agli ordini successivi al primo.

Di conseguenza, nel prosieguo ε non assolverà più la funzione di separare la parte integrabile dell'Hamiltoniana dalla sua perturbazione, bensì quella di fornire una misura della lentezza del moto descritto dalla (4.1).³ È evidente allora che lo studio di $\mathcal{H} = \varepsilon\mathcal{H}_1$ con gli strumenti analitici illustrati nel capitolo 3 richiederà di definire un nuovo parametro perturbativo – η – tale che (in opportune variabili d'angolo-azione $\boldsymbol{\vartheta}$ e \mathbf{I}) la (4.1) si possa scrivere come somma di una parte integrabile $\mathcal{H}_0(\mathbf{I})$ e di una perturbazione $\mathcal{H}_1(\boldsymbol{\vartheta}, \mathbf{I})$ di ordine η rispetto ad \mathcal{H}_0 .

Approssimando le azioni P_i (di cui al paragrafo 2.6) per piccoli valori delle eccentricità si ottengono le espressioni

$$(4.2) \quad P_i = L_i(1 - \sqrt{1 - e_i^2}) \sim \sqrt{a_i} \frac{e_i^2}{2}.$$

Analogamente, approssimando le azioni Q_i per piccoli valori delle inclinazioni risulta

$$(4.3) \quad Q_i = 2G_i \sin^2 \frac{i_i}{2} \sim 2\sqrt{a_i} \sin^2 \frac{i_i}{2}.$$

La strategia risolutiva di Lagrange-Laplace consiste nell'espandere la (4.1) in serie di Taylor di $\sqrt{P_i}$ e $\sqrt{Q_i}$, cioè

$$(4.4) \quad \mathcal{H}(p_i, q_i, P_i, Q_i) = \sum_{s \geq 0} \mathcal{H}_{(s)}(p_i, q_i, P_i, Q_i),$$

dove il termine generale della serie – $\mathcal{H}_{(s)}$ – è una funzione polinomiale omogenea di grado s in $\sqrt{P_i}$ e $\sqrt{Q_i}$.

Lo sviluppo (4.4), in ottemperanza alle regole di selezione di D'Alembert elencate nel paragrafo 2.7, potrà contenere solamente monomi di grado $2s$ (pari), quindi, ignorando il termine $\mathcal{H}_{(0)}$ (che in quanto costante è ininfluente) l'Hamiltoniana secolare si scriverà⁴

$$(4.5) \quad \mathcal{H}(p_i, q_i, P_i, Q_i) = \sum_{s > 0} \mathcal{H}_{(2s)}(p_i, q_i, P_i, Q_i),$$

con $\mathcal{H}_{(2)}$ termine principale della serie. Quest'ultimo consta di due parti separate (denominate rispettivamente *eccentrica* e *obliqua* da Poincaré),

$$(4.6) \quad \mathcal{H}_{(2)} = \mathcal{H}_{\text{ecc}}(\mathbf{P}, \mathbf{p}) + \mathcal{H}_{\text{obl}}(\mathbf{Q}, \mathbf{q}),$$

³ Con riferimento al Sistema Solare, gli angoli lenti $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_N)$ e $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_N)$ associati al moto di precessione delle orbite planetarie evolveranno secondo una scala temporale naturale pari a $\sim \varepsilon^{-1}$ volte il periodo orbitale di Giove.

⁴ Tutti i termini $\mathcal{H}_{(s)}$ di grado $2s + 1$ (dispari) scompaiono da (4.4) poiché le armoniche del problema secolare, la cui forma generale è $\prod_i P_i^{\alpha_i/2} Q_i^{\beta_i/2} \exp[i \sum_i (m_i p_i + s_i q_i)]$, devono sottostare al vincolo $\sum_i (m_i + s_i) = 0$. Ne consegue che $\sum_i (|m_i| + |s_i|)$ deve essere pari, e così anche $\sum_i (\alpha_i + \beta_i)$.

dove

$$(4.7) \quad \begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{ecc}}(\mathbf{P}, \mathbf{p}) &= \sum_{\substack{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Z}_+^N \\ |\boldsymbol{\alpha}|=2}} \sum_{\substack{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^N \\ |\mathbf{m}|=0,2}} c_{\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{m}}(\boldsymbol{\Lambda}) \mathbf{P}^{\boldsymbol{\alpha}/2} \cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{p} \rangle \\ \mathcal{H}_{\text{obl}}(\mathbf{Q}, \mathbf{q}) &= \sum_{\substack{\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{Z}_+^N \\ |\boldsymbol{\beta}|=2}} \sum_{\substack{\mathbf{s} \in \mathbb{Z}^N \\ |\mathbf{s}|=0,2}} d_{\boldsymbol{\beta}, \mathbf{s}}(\boldsymbol{\Lambda}) \mathbf{Q}^{\boldsymbol{\beta}/2} \cos \langle \mathbf{s}, \mathbf{q} \rangle \end{aligned}$$

sempre per le proprietà di D'Alembert.⁵ Ne consegue che la forma generale di $\mathcal{H}_{(2)}$ dovrà essere

$$(4.8) \quad \mathcal{H}_{(2)} = \sum_{1 \leq i \leq j \leq N} \left[c_{i,j} \sqrt{P_i P_j} \cos(p_i - p_j) + d_{i,j} \sqrt{Q_i Q_j} \cos(q_i - q_j) \right],$$

i coefficienti $c_{i,j}$ e $d_{i,j}$ dipendenti solamente dalle costanti $\Lambda_i \propto \sqrt{a_i}$.

Introducendo ora le variabili canoniche polinomiali di Poincaré (2.47), la (4.8) diventa

$$(4.9) \quad \mathcal{H}_{(2)} = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \leq j \leq N} [c_{i,j}(\xi_i \xi_j + \eta_i \eta_j) + d_{i,j}(\xi_{N+i} \xi_{N+j} + \eta_{N+i} \eta_{N+j})],$$

cioè una forma quadratica. Da essa discendono equazioni del moto lineari, che, come tutte le equazioni differenziali lineari, sono integrabili. Si possono dunque facilmente identificare nel termine principale $\mathcal{H}_{(2)}$ dello sviluppo di Taylor (4.5) e nei termini successivi $\mathcal{H}_{(4)}$, $\mathcal{H}_{(6)}$, ecc. rispettivamente:

- un'approssimazione integrabile dell'Hamiltoniana secolare (4.1);
- la relativa perturbazione, essendo la dimensione di $\mathcal{H}_{(2s)}$ (con $s > 1$) rispetto ad $\mathcal{H}_{(2)}$ data da $[\max_i(\sqrt{P_i}, \sqrt{Q_i})]^{2s-2} \sim [\max_i(e_i, i_i)]^{2s-2}$.

Pertanto, se nel problema planetario originario il parametro perturbativo naturale ε risultava dal rapporto tra la massa del pianeta maggiore e quella del Sole, nel problema secolare il parametro perturbativo naturale η sarà dato dal quadrato del massimo valore assunto dalle eccentricità o inclinazioni orbitali durante l'evoluzione secolare.

⁵ In particolare, considerando ad esempio la parte eccentrica:

- dalla proprietà i. (cfr. elenco pag. 32) si evince che
 - a. $c_{\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{m}} \in \mathbb{R}$;
 - b. lo sviluppo di \mathcal{H}_{ecc} contiene solo coseni;
- dalla proprietà iv. discende che, posto $|\boldsymbol{\alpha}| = 2$, il vincolo $|m_i| \leq \alpha_i$ risulta soddisfatto per $|\mathbf{m}| = 0, 2$ (atteso che α_i e m_i devono avere la stessa parità).

Ponendo $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_{\text{ecc}} + \boldsymbol{\xi}_{\text{obl}}$ ed $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_{\text{ecc}} + \boldsymbol{\eta}_{\text{obl}}$, dove $\boldsymbol{\xi}_{\text{ecc}} = (\xi_1, \dots, \xi_N)$, $\boldsymbol{\xi}_{\text{obl}} = (\xi_{N+1}, \dots, \xi_{2N})$, $\boldsymbol{\eta}_{\text{ecc}} = (\eta_1, \dots, \eta_N)$, $\boldsymbol{\eta}_{\text{obl}} = (\eta_{N+1}, \dots, \eta_{2N})$, la (4.9) si può riscrivere come

$$(4.10) \quad \mathcal{H}_{(2)}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = \mathcal{H}_{\text{ecc}}(\boldsymbol{\xi}_{\text{ecc}}, \boldsymbol{\eta}_{\text{ecc}}) + \mathcal{H}_{\text{obl}}(\boldsymbol{\xi}_{\text{obl}}, \boldsymbol{\eta}_{\text{obl}}),$$

dove (denotate con i simboli \mathbf{A}_{ecc} e \mathbf{A}_{obl} due matrici quadrate di ordine N a coefficienti reali, simmetriche e non singolari)

$$(4.11) \quad \begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{ecc}}(\boldsymbol{\xi}_{\text{ecc}}, \boldsymbol{\eta}_{\text{ecc}}) &= \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\xi}_{\text{ecc}}, \mathbf{A}_{\text{ecc}} \boldsymbol{\xi}_{\text{ecc}} \rangle + \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\eta}_{\text{ecc}}, \mathbf{A}_{\text{ecc}} \boldsymbol{\eta}_{\text{ecc}} \rangle \\ \mathcal{H}_{\text{obl}}(\boldsymbol{\xi}_{\text{obl}}, \boldsymbol{\eta}_{\text{obl}}) &= \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\xi}_{\text{obl}}, \mathbf{A}_{\text{obl}} \boldsymbol{\xi}_{\text{obl}} \rangle + \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\eta}_{\text{obl}}, \mathbf{A}_{\text{obl}} \boldsymbol{\eta}_{\text{obl}} \rangle. \end{aligned}$$

La cosiddetta *soluzione di Lagrange-Laplace* al problema secolare si otterrà dunque risolvendo le equazioni del moto che originano dall'Hamiltoniana quadratica (4.10). Questa, per quanto detto, costituisce l'approssimazione integrabile dell'Hamiltoniana secolare completa

$$(4.12) \quad \mathcal{H}_{\text{sec}}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = \mathcal{H}_{(2)}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) + \eta \mathcal{H}'(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}),$$

in cui con $\eta \mathcal{H}'$ si è indicata la perturbazione.

