



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA “TULLIO LEVI-CIVITA”

Corso di Laurea Triennale in Matematica

Tesi di Laurea

Iperinterpolazione filtrata su domini bivariati con bordo di tipo NURBS

Relatore:
Prof. Alvisè Sommariva

Laureando: Francesca Lopez
Matricola: 1217924

Anno Accademico 2022/2023

30/06/2023

Introduzione

In questo lavoro discutiamo alcuni tipi di iperinterpolazione su domini Ω con frontiera $\partial\Omega$ definita a tratti da funzioni NURBS.

L'iperinterpolazione è un concetto introdotto nel 1995 da Ian Sloan, in cui si intende approssimare una funzione $f \in C(\Omega)$ tramite un polinomio $p_N \in \mathbb{P}_N$ mediante minimi-quadrati discreti, costruiti con una formula di quadratura con grado di precisione sufficientemente alto. Nel valutare i coefficienti di Fourier di f , rispetto a una base ortonormale di \mathbb{P}_N , l'autore considera una formula a pesi positivi e nodi interni, avente grado algebrico di precisione $2N$.

L'autore mostra pure che con questa scelta l'errore in norma 2 converge a zero al tendere di N a infinito, e sottolinea come talora l'iperinterpolante coincida con una interpolante.

Nel 2012, Sloan e Womersley hanno introdotto la cosiddetta iperinterpolazione filtrata sulla sfera unitaria, modificando mediante una funzione filtro i coefficienti di Fourier propri dell'iperinterpolante classica. In seguito tale tecnica è stata applicata a classici domini bivariati, come il quadrato, il disco e il semplice, infatti esistono varie formule di questo tipo anche a bassa cardinalità, come pure sono note esplicitamente basi triangolari ed ortonormali.

Nei domini trattati in questa tesi la questione risulta più complessa in quanto tanto le formule di cubatura quanto le basi ortonormali vengono calcolate numericamente.

Nei due approcci introdotti, le iperinterpolanti a grado N risultano proiezioni su spazi polinomiali, rispettivamente di polinomi di grado totale N e $\lfloor N/2 \rfloor$.

Il vantaggio dell'iperinterpolazione filtrata risulta evidente qualora i campionamenti della funzione f nei nodi di cubatura siano soggetti a un rumore non trascurabile. Esperimenti numerici sottolineano tutto ciò con test in classici domini quale intervallo, disco, sfera, cubo.

In questo lavoro consideriamo l'applicazione di tali due approcci a un caso meno classico quale un generico dominio Ω con frontiera $\partial\Omega$ definita a tratti da funzioni NURBS.

Come anticipato, in mancanza di una esplicita base triangolare ed ortonormale, questa viene calcolata numericamente.

Quale formula di quadratura a pesi positivi utilizziamo quella recentemente introdotta nel lavoro *Low-cardinality Positive Interior cubature on NURBS-shaped domains* [6].

Abbiamo implementato in MATLAB dei codici che permettano il calcolo tanto della iperinterpolante classica come di quella filtrata. Quindi abbiamo verificato numericamente le proprietà di proiezione e mostrato la capacità di fornire una migliore approssimazione da parte della variante filtrata nel caso di funzioni soggette a rilevanti rumori di tipo gaussiano o impulsivo.

Concludiamo dicendo che i codici Matlab utilizzati in questo lavoro, di natura *open-source*, sono resi disponibili su piattaforma *GITHUB* [4].

Indice

1	Iperinterpolazione	5
1.1	Convergenza e stabilità	10
1.1.1	Dati non soggetti a rumore	11
1.1.2	Dati soggetti a rumore	13
2	Iperinterpolazione filtrata	15
2.1	Convergenza e stabilità	19
2.1.1	Dati non soggetti a rumore	20
2.1.2	Dati soggetti a rumore	24
3	Iperinterpolazione filtrata su domini bivariati con bordo di tipo NURBS	25
3.1	Formula di quadratura a pesi positivi e nodi interni	26
3.1.1	In-domain routine	27
3.1.2	Determinazione di nodi e pesi di quadratura	30
3.2	Base triangolare ed ortonormale	33
4	Risultati numerici	34
4.1	Un dominio NURBS convesso	34
4.1.1	Approssimazione di polinomi di grado N e $\lfloor N/2 \rfloor$	35
4.1.2	Approssimazione di funzioni bivariate in assenza di rumore	37
4.1.3	Approssimazione di funzioni bivariate soggette a rumore	39
4.2	Un dominio NURBS concavo	42
4.2.1	Approssimazione di funzioni bivariate in assenza di rumore	43
4.2.2	Approssimazione di funzioni bivariate soggette a rumore	44

Capitolo 1

Iperinterpolazione

Quanto esposto in questo capitolo è tratto dall'articolo di Ian H. Sloan, “*Polynomial interpolation and hyperinterpolation over general regions*” [2]. Definiremo in cosa consista l'iperinterpolazione e alcune proprietà di proiezione, come pure alcuni risultati di convergenza e stabilità.

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ un dominio compatto con misura finita rispetto ad una data misura $d\omega$, ovvero tale che:

$$\int_{\Omega} d\omega = V < +\infty$$

Sia inoltre $\mathbb{P}_N = \mathbb{P}_N(\Omega)$ lo spazio dei polinomi di grado al più N su Ω , con $\dim(\mathbb{P}_N) = d$.

Si vuole approssimare una data funzione $f \in C(\Omega)$, eventualmente soggetta a rumore, con un polinomio appartenente a \mathbb{P}_N .

Si richiamano quindi le definizioni di prodotto interno e di proiezione ortogonale.

Definizione 1.1. (*Prodotto interno*)

Siano $d\omega$ una data misura, Ω un dominio, u e v due funzioni definite su Ω .

Il prodotto interno, rispetto alla misura $d\omega$, tra le due funzioni u e v è definito da:

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} uv \, d\omega \tag{1.1}$$

Sia ora $\{p_1, \dots, p_d\} \subset \mathbb{P}_N$ una sua base ortonormale rispetto al prodotto interno (1.1) appena definito, cioè tale che:

$$\langle p_i, p_j \rangle = \delta_{ij} \quad 1 \leq i, j \leq d \tag{1.2}$$

dove δ_{ij} è il delta di Kronecker.

Definizione 1.2. (Proiezione ortogonale di f su \mathbb{P}_N)

Siano \mathbb{P}_N lo spazio dei polinomi di grado al più N e $\{p_1, \dots, p_d\} \subset \mathbb{P}_N$ una sua base ortonormale, dove $d = \dim(\mathbb{P}_N)$.

Data una funzione f , la sua proiezione ortogonale sullo spazio \mathbb{P}_N è:

$$\mathcal{P}_N f = \sum_{j=1}^d \langle f, p_j \rangle p_j \quad (1.3)$$

Per determinare numericamente i coefficienti $\langle f, p_j \rangle$, $j = 1, \dots, d$, della proiezione ortogonale, poiché tale prodotto interno coinvolge il calcolo di un integrale, è necessaria una formula di quadratura con un adeguato grado di precisione.

A tal proposito ricordiamo le seguenti definizioni.

Definizione 1.3. (Formula di quadratura)

Siano Ω il dominio di integrazione, $g \in C(\Omega)$ una funzione integrabile, $\mathbf{X}_M = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_M\} \subset \Omega$ l'insieme dei nodi di quadratura, cioè dei punti di campionamento (a due a due distinti), e $W_M = \{w_1, \dots, w_M\}$ l'insieme dei pesi di quadratura, che si assumono essere tutti positivi. Allora la formula di quadratura che approssima numericamente l'integrale è:

$$\sum_{k=1}^M w_k g(\mathbf{x}_k) \approx \int_{\Omega} g d\omega \quad (1.4)$$

Definizione 1.4. (Grado di precisione)

Una formula di quadratura ha grado di precisione almeno L se e solo se è esatta per tutti i polinomi $p \in \mathbb{P}_L$ di grado minore o uguale a L .

Nel contesto di questa tesi si richiede che la formula di quadratura abbia grado di precisione almeno $2N$. Deve quindi soddisfare la seguente condizione:

$$\sum_{k=1}^M w_k g(\mathbf{x}_k) = \int_{\Omega} g d\omega \quad \forall g \in \mathbb{P}_{2N}. \quad (1.5)$$

È utile a questo punto definire il prodotto interno discreto.

Definizione 1.5. (Prodotto interno discreto)

Siano Ω un dominio, u e v due funzioni definite su Ω , $\mathbf{X}_M = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_M\} \subset \Omega$ l'insieme dei punti di campionamento, e $W_M = \{w_1, \dots, w_M\}$ l'insieme dei pesi di quadratura ($w_k > 0$, $\forall k \in \{1, \dots, M\}$).

Il prodotto interno discreto tra le due funzioni u e v è definito da:

$$\langle u, v \rangle_M = \sum_{k=1}^M w_k u(\mathbf{x}_k) v(\mathbf{x}_k) \quad (1.6)$$

che corrisponde al prodotto interno definito in (1.1), dove l'integrale esatto è stato sostituito dalla formula di quadratura (1.4).

Siamo quindi pronti ad introdurre il concetto di iperinterpolazione.

Definizione 1.6. (*Iperinterpolazione*)

Siano dati $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f \in C(\Omega)$, $\{p_1, \dots, p_d\} \subset \mathbb{P}_N$ una sua base ortonormale (rispetto a una funzione peso w) e $d = \dim(\mathbb{P}_N)$.

Sia inoltre data una formula di quadratura a pesi positivi (1.4) avente M nodi in Ω e grado di precisione almeno $2N$, allora l'operatore di iperinterpolazione $\mathcal{L}_N: C(\Omega) \rightarrow \mathbb{P}_N(\Omega)$ è definito da:

$$\mathcal{L}_N f := \sum_{j=1}^d \langle f, p_j \rangle_M p_j \quad (1.7)$$

dove $\langle f, p_j \rangle_M$, $1 \leq j \leq d$ è il prodotto interno discreto definito in (1.6).

Con la seguente proposizione si vuole dimostrare che, così come la proiezione ortogonale \mathcal{P}_N (1.3), anche \mathcal{L}_N non dipende dalla base ortonormale di \mathbb{P}_N scelta.

Proposizione 1.1. \mathcal{L}_N è invariante rispetto al cambiamento di base ortonormale di \mathbb{P}_N .

Dimostrazione. Siano $\{p_1, \dots, p_d\}$ e $\{q_1, \dots, q_d\}$, $d = \dim(\mathbb{P}_N)$, due diverse basi ortonormali di \mathbb{P}_N rispetto al prodotto interno (1.1). Allora:

$$q_i = \sum_{j=1}^d c_{ij} p_j \quad \forall i = 1, \dots, d$$

dove i c_{ij} , per $1 \leq i \leq d$ e $1 \leq j \leq d$, sono le entrate della matrice $C = (c_{ij})_{1 \leq i, j \leq d}$ di cambiamento di base tra le basi ortonormali $\{p_1, \dots, p_d\}$ e $\{q_1, \dots, q_d\}$. Ma ogni matrice di cambiamento di base tra due basi ortonormali è una matrice ortogonale, ovvero la sua matrice inversa coincide con la sua trasposta: $C^{-1} = C^T$ e quindi $CC^T = \mathbb{I}_d$. Pertanto:

$$p_j = \sum_{i=1}^d c_{ij} q_i \quad \forall 1 \leq j \leq d$$

Per la Definizione 1.6, $f_1 := \mathcal{L}_N f$ ottenuta utilizzando la base ortonormale $\{p_1, \dots, p_d\}$ risulta:

$$f_1 = \mathcal{L}_N f = \sum_{j=1}^d \langle f, p_j \rangle_M p_j$$

mentre calcolando $f_2 := \mathcal{L}_N f$ con la base ortonormale $\{q_1, \dots, q_d\}$ si trova:

$$\begin{aligned}
f_2 = \mathcal{L}_N f &= \sum_{i=1}^d \langle f, q_i \rangle_M q_i = \\
&= \sum_{i=1}^d \langle f, \sum_{j=1}^d c_{ij} p_j \rangle_M q_i = \\
&= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d c_{ij} \langle f, p_j \rangle_M q_i = \\
&= \sum_{j=1}^d \langle f, p_j \rangle_M \sum_{i=1}^d c_{ij} q_i = \\
&= \sum_{j=1}^d \langle f, p_j \rangle_M p_j = f_1
\end{aligned}$$

□

Sia $\{p_1, \dots, p_d\} \subset \mathbb{P}_N$ una sua base, ortonormale rispetto al prodotto interno (1.1). Il seguente lemma dimostra che la base $\{p_1, \dots, p_d\}$ risulta ortonormale anche rispetto al prodotto interno discreto (1.6), qualsiasi sia la funzione peso coinvolta w .

Lemma 1.1. *Per ogni $1 \leq i, j \leq d$,*

$$\langle p_i, p_j \rangle_M = \delta_{ij} \quad (1.8)$$

dove δ_{ij} è il delta di Kronecker.

Dimostrazione. Essendo $p_i p_j$ un polinomio di grado minore o uguale a $2N$ ed avendo, la formula di quadratura, grado di precisione almeno $2N$, allora da (1.5) e (1.1) segue che:

$$\langle p_i, p_j \rangle_M = \langle p_i, p_j \rangle = \delta_{ij}$$

□

Si dimostra ora una condizione necessaria sul numero di nodi che deve avere la formula di quadratura perché possa essere utilizzata per generare un'iperinterpolante.

Teorema 1.1. *Se una formula di quadratura è esatta per tutti i polinomi di grado al più $2N$, allora il numero M di nodi di quadratura deve soddisfare la condizione $M \geq d = \dim(\mathbb{P}_N)$.*

Dimostrazione. Sia $Q \in \mathbb{R}^{d \times M}$ la matrice i cui elementi sono $q_{jk} = w_k^{1/2} p_j(x_k)$. Da (1.8) segue che le righe di Q sono ortogonali e dunque linearmente indipendenti, pertanto il rango di Q è d . Quindi $\text{rg}(Q) = d \leq M$. \square

Definizione 1.7. *Una formula di quadratura a M nodi, esatta per tutti i polinomi di grado $\leq 2N$, si dice minima se $M = d$.*

Il prossimo teorema fornisce una condizione necessaria e sufficiente per stabilire se l'approssimante $\mathcal{L}_N f$ interpola o meno la funzione f nei nodi di quadratura $\mathbf{X}_M = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_M\} \subset \Omega$.

Teorema 1.2. *La classica formula di interpolazione*

$$\mathcal{L}_N f(\mathbf{x}_k) = f(\mathbf{x}_k) \quad 1 \leq k \leq M \quad (1.9)$$

vale per un'arbitraria $f \in C(\Omega)$ se e solo se la formula di quadratura a pesi positivi che definisce il prodotto interno discreto $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$, avente nodi $\mathbf{X}_M = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_M\} \subset \Omega$, è minima.

Dimostrazione. Se $M = d$, allora la matrice Q definita nella dimostrazione del Teorema 1.1 è quadrata, e per il Lemma 1.1 è tale che $QQ^T = \mathbb{I}_d$. Pertanto ne consegue che $Q^T Q = \mathbb{I}_d$, oppure:

$$\sum_{j=1}^d p_j(\mathbf{x}_k) p_j(\mathbf{x}_l) = w_k^{-1} \delta_{kl} \quad 1 \leq k, l \leq M \quad (1.10)$$

La proprietà (1.9) che si vuole dimostrare segue quindi immediatamente dalla definizione di iperinterpolazione (1.7).

