



Università degli Studi di Padova

FACOLTÀ DI SCIENZE STATISTICHE
Corso di Laurea Specialistica in Statistica e Informatica

TESI DI LAUREA

**LA MATRICE DI INFORMAZIONE ATTESA PER LA
DISTRIBUZIONE NORMALE ASIMMETRICA
ESTESA BIDIMENSIONALE**

THE EXPECTED INFORMATION MATRIX FOR THE
EXTENDED BIVARIATE SKEW NORMAL DISTRIBUTION

Candidato:
Stefano Franco
Matricola 584534

Relatore:
Ch.mo Prof. Adelchi Azzalini

Anno Accademico 2010-2011

*Quando vivi in un luogo a lungo,
diventi cieco perchè non osservi più nulla.*

Io viaggio per non diventare cieco.

Josef Koudelka

Indice

Introduzione	1
1 Le distribuzioni asimmetriche	3
1.1 Cenni storici	3
1.2 La distribuzione normale asimmetrica	4
1.3 Generazione	6
1.3.1 Troncamento di una normale bidimensionale	6
1.3.2 Convoluzione di normali	6
1.4 Momenti	7
1.5 Aspetti statistici	8
1.5.1 Parametrizzazione centrata	9
1.6 La distribuzione normale asimmetrica multidimensionale	10
1.7 Generazione	12
1.7.1 Convoluzione di normali	12
1.7.2 Metodo per condizionamento	13
1.8 Momenti	13
1.9 Parametrizzazione centrata	14
2 Le distribuzioni normali asimmetriche estese	17
2.1 Caso scalare	18
2.2 Generazione	18
2.2.1 Campioni selezionati	18
2.2.2 Distribuzione condizionata di una SN_2	19
2.3 Momenti	20
2.4 Caso multidimensionale	21
2.5 Generazione mediante meccanismo di selezione	22

2.6	Momenti	22
3	Aspetti statistici	25
3.1	Caso scalare	26
3.2	Funzione di verosimiglianza e vettore punteggio	27
3.3	La matrice di informazione osservata e attesa di Fisher	29
3.3.1	Calcolo della matrice d'informazione	29
3.3.2	Peculiarità della matrice d'informazione	46
	Conclusioni	59
A	Codice R	61
A.1	Calcolo della matrice di informazione osservata	61
A.2	Calcolo della matrice di informazione attesa	66
	Bibliografia	75

Introduzione

Questo progetto di tesi si colloca nel settore della “teoria delle distribuzioni”, con il quale ci si riferisce allo studio delle proprietà formali di distribuzioni di probabilità e delle loro capacità di adattamento a descrivere in senso statistico il comportamento di fenomeni empirici. Questo tema gioca un ruolo importante, trovandosi al punto di snodo tra aspetti matematico-probabilistici e aspetti applicativi della statistica.

La *normale asimmetrica estesa*, (abbreviata con l’acronimo *ESN*, da *Extended Skew-Normal*), oggetto di questo lavoro di tesi, è una distribuzione di probabilità che include al suo interno, come casi particolari, la distribuzione *normale asimmetrica* e quindi anche quella *normale*. La normale asimmetrica (abbreviata in *SN*, da *Skew-Normal*) è un’estensione della classe di distribuzioni normali grazie al parametro α che governa l’asimmetria della distribuzione. A sua volta la distribuzione *ESN* con l’aggiunta del parametro τ generalizza la distribuzione *SN*.

Il fronte di maggior impatto della distribuzione *SN* è costituito dal contesto multidimensionale, dato che in questo ambito le alternative disponibili rispetto alle distribuzioni standard, quali la normale, sono meno numerose.

Rispetto alle sopracitate distribuzioni, per le quali non mancano numerosi risultati in svariati ambiti, per la versione *ESN* multidimensionale non sono noti importanti risultati inferenziali. In particolare manca un’espressione per la matrice di informazione attesa, che riveste un’importanza fondamentale nella teoria della Statistica, essa infatti gioca un ruolo di prim’ordine nell’ambito della varianza asintotica degli stimatori di massima verosimiglianza.

Il presente progetto si innesta su questo filone di letteratura, con l’intento di portare un contributo sul fronte statistico della teoria delle distribuzioni simmetriche perturbate. Nel Capitolo 1 e 2 verranno presentate rispettivamente la distribuzione *SN* e quella *ESN* sia nel caso scalare che in quello multidimensionale, riportando alcuni dei risultati noti in letteratura quali possibili fenomeni generatori, il calcolo dei momenti e una parametrizzazione alternativa che risolve alcuni dei problemi inferenziali per la normale asimmetrica.

Nel Capitolo 3 verrà presentata la funzione di log-verosimiglianza della distribuzione ESN_2

e ne viene ricavato il vettore punteggio. Dopo aver ottenuto la matrice di informazione osservata sarà presentato un nuovo lemma, grazie al quale sarà possibile sviluppare il calcolo della matrice di informazione attesa di Fisher, per il caso ESN_2 . Il comportamento della matrice verrà poi studiato e confrontato con quello della distribuzione normale asimmetrica bidimensionale studiata da Arellano-Valle & Azzalini (2008). Verranno infine esaminate alcune peculiarità della matrice di informazione attesa tra le quali la partizione a blocchi per alcune combinazioni di parametri e la singolarità per $\alpha \rightarrow 0$ e per $\tau \rightarrow \pm\infty$.

In appendice viene riportato il codice `R` implementato per ottenere i risultati del Capitolo 3.

Capitolo 1

Le distribuzioni asimmetriche

1.1 Cenni storici

La teoria delle distribuzioni è da sempre stata oggetto di studio in diversi ambiti, da quello probabilistico a quello statistico. Tale interesse è dovuto al fatto che la definizione di un modello in grado di descrivere coerentemente il comportamento di un fenomeno empirico non può (infatti) prescindere da un accurato studio delle proprietà formali. Questo lavoro fa riferimento ad uno specifico filone della letteratura che nel corso degli ultimi anni ha acquisito un profilo sempre meglio delineato: la distribuzione normale asimmetrica e le sue successive estensioni.

Anche se tecnicamente la prima espressione formale della distribuzione normale asimmetrica risale addietro nel tempo (Birnbaum, 1950), tuttavia il punto di avvio della ricerca in questo ambito va collegato al riconoscimento del ruolo autonomo della distribuzione stessa come estensione della famiglia delle distribuzioni normali, specificamente con l'introduzione di un parametro di regolazione dell'asimmetria (Azzalini, 1985). La costruzione della versione multidimensionale della distribuzione normale asimmetrica (Azzalini & Dalla Valle, 1996) ha infatti contribuito alla crescita di interesse in questo ambito di ricerca. Da qui si è sviluppato un filone di letteratura via via più esteso e approfondito, con un grado di articolazione ampiamente superiore a quello inizialmente prefigurato. Un livello di estensione è costituito dalla famiglia delle densità simmetriche perturbate (Azzalini, 2005; Genton & editor, 2004), le quali si ottengono partendo da una qualunque densità simmetrica multidimensionale e applicando a questa un fattore di ponderazione che può essere scelto con ampio margine di manovra, dovendo rispettare solo poche e semplici condizioni. La disponibilità di questo tipo di costruzione ha aperto la strada verso la costruzione di classi di distribuzioni che consentono non solo la regolazione della loro asimmetria, ma anche la curtosi e altri elementi, quali multimodalità.

Il punto di partenza degli studi moderni sulle distribuzioni asimmetriche si trova dunque nel lavoro di Azzalini (1985), dove troviamo il seguente utile risultato.

Lemma 1.1. *Sia f_0 una funzione di densità di probabilità unidimensionale simmetrica attorno a 0, G una funzione di ripartizione tale che G' esiste simmetrica attorno a 0, allora*

$$f(z) = 2f_0(z)G\{\alpha z\} \quad (-\infty < z < \infty) \quad (1.1)$$

è una funzione di densità per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, costante arbitraria.

Questo lemma generale garantisce la costruzione di un'intera famiglia di distribuzioni asimmetriche a partire dalla *perturbazione* tramite $G\{\alpha z\}$ di una funzione di densità simmetrica f_0 . La nuova famiglia di funzioni f include f_0 per $\alpha = 0$.

Da questa idea nasce un nutrito insieme di distribuzioni asimmetriche di cui la *normale asimmetrica*, che sarà trattata nei prossimi paragrafi, ne è il primo e il più chiaro esempio.

1.2 La distribuzione normale asimmetrica

Definiamo ora la distribuzione di probabilità *normale asimmetrica* facendo riferimento al Lemma 1.1. Siano $f_0 = \phi$ e $G = \Phi$ la funzione di densità e di ripartizione di una normale standardizzata. Se una v.c. Z ha funzione di densità

$$\phi(z; \alpha) = 2\phi(z)\Phi(\alpha z) \quad (-\infty < z < \infty) \quad (1.2)$$

allora si distribuisce come una *normale asimmetrica (skew-normal)* con parametro di forma α e scriveremo che $Z \sim SN(\alpha)$.

Generalizziamo l'espressione (1.2) introducendo dei parametri di posizione e scala. Sia $Z \sim SN(\alpha)$, $\xi \in \mathbb{R}$ e $\omega \in \mathbb{R}^+$. Allora, definita $Y = \xi + \omega Z$, la densità di Y sarà:

$$\phi(z; \xi, \omega, \alpha) = \frac{2}{\omega} \phi\left(\frac{y - \xi}{\omega}\right) \Phi\left(\alpha \frac{y - \xi}{\omega}\right) \quad (-\infty < y < \infty) \quad (1.3)$$

e scriveremo che $Y \sim SN(\xi, \omega^2, \alpha)$.

Proprietà

Si riportano in seguito alcune importanti proprietà enunciate in Azzalini (1985) in cui risultano evidenti i legami tra la distribuzione normale e la distribuzione normale asimmetrica.

1. Se $\alpha = 0$ allora $Z \sim SN(0) \sim N(0, 1)$;
2. se $Z \sim SN(\alpha)$, allora $-Z \sim SN(-\alpha)$;
3. se $\alpha \rightarrow \infty$ ci si riconduce alla mezza normale, avente densità $2\phi(z)$ per $z \geq 0$;
4. se $Z \sim SN(\alpha)$, allora $Z^2 \sim \chi_1^2$;
5. per ogni fissato α la (1.2) è fortemente unimodale, ossia $\log \phi(z; \alpha)$ una funzione concava di z .

La distribuzione normale risulta quindi un elemento interno a questa famiglia di distribuzioni.

Per dare un'idea della forma che la curva dell'equazione (1.2) assume si veda la Figura 1.1. Nel grafico sono state inserite le curve per alcune scelte del parametro α positivo. Per α negativi, come conseguenza della proprietà 2, avremo che il grafico della densità risulta speculare rispetto all'asse verticale.

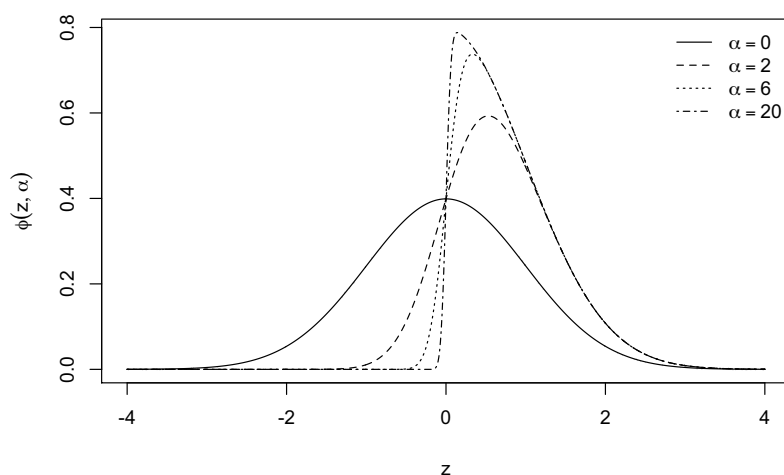


Figura 1.1: Funzione di densità di una $SN(\alpha)$ per alcune scelte di α

1.3 Generazione

Un'interessante caratteristica della classe SN è che può essere originata in diversi modi. La densità in (1.2) è stata introdotta a partire dalla densità normale standardizzata, applicando su di essa una perturbazione che da luogo all'asimmetria. In questa sezione si vogliono descrivere alcuni meccanismi reali che danno luogo a questo tipo di distribuzione.

1.3.1 Troncamento di una normale bidimensionale

Sia $(Z, V) \sim \tilde{f}$ dove $\tilde{f}(z, v)$ è la funzione di densità di una normale bidimensionale con vettore delle medie pari a $(0, 0)^T$ e matrice di varianza con diagonale unitaria e correlazione pari a ρ . Si supponga di osservare un campione censurato in una delle due marginali, ossia di osservare Z condizionata a $V \geq 0$. La densità della variabile che osserviamo sarà quindi

$$f(v, z) = \begin{cases} 2\tilde{f}(z, v) & \text{per } v \geq 0; \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Se marginalizziamo rispetto alla variabile z , integrando $f(z, v)$ sul dominio di v , otteniamo esattamente che:

$$Z \sim SN\left(\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\right).$$

In contesti di selezione del personale o di ammissione a scuole o enti di formazione in cui è previsto un test d'ingresso di tipo attitudinale, l'osservazione del punteggio ottenuto in test successivi, è evidentemente correlata al test d'ingresso. Questo tipo di meccanismo ben si presta ad essere modellato pensando al troncamento di una distribuzione bivariata come quello appena descritto. Si veda a riguardo Birnbaum (1950) e Arnold et al. (1993). In ambedue questi lavori il livello di troncamento non è però 0, ovvero la media della componente non osservata.

1.3.2 Convoluzione di normali

Un altro meccanismo di generazione di dati aventi distribuzione normale asimmetrica presentato in Azzalini (1986).

Lemma 1.2. Consideriamo due variabili casuali normali standard indipendenti, Y_0 e Y_1 , e una costante $|\delta| < 1$. Se definiamo: $Z = \delta|Y_0| + \sqrt{1 - \delta^2}Y_1$, allora

$$Z \sim SN\left(\frac{\delta}{\sqrt{1 - \delta^2}}\right)$$

Questo meccanismo di generazione compare nei lavori di Weinstein (1964), Nelson (1964) e Anděl et al. (1984).

1.4 Momenti

La funzione generatrice dei momenti per una $SN(\xi, \omega^2, \alpha)$ è facilmente ottenibile sfruttando alcuni risultati ben noti:

Lemma 1.3 (Completamento del quadrato). Se A è una matrice $k \times k$ simmetrica definita positiva e b un vettore $k \times 1$, allora

$$\int_{\mathbb{R}^k} \frac{1}{(2\pi)^{k/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(y^T A y - 2b^T y)\right\} dy = \frac{\exp\left\{\frac{1}{2}(b^T A^{-1} b)\right\}}{|A|^{1/2}}. \quad (1.4)$$

dove dy sta per $dy_1 \dots dy_k$.

Lemma 1.4. Se $U \sim N(0, 1)$ e $a, b \in \mathbb{R}$ allora:

$$E[\Phi(a + bU)] = \Phi\left(\frac{a}{\sqrt{1 + b^2}}\right),$$

si veda Zacks (1981).

La funzione generatrice dei momenti per una $SN(\xi, \omega^2, \alpha)$ è data da

$$M(t) = 2 \exp\left(\xi t + \frac{\omega^2 t^2}{2}\right) \Phi(\delta \omega t) \quad (1.5)$$

dove $\delta = \alpha/\sqrt{1 + \alpha^2} \in (-1, 1)$, e la funzione generatrice dei cumulanti:

$$K(t) = \log M(t) = \xi t + \frac{\omega^2 t^2}{2} + \log[2\Phi(\delta \omega t)], \quad (1.6)$$

dove

$$\zeta_0(x) = \log\{2\Phi(x)\} \quad (1.7)$$

e in generale

$$\zeta_m(x) = \frac{d^m}{dx^m} \zeta_0(x), \quad (m = 1, 2, \dots). \quad (1.8)$$

Derivando la funzione generatrice dei cumulanti otteniamo:

$$\mathbb{E}[Y] = \xi + \omega\mu_z, \quad (1.9)$$

$$\text{Var}[Y] = \omega^2(1 - \mu_z^2), \quad (1.10)$$

$$\gamma_1 = \frac{4 - \pi}{2} \frac{\mu_z^3}{(1 - \mu_z^2)^{3/2}}, \quad (1.11)$$

$$\gamma_2 = 2(\pi - 3) \frac{\mu_z^4}{(1 - \mu_z^2)^2}, \quad (1.12)$$

dove $\mu_z = \sqrt{2/\pi} \delta$ e γ_1, γ_2 sono il terzo e il quarto cumulante standardizzato, noti anche rispettivamente come coefficiente di asimmetria e di curtosi.

Si noti che gli indici γ_1 e γ_2 hanno un campo di variazione limitato. In particolare $|\gamma_1| \leq 0.995$ circa, mentre $0 \leq \gamma_2 \leq 0.869$. Questo implica un limite della normale asimmetrica nel rappresentare il comportamento a livello di asimmetria e curtosi per campioni di dati particolarmente asimmetrici o con pronunciata curtosi.

1.5 Aspetti statistici

Mentre gli aspetti probabilistici di questo ambito generale di lavoro si sono mostrati sempre molto favorevoli all'analisi formale, e anzi questo è uno dei elementi di forza dell'approccio, gli aspetti inferenziali hanno mostrato fin dall'inizio punti di difficoltà, in quanto la funzione di verosimiglianza presenta aspetti particolari che rendono parzialmente insoddisfacenti le procedure standard, a partire dalla stima di massima verosimiglianza.

La situazione più semplice e anche più studiata è quella di un campione che si presume tratto da una variabile casuale SN scalare con tre parametri: di posizione, di scala e di forma. Già per

questo semplice caso si incontrano aspetti anomali quali: (i) presenza sistematica di un punto di flesso della funzione di log-verosimiglianza in corrispondenza del valore $\alpha = 0$ del parametro di forma; (ii) singolarità della matrice di informazione attesa di Fisher per $\alpha = 0$. Questi aspetti sono stati discussi da vari autori, primariamente Azzalini (1985), Liseo (1990), Pewsey (2000) e Chiogna (2005). Per questa situazione sono state proposte soluzioni per porre rimedio ai problemi descritti sopra. I punti critici sono stati risolti dalla cosiddetta parametrizzazione centrata, discussa da Azzalini (1985), Azzalini & Capitanio (1999), Chiogna (2005).

1.5.1 Parametrizzazione centrata

Per ovviare ai problemi legati all'inferenza sui parametri (ξ, ω^2, α) appena menzionati, Azzalini (1985) propone una riparametrizzazione del modello. Partendo dall'identità

$$Y = \xi + \omega Z = \mu_z + \sigma_z Z_0 \quad (1.13)$$

dove Z ha una distribuzione $SN(\alpha)$ del tipo (1.2), e posto:

$$\mu_z = \mathbb{E}(Z) = b\delta, \quad \sigma_z^2 = \text{Var}(Z) = 1 - \mu_z^2$$

definiamo $Z_0 = \frac{1}{\sigma_z} (Z - \mu_z)$.

La parametrizzazione alternativa data da $(\mu, \sigma^2, \gamma_1)$ le cui espressioni esplicite in termini dei parametri originali sono date da 1.9, 1.10 e 1.11. Questa parametrizzazione è nota in letteratura con il nome di *parametrizzazione centrata* (o CP utilizzando il relativo acronimo dalla lingua inglese) in quanto viene introdotta a partire dalla variabile centrata Z_0 , mentre la parametrizzazione fin qui utilizzata è chiamata *parametrizzazione diretta* (o DP).

L'utilizzo della parametrizzazione centrata offre sicuramente numerosi benefici. Da un lato semantico, i nuovi parametri hanno un significato chiaro, più intuitivo e familiare. Come nel modello normale, infatti, μ e σ^2 rappresentano esattamente la media e la varianza della distribuzione, mentre il parametro γ_1 , rappresentando l'indice di asimmetria della distribuzione, risulta più logicamente collegato a questa rispetto al parametro α .

Da un lato più pratico e inferenziale, la parametrizzazione centrata elimina talune caratteristiche che rendevano difficoltose le operazioni d'inferenza sulla normale asimmetrica.

Anche il problema della singolarità della matrice viene risolto tramite la parametrizzazione centrata, rendendo quindi possibile applicare gli usuali metodi dell'inferenza asintotica. Infatti i risultati sulla distribuzione asintotica delle stime di massima verosimiglianza affermano che, in condizioni di regolarità del problema di stima, dato un campione di numerosità n :

$$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{d} N(0, I(\theta)^{-1})$$

dove θ in questo caso indica il vettore dei parametri $\theta = (\mu, \sigma^2, \gamma)$ e dove $I(\theta)$ è la matrice d'informazione attesa per i parametri appena descritti.

1.6 La distribuzione normale asimmetrica multidimensionale

Il fronte di maggior impatto della distribuzione SN è tuttavia costituito dal contesto multidimensionale, dato che in questo ambito le alternative disponibili rispetto alle distribuzioni standard quali la normale sono meno numerose. Si capisce quindi che l'interesse della comunità scientifica sia scaturito solo successivamente all'introduzione della distribuzione SN multidimensionale, da parte di Azzalini & Dalla Valle (1996). Tale interesse è veramente decollato peraltro solo dopo il lavoro di Azzalini & Capitanio (1999) che ha introdotto una nuova parametrizzazione più chiara e connessa al caso scalare, tecnicamente equivalente alla prima (Azzalini & Dalla Valle, 1996) ed evidenziando le potenzialità della nuova classe di distribuzioni, sia in termini di proprietà formali che come fruibilità applicativa. Successivamente Arellano-Valle & Azzalini (2008) hanno proposto un'efficace soluzione per porre rimedio ad alcune problematiche di tipo inferenziale, come la singolarità della matrice di informazione attesa per α nullo.

Per introdurre la versione multidimensionale della SN è utile presentare l'estensione k -dimensionale del Lemma 1.1, in cui si passa dalla forma lineare αx a quella più generale $w(x)$.

Lemma 1.5. *Se f_0 è una funzione di densità di probabilità k -dimensionale tale che $f_0(x) = f_0(-x)$ per $x \in \mathbb{R}^k$, G una funzione di ripartizione unidimensionale tale che G' esiste simme-*

trica attorno a 0, e w una funzione tale che $w(-x) = -w(x)$ per $x \in \mathbb{R}^k$, allora

$$f(x) = 2f_0(x)G\{w(x)\}, \quad x \in \mathbb{R}^k \quad (1.14)$$

è una funzione di densità in \mathbb{R}^k .

Una variabile casuale k -dimensionale Z ha distribuzione normale asimmetrica k -dimensionale, se ha una funzione di densità del tipo:

$$f_Z(z; \bar{\Omega}, \alpha) = 2\phi_k(z; \bar{\Omega})\Phi(\alpha^T z), \quad z \in \mathbb{R}^k \quad (1.15)$$

dove $\phi_k(z; \bar{\Omega})$ è la densità di una variabile casuale normale k -dimensionale con vettore delle medie nullo e matrice di correlazione $\bar{\Omega}$ di rango massimo, $\Phi(\cdot)$ è la funzione di ripartizione di una $N(0, 1)$, e α è un vettore k -dimensionale $\in \mathbb{R}^k$. Scriveremo che $Z \sim SN_k(\bar{\Omega}, \alpha)$. Quando $\alpha = 0$, la densità (1.15) diventa quella di una $N_k(0, \bar{\Omega})$.

Generalizzando l'espressione (1.15) con l'introduzione dei parametri di posizione e scala, abbiamo che

$$Y = \xi + \omega Z \quad (1.16)$$

dove $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)^T$ e $\omega = \text{diag}(\omega_1, \dots, \omega_d)$, dove le componenti diagonali di ω devono essere positive. La funzione di densità di Y sarà:

$$f_Y(y; \xi, \Omega, \alpha) = 2\phi_k(y - \xi; \Omega)\Phi\{\alpha^T \omega^{-1}(y - \xi)\}, \quad y \in \mathbb{R}^k \quad (1.17)$$

dove

$$\Omega = \omega \bar{\Omega} \omega \quad (1.18)$$

è una matrice di covarianza $k \times k$ e

$$\bar{\Omega} = \omega^{-1} \Omega \omega^{-1} \quad (1.19)$$

è una matrice di correlazione $k \times k$ associata a Ω . Scriveremo che

$$Y \sim SN_k(\xi, \Omega, \alpha), \quad (1.20)$$

per indicare che Y ha funzione di densità (1.17).

1.7 Generazione

Come il caso scalare, anche quello multidimensionale si caratterizza per le diverse possibilità di generazione della famiglia SN_k .

1.7.1 Convoluzione di normali

Preso un v.c. multidimensionale Z tale che ogni sua componente si distribuisca come un SN , allora è naturale definire la distribuzione congiunta di Z una normale asimmetrica multidimensionale. Consideriamo una v.c. k -dimensionale $Y = (Y_1, \dots, Y_k)^T$ con marginali standardizzate, indipendenti da una v.c. $Y_0 \sim N(0, 1)$:

$$\begin{pmatrix} Y_0 \\ Y \end{pmatrix} \sim N_{1+k} \left\{ 0, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Psi \end{pmatrix} \right\},$$

dove Ψ è matrice di correlazione $k \times k$. Definiamo

$$Z_j = \delta_j |Y_0| + (1 - \delta_j^2)^{\frac{1}{2}} Y_j, \quad j = (1, \dots, k),$$

dove $\delta_j \in (-1, 1)$. Quindi sfruttando il Lemma 1.2 risulta che

$$Z_j \sim SN \left(\frac{\delta_j}{\sqrt{1 - \delta_j^2}} \right).$$

Allora possiamo scrivere che

$$Z \sim SN_k(0, \bar{\Omega}, \alpha). \quad (1.21)$$

Per la relazione tra Ψ e $\bar{\Omega}$ si veda l'appendice A di Azzalini & Capitanio (1999).