Si consideri dunque un'Hamiltoniana quadratica della forma

$$(4.13) \quad \mathcal{H}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{A} \boldsymbol{\xi} \rangle + \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\eta}, \mathbf{A} \boldsymbol{\eta} \rangle,$$

indicante indifferentemente \mathcal{H}_{ecc} o \mathcal{H}_{obl} , dove $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^N$. Poiché \mathbf{A} è una matrice quadrata di ordine N a coefficienti reali, simmetrica e non singolare, valgono le seguenti proprietà:

- i. \mathbf{A} ammette autovalori reali $\omega_1, \dots, \omega_N$;
- ii. \mathbf{A} è diagonalizzabile mediante una matrice ortogonale, cioè esiste una matrice (di rotazione) \mathbf{R} , soddisfacente alla condizione $\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbb{I}$ (con \mathbf{R}^T trasposta di \mathbf{R} e \mathbb{I} matrice identità), tale che $\mathbf{R}^T \mathbf{A} \mathbf{R} = \boldsymbol{\Omega}$ è una matrice diagonale;
- iii. la rotazione dei vettori $\boldsymbol{\xi}$ ed $\boldsymbol{\eta}$,

$$(4.14) \quad \boldsymbol{\xi} = \mathbf{R} \mathbf{x}, \quad \boldsymbol{\eta} = \mathbf{R} \mathbf{y}$$

trasforma le forme quadratiche $\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{A} \boldsymbol{\xi} \rangle$ e $\langle \boldsymbol{\eta}, \mathbf{A} \boldsymbol{\eta} \rangle$ rispettivamente in $\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\Omega} \mathbf{x} \rangle$ e $\langle \mathbf{y}, \boldsymbol{\Omega} \mathbf{y} \rangle$.

Si osservi che la (4.14) è una trasformazione canonica, in quanto coordinate e momenti coniugati trasformano con la stessa matrice \mathbf{R} (che per la ii. è ortogonale). Ricordando la tabella 2.1 di pagina 19, perché sia soddisfatta la condizione di canonicità è necessario che a una trasformazione lineare delle coordinate $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{R} \mathbf{x}$ corrisponda una trasformazione dei momenti della forma $\boldsymbol{\eta} = (\mathbf{R}^{-1})^T \mathbf{y}$, con $(\mathbf{R}^{-1})^T$ trasposta dell'inversa della matrice \mathbf{R} . Ma $\boldsymbol{\eta} = (\mathbf{R}^{-1})^T \mathbf{y}$ coincide con $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{R} \mathbf{y}$ per la proprietà di ortogonalità delle matrici di rotazione $\mathbf{R} = (\mathbf{R}^{-1})^T$.

Nelle nuove variabili canoniche (\mathbf{x}, \mathbf{y}) l'equazione dell'Hamiltoniana quadratica (4.13), espressa in forma estesa, diventa

$$(4.15) \quad \mathcal{H}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \omega_i (x_i^2 + y_i^2),$$

che richiama immediatamente la ben nota equazione dell'Hamiltoniana di un sistema di oscillatori armonici accoppiati. In tal modo si è ricondotto il problema iniziale a quello della ricerca degli autovalori della matrice \mathbf{A} e della matrice di rotazione \mathbf{R} , quest'ultima avente per colonne gli autovettori di \mathbf{A} opportunamente normalizzati.⁶

Ritornando all'Hamiltoniana $\mathcal{H}_{(2)}$, data dalla (4.10), essa risulta dalla somma di una parte eccentrica \mathcal{H}_{ecc} e di una parte obliqua \mathcal{H}_{obl} , entrambe della stessa forma di (4.15). Pertanto, dette \mathbf{R} e \mathbf{R}' due matrici di rotazione tali che

$$(4.16) \quad (\boldsymbol{\xi}_{\text{ecc}}, \boldsymbol{\eta}_{\text{ecc}}) \xrightarrow{\mathbf{R}} (\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (\boldsymbol{\xi}_{\text{obl}}, \boldsymbol{\eta}_{\text{obl}}) \xrightarrow{\mathbf{R}'} (\mathbf{v}, \mathbf{z}),$$

si avrà

$$(4.17) \quad \mathcal{H}_{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{v}, \mathbf{z}) = - \sum_{i=1}^N \left[g_i \frac{x_i^2 + y_i^2}{2} + s_i \frac{v_i^2 + z_i^2}{2} \right],$$

dove $-g_i$ e $-s_i$ ($i = 1, \dots, N$) sono dei coefficienti reali (dipendenti solamente dalle costanti Λ_i) che coincidono con gli autovalori delle matrici \mathbf{A}_{ecc} e \mathbf{A}_{obl} rispettivamente. Invertendo le (2.47) si ottengono le relazioni che consentono di passare da variabili di Poincaré a variabili di Delaunay modificate,

$$(4.18) \quad \begin{aligned} P_i &= \frac{\xi_i^2 + \eta_i^2}{2} & \tan p_i &= \frac{\eta_i}{\xi_i} \\ Q_i &= \frac{\xi_{N+i}^2 + \eta_{N+i}^2}{2} & \tan q_i &= \frac{\eta_{N+i}}{\xi_{N+i}}, \end{aligned}$$

grazie alle quali si può trasformare l'Hamiltoniana (4.17) in una funzione delle sole variabili d'azione $\hat{\mathbf{P}}$ e $\hat{\mathbf{Q}}$, definite a partire da $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{v}$ e \mathbf{z} (si ricordi che, in questo contesto, si parla sempre di variabili medie).

⁶ Sia \mathbf{A} una matrice quadrata di ordine N a coefficienti in un campo \mathbb{K} . Si definisce:

- autovalore di \mathbf{A} uno scalare $\lambda \in \mathbb{K}$ che soddisfi l'equazione algebrica

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbb{I}) = 0,$$

detta *equazione secolare*, dove $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbb{I})$ è il polinomio caratteristico di \mathbf{A} ;

- autovettore di \mathbf{A} relativo all'autovalore λ un vettore (colonna) non nullo $\mathbf{u} \in \mathbb{K}^N$ che sia soluzione del sistema lineare omogeneo $(\mathbf{A} - \lambda \mathbb{I})\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Esplicitamente:

$$(4.19) \quad \mathcal{H}_{(2)}(\hat{\mathbf{P}}, \hat{\mathbf{Q}}) = - \sum_{i=1}^N \left[g_i \hat{P}_i + s_i \hat{Q}_i \right].$$

Pertanto, in assenza della perturbazione $\sum_{s>1} \mathcal{H}_{(2s)}$ – di ordine η rispetto ad $\mathcal{H}_{(2)}$ –, risulta che:

- le $2N$ azioni \hat{P}_i e \hat{Q}_i rappresentano altrettanti integrali primi per l'Hamiltoniana secolare;
- gli angoli \hat{p}_i e \hat{q}_i , coniugati alle azioni \hat{P}_i e \hat{Q}_i , variano linearmente nel tempo, con frequenze fisse $-g_i$ e $-s_i$ rispettivamente.

A questo punto, ripercorrendo a ritroso la sequenza delle trasformazioni canoniche effettuate, da (4.19) è relativamente semplice risalire alle equazioni del moto nelle variabili d'angolo-azione originarie p_i, q_i, P_i, Q_i ($i = 1, \dots, N$), e da queste all'evoluzione temporale approssimata degli elementi orbitali. Infatti, sostituendo nelle (2.47) le espressioni di P_i e Q_i date da (4.2) e (4.3), e ricordando che $p_i = -\varpi_i$ e $q_i = -\Omega_i$, si ottengono le relazioni

$$(4.20) \quad \begin{aligned} \xi_i(t) &\sim e_i \cos \varpi_i = \sum_{j=1}^N M_{i,j} \cos(g_j t + \varphi_{i,j}) \\ \eta_i(t) &\sim e_i \sin \varpi_i = \sum_{j=1}^N M_{i,j} \sin(g_j t + \varphi_{i,j}) \\ \xi_{N+i}(t) &\sim \sin \frac{i_i}{2} \cos \Omega_i = \sum_{j=1}^N N_{i,j} \cos(s_j t + \psi_{i,j}) \\ \eta_{N+i}(t) &\sim \sin \frac{i_i}{2} \sin \Omega_i = \sum_{j=1}^N N_{i,j} \sin(s_j t + \psi_{i,j}), \end{aligned}$$

note nel loro insieme come soluzione di Lagrange-Laplace al problema del moto secolare dei pianeti. Questa si presenta come una sovrapposizione di moti periodici di frequenze g_j, s_j ($j = 1, \dots, N$) dipendenti solamente dai semiassi maggiori delle orbite planetarie⁷, con le ampiezze $M_{i,j}, N_{i,j}$ e le fasi iniziali $\varphi_{i,j}, \psi_{i,j}$ da determinarsi mediante i dati iniziali $(\boldsymbol{\xi}_0, \boldsymbol{\eta}_0)$.