Per quanto riguarda l'implicazione inversa, si ha per ipotesi che la proprietà (1.9) vale per un'arbitraria $f \in C(\Omega)$, quindi si ottiene o la proprietà (1.10), oppure che $Q^T Q = \mathbb{I}_d$. Perciò $QQ^T = \mathbb{I}_d$ e per il Lemma 1.1 la matrice Q deve essere quadrata. Questo implica che $M = d$. \square

OSSERVAZIONE. L'iperinterpolazione è perciò una generalizzazione della classica interpolazione polinomiale e si differenzia da quest'ultima perché il numero di nodi di quadratura $M \geq d = \dim(\mathbb{P}_N)$.

Il seguente teorema mostra che $\mathcal{L}_N f$ è esatta se f è un polinomio di grado $\leq N$.

Teorema 1.3. *(Teorema di proiezione)*

Nelle ipotesi precedenti, se $f \in \mathbb{P}_N$ allora $\mathcal{L}_N f = f$.

Dimostrazione. Per ipotesi si ha che $f \in \mathbb{P}_N$, pertanto:

$$f = \sum_{j=1}^d a_j p_j$$

Quindi dalla definizione di iperinterpolazione (1.7) segue che:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_N f &= \sum_{j=1}^d \langle f, p_j \rangle_M p_j = \\ &= \sum_{j=1}^d \left\langle \sum_{i=1}^d a_i p_i, p_j \right\rangle_M p_j = \\ &= \sum_{j=1}^d \sum_{i=1}^d a_i \langle p_i, p_j \rangle_M p_j = \\ &= \sum_{j=1}^d a_j p_j = f \end{aligned}$$

□

1.1 Convergenza e stabilità

Ai fini pratici, risulta importante studiare la convergenza del metodo dell'iperinterpolazione polinomiale, stimandone l'errore in norma L_2 .

In quest'analisi si vogliono distinguere i due casi in cui la funzione da approssimare $f \in C(\Omega)$ sia o meno soggetta a rumore.

Richiamiamo dapprima le definizioni di norma uniforme, di norma L_2 e di polinomio di miglior approssimazione.

Definizione 1.8. (*Norma uniforme*)

Siano Ω un dominio e $g \in C(\Omega)$. La norma uniforme è definita da:

$$\|g\|_\infty = \sup_{x \in \Omega} |g(x)| \quad (1.11)$$

Definizione 1.9. (*Norma L_2*)

Siano Ω un dominio, $g \in L_2(\Omega)$ e $d\omega$ una data misura. La norma L_2 è definita da:

$$\|g\|_2 = \left(\int_{\Omega} |g|^2 d\omega \right)^{1/2} \quad (1.12)$$

Definizione 1.10. (*Polinomio di miglior approssimazione*)

Siano Ω un dominio e $g \in C(\Omega)$. $p^* \in \mathbb{P}_N$ si dice di polinomio di miglior approssimazione di g in \mathbb{P}_N se vale:

$$\mathcal{E}_N(g) := \inf_{p \in \mathbb{P}_N} \|g - p\|_\infty = \|g - p^*\|_\infty \quad (1.13)$$

dove $\mathcal{E}_N(g)$ è l'errore di miglior approssimazione uniforme.

1.1.1 Dati non soggetti a rumore

Siano $f \in C(\Omega)$, $\mathbf{X}_M = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_M\} \subset \Omega$ i nodi di quadratura e $y_k = f(\mathbf{x}_k)$, $k = 1, \dots, M$.

Prima di enunciare e dimostrare il teorema di convergenza è utile il seguente lemma che rende note alcune proprietà dell'iperinterpolazione.

Lemma 1.2. *Data una formula di quadratura con grado di precisione almeno $2N$, per cui vale quindi la proprietà (1.5), dove $\mathbf{X}_M = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_M\} \subset \Omega$ e $W_M = \{w_1, \dots, w_M\}$ sono rispettivamente i nodi e i pesi (tutti positivi) di quadratura. Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$ il prodotto interno discreto definito in (1.6). Siano inoltre $f \in C(\Omega)$ e $\mathcal{L}_N f \in \mathbb{P}_N$ come nella Definizione 1.6. Allora valgono le seguenti affermazioni:*

- (a) $\langle f - \mathcal{L}_N f, p \rangle_M = 0 \quad \forall p \in \mathbb{P}_N$
- (b) $\langle \mathcal{L}_N f, \mathcal{L}_N f \rangle_M + \langle f - \mathcal{L}_N f, f - \mathcal{L}_N f \rangle_M = \langle f, f \rangle_M$
- (c) $\langle \mathcal{L}_N f, \mathcal{L}_N f \rangle_M \leq \langle f, f \rangle_M$
- (d) $\langle f - \mathcal{L}_N f, f - \mathcal{L}_N f \rangle_M = \min_{p \in \mathbb{P}_N} \langle f - p, f - p \rangle_M$

Dimostrazione. (a) Segue dalla Definizione 1.6 e dalla relazione di ortogonalità discreta (1.8).

(b) Dalla proprietà (a) e dalla linearità del prodotto interno discreto si ha che $\langle f, \mathcal{L}_N f \rangle_M = \langle \mathcal{L}_N f, \mathcal{L}_N f \rangle_M$ da cui segue (b).

(c) Per proprietà del prodotto interno discreto: $\langle g, g \rangle_M \geq 0 \quad \forall g \in C(\Omega)$, quindi anche $\langle f - \mathcal{L}_N f, f - \mathcal{L}_N f \rangle_M \geq 0$ e pertanto da (b) segue immediatamente (c).

(d) Sostituendo f con $f - p$ in (b), con $p \in \mathbb{P}_N$, si ottiene:

$$\langle f - \mathcal{L}_N f, f - \mathcal{L}_N f \rangle_M + \langle \mathcal{L}_N f - p, \mathcal{L}_N f - p \rangle_M = \langle f - p, f - p \rangle_M$$

da cui segue immediatamente (d). □

OSSERVAZIONE. Il punto (a) del lemma mostra che il vettore M -dimensionale $[\mathcal{L}_N f(\mathbf{x}_1), \dots, \mathcal{L}_N f(\mathbf{x}_M)]^T$ è la proiezione ortogonale, rispetto al prodotto interno

discreto $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$, del vettore M -dimensionale $[f(\mathbf{x}_1), \dots, f(\mathbf{x}_M)]^T$ sullo spazio \mathbb{P}_N , a cui appartengono i vettori $[p_j(\mathbf{x}_1), \dots, p_j(\mathbf{x}_M)]^T$, $\forall 1 \leq j \leq d$, dove $d = \dim(\mathbb{P}_N)$.

Il punto (b) è il corrispondente del teorema di Pitagora.

Il punto (c) è il risultato principale del lemma perché necessario per dimostrare il teorema di convergenza che verrà enunciato di seguito.

Il punto (d) rende nota un'interpretazione del polinomio di iperinterpolazione $\mathcal{L}_N f$ come la miglior approssimazione discreta dei minimi quadrati di f ai nodi di quadratura (pesata dai pesi di quadratura).

Teorema 1.4. (*Teorema di convergenza e stabilità*)

Siano $\|\cdot\|_\infty$ la norma uniforme definita in (1.11), $\|\cdot\|_2$ la norma L_2 definita in (1.12) e $\mathcal{E}_N(\cdot)$ l'errore di miglior approssimazione definito in (1.13). Sotto le ipotesi del Lemma 1.2 vale la disuguaglianza di stabilità:

$$\|\mathcal{L}_N f\|_2 \leq V^{1/2} \|f\|_\infty \quad (1.14)$$

come pure quella di convergenza:

$$\|\mathcal{L}_N f - f\|_2 \leq 2V^{1/2} \mathcal{E}_N(f). \quad (1.15)$$

Pertanto

$$\|\mathcal{L}_N f - f\|_2 \rightarrow 0 \quad \text{per} \quad N \rightarrow +\infty \quad (1.16)$$

Dove $V = \int_\Omega d\omega < +\infty$.

Dimostrazione. Per ipotesi la formula di quadratura ha grado di precisione almeno $2N$ e siccome $(\mathcal{L}_N f)^2 \in \mathbb{P}_{2N}$ vale la condizione (1.5). Pertanto si dimostra la stabilità:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}_N f\|_2^2 &= \langle \mathcal{L}_N f, \mathcal{L}_N f \rangle \stackrel{(1.5)}{=} \langle \mathcal{L}_N f, \mathcal{L}_N f \rangle_M \stackrel{\text{Lemma 1.2(c)}}{\leq} \langle f, f \rangle_M = \\ &= \sum_{k=1}^M w_k f(\mathbf{x}_k)^2 \leq \sum_{k=1}^M w_k \|f\|_\infty^2 \stackrel{(1.5)}{=} \int_\Omega d\omega \|f\|_\infty^2 = V \|f\|_\infty^2 \end{aligned}$$

Dalla linearità di \mathcal{L}_N si ha che per ogni $p \in \mathbb{P}_N$:

$$\|\mathcal{L}_N f - f\|_2 \stackrel{\text{Teorema 1.3}}{=} \|\mathcal{L}_N(f - p) - (f - p)\|_2 \leq \|\mathcal{L}_N(f - p)\|_2 + \|f - p\|_2$$

Per la disuguaglianza (1.14):

$$\|\mathcal{L}_N(f - p)\|_2 \leq V^{1/2} \|f - p\|_\infty$$

Inoltre dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz vale che:

$$\|f - p\|_2 = \sqrt{\langle f - p, f - p \rangle} \leq \|f - p\|_\infty \sqrt{\langle 1, 1 \rangle} = V^{1/2} \|f - p\|_\infty$$

Pertanto:

$$\|\mathcal{L}_N f - f\|_2 \stackrel{(1.14)}{\leq} V^{1/2} \|f - p\|_\infty + V^{1/2} \|f - p\|_\infty = 2V^{1/2} \|f - p\|_\infty$$

e per l'arbitrarietà di $p \in \mathbb{P}_N$ si ottiene:

$$\|\mathcal{L}_N f - f\|_2 \leq 2V^{1/2} \inf_{p \in \mathbb{P}_N} \|f - p\|_\infty = 2V^{1/2} \mathcal{E}_N(f)$$

dimostrando così la convergenza del metodo. \square

OSSERVAZIONE. Si osservi dalla dimostrazione che il teorema di convergenza e stabilità vale indipendentemente da N .

1.1.2 Dati soggetti a rumore

I seguenti risultati relativi all'analisi dell'errore di iperinterpolazione di una funzione f soggetta a rumore sono tratti dall'articolo di Congpei An e Hao-Ning Wu, "Lasso hyperinterpolation over general regions" [1].

Siano ora $f \in C(\Omega)$, $f^\delta \in C(\Omega)$ una sua perturbazione continua.

Dati $\mathbf{X}_M = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_M\} \subset \Omega$ i nodi di quadratura e $f^\delta(\mathbf{x}_k) = f(\mathbf{x}_k) + \delta_k$, $k = 1, \dots, M$, si ponga $\mathbf{\Delta} = [\delta_1, \dots, \delta_M]^T \in \mathbb{R}^M$ il vettore rumore.

Di seguito si rende noto un teorema che stima l'errore di $\mathcal{L}_N f^\delta$.

Teorema 1.5. *Sotto le ipotesi del Teorema 1.4 si ha:*

$$\|\mathcal{L}_N f^\delta - f\|_2 \leq V^{1/2} \|f - f^\delta\|_\infty + 2V^{1/2} \mathcal{E}_N(f) \quad (1.17)$$

Dimostrazione. Dal Teorema 1.4 si ha che:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}_N f^\delta - f\|_2 &= \|\mathcal{L}_N(f^\delta - p^*) - (f - p^*)\|_2 \leq \\ &\leq \|\mathcal{L}_N(f^\delta - p^*)\|_2 + \|f - p^*\|_2 \leq \\ &\leq V^{1/2} \|f^\delta - p^*\|_\infty + V^{1/2} \|f - p^*\|_\infty \end{aligned}$$

Ma, dalla stima $\|f^\delta - p^*\|_\infty = \|f^\delta - f + f - p^*\|_\infty \leq \|f^\delta - f\|_\infty + \|f - p^*\|_\infty$, si ottiene la disuguaglianza (1.17):

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}_N f^\delta - f\|_2 &\leq V^{1/2} \|f^\delta - f\|_\infty + V^{1/2} \|f - p^*\|_\infty + V^{1/2} \|f - p^*\|_\infty = \\ &= V^{1/2} \|f - f^\delta\|_\infty + 2V^{1/2} \|f - p^*\|_\infty = \\ &= V^{1/2} \|f - f^\delta\|_\infty + 2V^{1/2} \mathcal{E}_N(f) \end{aligned}$$

\square

OSSERVAZIONE. Assumendo che Δ sia determinato, si ha $\|f - f^\delta\|_\infty = \|\Delta\|_\infty = \max_k |\delta_k|$ da cui segue che l'errore di approssimazione non si annulla per $N \rightarrow +\infty$, come accade nel caso del Teorema 1.4, ma al contrario può essere più o meno significativo a seconda del rumore sui dati.

Tuttavia in molte situazioni tale perturbazione sui dati può essere casuale, è quindi necessario stimare analiticamente a priori il rumore calcolandone la media $\mathbb{E}(\|f - f^\delta\|_\infty) = \mathbb{E}(\|\Delta\|_\infty)$. In questo caso l'errore di approssimazione potrà essere determinato in termini di valore atteso.

Capitolo 2

Iperinterpolazione filtrata

Come è emerso nella Sezione 1.1, l'errore di iperinterpolazione, nel caso in cui siano perturbati i campionamenti della funzione f nei nodi di quadratura, non è infinitesimo per $N \rightarrow +\infty$.

L'oscillazione dovuta a tale rumore sui dati può essere localizzata utilizzando una funzione filtro $h \in C(\mathbb{R}^+)$.

Definizione 2.1. (*Filtro*)

Un filtro è una funzione continua $h: \mathbb{R}^+ \rightarrow [0, 1]$ che soddisfa la seguente condizione:

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 0 & \text{se } x \in [1, +\infty] \end{cases} \quad (2.1)$$

Nel contesto di questa tesi si suppone che $\text{supp}(h) = [0, a]$, con $a < 1$ dove $\text{supp}(\cdot)$ indica il supporto della funzione.

Ci possono quindi essere funzioni filtro di vario tipo a seconda del loro comportamento, più o meno regolare, nell'intervallo $(\frac{1}{2}, 1)$.

Qui di seguito si elencano alcuni esempi di filtri presi dall'articolo di Ian H. Sloan e Robert S. Womersley, "*Filtered hyperinterpolation: a constructive polynomial approximation on the sphere*" [3].

Il grafico relativo ad ogni funzione filtro è rappresentato nella Figura 2.1.