1.7.2 Metodo per condizionamento

Sia Y_0 una v.c. scalare e Y_1 una v.c. k -dimensionale, tale che

$$Y = \begin{pmatrix} Y_0 \\ Y_1 \end{pmatrix} \sim N_{1+k}(0, \Omega^*),$$

dove

$$\Omega^* = \begin{pmatrix} 1 & \delta^T \\ \delta & \bar{\Omega} \end{pmatrix}$$

è matrice di correlazione $k \times k$. Allora $Z = (Y_1 | Y_0 > 0) \sim SN_k(0, \bar{\Omega}, \alpha)$.

1.8 Momenti

La funzione generatrice dei momenti per una $SN_k(\xi, \Omega, \alpha)$ è ottenibile sfruttando alcuni risultati ben noti, tra cui il Lemma 1.3 e la seguente estensione al caso multidimensionale del Lemma 1.4:

Lemma 1.6. *Se $U \sim N_k(0, \Omega)$ allora:*

$$E[\Phi(u + v^T U)] = \Phi\left(\frac{u}{\sqrt{1 + v^T \Omega v}}\right)$$

per ogni u scalare e $v \in \mathbb{R}^k$.

Utilizzando questi risultati otteniamo la funzione generatrice dei momenti:

$$M(t) = 2 \exp\left(\xi^T t + \frac{1}{2} t^T \Omega t\right) \Phi(\delta^T \omega t), \quad t \in \mathbb{R}^k, \quad (1.22)$$

dove

$$\delta = \frac{1}{(1 + \alpha^T \bar{\Omega} \alpha)^{1/2}} \bar{\Omega} \alpha, \quad (1.23)$$

e $\bar{\Omega}$ come in 1.19.

Derivando la seguente funzione generatrice dei cumulanti:

$$K(t) = t^T \xi + \frac{1}{2} t^T \Omega t + \zeta_0(\delta^T \omega t), \quad (1.24)$$

otteniamo

$$\mathbb{E}[Y] = \xi + \omega \mu_z, \quad (1.25)$$

$$\mathbb{V}ar[Y] = \Omega - \omega \mu_z \mu_z^T \omega, \quad (1.26)$$

dove $\mu_z = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \delta$ è il valore atteso della v.c. $Z = \omega^{-1}(Y - \xi) \sim SN_k(0, \bar{\Omega}, \alpha)$.

Gli indici di asimmetria e curtosi nel caso multidimensionale, nella versione di Mardia (1970, 1974) sono

$$\gamma_{1,k} = \left(\frac{4 - \pi}{2} \right)^2 \left(\frac{\mu_z^T \bar{\Omega}^{-1} \mu_z}{1 - \mu_z^T \bar{\Omega}^{-1} \mu_z} \right)^3, \quad (1.27)$$

$$\gamma_{2,k} = 2(\pi - 3) \left(\frac{\mu_z^T \bar{\Omega}^{-1} \mu_z}{1 - \mu_z^T \bar{\Omega}^{-1} \mu_z} \right)^2, \quad (1.28)$$

si veda Azzalini (2005). Gli indici $\gamma_{1,k}$ e $\gamma_{2,k}$ hanno per costruzione un campo di variazione limitato rispettivamente di $(0, 0.9905)$ e $(0, 0.869^2)$.

1.9 Parametrizzazione centrata

Come nel caso scalare, anche in quello multidimensionale viene proposta una parametrizzazione alternativa alla *parametrizzazione diretta* o *DP* (*direct parametrization*), per la quale la matrice di informazione attesa risultava singolare per alcune combinazioni dei parametri. Nell'articolo di Arellano-Valle & Azzalini (2008) viene presentata la parametrizzazione centrata o *CP* (*centred parametrization*), per la quale viene dimostrata la non singolarità della matrice di informazione attesa di Fisher. Per definire la *CP* introduciamo nuovamente alcune espressioni seguendo lo schema di Azzalini & Capitanio (1999).

Definiamo la v.c. “normalizzata”

$$Z = \omega^{-1}(Y - \xi) \sim SN_k(0, \bar{\Omega}, \alpha)$$

e $\bar{\Omega}$ e δ come in (1.19) e (1.23) rispettivamente tale che

$$\mathbb{E}[Z] = b\delta = \mu_z, \quad \mathbb{V}ar[Z] = \bar{\Omega} - \mu_z\mu_z^T = \bar{\Omega} - b^2\delta\delta^T = \Sigma_z \quad (1.29)$$

e

$$Z_0 = \sigma_z^{-1}(Z - \mu_z) \quad (1.30)$$

dove $\sigma_z = \text{diag}(\sigma_{z,1}, \dots, \sigma_{z,k})$, i cui termini sono la *deviazione standard* di Σ_z tale che il j -esimo termine di $\sigma_{z,j} = (1 - b^2\delta_{z,j}^2)^{1/2}$, per $j = (1, \dots, k)$ e $b = \sqrt{2/\pi}$. L'idea di base è di seguire la rappresentazione (1.13) ma in questo caso avremmo vettori e matrici diagonali. La *CP* è data da (μ, Σ, γ) dove

$$\mu = \mathbb{E}[Y] = \xi + \omega\mu_z, \quad \Sigma = \mathbb{V}ar[Y] = \Omega - \omega\mu_z\mu_z^T\omega = \omega\Sigma_z\omega$$

e γ è il vettore k -dimensionale ottenuto applicando la (1.11) separatamente a ciascun componente di μ_z . Ovviamente quando $k = 1$ ci si riconduce al caso visto nel par. 1.5.1. Le considerazioni legate ai benefici di adottare l'una o l'altra parametrizzazione sono le stesse già discusse nel caso unidimensionale.

Ulteriori importanti risultati ottenuti da Arellano-Valle & Azzalini (2008) sono la matrice di informazione osservata e attesa di Fisher per entrambe le parametrizzazioni, CP e DP.

Alcune quantità espresse all'interno delle componenti della matrice di informazione attesa possono soltanto essere ottenute numericamente, peraltro possono essere ricondotte al semplice calcolo numerico di tre soli integrali unidimensionali; si veda per approfondimento il par. 2.4 di Arellano-Valle & Azzalini (2008).

Capitolo 2

Le distribuzioni normali asimmetriche estese

In questo capitolo si vuole presentare la distribuzione di probabilità *normale asimmetrica estesa* (abbreviata con l'acronimo dalla lingua inglese ESN, per *Extended Skew-Normal*), tracciandone le caratteristiche principali sia nel caso scalare che in quello multidimensionale.

La normale asimmetrica estesa compare già nel primo lavoro di Azzalini (1985) e viene successivamente studiata in Azzalini & Capitanio (1999), Arnold & Beaver (2000), Capitanio et al. (2003).

È immediato che, così come la normale asimmetrica è una famiglia di distribuzioni che generalizza le distribuzioni normali, così essa è generalizzata dalla normale asimmetrica estesa. Nel caso scalare, questa distribuzione, oltre ai tre parametri della normale asimmetrica, prevede un quarto parametro (che chiameremo τ) il quale quando assume il valore 0, permette di ricondursi alla normale asimmetrica.

In particolare il quarto parametro, τ , detto parametro di troncamento, rappresenta il condizionamento al troncamento di una variabile latente correlata con la variabile di interesse.

Dopo aver riportato alcuni dei fenomeni che danno origine a questo tipo di distribuzioni, sono riportate le funzioni generatrici dei momenti e dei cumulanti, e i momenti fino al quarto ordine.

2.1 Caso scalare

Definiamo ora la distribuzione di probabilità *normale asimmetrica estesa*. Se una v.c. Z ha funzione di densità

$$f_{ESN}(z; \alpha, \tau) = \frac{1}{\Phi(\tau)} \phi(z) \Phi(\alpha_0(\tau) + \alpha z) \quad (2.1)$$

allora si distribuisce come una *normale asimmetrica estesa (extended skew-normal)* con parametro di forma α e parametro di troncamento τ , dove $\alpha_0(\tau) = \tau\sqrt{1 + \alpha^2}$ e scriveremo

$$Z \sim ESN(\alpha, \tau).$$

Come per la normale asimmetrica ammettiamo variazioni di posizione e scala. Siano $\xi \in \mathbb{R}$ e $\omega \in \mathbb{R}^+$; allora definita $Y = \xi + \omega Z$ la densità di Y sarà:

$$f_{ESN}(y; \xi, \omega, \alpha, \tau) = \frac{1}{\omega \Phi(\tau)} \phi\left(\frac{y - \xi}{\omega}\right) \Phi\left(\alpha_0(\tau) + \alpha \frac{y - \xi}{\omega}\right) \quad (2.2)$$

e scriveremo che $Y \sim ESN(\xi, \omega, \alpha, \tau)$. Si noti che quando $\alpha = 0$ ci si riconduce alla distribuzione normale, per qualsiasi valore del parametro τ e che, quando $\tau = 0$, ci si riconduce alla distribuzione (1.2).

2.2 Generazione

2.2.1 Campioni selezionati

Si supponga che $\tilde{f}(v, z)$ sia la funzione di densità di una normale bidimensionale a media zero e varianza unitaria con correlazione pari a δ . Immaginiamo di osservare un campione selezionato, ossia solamente gli individui che superano una certa soglia (diciamo $-\tau$) per quanto riguarda v . La densità congiunta diventa quindi

$$f(v, z) = \begin{cases} \frac{\tilde{f}(v, z)}{1 - \Phi(-\tau)} & v \geq -\tau \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (2.3)$$

Marginalizziamo dunque rispetto a z integrando $f(v, z)$ sul dominio di v otteniamo che

$$\begin{aligned}
\int_{-\tau}^{+\infty} f(v, z) dv &= \frac{1}{1 - \Phi(-\tau)} \int_{-\tau}^{+\infty} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\delta^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{v^2 - 2\delta vz + z^2}{1-\delta^2}\right)\right\} dv \\
&= \frac{1}{\Phi(\tau)} \frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}} \int_{-\tau}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{v^2 - 2\delta vz + \delta^2 z^2}{1-\delta^2}\right)\right\} \times \\
&\quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{z^2 - \delta^2 z^2}{1-\delta^2}\right)\right\} dv \\
&= \frac{1}{\Phi(\tau)} \frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}} \phi(z) \int_{-\tau}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{v - \delta z}{\sqrt{1-\delta^2}}\right)^2\right\} dv.
\end{aligned}$$

Effettuando la sostituzione $u = \frac{v - \delta z}{\sqrt{1-\delta^2}}$ e ponendo $\alpha = \frac{\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}$, $\alpha_0(\tau) = \tau\sqrt{1+\alpha^2}$ otteniamo la funzione di densità (2.1).

2.2.2 Distribuzione condizionata di una SN_2

Sia Y una variabile casuale normale asimmetrica bidimensionale del tipo (1.17), ossia $Y \sim SN_2(\tilde{\xi}, \tilde{\Omega}, \tilde{\alpha})$, con $\tilde{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$, $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$ e

$$\tilde{\Omega} = \begin{pmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} \\ \omega_{21} & \omega_{22} \end{pmatrix}.$$

Se osserviamo una delle marginali, diciamo $Y_1 = y_1$, ricaviamo la distribuzione condizionata di $Y_2|Y_1 = y_1$. Detti:

$$\begin{aligned}
\xi &= \xi_2 + \omega_{21}\omega_{11}^{-1}(y_1 - \xi_1), \\
\omega &= \omega_{22} - \omega_{21}\omega_{11}^{-1}\omega_{12}, \\
\alpha &= \frac{\alpha_1 + \omega_{12}/\alpha_2\sqrt{\omega_{11}\omega_{22}}}{(1 + \alpha_2^T \bar{\omega}_{22,1} \alpha_2)^{1/2}}, \\
\tau &= \alpha\sqrt{\omega_{11}}^{-1}(y_1 - \xi_1)
\end{aligned}$$

dove $\bar{\omega} = \frac{\omega}{\omega_{22}}$, per la densità condizionata risulta che:

$$(Y_2|Y_1 = y_1) \sim ESN(\xi, \omega, \alpha, \tau),$$

come mostrato in Azzalini & Dalla Valle (1996) e successivamente estesa al caso k -dimensionale in Azzalini & Capitanio (1999).

2.3 Momenti

La funzione generatrice dei momenti facilmente ricavabile sfruttando i Lemmi 1.3 e 1.4. Dopo alcuni sviluppi algebrici si ottiene l'espressione:

$$M_Z(t) = \frac{1}{\Phi(\tau)} \exp\left\{\frac{t^2}{2}\right\} \Phi(\delta t + \tau) \quad (2.4)$$

per la funzione generatrice dei momenti e

$$K_Z(t) = -\log \Phi(\tau) + \frac{t^2}{2} + \zeta_0(\delta t + \tau) \quad (2.5)$$

per la funzione generatrice dei cumulanti, nella quale compare la funzione $\zeta_0(x)$. Essa e le rispettive derivate sono definite come:

$$\zeta_0(x) = \log(\Phi(x)), \quad (2.6)$$

$$\zeta_1(x) = \frac{d}{dx} \zeta_0(x) = \frac{\phi(x)}{\Phi(x)}, \quad (2.7)$$

$$\zeta_2(x) = \frac{d}{dx} \zeta_1(x) = -(\zeta_1(x)x + [\zeta_1(x)]^2) \quad (2.8)$$

$$\zeta_m(x) = \frac{d^m}{dx^m} \zeta_0(x), \quad (m = 1, 2, \dots). \quad (2.9)$$

Si noti come ora la (2.6) differisca dalla (1.7). Derivando la (2.5) e calcolandone il valore in $t = 0$ otteniamo i momenti della (2.1), costituiti da

$$\mathbb{E}[Z] = \zeta_1(\tau)\delta, \quad (2.10)$$

$$\mathbb{V}ar[Z] = 1 + \delta^2 \zeta_2(\tau), \quad (2.11)$$

$$\gamma_1(Z) = \frac{\delta^3 \zeta_3(\tau)}{(1 + \delta^2 \zeta_2(\tau))^{3/2}}, \quad (2.12)$$

$$\gamma_2(Z) = \frac{\delta^4 \zeta_4(\tau)}{(1 + \delta^2 \zeta_2(\tau))^2}, \quad (2.13)$$

dove, come per il par.1.4, γ_1, γ_2 sono il terzo e il quarto cumulante standardizzato, noti anche rispettivamente come coefficiente di asimmetria e di curtosi; cfr. Capitanio et al. (2003) pag. 131 e 142. I momenti coincidono a quelli del par. 1.4, nel caso in cui il parametro $\tau = 0$.

2.4 Caso multidimensionale

Si riporta la densità della distribuzione normale asimmetrica estesa k -dimensionale. Definiamo normale asimmetrica estesa multivariata k -dimensionale con vettore di posizione $\xi \in \mathbb{R}^k$ di dimensione $k \times 1$, matrice di scala simmetrica definita positiva Ω di dimensione $k \times k$, α vettore di asimmetria $k \times 1$ e parametro scalare τ , una v.c. continua in \mathbb{R}^k avente densità di probabilità

$$f(y; \xi, \Omega, \alpha, \tau) = \phi_k(y - \xi; \Omega) \Phi(\alpha_0 + \alpha^T \omega^{-1}(y - \xi)) / \Phi(\tau), \quad y \in \mathbb{R}^k \quad (2.14)$$

dove $\phi_k(y; \Omega)$ è la funzione di densità di una $N_k(0, \Omega)$ k -dimensionale, Ω come in (1.18) e $\bar{\Omega}$ è matrice di correlazione di dimensione $k \times k$ di rango massimo come in (1.19),

$$\omega = \text{diag}(\Omega_{11}, \Omega_{22}, \dots, \Omega_{kk})^{\frac{1}{2}}, \quad (2.15)$$

$$\alpha_0 = \tau(1 + \alpha^T \bar{\Omega} \alpha)^{1/2} = \tau \sqrt{1 + \alpha_*^2} \quad (2.16)$$

è uno scalare, $\Phi(\cdot)$ la funzione di ripartizione di una normale standard unidimensionale e

$$\alpha_*^2 = \alpha^T \bar{\Omega} \alpha. \quad (2.17)$$

Se una variabile aleatoria Y ha funzione di densità (2.14) scriveremo

$$Y \sim ESN_k(\xi, \Omega, \alpha, \tau). \quad (2.18)$$

Si noti che quando $\tau = 0$ anche $\alpha_0 = 0$ ci si riconduce alla distribuzione normale asimmetrica (1.17).

2.5 Generazione mediante meccanismo di selezione

In questo paragrafo si vuole descrivere un meccanismo che dà luogo alla distribuzione normale asimmetrica estesa multidimensionale. Consideriamo un vettore di v.c. normali k -dimensionale

$$W^* = (W_0, W_1, \dots, W_k)^T = \begin{pmatrix} W_0 \\ W \end{pmatrix} \sim N_{k+1}(0, \bar{\Omega}^*)$$

dove

$$\bar{\Omega}^* = \begin{pmatrix} 1 & \delta^T \\ \delta & \bar{\Omega} \end{pmatrix}$$

è una matrice di correlazione a rango massimo. La funzione di densità di $Z = (W|W_0 + \tau > 0)$ è

$$\phi_k(z; \bar{\Omega}) \Phi(\alpha_0 + \alpha^T z) / \Phi(\tau) \quad (2.19)$$

dove α_0 è definita in (2.16), $\bar{\Omega}$ in (1.19) e δ in (1.23). Possiamo allora scrivere che

$$Z \sim ESN_k(\bar{\Omega}, \alpha, \tau). \quad (2.20)$$

2.6 Momenti

La funzione generatrice dei cumulanti di una v.c. $Z \sim ESN_k(\bar{\Omega}, \alpha, \tau)$ è data da

$$K(t) = \frac{1}{2} t^T \Omega t + \zeta_0(\tau + \delta^T t) - \zeta_0(\tau). \quad (2.21)$$

nella quale compare la funzione $\zeta_0(x)$ definita in (2.6). Derivando la funzione generatrice dei cumulanti (2.21) otteniamo:

$$\mathbb{E}[Z] = K'(0) = \zeta_1(\tau) \delta, \quad (2.22)$$

$$\mathbb{V}ar[Z] = K''(0) = \bar{\Omega} + \zeta_2(\tau) \delta \delta^T. \quad (2.23)$$

dove $\zeta_1(x)$ e $\zeta_2(x)$ sono definite in (2.7) e (2.8) rispettivamente. Le derivate m -esime della funzione generatrice dei cumulanti di Z sono date da

$$\frac{d^m K(t)}{dt_i dt_j \dots dt_r} = \zeta_m(\tau + \delta^T t) \delta_i \delta_j \dots \delta_r, \quad (m > 2), \quad (2.24)$$

grazie alla quale possiamo calcolare gli indici multidimensionali di asimmetria e di curtosi

$$\gamma_{1,k} = \zeta_3(\tau)^2 (\delta^T \Upsilon \delta)^3, \quad (2.25)$$

$$\gamma_{2,k} = \zeta_4(\tau) (\delta^T \Upsilon \delta)^2. \quad (2.26)$$

dove $\Upsilon = \text{var}\{Z\}^{-1}$, di Mardia (1970). Si veda l'appendice di Capitanio et al. (2003). I momenti coincidono a quelli del par.1.8, nel caso in cui il parametro $\tau = 0$.

La funzione generatrice dei cumulanti di una variabile aleatoria Y , definita come in (2.18) e quindi con funzione di densità (2.14), è data da

$$K_Y(t) = \xi^T t + \frac{1}{2} t^T \Omega t + \zeta_0(\tau + \delta^T \omega t) - \zeta_0(\tau), \quad (2.27)$$

cfr. Capitanio et al. (2003). Derivando la funzione generatrice dei cumulanti otteniamo:

$$\mathbb{E}[Y] = K'_Y(0) = \xi + \zeta_1(\tau) \omega \delta, \quad (2.28)$$

$$\mathbb{V}\text{ar}[Y] = K''_Y(0) = \Omega + \zeta_2(\tau) \omega \delta \delta^T \omega, \quad (2.29)$$

dove ω e δ sono definite rispettivamente in (2.15) e (1.23).

Capitolo 3

Aspetti statistici

In questo capitolo verranno presentati alcuni aspetti di carattere statistico-inferenziale della distribuzione normale asimmetrica estesa bidimensionale. In particolare nel par. 3.1 saranno inizialmente riepilogati brevemente i risultati ottenuti nel lavoro di Canale (2008) legati al caso scalare per poi concentrarsi nei paragrafi successivi sui nuovi sviluppi, non noti in letteratura, del caso multidimensionale.

Nel par. 3.2 viene presentata la funzione di log-verosimiglianza della distribuzione ESN_2 e ne viene ricavato il vettore punteggio. Nel par. 3.3 viene ricavata la matrice di informazione osservata e attesa di Fisher per il caso ESN_2 , risultato non noto in letteratura, . Essa sarà confrontata con quella della normale asimmetrica multidimensionale SN_2 , studiata da Arellano-Valle & Azzalini (2008) e discussa nel cap.2, le quali risultano coincidere nel caso di $\tau = 0$, (ovviamente a meno d'ultima riga e colonna le quali corrispondono al parametro τ).

Il calcolo della matrice di informazione attesa è stato possibile grazie ad un nuovo lemma formulato durante questo lavoro di tesi, il quale verrà presentato nel par. 3.3.

Verranno esaminate alcune peculiarità della matrice di informazione attesa tra le quali la partizione a blocchi per alcune combinazioni di parametri e verrà esaminata empiricamente la singolarità della matrice di informazione attesa per $\alpha \rightarrow 0$ e per $\tau \rightarrow \pm\infty$.

3.1 Caso scalare

Nel lavoro di Canale (2008) si evince, che quando si lavora in campo inferenziale, la distribuzione di probabilità normale asimmetrica estesa nel caso scalare presenta non poche problematiche. La matrice di informazione attesa risulta essere singolare non solo per $\alpha = 0$ ma anche quando $\tau \rightarrow \pm\infty$. Inoltre il determinante di questa è prossimo allo zero anche per valori finiti di τ . La log-verosimiglianza risulta difficile da massimizzare; la presenza di punti di massimo relativo fanno sì che diversi algoritmi numerici, per diversi valori di inizializzazione, diano delle stime dei parametri distanti tra loro e spesso distanti dal vero valore di ogni parametro. La log-verosimiglianza profilo per τ risulta molto poco informativa sul valore del parametro e questo porta spesso gli algoritmi numerici a non localizzare la stima di massima verosimiglianza. La verosimiglianza *aggiusta* le stime degli altri parametri portando nella pratica a densità equivalenti, per valori diversi dei parametri. Queste caratteristiche evidenziano un problema di *quasi* non identificabilità del modello.

Si presenta il seguente lemma introdotto da Canale (2008) e utile nel caso scalare per il calcolo della matrice in informazione attesa.

Lemma 3.1 (Canale, 2008). *Sia Z una variabile casuale tale che $Z \sim ESN(0, 1, \alpha, \tau)$, $\zeta_1(\cdot)$ la funzione definita in (2.7) e $g(x) = \alpha\tau + \sqrt{\alpha^2 + 1}x$, allora*

$$\mathbb{E}[f(Z)\zeta_1(\alpha_0 + \alpha Z)] = \frac{\zeta_1(\tau)}{\sqrt{\alpha^2 + 1}} \mathbb{E}[f(g^{-1}(V))]$$

dove $V \sim N(0, 1)$, $\alpha_0 = \tau\sqrt{1 + \alpha^2}$ e $f(\cdot)$ una qualunque funzione da \mathbb{R} in \mathbb{R} tale per cui gli integrali coinvolti esistano.

Questo lemma sarà poi generalizzato da uno nuovo lemma valido nel caso k -dimensionale.

3.2 Funzione di verosimiglianza e vettore punteggio

Sia $Y \sim ESN_2(\xi, \Omega, \alpha, \tau)$ e $\theta = (\xi_1, \xi_2, \Omega_{11}, \Omega_{12}, \Omega_{22}, \alpha_1, \alpha_2, \tau)$ il vettore dei parametri. Data una osservazione $y = (y_1, y_2)^T$ da Y , la funzione di log-verosimiglianza risulta essere:

$$\begin{aligned} \ell(\theta; y) = & c - \zeta_0(\tau) - \frac{1}{2} \log \Omega_{11} - \frac{1}{2} \log \Omega_{22} - \frac{1}{2} \log(1 - \lambda^2) + \\ & - \frac{1}{2(1 - \lambda^2)} \left[\frac{(y_1 - \xi_1)^2}{\Omega_{11}} + \frac{(y_2 - \xi_2)^2}{\Omega_{22}} - 2\lambda \left(\frac{y_1 - \xi_1}{\sqrt{\Omega_{11}}} \right) \left(\frac{y_2 - \xi_2}{\sqrt{\Omega_{22}}} \right) \right] + \\ & + \zeta_0 \left(\alpha_0 + \alpha_1 \frac{(y_1 - \xi_1)}{\sqrt{\Omega_{11}}} + \alpha_2 \frac{(y_2 - \xi_2)}{\sqrt{\Omega_{22}}} \right) \end{aligned} \quad (3.1)$$

con

$$\lambda = \frac{\Omega_{12}}{\sqrt{\Omega_{11}\Omega_{22}}}, \quad (3.2)$$

$\zeta_0(\cdot)$ definita in (2.6), α_0 come in (2.16) e c costante additiva non dipendente dai parametri.