⁷ Ovviamente ciò vale finché $\mathcal{H}_{\text{sec}} = \mathcal{H}_{(2)}$, ma non è più vero se, assieme alla parte quadratica, si prendono in considerazione i termini perturbativi $\mathcal{H}_{(2s)}$ con $s > 1$. In tal caso, infatti, le frequenze $-g_i$ e $-s_i$ ($i = 1, \dots, N$) diventeranno funzioni anche delle azioni \hat{P}_i e \hat{Q}_i , cioè, in ultima istanza, delle eccentricità e inclinazioni orbitali.

Nel gergo della Meccanica Celeste le frequenze g_j e s_j sono dette *frequenze proprie del j -esimo pianeta*, sebbene tale espressione costituisca un lieve abuso di linguaggio.⁸ Il suo largo impiego è giustificato dal fatto che, nella maggior parte dei casi, alle frequenze g_j e s_j corrispondono i moti periodici con le ampiezze maggiori tra tutti quelli che concorrono a determinare il moto secolare complessivo del pianeta j -esimo. Si ha cioè che, in generale, $|M_{j,j}| = \max_i |M_{j,i}|$ e $|N_{j,j}| = \max_i |N_{j,i}|$. Tuttavia ciò non è sempre vero, infatti (ad esempio) $M_{7,5}$ è l'ampiezza massima tra tutte le $M_{7,j}$ (cioè la frequenza principale del moto secolare del perielio di Urano è g_5). I valori assunti da g_j e s_j per ogni pianeta sono riportati nella tabella 4.1 a pagina 71.

Alla luce di quanto fin qui esposto appare abbastanza evidente che le variazioni secolari cui sono soggette le longitudini dei perieli ϖ_i e dei nodi Ω_i non pregiudicano la stabilità delle orbite planetarie. Infatti, il lento moto di rotazione delle ellissi kepleriane e quello, concomitante, dei piani che le contengono si traducono rispettivamente in uno spostamento dei perieli e dei nodi. Al contrario, un'evoluzione di tipo secolare delle eccentricità potrebbe avere conseguenze catastrofiche, finanche la caduta di uno dei pianeti sul Sole (se $e \rightarrow 1$).⁹ Nell'ambito dell'approssimazione del primo ordine in η , che contempla solamente la parte quadratica di \mathcal{H}_{sec} , si possono determinare dei limiti alle variazioni secolari di eccentricità e inclinazioni. Dalle (4.20), assumendo che le frequenze siano non risonanti, discende che l'ampiezza massima raggiungibile dalle oscillazioni sarà data dalla somma delle ampiezze delle singole componenti, cioè, ad esempio,

$$(4.21) \quad |\xi_i(t)| \leq \sum_{j=1}^N |M_{i,j}|.$$

4.2 Integrali primi per il sistema secolare

Con riferimento all'Hamiltoniana (4.1), opportunamente scissa in una parte integrabile e una perturbazione, si possono distinguere tre diversi tipi di integrali primi del moto:

- per il sistema secolare completo;
- *quadratici*;
- *lineari*.

Verranno ora discussi brevemente, ponendo particolare enfasi sugli ultimi due.

⁸ Infatti, come evidente dalle (4.20), gli elementi orbitali di ciascun pianeta dipendono da tutte le frequenze g_1, \dots, g_N e s_1, \dots, s_N .

⁹ Fissati i semiassi maggiori, in corrispondenza a valori crescenti delle eccentricità le orbite dei pianeti tenderanno ad allungarsi e a intersecarsi tra loro, aumentando la probabilità di incontri ravvicinati (non necessariamente collisioni) dagli effetti imprevedibili.

Tabella 4.1 – Frequenze proprie g_j e s_j degli otto pianeti del Sistema Solare (espresse in arcsec/anno). Seconda e quarta colonna: valori calcolati da Brouwer e Clemence in [2]. Terza e quinta colonna: valori calcolati da Laskar in [13] ($j = 1, \dots, 4$) e da Nobili et al. in [20] ($j = 5, \dots, 8$).

j	$g_j^{(1)}$	$g_j^{(2)}$	$s_j^{(1)}$	$s_j^{(2)}$
1	5.4633	5.5964	-5.2015	-5.6174
2	7.3447	7.4559	-6.5708	-7.0795
3	17.3283	17.3646	-18.7436	-18.8512
4	18.0023	17.9156	-17.6333	-17.7482
5	4.2959	4.2575	0.0000	0.0000
6	27.7741	28.2455	-25.7335	-25.3450
7	2.7193	3.0868	-2.9027	-2.9927
8	0.6333	0.6726	-0.6775	-0.6925

È noto dal paragrafo 2.8 che le componenti del momento angolare sono integrali primi del moto per $\mathcal{H}_0 + \varepsilon\mathcal{H}_1$. Facendo ricorso alle (2.56) si può facilmente dimostrare che $\Gamma_x, \Gamma_y, \Gamma_z$ restano integrali primi del moto anche per $\mathcal{H}_{\text{sec}} = \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha,\beta,0}(\boldsymbol{\Lambda})\boldsymbol{\xi}^\alpha\boldsymbol{\eta}^\beta$. Ciò segue dal fatto che \mathcal{H}_{sec} corrisponde alla media sugli angoli veloci dello sviluppo di Fourier di \mathcal{H}_1 , quindi, per costruzione, al pari di $\Gamma_x, \Gamma_y, \Gamma_z$ non dipende dalle longitudini medie $\boldsymbol{\lambda}$ dei pianeti.¹⁰ Non è necessario eseguire il calcolo diretto delle parentesi di Poisson per rendersi conto che $\{\Gamma_x, \mathcal{H}_{\text{sec}}\} = \{\Gamma_y, \mathcal{H}_{\text{sec}}\} = \{\Gamma_z, \mathcal{H}_{\text{sec}}\} = 0$.

Gli integrali primi cosiddetti quadratici sono gli integrali primi per la parte quadratica di \mathcal{H}_{sec} , cioè per $\mathcal{H}_{(2)}$. Dalle equazioni (4.17) e (4.19) discende immediatamente che le $2N$ azioni

$$(4.22) \quad \hat{P}_i = \frac{x_i^2 + y_i^2}{2}, \quad \hat{Q}_i = \frac{v_i^2 + z_i^2}{2}$$

formano un sistema completo di integrali primi indipendenti e in involuzione per $\mathcal{H}_{(2)} = \mathcal{H}_{\text{ecc}} + \mathcal{H}_{\text{obl}}$. Accanto a questi, peraltro già messi in evidenza nel paragrafo precedente, si possono scrivere altri integrali primi quadratici, derivanti dalla conservazione del momento angolare.

¹⁰ Al primo ordine in ε i coefficienti $c_{\alpha,\beta,0}$ – che sono funzioni solo delle azioni coniugate alle longitudini medie $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ – diventano semplici costanti. Si ricordi che \mathcal{H}_{sec} è da intendersi espressa nelle variabili d'angolo-azione medie, in quanto risulta dalla procedura di riduzione in forma normale dettagliata nel capitolo 3.

In particolare si vuole mostrare che le funzioni

$$(4.23) \quad \Phi_{\text{ecc}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\xi_i^2 + \eta_i^2), \quad \Phi_{\text{obl}} = \frac{1}{2} \sum_{i=N+1}^{2N} (\xi_i^2 + \eta_i^2)$$

sono integrali primi del moto rispettivamente per $\mathcal{H}_{\text{ecc}}(\xi_1, \dots, \xi_N, \eta_1, \dots, \eta_N)$ e per $\mathcal{H}_{\text{obl}}(\xi_{N+1}, \dots, \xi_{2N}, \eta_{N+1}, \dots, \eta_{2N})$. A tal proposito – ricordando che l'Hamiltoniana secolare assume la forma (4.5) di uno sviluppo in serie di potenze con termini di grado pari –, Γ_z si può riscrivere come

$$(4.24) \quad \Gamma_z = \sum_{i=1}^N \Lambda_i - \Phi_{\text{ecc}} - \Phi_{\text{obl}},$$

da cui (tenuto conto della dipendenza delle varie funzioni) discende che

$$(4.25) \quad \{\Gamma_z, \mathcal{H}_{\text{sec}}\} = \{\Phi_{\text{ecc}}, \mathcal{H}_{\text{ecc}}\} + \{\Phi_{\text{obl}}, \mathcal{H}_{\text{obl}}\} + \dots = 0.$$

Le due parentesi di Poisson che compaiono al secondo membro di (4.25) sono termini di secondo grado in $\boldsymbol{\xi}$ ed $\boldsymbol{\eta}$, mentre i puntini sostituiscono dei termini di grado superiore al secondo che è superfluo esplicitare.¹¹ Se ne conclude che

$$(4.26) \quad \{\Phi_{\text{ecc}}, \mathcal{H}_{\text{ecc}}\} = \{\Phi_{\text{obl}}, \mathcal{H}_{\text{obl}}\} = 0,$$

come asserito.