Tali filtri sono stati scalati nell'intervallo $[0, 1]$ e sono espressi in funzione della trasformazione:

$$y: \left(\frac{1}{2}, 1\right) \rightarrow (0, 1) \\ x \mapsto y(x) := x - \frac{1}{2}$$

1. *Funzione lineare*

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 1 - 2y(x) & \text{se } x \in (\frac{1}{2}, 1) \\ 0 & \text{se } x \in [1, +\infty] \end{cases}$$

2. *Funzione cubica*

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 1 - 12y^2(x) + 16y^3(x) & \text{se } x \in (\frac{1}{2}, 1) \\ 0 & \text{se } x \in [1, +\infty] \end{cases}$$

3. *Polinomio trigonometrico*

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ \sin^2(\pi(\frac{1}{2} + y(x))) & \text{se } x \in (\frac{1}{2}, 1) \\ 0 & \text{se } x \in [1, +\infty] \end{cases}$$

4. *Funzione quadratica a tratti*

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 1 - 8y^2(x) & \text{se } x \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) \\ 8(y(x) - \frac{1}{2})^2 & \text{se } x \in (\frac{3}{4}, 1) \\ 0 & \text{se } x \in [1, +\infty] \end{cases}$$

5. *Funzione esponenziale*

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ \exp\left(\frac{-2 \exp\left(-\frac{1}{2y(x)}\right)}{\frac{1}{2} - y(x)}\right) & \text{se } x \in (\frac{1}{2}, 1) \\ 0 & \text{se } x \in [1, +\infty] \end{cases}$$

Si vogliono confrontare più facilmente i comportamenti delle funzioni filtro appena elencate illustrandone l'andamento nello stesso grafico, che viene mostrato in coda agli altri nella Figura 2.1.

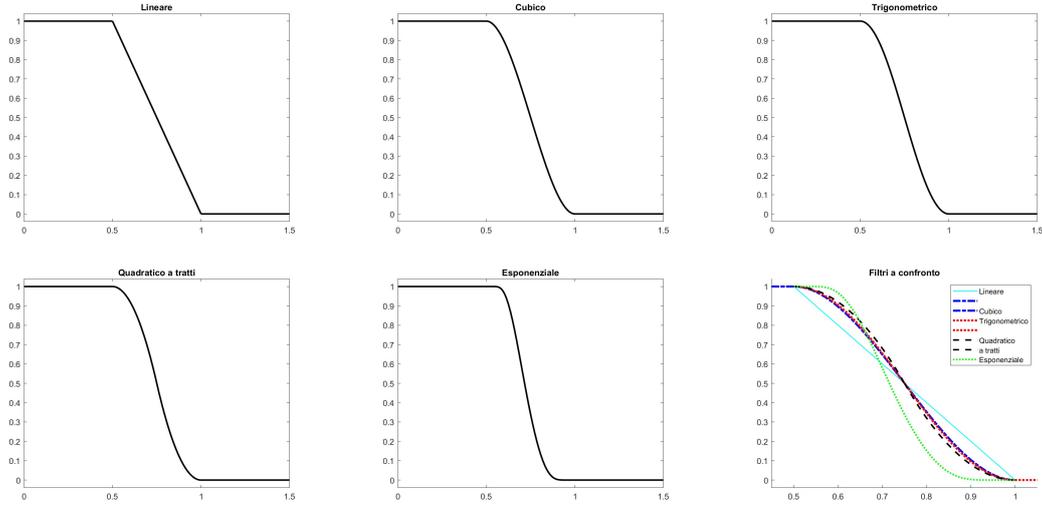


Figura 2.1: Esempi di funzioni filtro.

OSSERVAZIONE. I filtri sono tutti decrescenti nell'intervallo $(\frac{1}{2}, 1)$ e, in ordine rispettivamente dal primo al quinto, decadono sempre più lentamente dal valore 1 e si avvicinano sempre più rapidamente al valore 0.

Quanto segue in questo capitolo sull'iperinterpolazione filtrata è tratto, e adattato al contesto, dall'articolo di Congpei An e Hao-Ning Wu, “*Lasso hyperinterpolation over general regions*” [1].

L'iperinterpolazione filtrata, a differenza dell'iperinterpolazione classica, fa per ciò uso di una funzione filtro $h \in C(\mathbb{R}^+)$: tutti i coefficienti $\langle f, p_j \rangle_M$ sono filtrati da h , cioè sono moltiplicati per $h(\frac{\deg(p_j)}{N})$, dove $\deg(p_j) = J \leq N$ è il grado di $p_j \in \mathbb{P}_N$, $1 \leq j \leq d$.

Nel definire l'iperinterpolazione filtrata, si suppone che la base polinomiale $\{p_1, \dots, p_d\}$ di \mathbb{P}_N sia di tipo *triangolare*, intendendo con ciò che $\forall k \leq N$, posto $d_k = \dim(\mathbb{P}_k)$, si abbia $\mathbb{P}_k = \text{span}(p_1, \dots, p_{d_k})$, ovvero che lo spazio \mathbb{P}_k dei polinomi di grado $\leq k$ coincida con il sottospazio generato dai polinomi $\{p_1, \dots, p_{d_k}\}$.

In seguito inoltre si indicano con $\lceil \cdot \rceil$ e $\lfloor \cdot \rfloor$ le parti intere di un numero rispettivamente dall'alto e dal basso.

Definizione 2.2. (*Iperinterpolazione filtrata*)

Siano dati $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f \in C(\Omega)$, $\{p_1, \dots, p_d\} \subset \mathbb{P}_N$ una sua base triangolare ed ortonormale, $d = \dim(\mathbb{P}_N)$, e un filtro h come definito in (2.1) avente supporto $\text{supp}(h) = [0, a]$, con $a < 1$.

Sia inoltre data una formula di quadratura a pesi positivi (1.4) avente M nodi in Ω e grado di precisione almeno $\lceil aN \rceil - 1 + \lfloor N/2 \rfloor$.

L'operatore di iperinterpolazione filtrata $\mathcal{F}_N: C(\Omega) \rightarrow \mathbb{P}_N(\Omega)$ è definito da:

$$\mathcal{F}_N f := \sum_{j=1}^d h\left(\frac{\deg(p_j)}{N}\right) \langle f, p_j \rangle_M p_j \quad (2.2)$$

dove $\langle f, p_j \rangle_M, 1 \leq j \leq d$ è il prodotto interno discreto definito in (1.6).

Proposizione 2.1. $\mathcal{F}_N f$ è un polinomio di grado totale al più $\lceil aN \rceil - 1$.

Dimostrazione. Essendo il filtro h una funzione non negativa e decrescente ed avendo supposto $\text{supp}(h) = [0, a]$, allora $\forall j$ tale che $\deg(p_j) \geq aN$, si ha: $0 \leq h\left(\frac{\deg(p_j)}{N}\right) \leq h\left(\frac{aN}{N}\right) = h(a) = 0$ e quindi $h\left(\frac{\deg(p_j)}{N}\right) = 0$. Pertanto $\deg(\mathcal{F}_N f) < aN \leq \lceil aN \rceil$ e perciò il grado totale di $\mathcal{F}_N f$ può essere al più $\lceil aN \rceil - 1$. \square

Teorema 2.1. (Teorema di proiezione)

Nelle ipotesi precedenti, se $f \in \mathbb{P}_{\lfloor N/2 \rfloor}$ allora $\mathcal{F}_N f = f$.

Dimostrazione. Si ponga $d_{\lfloor N/2 \rfloor} = \dim(\mathbb{P}_{\lfloor N/2 \rfloor})$. Per ipotesi si ha che $f \in \mathbb{P}_{\lfloor N/2 \rfloor}$ e che $\{p_1, \dots, p_d\}$ è una base triangolare ed ortonormale di \mathbb{P}_N , pertanto:

$$f = \sum_{j=1}^{d_{\lfloor N/2 \rfloor}} \langle f, p_j \rangle p_j$$

Quindi dalla definizione di iperinterpolazione filtrata (2.2) segue che:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_N f &= \sum_{j=1}^d h\left(\frac{\deg(p_j)}{N}\right) \langle f, p_j \rangle_M p_j = \\ &= \sum_{j=1}^{d_{\lfloor N/2 \rfloor}} h\left(\frac{\deg(p_j)}{N}\right) \langle f, p_j \rangle_M p_j + \sum_{j=d_{\lfloor N/2 \rfloor}+1}^d h\left(\frac{\deg(p_j)}{N}\right) \langle f, p_j \rangle_M p_j \end{aligned}$$

Essendo \mathbb{P}_k lo spazio dei polinomi di grado $\leq k$ con $d_k = \dim(\mathbb{P}_k)$, $\forall 1 \leq j \leq d_{\lfloor N/2 \rfloor}$ si ha $0 \leq \deg(p_j) \leq \lfloor N/2 \rfloor$ e quindi $0 \leq \frac{\deg(p_j)}{N} \leq \frac{1}{2}$. Inoltre dalla condizione (2.1) per la funzione filtro si ha $h(x) = 1$ per ogni $x \in [0, \frac{1}{2}]$. Si ottiene perciò che $h\left(\frac{\deg(p_j)}{N}\right) = 1$ per ogni $1 \leq j \leq d_{\lfloor N/2 \rfloor}$ e quindi:

$$\mathcal{F}_N f = \sum_{j=1}^{d_{\lfloor N/2 \rfloor}} \langle f, p_j \rangle_M p_j + \sum_{j=d_{\lfloor N/2 \rfloor}+1}^d h\left(\frac{\deg(p_j)}{N}\right) \langle f, p_j \rangle_M p_j$$

Ora, essendo il filtro h una funzione non negativa e decrescente e avendo supposto $\text{supp}(h) = [0, a]$ e $\{p_1, \dots, p_d\}$ base triangolare di \mathbb{P}_N , allora $\forall j \geq d_{\lceil aN \rceil - 1} + 1$, ovvero tale che $\text{deg}(p_j) \geq aN$, si ha: $0 \leq h\left(\frac{\text{deg}(p_j)}{N}\right) \leq h\left(\frac{aN}{N}\right) = h(a) = 0$ e quindi $h\left(\frac{\text{deg}(p_j)}{N}\right) = 0$. Pertanto si ricava:

$$\begin{aligned} \sum_{j=d_{\lfloor N/2 \rfloor}+1}^d h\left(\frac{\text{deg}(p_j)}{N}\right) \langle f, p_j \rangle_M p_j &= \sum_{j=d_{\lfloor N/2 \rfloor}+1}^{d_{\lceil aN \rceil}-1} h\left(\frac{\text{deg}(p_j)}{N}\right) \langle f, p_j \rangle_M p_j \\ &+ \sum_{j=d_{\lceil aN \rceil}-1+1}^d h\left(\frac{\text{deg}(p_j)}{N}\right) \langle f, p_j \rangle_M p_j = \\ &= \sum_{j=d_{\lfloor N/2 \rfloor}+1}^{d_{\lceil aN \rceil}-1} h\left(\frac{\text{deg}(p_j)}{N}\right) \langle f, p_j \rangle_M p_j \end{aligned}$$

e quindi:

$$\mathcal{F}_N f = \sum_{j=1}^{d_{\lfloor N/2 \rfloor}} \langle f, p_j \rangle_M p_j + \sum_{j=d_{\lfloor N/2 \rfloor}+1}^{d_{\lceil aN \rceil}-1} h\left(\frac{\text{deg}(p_j)}{N}\right) \langle f, p_j \rangle_M p_j$$

Infine per ipotesi il grado di precisione è almeno $\lceil aN \rceil - 1 + \lfloor N/2 \rfloor$, allora $\forall j \leq d_{\lceil aN \rceil - 1 + \lfloor N/2 \rfloor}$ si ha $\langle f, p_j \rangle_M = \langle f, p_j \rangle$. Tuttavia $f \in \mathbb{P}_{\lfloor N/2 \rfloor}$ e $\{p_1, \dots, p_d\}$ base triangolare e ortonormale di \mathbb{P}_N , perciò $\forall j \geq d_{\lfloor N/2 \rfloor} + 1$ si ha $\langle f, p_j \rangle = 0$. Pertanto si ottiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_N f &= \sum_{j=1}^{d_{\lfloor N/2 \rfloor}} \langle f, p_j \rangle p_j + \sum_{j=d_{\lfloor N/2 \rfloor}+1}^{d_{\lceil aN \rceil}-1} h\left(\frac{\text{deg}(p_j)}{N}\right) \langle f, p_j \rangle p_j = \\ &= \sum_{j=1}^{d_{\lfloor N/2 \rfloor}} \langle f, p_j \rangle p_j = f \end{aligned}$$

□

2.1 Convergenza e stabilità

In questa sezione, analogamente a quanto analizzato nella Sezione 1.1 per l'iperinterpolazione classica, si vogliono dare risultati riguardanti la convergenza e la stabilità del metodo dell'iperinterpolazione filtrata.

Sarà quindi infine possibile confrontare gli errori in norma L_2 dei due metodi di approssimazione in entrambi i casi in cui la funzione da approssimare $f \in C(\Omega)$

sia o meno soggetta a rumore.

Lo studio di convergenza e stabilità relative all'iperinterpolazione filtrata è tratto, e adattato al contesto, dall'articolo di Congpei An e Hao-Ning Wu, “*Lasso hyperinterpolation over general regions*” [1].

2.1.1 Dati non soggetti a rumore

Siano $f \in C(\Omega)$, $\mathbf{X}_M = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_M\} \subset \Omega$ i nodi di quadratura e $y_k = f(\mathbf{x}_k)$, $k = 1, \dots, M$.

Prima di enunciare e dimostrare il teorema di convergenza è utile il seguente lemma che rende note alcune proprietà dell'iperinterpolazione filtrata.

Lemma 2.1. *Data una formula di quadratura con grado di precisione almeno $2(\lceil aN \rceil - 1)$, dove $\mathbf{X}_M = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_M\} \subset \Omega$ e $W_M = \{w_1, \dots, w_M\}$ sono rispettivamente i nodi e i pesi (tutti positivi) di quadratura. Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$ il prodotto interno discreto definito in (1.6), $f \in C(\Omega)$, $\mathcal{F}_N f \in \mathbb{P}_N$ come nella Definizione 2.2 e h un filtro come definito in (2.1) tale che $\text{supp}(h) = [0, a]$, con $a \in (\frac{1}{2}, 1]$. Sia inoltre definito:*

$$\mathcal{K}(f) := \sum_{j=1}^d \left(h \left(\frac{\text{deg}(p_j)}{N} \right) - h^2 \left(\frac{\text{deg}(p_j)}{N} \right) \right) \langle f, p_j \rangle_M^2$$

Allora valgono le seguenti affermazioni:

- (a) $\langle f - \mathcal{F}_N f, \mathcal{F}_N f \rangle_M = \mathcal{K}(f)$
- (b) $\langle \mathcal{F}_N f, \mathcal{F}_N f \rangle_M + \langle f - \mathcal{F}_N f, f - \mathcal{F}_N f \rangle_M = \langle f, f \rangle_M - 2\mathcal{K}(f)$,
tale $\mathcal{K}(f)$ soddisfa $\mathcal{K}(f) \leq \frac{\langle f, f \rangle_M}{2}$
- (c) $\langle \mathcal{F}_N f, \mathcal{F}_N f \rangle_M \leq \langle f, f \rangle_M - 2\mathcal{K}(f)$

Inoltre $\mathcal{K}(f) \geq 0$.