Posto

$$z_1 = \frac{y_1 - \xi_1}{\sqrt{\Omega_{11}}}, \quad z_2 = \frac{y_2 - \xi_2}{\sqrt{\Omega_{22}}},$$

$$\begin{aligned} t &= \tau(1 + \alpha^T \bar{\Omega} \alpha)^{1/2} + \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 \\ &= \tau \sqrt{1 + \alpha_*^2} + \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 \end{aligned} \quad (3.3)$$

e $\zeta_1(\cdot)$ definita in (2.7), dal calcolo delle derivate parziali prime della funzione di log-verosimiglianza (3.1) si ottengono le componenti del vettore punteggio $\frac{d}{d\theta} \ell(\theta)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell}{\partial \xi_1} &= \frac{1}{\sqrt{\Omega_{11}}} \left[\frac{z_1 - \lambda z_2}{1 - \lambda^2} - \alpha_1 \zeta_1(t) \right], \\ \frac{\partial \ell}{\partial \xi_2} &= \frac{1}{\sqrt{\Omega_{22}}} \left[\frac{z_2 - \lambda z_1}{1 - \lambda^2} - \alpha_2 \zeta_1(t) \right], \\ \frac{\partial \ell}{\partial \Omega_{11}} &= \frac{1}{2\Omega_{11}} \left[\frac{(z_1^2 + z_2^2 - 2z_1 z_2 \lambda) \lambda^2}{(1 - \lambda^2)^2} + \frac{z_1^2 - 2z_1 z_2 \lambda - 1}{1 - \lambda^2} \right] - \frac{1}{2\Omega_{11}} \left(\frac{\alpha_1 \alpha_2 \lambda \tau}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}} + \alpha_1 z_1 \right) \zeta_1(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ell}{\partial \Omega_{12}} &= \frac{1}{\sqrt{\Omega_{11}\Omega_{22}}} \left[\frac{\lambda + z_1 z_2}{1 - \lambda^2} - \frac{(z_1^2 + z_2^2 - 2z_1 z_2 \lambda) \lambda}{(1 - \lambda^2)^2} \right] + \frac{\alpha_1 \alpha_2 \tau}{\sqrt{\Omega_{11}\Omega_{22}} \sqrt{1 + \alpha_*^2}} \zeta_1(t), \\
\frac{\partial \ell}{\partial \Omega_{22}} &= \frac{1}{2\Omega_{22}} \left[\frac{(z_1^2 + z_2^2 - 2z_1 z_2 \lambda) \lambda^2}{(1 - \lambda^2)^2} + \frac{z_2^2 - 2z_1 z_2 \lambda - 1}{1 - \lambda^2} \right] - \frac{1}{2\Omega_{22}} \left(\frac{\alpha_1 \alpha_2 \lambda \tau}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}} + \alpha_2 z_2 \right) \zeta_1(t), \\
\frac{\partial \ell}{\partial \alpha_1} &= \left[\frac{(\alpha_1 + \lambda \alpha_2) \tau}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}} + z_1 \right] \zeta_1(t), \\
\frac{\partial \ell}{\partial \alpha_2} &= \left[\frac{(\alpha_2 + \lambda \alpha_1) \tau}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}} + z_2 \right] \zeta_1(t), \\
\frac{\partial \ell}{\partial \tau} &= \sqrt{1 + \alpha_*^2} \zeta_1(t) - \zeta_1(\tau).
\end{aligned}$$

Le espressioni ottenute algebricamente sono state confrontate con le derivate numeriche calcolate tramite la funzione `grad` del *package* `numDeriv` (Gilbert, 2009) di R (R Development Core Team, 2010) per varie combinazioni dei parametri e di y , riportando, per ogni combinazione, dei valori uguali.

Le equazioni di verosimiglianza $\frac{d}{d\theta} \ell(\theta) = 0$ non hanno una soluzione esplicita. Il calcolo delle stime di massima verosimiglianza dovrà quindi essere effettuato per via numerica.

3.3 La matrice di informazione osservata e attesa di Fisher

In questo paragrafo si riportano i passaggi relativi al calcolo della matrice d'informazione osservata e attesa di Fisher e alcune considerazioni di carattere qualitativo su di essa.

3.3.1 Calcolo della matrice d'informazione

Definiti $\zeta_2(\cdot)$ e t come in (2.8) e (3.3) rispettivamente, calcolando le derivate parziali seconde della funzione di log-verosimiglianza (3.1) otteniamo le espressioni delle componenti della matrice di informazione osservata, $j(\theta)$, date da

$$\begin{aligned}
-j_{11} &= \frac{\partial^2 \ell}{\partial \xi_1^2} = -\frac{1}{\Omega_{11}} \left[\frac{1}{1-\lambda^2} - \alpha_1^2 \zeta_2(t) \right], \\
-j_{12} &= \frac{\partial^2 \ell}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} = \frac{1}{\sqrt{\Omega_{11} \Omega_{22}}} \left[\frac{\lambda}{1-\lambda^2} + \alpha_1 \alpha_2 \zeta_2(t) \right], \\
-j_{13} &= \frac{\partial^2 \ell}{\partial \xi_1 \partial \Omega_{11}} = \frac{\lambda z_2 - z_1}{(1-\lambda^2)^2 \Omega_{11}^{3/2}} + \frac{\alpha_1}{2\Omega_{11}^{3/2}} \left(\frac{\alpha_1 \alpha_2 \lambda \tau}{\sqrt{1+\alpha_*^2}} + \alpha_1 z_1 \right) \zeta_2(t) + \frac{\alpha_1}{2\Omega_{11}^{3/2}} \zeta_1(t), \\
-j_{14} &= \frac{\partial^2 \ell}{\partial \xi_1 \partial \Omega_{12}} = -\frac{2\lambda(\lambda z_2 - z_1)}{(1-\lambda^2)^2 \Omega_{11} \sqrt{\Omega_{22}}} - \frac{z_2}{(1-\lambda^2) \Omega_{11} \sqrt{\Omega_{22}}} - \frac{\alpha_1^2 \alpha_2 \tau}{\Omega_{11} \sqrt{\Omega_{22}} \sqrt{1+\alpha_*^2}} \zeta_2(t), \\
-j_{15} &= \frac{\partial^2 \ell}{\partial \xi_1 \partial \Omega_{22}} = \frac{\lambda(z_2 - z_1 \lambda)}{(1-\lambda^2)^2 \Omega_{22} \sqrt{\Omega_{11}}} + \frac{\alpha_1}{2\Omega_{22} \sqrt{\Omega_{11}}} \left(\frac{\alpha_1 \alpha_2 \lambda \tau}{\sqrt{1+\alpha_*^2}} + \alpha_2 z_2 \right) \zeta_2(t), \\
-j_{16} &= \frac{\partial^2 \ell}{\partial \xi_1 \partial \alpha_1} = -\frac{\alpha_1}{\sqrt{\Omega_{11}}} \left[\frac{(\alpha_1 + \lambda \alpha_2) \tau}{\sqrt{1+\alpha_*^2}} + z_1 \right] \zeta_2(t) - \frac{1}{\sqrt{\Omega_{11}}} \zeta_1(t), \\
-j_{17} &= \frac{\partial^2 \ell}{\partial \xi_1 \partial \alpha_2} = -\frac{\alpha_1}{\sqrt{\Omega_{11}}} \left[\frac{(\alpha_2 + \lambda \alpha_1) \tau}{\sqrt{1+\alpha_*^2}} + z_2 \right] \zeta_2(t), \\
-j_{18} &= \frac{\partial^2 \ell}{\partial \xi_1 \partial \tau} = -\frac{\alpha_1 \sqrt{1+\alpha_*^2}}{\sqrt{\Omega_{11}}} \zeta_2(t), \\
-j_{22} &= \frac{\partial^2 \ell}{\partial \xi_2^2} = -\frac{1}{\Omega_{22}} \left[\frac{1}{1-\lambda^2} - \alpha_2^2 \zeta_2(t) \right], \\
-j_{23} &= \frac{\partial^2 \ell}{\partial \xi_2 \partial \Omega_{11}} = \frac{\lambda(z_1 - z_2 \lambda)}{(1-\lambda^2)^2 \Omega_{11} \sqrt{\Omega_{22}}} + \frac{\alpha_2}{2\Omega_{11} \sqrt{\Omega_{22}}} \left(\frac{\alpha_1 \alpha_2 \lambda \tau}{\sqrt{1+\alpha_*^2}} + \alpha_1 z_1 \right) \zeta_2(t), \\
-j_{24} &= \frac{\partial^2 \ell}{\partial \xi_2 \partial \Omega_{12}} = -\frac{2\lambda(\lambda z_1 - z_2)}{(1-\lambda^2)^2 \Omega_{22} \sqrt{\Omega_{11}}} - \frac{z_1}{(1-\lambda^2) \Omega_{22} \sqrt{\Omega_{11}}} - \frac{\alpha_2^2 \alpha_1 \tau}{\Omega_{22} \sqrt{\Omega_{11}} \sqrt{1+\alpha_*^2}} \zeta_2(t),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-j_{25} &= \frac{\partial^2 \ell}{\partial \xi_2 \partial \Omega_{22}} = \frac{\lambda z_1 - z_2}{(1 - \lambda^2)^2 \Omega_{22}^{3/2}} + \frac{\alpha_2}{2\Omega_{22}^{3/2}} \left(\frac{\alpha_1 \alpha_2 \lambda \tau}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}} + \alpha_2 z_2 \right) \zeta_2(t) + \frac{\alpha_2}{2\Omega_{22}^{3/2}} \zeta_1(t), \\
-j_{26} &= \frac{\partial^2 \ell}{\partial \xi_2 \partial \alpha_1} = -\frac{\alpha_2}{\sqrt{\Omega_{22}}} \left[\frac{(\alpha_1 + \lambda \alpha_2) \tau}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}} + z_1 \right] \zeta_2(t), \\
-j_{27} &= \frac{\partial^2 \ell}{\partial \xi_2 \partial \alpha_2} = -\frac{\alpha_2}{\sqrt{\Omega_{22}}} \left[\frac{(\alpha_2 + \lambda \alpha_1) \tau}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}} + z_2 \right] \zeta_2(t) - \frac{1}{\sqrt{\Omega_{22}}} \zeta_1(t), \\
-j_{28} &= \frac{\partial^2 \ell}{\partial \xi_2 \partial \tau} = -\frac{\alpha_2 \sqrt{1 + \alpha_*^2}}{\sqrt{\Omega_{22}}} \zeta_2(t), \\
-j_{33} &= \frac{\partial^2 \ell}{\partial \Omega_{11}^2} = \frac{\lambda^2 - z_1^2 + 2z_1 z_2 \lambda}{\Omega_{11}^2 (1 - \lambda^2)} + \frac{4\lambda^3 z_1 z_2 - 2\lambda^2 z_1^2 - \lambda^2 z_2^2}{\Omega_{11}^2 (1 - \lambda^2)^2} - \frac{\lambda^4 (z_1^2 + z_2^2 - 2z_1 z_2 \lambda)}{\Omega_{11}^2 (1 - \lambda^2)^3} + \\
&\quad + \frac{1}{2\Omega_{11}^2} + \frac{\lambda^4}{2\Omega_{11}^2 (1 - \lambda^2)^2} + \frac{1}{4\Omega_{11}^2} \left(\frac{3\alpha_1 \alpha_2 \tau \lambda}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}} - \frac{\alpha_1^2 \alpha_2^2 \tau \lambda^2}{(1 + \alpha_*^2)^{3/2}} + 3\alpha_1 z_1 \right) \zeta_1(t) + \\
&\quad + \frac{1}{4\Omega_{11}^2} \left(\frac{\alpha_1 \alpha_2 \lambda \tau}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}} + \alpha_1 z_1 \right)^2 \zeta_2(t), \\
-j_{34} &= \frac{\partial^2 \ell}{\partial \Omega_{11} \partial \Omega_{12}} = -\frac{\lambda + z_1 z_2}{(1 - \lambda^2) \Omega_{11}^{3/2} \sqrt{\Omega_{22}}} + \frac{2\lambda z_1^2 + \lambda z_2^2 - 5\lambda^2 z_1 z_2 - \lambda^3}{(1 - \lambda^2)^2 \Omega_{11}^{3/2} \sqrt{\Omega_{22}}} + \frac{2\lambda^3 (z_1^2 + z_2^2 - 2z_1 z_2 \lambda)}{(1 - \lambda^2)^3 \Omega_{11}^{3/2} \sqrt{\Omega_{22}}} + \\
&\quad + \left(\frac{\alpha_1^2 \alpha_2^2 \tau \lambda}{2\Omega_{11}^{3/2} \sqrt{\Omega_{22}} (1 + \alpha_*^2)^{3/2}} - \frac{\alpha_1 \alpha_2 \tau}{2\Omega_{11}^{3/2} \sqrt{\Omega_{22}} \sqrt{1 + \alpha_*^2}} \right) \zeta_1(t) + \\
&\quad - \frac{\alpha_1 \alpha_2 \tau}{2\Omega_{11}^{3/2} \sqrt{\Omega_{22}} \sqrt{1 + \alpha_*^2}} \left(\frac{\alpha_1 \alpha_2 \lambda \tau}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}} + \alpha_1 z_1 \right) \zeta_2(t), \\
-j_{35} &= \frac{\partial^2 \ell}{\partial \Omega_{11} \partial \Omega_{22}} = \frac{\lambda^4 + 6\lambda^3 z_1 z_2 - 2\lambda^2 z_1^2 - 2\lambda^2 z_2^2}{2\Omega_{11} \Omega_{22} (1 - \lambda^2)^2} + \frac{\lambda^2}{2\Omega_{11} \Omega_{22} (1 - \lambda^2)} + \frac{\lambda z_1 z_2}{\Omega_{11} \Omega_{22} (1 - \lambda^2)} + \\
&\quad - \frac{\lambda^4 (z_1^2 + z_2^2 - 2z_1 z_2 \lambda)}{\Omega_{11} \Omega_{22} (1 - \lambda^2)^3} + \frac{\alpha_1 \alpha_2 \lambda \tau}{4\Omega_{11} \Omega_{22} \sqrt{1 + \alpha_*^2}} \left(1 - \frac{\alpha_1 \alpha_2 \lambda}{1 + \alpha_*^2} \right) \zeta_1(t) + \\
&\quad + \frac{1}{4\Omega_{11} \Omega_{22}} \left(\frac{\alpha_1 \alpha_2 \lambda \tau}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}} + \alpha_1 z_1 \right) \left(\frac{\alpha_1 \alpha_2 \lambda \tau}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}} + \alpha_2 z_2 \right) \zeta_2(t), \\
-j_{36} &= \frac{\partial^2 \ell}{\partial \Omega_{11} \partial \alpha_1} = \frac{1}{2\Omega_{11}} \left(\frac{\alpha_1 \alpha_2 \lambda (\alpha_2 \lambda + \alpha_1) \tau}{(1 + \alpha_*^2)^{3/2}} - \frac{\alpha_2 \lambda \tau}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}} - z_1 \right) \zeta_1(t) + \\
&\quad - \frac{1}{2\Omega_{11}} \left(\frac{\alpha_1 \alpha_2 \lambda \tau}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}} + \alpha_1 z_1 \right) \left(\frac{(\alpha_2 \lambda + \alpha_1) \tau}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}} + z_1 \right) \zeta_2(t), \\
-j_{37} &= \frac{\partial^2 \ell}{\partial \Omega_{11} \partial \alpha_2} = \frac{1}{2\Omega_{11}} \left(\frac{\alpha_1 \alpha_2 \lambda (\alpha_1 \lambda + \alpha_2) \tau}{(1 + \alpha_*^2)^{3/2}} - \frac{\alpha_1 \lambda \tau}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}} \right) \zeta_1(t) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2\Omega_{11}} \left(\frac{\alpha_1 \alpha_2 \lambda \tau}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}} + \alpha_1 z_1 \right) \left(\frac{(\alpha_2 + \alpha_1 \lambda) \tau}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}} + z_2 \right) \zeta_2(t), \\
-j_{38} &= \frac{\partial^2 \ell}{\partial \Omega_{11} \partial \tau} = -\frac{\alpha_1 \alpha_2 \lambda}{2\Omega_{11} \sqrt{1 + \alpha_*^2}} \zeta_1(t) - \frac{\sqrt{1 + \alpha_*^2}}{2\Omega_{11}} \left(\frac{\alpha_1 \alpha_2 \lambda \tau}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}} + \alpha_1 z_1 \right) \zeta_2(t), \\
-j_{44} &= \frac{\partial^2 \ell}{\partial \Omega_{12}^2} = \frac{1}{(1 - \lambda^2) \Omega_{11} \Omega_{22}} + \frac{6\lambda z_1 z_2 - z_1^2 - z_2^2 + 2\lambda^2}{(1 - \lambda^2)^2 \Omega_{11} \Omega_{22}} - \frac{4\lambda^2 (z_1^2 + z_2^2 - 2z_1 z_2 \lambda)}{(1 - \lambda^2)^3 \Omega_{11} \Omega_{22}} + \\
& \quad + \frac{\alpha_1^2 \alpha_2^2 \tau}{\Omega_{11} \Omega_{22} (1 + \alpha_*^2)} \left(\tau \zeta_2(t) - \frac{\zeta_1(t)}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}} \right), \\
-j_{45} &= \frac{\partial^2 \ell}{\partial \Omega_{12} \partial \Omega_{22}} = -\frac{\lambda + z_1 z_2}{(1 - \lambda^2) \Omega_{22}^{3/2} \sqrt{\Omega_{11}}} + \frac{2\lambda z_2^2 + \lambda z_1^2 - 5\lambda^2 z_1 z_2 - \lambda^3}{(1 - \lambda^2)^2 \Omega_{22}^{3/2} \sqrt{\Omega_{11}}} + \\
& \quad + \left(\frac{\alpha_1^2 \alpha_2^2 \tau \lambda}{2\Omega_{22}^{3/2} \sqrt{\Omega_{11}} (1 + \alpha_*^2)^{3/2}} - \frac{\alpha_1 \alpha_2 \tau}{2\Omega_{22}^{3/2} \sqrt{\Omega_{11}} \sqrt{1 + \alpha_*^2}} \right) \zeta_1(t) + \\
& \quad - \frac{\alpha_1 \alpha_2 \tau}{2\Omega_{22}^{3/2} \sqrt{\Omega_{11}} \sqrt{1 + \alpha_*^2}} \left(\frac{\alpha_1 \alpha_2 \lambda \tau}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}} + \alpha_2 z_2 \right) \zeta_2(t) + \\
& \quad + \frac{2\lambda^3 (z_1^2 + z_2^2 - 2z_1 z_2 \lambda)}{(1 - \lambda^2)^3 \Omega_{22}^{3/2} \sqrt{\Omega_{11}}}, \\
-j_{46} &= \frac{\partial^2 \ell}{\partial \Omega_{12} \partial \alpha_1} = \frac{\alpha_2 \tau}{\sqrt{\Omega_{11} \Omega_{22}} \sqrt{1 + \alpha_*^2}} \left(1 - \frac{\alpha_1 (\alpha_2 \lambda + \alpha_1)}{1 + \alpha_*^2} \right) \zeta_1(t) + \\
& \quad + \frac{\alpha_1 \alpha_2 \tau}{\sqrt{\Omega_{11} \Omega_{22}} \sqrt{1 + \alpha_*^2}} \left(\frac{(\alpha_1 + \lambda \alpha_2) \tau}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}} + z_1 \right) \zeta_2(t), \\
-j_{47} &= \frac{\partial^2 \ell}{\partial \Omega_{12} \partial \alpha_2} = \frac{\alpha_1 \tau}{\sqrt{\Omega_{11} \Omega_{22}} \sqrt{1 + \alpha_*^2}} \left(1 - \frac{\alpha_2 (\alpha_1 \lambda + \alpha_2)}{1 + \alpha_*^2} \right) \zeta_1(t) + \\
& \quad + \frac{\alpha_1 \alpha_2 \tau}{\sqrt{\Omega_{11} \Omega_{22}} \sqrt{1 + \alpha_*^2}} \left(\frac{(\alpha_2 + \lambda \alpha_1) \tau}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}} + z_2 \right) \zeta_2(t), \\
-j_{48} &= \frac{\partial^2 \ell}{\partial \Omega_{12} \partial \tau} = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\sqrt{\Omega_{11} \Omega_{22}}} \left(\frac{\zeta_1(t)}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}} + \tau \zeta_2(t) \right), \\
-j_{55} &= \frac{\partial^2 \ell}{\partial \Omega_{22}^2} = \frac{\lambda^2 - z_2^2 + 2z_1 z_2 \lambda}{\Omega_{22}^2 (1 - \lambda^2)} + \frac{4\lambda^3 z_1 z_2 - 2\lambda^2 z_2^2 - \lambda^2 z_1^2}{\Omega_{22}^2 (1 - \lambda^2)^2} - \frac{\lambda^4 (z_1^2 + z_2^2 - 2z_1 z_2 \lambda)}{\Omega_{22}^2 (1 - \lambda^2)^3} + \\
& \quad + \frac{1}{2\Omega_{22}^2} + \frac{\lambda^4}{2\Omega_{22}^2 (1 - \lambda^2)^2} + \frac{1}{4\Omega_{22}^2} \left(\frac{3\alpha_1 \alpha_2 \tau \lambda}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}} - \frac{\alpha_1^2 \alpha_2^2 \tau \lambda^2}{(1 + \alpha_*^2)^{3/2}} + 3\alpha_2 z_2 \right) \zeta_1(t) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4\Omega_{22}^2} \left(\frac{\alpha_1 \alpha_2 \lambda \tau}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}} + \alpha_2 z_2 \right)^2 \zeta_2(t), \\
-j_{56} &= \frac{\partial^2 \ell}{\partial \Omega_{22} \partial \alpha_1} = \frac{1}{2\Omega_{22}} \left(\frac{\alpha_1 \alpha_2 \lambda (\alpha_2 \lambda + \alpha_1) \tau}{(1 + \alpha_*^2)^{3/2}} - \frac{\alpha_2 \lambda \tau}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}} \right) \zeta_1(t) + \\
& - \frac{1}{2\Omega_{22}} \left(\frac{\alpha_1 \alpha_2 \lambda \tau}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}} + \alpha_2 z_2 \right) \left(\frac{(\alpha_1 + \alpha_2 \lambda) \tau}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}} + z_1 \right) \zeta_2(t), \\
-j_{57} &= \frac{\partial^2 \ell}{\partial \Omega_{22} \partial \alpha_2} = \frac{1}{2\Omega_{22}} \left(\frac{\alpha_1 \alpha_2 \lambda (\alpha_1 \lambda + \alpha_2) \tau}{(1 + \alpha_*^2)^{3/2}} - \frac{\alpha_1 \lambda \tau}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}} - z_2 \right) \zeta_1(t) + \\
& - \frac{1}{2\Omega_{22}} \left(\frac{\alpha_1 \alpha_2 \lambda \tau}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}} + \alpha_2 z_2 \right) \left(\frac{(\alpha_1 \lambda + \alpha_2) \tau}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}} + z_2 \right) \zeta_2(t), \\
-j_{58} &= \frac{\partial^2 \ell}{\partial \Omega_{22} \partial \tau} = -\frac{\alpha_1 \alpha_2 \lambda}{2\Omega_{22} \sqrt{1 + \alpha_*^2}} \zeta_1(t) - \frac{\sqrt{1 + \alpha_*^2}}{2\Omega_{22}} \left(\frac{\alpha_1 \alpha_2 \lambda \tau}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}} + \alpha_2 z_2 \right) \zeta_2(t), \\
-j_{66} &= \frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha_1^2} = \left(\frac{\tau}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}} - \frac{(\alpha_2 \lambda + \alpha_1)^2 \tau}{(1 + \alpha_*^2)^{3/2}} \right) \zeta_1(t) + \left(\frac{(\alpha_1 + \lambda \alpha_2) \tau}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}} + z_1 \right)^2 \zeta_2(t), \\
-j_{67} &= \frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} = \left(\frac{\lambda \tau}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}} - \frac{(\alpha_2 + \lambda \alpha_1)(\alpha_1 + \lambda \alpha_2) \tau}{(1 + \alpha_*^2)^{3/2}} \right) \zeta_1(t) + \\
& + \left(\frac{(\alpha_1 + \lambda \alpha_2) \tau}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}} + z_1 \right) \left(\frac{(\alpha_2 + \lambda \alpha_1) \tau}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}} + z_2 \right) \zeta_2(t), \\
-j_{68} &= \frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha_1 \partial \tau} = \frac{\alpha_1 + \lambda \alpha_2}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}} \zeta_1(t) + \left(\frac{(\alpha_1 + \lambda \alpha_2) \tau}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}} + z_1 \right) \sqrt{1 + \alpha_*^2} \zeta_2(t), \\
-j_{77} &= \frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha_2^2} = \left(\frac{\tau}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}} - \frac{(\alpha_1 \lambda + \alpha_2)^2 \tau}{(1 + \alpha_*^2)^{3/2}} \right) \zeta_1(t) + \left(\frac{(\alpha_2 + \lambda \alpha_1) \tau}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}} + z_2 \right)^2 \zeta_2(t), \\
-j_{78} &= \frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha_2 \partial \tau} = \frac{\alpha_2 + \lambda \alpha_1}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}} \zeta_1(t) + \left(\frac{(\alpha_2 + \lambda \alpha_1) \tau}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}} + z_2 \right) \sqrt{1 + \alpha_*^2} \zeta_2(t), \\
-j_{88} &= \frac{\partial^2 \ell}{\partial \tau^2} = (1 + \alpha_*^2) \zeta_2(t) - \zeta_2(\tau).
\end{aligned}$$

Alcune parti delle espressioni algebriche sono state ottenute in prima battuta utilizzando il programma di calcolo simbolico e numerico *Maxima* (Schelter et al., 2009) e poi affinate ma-

nualmente. Le espressioni finali ottenute per via algebrica sono state confrontate con le derivate numeriche calcolate tramite la funzione `hessian` del `package numDeriv` (Gilbert, 2009) di R (R Development Core Team, 2010) per varie combinazioni dei parametri e di y , riportando, per ogni combinazione, dei valori sostanzialmente uguali, nel senso che le differenze in valore assoluto tra i risultati ottenuti per via numerica e algebricamente sono sempre inferiori all'errore di calcolo impostato nella funzione `hessian` e sono da attribuirsi ad errore numerico.

Si introducono i seguenti lemmi ben noti in letteratura che verranno utilizzati successivamente. Essi sono reperibili in varie fonti della letteratura, ad esempio (A) Azzalini (2001) pag.299, (B) Mardia et al. (1979) pag.458, (C) Azzalini (2001) pag.309.

Lemma 3.2 (Formula di *Sherman – Morrison*, (A)). *Sia A una matrice quadrata $n \times n$ e b, d vettori colonna $n \times 1$, allora:*

$$(A + bd^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{1}{1 + d^T A^{-1} b} A^{-1} b d^T A^{-1}. \quad (3.4)$$

Lemma 3.3 (B). *Sia A una matrice quadrata $n \times n$ e b un vettore colonna $n \times 1$, allora:*

$$|A + bb^T| = |A|(1 + b^T A^{-1} b). \quad (3.5)$$

Lemma 3.4 (Completamento del quadrato, (C)). *Se A è una matrice $k \times k$ simmetrica definita positiva e b un vettore $k \times 1$, allora*

$$\int_{\mathbb{R}^k} \frac{1}{(2\pi)^{k/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(y^T A y - 2b^T y)\right\} dy = \frac{\exp\left\{\frac{1}{2}(b^T A^{-1} b)\right\}}{|A|^{1/2}}. \quad (3.6)$$

dove dy sta per $dy_1 \dots dy_k$.