Infine si possono identificare nelle funzioni lineari

$$(4.27) \quad \Psi_1 = \sum_{i=1}^N \eta_{N+i} \sqrt{\Lambda_{i,0}}, \quad \Psi_2 = \sum_{i=1}^N \xi_{N+i} \sqrt{\Lambda_{i,0}}$$

due integrali primi per \mathcal{H}_{obl} , originati da Γ_x e Γ_y .¹² La dimostrazione segue le stesse linee di quella precedente. Noto che Γ_x e Γ_y sono integrali primi per il sistema secolare, se ne considerino le relative espressioni in variabili di Poincaré date dalle (2.56). Sostituendo le Λ_i con i loro valori iniziali $\Lambda_{i,0}$ ($i = 1, \dots, N$) e sviluppando i radicali in serie di potenze di $\xi_{N+1}, \dots, \xi_{2N}$ ed $\eta_{N+1}, \dots, \eta_{2N}$ si otterranno espressioni del tipo

$$\Gamma_x = -\Psi_1 + \dots, \quad \Gamma_y = -\Psi_2 + \dots,$$

¹¹ Ci si è avvalsi della seguente proprietà, di immediata dimostrazione: se $f(\xi, \eta)$ e $g(\xi, \eta)$ sono due polinomi omogenei rispettivamente di grado r ed s nelle variabili canoniche ξ ed η , allora $\{f, g\}$ è un polinomio omogeneo di grado $r + s - 2$.

¹² Il pedice 0 serve semplicemente a rimarcare che le azioni Λ_i , nell'approssimazione del primo ordine in ε , non soggette a variazioni secolari (e quindi in \mathcal{H}_{sec} svolgono il ruolo di semplici parametri).

in cui i puntini rappresentano polinomi di grado ≥ 3 in ξ ed η . Effettuando a questo punto il calcolo delle parentesi di Poisson tra ognuna delle due componenti x e y del momento angolare e \mathcal{H}_{sec} si trova che

$$\begin{aligned}\{\Gamma_x, \mathcal{H}_{\text{sec}}\} &= \{\Psi_1, \mathcal{H}_{\text{obl}}\} + \dots = 0 \\ \{\Gamma_y, \mathcal{H}_{\text{sec}}\} &= \{\Psi_2, \mathcal{H}_{\text{obl}}\} + \dots = 0,\end{aligned}$$

dove i termini riportati esplicitamente corrispondono a polinomi di primo grado, mentre i puntini indicano, al solito, termini di grado superiore. Se ne deduce che

$$(4.28) \quad \{\Psi_1, \mathcal{H}_{\text{obl}}\} = \{\Psi_2, \mathcal{H}_{\text{obl}}\} = 0,$$

come atteso.

Utilizzando il risultato appena ricavato si può mostrare che almeno una delle frequenze proprie del sistema di oscillatori armonici descritto da \mathcal{H}_{obl} si annulla. In termini pratici ciò equivale a provare che $\det \mathbf{A}_{\text{obl}} = 0$, condizione che risulta soddisfatta quando almeno uno degli autovalori di \mathbf{A}_{obl} è nullo. A tal proposito si consideri $\mathcal{H}_{\text{obl}}(\xi_{\text{obl}}, \eta_{\text{obl}})$ scritta in forma estesa, cioè

$$(4.29) \quad \mathcal{H}_{\text{obl}} = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \leq j \leq N} d_{i,j} (\xi_{N+i} \xi_{N+j} + \eta_{N+i} \eta_{N+j}).$$

Dal calcolo esplicito di $\{\Psi_1, \mathcal{H}_{\text{obl}}\}$ si ottiene¹³

$$\{\Psi_1, \mathcal{H}_{\text{obl}}\} = - \sum_{1 \leq i \leq j \leq N} d_{i,j} \sqrt{\Lambda_{i,0}} \xi_{N+j} = 0,$$

quindi, poiché tale espressione deve annullarsi per tutti i valori di $\xi_{N+1}, \dots, \xi_{N+j}$ compresi in un intorno di zero, segue che

$$(4.30) \quad \sum_{i=1}^N d_{i,j} \sqrt{\Lambda_{i,0}} = 0 \quad (j = 1, \dots, N).$$

Essendo le azioni $\Lambda_{1,0}, \dots, \Lambda_{N,0}$ non nulle, la sommatoria al primo membro di (4.30) risulterà uguale a zero se e solo se $\det \mathbf{A}_{\text{obl}} = 0$, ovvero solamente nel caso in cui la matrice $\mathbf{A}_{\text{obl}} = [d_{i,j}]$ abbia almeno un autovalore nullo.

¹³ Premesso che $\xi_{\text{obl}} = (\xi_{N+1}, \dots, \xi_{2N})$ e $\eta_{\text{obl}} = (\eta_{N+1}, \dots, \eta_{2N})$, per definizione la parentesi di Poisson tra Ψ_1 e \mathcal{H}_{obl} è data da

$$\{\Psi_1, \mathcal{H}_{\text{obl}}\} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial \xi_{N+i}} \frac{\partial \mathcal{H}_{\text{obl}}}{\partial \eta_{N+i}} - \frac{\partial \Psi_1}{\partial \eta_{N+i}} \frac{\partial \mathcal{H}_{\text{obl}}}{\partial \xi_{N+i}} \right),$$

in cui

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial \xi_{N+i}} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{H}_{\text{obl}}}{\partial \eta_{N+i}} = \sum_{j=1}^N d_{i,j} \eta_{N+j}, \quad \frac{\partial \Psi_1}{\partial \eta_{N+i}} = \sqrt{\Lambda_{i,0}}, \quad \frac{\partial \mathcal{H}_{\text{obl}}}{\partial \xi_{N+i}} = \sum_{j=1}^N d_{i,j} \xi_{N+j}.$$

Tale autovalore nullo coincide appunto con una delle frequenze proprie di cui si è detto, e ciò conclude la dimostrazione.¹⁴ Poiché Ψ_1 e Ψ_2 sono integrali primi per \mathcal{H}_{obl} è evidente che la frequenza nulla sarà da ricercarsi tra le frequenze associate alle longitudini dei nodi, ovvero tra quelle contenute nell'insieme $\{s_1, \dots, s_N\}$. Pertanto, il sistema governato dall'Hamiltoniana quadratica (4.19) potrà avere solamente $N - 1$ frequenze s_i indipendenti, in quanto una di esse – convenzionalmente s_5 – dovrà essere posta uguale a zero (cfr. tabella 4.1).

4.3 Estensione della teoria di Lagrange-Laplace

La validità della teoria secolare di Lagrange-Laplace è circoscritta a piccoli valori delle eccentricità e delle inclinazioni, pertanto non è generalmente adatta a descrivere la pluralità di sistemi multi-pianeta diversi dal Sistema Solare che popolano la Via Lattea. In questo paragrafo, seguendo la via tracciata da *A.S. Libert* e *J. Henrad*, ci si propone di superare la teoria di Lagrange-Laplace tenendo conto del contributo (di alcuni) dei termini non lineari alle equazioni del moto, al fine di ottenere soluzioni analitiche più accurate per quanto concerne l'evoluzione a lungo termine delle orbite planetarie.

Si consideri, per semplicità, un sistema formato da soli tre corpi: una stella centrale S_0 di massa m_0 e due pianeti P_1 e P_2 di masse m_1 e m_2 in moto lungo orbite giacenti sullo stesso piano (cioè tali che $i_1 = i_2 = 0$). Per la (2.26), in variabili di Jacobi l'Hamiltoniana si scriverà (arrestando lo sviluppo in serie dell'energia potenziale al termine di ordine ε)

$$(4.31) \quad \mathcal{H} = -G \frac{m_0 m_1}{2a_1} - G \frac{m_0 m_2}{2a_2} - G m_1 m_2 \left[\frac{1}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|} - \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2}{r_2^3} \right],$$

dove a_i , \mathbf{r}_i e r_i sono rispettivamente il semiasse maggiore (osculatore), il vettore posizione e la norma del vettore posizione di P_i . Si assuma inoltre che P_1 sia più vicino di P_2 a S_0 ($a_1 < a_2$). Usando le variabili di Delaunay modificate (2.46), che nel caso di orbite complanari diventano

$$\begin{aligned} \Lambda_i &\approx m_i \sqrt{G m_0 a_i} & \lambda_i &= \ell_i + \omega_i + \Omega_i \\ P_i &= \Lambda_i (1 - \sqrt{1 - e_i^2}) & p_i &= -\varpi_i, \end{aligned}$$

si può espandere la perturbazione in serie di potenze delle eccentricità e_i (o meglio delle quantità $E_i = \sqrt{2P_i/\Lambda_i}$) e in serie di Fourier degli angoli λ_i, p_i nel modo seguente:

¹⁴ Si osservi che il calcolo ripetuto con l'integrale primo Ψ_2 in luogo di Ψ_1 non aggiunge nulla di nuovo a quanto detto, infatti le variabili $\boldsymbol{\xi}_{\text{obl}}$ e $\boldsymbol{\eta}_{\text{obl}}$ si scambiano tra loro e alla fine si ritrovano le equazioni (4.30).

$$(4.32) \quad \mathcal{H} = -G \frac{m_0 m_1}{2a_1} - G \frac{m_0 m_2}{2a_2} - G \frac{m_1 m_2}{a_2} \cdot \sum_{k, i_1, i_2, j_1, j_2} B_{i_1, i_2, j_1, j_2}^k E_1^{|j_1|+2i_1} E_2^{|j_2|+2i_2} \cos \Phi .$$

Per valori delle eccentricità da piccoli a moderati risulta $E_i \approx e_i$. I coefficienti B_{i_1, i_2, j_1, j_2}^k sono funzioni (solo) del rapporto $\alpha = a_1/a_2$ tra i semiassi maggiori, mentre l'angolo Φ , argomento del coseno, è dato dall'espressione algebrica $\Phi = [(k + j_1)\lambda_1 - (k + j_2)\lambda_2 + j_1 p_1 + j_2 p_2]$.