Dimostrazione. (a) Dalla Definizione 2.2 e per linearità del prodotto interno discreto (1.6):

$$\begin{aligned} & \langle f - \mathcal{F}_N f, \mathcal{F}_N f \rangle_M = \\ & = \left\langle f - \sum_{j=1}^d h \left(\frac{\text{deg}(p_j)}{N} \right) \langle f, p_j \rangle_M p_j, \sum_{k=1}^d h \left(\frac{\text{deg}(p_k)}{N} \right) \langle f, p_k \rangle_M p_k \right\rangle_M = \\ & = \sum_{k=1}^d h \left(\frac{\text{deg}(p_k)}{N} \right) \langle f, p_k \rangle_M \left\langle f - \sum_{j=1}^d h \left(\frac{\text{deg}(p_j)}{N} \right) \langle f, p_j \rangle_M p_j, p_k \right\rangle_M \end{aligned}$$

Essendo il filtro h una funzione non negativa e decrescente e avendo supposto $\text{supp}(h) = [0, a]$ e $\{p_1, \dots, p_d\}$ base triangolare di \mathbb{P}_N , allora per ogni $j \geq d_{\lceil aN \rceil - 1} + 1$, ovvero tale che $\text{deg}(p_j) \geq aN$, si ha: $0 \leq h\left(\frac{\text{deg}(p_j)}{N}\right) \leq h\left(\frac{aN}{N}\right) = h(a) = 0$ e quindi $h\left(\frac{\text{deg}(p_j)}{N}\right) = 0$. Da cui:

$$\begin{aligned} & \langle f - \mathcal{F}_N f, \mathcal{F}_N f \rangle_M = \\ & = \sum_{k=1}^{d_{\lceil aN \rceil - 1}} h\left(\frac{\text{deg}(p_k)}{N}\right) \langle f, p_k \rangle_M \left\langle f - \sum_{j=1}^{d_{\lceil aN \rceil - 1}} h\left(\frac{\text{deg}(p_j)}{N}\right) \langle f, p_j \rangle_M p_j, p_k \right\rangle_M \end{aligned}$$

Dove:

$$\begin{aligned} & \left\langle f - \sum_{j=1}^{d_{\lceil aN \rceil - 1}} h\left(\frac{\text{deg}(p_j)}{N}\right) \langle f, p_j \rangle_M p_j, p_k \right\rangle_M = \\ & = \langle f, p_k \rangle_M - \left\langle \sum_{j=1}^{d_{\lceil aN \rceil - 1}} h\left(\frac{\text{deg}(p_j)}{N}\right) \langle f, p_j \rangle_M p_j, p_k \right\rangle_M = \\ & \stackrel{(1.8)}{=} \langle f, p_k \rangle_M - h\left(\frac{\text{deg}(p_k)}{N}\right) \langle f, p_k \rangle_M \end{aligned}$$

Si ottiene quindi:

$$\begin{aligned} & \langle f - \mathcal{F}_N f, \mathcal{F}_N f \rangle_M = \\ & = \sum_{k=1}^{d_{\lceil aN \rceil - 1}} h\left(\frac{\text{deg}(p_k)}{N}\right) \langle f, p_k \rangle_M \left(\langle f, p_k \rangle_M - h\left(\frac{\text{deg}(p_k)}{N}\right) \langle f, p_k \rangle_M \right) = \\ & = \sum_{k=1}^{d_{\lceil aN \rceil - 1}} \left(h\left(\frac{\text{deg}(p_k)}{N}\right) - h^2\left(\frac{\text{deg}(p_k)}{N}\right) \right) \langle f, p_k \rangle_M^2 = \\ & \stackrel{\text{supp}(h)=[0,a]}{=} \sum_{k=1}^d \left(h\left(\frac{\text{deg}(p_k)}{N}\right) - h^2\left(\frac{\text{deg}(p_k)}{N}\right) \right) \langle f, p_k \rangle_M^2 = \mathcal{K}(f) \end{aligned}$$

(b) Da (a) segue che:

$$\begin{aligned} & \langle f, \mathcal{F}_N f \rangle_M - \langle \mathcal{F}_N f, \mathcal{F}_N f \rangle_M = \mathcal{K}(f) \\ & \langle \mathcal{F}_N f, \mathcal{F}_N f \rangle_M = \langle f, \mathcal{F}_N f \rangle_M - \mathcal{K}(f) \end{aligned}$$

Inoltre vale:

$$\langle f - \mathcal{F}_N f, f - \mathcal{F}_N f \rangle_M = \langle f, f \rangle_M - 2\langle f, \mathcal{F}_N f \rangle_M + \langle \mathcal{F}_N f, \mathcal{F}_N f \rangle_M$$

Sommando ora membro a membro le due relazioni si ottiene (b):

$$\begin{aligned}
& \langle \mathcal{F}_N f, \mathcal{F}_N f \rangle_M + \langle f - \mathcal{F}_N f, f - \mathcal{F}_N f \rangle_M = \\
& = \langle f, \mathcal{F}_N f \rangle_M - \mathcal{K}(f) + \langle f, f \rangle_M - 2\langle f, \mathcal{F}_N f \rangle_M + \langle \mathcal{F}_N f, \mathcal{F}_N f \rangle_M = \\
& = \langle f, \mathcal{F}_N f \rangle_M - \mathcal{K}(f) + \langle f, f \rangle_M - 2\langle f, \mathcal{F}_N f \rangle_M + \langle f, \mathcal{F}_N f \rangle_M - \mathcal{K}(f) = \\
& = \langle f, f \rangle_M - 2\mathcal{K}(f)
\end{aligned}$$

Per proprietà del prodotto interno discreto: $\langle g, g \rangle_M \geq 0 \forall g \in C(\Omega)$, quindi anche $\langle f, f \rangle_M - 2\mathcal{K}(f) \geq 0$, da cui: $\mathcal{K}(f) \leq \frac{\langle f, f \rangle_M}{2}$.

(c) Per quanto appena affermato, anche $\langle f - \mathcal{F}_N f, f - \mathcal{F}_N f \rangle_M \geq 0$ e pertanto da (b) segue immediatamente (c).

Infine $\mathcal{K}(f) \geq 0$ deriva dall'ipotesi che l'immagine della funzione filtro h definita in (2.1) è $[0, 1]$ e quindi $h\left(\frac{\deg(p_j)}{N}\right) \geq h^2\left(\frac{\deg(p_j)}{N}\right)$. \square

OSSERVAZIONE. Si osservi che nelle ipotesi del Lemma 2.1, valide anche per il teorema di convergenza e stabilità che segue, è richiesto che la formula di quadratura abbia grado di precisione almeno $2(\lceil aN \rceil - 1)$, che in generale è maggiore di quello richiesto nella Definizione 2.2 di iperinterpolazione filtrata, ovvero $\lceil aN \rceil - 1 + \lfloor N/2 \rfloor$.

Teorema 2.2. *(Teorema di convergenza e stabilità)*

Siano $\|\cdot\|_\infty$ la norma uniforme definita in (1.11), $\|\cdot\|_2$ la norma L_2 definita in (1.12) e $\mathcal{E}_{\lceil aN \rceil - 1}(\cdot)$ l'errore di miglior approssimazione definito in (1.13). Nelle stesse ipotesi del Lemma 2.1, esiste $\tau_1 \leq 1$ inversamente proporzionale a $\mathcal{K}(f)$ tale che:

$$\|\mathcal{F}_N f\|_2 \leq \tau_1 V^{1/2} \|f\|_\infty \quad (2.3)$$

ed esiste $\tau_2 \leq 1$ inversamente proporzionale a $\mathcal{K}(f - p^*)$ tale che:

$$\|\mathcal{F}_N f - f\|_2 \leq (1 + \tau_2) V^{1/2} \mathcal{E}_{\lceil aN \rceil - 1}(f) + \|p^* - \mathcal{F}_N p^*\|_2. \quad (2.4)$$

Dove $V = \int_\Omega d\omega < +\infty$ e p^* è il polinomio di miglior approssimazione di f in \mathbb{P}_N (relativamente alla norma L_2).

Dimostrazione. Per ipotesi la formula di quadratura ha grado di precisione almeno $2(\lceil aN \rceil - 1)$ e, siccome per la Proposizione 2.1 $(\mathcal{F}_N f)^2$ è un polinomio di grado totale al più $2(\lceil aN \rceil - 1)$, vale che $\langle \mathcal{F}_N f, \mathcal{F}_N f \rangle = \langle \mathcal{F}_N f, \mathcal{F}_N f \rangle_M$. Pertanto si ha:

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{F}_N f\|_2^2 &= \langle \mathcal{F}_N f, \mathcal{F}_N f \rangle = \langle \mathcal{F}_N f, \mathcal{F}_N f \rangle_M \stackrel{\text{Lemma 2.1(c)}}{\leq} \langle f, f \rangle_M - 2\mathcal{K}(f) = \\
&= \sum_{k=1}^M w_k f(\mathbf{x}_k)^2 - 2\mathcal{K}(f) \leq \sum_{k=1}^M w_k \|f\|_\infty^2 - 2\mathcal{K}(f) = \\
&\stackrel{(1.5)}{=} \int_\Omega d\omega \|f\|_\infty^2 - 2\mathcal{K}(f) = V \|f\|_\infty^2 - 2\mathcal{K}(f)
\end{aligned}$$

Dal Lemma 2.1 si ha che $\mathcal{K}(f) \geq 0$, quindi esiste $\tau_1 \leq 1$ inversamente proporzionale a $\mathcal{K}(f)$ tale che:

$$\sqrt{V\|f\|_\infty^2 - 2\mathcal{K}(f)} = \tau_1 V^{1/2} \|f\|_\infty$$

da cui si ottiene la disuguaglianza (2.3).

Dalla linearità di \mathcal{F}_N si ha che per ogni $p \in \mathbb{P}_N$:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}_N f - f\|_2 &= \|\mathcal{F}_N(f - p) - (f - p) - (p - \mathcal{F}_N p)\|_2 \leq \\ &\leq \|\mathcal{F}_N(f - p)\|_2 + \|f - p\|_2 + \|p - \mathcal{F}_N p\|_2 \end{aligned}$$

Per la disuguaglianza (2.3), esiste $\tau_2 \leq 1$ inversamente proporzionale a $\mathcal{K}(f - p)$ tale che

$$\|\mathcal{F}_N(f - p)\|_2 \leq \tau_2 V^{1/2} \|f - p\|_\infty$$

Inoltre dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz vale che:

$$\|f - p\|_2 = \sqrt{\langle f - p, f - p \rangle} \leq \|f - p\|_\infty \sqrt{\langle 1, 1 \rangle} = V^{1/2} \|f - p\|_\infty$$

Pertanto:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}_N f - f\|_2 &\leq \tau_2 V^{1/2} \|f - p\|_\infty + V^{1/2} \|f - p\|_\infty + \|p - \mathcal{F}_N p\|_2 = \\ &= (1 + \tau_2) V^{1/2} \|f - p\|_\infty + \|p - \mathcal{F}_N p\|_2 \end{aligned}$$

e per l'arbitrarietà di $p \in \mathbb{P}_N$, esiste $\tau_2 \leq 1$ inversamente proporzionale a $\mathcal{K}(f - p^*)$ tale che:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}_N f - f\|_2 &\leq (1 + \tau_2) V^{1/2} \inf_{p \in \mathbb{P}_{[aN]-1}} \|f - p\|_\infty + \|p^* - \mathcal{F}_N p^*\|_2 = \\ &= (1 + \tau_2) V^{1/2} \mathcal{E}_{[aN]-1}(f) + \|p^* - \mathcal{F}_N p^*\|_2 \end{aligned}$$

dove p^* è il polinomio di miglior approssimazione di f in \mathbb{P}_N (relativamente alla norma L_2). Si è quindi dimostrata anche la disuguaglianza (2.4). \square

OSSERVAZIONE. Confrontando questo risultato con quello del Teorema 1.4 si può dunque osservare che, nel caso in cui la funzione f non sia soggetta a rumore, \mathcal{F}_N può diminuire la stima di stabilità (1.14) di \mathcal{L}_N moltiplicandola per un fattore $\tau_1 \leq 1$ e, rispetto alla stima di convergenza (1.15) di \mathcal{L}_N , \mathcal{F}_N può ridurre il fattore 2 a $(1 + \tau_2) \leq 2$. Tuttavia in confronto alla stima di errore (1.15), in (2.4) si introduce un termine aggiuntivo: $\|p^* - \mathcal{F}_N p^*\|_2$, che si può chiamare *errore di regolarizzazione*.

2.1.2 Dati soggetti a rumore

Siano ora $f \in C(\Omega)$, $f^\delta \in C(\Omega)$ una sua perturbazione continua.

Dati $\mathbf{X}_M = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_M\} \subset \Omega$ i nodi di quadratura e $f^\delta(\mathbf{x}_k) = f(\mathbf{x}_k) + \delta_k$, $1 \leq k \leq M$, si ponga $\mathbf{\Delta} = [\delta_1, \dots, \delta_M]^T \in \mathbb{R}^M$ il vettore rumore.

Di seguito si rende noto un teorema che stima l'errore di $\mathcal{L}_N f^\delta$.

Teorema 2.3. *Supponendo le stesse ipotesi del Teorema 2.2, allora esiste $\tau_3 \leq 1$ inversamente proporzionale a $\mathcal{K}(f^\delta - p^*)$ tale che:*

$$\|\mathcal{F}_N f^\delta - f\|_2 \leq \tau_3 V^{1/2} \|f - f^\delta\|_\infty + (1 + \tau_3) V^{1/2} \mathcal{E}_N(f) + \|p^* - \mathcal{F}_N p^*\|_2 \quad (2.5)$$

dove p^* è il polinomio di miglior approssimazione di f in \mathbb{P}_N (relativamente alla norma L_2).

Dimostrazione. Dal Teorema 2.2 si ha che esiste $\tau_3 \leq 1$ inversamente proporzionale a $\mathcal{K}(f^\delta - p^*)$ tale che:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}_N f^\delta - f\|_2 &= \|\mathcal{F}_N(f^\delta - p^*) - (f - p^*) - (p^* - \mathcal{F}_N p^*)\|_2 \leq \\ &\leq \|\mathcal{F}_N(f^\delta - p^*)\|_2 + \|f - p^*\|_2 + \|p^* - \mathcal{F}_N p^*\|_2 \leq \\ &\leq \tau_3 V^{1/2} \|f^\delta - p^*\|_\infty + V^{1/2} \|f - p^*\|_\infty + \|p^* - \mathcal{F}_N p^*\|_2 \end{aligned}$$

Ma, dalla stima $\|f^\delta - p^*\|_\infty = \|f^\delta - f + f - p^*\|_\infty \leq \|f^\delta - f\|_\infty + \|f - p^*\|_\infty$, si ottiene la disuguaglianza (2.5):

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}_N f^\delta - f\|_2 &\leq \tau_3 V^{1/2} \|f^\delta - f\|_\infty + \tau_3 V^{1/2} \|f - p^*\|_\infty + \\ &+ V^{1/2} \|f - p^*\|_\infty + \|p^* - \mathcal{F}_N p^*\|_2 = \\ &= \tau_3 V^{1/2} \|f - f^\delta\|_\infty + (1 + \tau_3) V^{1/2} \|f - p^*\|_\infty + \|p^* - \mathcal{F}_N p^*\|_2 = \\ &= \tau_3 V^{1/2} \|f - f^\delta\|_\infty + (1 + \tau_3) V^{1/2} \mathcal{E}_N(f) + \|p^* - \mathcal{F}_N p^*\|_2 \end{aligned}$$

□

OSSERVAZIONE. Confrontando questo risultato con quello del Teorema 1.5 si può dunque osservare da (2.5) che, rispetto alla stima di errore (1.17) di \mathcal{L}_N , \mathcal{F}_N può diminuire il primo termine moltiplicandolo per un fattore $\tau_3 \leq 1$ e ridurre il fattore 2 del secondo a $(1 + \tau_3) \leq 2$, ma compare comunque il termine aggiuntivo dovuto all'errore di regolarizzazione. Tuttavia, quando il livello di rumore a cui è soggetta f è di una scala significativa, il contributo dell'errore di regolarizzazione diventa trascurabile per la stima dell'errore totale e quindi, in tal caso, per approssimare f è preferibile ricorrere al metodo dell'iperinterpolazione filtrata, piuttosto che all'iperinterpolazione classica.