Prima di passare al calcolo degli elementi della matrice d'informazione attesa si presentano e dimostrano i seguenti lemmi, non noti in letteratura, necessari per il calcolo del valore atteso dell'informazione osservata.

Lemma 3.5. *Se $Z \sim ESN_k(0, \bar{\Omega}, \alpha, \tau)$ e $\zeta_1(\cdot)$ la funzione definita in (2.7), allora*

$$\mathbb{E}[\zeta_1(\alpha_0 + \alpha^T Z)] = \frac{\zeta_1(\tau)}{\sqrt{1 + \alpha^T \bar{\Omega} \alpha}} \quad (3.7)$$

dove $\alpha_0 = \tau(1 + \alpha^T \bar{\Omega} \alpha)^{1/2}$ e $\bar{\Omega}$ è matrice di correlazione di dimensione $k \times k$ di rango massimo.

Dimostrazione. Indichiamo con I il valore atteso a sinistra del segno di uguaglianza in (3.7) e α_*^2 come in (2.17). Risulta che

$$\begin{aligned}
I &= \int_{\mathbb{R}^k} \frac{\phi(\alpha_0 + \alpha^T z)}{\Phi(\alpha_0 + \alpha^T z)} \times \frac{1}{\Phi(\tau)} \phi_k(z, \bar{\Omega}) \Phi(\alpha_0 + \alpha^T z) dz \\
&= \frac{1}{\Phi(\tau)} \int_{\mathbb{R}^k} \phi_k(z, \bar{\Omega}) \phi(\alpha_0 + \alpha^T z) dz \\
&= \frac{1}{\Phi(\tau)} \int_{\mathbb{R}^k} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\alpha_0 + \alpha^T z)^2\right\} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{k}{2}} |\bar{\Omega}|^{\frac{1}{2}}} \times \exp\left\{-\frac{1}{2}(z^T \bar{\Omega}^{-1} z)\right\} dz \\
&= \frac{1}{\Phi(\tau)} \frac{1}{|\bar{\Omega}|^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}^k} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{k}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}[(\alpha_0 + \alpha^T z)^2 + (z^T \bar{\Omega}^{-1} z)]\right\} dz.
\end{aligned}$$

Siano

$$\begin{aligned}
u &= \begin{pmatrix} 1 \\ z \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad \Psi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \bar{\Omega}^{-1} \end{pmatrix}, \\
\beta\beta^T + \Psi &= \begin{pmatrix} \alpha_0^2 & \alpha_0 \alpha^T \\ \alpha_0 \alpha & \alpha \alpha^T + \bar{\Omega}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma^{11} & \Sigma^{12} \\ \Sigma^{21} & \Sigma^{22} \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

per cui

$$\begin{aligned}
Q &= [(\alpha_0 + \alpha^T z)^2 + (z^T \bar{\Omega}^{-1} z)] \\
&= \left[(\alpha_0 \ \alpha^T) \begin{pmatrix} 1 \\ z \end{pmatrix} \right]^2 + (z^T \bar{\Omega}^{-1} z) \\
&= (u^T \beta)(\beta^T u) + (u^T \Psi u) \\
&= u^T (\beta\beta^T + \Psi) u \\
&= u^T \begin{pmatrix} \Sigma^{11} & \Sigma^{12} \\ \Sigma^{21} & \Sigma^{22} \end{pmatrix} u \\
&= \Sigma^{11} + 2\Sigma^{12} z + z^T \Sigma^{22} z.
\end{aligned}$$

Esplicitiamo inoltre

$$(\Sigma^{22})^{-1} = (\bar{\Omega}^{-1} + \alpha \alpha^T)^{-1} = \bar{\Omega} - \frac{1}{1 + \alpha^T \bar{\Omega} \alpha} \bar{\Omega} \alpha \alpha^T \bar{\Omega}, \quad (3.8)$$

$$|\Sigma^{22}| = |\bar{\Omega}^{-1} + \alpha \alpha^T| = |\bar{\Omega}^{-1}| (1 + \alpha^T \bar{\Omega} \alpha). \quad (3.9)$$

Da qui segue che

$$I = \frac{1}{\Phi(\tau)} \frac{1}{|\bar{\Omega}|^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\Sigma^{11}\right\} \int_{\mathbb{R}^k} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{k}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}[z^T \Sigma^{22} z - 2(-\Sigma^{12})z]\right\} dz.$$

Sfruttando il Lemma 3.4 otteniamo:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\Phi(\tau)} \frac{1}{|\bar{\Omega}|^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\Sigma^{11}\right\} \frac{\exp\left\{\frac{1}{2}[\Sigma^{12}(\Sigma^{22})^{-1}(\Sigma^{12})^T]\right\}}{|\Sigma^{22}|^{\frac{1}{2}}} & (3.10) \\ &= \frac{1}{\Phi(\tau)} \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^T \bar{\Omega} \alpha}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\alpha_0^2\right\} \exp\left\{\frac{1}{2}[\alpha_0^2 \alpha^T (\Sigma^{22})^{-1} \alpha]\right\} \\ &= \frac{1}{\Phi(\tau)} \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^T \bar{\Omega} \alpha}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\tau^2\right\} \exp\left\{\frac{1}{2}[\alpha_0^2 \alpha^T (\Sigma^{22})^{-1} \alpha - \tau^2 \alpha^T \bar{\Omega} \alpha]\right\} \\ &= \frac{\phi(\tau)}{\Phi(\tau)} \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^T \bar{\Omega} \alpha}} \exp\left\{\frac{1}{2}\left[\tau(1+\alpha^T \bar{\Omega} \alpha) \alpha^T \left(\bar{\Omega} - \frac{1}{1+\alpha^T \bar{\Omega} \alpha} \bar{\Omega} \alpha \alpha^T \bar{\Omega}\right) \alpha - \tau^2 \alpha^T \bar{\Omega} \alpha\right]\right\} \\ &= \frac{\zeta_1(\tau)}{\sqrt{1+\alpha^T \bar{\Omega} \alpha}} \exp\left\{\frac{1}{2}\left[\tau(1+\alpha_*^2) \left(\alpha_*^2 - \frac{\alpha_*^4}{1+\alpha_*^2}\right) - \tau \alpha_*^2\right]\right\} \\ &= \frac{\zeta_1(\tau)}{\sqrt{1+\alpha^T \bar{\Omega} \alpha}} \exp\left\{\frac{1}{2}\left[\tau(\alpha_*^2 + \alpha_*^4 - \alpha_*^4) - \tau \alpha_*^2\right]\right\} \\ &= \frac{\zeta_1(\tau)}{\sqrt{1+\alpha^T \bar{\Omega} \alpha}}. \end{aligned}$$

□

Il seguente lemma include e generalizza il caso appena presentato nel Lemma 3.5, grazie al quale sarà possibile il calcolo del valore atteso di ogni componente della matrice di informazione osservata.

Lemma 3.6. *Se $Z \sim ESN_k(0, \bar{\Omega}, \alpha, \tau)$ e $\zeta_1(\cdot)$ la funzione definita in (2.7), allora*

$$\mathbb{E}[h(Z)\zeta_1(\alpha_0 + \alpha^T Z)] = \mathbb{E}[\zeta_1(\alpha_0 + \alpha^T Z)] \mathbb{E}[h(U)] \quad (3.11)$$

dove

$$U \sim N_k(-\tau\delta, \bar{\Omega} - \delta\delta^T), \quad (3.12)$$

$$\delta = \frac{1}{(1+\alpha^T \bar{\Omega} \alpha)^{1/2}} \bar{\Omega} \alpha, \quad (3.13)$$

α_0 è data da (2.16), $\bar{\Omega}$ è matrice di correlazione di dimensione $k \times k$ di rango massimo e $h(\cdot)$ una qualunque funzione da \mathbb{R} in \mathbb{R} tale per cui gli integrali coinvolti esistano.

Dimostrazione. Indichiamo con I il valore atteso a sinistra del segno di uguaglianza in (3.11).
Risulta che

$$\begin{aligned} I &= \int_{\mathbb{R}^k} h(z) \frac{\phi(\alpha_0 + \alpha^T z)}{\Phi(\alpha_0 + \alpha^T z)} \frac{1}{\Phi(\tau)} \phi_k(z, \bar{\Omega}) \Phi(\alpha_0 + \alpha^T z) dz \\ &= \frac{1}{\Phi(\tau)} \frac{1}{|\bar{\Omega}|^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\Sigma^{11}\right\} \int_{\mathbb{R}^k} h(z) \frac{1}{(2\pi)^{\frac{k}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \underbrace{[z^T \Sigma^{22} z - 2(-\Sigma^{12})z]}_{Q_1}\right\} dz, \end{aligned}$$

utilizzando passaggi algebrici analoghi a quelli del Lemma 3.5.

Aggiungiamo e sottraiamo a Q_1 il termine $\Sigma^{12}(\Sigma^{22})^{-1}(\Sigma^{12})^T$ così da ottenere un integrando formato dalla funzione $h(z)$ moltiplicata per la funzione di densità di una v.c. normale multipla U con vettore delle medie $-(\Sigma^{22})^{-1}(\Sigma^{12})^T$ e matrice di covarianza $(\Sigma^{22})^{-1}$ arrivando a

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\Phi(\tau)} \frac{|(\Sigma^{22})^{-1}|^{\frac{1}{2}}}{|\bar{\Omega}|^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\Sigma^{11}\right\} \exp\left\{\frac{1}{2}[\Sigma^{12}(\Sigma^{22})^{-1}(\Sigma^{12})^T]\right\} \times \\ &\quad \int_{\mathbb{R}^k} h(z) \frac{1}{(2\pi)^{\frac{k}{2}} |(\Sigma^{22})^{-1}|^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}[z^T \Sigma^{22} z + 2\Sigma^{12} z + \Sigma^{12}(\Sigma^{22})^{-1}(\Sigma^{12})^T]\right\} dz \\ &= \frac{1}{\Phi(\tau)} \frac{|(\Sigma^{22})^{-1}|^{\frac{1}{2}}}{|\bar{\Omega}|^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\Sigma^{11}\right\} \exp\left\{\frac{1}{2}[\Sigma^{12}(\Sigma^{22})^{-1}(\Sigma^{12})^T]\right\} \times \mathbb{E}[h(U)]. \end{aligned}$$

Visto che nell'espressione soprastante i termini che precedono $\mathbb{E}[h(U)]$ coincidono con il risultato ottenuto nel Lemma 3.5 in (3.10) allora otteniamo che I è pari al termine di destra della (3.11).

Esplicitiamo inoltre i parametri di posizione e di scala della v.c. U dove α_*^2 è definita in (2.17) e δ in (3.13):

$$\begin{aligned} -(\Sigma^{22})^{-1}(\Sigma^{12})^T &= -\tau \sqrt{(1 + \alpha^T \bar{\Omega} \alpha)} \left(\bar{\Omega} - \frac{1}{1 + \alpha^T \bar{\Omega} \alpha} \bar{\Omega} \alpha \alpha^T \bar{\Omega} \right) \alpha \\ &= -\tau \sqrt{1 + \alpha_*^2} \left(\bar{\Omega} \alpha - \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}} \bar{\Omega} \alpha \alpha_*^2 \right) \\ &= -\tau \left(\frac{(1 + \alpha_*^2) \bar{\Omega} \alpha - \alpha_*^2 \bar{\Omega} \alpha}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\tau \frac{1}{(1 + \alpha^T \bar{\Omega} \alpha)^{1/2}} \bar{\Omega} \alpha \\
&= -\tau \delta
\end{aligned}$$

che risulta pari all'espressione specificata nell'enunciato, e inoltre

$$(\Sigma^{22})^{-1} = (\bar{\Omega}^{-1} + \alpha \alpha^T)^{-1} = \bar{\Omega} - \frac{1}{1 + \alpha^T \bar{\Omega} \alpha} \bar{\Omega} \alpha \alpha^T \bar{\Omega} = \bar{\Omega} - \delta \delta^T.$$

□

Verifichiamo che il Lemma 3.6 appena dimostrato generalizza e semplifica il Lemma 3.1 introdotto nel lavoro di Canale (2008), valido nel caso scalare. La semplificazione è legata al fatto che non è più necessario calcolare l'inversa di una funzione di una v.c. e poi calcolarne il valore atteso, ora basta calcolare semplicemente il valore atteso di una funzione di una v.c. di cui conosciamo la distribuzione. Sia Z una variabile casuale tale che $Z \sim ESN_1(0, 1, \alpha, \tau)$, $\zeta_1(\cdot)$ la funzione definita in (2.7), $\alpha_0 = \tau \sqrt{1 + \alpha^2}$, $f(\cdot)$ e $h(\cdot)$ funzioni da \mathbb{R} in \mathbb{R} tale per cui gli integrali coinvolti esistano. Utilizzando il Lemma 3.5 per $k = 1$ si ha che

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\zeta_1(\alpha_0 + \alpha^T Z)] &= \frac{\zeta_1(\tau)}{\sqrt{1 + \alpha^T \bar{\Omega} \alpha}} \\
&= \frac{\zeta_1(\tau)}{\sqrt{1 + \alpha^2}} \\
&= \mathbb{E}[\zeta_1(\alpha_0 + \alpha Z)].
\end{aligned}$$

Sia

$$\begin{aligned}
g(z) &= \alpha \tau + \sqrt{\alpha^2 + 1} z = v \\
g^{-1}(v) &= \frac{v - \alpha \tau}{\sqrt{1 + \alpha^2}}
\end{aligned}$$

Se $V \sim N(0, 1)$ e δ è data da (3.13) allora

$$\begin{aligned}
V^* = g^{-1}(V) &= \frac{V - \alpha \tau}{\sqrt{1 + \alpha^2}} \sim N\left(-\frac{\alpha \tau}{\sqrt{1 + \alpha^2}}, \frac{1}{1 + \alpha^2}\right), \\
U &\sim N_k(-\tau \delta, \bar{\Omega} - \delta \delta^T) \sim N_1\left(-\frac{\alpha \tau}{\sqrt{1 + \alpha^2}}, \frac{1}{1 + \alpha^2}\right).
\end{aligned}$$

Quindi, se $f(\cdot)$ e $h(\cdot)$ rappresentano la stessa funzione, risulta che

$$\mathbb{E}[f(V^*)] = \mathbb{E}[f(g^{-1}(V))] = \mathbb{E}[h(U)]$$

e

$$\mathbb{E}[f(Z)\zeta_1(\alpha_0 + \alpha Z)] = \frac{\zeta_1(\tau)}{\sqrt{\alpha^2 + 1}} \mathbb{E}[f(g^{-1}(V))] = \mathbb{E}[\zeta_1(\alpha_0 + \alpha^T Z)] \mathbb{E}[h(U)].$$

Si riportano quindi alcuni risultati utili nel calcolo dei valori attesi delle derivate parziali seconde della funzione di log-verosimiglianza (3.1) utilizzando la funzione generatrice dei cumulanti (2.27) e il Lemma 3.6. Se $Z \sim ESN_2(0, \bar{\Omega}, \alpha, \tau)$ allora:

$$\mathbb{E}[Z_1] = \zeta_1(\tau)\delta_1 \quad (3.14)$$

$$\mathbb{E}[Z_2] = \zeta_1(\tau)\delta_2 \quad (3.15)$$

$$\mathbb{E}[Z_1 Z_2] = \lambda + \delta_1 \delta_2 [\zeta_2(\tau) + \zeta_1(\tau)^2] \quad (3.16)$$

$$\mathbb{E}[Z_1^2] = 1 + \delta_1^2 [\zeta_2(\tau) + \zeta_1(\tau)^2] \quad (3.17)$$

$$\mathbb{E}[Z_2^2] = 1 + \delta_2^2 [\zeta_2(\tau) + \zeta_1(\tau)^2] \quad (3.18)$$

Sia U come in (3.12), chiameremo $-\tau\delta$ il vettore $k \times 1$ delle medie, V la matrice di covarianza (quadrata di ordine k , simmetrica e definita positiva) pari a $\bar{\Omega} - \delta\delta^T$, λ come in (3.2) e $\alpha_*^2 = \alpha^T \bar{\Omega} \alpha$. In particolare per $k = 2$ si hanno :

$$\begin{aligned} \alpha_*^2 &= \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 2\alpha_1\alpha_2\lambda, \\ \alpha_0 &= \tau\sqrt{1 + \alpha_*^2}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

le componenti del vettore delle medie

$$\begin{aligned} -\tau\delta_1 &= -\tau \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}} (\alpha_1 + \alpha_2\lambda), \\ -\tau\delta_2 &= -\tau \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}} (\alpha_2 + \alpha_1\lambda), \end{aligned}$$

e della matrice di covarianza

$$V = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix}$$

dove

$$\begin{aligned} v_{11} &= \frac{1 + \alpha_2(1 - \lambda^2)}{1 + \alpha_*^2}, \\ v_{22} &= \frac{1 + \alpha_1(1 - \lambda^2)}{1 + \alpha_*^2}, \\ v_{12} &= \frac{\lambda - \alpha_1\alpha_2(1 - \lambda^2)}{1 + \alpha_*^2}. \end{aligned}$$

Definiamo

$$T = \alpha_0 + \alpha^T Z = \alpha_0 + \alpha_1 Z_1 + \alpha_2 Z_2, \quad (3.20)$$

la v.c. associata alla statistica (3.3) e α_0 come in (3.19). Allora

$$\mathbb{E}[\zeta_1(T)] = \frac{\zeta_1(\tau)}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}}, \quad (3.21)$$

$$\mathbb{E}[Z_1 \zeta_1(T)] = -\tau \delta_1 \frac{\zeta_1(\tau)}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}}, \quad (3.22)$$

$$\mathbb{E}[Z_2 \zeta_1(T)] = -\tau \delta_2 \frac{\zeta_1(\tau)}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}}, \quad (3.23)$$

$$\mathbb{E}[Z_1^2 \zeta_1(T)] = (\tau^2 \delta_1^2 + v_{11}) \frac{\zeta_1(\tau)}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}}, \quad (3.24)$$

$$\mathbb{E}[Z_2^2 \zeta_1(T)] = (\tau^2 \delta_2^2 + v_{22}) \frac{\zeta_1(\tau)}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}}, \quad (3.25)$$

$$\mathbb{E}[T \zeta_1(T)] = (\alpha_0 - \tau \alpha^T \delta) \frac{\zeta_1(\tau)}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}}, \quad (3.26)$$

$$\mathbb{E}[Z_1 T \zeta_1(T)] = [-\alpha_0 \tau \delta_1 + \alpha_1 (\tau^2 \delta_1^2 + v_{11}) + \alpha_2 (\tau^2 \delta_1 \delta_2 + v_{12})] \frac{\zeta_1(\tau)}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}}, \quad (3.27)$$

$$\mathbb{E}[Z_2 T \zeta_1(T)] = [-\alpha_0 \tau \delta_2 + \alpha_2 (\tau^2 \delta_2^2 + v_{22}) + \alpha_1 (\tau^2 \delta_1 \delta_2 + v_{12})] \frac{\zeta_1(\tau)}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}}, \quad (3.28)$$

$$\mathbb{E}[\zeta_2(T)] = -(\alpha_0 - \tau \alpha^T \delta) \frac{\zeta_1(\tau)}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}} - \mathbb{E}[\zeta_1(T)^2], \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z_1\zeta_2(T)] &= -[-\alpha_0\tau\delta_1 + \alpha_1(\tau^2\delta_1^2 + v_{11}) + \alpha_2(\tau^2\delta_1\delta_2 + v_{12})] \frac{\zeta_1(\tau)}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}} - \\ &\quad \mathbb{E}[Z_1\zeta_1(T)^2],\end{aligned}\tag{3.30}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z_2\zeta_2(T)] &= -[-\alpha_0\tau\delta_2 + \alpha_2(\tau^2\delta_2^2 + v_{22}) + \alpha_1(\tau^2\delta_1\delta_2 + v_{12})] \frac{\zeta_1(\tau)}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}} - \\ &\quad \mathbb{E}[Z_2\zeta_1(T)^2],\end{aligned}\tag{3.31}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z_1^2\zeta_2(T)] &= -\left[\alpha_0(v_{11} + \tau^2\delta_1^2) - \alpha_1\tau\delta_1(\tau^2\delta_1^2 + 3v_{11}) + \right. \\ &\quad \left.\alpha_2\tau\left(\frac{v_{12}}{v_{11}}\delta_1 - \delta_2\right)(\tau^2\delta_1^2 + v_{11}) - \right. \\ &\quad \left.\alpha_2\tau\delta_1\frac{v_{12}}{v_{11}}(\tau^2\delta_1^2 + 3v_{11})\right] \frac{\zeta_1(\tau)}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}} - \mathbb{E}[Z_1^2\zeta_1(T)^2],\end{aligned}\tag{3.32}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z_2^2\zeta_2(T)] &= -\left[\alpha_0(v_{22} + \tau^2\delta_2^2) - \alpha_2\tau\delta_2(\tau^2\delta_2^2 + 3v_{22}) + \right. \\ &\quad \left.\alpha_1\tau\left(\frac{v_{12}}{v_{22}}\delta_2 - \delta_1\right)(\tau^2\delta_2^2 + v_{22}) - \right. \\ &\quad \left.\alpha_1\tau\delta_2\frac{v_{12}}{v_{22}}(\tau^2\delta_2^2 + 3v_{22})\right] \frac{\zeta_1(\tau)}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}} - \mathbb{E}[Z_2^2\zeta_1(T)^2],\end{aligned}\tag{3.33}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z_1Z_2\zeta_2(T)] &= -\left[\alpha_0(v_{12} + \tau^2\delta_1\delta_2) + \alpha_1\tau\left(\frac{v_{12}}{v_{11}}\delta_1 - \delta_2\right)(\tau^2\delta_1^2 + v_{11}) - \right. \\ &\quad \left.\alpha_1\tau\delta_1\frac{v_{12}}{v_{11}}(\tau^2\delta_1^2 + 3v_{11}) + \alpha_2\tau\left(\frac{v_{12}}{v_{22}}\delta_2 - \delta_1\right)(\tau^2\delta_2^2 + v_{22}) - \right. \\ &\quad \left.\alpha_2\tau\delta_2\frac{v_{12}}{v_{22}}(\tau^2\delta_2^2 + 3v_{22})\right] \frac{\zeta_1(\tau)}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}} - \mathbb{E}[Z_1Z_2\zeta_1(T)^2].\end{aligned}\tag{3.34}$$

Le quantità $a_{j,p}$, a_{ij} e a_0 con $j = 1, 2$, $i = 1, 2$ e $p = 0, 1, 2$ sono definite, per il modello ESN_k , come

$$a_{j,p} = \mathbb{E}\left[Z_j^p\zeta_1(T)^2\right],\tag{3.35}$$

$$a_{ij} = \mathbb{E}\left[Z_iZ_j\zeta_1(T)^2\right],\tag{3.36}$$

e

$$a_0 = \mathbb{E}\left[\zeta_1(T)^2\right].\tag{3.37}$$

Il calcolo di queste quantità sarà effettuato tramite integrazione numerica utilizzando la funzione `cuhre` del `package` `R2Cuba` (Thomas Hahn & Ki u, 2010) di R, questa funzione permette di calcolare numericamente integrali multidimensionali.