Al fine di studiare l'interazione secolare tra i due pianeti, nell'ipotesi che i rispettivi periodi orbitali siano non commensurabili (cioè assumendo che il sistema sia lontano da una risonanza di moto medio), ad \mathcal{H} si andrà a sostituire la sua media sugli angoli veloci λ_i ,

$$(4.33) \quad \mathcal{K} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{H} d\lambda_1 d\lambda_2 ,$$

in modo da trascurare gli effetti sull'evoluzione a lungo termine del sistema dovuti appunto agli angoli veloci λ_i . L'Hamiltoniana secolare \mathcal{K} ottenuta in questa maniera, ovvero sopprimendo i termini dipendenti da λ_i di breve periodo¹⁵, costituisce la cosiddetta *approssimazione di ordine 1 nelle masse*.

Dal calcolo esplicito risulta (omettendo i termini dipendenti dalle azioni costanti Λ_1 e Λ_2)

$$(4.34) \quad \mathcal{K} = -G \frac{m_1 m_2}{a_2} \sum_{k, i_1, i_2} C_{i_1, i_2}^k E_1^{k+2i_1} E_2^{k+2i_2} \cos k(p_1 - p_2) ,$$

in cui a_i , E_i e p_i designano ora i rispettivi valori medi sugli angoli λ_i .¹⁶ Ne consegue che l'applicazione del metodo della media all'Hamiltoniana (4.32) equivale a ridurre \mathcal{H} in forma normale secolare al primo ordine in ε (di cui al paragrafo 3.6). Si osservi inoltre che \mathcal{K} dipende da $\Delta\varpi = p_1 - p_2$ e non da p_1 e p_2 separatamente, pertanto la quantità $P_1 + P_2$ rappresenta un integrale primo del moto.¹⁷

La teoria di Lagrange-Laplace è una teoria perturbativa lineare, nel senso che prende in considerazione solo i contributi lineari alle equazioni del moto.

¹⁵ Operazione non esente da critiche, nota nel gergo degli addetti ai lavori come “*averaging by scissors*”. L'eliminazione della dipendenza dalle variabili veloci riduce a due il numero di gradi di libertà del sistema.

¹⁶ Premesso che $k, i_1, i_2 \in \mathbb{Z}_+$ e $j_1, j_2 \in \mathbb{Z}$, l'argomento del coseno e gli esponenti di E_1, E_2 che compaiono in (4.34) si ricavano ponendo $k + j_1 = -(k + j_2) = 0$ nell'espressione di Φ , da cui segue che $|j_1| = |j_2| = k$.

¹⁷ L'esistenza dell'integrale primo $P_1 + P_2$ permette di introdurre nuove variabili d'angolazione mediante le quali è possibile ricondurre il problema del moto secolare di due pianeti (su orbite complanari) allo studio di un sistema a un solo grado di libertà dipendente dai due parametri $\alpha = a_1/a_2$ e $\mu = m_1/(m_1 + m_2)$. Maggiori dettagli in [14].

Tabella 4.2 – *Tratta da [14]. In alto i sistemi extrasolari S_0 - P_1 - P_2 considerati, con i relativi parametri fisici: $\alpha = a_1/a_2$, $\mu = m_1/(m_1 + m_2)$, valori iniziali di e_1 , e_2 e $v = \Delta\varpi$. In basso i contributi al valore di \mathcal{K} apportati dai termini dello sviluppo (4.34) dall'ordine 2 all'ordine 12 in E_1, E_2 . La convergenza risulta eccellente tranne che per l'ultimo sistema.*

	v And. (c-d)	HD 168443	HD 169830	HD 38529	HD 74156	HD 37124
α	0.328	0.1	0.225	0.035	0.086	0.22
μ	0.335	0.3	0.42	0.058	0.23	0.38
$e_1(0)$	0.28	0.529	0.31	0.29	0.636	0.1
$e_2(0)$	0.27	0.228	0.33	0.36	0.583	0.69
$v(0)$	0.17	-1.92	1.82	-1.27	1.06	3.47
n	Contribution of order n in \mathcal{K}					
2	4.6×10^{-3}	1.4×10^{-3}	4.7×10^{-3}	1.0×10^{-4}	2.2×10^{-3}	1.2×10^{-2}
4	2.2×10^{-4}	3.3×10^{-5}	7.6×10^{-4}	1.5×10^{-5}	8.5×10^{-4}	8.2×10^{-3}
6	7.2×10^{-6}	-9.5×10^{-7}	1.1×10^{-4}	1.7×10^{-6}	2.5×10^{-4}	5.1×10^{-3}
8	2.2×10^{-7}	-1.5×10^{-7}	1.5×10^{-5}	1.8×10^{-7}	6.5×10^{-5}	3.2×10^{-3}
10	6.6×10^{-9}	-9.8×10^{-9}	2.1×10^{-6}	1.7×10^{-8}	1.6×10^{-5}	2.0×10^{-3}
12	2.0×10^{-10}	-5.2×10^{-10}	3.0×10^{-7}	1.5×10^{-9}	3.8×10^{-6}	1.3×10^{-3}

In altre parole, con riferimento al modello semplificato fin qui delineato, in \mathcal{K} vengono trattenuti solo i termini di secondo grado in E_1, E_2 dello sviluppo in serie (4.34), ovvero i termini tali che $k + i_1 + i_2 = 2$, mentre quelli di grado più elevato vengono trascurati (cfr. infra). Di conseguenza, pur rimanendo nell'ambito di un'approssimazione di ordine uno nelle masse, si potrà raffinare la teoria di Lagrange-Laplace includendo nella trattazione i termini di ordine superiore nelle eccentricità. Per fare ciò sarà necessario:

- esprimere \mathcal{K} nelle variabili d'angolo-azione per il problema lineare;
- applicare l'algoritmo perturbativo delle trasformate di Lie (che è una variante del metodo delle serie di Lie descritto nel capitolo 3) per introdurre nuove variabili d'angolo-azione per il problema non lineare.

Poiché le eccentricità delle orbite di molti dei pianeti osservati sono piuttosto elevate, prima di procedere oltre nell'analisi è utile verificare se il modello si può applicare con successo ai sistemi extrasolari. A tal proposito, per alcuni di essi la tabella 4.2 riporta i risultati del calcolo dello sviluppo (4.34) fino all'ordine 12 in E_1, E_2 ($k + i_1 + i_2 = 6$), svolto al computer da *Libert* e *Henrad*. La convergenza (numerica) risulta eccellente anche per valori moderatamente elevati delle eccentricità, pertanto lo sviluppo di \mathcal{K} troncato all'ordine 12 sembra poter fornire una descrizione corretta della dinamica secolare di una varietà di sistemi extrasolari (non risonanti).

Tornando ora ai due punti precedentemente evidenziati, se si assume che i termini di secondo grado in E_1, E_2 , quando $E_i \approx 0$, siano preponderanti rispetto a quelli di grado più elevato si otterrà l'espressione

$$(4.35) \quad \mathcal{L} = -n_2 \frac{(m_1 + m_2)}{m_0} \left[aP_1 + bP_2 + c\sqrt{P_1 P_2} \cos(p_1 - p_2) \right],$$

dove $n_2 = \sqrt{Gm_0/a_2^3}$ è il moto medio imperturbato di m_2 e a, b, c sono coefficienti dipendenti da $\alpha = a_1/a_2$ e $\mu = m_1/(m_1 + m_2)$. Effettuando il passaggio alle variabili di Poincaré

$$\xi_i = \sqrt{2P_i} \sin p_i, \quad \eta_i = \sqrt{2P_i} \cos p_i \quad (i = 1, 2)$$

si verifica facilmente che la (4.35) diventa una forma quadratica riconducibile all'Hamiltoniana del problema di Lagrange-Laplace. Si possono quindi introdurre nuove variabili d'angolo-azione per questa Hamiltoniana quadratica, e il modo migliore per farlo è applicando la rotazione¹⁸

$$(4.36) \quad \begin{aligned} \xi_1 &= \xi'_1 \cos \beta + \xi'_2 \sin \beta & \eta_1 &= \eta'_1 \cos \beta + \eta'_2 \sin \beta \\ \xi_2 &= -\xi'_1 \sin \beta + \xi'_2 \cos \beta & \eta_2 &= -\eta'_1 \sin \beta + \eta'_2 \cos \beta, \end{aligned}$$

dove l'angolo β è dato da $\tan 2\beta = 2c/(b - a)$. A questo punto si pone nuovamente $\xi'_i = \sqrt{2R_i} \sin r_i$ e $\eta'_i = \sqrt{2R_i} \cos r_i$ ottenendo

$$(4.37) \quad \mathcal{L} = -n_2 \frac{(m_1 + m_2)}{m_0} [a'R_1 + b'R_2].$$

I coefficienti a' e b' , funzioni di α e μ , rappresentano le frequenze degli angoli r_i , mentre le azioni R_i sono costanti del moto per il problema lineare.