Capitolo 3

Iperinterpolazione filtrata su domini bivariati con bordo di tipo NURBS

In questo capitolo si vuole studiare l'iperinterpolazione filtrata applicata a domini la cui frontiera è definita a tratti da curve NURBS (acronimo di “Non Uniform Rational Basis-Spline”).

Per poter applicare la Definizione 2.2 di iperinterpolazione filtrata alla funzione $f \in C(\Omega)$ soggetta a rumore, è necessario fornire:

- un dominio compatto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, che nel contesto di questa tesi sarà in particolare un sottinsieme chiuso e limitato di \mathbb{R}^2 il cui bordo è definito a tratti da curve NURBS;
- una funzione filtro h come definita in (2.1) avente supporto $\text{supp}(h) = [0, a]$, con $a < 1$.

Si è scelto come filtro $h: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ la funzione:

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ \sin^2(\pi x) & \text{se } x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

con $\text{supp}(h) = [0, 1]$;

- una perturbazione continua f^δ di f ottenuta aggiungendo un rumore alla sua valutazione sui nodi di quadratura: $f^\delta(\mathbf{x}_k) = f(\mathbf{x}_k) + \delta_k$, $1 \leq k \leq M$. In particolare si considerano i rumori δ_k , $k = 1, \dots, M$, distribuiti come:
 - una variabile aleatoria normale $N(0, \sigma^2)$ con media 0 e deviazione standard σ ,
 - una variabile aleatoria uniforme $U(\alpha)$ avente valori random in $[-\alpha, \alpha]$ con probabilità 1/2;

- una formula di quadratura a pesi positivi e nodi interni (1.4) il cui grado di precisione è almeno $\lceil N \rceil - 1 + \lfloor N/2 \rfloor$;
- una base triangolare ed ortonormale $\{p_1, \dots, p_d\}$ di $\mathbb{P}_N(\Omega)$, $d = \dim(\mathbb{P}_N(\Omega))$.

3.1 Formula di quadratura a pesi positivi e nodi interni

Quanto segue sulla costruzione di una formula di quadratura algebrica per tali elementi poligonali curvilinei quali sono i domini considerati in questo capitolo, è tratto dall'articolo "Low cardinality Positive Interior cubature on NURBS-shaped domains" [6].

Per estrarre una formula di quadratura a pesi positivi e nodi interni da una discretizzazione sufficientemente densa di un dominio compatto, sono di fondamentale importanza i seguenti teoremi di Tchakaloff e di Wilhelmsen.

Teorema 3.1. (Teorema di Tchakaloff)

Siano μ una misura positiva sul dominio compatto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, N un intero positivo e $\mathbb{P}_N^n(\Omega)$ lo spazio dei polinomi n -variati su Ω di grado al più N , con $d = \dim(\mathbb{P}_N^n(\Omega))$. Allora esistono $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_M \in \Omega$ e $w_1, \dots, w_M \in \mathbb{R}^+$, con $M \leq d$, tali che:

$$\int_{\Omega} p(P) d\mu = \sum_{k=1}^M w_k p(\mathbf{x}_k) \quad (3.1)$$

per ogni $p \in \mathbb{P}_N^n(\Omega)$.

Teorema 3.2. (Teorema di Wilhelmsen)

Sia $F = \{f_j\}_{j=1}^d$ un sistema di funzioni continue, a valori reali, linearmente indipendenti e definite su un dominio compatto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tale che F soddisfi la condizione di Krein (i.e. esiste almeno una $f \in \{f_j\}$ che non si annulla in Ω). Sia inoltre L un operatore lineare positivo (i.e. $L \geq 0$ per ogni $f \geq 0$). Se $\{P_i\}_{i=1}^{+\infty}$ è ovunque un sottoinsieme denso di Ω , allora per \mathcal{I} sufficientemente grande, l'insieme $X = \{P_i\}_{i=1}^{\mathcal{I}}$ è un insieme di Tchakaloff, i.e.:

$$Lf = \sum_{k=1}^M w_k f(\mathbf{x}_k) \quad \forall f \in F \quad (3.2)$$

dove $w_k > 0 \forall k$ e $\{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^M \subset X \subset \Omega$, con $M = \text{card}(\{\mathbf{x}_k\}) \leq d = \dim(\mathbb{P}_N^n(\Omega))$.

È possibile adattare il teorema di Wilhelmsen al caso della quadratura algebrica impostando $Lf = \int_{\Omega} p(P) d\mu$ (dove μ è una misura positiva sul dominio compatto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$) e $F = \mathbb{P}_N^n(\Omega)$. Una formula ottenuta in questo modo prende il nome di “*Tchakaloff-like algebraic cubature rule*”.

Per poter applicare i teoremi appena citati al fine di estrarre i nodi e i pesi di quadratura, è necessario disporre di un sottoinsieme denso $X = \{P_i\}_{i=1}^T \subset \Omega$. Con lo scopo di ottenere un tale sottoinsieme, nel seguente paragrafo verrà descritto un algoritmo di tipo *in-domain* per un’ampia classe di poligoni curvilinei (contenente i domini NURBS).

3.1.1 In-domain routine

L’algoritmo che verrà delineato in questo paragrafo ha la funzione di determinare se un dato punto $P = (P_x, P_y) \in \mathbb{R}^2$ appartiene o meno a un dominio di Jordan $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ per il quale si richiede che:

1. il bordo $\partial\Omega$ sia descritto dalle equazioni parametriche $x = \tilde{x}(t)$ e $y = \tilde{y}(t)$, $t \in [a, b]$, tali che $\tilde{x}, \tilde{y} \in C([a, b])$, $\tilde{x}(a) = \tilde{x}(b)$ e $\tilde{y}(a) = \tilde{y}(b)$;
2. esistano le partizioni $\{I^{(s)}\}_{s=1}^L$ di $[a, b]$, e $\{I_m^{(s)}\}_{m=1}^{l_s}$ di ogni $I^{(s)} \equiv [t^{(s)}, t^{(s+1)}]$, tali che le restrizioni di \tilde{x} e \tilde{y} su ciascun intervallo chiuso $I^{(s)}$ siano splines razionali su ciascuno dei subintervalli $\{I_m^{(s)}\}_{m=1}^{l_s}$.

Si determinano quindi:

1. le equazioni parametriche

$$\tilde{x}(t) = \frac{u_{s,1}(t)}{v_{s,1}(t)}, \quad \tilde{y}(t) = \frac{u_{s,2}(t)}{v_{s,2}(t)} \quad t \in I^{(s)}$$

dove $u_{s,1}, u_{s,2}, v_{s,1}, v_{s,2}$ sono splines su $I^{(s)}$ aventi grado, rispettivamente, $\eta_{s,1}, \eta_{s,2}, \delta_{s,1}, \delta_{s,2}$ (si osserva che, siccome $\tilde{x}, \tilde{y} \in C([a, b])$, i denominatori $v_{s,1}, v_{s,2}$ sono ovunque non nulli in $I^{(s)}$ per ogni $1 \leq s \leq L$);

2. le partizioni $I^{(s)}$ e $I_m^{(s)}$:

dati i vertici $V_1, \dots, V_L \in \mathbb{R}^2$ del dominio di integrazione Ω , si ha $\partial\Omega := \cup_{s=1}^L V_s \frown V_{s+1}$ e ogni arco $V_s \frown V_{s+1}$ è percorso da una spline parametrica di grado δ_s che interpola una sottosequenza ordinata di punti $V_s = P_{1,s}, \dots, P_{l_s-1,s}, P_{l_s,s} = V_{s+1}$ determinando così ogni $I_m^{(s)}$ e quindi ogni $I^{(s)}$.

Per valutare se un dato punto $P \in \mathbb{R}^2$ sia interno o esterno alla frontiera $\partial\Omega$ del dominio, è utile richiamare la classica strategia *in-domain* basata sul seguente teorema.

Teorema 3.3. (Teorema della curva di Jordan)

Un punto $P \in \mathbb{R}^2$ appartiene a un dominio di Jordan $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ se e solo se, dato un punto $P^* \notin \Omega$, il segmento $\overline{P^*P}$ interseca il bordo $\partial\Omega$ un numero dispari $c(P)$ di volte.

Osservazione. Potrebbero presentarsi dei casi patologici nel calcolo del numero $c(P)$ di intersezioni con il poligono curvilineo: ad esempio se $\overline{P^*P}$ interseca un vertice o un punto critico o contiene un segmento di $\partial\Omega$. In particolare $S = (\tilde{x}(\gamma), \tilde{y}(\gamma))$ è un punto critico per $\partial\Omega$ se $\lim_{t \rightarrow \gamma^-} \tilde{y}'(t) \lim_{t \rightarrow \gamma^+} \tilde{y}'(t) < 0$.

In questi casi non può essere applicato direttamente il teorema di Jordan ed è perciò necessaria una strategia alternativa (che verrà descritta in seguito) per calcolare $c(P)$.

Si assume per un primo momento che $\overline{P^*P}$ non intersechi un vertice o un punto critico né contenga un segmento di $\partial\Omega$.

Sotto tale ipotesi si considerino \mathcal{R}^* il più piccolo rettangolo cartesiano (i.e. con i lati paralleli agli assi cartesiani) che contiene Ω e P^* il punto di $\partial\mathcal{R}$ avente la stessa ascissa P_x di $P = (P_x, P_y)$ e ordinata strettamente minore di P_y .

L'obiettivo è quindi quello di calcolare il numero $c(P)$ di volte che il segmento verticale $\overline{P^*P}$ interseca $\partial\Omega$.

- Si vuole innanzitutto coprire $\partial\Omega$ con l'unione di opportuni rettangoli \mathcal{B}_i in modo tale che ognuno racchiuda un tratto della frontiera $\partial\Omega$ che non ha punti critici e che è parametrizzata da due funzioni razionali $\tilde{x}(t)$ e $\tilde{y}(t)$.

Andremo a determinare numericamente tali rettangoli.

\tilde{x} e \tilde{y} sono splines razionali in ogni $I^{(s)}$, pertanto esistono dei sottointervalli $I_m^{(s)} = [t_m^{(s)}, t_{m+1}^{(s)}] \subseteq I^{(s)}$, $1 \leq s \leq L$, $1 \leq m \leq l_s - 1$, per i quali le restrizioni di \tilde{x} e \tilde{y} a tali $I_m^{(s)}$ sono funzioni razionali con denominatore ovunque non nullo in $I^{(s)}$:

$$\tilde{x}(t) = \frac{u_{s,m,1}(t)}{v_{s,m,1}(t)}, \quad \tilde{y}(t) = \frac{u_{s,m,2}(t)}{v_{s,m,2}(t)} \quad t \in I_m^{(s)} \quad (3.3)$$

dove $u_{s,m,1}, u_{s,m,2}, v_{s,m,1}, v_{s,m,2}$ sono polinomi su $I_m^{(s)}$ aventi grado, rispettivamente, $\eta_{s,1}, \eta_{s,2}, \delta_{s,1}, \delta_{s,2}$ (si osserva che i gradi non dipendono da m ma solo dal grado delle splines $u_{s,1}, u_{s,2}, v_{s,1}, v_{s,2}$ in $I^{(s)}$).

Se \tilde{x}' cambia segno in $(t_m^{(s)}, t_{m+1}^{(s)})$, si definisce $\mathcal{N}_m^{(s)} := \{t_i^{(m,s)}\}_{i=1}^{\nu_{m,s}}$ l'insieme dei punti $t_i^{(m,s)} \in (t_m^{(s)}, t_{m+1}^{(s)})$ tali che $\tilde{x}'(t_i^{(m,s)}) = 0$, altrimenti $\mathcal{N}_m^{(s)} := \emptyset$. Si ha:

$$\tilde{x}'(t) = \frac{u'_{s,m,1}(t)v_{s,m,1}(t) - u_{s,m,1}(t)v'_{s,m,1}(t)}{v_{s,m,1}^2(t)} \quad t \in I_m^{(s)}$$

con $v_{s,m,1}^2(t) \neq 0 \forall t \in I_m^{(s)}$ e quindi $\tilde{x}'(t) = 0$ se e solo se

$$u'_{s,m,1}(t)v_{s,m,1}(t) - u_{s,m,1}(t)v'_{s,m,1}(t) = 0$$

di conseguenza la determinazione di $\mathcal{N}_m^{(s)}$ richiede la soluzione di una equazione polinomiale di grado $\eta_{s,1} + \delta_{s,1} - 1$.

Sia ora $\mathcal{T}^{(m,s)} := \{t_m^{(s)}, t_{m+1}^{(s)}\} \cup \mathcal{N}_m^{(s)}$ supponendo che i suoi elementi $\tau_i^{(m,s)}$ siano in ordine crescente.

Definiamo ora i rettangoli *monotoni* $\mathcal{B}_i^{(m,s)}$:

$$\mathcal{B}_i^{(m,s)} := \left[\min_{t \in I_i^{(m,s)}} \tilde{x}(t), \max_{t \in I_i^{(m,s)}} \tilde{x}(t) \right] \times \left[\min_{t \in I_i^{(m,s)}} \tilde{y}(t), \max_{t \in I_i^{(m,s)}} \tilde{y}(t) \right] \quad (3.4)$$

dove $I_i^{(m,s)} := [\tau_i^{(m,s)}, \tau_{i+1}^{(m,s)}]$.

Si osservi che se $\mathcal{N}_m^{(s)} := \emptyset$, allora è presente un solo rettangolo monotono $\mathcal{B}_1^{(m,s)}$. Inoltre, poiché \tilde{y} ristretta a $[\tau_i^{(m,s)}, \tau_{i+1}^{(m,s)}]$ è una funzione razionale, le valutazioni di minimo e massimo per $\tilde{y}(t)$ nella formula (3.4) possono essere effettuate studiando gli zeri della derivata prima \tilde{y}' in $[\tau_i^{(m,s)}, \tau_{i+1}^{(m,s)}]$ e la sua valutazione in $\tau_i^{(m,s)}$ e in $\tau_{i+1}^{(m,s)}$.