La matrice d'informazione attesa $i(\theta)$ risulta essere:

$$i(\theta) = \begin{pmatrix} i_{11} & i_{12} & i_{13} & i_{14} & i_{15} & i_{16} & i_{17} & i_{18} \\ & i_{22} & i_{23} & i_{24} & i_{25} & i_{26} & i_{27} & i_{28} \\ & & i_{33} & i_{34} & i_{35} & i_{36} & i_{37} & i_{38} \\ & & & i_{44} & i_{45} & i_{46} & i_{47} & i_{48} \\ & & & & i_{55} & i_{56} & i_{57} & i_{58} \\ & & & & & i_{66} & i_{67} & i_{68} \\ & & & & & & i_{77} & i_{78} \\ & & & & & & & i_{88} \end{pmatrix}$$

simmetrica e semidefinita positiva, dove il triangolo inferiore è completato per simmetria. I suoi termini sono dati da:

$$i_{11} = -\mathbb{E} \left[\frac{\partial^2 \ell}{\partial \xi_1^2} \right] = \frac{1}{\Omega_{11}} \left[\frac{1}{1 - \lambda^2} - \alpha_1^2 \mathbb{E} [\zeta_2(T)] \right], \quad (3.38)$$

$$i_{12} = -\mathbb{E} \left[\frac{\partial^2 \ell}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \right] = -\frac{1}{\sqrt{\Omega_{11} \Omega_{22}}} \left[\frac{\lambda}{1 - \lambda^2} + \alpha_1 \alpha_2 \mathbb{E} [\zeta_2(T)] \right], \quad (3.39)$$

$$i_{13} = -\mathbb{E} \left[\frac{\partial^2 \ell}{\partial \xi_1 \partial \Omega_{11}} \right] = -\frac{\lambda \mathbb{E} [Z_2] - \mathbb{E} [Z_1]}{(1 - \lambda^2)^2 \Omega_{11}^{3/2}} - \frac{\alpha_1}{2 \Omega_{11}^{3/2}} \mathbb{E} [\zeta_1(T)] + \\ - \frac{\alpha_1}{2 \Omega_{11}^{3/2}} \left(\frac{\alpha_1 \alpha_2 \lambda \tau}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}} \mathbb{E} [\zeta_2(T)] + \alpha_1 \mathbb{E} [Z_1 \zeta_2(T)] \right), \quad (3.40)$$

$$i_{14} = -\mathbb{E} \left[\frac{\partial^2 \ell}{\partial \xi_1 \partial \Omega_{12}} \right] = \frac{2\lambda(\lambda \mathbb{E} [Z_2] - \mathbb{E} [Z_1])}{(1 - \lambda^2)^2 \Omega_{11} \sqrt{\Omega_{22}}} + \frac{\mathbb{E} [Z_2]}{(1 - \lambda^2) \Omega_{11} \sqrt{\Omega_{22}}} + \\ + \frac{\alpha_1^2 \alpha_2 \tau}{\Omega_{11} \sqrt{\Omega_{22}} \sqrt{1 + \alpha_*^2}} \mathbb{E} [\zeta_2(T)], \quad (3.41)$$

$$i_{15} = -\mathbb{E} \left[\frac{\partial^2 \ell}{\partial \xi_1 \partial \Omega_{22}} \right] = -\frac{\lambda(\mathbb{E} [Z_2] - \mathbb{E} [Z_1] \lambda)}{(1 - \lambda^2)^2 \Omega_{22} \sqrt{\Omega_{11}}} + \\ - \frac{\alpha_1}{2 \Omega_{22} \sqrt{\Omega_{11}}} \left(\frac{\alpha_1 \alpha_2 \lambda \tau}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}} \mathbb{E} [\zeta_2(T)] + \alpha_2 \mathbb{E} [Z_2 \zeta_2(T)] \right), \quad (3.42)$$

$$i_{16} = -\mathbb{E} \left[\frac{\partial^2 \ell}{\partial \xi_1 \partial \alpha_1} \right] = \frac{\alpha_1}{\sqrt{\Omega_{11}}} \left[\frac{(\alpha_1 + \lambda \alpha_2) \tau}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}} \mathbb{E} [\zeta_2(T)] + \mathbb{E} [Z_1 \zeta_2(T)] \right] + \\ + \frac{1}{\sqrt{\Omega_{11}}} \mathbb{E} [\zeta_1(T)], \quad (3.43)$$

$$i_{17} = -\mathbb{E} \left[\frac{\partial^2 \ell}{\partial \xi_1 \partial \alpha_2} \right] = \frac{\alpha_1}{\sqrt{\Omega_{11}}} \left[\frac{(\alpha_2 + \lambda \alpha_1) \tau}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}} \mathbb{E}[\zeta_2(T)] + \mathbb{E}[Z_2 \zeta_2(T)] \right], \quad (3.44)$$

$$i_{18} = -\mathbb{E} \left[\frac{\partial^2 \ell}{\partial \xi_1 \partial \tau} \right] = \frac{\alpha_1 \sqrt{1 + \alpha_*^2}}{\sqrt{\Omega_{11}}} \mathbb{E}[\zeta_2(T)], \quad (3.45)$$

$$i_{22} = -\mathbb{E} \left[\frac{\partial^2 \ell}{\partial \xi_2^2} \right] = \frac{1}{\Omega_{22}} \left[\frac{1}{1 - \lambda^2} - \alpha_2^2 \mathbb{E}[\zeta_2(T)] \right], \quad (3.46)$$

$$i_{23} = -\mathbb{E} \left[\frac{\partial^2 \ell}{\partial \xi_2 \partial \Omega_{11}} \right] = -\frac{\lambda(\mathbb{E}[Z_1] - \mathbb{E}[Z_2]) \lambda}{(1 - \lambda^2)^2 \Omega_{11} \sqrt{\Omega_{22}}} + \frac{\alpha_2}{2\Omega_{11} \sqrt{\Omega_{22}}} \left(\frac{\alpha_1 \alpha_2 \lambda \tau}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}} \mathbb{E}[\zeta_2(T)] + \alpha_1 \mathbb{E}[Z_1 \zeta_2(T)] \right), \quad (3.47)$$

$$i_{24} = -\mathbb{E} \left[\frac{\partial^2 \ell}{\partial \xi_2 \partial \Omega_{12}} \right] = \frac{2\lambda(\lambda \mathbb{E}[Z_1] - \mathbb{E}[Z_2])}{(1 - \lambda^2)^2 \Omega_{22} \sqrt{\Omega_{11}}} + \frac{\mathbb{E}[Z_1]}{(1 - \lambda^2) \Omega_{22} \sqrt{\Omega_{11}}} + \frac{\alpha_2^2 \alpha_1 \tau}{\Omega_{22} \sqrt{\Omega_{11}} \sqrt{1 + \alpha_*^2}} \mathbb{E}[\zeta_2(T)], \quad (3.48)$$

$$i_{25} = -\mathbb{E} \left[\frac{\partial^2 \ell}{\partial \xi_2 \partial \Omega_{22}} \right] = -\frac{\lambda \mathbb{E}[Z_1] - \mathbb{E}[Z_2]}{(1 - \lambda^2)^2 \Omega_{22}^{3/2}} - \frac{\alpha_2}{2\Omega_{22}^{3/2}} \mathbb{E}[\zeta_1(T)] + \frac{\alpha_2}{2\Omega_{22}^{3/2}} \left(\frac{\alpha_1 \alpha_2 \lambda \tau}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}} \mathbb{E}[\zeta_2(T)] + \alpha_2 \mathbb{E}[Z_2 \zeta_2(T)] \right), \quad (3.49)$$

$$i_{26} = -\mathbb{E} \left[\frac{\partial^2 \ell}{\partial \xi_2 \partial \alpha_1} \right] = \frac{\alpha_2}{\sqrt{\Omega_{22}}} \left[\frac{(\alpha_1 + \lambda \alpha_2) \tau}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}} \mathbb{E}[\zeta_2(T)] + \mathbb{E}[Z_1 \zeta_2(T)] \right], \quad (3.50)$$

$$i_{27} = -\mathbb{E} \left[\frac{\partial^2 \ell}{\partial \xi_2 \partial \alpha_2} \right] = \frac{\alpha_2}{\sqrt{\Omega_{22}}} \left[\frac{(\alpha_2 + \lambda \alpha_1) \tau}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}} \mathbb{E}[\zeta_2(T)] + \mathbb{E}[Z_2 \zeta_2(T)] \right] + \frac{1}{\sqrt{\Omega_{22}}} \mathbb{E}[\zeta_1(T)], \quad (3.51)$$

$$i_{28} = -\mathbb{E} \left[\frac{\partial^2 \ell}{\partial \xi_2 \partial \tau} \right] = \frac{\alpha_2 \sqrt{1 + \alpha_*^2}}{\sqrt{\Omega_{22}}} \mathbb{E}[\zeta_2(T)], \quad (3.52)$$

$$i_{33} = -\mathbb{E} \left[\frac{\partial^2 \ell}{\partial \Omega_{11}^2} \right] = -\frac{\lambda^2 - \mathbb{E}[Z_1^2] + 2\mathbb{E}[Z_1 Z_2] \lambda}{\Omega_{11}^2 (1 - \lambda^2)} - \frac{4\lambda^3 \mathbb{E}[Z_1 Z_2] - 2\lambda^2 \mathbb{E}[Z_1^2] - \lambda^2 \mathbb{E}[Z_2^2]}{\Omega_{11}^2 (1 - \lambda^2)^2} + \frac{1}{4\Omega_{11}^2} \left(\frac{3\alpha_1 \alpha_2 \tau \lambda}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}} \mathbb{E}[\zeta_1(T)] - \frac{\alpha_1^2 \alpha_2^2 \tau \lambda^2}{(1 + \alpha_*^2)^{3/2}} \mathbb{E}[\zeta_1(T)] + 3\alpha_1 \mathbb{E}[Z_1 \zeta_1(T)] \right) + \frac{1}{4\Omega_{11}^2} \left(\frac{\alpha_1^2 \alpha_2^2 \lambda^2 \tau^2}{1 + \alpha_*^2} \mathbb{E}[\zeta_2(T)] + \alpha_1^2 \mathbb{E}[Z_1^2 \zeta_2(T)] + 2 \frac{\alpha_1^2 \alpha_2 \lambda \tau}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}} \mathbb{E}[Z_1 \zeta_2(T)] \right) +$$

$$+ \frac{\lambda^4(\mathbb{E}[Z_1^2] + \mathbb{E}[Z_2^2] - 2\mathbb{E}[Z_1Z_2]\lambda)}{\Omega_{11}^2(1-\lambda^2)^3} - \frac{1}{2\Omega_{11}^2} - \frac{\lambda^4}{2\Omega_{11}^2(1-\lambda^2)^2}, \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned} i_{34} = & -\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2\ell}{\partial\Omega_{11}\partial\Omega_{12}}\right] = \frac{\lambda + \mathbb{E}[Z_1Z_2]}{(1-\lambda^2)\Omega_{11}^{3/2}\sqrt{\Omega_{22}}} - \frac{2\lambda\mathbb{E}[Z_1^2] + \lambda\mathbb{E}[Z_2^2] - 5\lambda^2\mathbb{E}[Z_1Z_2] - \lambda^3}{(1-\lambda^2)^2\Omega_{11}^{3/2}\sqrt{\Omega_{22}}} + \\ & - \frac{2\lambda^3(\mathbb{E}[Z_1^2] + \mathbb{E}[Z_2^2] - 2\mathbb{E}[Z_1Z_2]\lambda)}{(1-\lambda^2)^3\Omega_{11}^{3/2}\sqrt{\Omega_{22}}} + \\ & - \left(\frac{\alpha_1^2\alpha_2^2\tau\lambda}{2\Omega_{11}^{3/2}\sqrt{\Omega_{22}}(1+\alpha_*^2)^{3/2}} - \frac{\alpha_1\alpha_2\tau}{2\Omega_{11}^{3/2}\sqrt{\Omega_{22}}\sqrt{1+\alpha_*^2}}\right)\mathbb{E}[\zeta_1(T)] + \\ & + \frac{\alpha_1\alpha_2\tau}{2\Omega_{11}^{3/2}\sqrt{\Omega_{22}}\sqrt{1+\alpha_*^2}}\left(\frac{\alpha_1\alpha_2\lambda\tau}{\sqrt{1+\alpha_*^2}}\mathbb{E}[\zeta_2(T)] + \alpha_1\mathbb{E}[Z_1\zeta_2(T)]\right), \quad (3.54) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i_{35} = & -\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2\ell}{\partial\Omega_{11}\partial\Omega_{22}}\right] = -\frac{\lambda^4 + 6\lambda^3\mathbb{E}[Z_1Z_2] - 2\lambda^2\mathbb{E}[Z_1^2] - 2\lambda^2\mathbb{E}[Z_2^2]}{2\Omega_{11}\Omega_{22}(1-\lambda^2)^2} + \\ & - \frac{\lambda^2}{2\Omega_{11}\Omega_{22}(1-\lambda^2)} - \frac{\lambda\mathbb{E}[Z_1Z_2]}{\Omega_{11}\Omega_{22}(1-\lambda^2)} + \\ & + \frac{\lambda^4(\mathbb{E}[Z_1^2] + \mathbb{E}[Z_2^2] - 2\mathbb{E}[Z_1Z_2]\lambda)}{\Omega_{11}\Omega_{22}(1-\lambda^2)^3} + \\ & - \frac{\alpha_1\alpha_2\lambda\tau}{4\Omega_{11}\Omega_{22}\sqrt{1+\alpha_*^2}}\left(1 - \frac{\alpha_1\alpha_2\lambda}{\sqrt{1+\alpha_*^2}}\right)\mathbb{E}[\zeta_1(T)] + \\ & - \frac{\alpha_1\alpha_2}{4\Omega_{11}\Omega_{22}}\left(\frac{\alpha_1\alpha_2\lambda^2\tau^2}{1+\alpha_*^2}\mathbb{E}[\zeta_2(T)] + \frac{\alpha_2\lambda\tau}{\sqrt{1+\alpha_*^2}}\mathbb{E}[Z_2\zeta_2(T)] + \right. \\ & \left. + \frac{\alpha_1\lambda\tau}{\sqrt{1+\alpha_*^2}}\mathbb{E}[Z_1\zeta_2(T)] + \mathbb{E}[Z_1Z_2\zeta_2(T)]\right), \quad (3.55) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i_{36} = & -\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2\ell}{\partial\Omega_{11}\partial\alpha_1}\right] = -\frac{1}{2\Omega_{11}}\left(\frac{\alpha_1\alpha_2\lambda(\alpha_2\lambda + \alpha_1)\tau}{(1+\alpha_*^2)^{3/2}}\mathbb{E}[\zeta_1(T)] - \frac{\alpha_2\lambda\tau}{\sqrt{1+\alpha_*^2}}\mathbb{E}[\zeta_1(T)] + \right. \\ & \left. - \mathbb{E}[Z_1\zeta_1(T)]\right) + \\ & + \frac{1}{2\Omega_{11}}\left(\frac{\alpha_1\alpha_2\lambda\tau^2(\alpha_2\lambda + \alpha_1)}{1+\alpha_*^2}\mathbb{E}[\zeta_2(T)] + \frac{\alpha_1\alpha_2\lambda\tau}{\sqrt{1+\alpha_*^2}}\mathbb{E}[Z_1\zeta_2(T)] + \right. \\ & \left. + \frac{\alpha_1(\alpha_2\lambda + \alpha_1)\tau}{\sqrt{1+\alpha_*^2}}\mathbb{E}[Z_1\zeta_2(T)] + \alpha_1\mathbb{E}[Z_1^2\zeta_2(T)]\right), \quad (3.56) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i_{37} = & -\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2\ell}{\partial\Omega_{11}\partial\alpha_2}\right] = -\frac{1}{2\Omega_{11}}\left(\frac{\alpha_1\alpha_2\lambda(\alpha_1\lambda + \alpha_2)\tau}{(1+\alpha_*^2)^{3/2}} - \frac{\alpha_1\lambda\tau}{\sqrt{1+\alpha_*^2}}\right)\mathbb{E}[\zeta_1(T)] + \\ & + \frac{1}{2\Omega_{11}}\left(\frac{\alpha_1\alpha_2\lambda\tau^2(\alpha_2 + \alpha_1\lambda)}{1+\alpha_*^2}\mathbb{E}[\zeta_2(T)] + \frac{\alpha_1\alpha_2\lambda\tau}{\sqrt{1+\alpha_*^2}}\mathbb{E}[Z_2\zeta_2(T)] + \right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{\alpha_1(\alpha_2 + \alpha_1\lambda)\tau}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}} \mathbb{E}[Z_1\zeta_2(T)] + \alpha_1 \mathbb{E}[Z_1 Z_2 \zeta_2(T)] \Big), \quad (3.57)$$

$$\begin{aligned} i_{38} &= -\mathbb{E} \left[\frac{\partial^2 \ell}{\partial \Omega_{11} \partial \tau} \right] = \frac{\alpha_1 \alpha_2 \lambda}{2\Omega_{11} \sqrt{1 + \alpha_*^2}} \mathbb{E}[\zeta_1(T)] + \\ &+ \frac{\sqrt{1 + \alpha_*^2}}{2\Omega_{11}} \left(\frac{\alpha_1 \alpha_2 \lambda \tau}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}} \mathbb{E}[\zeta_2(T)] + \alpha_1 \mathbb{E}[Z_1 \zeta_2(T)] \right), \end{aligned} \quad (3.58)$$

$$\begin{aligned} i_{44} &= -\mathbb{E} \left[\frac{\partial^2 \ell}{\partial \Omega_{12}^2} \right] = -\frac{1}{(1 - \lambda^2)\Omega_{11}\Omega_{22}} - \frac{6\lambda \mathbb{E}[Z_1 Z_2] - \mathbb{E}[Z_1^2] - \mathbb{E}[Z_2^2] + 2\lambda^2}{(1 - \lambda^2)^2 \Omega_{11}\Omega_{22}} + \\ &+ \frac{4\lambda^2(\mathbb{E}[Z_1^2] + \mathbb{E}[Z_2^2] - 2\mathbb{E}[Z_1 Z_2] \lambda)}{(1 - \lambda^2)^3 \Omega_{11}\Omega_{22}} + \\ &- \frac{\alpha_1^2 \alpha_2^2 \tau}{\Omega_{11}\Omega_{22}(1 + \alpha_*^2)} \left(\tau \mathbb{E}[\zeta_2(T)] - \frac{\mathbb{E}[\zeta_1(T)]}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}} \right), \end{aligned} \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned} i_{45} &= -\mathbb{E} \left[\frac{\partial^2 \ell}{\partial \Omega_{12} \partial \Omega_{22}} \right] = \frac{\lambda + \mathbb{E}[Z_1 Z_2]}{(1 - \lambda^2)\Omega_{22}^{3/2} \sqrt{\Omega_{11}}} - \frac{2\lambda \mathbb{E}[Z_2^2] + \lambda \mathbb{E}[Z_1^2] - 5\lambda^2 \mathbb{E}[Z_1 Z_2] - \lambda^3}{(1 - \lambda^2)^2 \Omega_{22}^{3/2} \sqrt{\Omega_{11}}} + \\ &- \frac{2\lambda^3(\mathbb{E}[Z_1^2] + \mathbb{E}[Z_2^2] - 2\mathbb{E}[Z_1 Z_2] \lambda)}{(1 - \lambda^2)^3 \Omega_{22}^{3/2} \sqrt{\Omega_{11}}} + \\ &- \left(\frac{\alpha_1^2 \alpha_2^2 \tau \lambda}{2\Omega_{22}^{3/2} \sqrt{\Omega_{11}}(1 + \alpha_*^2)^{3/2}} - \frac{\alpha_1 \alpha_2 \tau}{2\Omega_{22}^{3/2} \sqrt{\Omega_{11}} \sqrt{1 + \alpha_*^2}} \right) \mathbb{E}[\zeta_1(T)] + \\ &+ \frac{\alpha_1 \alpha_2 \tau}{2\Omega_{22}^{3/2} \sqrt{\Omega_{11}} \sqrt{1 + \alpha_*^2}} \left(\frac{\alpha_1 \alpha_2 \lambda \tau}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}} \mathbb{E}[\zeta_2(T)] + \alpha_2 \mathbb{E}[Z_2 \zeta_2(T)] \right), \end{aligned} \quad (3.60)$$

$$\begin{aligned} i_{46} &= -\mathbb{E} \left[\frac{\partial^2 \ell}{\partial \Omega_{12} \partial \alpha_1} \right] = -\frac{\alpha_2 \tau}{\sqrt{\Omega_{11}\Omega_{22}} \sqrt{1 + \alpha_*^2}} \left(1 - \frac{\alpha_1(\alpha_2 \lambda + \alpha_1)}{1 + \alpha_*^2} \right) \mathbb{E}[\zeta_1(T)] + \\ &- \frac{\alpha_1 \alpha_2 \tau}{\sqrt{\Omega_{11}\Omega_{22}} \sqrt{1 + \alpha_*^2}} \left(\frac{(\alpha_1 + \lambda \alpha_2)\tau}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}} \mathbb{E}[\zeta_2(T)] + \mathbb{E}[Z_1 \zeta_2(T)] \right), \end{aligned} \quad (3.61)$$

$$\begin{aligned} i_{47} &= -\mathbb{E} \left[\frac{\partial^2 \ell}{\partial \Omega_{12} \partial \alpha_2} \right] = -\frac{\alpha_1 \tau}{\sqrt{\Omega_{11}\Omega_{22}} \sqrt{1 + \alpha_*^2}} \left(1 - \frac{\alpha_2(\alpha_1 \lambda + \alpha_2)}{1 + \alpha_*^2} \right) \mathbb{E}[\zeta_1(T)] + \\ &- \frac{\alpha_1 \alpha_2 \tau}{\sqrt{\Omega_{11}\Omega_{22}} \sqrt{1 + \alpha_*^2}} \left(\frac{(\alpha_2 + \lambda \alpha_1)\tau}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}} \mathbb{E}[\zeta_2(T)] + \mathbb{E}[Z_2 \zeta_2(T)] \right), \end{aligned} \quad (3.62)$$

$$i_{48} = -\mathbb{E} \left[\frac{\partial^2 \ell}{\partial \Omega_{12} \partial \tau} \right] = -\frac{\alpha_1 \alpha_2}{\sqrt{\Omega_{11}\Omega_{22}}} \left(\frac{\mathbb{E}[\zeta_1(T)]}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}} + \tau \mathbb{E}[\zeta_2(T)] \right), \quad (3.63)$$

$$\begin{aligned}
i_{55} = & -\mathbb{E} \left[\frac{\partial^2 \ell}{\partial \Omega_{22}^2} \right] = -\frac{\lambda^2 - \mathbb{E}[Z_2^2] + 2\mathbb{E}[Z_1 Z_2] \lambda}{\Omega_{22}^2 (1 - \lambda^2)} - \frac{4\lambda^3 \mathbb{E}[Z_1 Z_2] - 2\lambda^2 \mathbb{E}[Z_2^2] - \lambda^2 \mathbb{E}[Z_1^2]}{\Omega_{22}^2 (1 - \lambda^2)^2} + \\
& + \frac{\lambda^4 (\mathbb{E}[Z_1^2] + \mathbb{E}[Z_2^2] - 2\mathbb{E}[Z_1 Z_2] \lambda)}{\Omega_{22}^2 (1 - \lambda^2)^3} - \frac{1}{2\Omega_{22}^2} - \frac{\lambda^4}{2\Omega_{22}^2 (1 - \lambda^2)^2} + \\
& - \frac{1}{4\Omega_{22}^2} \left(\frac{3\alpha_1 \alpha_2 \tau \lambda}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}} \mathbb{E}[\zeta_1(T)] - \frac{\alpha_1^2 \alpha_2^2 \tau \lambda^2}{(1 + \alpha_*^2)^{3/2}} \mathbb{E}[\zeta_1(T)] + 3\alpha_2 \mathbb{E}[Z_2 \zeta_1(T)] \right) + \\
& - \frac{1}{4\Omega_{22}^2} \left(\frac{\alpha_1^2 \alpha_2^2 \lambda^2 \tau^2}{1 + \alpha_*^2} \mathbb{E}[\zeta_2(T)] + \alpha_2^2 \mathbb{E}[Z_2^2 \zeta_2(T)] + 2 \frac{\alpha_1 \alpha_2^2 \lambda \tau}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}} \mathbb{E}[Z_2 \zeta_2(T)] \right), \quad (3.64)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i_{56} = & -\mathbb{E} \left[\frac{\partial^2 \ell}{\partial \Omega_{22} \partial \alpha_1} \right] = -\frac{1}{2\Omega_{22}} \left(\frac{\alpha_1 \alpha_2 \lambda (\alpha_2 \lambda + \alpha_1) \tau}{(1 + \alpha_*^2)^{3/2}} - \frac{\alpha_2 \lambda \tau}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}} \right) \mathbb{E}[\zeta_1(T)] + \\
& + \frac{1}{2\Omega_{22}} \left(\frac{\alpha_1 \alpha_2 \lambda \tau^2 (\alpha_1 + \alpha_2 \lambda)}{1 + \alpha_*^2} \mathbb{E}[\zeta_2(T)] + \frac{\alpha_1 \alpha_2 \lambda \tau}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}} \mathbb{E}[Z_1 \zeta_2(T)] + \right. \\
& \left. + \frac{\alpha_2 (\alpha_1 + \alpha_2 \lambda) \tau}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}} \mathbb{E}[Z_2 \zeta_2(T)] + \alpha_2 \mathbb{E}[Z_1 Z_2 \zeta_2(T)] \right), \quad (3.65)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i_{57} = & -\mathbb{E} \left[\frac{\partial^2 \ell}{\partial \Omega_{22} \partial \alpha_2} \right] = -\frac{1}{2\Omega_{22}} \left(\frac{\alpha_1 \alpha_2 \lambda (\alpha_1 \lambda + \alpha_2) \tau}{(1 + \alpha_*^2)^{3/2}} \mathbb{E}[\zeta_1(T)] - \frac{\alpha_1 \lambda \tau}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}} \mathbb{E}[\zeta_1(T)] + \right. \\
& \left. - \mathbb{E}[Z_2 \zeta_1(T)] \right) + \\
& + \frac{1}{2\Omega_{22}} \left(\frac{\alpha_1 \alpha_2 \lambda \tau^2 (\alpha_1 \lambda + \alpha_2)}{1 + \alpha_*^2} \mathbb{E}[\zeta_2(T)] + \frac{\alpha_1 \alpha_2 \lambda \tau}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}} \mathbb{E}[Z_2 \zeta_2(T)] + \right. \\
& \left. + \frac{\alpha_2 (\alpha_1 \lambda + \alpha_2) \tau}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}} \mathbb{E}[Z_2 \zeta_2(T)] + \alpha_2 \mathbb{E}[Z_2^2 \zeta_2(T)] \right), \quad (3.66)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i_{58} = & -\mathbb{E} \left[\frac{\partial^2 \ell}{\partial \Omega_{22} \partial \tau} \right] = \frac{\alpha_1 \alpha_2 \lambda}{2\Omega_{22} \sqrt{1 + \alpha_*^2}} \mathbb{E}[\zeta_1(T)] + \\
& + \frac{\sqrt{1 + \alpha_*^2}}{2\Omega_{22}} \left(\frac{\alpha_1 \alpha_2 \lambda \tau}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}} \mathbb{E}[\zeta_2(T)] + \alpha_2 \mathbb{E}[Z_2 \zeta_2(T)] \right), \quad (3.67)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i_{66} = & -\mathbb{E} \left[\frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha_1^2} \right] = -\left(\frac{\tau}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}} - \frac{(\alpha_2 \lambda + \alpha_1)^2 \tau}{(1 + \alpha_*^2)^{3/2}} \right) \mathbb{E}[\zeta_1(T)] - \frac{(\alpha_1 + \lambda \alpha_2)^2 \tau^2}{1 + \alpha_*^2} \mathbb{E}[\zeta_2(T)] + \\
& - \mathbb{E}[Z_1^2 \zeta_2(T)] - 2 \frac{(\alpha_1 + \lambda \alpha_2) \tau}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}} \mathbb{E}[Z_1 \zeta_2(T)], \quad (3.68)
\end{aligned}$$

$$i_{67} = -\mathbb{E} \left[\frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} \right] = -\left(\frac{\lambda \tau}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}} - \frac{(\alpha_2 + \lambda \alpha_1)(\alpha_1 + \lambda \alpha_2) \tau}{(1 + \alpha_*^2)^{3/2}} \right) \mathbb{E}[\zeta_1(T)] +$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{(\alpha_1 + \lambda\alpha_2)(\alpha_2 + \lambda\alpha_1)\tau^2}{1 + \alpha_*^2} \mathbb{E}[\zeta_2(T)] - \frac{(\alpha_1 + \lambda\alpha_2)\tau}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}} \mathbb{E}[Z_2\zeta_2(T)] + \\
& - \frac{(\alpha_2 + \lambda\alpha_1)\tau}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}} \mathbb{E}[Z_1\zeta_2(T)] - \mathbb{E}[Z_1Z_2\zeta_2(T)], \tag{3.69}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i_{68} &= -\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2\ell}{\partial\alpha_1\partial\tau}\right] = -\frac{\alpha_1 + \lambda\alpha_2}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}} \mathbb{E}[\zeta_1(T)] + \\
& - \left(\frac{(\alpha_1 + \lambda\alpha_2)\tau}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}} \mathbb{E}[\zeta_2(T)] + \mathbb{E}[Z_1\zeta_2(T)]\right) \sqrt{1 + \alpha_*^2}, \tag{3.70}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i_{77} &= -\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2\ell}{\partial\alpha_2^2}\right] = -\left(\frac{\tau}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}} - \frac{(\alpha_1\lambda + \alpha_2)^2\tau}{(1 + \alpha_*^2)^{3/2}}\right) \mathbb{E}[\zeta_1(T)] - \frac{(\alpha_2 + \lambda\alpha_1)^2\tau^2}{1 + \alpha_*^2} \mathbb{E}[\zeta_2(T)] + \\
& - \mathbb{E}[Z_2^2\zeta_2(T)] - 2\frac{(\alpha_2 + \lambda\alpha_1)\tau}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}} \mathbb{E}[Z_2\zeta_2(T)], \tag{3.71}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i_{78} &= -\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2\ell}{\partial\alpha_2\partial\tau}\right] = -\frac{\alpha_2 + \lambda\alpha_1}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}} \mathbb{E}[\zeta_1(T)] + \\
& - \left(\frac{(\alpha_2 + \lambda\alpha_1)\tau}{\sqrt{1 + \alpha_*^2}} \mathbb{E}[\zeta_2(T)] + \mathbb{E}[Z_2\zeta_2(T)]\right) \sqrt{1 + \alpha_*^2}, \tag{3.72}
\end{aligned}$$

$$i_{88} = -\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2\ell}{\partial\tau^2}\right] = -(1 + \alpha_*^2) \mathbb{E}[\zeta_2(T)] + \zeta_2(\tau). \tag{3.73}$$

Ogni elemento della matrice di informazione attesa è stato confrontato con l'analogo ottenuto tramite integrazione numerica. Si è utilizzata la *routine* `cuhre` del *package* `R2Cuba` (Thomas Hahn & Ki u, 2010) di `R` (R Development Core Team, 2010) per il calcolo delle componenti della matrice d'informazione attesa numerica. Il confronto tra risultati numerici e analitici fornisce un'indicazione di correttezza di questi ultimi.