Nelle variabili (r_i, R_i) appena definite, l'Hamiltoniana non lineare \mathcal{K} (troncata all'ordine 12 nelle eccentricità) si scriverà

$$(4.38) \quad \mathcal{K}' = -a'R_1 - b'R_2 - G \frac{m_1 m_2}{a_2} \sum_{k, i_1, i_2} C'_{i_1, i_2} E_1'^{k+2i_1} E_2'^{k+2i_2} \cos k(r_1 - r_2),$$

in cui $E_i' = \sqrt{2R_i/\Lambda_i}$, $k = 0, \dots, 6$ e $k + i_1 + i_2 = 0, \dots, 6$. È possibile sviluppare una teoria analitica non lineare facendo ricorso al metodo perturbativo delle trasformate di Lie per mediare l'Hamiltoniana (4.38) sugli angoli r_i . Eseguendo questa operazione si introducono nuove variabili d'angolo-azione per il problema non lineare, per cui \mathcal{K}' diventa

$$(4.39) \quad \bar{\mathcal{K}} = -a'R_1 - b'R_2 - G \frac{m_1 m_2}{a_2} \sum_{i_1, i_2} D_{i_1, i_2} \bar{E}_1'^{2i_1} \bar{E}_2'^{2i_2} \cos k(r_1 - r_2),$$

¹⁸ Si tratta di un caso particolare della cosiddetta *reducing transformation*, esaurientemente trattata ad esempio in [9].

dove i coefficienti D_{i_1, i_2} dipendono da α e μ , mentre i valori delle costanti \bar{E}'_i risultano dalla media sul moto secolare. Le equazioni del moto, derivanti dall'Hamiltoniana $\bar{\mathcal{K}}$, per gli angoli \bar{r}_i sono

$$(4.40) \quad \bar{r}_1 = \frac{\partial \bar{\mathcal{K}}}{\partial R_1}, \quad \bar{r}_2 = \frac{\partial \bar{\mathcal{K}}}{\partial R_2},$$

da cui si possono ricavare le espressioni delle due frequenze proprie:

$$(4.41) \quad \begin{aligned} \dot{\bar{r}}_1 &= -\frac{(1-\mu)}{\sqrt{\alpha}} \sum_{i_1, i_2} 2i_1 D_{i_1, i_2} \bar{E}'_1{}^{2(i_1-1)} \bar{E}'_2{}^{2i_2} \\ \dot{\bar{r}}_2 &= -\mu \sum_{i_1, i_2} 2i_2 D_{i_1, i_2} \bar{E}'_1{}^{2i_1} \bar{E}'_2{}^{2(i_2-1)}. \end{aligned}$$

L'unità di frequenza è la frequenza orbitale kepleriana $n_2 = \sqrt{Gm_0/a_2^3}$ della massa m_2 moltiplicata per il rapporto $(\tilde{m}_1 + \tilde{m}_2)/m_0 \sin i$.¹⁹

Poiché la funzione generatrice della trasformazione di Lie $\mathcal{K}' \rightarrow \bar{\mathcal{K}}$ è funzione solo dalla differenza angolare $r_1 - r_2$ e non dagli angoli r_1, r_2 presi separatamente (essendo $R_1 + R_2 = P_1 + P_2$ un integrale primo per \mathcal{K}'), l'espressione

$$\sqrt{4R_1 R_2} \sin(r_2 - r_1) = \sqrt{4P_1 P_2} \sin(p_2 - p_1)$$

dipenderà solo da \bar{E}'_1, \bar{E}'_2 e dalla differenza $\bar{r}_1 - \bar{r}_2$. Ne consegue che la frequenza di $\Delta\varpi = p_1 - p_2$ equivarrà alla frequenza $n = \dot{\bar{r}}_1 - \dot{\bar{r}}_2$, a cui corrisponde il periodo

$$(4.42) \quad T = \frac{m_0 T_2 \sin i}{n(\tilde{m}_1 + \tilde{m}_2)}, \quad \text{con } T_2 = 2\pi n_2^{-1}.$$

Si osservi che, sebbene il valore dell'inclinazione sia sconosciuto, la (4.42) fornisce un limite superiore per il periodo ponendo $\sin i = 1$.

Nella tabella 4.3 sono riportati i contributi dall'ordine 2 all'ordine 12 in E_1, E_2 (\bar{E}'_1, \bar{E}'_2) a \mathcal{K} ($\bar{\mathcal{K}}$) per il sistema extrasolare c-d *v* Andromedae: la convergenza è eccellente.²⁰ Ciò significa che il modello analitico sviluppato può rappresentare le orbite con un sufficiente grado di accuratezza. Usando i parametri elencati nella parte superiore della tabella 4.4 è possibile ricavare l'ampiezza di oscillazione attorno a 0° dell'angolo secolare $\Delta\varpi$ ($\simeq 47^\circ$) e le variazioni di eccentricità (e_1 decresce da 0.28 a 0.05 mentre e_2 cresce da 0.27 a 0.31) integrando numericamente le equazioni del moto derivanti dall'Hamiltoniana \mathcal{K} .

¹⁹ La massa \tilde{m}_i è la massa osservata del pianeta i -esimo, coincidente con quella reale solamente nel caso in cui l'inclinazione del piano orbitale rispetto al piano del cielo sia di 90° (orbita vista di taglio).

²⁰ Le orbite dei pianeti c e d sono assunte complanari e tali che $\sin i = 1$.

Tabella 4.3 – *Tratta da [15]. Convergenza degli sviluppi (4.34) (seconda colonna) e (4.39) (terza colonna) per il sistema c-d v Andromedae.*

	\mathcal{K}	$\bar{\mathcal{K}}$	$\Delta\varpi$	T
Order 2	4.6×10^{-3}	4.5×10^{-3}	1.100209	8808.9360
Order 4	2.1×10^{-4}	3.7×10^{-4}	0.854394	7984.5621
Order 6	7.2×10^{-6}	1.5×10^{-5}	0.830839	7884.7136
Order 8	2.2×10^{-7}	-4.8×10^{-7}	0.828359	7870.6274
Order 10	6.5×10^{-9}	-1.5×10^{-7}	0.828196	7868.7578
Order 12	2.0×10^{-10}	-1.3×10^{-8}	0.828128	7868.3345

Tabella 4.4 – *Tratta da [15]. In alto: parametri fisici dei sistemi extrasolari considerati. In basso: risultati ottenuti con l'approssimazione non lineare e confronto con la teoria lineare.*

	<i>v</i> Andromedae	HD168443	HD169830	HD38529	HD74156	HD12661
			Parameters			
α	0.328	0.1	0.225	0.035	0.086	0.324
μ	0.335	0.3	0.420	0.058	0.230	0.594
$e_1(0)$	0.28	0.529	0.31	0.29	0.636	0.35
$e_2(0)$	0.27	0.228	0.33	0.36	0.583	0.20
$\Delta\varpi(0)$	0.17	-1.92	1.82	-1.27	1.06	-2.26
a_2/AU	2.53	2.87	3.6	3.68	3.4	2.56
\bar{m}_1/M_1	1.89	7.2	2.88	0.78	1.86	2.3
\bar{m}_2/M_1	3.75	17.1	4.04	12.7	6.17	1.57
m_0/M_\odot	1.3	1.01	1.4	1.39	1.05	1.07
			Non-linear results			
min e_1	0.05	0.50	0.20	0.2653	0.42	0.09
max e_1	0.28	0.59	0.53	0.3043	0.72	0.39
min e_2	0.27	0.20	0.20	0.3599	0.57	0.13
max e_2	0.31	0.24	0.36	0.3602	0.60	0.37
	lib. (0)	circ.	circ.	circ.	circ.	lib. (π)
n	-0.1083	-0.0118	-0.0358	-0.0054	-0.0178	-0.0802
T	7868	17,797	34,199	119,838	47,048	14,305
ampl	0.83 rad	-	-	-	-	1.08 rad
			Laplace-Lagrange results			
min e_1	0.02	0.51	0.23	0.2700	0.55	0.19
max e_1	0.28	0.57	0.46	0.3014	0.67	0.40
min e_2	0.27	0.21	0.26	0.3599	0.58	0.09
max e_2	0.31	0.23	0.35	0.3602	0.59	0.34
	lib. (0)	circ.	circ.	circ.	circ.	lib. (π)
T	8809	14,320	32,575	141,085	62,030	22,160
ampl	1.1 rad	-	-	-	-	0.89 rad

Gli stessi risultati – nonché la frequenza $n = \dot{r}_1 - \dot{r}_2$ (-0.1083) e il periodo $T/\sin i$ (7868 anni) di oscillazione di $\Delta\varpi$ – si possono ottenere mediante l’approccio analitico illustrato, fissate opportunamente le condizioni iniziali. È interessante notare lo scarto tra questi valori e quelli restituiti invece dalla teoria lineare di Lagrange-Laplace: 8809 anni e $\simeq 63^\circ$ rispettivamente per il periodo e l’ampiezza di oscillazione di $\Delta\varpi$. La limitatezza di una teoria arrestata all’ordine 2 nelle eccentricità emerge chiaramente, e risulta ancora più evidente dalla progressione nei valori di $\Delta\varpi$ e T , passando dall’ordine 2 all’ordine 12, evidenziata nella tabella 4.3. I due grafici della figura 4.1 a pagina 81 mostrano infine l’evoluzione temporale delle eccentricità e_1, e_2 e dell’angolo secolare $\Delta\varpi$, evidenziando una corrispondenza molto buona tra i risultati della teoria non lineare e quelli ottenuti per integrazione numerica delle equazioni del moto.