Alla fine di questa procedura sono stati determinati gli $I_i^{(m,s)}$ tali che:

- le restrizioni di \tilde{x} e \tilde{y} a ogni $I_i^{(m,s)} \subseteq [a, b]$ sono funzioni razionali;
 - \tilde{x} è una funzione monotona e di conseguenza all'interno di ogni rettangolo $\mathcal{B}_i^{(m,s)}$ non ci sono punti critici di $\partial\Omega$.
- Una volta determinato $\mathcal{B} := \{\mathcal{B}_i^{(m,s)}\}$, si vuole trovare l'insieme $\mathcal{B}(P)$ di tutti i rettangoli monotoni \mathcal{B}_i tali che $\overline{P^*P} \cap \mathcal{B}_i \neq \emptyset$ e che potrebbero contribuire al calcolo di $c(P)$:

$$\mathcal{B}(P) = \{B = [\alpha_1, \beta_1] \times [\alpha_2, \beta_2] \in \mathcal{B} : P_x \in [\alpha_1, \beta_1], P_y \geq \alpha_2\}$$

Considerando un rettangolo monotono $\mathcal{B}_i = [\alpha_1^{(i)}, \beta_1^{(i)}] \times [\alpha_2^{(i)}, \beta_2^{(i)}] \in \mathcal{B}(P)$, se $P_y \geq \beta_2^{(i)}$ allora $P \notin \mathcal{B}_i$ e necessariamente $\overline{P^*P}$ interseca il bordo $\partial\Omega$ una volta in \mathcal{B}_i e sotto P a causa della monotonia di \tilde{x} in \mathcal{B}_i , altrimenti se $\alpha_2^{(i)} \leq P_y \leq \beta_2^{(i)}$ allora $P \in \mathcal{B}_i$.

Per ipotesi $\overline{P^*P}$ non interseca un vertice o un punto critico né contiene un segmento verticale di $\partial\Omega$, inoltre \mathcal{B}_i contiene una parte di $\partial\Omega$ descritta parametricamente da due funzioni razionali $\tilde{x}|_{\mathcal{B}_i}(t)$ e $\tilde{y}|_{\mathcal{B}_i}(t)$, $t \in I_i|_{\mathcal{B}_i} \subseteq [a, b]$, in particolare $\tilde{x}|_{\mathcal{B}_i}$ è monotona e tale che $P_x \in \tilde{x}|_{\mathcal{B}_i}(I_i|_{\mathcal{B}_i})$. Pertanto esiste un'unica soluzione all'equazione polinomiale $\tilde{x}|_{\mathcal{B}_i}(I_i|_{\mathcal{B}_i}) = P_x$: essendo

$\tilde{x}|_{\mathcal{B}_i}(t) = \frac{u(t)}{v(t)}$, per opportuni polinomi u e v , sia t^* l'unica soluzione in $I_i|_{\mathcal{B}_i}$ dell'equazione $u(t) - P_x v(t) = 0$.

Di conseguenza:

- se $\tilde{y}(t^*) < P_y$ allora il segmento $\overline{P^*P}$ interseca il bordo $\partial\Omega$ una volta nel riquadro monotono \mathcal{B}_i sotto a P ;
- se $\tilde{y}(t^*) > P_y$ allora il segmento $\overline{P^*P}$ non interseca il bordo $\partial\Omega$;
- se $\tilde{y}(t^*) = P_y$ allora $P \in \partial\Omega$.

In questo modo è dunque possibile contare il numero $c(P)$ di intersezioni tra $\overline{P^*P}$ e $\partial\Omega$ per poi stabilire, applicando il Teorema di Jordan 3.3, se P appartiene o meno al poligono curvilineo Ω .

Rimane infine da determinare se P appartiene o meno al dominio Ω nei casi patologici in cui $\overline{P^*P}$ interseca un vertice o un punto critico o contiene un segmento verticale di $\partial\Omega$. A questo scopo si ricorre al *winding algorithm*, ovvero una procedura che calcola, attraverso una *Gauss-Legendre shifted rule* di sufficiente grado di precisione, il numero $wind(P, \tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathbb{Z}$:

$$wind(P, \tilde{x}, \tilde{y}) := \frac{1}{b-a} \int_a^b \frac{\tilde{y}'(t)(\tilde{x}(t) - P_x) - \tilde{x}'(t)(\tilde{y}(t) - P_y)}{(\tilde{x}(t) - P_x)^2 + (\tilde{y}(t) - P_y)^2} dt$$

Se $wind(P, \tilde{x}, \tilde{y})$ è dispari allora il punto P appartiene a Ω , altrimenti $P \notin \Omega$.

3.1.2 Determinazione di nodi e pesi di quadratura

Sotto le ipotesi dei Teoremi 3.1 e 3.2, adattati al caso in cui $n = 2$ e quindi $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ e $d = \dim(\mathbb{P}_N^2) = (N+1)(N+2)/2$, supponendo inoltre di disporre di una opportuna base polinomiale $\{\varphi_1, \dots, \varphi_d\}$ di $\mathbb{P}_N^2(\Omega)$ e di un insieme di Tchakaloff $X = \{P_i\}_{i=1}^T \subset \Omega$ (ottenuto con la *in-domain routine*), si vogliono estrarre gli $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_M \in \Omega$ e i $w_1, \dots, w_M \in \mathbb{R}^+$, la cui esistenza è garantita dal Teorema di Tchakaloff 3.1 e che saranno rispettivamente i nodi e i pesi di quadratura.

Scegliamo come base di $\mathbb{P}_N^2(\Omega)$ la base triangolare di Chebyshev $\{\varphi_j\}_{j=1}^d$:

$$\varphi_j(x, y) = T_{h_1}(\alpha_1(x)) \cdot T_{h_2}(\alpha_2(y)) \quad 0 \leq h_1 + h_2 \leq N \quad (3.5)$$

dove:

- $T_h(\cdot) = \cos(h \arccos(\cdot))$ è il polinomio di Chebyshev di grado h ;

- $(x, y) \in \mathcal{R}^* = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ che corrisponde al più piccolo rettangolo cartesiano che contiene Ω , facilmente determinabile una volta che si hanno a disposizione tutti i rettangoli monotoni \mathcal{B}_i dalla *in-domain routine*;
- $\alpha_1(x) = \frac{2x-b_1-a_1}{b_1-a_1}$, $x \in [a_1, b_1]$, e $\alpha_2(y) = \frac{2y-b_2-a_2}{b_2-a_2}$, $y \in [a_2, b_2]$.

Si definisca il vettore dei momenti $\gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_d\}$, dove:

$$\gamma_j = \int_{\Omega} \varphi_j(x, y) dx dy \quad 1 \leq j \leq d \quad (3.6)$$

e per il Teorema di Gauss-Green:

$$\gamma_j = \int_{\Omega} \varphi_j(x, y) dx dy = \oint_{\partial\Omega} \Phi_j(x, y) dy$$

con

$$\begin{aligned} \Phi_j(x, y) &= \int \varphi_j(x, y) dx = \int T_{h_1}(\alpha_1(x)) \cdot T_{h_2}(\alpha_2(y)) dx = \\ &= T_{h_2}(\alpha_2(y)) \int T_{h_1}(\alpha_1(x)) dx \end{aligned}$$

Siano fissate dalla *in-domain routine*, rispettivamente

1. la parametrizzazione $\partial\Omega = \{(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)), t \in [a, b]\}$;
2. la partizione $I_m^{(s)} = [t_m^{(s)}, t_{m+1}^{(s)}]$ di $[a, b]$, $1 \leq s \leq L$, $1 \leq m \leq l_s - 1$, tali che le restrizioni di $\tilde{x}, \tilde{y} \in C([a, b])$ a ogni $I_m^{(s)}$ siano funzioni razionali, come in (3.3).

Se $P_{s,m} := (\tilde{x}(t_m^{(s)}), \tilde{y}(t_m^{(s)})) \in \partial\Omega$ è un generico punto sulla frontiera del poligono curvilineo Ω , indicando con $P_{s,m} \frown P_{s,m+1}$ l'arco di $\partial\Omega$ che collega $P_{s,m}$ a $P_{s,m+1}$, si ottiene:

$$\begin{aligned} \gamma_j &= \oint_{\partial\Omega} \Phi_j(x, y) dy = \sum_{s,m} \int_{P_{s,m} \frown P_{s,m+1}} \Phi_j(x, y) dy = \\ &= \sum_{s,m} \int_{t_m^{(s)}}^{t_{m+1}^{(s)}} \Phi_j(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) \tilde{y}'(t) dt \end{aligned} \quad (3.7)$$

Osservazione. Il calcolo numerico degli integrali in (3.7) richiede accurata attenzione. Se, in particolare, \tilde{x} e \tilde{y} fossero entrambi polinomi di grado δ_s in $[t_m^{(s)}, t_{m+1}^{(s)}]$, Φ_j sarebbe un polinomio di grado totale $N + 1$ e quindi ogni integranda nell'ultima

sommatoria di (3.7) sarebbe un polinomio di grado $(N+1)\delta_s + \delta_s - 1 = (N+2)\delta_s - 1$. Di conseguenza gli integrali potrebbero essere calcolati numericamente con esattezza mediante la Gauss-Legendre shifted rule con $\frac{(N+2)\delta_s}{2}$ punti. Tuttavia in questo lavoro è stato preso in considerazione il caso più generale in cui \tilde{x} e \tilde{y} sono funzioni razionali in $[t_m^{(s)}, t_{m+1}^{(s)}]$, pertanto il calcolo degli integrali in (3.7) richiede una formula di Gauss-Legendre di ordine opportunamente alto, oppure delle specifiche routine come la MATLAB built-in routine *integral*.

Il prossimo passo è quello di costruire l'insieme di Tchakaloff $X = \{P_i\}_{i=1}^{\mathcal{I}} \subset \Omega$ facendo uso della *in-domain routine*.

Sia $\mathcal{P}_0 = \emptyset$. Si introduce una sequenza di griglie tensoriali \mathcal{G}_r su $\mathcal{R}^* = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ (il più piccolo rettangolo cartesiano che contiene Ω), sempre più compatte all'aumentare di r . All' r -esima iterazione si testa, per mezzo della *in-domain routine*, se i punti dell'insieme $\mathcal{P}_r = \mathcal{P}_{r-1} \cup (\mathcal{G}_r \cap \Omega)$, appartengono o meno al dominio di integrazione Ω . Si osserva che, per il Teorema di Wilhelmsen 3.2, l'insieme \mathcal{P}_r diventa sufficientemente denso dopo un numero finito di iterazioni. Sia pertanto $X = \{P_i\}_{i=1}^{\mathcal{I}}$ l'insieme così ottenuto.

Si procede costruendo la matrice di Vandermonde:

$$V = V_N(X) = (\varphi_j(P_i))_{i,j} \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times d} \quad (3.8)$$

e ottenendo così un sistema sottodeterminato $d \times \mathcal{I}$:

$$V^T u = \gamma \quad (3.9)$$

che ha una soluzione sparsa non negativa u .

Per mezzo dell'algorithm iterativo di Lawson-Hanson, che cerca automaticamente una soluzione sparsa non negativa al problema dei minimi quadrati:

$$\min_{u \geq 0} \|V^T u - \gamma\|_2$$

si determina il vettore $u^{(l)}$, soluzione di (3.9), Dagli indici dei componenti non nulli di $u^{(l)}$, che sono al più $d = \dim(\mathbb{P}_N^2) = (N+1)(N+2)/2$, si determinano i pesi $\{w_k^{(l)}\}_{k=1}^{M_l} = \{u_k^{(l)} > 0, 1 \leq k \leq M_l\}$ e i nodi $\{(\mathbf{x}_k^{(l)}, \mathbf{y}_k^{(l)})\}_{k=1}^{M_l} \subset X \subset \Omega$ di quadratura.

Infine si controlla che la regola così ottenuta sia tale che $\gamma^{(l)} = \{\gamma_1^{(l)}, \dots, \gamma_d^{(l)}\}$, dove:

$$\gamma_j^{(l)} = \sum_{k=1}^{M_l} w_k^{(l)} \varphi_j(\mathbf{x}_k^{(l)}, \mathbf{y}_k^{(l)})$$

approssimi bene il vettore dei momenti $\gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_d\}$, ovvero si testa che:

$$\|\gamma^{(l)} - \gamma\|_2 \leq \varepsilon \quad (3.10)$$

dove ε è una tolleranza fissata dall'utente. Se (3.10) non è soddisfatta, si itera la procedura fino al verificarsi di (3.10) o finché non si raggiunge il numero massimo di iterazioni (nel qual caso ritornerà un messaggio di errore).

Si ottiene pertanto la formula di quadratura a pesi positivi e nodi interni cercata tale che:

$$\int_{\Omega} p(x, y) dx dy = \sum_{k=1}^M w_k p(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k) \quad M \leq d \quad (3.11)$$

per ogni polinomio bivariato $p \in \mathbb{P}_N^2$.

3.2 Base triangolare ed ortonormale

Essendo Ω un sottoinsieme chiuso e limitato di \mathbb{R}^2 il cui bordo è definito a tratti da curve NURBS, non si conosce esplicitamente a livello teorico una base polinomiale triangolare e ortonormale di $\mathbb{P}_N^2(\Omega)$. È pertanto necessario calcolarla numericamente.

Sia data una base triangolare $\{\varphi_1, \dots, \varphi_d\}$ di $\mathbb{P}_N^2(\Omega)$, dove $d = \dim(\mathbb{P}_N^2(\Omega)) = (N+1)(N+2)/2$. Consideriamo in particolare la base di Chebyshev del più piccolo rettangolo cartesiano $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ contenente Ω .

Si definisca la matrice di Vandermonde calcolata ai nodi della formula di quadratura:

$$V_{\varphi} = (\varphi_j(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k))_{k,j} \in \mathbb{R}^{M \times d} \quad (3.12)$$

V_{φ} ha rango massimo.

Sia ora $\sqrt{W} \in \mathbb{R}^{M \times M}$ la matrice diagonale le cui entrate sono $\sqrt{W}_{k,k} = \sqrt{w_k}$, $1 \leq k \leq M$.

È possibile applicare la fattorizzazione QR :

$$\sqrt{W}V_{\varphi} = QR$$

dove $Q \in \mathbb{R}^{M \times d}$ è una matrice ortogonale e $R \in \mathbb{R}^{d \times d}$ è una matrice triangolare superiore non singolare.

Questo implica che la base polinomiale $\{p_1, \dots, p_d\} := \{\varphi_1, \dots, \varphi_d\}R^{-1}$ è ortonormale rispetto al prodotto interno discreto $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$ (1.6).

Inoltre, poiché R^{-1} è una matrice triangolare superiore non singolare, allora la base $\{p_1, \dots, p_d\}$ è anche triangolare e $\deg(p_j) = \deg(\varphi_j)$ per ogni $1 \leq j \leq d$.

In conclusione $\{p_1, \dots, p_d\} = \{\varphi_1, \dots, \varphi_d\}R^{-1}$ è la base triangolare ed ortonormale cercata.

Capitolo 4

Risultati numerici

In questo ultimo capitolo verifichiamo numericamente quanto discusso finora.

Tutti gli esperimenti di cui sono riportati di seguito i risultati sono stati eseguiti con Matlab (versione “*Matlab R2023a*”). I codici Matlab utilizzati, di natura *open-source*, sono resi disponibili su piattaforma *GITHUB* [4].

Per ogni dominio Ω , considereremo inizialmente $p_N \in \mathbb{P}_N(\Omega)$ con N grado dell’iperinterpolante, verificando in norma 2 e ∞ l’errore compiuto. In questo caso ci aspettiamo che l’errore sia particolarmente piccolo nel caso dell’iperinterpolazione classica visto che \mathcal{L}_N è una proiezione in $\mathbb{P}_N(\Omega)$.