3.3.2 Peculiarit  della matrice d'informazione

Sia $i(\nu)$ l'informazione attesa per un generico elemento sulla diagonale principale della matrice di informazione. Se riparametriamo il parametro corrispondente da ν a $\psi(\nu)$ con $\psi(\cdot)$ monotona derivabile, l'informazione attesa di Fisher si modifica secondo una semplice

regola e cioè l'informazione per ψ è

$$\left. \{\psi'(\nu)\}^{-2} i(\nu) \right|_{\nu=\nu(\psi)} \quad (3.74)$$

Nel caso scalare dell'*ESN* il parametro di scala è stato parametrizzato con ω , nel caso bi-dimensionale invece con Ω_{ii} , con $i = 1, 2$, dove Ω_{ii} gioca il ruolo del quadrato di ω . Detto questo, quando dal caso bidimensionale ci si riconduce a quello scalare, la riparametrizzazione del parametro di scala modifica l'informazione attesa del caso bidimensionale nel seguente modo:

$$\left. \{\psi'(\omega)\}^{-2} i(\omega) \right|_{\omega=\omega(\psi)} \quad (3.75)$$

dove

$$\psi(\omega) = \Omega_{ii} = \omega^2, \quad (3.76)$$

quindi

$$\{\psi'(\omega)\}^{-2} = \frac{1}{4\omega^2}. \quad (3.77)$$

Come è stato già accennato, quanto $\tau = 0$ ci si riconduce alla distribuzione normale asimmetrica, e ovviamente questa caratteristica si è mantenuta anche per la matrice di informazione attesa. Fissato $\tau = 0$ si è verificata numericamente, per varie combinazioni degli otto parametri, l'uguaglianza tra gli elementi della matrice di informazione attesa della SN_2 studiata da Arellano-Valle & Azzalini (2008) e la matrice di informazione ottenuta in questo lavoro per l' ESN_2 (chiaramente a meno dell'ultima riga e colonna che si riferiscono al parametro τ). Questo risultato fornisce una indicazione di correttezza dei procedimenti adottati e dei risultati ottenuti. Per una stessa combinazione di parametri, si è verificato numericamente come l'introduzione dell'ottavo parametro $\tau = 0$ porti ad una diminuzione del valore del determinante rispetto a quello di una SN_2 .

Si introduce il seguente risultato sull'indipendenza condizionata a coppie per v.c. con distribuzione ESN_k (Capitanio et al., 2003). Successivamente si vede come la matrice di informazione attesa si partiziona a blocchi per alcune combinazioni di parametri. Per vedere ciò teniamo presente il seguente risultato (Capitanio et al., 2003).

Proposizione 3.7 (Indipendenza condizionata a coppie). *Se $Y \sim ESN_k(\xi, \Omega, \alpha, \tau)$, allora*

$Y_i \perp\!\!\!\perp Y_j \mid$ il resto delle variabili

se e solo se sono rispettate allo stesso tempo le seguenti condizioni:

(a) $\Omega^{ij} = 0$

(b) $\alpha_i \alpha_j = 0$

dove Ω^{ij} indica la (i, j) -esima componente di Ω^{-1} .

Se $Y \sim ESN_2(\xi, \Omega, \alpha, \tau)$, per particolari configurazioni dei parametri nel caso bidimensionale dalla proposizione precedente otteniamo i seguenti risultati:

quando $\Omega_{12} = 0$, $\alpha_1 = 0$ e $\tau = 0$ risulta che

$$f_{ESN_2}(y; \xi, \Omega, \alpha, \tau) = f_N(y_1; \xi_1, \Omega_{11}) \times f_{SN}(y_2; \xi_2, \Omega_{22}, \alpha_2), \quad (3.78)$$

quando $\Omega_{12} = 0$ e $\alpha_1 = 0$ risulta che

$$f_{ESN_2}(y; \xi, \Omega, \alpha, \tau) = f_N(y_1; \xi_1, \Omega_{11}) \times f_{ESN}(y_2; \xi_2, \Omega_{22}, \alpha_2, \tau). \quad (3.79)$$

Riordinando le componenti in maniera opportuna, la matrice di informazione attesa per una normale asimmetrica estesa bidimensionale si partiziona, rispettivamente per i due casi sopracitati, nel seguente modo:

$$i(\theta_A) = \left(\begin{array}{c|c} i_N(\theta_1) & 0 \\ \hline 0 & i_{SN}(\theta_2) \end{array} \right), \quad i(\theta_B) = \left(\begin{array}{c|c} i_N(\theta_1) & 0 \\ \hline 0 & i_{ESN}(\theta_3) \end{array} \right)$$

dove $\theta_A = (\xi_1, \xi_2, \Omega_{11}, \Omega_{22}, \alpha_2)$, $\theta_B = (\xi_1, \xi_2, \Omega_{11}, \Omega_{22}, \alpha_2, \tau)$, $\theta_1 = (\xi_1, \Omega_{11})$, $\theta_2 = (\xi_2, \Omega_{22}, \alpha_2)$ e $\theta_3 = (\xi_2, \Omega_{22}, \alpha_2, \tau)$.

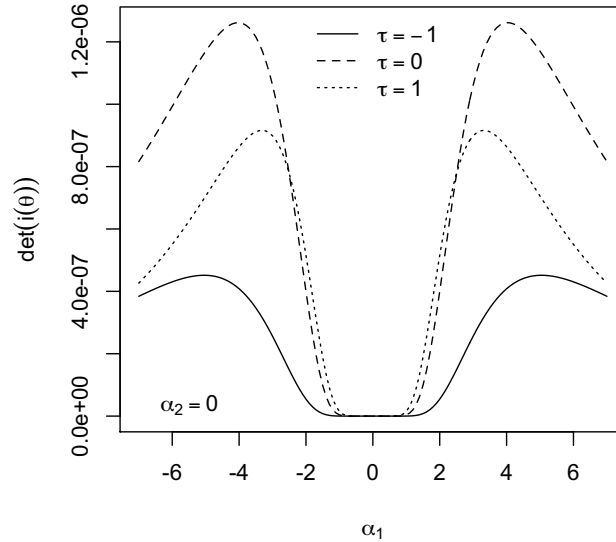


Figura 3.1: Determinante della matrice d'informazione attesa in funzione di α_1 per tre valori di τ , dove $\xi_1 = \xi_2 = 0, \alpha_2 = 0, \Omega_{11} = \Omega_{22} = 1, \Omega_{12} = 0$

Si esamineranno ora alcune caratteristiche della matrice di informazione attesa, tra le quali verrà esaminata empiricamente la singolarità della matrice di informazione attesa per $\alpha \rightarrow 0$ e per $\tau \rightarrow \pm\infty$. Le considerazioni che seguiranno sono frutto di risultanze numeriche e grafiche.

Fissato $\alpha_2 = 0$, la matrice di informazione attesa tende ad essere singolare per $\alpha_1 \rightarrow 0$. Si veda a proposito la Figura 3.1 che riporta tre curve per tre diversi valori di τ : in ascissa è riportato il valore di α_1 e in ordinata il valore del determinante della matrice di informazione attesa in funzione di α_1 , il resto dei parametri sono fissati come segue: $\xi = (0, 0)^T, \Omega = \text{diag}(1, 1)$.

Il determinante della matrice tende a 0 al tendere di α_1 a 0. Questo succede per qualsiasi scelta del parametro τ , il quale influisce solamente sulla velocità con cui il determinante si annulla. Se si invertissero i ruoli di α_1 e α_2 l'andamento della funzione del determinante rimarrebbe invariato.

Dalla Figura 3.1, per $\alpha_2 = 0$, vediamo come un insieme di valori di α_1 che fanno tendere il determinante a zero siano compresi tra -2 e 2 . In Figura 3.2 si è scelto allora di fissare $\alpha_2 = -2$ e $\alpha_2 = 2$ rispettivamente, mantenendo il resto dei parametri invariati. Osserviamo come i due grafici siano identici tra loro, infatti il segno di α non influisce sull'andamento. La nuova scelta

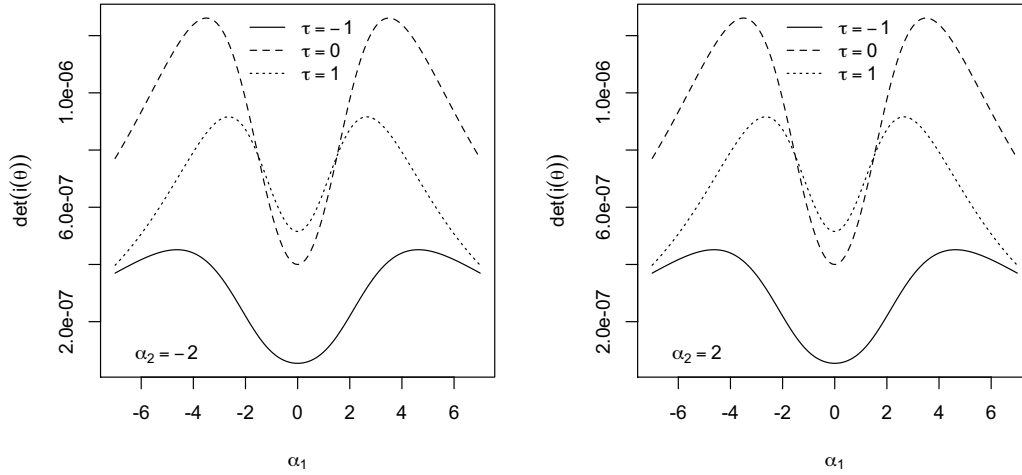


Figura 3.2: Determinanti della matrice d'informazione attesa in funzione di α_1 per tre valori di τ e due diversi valori di α_2 , dove $\xi_1 = \xi_1 = 0, \Omega_{11} = \Omega_{22} = 1, \Omega_{12} = 0$

di valori di α_2 fa sì che il determinante non si annulli $\alpha_1 \rightarrow 0$ come in Figura 3.1, ma tenda a zero per $\alpha_1 \rightarrow \pm\infty$.

Vediamo ora in Figura 3.3, per una diversa tripletta di τ $(-2, 0, 2)$, come il determinante tenda ad azzerarsi per $\alpha_1 \rightarrow 0$ quando $\alpha_2 = 0$. La stessa situazione si era verificata anche in precedenza, in questo caso variare i valori del parametro τ non ha portato nessun beneficio in termini di invertibilità della matrice per $\alpha = (0, 0)^T$.

Dalla Figura 3.5 alla 3.10 quando $\alpha_2 = 1, 3$ e 5 il determinante tende a zero per $\alpha_1 \rightarrow \pm\infty$. Si evidenzia chiaramente come la matrice sia singolare solo quando il parametro di asimmetria $\alpha = (0, 0)$ e non lo sia per altri valori.

Questo fenomeno risulta ancora più chiaro dalle Figure 3.11, 3.12 e 3.13, 3.14 dove per un fissato τ , la matrice sia singolare solo quando $\alpha = (0, 0)^T$ e al crescere di α_2 , il determinante tende ad annullarsi per valori di $\alpha_1 \rightarrow \pm\infty$.

Osserviamo ora gli stessi tipi di grafici invertendo il ruolo di α_1 e τ , dove il resto dei parametri sono fissati come in precedenza. In Fig. 3.15 e Fig. 3.16, si vede come il determinante della matrice d'informazione tenda ad annullarsi quando $\tau \rightarrow \pm\infty$ e che esso decresca molto velocemente all'aumentare di α .

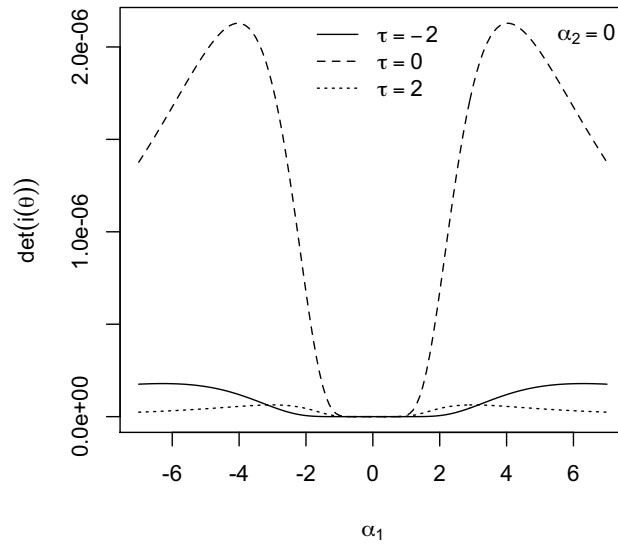


Figura 3.3: Determinante della matrice d'informazione attesa in funzione di α_1 per tre valori di τ , dove $\xi_1 = \xi_1 = 0, \alpha_2 = 0, \Omega_{11} = \Omega_{22} = 1, \Omega_{12} = 0.4$

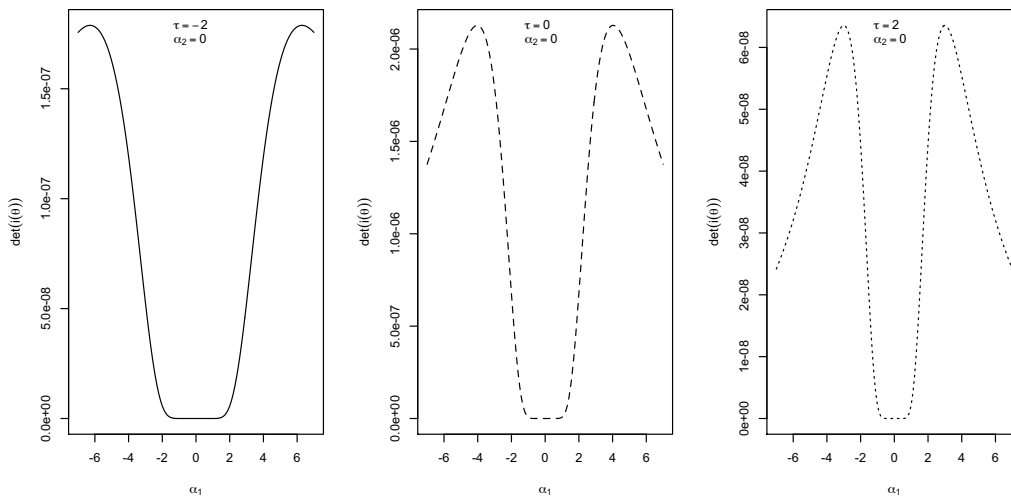


Figura 3.4: Determinante della matrice d'informazione attesa in funzione di α_1 per tre valori di τ , dove $\xi_1 = \xi_1 = 0, \alpha_2 = 0, \Omega_{11} = \Omega_{22} = 1, \Omega_{12} = 0.4$

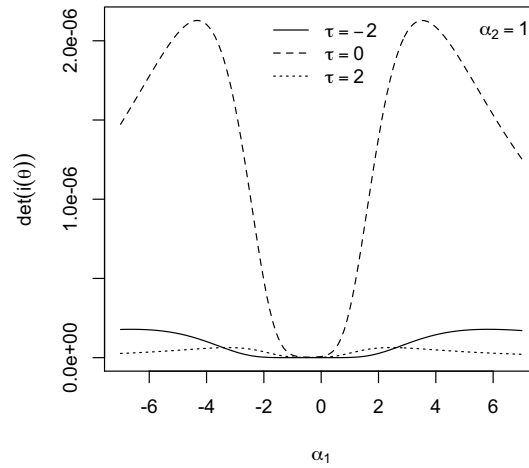


Figura 3.5: Determinante della matrice d'informazione attesa in funzione di α_1 per tre valori di τ , dove $\xi_1 = \xi_1 = 0, \alpha_2 = 1, \Omega_{11} = \Omega_{22} = 1, \Omega_{12} = 0.4$

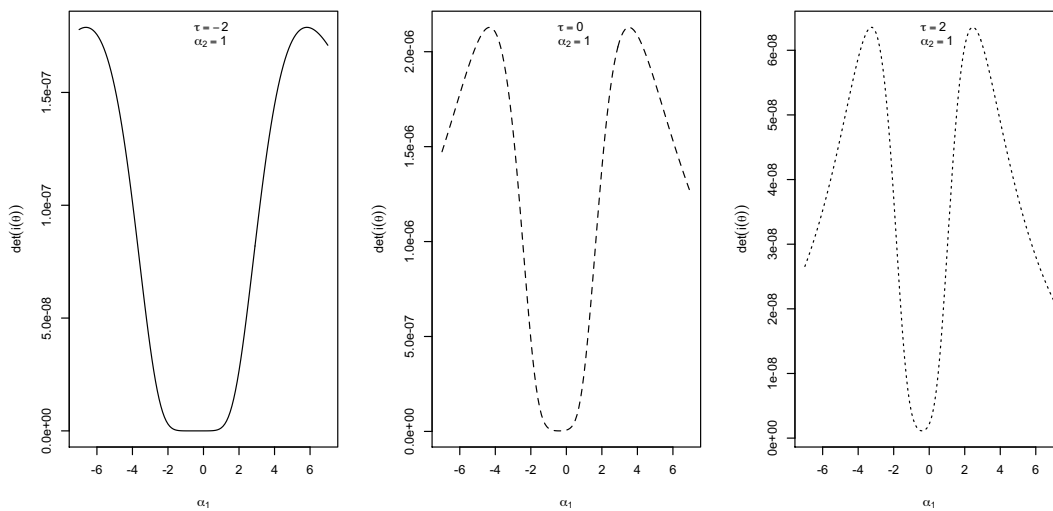


Figura 3.6: Determinante della matrice d'informazione attesa in funzione di α_1 per tre valori di τ , dove $\xi_1 = \xi_1 = 0, \alpha_2 = 1, \Omega_{11} = \Omega_{22} = 1, \Omega_{12} = 0.4$

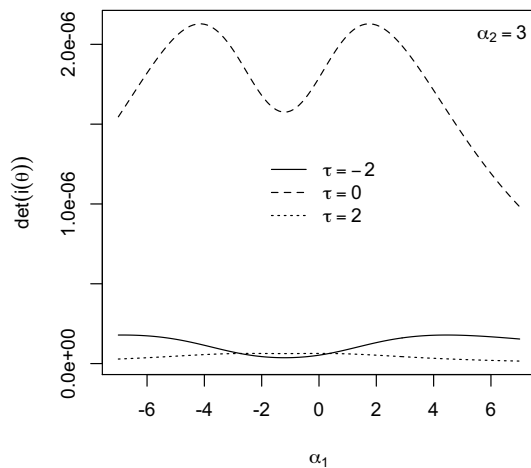


Figura 3.7: Determinante della matrice d'informazione attesa in funzione di α_1 per tre valori di τ , dove $\xi_1 = \xi_2 = 0, \alpha_2 = 3, \Omega_{11} = \Omega_{22} = 1, \Omega_{12} = 0.4$

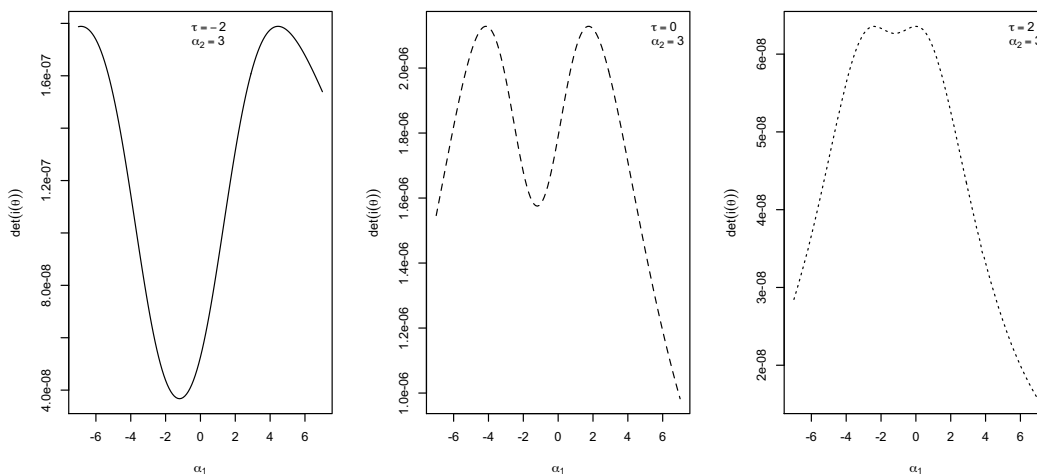


Figura 3.8: Determinante della matrice d'informazione attesa in funzione di α_1 per tre valori di τ , dove $\xi_1 = \xi_2 = 0, \alpha_2 = 3, \Omega_{11} = \Omega_{22} = 1, \Omega_{12} = 0.4$

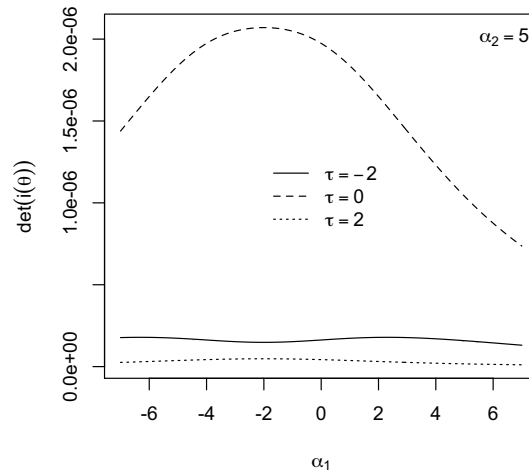


Figura 3.9: Determinante della matrice d'informazione attesa in funzione di α_1 per tre valori di τ , dove $\xi_1 = \xi_1 = 0, \alpha_2 = 5, \Omega_{11} = \Omega_{22} = 1, \Omega_{12} = 0.4$

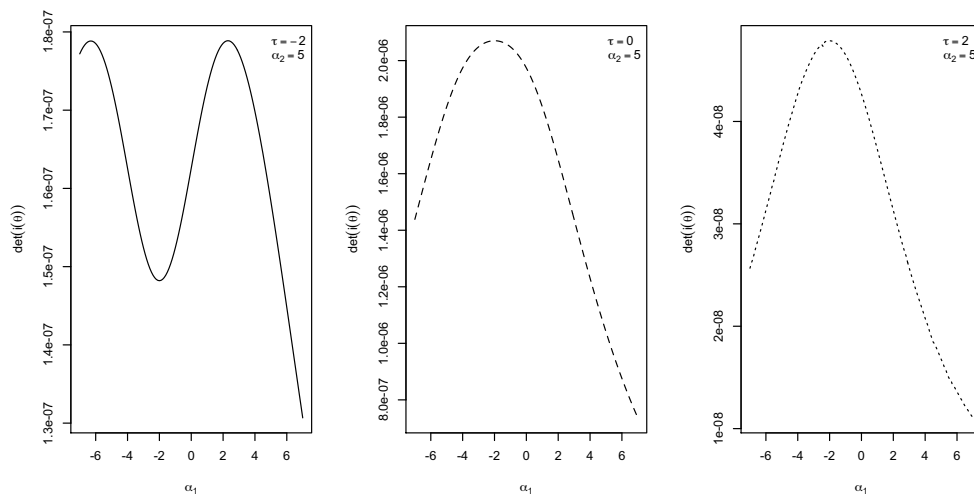


Figura 3.10: Determinante della matrice d'informazione attesa in funzione di α_1 per tre valori di τ , dove $\xi_1 = \xi_1 = 0, \alpha_2 = 5, \Omega_{11} = \Omega_{22} = 1, \Omega_{12} = 0.4$