4.4 Conclusioni

Alla luce dei risultati incoraggianti ottenuti approssimando il potenziale perturbativo a ordini elevati nelle eccentricità, appare evidente che l’inclusione dei contributi non lineari alle equazioni del moto (resa possibile dall’uso di tecniche sempre più efficienti di manipolazione algebrica al calcolatore) in una teoria analitica che pretenda di descrivere accuratamente la dinamica secolare dei pianeti è fondamentale. Tuttavia ciò non è sufficiente. Prima si è accennato al fatto che la teoria non lineare sviluppata da *Libert* e *Henrad* funziona bene lontano dalle risonanze di moto medio, ma per riprodurre correttamente l’evoluzione a lungo termine di un sistema planetario gli effetti delle risonanze non possono essere trascurati²¹. Ecco perché è necessario estendere ulteriormente la teoria di Lagrange-Laplace, sostituendo all’Hamiltoniana “mediata” di ordine uno nelle masse (cioè la forma normale secolare del primo ordine in ε) un’Hamiltoniana di ordine due.

L’idea, sviluppata da *A.S. Libert* e *M. Sansottera* in [16], è espandere l’Hamiltoniana di un sistema di tre corpi, tipo c-d *v* Andromedae, in serie di Taylor-Fourier nelle variabili di Poincaré $\lambda_i, \Lambda_i, \xi_i, \eta_i$ ($i = 1, 2$), e poi applicare una coppia di trasformazioni canoniche ad hoc per rimuovere i termini della perturbazione che dipendono dagli angoli veloci $\boldsymbol{\lambda}$ ma sono indipendenti dalle o lineari nelle azioni veloci (traslate) \mathbf{L} (in modo da tenere tra i contributi dipendenti da $\boldsymbol{\lambda}$ solo quelli di ordine almeno due nelle masse). Si tratta di un procedimento ispirato alla costruzione della cosiddetta *forma normale di Kolmogorov*²².

²¹ Lagrange e Laplace hanno dimostrato che la vicinanza alla risonanza 5 : 2 di Giove e Saturno ha un notevole impatto sulla dinamica a lungo termine del Sistema Solare.

²² Maggiori dettagli in [8].

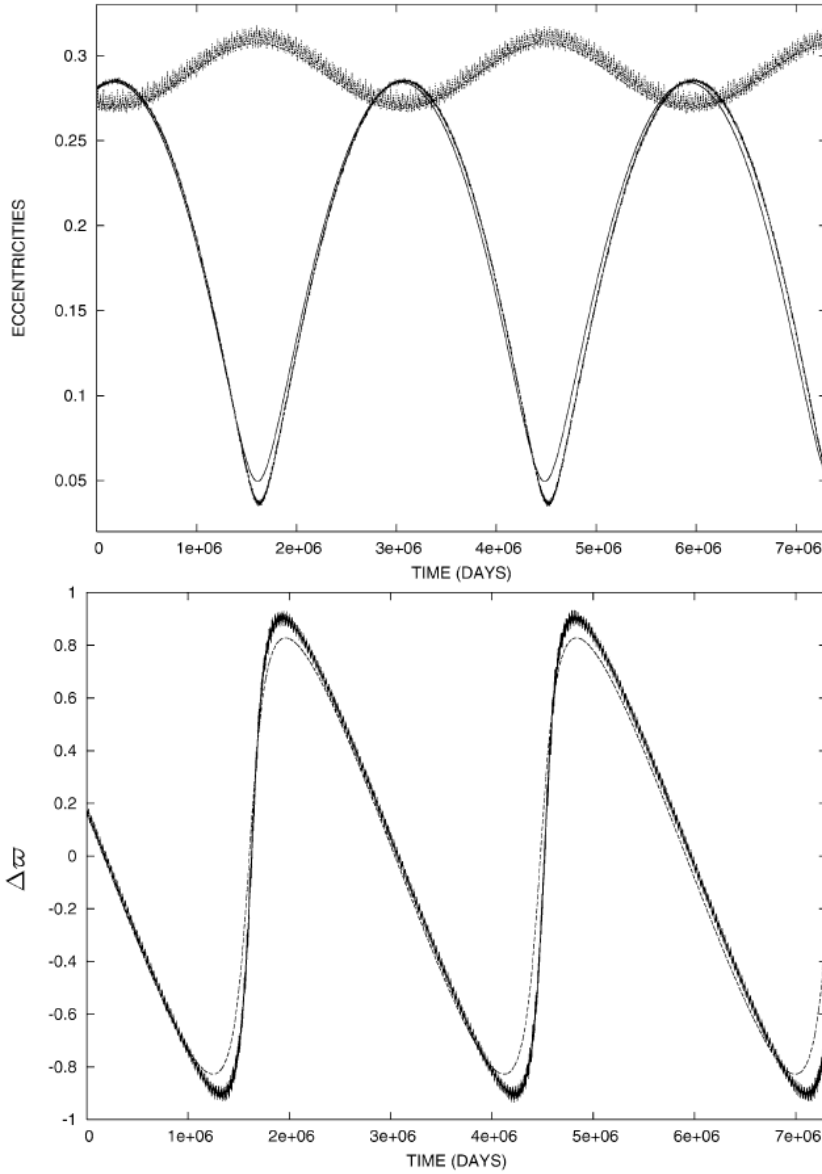


Figura 4.1 – Tratta da [15]. Evoluzione temporale di e_1, e_2 (in alto) e $\Delta\varpi$ (in basso) ottenuta in un caso applicando la teoria analitica illustrata nel testo e nell'altro mediante integrazione numerica delle equazioni differenziali per il problema completo dei tre corpi. L'accordo è più che soddisfacente. Si osservi che le eccentricità oscillano con ampiezze diverse (e_2 subisce variazioni più contenute rispetto a e_1) e in senso opposto (e_1 decresce da 0.28 a 0.05 mentre e_2 cresce da 0.27 a 0.31). L'orbita del pianeta più interno si avvicina alla circolarità ogni 7868 anni e, con la stessa periodicità, l'angolo secolare $\Delta\varpi$ oscilla attorno a 0° (condizione di allineamento delle linee apsidali) con un'ampiezza di $\simeq 47^\circ$.

Applicando ad $\mathcal{H}^{(\mathcal{T})}$ (lo sviluppo di Taylor-Fourier dell'Hamiltoniana di partenza) la trasformazione prossima all'identità

$$\mathcal{T}_{O_2}(\mathbf{L}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = \exp \mathcal{L}_{\varepsilon \chi_2^{(O_2)}}(\mathbf{L}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \circ \exp \mathcal{L}_{\varepsilon \chi_1^{(O_2)}}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}),$$

risultante dalla composizione delle due trasformazioni canoniche di cui sopra, si ottiene dunque $\mathcal{H}^{(O_2)}$, cioè l'Hamiltoniana approssimata all'ordine due nelle masse. Si osservi che i termini di $\mathcal{H}^{(\mathcal{T})}$ che influenzano maggiormente l'evoluzione secolare sono quelli legati alle risonanze di ordine più basso, perciò le armoniche corrispondenti devono essere considerate nell'operazione di media. Anziché direttamente di $\mathcal{H}^{(\mathcal{T})}$, come nell'approccio classico, ricavare \mathcal{H}_{sec} si dovrà calcolare la media sugli angoli veloci di $\mathcal{H}^{(O_2)}$. Più precisamente si avrà che

$$(4.43) \quad \mathcal{H}_{\text{sec}}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = \left\langle \mathcal{H}^{(O_2)} \Big|_{\mathbf{L}=0} \right\rangle_{\boldsymbol{\lambda}},$$

implicando la sostituzione delle orbite circolari con un toro invariante $\mathbf{L} = 0$ dell'Hamiltoniana imperturbata. La (4.43) è l'Hamiltoniana secolare nell'approssimazione di ordine due nelle masse, che mediante una trasformazione canonica può porsi nella forma (diagonale)

$$(4.44) \quad \mathcal{H}_{\text{sec}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^2 \nu_i \frac{x_i^2 + y_i^2}{2} + \mathcal{H}_2^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathcal{H}_4^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots,$$

dove ν_i sono le frequenze secolari nel limite di piccole oscillazioni e \mathcal{H}_{2s} sono polinomi omogenei di grado $2s + 2$ in (\mathbf{x}, \mathbf{y}) .