D’altro canto tale risultato non sarà garantito per l’iperinterpolazione filtrata \mathcal{F}_N , a meno che il polinomio considerato non appartenga a $\mathbb{P}_{\lfloor N/2 \rfloor}$. Mostreremo come in questo caso sia verificata numericamente la proprietà di proiezione sopra citata, ovvero che $\mathcal{F}_N(p_{\lfloor N/2 \rfloor}) = p_{\lfloor N/2 \rfloor}$.

Successivamente, su ogni dominio, approssimeremo due funzioni di diversa regolarità. Qualora i dati disponibili siano soggetti a rumore, mostreremo i vantaggi ottenuti da \mathcal{F}_N .

4.1 Un dominio NURBS convesso

Quale primo dominio Ω_1 , consideriamo una regione convessa del piano, la cui frontiera è rappresentata a tratti da NURBS (si veda la Figura 4.1).

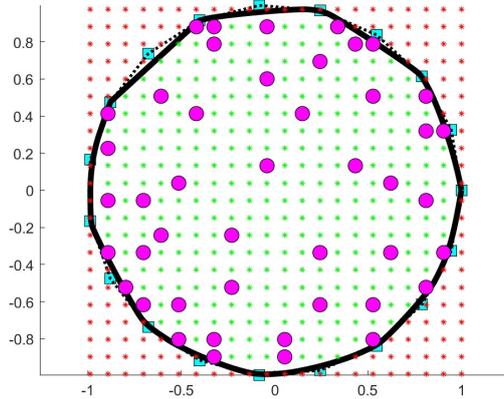


Figura 4.1: Il dominio convesso Ω_1 considerato negli esperimenti di questo paragrafo e un set di nodi di cubatura su tale dominio, propri di una formula avente grado di precisione 8. In azzurro: i punti di controllo per la curva NURBS, in verde: i punti interni al dominio (determinati con la *in-domain routine*), in rosso: i punti esterni al dominio, in magenta: i nodi di quadratura.

Si andrà ad applicare l'iperinterpolazione classica e l'iperinterpolazione filtrata al dominio NURBS sopra riportato, approssimando all'interno di tale dominio, con entrambi i metodi, diverse funzioni soggette o meno a rumore, e mostrandone gli errori di approssimazione rispetto alla norma 2 e ∞ .

Al fine di verificare l'esattezza dei metodi \mathcal{L}_N e \mathcal{F}_N e quindi i teoremi di proiezione 1.3 e 2.1 dimostrati a livello teorico nei capitoli precedenti, i primi esperimenti consisteranno nell'approssimare funzioni non soggette a rumore scelte all'interno della famiglia dei polinomi prima di grado N , per $N = 1, \dots, 10$, e successivamente di grado $\lfloor N/2 \rfloor$, per $N = 1, \dots, 20$.

4.1.1 Approssimazione di polinomi di grado N e $\lfloor N/2 \rfloor$

Quale primo esempio consideriamo $p_N(x, y) = (0.4474 + 0.8275x + 0.9318y)^N$, e variamo N da 1 a 10.

La stima dell'errore in norma ∞ è ottenuta dal massimo errore assoluto compiuto in un set fitto di nodi test appartenenti al dominio Ω , mentre l'errore in norma 2 corrisponde negli esempi a:

$$\sqrt{\langle p_N - \mathcal{L}_N, p_N - \mathcal{L}_N \rangle_M} := \sqrt{\sum_{k=1}^M w_k (p_N(x_k, y_k) - \mathcal{L}_N(x_k, y_k))^2} \approx \|p_N - \mathcal{L}_N\|_2,$$

N	Iperinterpolazione		Iperinterpolazione filtrata	
	$\ \cdot\ _\infty$	$\ \cdot\ _2$	$\ \cdot\ _\infty$	$\ \cdot\ _2$
1	4.4409e-16	2.2845e-16	1.2315	1.0612
2	1.0547e-15	6.6431e-16	1.1466	0.6460
3	2.6645e-15	1.1076e-15	1.2862	0.4499
4	4.4409e-15	1.6489e-15	1.5102	0.4261
5	1.2434e-14	3.2854e-15	1.8301	0.4016
6	1.4241e-14	6.3043e-15	2.2295	0.4233
7	5.3291e-14	1.1887e-14	2.7415	0.4469
8	1.3782e-13	2.9940e-14	3.3592	0.4906
9	2.5378e-13	6.4800e-14	4.1599	0.5424
10	2.1365e-13	8.9553e-14	5.1403	0.6185

Tabella 4.1: Approssimazione del polinomio $p_N(x, y) = (0.4474 + 0.8275x + 0.9318y)^N$ mediante gli operatori di iperinterpolazione $\mathcal{L}_N, \mathcal{F}_N$. I campionamenti della funzione non sono affetti da rumore.

e

$$\sqrt{\langle p_N - \mathcal{F}_N, p_N - \mathcal{F}_N \rangle_M} := \sqrt{\sum_{k=1}^M w_k (p_N(x_k, y_k) - \mathcal{F}_N(x_k, y_k))^2} \approx \|p_N - \mathcal{F}_N\|_2.$$

dove i nodi $\{(x_k, y_k)\}_k$ e i pesi $\{w_k\}_k$ sono quelli di una formula di quadratura con grado di precisione $M = 30$, che definisce il prodotto scalare discreto

$$\langle f, g \rangle_M := \sum_{k=1}^M w_k f(x_k, y_k) \cdot g(x_k, y_k).$$

Come precedentemente anticipato, i risultati ottenuti, illustrati nella Tabella 4.1, mostrano che l'iperinterpolazione classica $\mathcal{L}_N f$ è esatta se f è un polinomio di grado $\leq N$, infatti gli errori sono trascurabili in quanto hanno un ordine di grandezza prossimo alla precisione di macchina. Questo risultato verifica numericamente il Teorema di proiezione 1.3. Al contrario, nel caso dell'iperinterpolazione filtrata l'approssimazione non è esatta, come si osserva dagli errori in norma che sono significativamente maggiori.

Utilizzando la notazione precedente, nella Tabella 4.2, riportiamo i risultati ottenuti dall'approssimazione di un polinomio bivariato di grado $\lfloor N/2 \rfloor$, al fine di verificare che effettivamente $\mathcal{F}_N(p_{\lfloor N/2 \rfloor}) \approx p_{\lfloor N/2 \rfloor}$.

$\lfloor N/2 \rfloor$	Iperinterpolazione		Iperinterpolazione filtrata	
	$\ \cdot\ _\infty$	$\ \cdot\ _2$	$\ \cdot\ _\infty$	$\ \cdot\ _2$
1	4.4409e-16	3.6168e-16	4.4409e-16	3.3579e-16
2	8.8818e-16	3.4973e-16	8.8818e-16	3.2208e-16
3	1.5543e-15	4.3084e-16	1.1102e-15	3.5138e-16
4	2.5375e-15	8.3896e-16	1.9984e-15	7.2332e-16
5	4.4959e-15	7.3814e-16	3.5527e-15	6.3928e-16
6	7.5495e-15	1.3354e-15	5.7732e-15	1.2141e-15
7	6.6613e-15	1.4974e-15	7.9936e-15	1.4597e-15
8	1.2954e-14	1.7804e-15	8.8818e-15	1.6428e-15
9	1.1546e-14	2.6877e-15	1.1546e-14	2.5685e-15
10	1.9540e-14	4.1514e-15	1.5987e-14	3.8307e-15

Tabella 4.2: Approssimazione del polinomio $p_{\lfloor N/2 \rfloor}(x, y) = (0.6623 + 0.4254x + 0.4195y)^{\lfloor N/2 \rfloor}$ mediante gli operatori di iperinterpolazione \mathcal{L}_N , \mathcal{F}_N . I campionamenti della funzione non sono affetti da rumore.

Gli esperimenti quindi mostrano che sia l'iperinterpolazione classica $\mathcal{L}_N f$ che la variante filtrata $\mathcal{F}_N f$ sono esatte se f è un polinomio di grado $\leq \lfloor N/2 \rfloor$, confermando anche il Teorema di proiezione 2.1.

4.1.2 Approssimazione di funzioni bivariate in assenza di rumore

Avendo verificato l'esattezza dei due metodi negli esperimenti precedenti, si vuole procedere, sempre in assenza di rumore, approssimando questa volta la funzione:

$$g_1(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}, \quad g_1 \in C^\infty(\Omega_1).$$

Il dominio considerato è lo stesso dei casi precedenti e i risultati sono presenti nella Tabella 4.3.

Di seguito approssimiamo numericamente una funzione meno regolare della precedente:

$$g_2(x, y) = \sqrt{((x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2)^3}, \quad g_2 \in C^1(\Omega_1),$$

il cui punto di irregolarità ha coordinate $(0.5, 0.5) \in \Omega_1$. Esponiamo gli errori di approssimazione nella Tabella 4.4.

L'analisi dei risultati ottenuti da tali due esperimenti numerici evidenzia quanto segue.

N	Iperinterpolazione		Iperinterpolazione filtrata	
	$\ \cdot\ _\infty$	$\ \cdot\ _2$	$\ \cdot\ _\infty$	$\ \cdot\ _2$
1	5.7423e-01	4.1132e-01	3.5347e-01	3.0748e-01
2	8.8694e-02	4.6249e-02	3.5242e-01	3.0746e-01
3	7.1093e-02	3.9539e-02	1.2835e-01	8.5785e-02
4	6.5347e-03	3.1963e-03	5.2154e-02	3.7883e-02
5	7.2634e-03	3.1186e-03	3.5792e-02	24912e-02
6	6.5918e-04	1.9695e-04	1.6626e-02	9.9306e-03
7	5.4024e-04	1.9056e-04	6.2923e-03	3.1301e-03
8	3.0422e-05	9.0904e-06	2.7738e-03	1.5531e-03
9	3.5988e-05	8.7048e-06	1.3979e-03	7.8862e-04
10	2.0184e-06	3.6632e-07	6.3927e-04	3.1945e-05

Tabella 4.3: Approssimazione della funzione $g_1(x, y) = e^{-(x^2+y^2)} \in C^\infty(\Omega_1)$ mediante gli operatori di iperinterpolazione $\mathcal{L}_N, \mathcal{F}_N$. I campionamenti della funzione non sono affetti da rumore.

N	Iperinterpolazione		Iperinterpolazione filtrata	
	$\ \cdot\ _\infty$	$\ \cdot\ _2$	$\ \cdot\ _\infty$	$\ \cdot\ _2$
1	1.6023	1.2408	3.6775	2.0760
2	3.9537e-01	2.1325e-01	1.5533	9.2652e-01
3	9.2778e-02	3.7917e-02	6.0711e-01	3.0220e-01
4	2.7826e-02	1.0627e-02	1.4687e-01	1.0415e-01
5	1.0386e-02	4.2817e-03	4.7807e-02	3.1401e-02
6	6.6161e-03	2.1498e-03	2.9832e-02	1.2065e-02
7	2.5577e-03	1.1007e-03	1.0332e-02	5.3673e-03
8	1.8376e-03	6.7037e-04	5.9236e-03	2.8727e-03
9	1.0082e-03	3.6815e-04	3.2681e-03	1.6970e-03
10	9.6968e-04	2.7112e-04	2.2869e-03	1.0594e-03

Tabella 4.4: Approssimazione della funzione $g_2(x, y) = ((x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2)^{(3/2)} \in C^1(\Omega_1)$, con $(0.5, 0.5) \in \Omega_1$, mediante gli operatori di iperinterpolazione $\mathcal{L}_N, \mathcal{F}_N$. I campionamenti della funzione non sono affetti da rumore.

1. L'iperinterpolazione classica fornisce un'approssimazione più accurata rispetto all'iperinterpolazione filtrata nel caso in cui la funzione da approssimare non sia soggetta a rumore.
2. L'errore dovuto a \mathcal{L}_N decresce all'aumentare del grado N dell'iperinterpolante per entrambe le funzioni approssimate. Anche le norme derivanti da \mathcal{F}_N , seppur maggiori a parità di N , si comportano in modo analogo.
3. Gli errori, sia in norma ∞ che in norma 2, di approssimazione della seconda funzione g_2 sono maggiori rispetto a quelli della funzione esponenziale g_1 . Questo è dovuto alla presenza nel dominio di un punto di non regolarità $(x_0, y_0) \equiv (0.5, 0.5)$ di g_2 .

4.1.3 Approssimazione di funzioni bivariate soggette a rumore

A questo punto si vuole procedere introducendo del rumore alla valutazione, nei nodi di quadratura, delle funzioni da approssimare.

Andremo pertanto ad eseguire esperimenti numerici il cui scopo è quello di approssimare la funzione esponenziale già considerata in precedenza

$$g_1(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}, \quad g_1 \in C^\infty(\Omega_1).$$

sottofondendola a rumore. Nello specifico i campionamenti della funzione saranno soggetti a una perturbazione casuale la cui funzione di distribuzione coinciderà con quella di:

- una variabile aleatoria normale $N(0, \sigma^2)$ con media 0 e deviazione standard $\sigma = 0.5$, gli errori di approssimazione relativi a questo primo modello sono riportati nella Tabella 4.5;
- una variabile aleatoria uniforme $U(\alpha)$ avente valori random in $[-\alpha, \alpha]$ con probabilità 1/2, con $\alpha = 1.5$, nella Tabella 4.6 sono presenti i risultati inerenti a questo secondo esempio di rumore.

Dai dati ottenuti per entrambi i tipi di rumore, si può osservare come gli errori derivanti da \mathcal{F}_N (sia in norma ∞ che in norma 2) siano minori paragonati ai corrispettivi ricavati dall'iperinterpolazione classica. In particolare si ha il rapporto

$$\rho_{F/H} := \frac{\|\cdot\|_2^{(Filtered)}}{\|\cdot\|_2^{(Hyperint.)}} \approx 0.7 \quad (4.1)$$

che rimane costante al variare del grado N dell'iperinterpolante.

N	Iperinterpolazione		Iperinterpolazione filtrata		F/H
	$\ \cdot\ _\infty$	$\ \cdot\ _2$	$\ \cdot\ _\infty$	$\ \cdot\ _2$	$\rho_{F/H}$
1	1.1444	8.9643e-01	5.7161e-01	5.8183e-01	0.649
2	1.0538	6.4638e-01	7.2873e-01	5.4901e-01	0.849
3	0.9714	5.6201e-01	6.1585e-01	4.0395e-01	0.719
4	1.0842	5.8953e-01	6.0311e-01	4.0856e-01	0.693
5	1.1514	5.5951e-01	6.4526e-01	3.8846e-01	0.694
6	1.1529	5.6322e-01	6.4468e-01	3.7638e-01	0.668
7	1.2055	5.8603e-01	7.4184e-01	4.2730e-01	0.729
8	1.1482	5.8585e-01	6.9613e-01	3.9721e-01	0.678
9	1.3126	5.8647e-01	7.5352e-01	4.1058e-01	0.700
10	1.2298	5.5768e-01	7.3751e-01	3.8781e-01	0.695

Tabella 4.5: Approssimazione della funzione $g_1(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$ mediante gli operatori di iperinterpolazione $\mathcal{L}_N, \mathcal{F}_N$. I campionamenti della funzione sono soggetti a una perturbazione casuale la cui funzione di distribuzione coincide con quella di una variabile aleatoria normale $N(0, \sigma^2)$ con media 0 e deviazione standard $\sigma = 0.5$. Nell'ultima colonna: il rapporto $\rho_{F/H}$ tra le norme 2 rispettivamente dell'iperinterpolazione filtrata e classica.