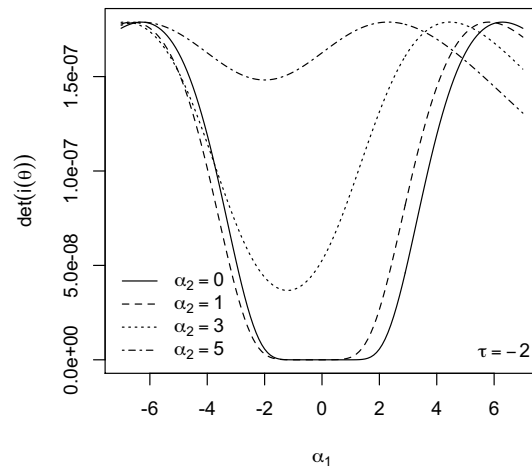


Figura 3.11: Determinante della matrice d'informazione attesa in funzione di α_1 per quattro valori di α_2 , dove $\xi_1 = \xi_2 = 0$, $\tau = -2$, $\Omega_{11} = \Omega_{22} = 1$, $\Omega_{12} = 0.4$

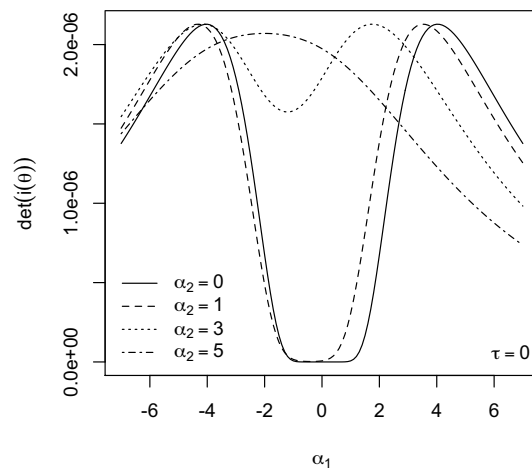


Figura 3.12: Determinante della matrice d'informazione attesa in funzione di α_1 per quattro valori di α_2 , dove $\xi_1 = \xi_2 = 0$, $\tau = 0$, $\Omega_{11} = \Omega_{22} = 1$, $\Omega_{12} = 0.4$

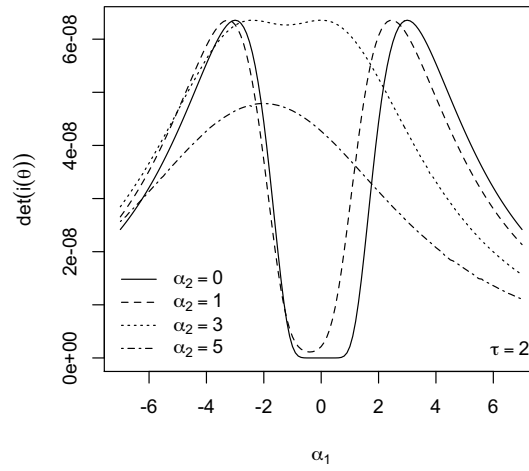


Figura 3.13: Determinante della matrice d'informazione attesa in funzione di α_1 per quattro valori di α_2 , dove $\xi_1 = \xi_1 = 0$, $\tau = -2$, $\Omega_{11} = \Omega_{22} = 1$, $\Omega_{12} = 0.4$

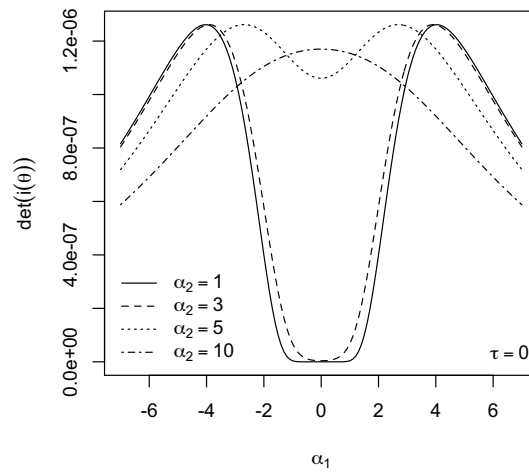


Figura 3.14: Determinante della matrice d'informazione attesa in funzione di α_1 per quattro valori di α_2 , dove $\xi_1 = \xi_1 = 0$, $\tau = 0$, $\Omega_{11} = \Omega_{22} = 1$, $\Omega_{12} = 0$

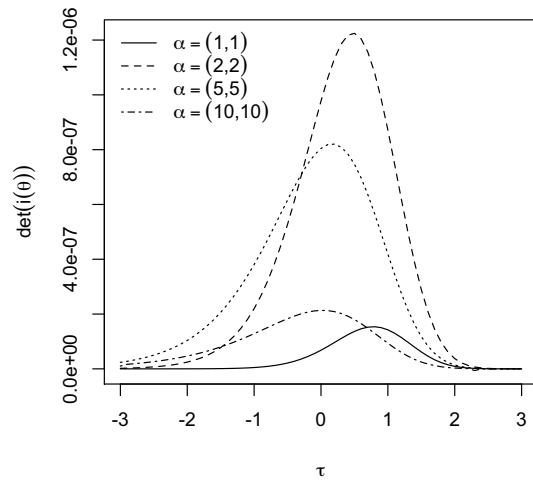


Figura 3.15: Determinante della matrice d'informazione attesa in funzione di τ per quattro valori di α , dove $\xi_1 = \xi_2 = 0$, $\Omega_{11} = \Omega_{22} = 1$, $\Omega_{12} = 0$

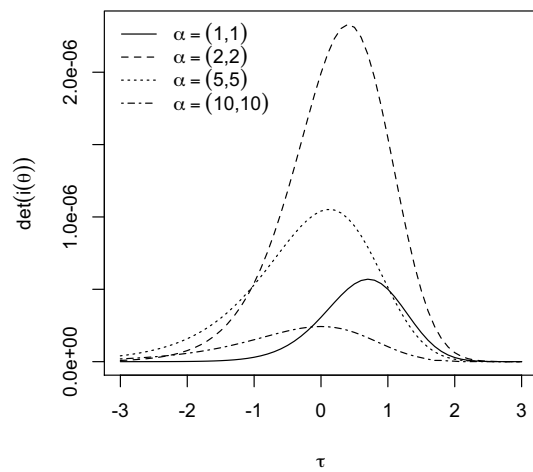


Figura 3.16: Determinante della matrice d'informazione attesa in funzione di τ per quattro valori di α , dove $\xi_1 = \xi_2 = 0$, $\Omega_{11} = \Omega_{22} = 1$, $\Omega_{12} = 0.4$

Si è visto in Canale (2008) che la parametrizzazione centrata per l' ESN scalare, seguendo la strada ben nota in letteratura per i primi tre parametri e scegliendo di non riparametrizzare τ , ha portato ad alcuni benefici eliminando la singolarità della matrice in $\alpha = 0$ e migliorando la distribuzione delle stime di massima verosimiglianza. Tuttavia la parametrizzazione, nei termini appena descritti, presenta dei limiti, infatti il parametro τ , non essendo stato riparametrizzato, porta con sé i problemi di singolarità della matrice di informazione attesa quando $\tau \rightarrow \pm\infty$ e la difficoltà numerica di massimizzare la log-verosimiglianza dovuta ai vincoli tra parametri. Sembra verosimile che un'identica riparametrizzazione per il caso multidimensionale porti agli stessi benefici e limiti, quindi la ricerca di una parametrizzazione alternativa per il parametro τ potrebbe essere la strada corretta per risolvere dei punti critici della distribuzione ESN multidimensionale.

Conclusioni

Lo studio delle distribuzioni di probabilità parametriche nasce dall'esigenza di descrivere i fenomeni fisici, biologici, economici o sociali con delle espressioni che abbiano delle comode proprietà matematiche, una buona flessibilità di adattamento ai dati, e da ultimo, ma non meno importante, che siano una verosimile astrazione della realtà che ben rappresenti il meccanismo generatore dei dati oggetto di studio.

Dai primi sviluppi della teoria delle distribuzioni simmetriche perturbate è emerso che, se il fronte probabilistico ben si prestava agli sviluppi formali, gli aspetti di inferenza statistica presentavano punti critici. Ben poco è invece noto circa le proprietà generali della classe delle densità simmetriche perturbate multidimensionali. Lo sviluppo di una conoscenza più approfondita delle proprietà di questa ampia classe è importante per poter tradurre la grande generalità della formulazione in una effettiva fruibilità operativa.

Ancora più importante è lo sviluppo di strumenti di inferenza statistica, ambito in cui sono ben noti aspetti critici. Questi ultimi hanno avuto finora solo una risposta parziale, essenzialmente limitata al caso di distribuzioni scalari, e incompleta anche in questo senso.

La normale asimmetrica estesa multidimensionale, di cui si è occupato questo progetto di tesi, si classifica come una distribuzione più flessibile, grazie al parametro τ , e con una maggiore capacità di adattamento ai fenomeni empirici quali l'osservazione di campioni selezionati (si pensi al meccanismo di generazione tramite troncamento latente).

Partendo dalla funzione di densità della distribuzione ESN bidimensionale si è arrivati a sviluppare delle espressioni, Cap.3, per la matrice di informazione osservata. Grazie al Lemma 3.6 valido nel caso k -dimensionale, formulato in questo lavoro di tesi, è stato possibile calcolare tutte le quantità dalla (3.21) alla (3.34). La matrice di informazione attesa ottenuta rappresenta quindi un ulteriore passo in avanti nello studio delle proprietà formali della distribuzione ESN multidimensionale.

Fissato $\tau = 0$ si è verificata empiricamente l'uguaglianza tra gli elementi della matrice di informazione attesa della SN_2 studiata da Arellano-Valle & Azzalini (2008) e la matrice di

informazione ottenuta in questo lavoro (chiaramente a meno dell'ultima riga e colonna che si riferiscono al parametro τ). Questo risultato fornisce una indicazione di correttezza dei procedimenti adottati e dei risultati ottenuti. Per una stessa combinazione di parametri, si è verificato numericamente come l'introduzione dell'ottavo parametro $\tau = 0$ porti ad una diminuzione del valore del determinante rispetto a quello di una SN_2 .

Si è visto poi come la matrice di informazione attesa di una ESN_2 , riordinandone le componenti in maniera opportuna, si partizioni a blocchi per alcune specifiche combinazioni di parametri, le quali rendono indipendenti le marginali della distribuzione ESN_2 .

In ambito inferenziale, anche la distribuzione normale asimmetrica estesa bidimensionale presenta le medesime problematiche delle altre distribuzioni normali asimmetriche nel caso della parametrizzazione diretta, infatti le risultanze numeriche e grafiche evidenziano la singolarità della matrice di informazione attesa per $\alpha \rightarrow 0$ e per $\tau \rightarrow \pm\infty$. Per le altre distribuzioni asimmetriche tuttavia il problema della singolarità è stato risolto con la cosiddetta parametrizzazione centrata, la quale offre sicuramente numerosi benefici. Da un lato semantico, i nuovi parametri hanno un significato chiaro, più intuitivo e familiare. Come nel modello normale, infatti, i primi due parametri rappresentano esattamente il primo e il secondo momento centrato della distribuzione, mentre il terzo parametro γ , ne rappresenta il terzo centrato e standardizzato. Dal lato pratico e inferenziale, la parametrizzazione centrata elimina i problemi che impedivano le operazioni d'inferenza sulla normale asimmetrica.

Si è visto in Canale (2008) che la parametrizzazione centrata per l' ESN scalare, seguendo la strada ben nota in letteratura per i primi tre parametri e scegliendo di non riparametrizzare τ , ha portato ad alcuni benefici eliminando la singolarità della matrice in $\alpha = 0$ e migliorando la distribuzione delle stime di massima verosimiglianza. Tuttavia la parametrizzazione, nei termini appena descritti, presenta dei limiti, infatti il parametro τ , non essendo stato riparametrizzato, porta con sé i problemi di singolarità della matrice di informazione attesa quando $\tau \rightarrow \pm\infty$ e la difficoltà numerica di massimizzare la log-verosimiglianza dovuta ai vincoli tra parametri. Sembra verosimile che un'identica riparametrizzazione per il caso multidimensionale porti agli stessi benefici e limiti, quindi la ricerca di una parametrizzazione alternativa per il parametro τ potrebbe essere la strada corretta per risolvere dei punti critici della distribuzione ESN multidimensionale.

Appendice A

Codice R

A.1 Calcolo della matrice di informazione osservata

Si riporta il codice R per il calcolo della funzione di log-verosimiglianza della ESN_2 e quello per il calcolo della matrice di informazione osservata. La funzione `zeta` è disponibile sulla pagina web <http://azzalini.stat.unipd.it/SN/esn.R>.

```
#-----  
log-likelihood  
#-----  
esn.biv.ll<-  
function(dp = NULL, y1, y2) {  
  # log-likelihood ESN_2  
  
  xi1 <- dp[1]  
  xi2 <- dp[2]  
  Omega11 <- dp[3]  
  Omega12 <- dp[4]  
  Omega22 <- dp[5]  
  alpha1 <- dp[6]  
  alpha2 <- dp[7]  
  tau <- dp[8]  
  
  z1 <- (y1 - xi1)/sqrt(Omega11)  
  z2 <- (y2 - xi2)/sqrt(Omega22)  
  lambda <- Omega12/sqrt(Omega11 * Omega22)  
  omegab <- matrix(c(1, lambda, lambda, 1), 2, 2)  
  alpha0 <- tau * sqrt(1 + (alpha1^2) + (alpha2^2) + 2 * alpha1 * alpha2 * lambda)  
  t <- (alpha0 + alpha1 * z1 + alpha2 * z2)  
  
  zeta0tau <- (sn::zeta(0, tau))  
  zeta0t <- (sn::zeta(0, t))  
  
  ll <- -0.5 * log(Omega11) - 0.5 * log(Omega22) - 0.5 * log(1 - lambda^2) - (0.5/(1 -  
    lambda^2)) * (z1^2 + z2^2 - 2 * lambda * z1 * z2) + zeta0t - zeta0tau  
  ll  
}
```

```

#-----
# function esn.obs.info
#-----
# Description
# COMPUTES THE OBSERVED INFORMATION MATRIX FOR THE EXTENDED BIVARIATE SKEW NORMAL DISTRIBUTION
# in the DP parametrizations.
#
# Usage
# esn.obs.info(dp,y1,y2)
#
# Arguments
# dp vector of direct parameters
#-----
# Example
#
# info <- esn.obs.info(dp=c(0,0,1,0.6,1,2,3,1),y1=2,y2=4)
# location xi1<-dp[1] xi2<-dp[2]
# scale Omega11<-dp[3] Omega12<-dp[4] Omega22<-dp[5]
# trunc tau<-dp[8]
#-----
esn.obs.info<-
function(dp = NULL, y1, y2) {
  #COMPUTES THE OBSERVED INFORMATION MATRIX FOR THE EXTENDED BIVARIATE SKEW
  #NORMAL DISTRIBUTION in the DP parametrizations.

  xi1 <- dp[1]
  xi2 <- dp[2]
  xi <- c(xi1, xi2)

  Omega11 <- dp[3]
  Omega12 <- dp[4]
  Omega22 <- dp[5]
  Omega <- matrix(c(Omega11, Omega12, Omega12, Omega22), 2, 2)

  alpha1 <- dp[6]
  alpha2 <- dp[7]
  alpha <- c(alpha1, alpha2)

  tau <- dp[8]

  z1 <- (y1 - xi1)/sqrt(Omega11)
  z2 <- (y2 - xi2)/sqrt(Omega22)
  lambda <- Omega12/sqrt(Omega11 * Omega22)
  alpha0 <- tau * sqrt(1 + (alpha1^2) + (alpha2^2) + 2 * alpha1 * alpha2 * lambda)
  t <- (alpha0 + alpha1 * z1 + alpha2 * z2)

  alphastar <- (alpha1^2) + (alpha2^2) + 2 * alpha1 * alpha2 * lambda
  den <- sqrt(1 + alphastar)

  zeta1 <- (sn::zeta(1, t))
  zeta2 <- (sn::zeta(2, t))
  zeta1tau <- (sn::zeta(1, tau))
  zeta2tau <- (sn::zeta(2, tau))

  j11 <- (-1/Omega11) * ((1 - lambda^2)^(-1) - (alpha1^2) * zeta2)

  j12 <- (1/sqrt(Omega11 * Omega22)) * ((lambda/(1 - lambda^2)) + alpha1 * alpha2 *
    zeta2)

```

```

j13 <- (lambda * z2 - z1)/((1 - lambda^2)^2 * (Omega11^(3/2))) + (alpha/(2 *
  Omega11^(3/2))) * ((alpha * alpha2 * lambda * tau)/den + alpha * z1) *
  zeta2 + (alpha/(2 * Omega11^(3/2))) * zeta1

j14 <- -(2 * lambda * (lambda * z2 - z1))/((1 - lambda^2)^2 * Omega11 * sqrt(Omega22)) -
  (z2)/((1 - lambda^2) * Omega11 * sqrt(Omega22)) - (alpha^2 * alpha2 * tau)/(Omega11 *
  sqrt(Omega22) * den) * zeta2

j15 <- (lambda * (z2 - z1 * lambda))/((1 - lambda^2)^2 * Omega22 * sqrt(Omega11)) +
  (alpha/(2 * Omega22 * sqrt(Omega11))) * ((alpha * alpha2 * lambda * tau)/den +
  alpha2 * z2) * zeta2

j16 <- -(alpha/sqrt(Omega11)) * ((alpha + lambda * alpha2) * tau)/(den) +
  z1) * zeta2 - (1/sqrt(Omega11)) * zeta1

j17 <- -(alpha/sqrt(Omega11)) * ((alpha2 + lambda * alpha) * tau)/(den) +
  z2) * zeta2

j18 <- -(alpha * den)/sqrt(Omega11)) * zeta2

j22 <- (-1/Omega22) * ((1 - lambda^2)^(-1) - (alpha2^2) * zeta2)

j23 <- (lambda * (z1 - z2 * lambda))/((1 - lambda^2)^2 * Omega11 * sqrt(Omega22)) +
  (alpha2/(2 * Omega11 * sqrt(Omega22))) * ((alpha * alpha2 * lambda * tau)/den +
  alpha * z1) * zeta2

j24 <- -(2 * lambda * (lambda * z1 - z2))/((1 - lambda^2)^2 * Omega22 * sqrt(Omega11)) -
  (z1)/((1 - lambda^2) * Omega22 * sqrt(Omega11)) - (alpha2^2 * alpha * tau)/(Omega22 *
  sqrt(Omega11) * den) * zeta2

j25 <- (lambda * z1 - z2)/((1 - lambda^2)^2 * (Omega22^(3/2))) + (alpha2/(2 *
  Omega22^(3/2))) * ((alpha * alpha2 * lambda * tau)/den + alpha2 * z2) *
  zeta2 + (alpha2/(2 * Omega22^(3/2))) * zeta1

j26 <- -(alpha2/sqrt(Omega22)) * ((alpha + lambda * alpha2) * tau)/(den) +
  z1) * zeta2

j27 <- -(alpha2/sqrt(Omega22)) * ((alpha2 + lambda * alpha) * tau)/(den) +
  z2) * zeta2 - (1/sqrt(Omega22)) * zeta1

j28 <- -(alpha2 * den)/sqrt(Omega22)) * zeta2

j33 <- (lambda^2 - z1^2 + 2 * z1 * z2 * lambda)/((Omega11^2) * (1 - lambda^2)) +
  (4 * lambda^3 * z1 * z2 - 2 * lambda^2 * z1^2 - lambda^2 * z2^2)/((Omega11^2) *
  (1 - lambda^2)^2) - (lambda^4 * (z1^2 + z2^2 - 2 * z1 * z2 * lambda))/((Omega11^2) *
  (1 - lambda^2)^3) + 1/(2 * Omega11^2) + lambda^4/((2 * Omega11^2) * (1 -
  lambda^2)^2) + (1/(4 * Omega11^2)) * ((3 * alpha * alpha2 * tau * lambda)/den -
  (alpha1^2 * alpha2^2 * tau * lambda^2)/den^3) + 3 * alpha * z1) * zeta1 +
  (1/(4 * Omega11^2)) * ((alpha * alpha2 * tau * lambda)/den + alpha * z1)^2 *
  zeta2

j34 <- (-1 * (lambda + z1 * z2)/((1 - lambda^2) * (Omega11^(3/2)) * sqrt(Omega22))) +
  (2 * lambda * z1^2 + lambda * z2^2 - 5 * lambda^2 * z1 * z2 - lambda^3)/((1 -
  lambda^2)^2) * (Omega11^(3/2)) * sqrt(Omega22)) + (2 * lambda^3 * (z1^2 +
  z2^2 - 2 * z1 * z2 * lambda))/((1 - lambda^2)^3) * (Omega11^(3/2)) * sqrt(Omega22)) +
  ((alpha1^2) * (alpha2^2) * tau * lambda)/(2 * (Omega11^(3/2)) * sqrt(Omega22)) *

```

```

den^3) - (alpha1 * alpha2 * tau)/((2 * Omega11^(3/2)) * sqrt(Omega22) *
den)) * zeta1 - (((alpha1 * alpha2 * tau)/(2 * (Omega11^(3/2)) * sqrt(Omega22) *
den)) * ((alpha1 * alpha2 * lambda * tau)/den + alpha1 * z1) * zeta2)

j35 <- lambda^2 * (6 * lambda * z1 * z2 - 2 * z1^2 - 2 * z2^2 + lambda^2)/(2 *
Omega11 * Omega22 * (1 - lambda^2)^2) + (2 * z1 * z2 * lambda + lambda^2)/(2 *
Omega11 * Omega22 * (1 - lambda^2)) - lambda^4 * (z1^2 + z2^2 - 2 * z1 *
z2 * lambda)/(Omega11 * Omega22 * (1 - lambda^2)^3) + ((alpha1 * alpha2 *
lambda * tau)/(4 * Omega11 * Omega22 * den)) * (1 - (alpha1 * alpha2 * lambda *
alphastar)) * zeta1 + (1/(4 * Omega11 * Omega22)) * ((alpha1 * alpha2 * lambda *
tau)/den + alpha1 * z1) * ((alpha1 * alpha2 * lambda * tau)/den + alpha2 *
z2) * zeta2

j36 <- (1/(2 * Omega11)) * ((alpha1 * alpha2 * lambda * (alpha2 * lambda + alpha1) *
tau)/(den^3) - (alpha2 * lambda * tau)/(den) - z1) * zeta1 - (1/(2 * Omega11)) *
((alpha1 * alpha2 * lambda * tau)/den + alpha1 * z1) * ((alpha2 * lambda +
alpha1) * tau)/den + z1) * zeta2

j37 <- (1/(2 * Omega11)) * ((alpha1 * alpha2 * lambda * (alpha1 * lambda + alpha2) *
tau)/(den^3) - (alpha1 * lambda * tau)/(den)) * zeta1 - (1/(2 * Omega11)) *
((alpha1 * alpha2 * lambda * tau)/den + alpha1 * z1) * ((alpha2 + alpha1 *
lambda) * tau)/(den) + z2) * zeta2

j38 <- -((alpha1 * alpha2 * lambda)/(2 * Omega11 * den)) * zeta1 - (den/(2 *
Omega11)) * ((alpha1 * alpha2 * lambda * tau)/den + alpha1 * z1) * zeta2

j44 <- (1/((1 - lambda^2) * Omega11 * Omega22)) + (6 * lambda * z1 * z2 - z1^2 -
z2^2 + 2 * lambda^2)/(((1 - lambda^2)^2) * Omega11 * Omega22) - (4 * lambda^2 *
(z1^2 + z2^2 - 2 * z1 * z2 * lambda))/(((1 - lambda^2)^3) * Omega11 * Omega22) +
((alpha1^2 * alpha2^2 * tau)/(Omega11 * Omega22 * den^2)) * (tau * zeta2 -
zeta1/den)

j45 <- -(lambda + z1 * z2)/((1 - lambda^2) * Omega22^(3/2) * sqrt(Omega11)) +
(2 * lambda * z2^2 + lambda * z1^2 - 5 * lambda^2 * z1 * z2 - lambda^3)/((1 -
lambda^2)^2 * Omega22^(3/2) * sqrt(Omega11)) + (2 * lambda^3 * (z1^2 +
z2^2 - 2 * z1 * z2 * lambda))/((1 - lambda^2)^3 * Omega22^(3/2) * sqrt(Omega11)) +
((alpha1^2 * alpha2^2 * tau * lambda)/(2 * Omega22^(3/2) * sqrt(Omega11) *
den^3) - (alpha1 * alpha2 * tau)/(2 * Omega22^(3/2) * sqrt(Omega11) *
den)) * zeta1 - ((alpha1 * alpha2 * tau)/(2 * Omega22^(3/2) * sqrt(Omega11) *
den)) * ((alpha1 * alpha2 * lambda * tau)/den + alpha2 * z2) * zeta2

j46 <- (alpha2 * tau)/(sqrt(Omega11 * Omega22) * den) * (1 - (alpha1 * (alpha2 *
lambda + alpha1))/den^2) * zeta1 + (alpha1 * alpha2 * tau)/(sqrt(Omega11 *
Omega22) * den) * (((alpha1 + lambda * alpha2) * tau)/den + z1) * zeta2

j47 <- (alpha1 * tau)/(sqrt(Omega11 * Omega22) * den) * (1 - (alpha2 * (alpha1 *
lambda + alpha2))/den^2) * zeta1 + (alpha1 * alpha2 * tau)/(sqrt(Omega11 *
Omega22) * den) * (((alpha2 + lambda * alpha1) * tau)/den + z2) * zeta2

j48 <- ((alpha1 * alpha2)/sqrt(Omega11 * Omega22)) * (zeta1/den + tau * zeta2)

j55 <- (lambda^2 - z2^2 + 2 * z1 * z2 * lambda)/((Omega22^2) * (1 - lambda^2)) +
(4 * lambda^3 * z1 * z2 - 2 * lambda^2 * z2^2 - lambda^2 * z1^2)/((Omega22^2) *
(1 - lambda^2)^2) - (lambda^4 * (z1^2 + z2^2 - 2 * z1 * z2 * lambda))/((Omega22^2) *
(1 - lambda^2)^3) + 1/(2 * Omega22^2) + lambda^4/((2 * Omega22^2) * (1 -
lambda^2)^2) + (1/(4 * Omega22^2)) * ((3 * alpha1 * alpha2 * tau * lambda)/den -
(alpha1^2 * alpha2^2 * tau * lambda^2)/den^3) + 3 * alpha2 * z2) * zeta1 +
(1/(4 * Omega22^2)) * ((alpha1 * alpha2 * tau * lambda)/den + alpha2 * z2)^2 *
zeta2