La (4.44) ha la forma ben nota dell'Hamiltoniana di un sistema perturbato di oscillatori armonici, perciò se ne può costruire la forma normale di Birkhoff all'ordine r con il metodo delle serie di Lie, introducendo in tal modo nuove variabili d'angolo-azione. In queste nuove variabili l'Hamiltoniana secolare diventa $\mathcal{H}_{\text{sec}}(\mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi})$, con $I_i = (x_i^2 + y_i^2)/2$ e $\boldsymbol{\varphi}$ angolo secolare. La dipendenza da quest'ultimo si può eliminare calcolando appunto la forma normale di Birkhoff all'ordine r :

$$(4.45) \quad \mathcal{H}^{(r)} = Z_0(\mathbf{I}) + \dots + Z_r(\mathbf{I}) + R^{(r)}(\mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi}).$$

In sostanza, senza voler addentrarsi troppo nei dettagli del calcolo, sotto certe condizioni il resto $R^{(r)}(\mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi})$ si può trascurare, sicché è facile ottenere un'espressione analitica per le frequenze secolari. Infatti, le equazioni del moto per l'Hamiltoniana troncata sono

$$(4.46) \quad \dot{\mathbf{I}} = 0 \quad \dot{\boldsymbol{\varphi}} = \frac{\partial \mathcal{H}^{(r)}}{\partial \mathbf{I}},$$

da cui discendono immediatamente le frequenze $\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2$. La differenza $\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2$ equivale a ϖ . Usando le (4.46) si può finalmente determinare l'evoluzione a lungo termine sul toro secolare invariante, ovvero

$$(4.47) \quad \mathbf{I}(t) = \mathbf{I}(0) \quad \varphi(t) = \varphi(0) + t\dot{\varphi}(0),$$

dove $\mathbf{I}(0)$ e $\dot{\varphi}(0)$ corrispondono ai valori delle condizioni iniziali.

Applicando questo modello analitico al sistema extrasolare c-d *v* Andromedae, lo stesso usato in [15], si ottengono i grafici della figura 4.2. L'accordo con i risultati ottenuti mediante l'integrazione numerica delle equazioni del moto del problema dei tre corpi è eccellente: la teoria del secondo ordine riproduce correttamente l'evoluzione secolare delle eccentricità e_1, e_2 e dell'angolo $\Delta\varpi$. Inoltre, come prevedibile, funziona meglio della teoria del primo ordine per sistemi in prossimità di una risonanza di moto medio (c-d *v* Andromedae è noto per essere vicino alla risonanza 5:1).

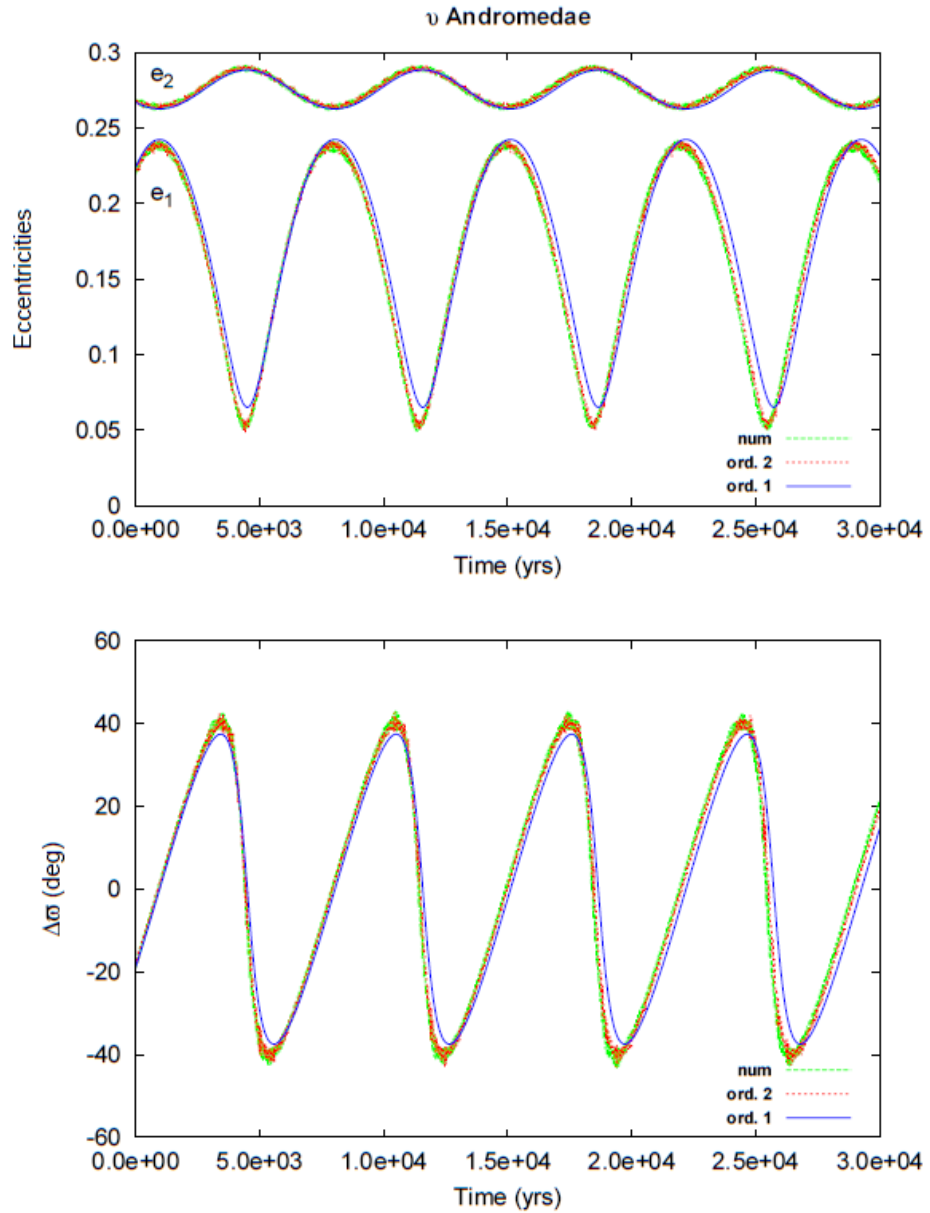


Figura 4.2 – Tratta da [16]. Evoluzione temporale di e_1, e_2 (in alto) e $\Delta\varpi$ (in basso) per il sistema extrasolare $c-d$ v Andromeda ($a_1/a_2 = 0.328$) ottenuta in tre modi diversi: (i) integrazione numerica delle equazioni del moto (curve verdi); (ii) approssimazione del secondo ordine (curve rosse); (iii.) approssimazione del primo ordine (curve blu).

Bibliografia

- [1] Giancarlo Benettin e Francesca Fassò. «Introduzione ai sistemi dinamici. Introduzione alla teoria delle perturbazioni per i sistemi hamiltoniani». 2001.
- [2] D. Brouwer e D.M. Clemence. *Methods of Celestial Mechanics*. New York: Academic Press, 1961.
- [3] Alessandra Celletti. *Stability and Chaos in Celestial Mechanics*. Jointly published with Praxis Publishing, UK. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010.
- [4] J.E. Chambers, G.W. Wetherill e A.P. Boss. «The Stability of Multi-Planet Systems». In: *Icarus* 119 (1996).
- [5] Felix R. Gantmacher. *Lectures in Analytical Mechanics*. Moscow: Mir Publishers, 1975.
- [6] Antonio Giorgilli. «Appunti di Meccanica Celeste». 2007.
- [7] Antonio Giorgilli. *Il flebile sussurro del caos nell'armonia dei pianeti*. 2018.
- [8] Antonio Giorgilli, Ugo Locatelli e Marco Sansottera. *Su un'estensione della teoria di Lagrange per i moti secolari*. 2013.
- [9] Jacques Henrad. «Note on the reducing transformation and secular coupling». In: *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 45 (1988).
- [10] Lev D. Landau e Evgenij M. Lifšits. *Meccanica*. Roma: Editori Riuniti, 2004.
- [11] J. Laskar. «Accurate methods in general planetary theory». In: *Astronomy & Astrophysics* 144 (1985).
- [12] J. Laskar. «Secular terms of classical planetary theories using the results of general theory». In: *Astronomy & Astrophysics* 157 (1986).
- [13] J. Laskar. «The chaotic motion of the solar system: a numerical estimate of the size of the chaotic zones». In: *Icarus* 88 (1990).
- [14] Anne-Sophie Libert e Jacques Henrad. «Analytical approach to the secular behaviour of exoplanetary systems». In: *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 93 (2005).

- [15] Anne-Sophie Libert e Jacques Henrad. «Secular apsidal configuration of non-resonant exoplanetary systems». In: *Icarus* 183 (2006).
- [16] Anne-Sophie Libert e Marco Sansottera. «On the extension of the Laplace-Lagrange secular theory to order two in the masses for extrasolar systems». In: *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 117 (2013).
- [17] Alessandro Morbidelli. «Modern Celestial Mechanics. Aspects of Solar System Dynamics». 2011.
- [18] Alessandro Morbidelli e Antonio Giorgilli. «On the role of high order resonances in normal forms and in separatrix splitting». In: *Physica D: Nonlinear Phenomena* 102 (1997).
- [19] Carl D. Murray e Stanley F. Dermott. *Solar System Dynamics*. Cambridge University Press, 1999.
- [20] A. Nobili, A. Milani e M. Carpino. «Fundamental frequencies and small divisors in the orbits of the outer planets». In: *Astronomy and Astrophysics* 210 (1989).
- [21] Observatoire de Paris. *Encyclopédie des planètes extrasolaires*. 1995. URL: <http://exoplanet.eu/>.
- [22] Henri Poincaré. *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*. Paris: Gauthier-Villars et Fils, 1892.
- [23] Vittorio Vanzani. «Lezioni di Fisica dei Pianeti». 2001.