Pertanto, in presenza di rumore non trascurabile sui campionamenti nei nodi di quadratura della funzione da approssimare, il metodo dell'iperinterpolazione filtrata ha fornito un'approssimazione migliore rispetto alla versione classica.

Potrebbe risultare interessante osservare gli errori di approssimazione al variare del rumore. A tal fine andremo ad eseguire due ulteriori esperimenti numerici mantenendo fissi la funzione da approssimare e il grado $N = 10$ dell'iperinterpolante, e mutando i parametri σ nel primo caso e α nel secondo. I relativi risultati sono riportati rispettivamente nelle Tabelle 4.7 e 4.8.

Come si poteva prevedere, entrambi gli errori in norma ∞ e in norma 2 crescono all'aumentare sia di σ che di α . Tuttavia, i risultati mostrano che il rapporto tra l'errore dato dall'iperinterpolazione filtrata e quello dovuto alla classica rimane invariato

$$\rho_{F/H} = \frac{\|\cdot\|_2^{(Filtered)}}{\|\cdot\|_2^{(Hyperint.)}} \approx 0.7.$$

N	Iperinterpolazione		Iperinterpolazione filtrata		F/H
	$\ \cdot\ _\infty$	$\ \cdot\ _2$	$\ \cdot\ _\infty$	$\ \cdot\ _2$	$\rho_{F/H}$
1	1.4299	1.2909	0.7760	8.8672e-01	0.687
2	1.6816	1.1576	0.9985	8.5268e-01	0.737
3	1.8289	1.0384	0.9898	6.7224e-01	0.647
4	1.8288	1.0563	1.0620	7.3168e-01	0.693
5	2.0026	1.0160	1.2215	7.3280e-01	0.721
6	2.1162	0.9888	1.2097	6.7916e-01	0.687
7	2.0860	1.0238	1.2424	7.1378e-01	0.697
8	2.0520	1.0078	1.1772	7.0067e-01	0.695
9	2.1698	1.0405	1.2236	7.1389e-01	0.686
10	2.1576	1.0041	1.3112	6.8927e-01	0.686

Tabella 4.6: Approssimazione della funzione $g_1(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$ mediante gli operatori di iperinterpolazione $\mathcal{L}_N, \mathcal{F}_N$. I campionamenti della funzione sono soggetti a una perturbazione casuale la cui funzione di distribuzione coincide con quella di una variabile aleatoria uniforme $U(\alpha)$ avente valori random in $[-\alpha, \alpha]$ con probabilità $1/2$, con $\alpha = 1.5$. Nell'ultima colonna: il rapporto $\rho_{F/H}$ tra le norme 2 rispettivamente dell'iperinterpolazione filtrata e classica.

σ	Iperinterpolazione		Iperinterpolazione filtrata		F/H
	$\ \cdot\ _\infty$	$\ \cdot\ _2$	$\ \cdot\ _\infty$	$\ \cdot\ _2$	$\rho_{F/H}$
0.25	6.1240e-01	2.8499e-01	3.5682e-01	1.9661e-01	0.689
0.50	1.2298	5.5768e-01	7.3751e-01	3.8781e-01	0.695
0.75	1.9909	8.7866e-01	1.1574	6.0952e-01	0.694
1.00	2.5189	1.1597	1.4386	8.1796e-01	0.705
1.25	3.1464	1.4578	1.8650	1.0141	0.695

Tabella 4.7: Approssimazione della funzione $g_1(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$ mediante gli operatori di iperinterpolazione $\mathcal{L}_N, \mathcal{F}_N$. Il grado dell'iperinterpolante è fisso: $N = 10$. I campionamenti della funzione sono soggetti a una perturbazione casuale la cui funzione di distribuzione coincide con quella di una variabile aleatoria normale $N(0, \sigma^2)$ con media 0 e deviazione standard σ . Nell'ultima colonna: il rapporto $\rho_{F/H}$ tra le norme 2 rispettivamente dell'iperinterpolazione filtrata e classica.

α	Iperinterpolazione		Iperinterpolazione filtrata		F/H
	$\ \cdot\ _\infty$	$\ \cdot\ _2$	$\ \cdot\ _\infty$	$\ \cdot\ _2$	$\rho_{F/H}$
1.0	1.4666	6.6555e-01	7.6793e-01	4.6188e-01	0.693
1.5	2.1576	1.0041	1.3112	6.8927e-01	0.686
2.0	2.9298	1.3184	1.5250	9.0506e-01	0.686
2.5	3.7359	1.6719	2.0090	1.1137	0.666
3.0	4.4085	1.9962	2.5996	1.4007	0.702

Tabella 4.8: Approssimazione della funzione $g_1(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$ mediante gli operatori di iperinterpolazione $\mathcal{L}_N, \mathcal{F}_N$. Il grado dell'iperinterpolante è fisso: $N = 10$. I campionamenti della funzione sono soggetti a una perturbazione casuale la cui funzione di distribuzione coincide con quella di una variabile aleatoria uniforme $U(\alpha)$ avente valori random in $[-\alpha, \alpha]$ con probabilità $1/2$. Nell'ultima colonna: il rapporto $\rho_{F/H}$ tra le norme 2 rispettivamente dell'iperinterpolazione filtrata e classica.

4.2 Un dominio NURBS concavo

Consideriamo ora una regione concava del piano, la cui frontiera è rappresentata a tratti da NURBS (si veda la Figura 4.2).

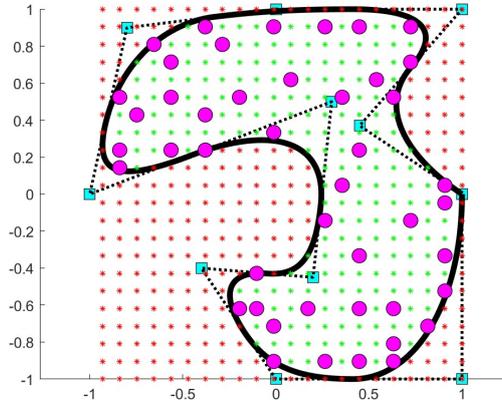


Figura 4.2: Il dominio concavo Ω_2 considerato negli esperimenti di questo paragrafo e un set di nodi di cubatura su tale dominio, propri di una formula avente grado di precisione 8. In azzurro: i punti di controllo per la curva NURBS, in verde: i punti interni al dominio (determinati con la *in-domain routine*), in rosso: i punti esterni al dominio, in magenta: i nodi di quadratura.

Andremo ad approssimare all'interno di questo dominio, tramite i due metodi

dell'iperinterpolazione classica e filtrata, alcune delle funzioni già campionate nel dominio convesso considerato in precedenza (variando $N = 2, 4, 6, 8, 10$), al fine di analizzare e confrontare gli errori ottenuti nei due diversi casi.

Riportiamo che, come nel caso del dominio convesso, si verificano numericamente le proprietà di proiezione. Quindi se

- $p_N \in \mathbb{P}_N$ allora $\mathcal{L}_N p_N \approx p_N$;
- $p_{\lfloor N/2 \rfloor} \in \mathbb{P}_{\lfloor N/2 \rfloor}$ allora $\mathcal{F}_N p_{\lfloor N/2 \rfloor} \approx p_{\lfloor N/2 \rfloor}$;

L'ordine di grandezza degli errori è del tutto simile a quello delle Tabelle 4.1 e 4.2.

4.2.1 Approssimazione di funzioni bivariate in assenza di rumore

Si vogliono approssimare numericamente, all'interno del dominio concavo 4.2, le funzioni:

$$g_1(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}, \quad g_1 \in C^\infty(\Omega_2)$$

e

$$g_2(x, y) = \sqrt{((x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2)^3}, \quad g_2 \in C^1(\Omega_2),$$

il cui punto di irregolarità ha coordinate $(0.5, 0.5) \in \Omega_2$. Riportiamo gli errori di approssimazione nelle Tabelle 4.9 e 4.10.

N	Iperinterpolazione		Iperinterpolazione filtrata	
	$\ \cdot\ _\infty$	$\ \cdot\ _2$	$\ \cdot\ _\infty$	$\ \cdot\ _2$
2	1.6032e-01	4.0104e-02	3.4689e-01	2.4143e-01
4	1.5812e-02	3.7008e-03	8.7868e-02	3.2913e-02
6	1.9553e-03	2.7587e-04	1.9499e-02	8.5307e-03
8	7.8276e-05	1.5974e-05	4.0694e-03	1.4568e-03
10	4.3303e-06	7.4558e-07	8.3178e-04	3.0111e-04

Tabella 4.9: Approssimazione della funzione $g_1(x, y) = e^{-(x^2+y^2)} \in C^\infty(\Omega_2)$ mediante gli operatori di iperinterpolazione $\mathcal{L}_N, \mathcal{F}_N$. I campionamenti della funzione non sono affetti da rumore.

Dai risultati ottenuti si può notare che, fissata la funzione da approssimare e il grado N dell'iperinterpolante, gli errori sono maggiori in confronto ai corrispondenti del caso convesso (cfr. Tabelle 4.3 e 4.4).

N	Iperinterpolazione		Iperinterpolazione filtrata	
	$\ \cdot\ _\infty$	$\ \cdot\ _2$	$\ \cdot\ _\infty$	$\ \cdot\ _2$
2	3.642e-01	1.6897e-01	1.3378	6.6621e-01
4	3.4739e-02	1.2583e-02	2.1281e-01	9.2532e-02
6	8.1352e-03	2.4648e-03	3.8979e-02	1.4445e-02
8	2.9097e-03	9.3809e-04	8.9919e-03	3.4543e-03
10	1.2770e-03	4.0247e-04	4.4652e-03	1.3702e-03

Tabella 4.10: Approssimazione della funzione $g_2(x, y) = ((x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2)^{(3/2)} \in C^1(\Omega_2)$, con $(0.5, 0.5) \in \Omega_2$, mediante gli operatori di iperinterpolazione \mathcal{L}_N , \mathcal{F}_N . I campionamenti della funzione non sono affetti da rumore.

4.2.2 Approssimazione di funzioni bivariate soggette a rumore

Analogamente a quanto già fatto per il precedente dominio convesso, approssimiamo la funzione

$$g_1(x, y) = \exp(-(x^2 + y^2))$$

all'interno del dominio concavo 4.2 introducendo del rumore alla sua valutazione, nei nodi di quadratura. I dati ricavati da tali approssimazioni sono riportati nelle Tabelle 4.11 e 4.12.

N	Iperinterpolazione		Iperinterpolazione filtrata		F/H
	$\ \cdot\ _\infty$	$\ \cdot\ _2$	$\ \cdot\ _\infty$	$\ \cdot\ _2$	$\rho_{F/H}$
2	1.0496	5.1104e-01	6.7504e-01	4.4427e-01	0.869
4	1.0676	4.7933e-01	6.1990e-01	3.4384e-01	0.717
6	1.2454	4.6181e-01	6.6226e-01	3.2302e-01	0.699
8	1.1086	4.7010e-01	6.8892e-01	3.3103e-01	0.704
10	1.2055	4.6740e-01	7.3876e-01	3.2780e-01	0.701

Tabella 4.11: Approssimazione della funzione $g_1(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$ mediante gli operatori di iperinterpolazione \mathcal{L}_N , \mathcal{F}_N . I campionamenti della funzione sono soggetti a una perturbazione casuale la cui funzione di distribuzione coincide con quella di una variabile aleatoria normale $N(0, \sigma^2)$ con media 0 e deviazione standard $\sigma = 0.5$. Nell'ultima colonna: il rapporto tra le norme 2 rispettivamente dell'iperinterpolazione filtrata e classica.

N	Iperinterpolazione		Iperinterpolazione filtrata		F/H
	$\ \cdot\ _\infty$	$\ \cdot\ _2$	$\ \cdot\ _\infty$	$\ \cdot\ _2$	$\rho_{F/H}$
2	1.6822	8.9375e-01	1.0986	6.8338e-01	0.765
4	1.7523	8.1698e-01	1.0424	5.6730e-01	0.694
6	1.9935	8.3047e-01	1.2003	5.5998e-01	0.674
8	2.1457	8.1880e-01	1.2060	5.7181e-01	0.698
10	1.9893	8.0026e-01	1.1409	5.6319e-01	0.704

Tabella 4.12: Approssimazione della funzione $g_1(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$ mediante gli operatori di iperinterpolazione $\mathcal{L}_N, \mathcal{F}_N$. I campionamenti della funzione sono soggetti a una perturbazione casuale la cui funzione di distribuzione coincide con quella di una variabile aleatoria uniforme $U(\alpha)$ avente valori random in $[-\alpha, \alpha]$ con probabilità 1/2, con $\alpha = 1.5$. Nell'ultima colonna: il rapporto tra le norme 2 rispettivamente dell'iperinterpolazione filtrata e classica.

Osservando i risultati possiamo confermare anche in questo caso l'evidenza del vantaggio del metodo dell'iperinterpolazione filtrata rispetto a quella classica qualora la funzione da approssimare sia soggetta a rumore.

Inoltre, confrontando gli errori ottenuti con i corrispondenti relativi all'approssimazione della stessa funzione nel dominio convesso (cfr. Tabelle 4.5 e 4.6), si può notare che a parità del grado N dell'iperinterpolante si hanno risultati più accurati approssimando la funzione all'interno del dominio concavo, contrariamente a quanto già osservato in assenza di rumore.

Notiamo infine che il rapporto tra l'errore dato dall'iperinterpolazione filtrata e quello dovuto alla classica rimane invariato al variare di N e del tipo di perturbazione a cui sono soggetti i campionamenti della funzione ed ha lo stesso valore per entrambi i domini considerati (cfr. (4.1)):

$$\rho_{F/H} = \frac{\|\cdot\|_2^{(Filtered)}}{\|\cdot\|_2^{(Hyperint.)}} \approx 0.7.$$

Bibliografia

- [1] C. An, H.N. Wu, *Lasso hyperinterpolation over general regions*. SIAM Journal on Scientific Computing 43(6), pp.A3967–A3991, (2021).
<https://doi.org/10.1137/20M137793X>
- [2] I.H. Sloan, *Polynomial interpolation and hyperinterpolation over general regions*. Journal of Approximation Theory 83(2), pp.238–254, (1995).
<https://doi.org/10.1006/jath.1995.1119>
- [3] I.H. Sloan, R.S. Womersley, *Filtered hyperinterpolation: a constructive polynomial approximation on the sphere*. International Journal on Geomathematics 3(1), pp. 95–117, (2012).
<https://doi.org/10.1007/s13137-011-0029-7>
- [4] A. Sommariva, F. Lopez. Matlab codes for hyperinterpolation and filtered hyperinterpolation on NURBS-shaped planar domains.
https://github.com/LopezFrancesca/Codici_Tesi.git
- [5] A. Sommariva, M. Vianello. *inRS: implementing the indicator function of NURBS-shaped planar domains*. Appl. Math. Lett., 130, (2022).
- [6] A. Sommariva, M. Vianello. *Low-cardinality Positive Interior cubature on NURBS-shaped domains*. BIT Numerical Mathematics, 63, article 22, (2023).