```

```

j56 <- (1/(2 * Omega22)) * ((alpha1 * alpha2 * lambda * (alpha2 * lambda + alpha1) *
tau)/(den^(3)) - (alpha2 * lambda * tau)/(den)) * zeta1 - (1/(2 * Omega22)) *
((alpha1 * alpha2 * lambda * tau)/(den) + alpha2 * z2) * ((alpha1 + alpha2 *
lambda) * tau)/(den) + z1) * zeta2

j57 <- (1/(2 * Omega22)) * ((alpha1 * alpha2 * lambda * (alpha1 * lambda + alpha2) *
tau)/(den^(3)) - (alpha1 * lambda * tau)/(den) - z2) * zeta1 - (1/(2 * Omega22)) *
((alpha1 * alpha2 * lambda * tau)/den + alpha2 * z2) * ((alpha1 * lambda +
alpha2) * tau)/den + z2) * zeta2

j58 <- -((alpha1 * alpha2 * lambda)/(2 * Omega22 * den)) * zeta1 - (den/(2 *
Omega22)) * ((alpha1 * alpha2 * lambda * tau)/den + alpha2 * z2) * zeta2

j66 <- (tau/den - ((alpha2 * lambda + alpha1)^2 * tau)/den^(3)) * zeta1 + (((alpha1 +
lambda * alpha2) * tau)/den + z1)^2 * zeta2

j67 <- ((lambda * tau)/den - ((alpha2 + lambda * alpha1) * (alpha1 + lambda *
alpha2) * tau)/den^3) * zeta1 + (((alpha1 + lambda * alpha2) * tau)/den +
z1) * ((alpha2 + lambda * alpha1) * tau)/den + z2) * zeta2

j68 <- ((alpha1 + lambda * alpha2)/den) * zeta1 + (((alpha1 + lambda * alpha2) *
tau)/den + z1) * den * zeta2

j77 <- (tau/den - ((alpha1 * lambda + alpha2)^2 * tau)/den^(3)) * zeta1 + (((alpha2 +
lambda * alpha1) * tau)/den + z2)^2 * zeta2

j78 <- ((alpha2 + lambda * alpha1)/den) * zeta1 + (((alpha2 + lambda * alpha1) *
tau)/den + z2) * den * zeta2

j88 <- den^2 * zeta2 - zeta2tau

r1 <- c(j11, j12, j13, j14, j15, j16, j17, j18)
r2 <- c(j12, j22, j23, j24, j25, j26, j27, j28)
r3 <- c(j13, j23, j33, j34, j35, j36, j37, j38)
r4 <- c(j14, j24, j34, j44, j45, j46, j47, j48)
r5 <- c(j15, j25, j35, j45, j55, j56, j57, j58)
r6 <- c(j16, j26, j36, j46, j56, j66, j67, j68)
r7 <- c(j17, j27, j37, j47, j57, j67, j77, j78)
r8 <- c(j18, j28, j38, j48, j58, j68, j78, j88)

j.dp <- matrix(rbind(r1, r2, r3, r4, r5, r6, r7, r8), 8, 8)
list(obs.info.dp = j.dp)
}

```

A.2 Calcolo della matrice di informazione attesa

Si riporta il codice R utile per il calcolo della matrice di informazione attesa. Le funzioni `dmesn` e `zeta` sono disponibili sulla pagina web <http://azzalini.stat.unipd.it/SN/esn.R>. La routine `cuhre` appartiene al package `R2Cuba` (Thomas Hahn & Ki u, 2010) di R (R Development Core Team, 2010).

```

#-----
# function esn.infoMultiv
#-----
# Description
# COMPUTES THE EXPECTED INFORMATION MATRIX FOR THE EXTENDED BIVARIATE SKEW NORMAL DISTRIBUTION
# in the DP parametrizations.
#
# Usage
# esn.infoMultiv(dp)
#
# Arguments
# dp vector of direct parameters
#-----
# Example
#
# info <- esn.infoMultiv(dp=c(0,0,1,0.6,1,2,3,1))
# location xi1<-dp[1] xi2<-dp[2]
# scale Omega11<-dp[3] Omega12<-dp[4] Omega22<-dp[5]
# trunc tau<-dp[8]
#-----

esn.infoMultiv<-
function(dp = NULL) {
  #COMPUTES THE EXPECTED INFORMATION MATRIX FOR THE EXTENDED BIVARIATE SKEW
  #NORMAL DISTRIBUTION in the DP parametrizations.

  xi1 <- dp[1]
  xi2 <- dp[2]
  xi <- c(xi1, xi2)

  Omega11 <- dp[3]
  Omega12 <- dp[4]
  Omega22 <- dp[5]
  Omega <- matrix(c(Omega11, Omega12, Omega12, Omega22), 2, 2)

  alpha1 <- dp[6]
  alpha2 <- dp[7]
  alpha <- c(alpha1, alpha2)

  tau <- dp[8]

  lambda <- Omega12/sqrt(Omega11 * Omega22)
  Omegab <- matrix(c(1, lambda, lambda, 1), 2, 2)
  alphastar <- (alpha1^2) + (alpha2^2) + 2 * alpha1 * alpha2 * lambda
  alpha0 <- tau * (sqrt(1 + alphastar))
  den <- sqrt(1 + alphastar)
}

```



```

zeta1tau <- (sn::zeta(1, tau))
zeta2tau <- (sn::zeta(2, tau))

delta <- Omegab %*% alpha %*% (1/(sqrt(1 + t(alpha) %*% Omegab %*% alpha)))
delta1 <- (alpha1 + lambda * alpha2)/den
delta2 <- (alpha2 + lambda * alpha1)/den

v11 <- (1 + alpha2^2 * (1 - lambda^2))/(1 + alphastar)
v22 <- (1 + alpha1^2 * (1 - lambda^2))/(1 + alphastar)
v12 <- (lambda - alpha1 * alpha2 * (1 - lambda^2))/(1 + alphastar)

E_Z <- zeta1tau * delta
E_Z1 <- zeta1tau * delta1
E_Z2 <- zeta1tau * delta2
E_Z1Z2 <- lambda + delta1 * delta2 * (zeta1tau^2 + zeta2tau)
E_Z1q <- 1 + delta1^2 * (zeta2tau + zeta1tau^2)
E_Z2q <- 1 + delta2^2 * (zeta2tau + zeta1tau^2)

# calcolo numerico delle quantit  a_jp, a_ij, a_0

# a_0
zeta1q <- function(z, xi, Omegab, alpha, tau) {
  lambda <- Omega12/sqrt(Omega11 * Omega22)
  alpha0 <- tau * (sqrt(1 + alpha1^2 + alpha2^2 + 2 * alpha1 * alpha2 * lambda))
  t <- (alpha0 + alpha1 * z[1] + alpha2 * z[2])
  (sn::zeta(1, t))^2 * dmesn(z, xi = rep(0, 2), Omega = Omegab, alpha = alpha,
    tau = tau)
}
a0 <- dcuhre(zeta1q, rep(-5, 2), rep(5, 2), epsabs = 1e-10, epsrel = 1e-10, xi = rep(0,
  2), Omegab = Omegab, alpha = alpha, tau = tau)$result

# a1_1
z1_zeta1q <- function(z, xi, Omegab, alpha, tau) {
  lambda <- Omega12/sqrt(Omega11 * Omega22)
  alpha0 <- tau * (sqrt(1 + alpha1^2 + alpha2^2 + 2 * alpha1 * alpha2 * lambda))
  t <- (alpha0 + alpha1 * z[1] + alpha2 * z[2])
  z[1] * (sn::zeta(1, t))^2 * dmesn(z, xi = rep(0, 2), Omega = Omegab, alpha = alpha,
    tau = tau)
}
a1_1 <- dcuhre(z1_zeta1q, rep(-5, 2), rep(5, 2), epsabs = 1e-10, epsrel = 1e-10,
  xi = rep(0, 2), Omegab = Omegab, alpha = alpha, tau = tau)$result

# a2_1
z2_zeta1q <- function(z, xi, Omegab, alpha, tau) {
  lambda <- Omega12/sqrt(Omega11 * Omega22)
  alpha0 <- tau * (sqrt(1 + alpha1^2 + alpha2^2 + 2 * alpha1 * alpha2 * lambda))
  t <- (alpha0 + alpha1 * z[1] + alpha2 * z[2])
  z[2] * (sn::zeta(1, t))^2 * dmesn(z, xi = rep(0, 2), Omega = Omegab, alpha = alpha,
    tau = tau)
}
a2_1 <- dcuhre(z2_zeta1q, rep(-5, 2), rep(5, 2), epsabs = 1e-10, epsrel = 1e-10,
  xi = rep(0, 2), Omegab = Omegab, alpha = alpha, tau = tau)$result

# a1_2

```

```

Z1q_zeta1q <- function(z, xi, Omegab, alpha, tau) {
  lambda <- Omega12/sqrt(Omega11 * Omega22)
  alpha0 <- tau * (sqrt(1 + alpha1^2 + alpha2^2 + 2 * alpha1 * alpha2 * lambda))
  t <- (alpha0 + alpha1 * z[1] + alpha2 * z[2])
  z[1]^2 * (sn::zeta(1, t))^2 * dmesn(z, xi = rep(0, 2), Omega = Omegab, alpha = alpha,
    tau = tau)
}
a1_2 <- dcuhre(Z1q_zeta1q, rep(-5, 2), rep(5, 2), epsabs = 1e-10, epsrel = 1e-10,
  xi = rep(0, 2), Omegab = Omegab, alpha = alpha, tau = tau)$result

# a2_2

Z2q_zeta1 <- function(z, xi, Omegab, alpha, tau) {
  lambda <- Omega12/sqrt(Omega11 * Omega22)
  alpha0 <- tau * (sqrt(1 + alpha1^2 + alpha2^2 + 2 * alpha1 * alpha2 * lambda))
  t <- (alpha0 + alpha1 * z[1] + alpha2 * z[2])
  z[2]^2 * (sn::zeta(1, t))^2 * dmesn(z, xi = rep(0, 2), Omega = Omegab, alpha = alpha,
    tau = tau)
}
a2_2 <- dcuhre(Z2q_zeta1, rep(-5, 2), rep(5, 2), epsabs = 1e-10, epsrel = 1e-10,
  xi = rep(0, 2), Omegab = Omegab, alpha = alpha, tau = tau)$result

# a12

Z1Z2_zeta1q <- function(z, xi, Omegab, alpha, tau) {
  lambda <- Omega12/sqrt(Omega11 * Omega22)
  alpha0 <- tau * (sqrt(1 + alpha1^2 + alpha2^2 + 2 * alpha1 * alpha2 * lambda))
  t <- (alpha0 + alpha1 * z[1] + alpha2 * z[2])
  z[1] * z[2] * (sn::zeta(1, t))^2 * dmesn(z, xi = rep(0, 2), Omega = Omegab,
    alpha = alpha, tau = tau)
}
a12 <- dcuhre(Z1Z2_zeta1q, rep(-5, 2), rep(5, 2), epsabs = 1e-10, epsrel = 1e-10,
  xi = rep(0, 2), Omegab = Omegab, alpha = alpha, tau = tau)$result

Ezeta_1 <- (sn::zeta(1, tau))/den

E_Z1_zeta1 <- -tau * delta1 * Ezeta_1

E_Z2_zeta1 <- -tau * delta2 * Ezeta_1

Ezeta_2 <- -(alpha0 - tau * t(alpha) %*% delta) * Ezeta_1 - a0

E_Z1_zeta2 <- -(-alpha0 * tau * delta1 + alpha1 * (tau^2 * delta1^2 + v11) +
  alpha2 * (tau^2 * delta1 * delta2 + v12)) * Ezeta_1 - a1_1

E_Z2_zeta2 <- -(-alpha0 * tau * delta2 + alpha2 * (tau^2 * delta2^2 + v22) +
  alpha1 * (tau^2 * delta1 * delta2 + v12)) * Ezeta_1 - a2_1

EZ1q_zeta2 <- -(alpha0 * (v11 + tau^2 * delta1^2) - alpha1 * tau * delta1 * (tau^2 *
  delta1^2 + 3 * v11) + alpha2 * tau * ((v12/v11) * delta1 - delta2) * (tau^2 *
  delta1^2 + v11) - alpha2 * tau * delta1 * (v12/v11) * (tau^2 * delta1^2 +
  3 * v11)) * Ezeta_1 - a1_2

EZ2q_zeta2 <- -(alpha0 * (v22 + tau^2 * delta2^2) - alpha2 * tau * delta2 * (tau^2 *
  delta2^2 + 3 * v22) + alpha1 * tau * ((v12/v22) * delta2 - delta1) * (tau^2 *
  delta2^2 + v22) - alpha1 * tau * delta2 * (v12/v22) * (tau^2 * delta2^2 +
  3 * v22)) * Ezeta_1 - a2_2

```

```

E_Z1Z2_zeta2 <- -(alpha0 * (v12 + tau^2 * delta1 * delta2) + alpha1 * tau * ((v12/v11) *
  delta1 - delta2) * (tau^2 * delta1^2 + v11) - alpha1 * tau * delta1 * (v12/v11) *
  (tau^2 * delta1^2 + 3 * v11) + alpha2 * tau * ((v12/v22) * delta2 - delta1) *
  (tau^2 * delta2^2 + v22) - alpha2 * tau * delta2 * (v12/v22) * (tau^2 * delta2^2 +
  3 * v22)) * Ezeta_1 - a12

i11 <- (1/Omega11) * ((1 - lambda^2)^(-1) - (alpha1^2) * Ezeta_2)

i12 <- (-1/sqrt(Omega11 * Omega22)) * ((lambda/(1 - lambda^2)) + alpha1 * alpha2 *
  Ezeta_2)

i13 <- -(lambda * E_Z2 - E_Z1)/((1 - lambda^2)^2 * (Omega11^(3/2))) - (alpha1/(2 *
  Omega11^(3/2))) * (((alpha1 * alpha2 * lambda * tau)/den) * Ezeta_2 + alpha1 *
  E_Z1_zeta2) - (alpha1/(2 * Omega11^(3/2))) * Ezeta_1

i14 <- (2 * lambda * (lambda * E_Z2 - E_Z1))/((1 - lambda^2)^2 * Omega11 * sqrt(Omega22)) +
  (E_Z2)/((1 - lambda^2) * Omega11 * sqrt(Omega22)) + ((alpha1^2 * alpha2 *
  tau)/(Omega11 * sqrt(Omega22) * den)) * Ezeta_2

i15 <- -(lambda * (E_Z2 - E_Z1 * lambda))/((1 - lambda^2)^2 * Omega22 * sqrt(Omega11)) -
  (alpha1/(2 * Omega22 * sqrt(Omega11))) * (((alpha1 * alpha2 * lambda * tau)/den) *
  Ezeta_2 + alpha2 * E_Z2_zeta2)

i16 <- (alpha1/sqrt(Omega11)) * (((alpha1 + lambda * alpha2) * tau)/(den)) *
  Ezeta_2 + E_Z1_zeta2) + (1/sqrt(Omega11)) * Ezeta_1

i17 <- (alpha1/sqrt(Omega11)) * (((alpha2 + lambda * alpha1) * tau)/(den)) *
  Ezeta_2 + E_Z2_zeta2)

i18 <- ((alpha1 * den)/sqrt(Omega11)) * Ezeta_2

i22 <- (1/Omega22) * ((1 - lambda^2)^(-1) - (alpha2^2) * Ezeta_2)

i23 <- -(lambda * (E_Z1 - E_Z2 * lambda))/((1 - lambda^2)^2 * Omega11 * sqrt(Omega22)) -
  (alpha2/(2 * Omega11 * sqrt(Omega22))) * (((alpha1 * alpha2 * lambda * tau)/den) *
  Ezeta_2 + alpha1 * E_Z1_zeta2)

i24 <- (2 * lambda * (lambda * E_Z1 - E_Z2))/((1 - lambda^2)^2 * Omega22 * sqrt(Omega11)) +
  (E_Z1)/((1 - lambda^2) * Omega22 * sqrt(Omega11)) + ((alpha2^2 * alpha1 *
  tau)/(Omega22 * sqrt(Omega11) * den)) * Ezeta_2

i25 <- -(lambda * E_Z1 - E_Z2)/((1 - lambda^2)^2 * (Omega22^(3/2))) - (alpha2/(2 *
  Omega22^(3/2))) * (((alpha1 * alpha2 * lambda * tau)/den) * Ezeta_2 + alpha2 *
  E_Z2_zeta2) - (alpha2/(2 * Omega22^(3/2))) * Ezeta_1

i26 <- (alpha2/sqrt(Omega22)) * (((alpha1 + lambda * alpha2) * tau)/(den)) *
  Ezeta_2 + E_Z1_zeta2)

i27 <- (alpha2/sqrt(Omega22)) * (((alpha2 + lambda * alpha1) * tau)/(den)) *
  Ezeta_2 + E_Z2_zeta2) + (1/sqrt(Omega22)) * Ezeta_1

i28 <- ((alpha2 * den)/sqrt(Omega22)) * Ezeta_2

i33 <- -(lambda^2 - E_Z1q + 2 * E_Z1Z2 * lambda)/(Omega11^2) * (1 - lambda^2)) -
  (4 * lambda^3 * E_Z1Z2 - 2 * lambda^2 * E_Z1q - lambda^2 * E_Z2q)/(Omega11^2) *
  (1 - lambda^2)^2) + (lambda^4 * (E_Z1q + E_Z2q - 2 * E_Z1Z2 * lambda))/(Omega11^2) *
  (1 - lambda^2)^3) - 1/(2 * Omega11^2) - lambda^4/((2 * Omega11^2) * (1 -

```

```

lambda^2)^2) - (1/(4 * Omega11^2)) * (((3 * alpha1 * alpha2 * tau * lambda)/den) *
Ezeta_1 - ((alpha1^2 * alpha2^2 * tau * lambda^2)/den^(3)) * Ezeta_1 + 3 *
alpha1 * E_Z1_zeta1) - (1/(4 * Omega11^2)) * (((alpha1^2 * alpha2^2 * tau^2 *
lambda^2)/den^2) * Ezeta_2 + alpha1^2 * EZ1q_zeta2 + ((2 * alpha1^2 * alpha2 *
tau * lambda)/den) * E_Z1_zeta2)

i34 <- ((lambda + E_Z1Z2)/((1 - lambda^2) * (Omega11^(3/2)) * sqrt(Omega22))) -
(2 * lambda * E_Z1q + lambda * E_Z2q - 5 * lambda^2 * E_Z1Z2 - lambda^3)/(((1 -
lambda^2)^2) * (Omega11^(3/2)) * sqrt(Omega22)) - (2 * lambda^3 * (E_Z1q +
E_Z2q - 2 * E_Z1Z2 * lambda))/(((1 - lambda^2)^3) * (Omega11^(3/2)) * sqrt(Omega22)) -
(((alpha1^2) * (alpha2^2) * tau * lambda)/(2 * (Omega11^(3/2)) * sqrt(Omega22) *
den^3) - (alpha1 * alpha2 * tau)/(2 * Omega11^(3/2)) * sqrt(Omega22) *
den)) * Ezeta_1 + (((alpha1 * alpha2 * tau)/(2 * (Omega11^(3/2)) * sqrt(Omega22) *
den)) * ((alpha1 * alpha2 * lambda * tau)/den) * Ezeta_2 + alpha1 * E_Z1_zeta2))

i35 <- -(lambda^4 + 6 * lambda^3 * E_Z1Z2 - 2 * lambda^2 * E_Z1q - 2 * lambda^2 *
E_Z2q)/(2 * Omega11 * Omega22 * (1 - lambda^2)^2) - (lambda^2)/(2 * Omega11 *
Omega22 * (1 - lambda^2)) - (lambda * E_Z1Z2)/(Omega11 * Omega22 * (1 - lambda^2)) +
(lambda^4 * (E_Z1q + E_Z2q - 2 * E_Z1Z2 * lambda))/(Omega11 * Omega22 * (1 -
lambda^2)^3) - ((alpha1 * alpha2 * lambda * tau)/(4 * Omega11 * Omega22 *
den)) * (1 - (alpha1 * alpha2 * lambda)/(1 + alphastar)) * Ezeta_1 - ((alpha1 *
alpha2)/(4 * Omega11 * Omega22)) * (((alpha1 * alpha2 * lambda^2 * tau^2)/den^2) *
Ezeta_2 + ((alpha2 * lambda * tau)/den) * E_Z2_zeta2 + ((alpha1 * lambda *
tau)/den) * E_Z1_zeta2 + E_Z1Z2_zeta2)

i36 <- -(1/(2 * Omega11)) * (((alpha1 * alpha2 * lambda * (alpha2 * lambda +
alpha1) * tau)/(den^(3))) * Ezeta_1 - ((alpha2 * lambda * tau)/den) * Ezeta_1 -
E_Z1_zeta1) + (1/(2 * Omega11)) * (((alpha1 * alpha2 * lambda * tau^2 * (alpha2 *
lambda + alpha1))/den^2) * Ezeta_2 + ((alpha1 * alpha2 * lambda * tau)/den) *
E_Z1_zeta2 + ((alpha1 * (alpha2 * lambda + alpha1) * tau)/den) * E_Z1_zeta2 +
alpha1 * EZ1q_zeta2)

i37 <- -(1/(2 * Omega11)) * ((alpha1 * alpha2 * lambda * (alpha1 * lambda + alpha2) *
tau)/(den^(3)) - (alpha1 * lambda * tau)/den) * Ezeta_1 + (1/(2 * Omega11)) *
(((alpha1 * alpha2 * lambda * tau^2 * (alpha2 + alpha1 * lambda))/den^2) *
Ezeta_2 + ((alpha1 * alpha2 * lambda * tau)/(den)) * E_Z2_zeta2 + ((alpha1 *
(alpha2 + alpha1 * lambda) * tau)/den) * E_Z1_zeta2 + alpha1 * E_Z1Z2_zeta2)

i38 <- ((alpha1 * alpha2 * lambda)/(2 * Omega11 * den)) * Ezeta_1 + (den/(2 *
Omega11)) * (((alpha1 * alpha2 * lambda * tau)/den) * Ezeta_2 + alpha1 *
E_Z1_zeta2)

i44 <- -(1/((1 - lambda^2) * Omega11 * Omega22)) - (6 * lambda * E_Z1Z2 - E_Z1q -
E_Z2q + 2 * lambda^2)/(((1 - lambda^2)^2) * Omega11 * Omega22) + (4 * lambda^2 *
(E_Z1q + E_Z2q - 2 * E_Z1Z2 * lambda))/(((1 - lambda^2)^3) * Omega11 * Omega22) -
((alpha1^2 * alpha2^2 * tau)/(Omega11 * Omega22 * den^2)) * (tau * Ezeta_2 -
Ezeta_1/den)

i45 <- (lambda + E_Z1Z2)/((1 - lambda^2) * Omega22^(3/2) * sqrt(Omega11)) - (2 *
lambda * E_Z2q + lambda * E_Z1q - 5 * lambda^2 * E_Z1Z2 - lambda^3)/((1 -
lambda^2)^2 * Omega22^(3/2) * sqrt(Omega11)) - (2 * lambda^3 * (E_Z1q + E_Z2q -
2 * E_Z1Z2 * lambda))/((1 - lambda^2)^3 * Omega22^(3/2) * sqrt(Omega11)) -
((alpha1^2 * alpha2^2 * tau * lambda)/(2 * Omega22^(3/2) * sqrt(Omega11) *
den^3) - (alpha1 * alpha2 * tau)/(2 * Omega22^(3/2) * sqrt(Omega11) *
den)) * Ezeta_1 + ((alpha1 * alpha2 * tau)/(2 * Omega22^(3/2) * sqrt(Omega11) *
den)) * ((alpha1 * alpha2 * lambda * tau)/den) * Ezeta_2 + alpha2 * E_Z2_zeta2)

i46 <- -(alpha2 * tau)/(sqrt(Omega11 * Omega22) * den) * (1 - (alpha1 * (alpha2 *

```

```

lambda + alpha1))/den^2) * Ezeta_1 - (alpha1 * alpha2 * tau)/(sqrt(Omega11 *
Omega22) * den) * (((alpha1 + lambda * alpha2) * tau)/den) * Ezeta_2 + E_Z1_zeta2)

i47 <- -(alpha1 * tau)/(sqrt(Omega11 * Omega22) * den) * (1 - (alpha2 * (alpha1 *
lambda + alpha2))/den^2) * Ezeta_1 - ((alpha1 * alpha2 * tau)/(sqrt(Omega11 *
Omega22) * den)) * (((alpha2 + lambda * alpha1) * tau)/den) * Ezeta_2 +
E_Z2_zeta2)

i48 <- -((alpha1 * alpha2)/sqrt(Omega11 * Omega22)) * (Ezeta_1/den + tau * Ezeta_2)

i55 <- -(lambda^2 - E_Z2q + 2 * E_Z1Z2 * lambda)/((Omega22^2) * (1 - lambda^2)) -
(4 * lambda^3 * E_Z1Z2 - 2 * lambda^2 * E_Z2q - lambda^2 * E_Z1q)/(Omega22^2) *
(1 - lambda^2)^2) + (lambda^4 * (E_Z1q + E_Z2q - 2 * E_Z1Z2 * lambda))/(Omega22^2) *
(1 - lambda^2)^3) - 1/(2 * Omega22^2) - lambda^4/((2 * Omega22^2) * (1 -
lambda^2)^2) - (1/(4 * Omega22^2)) * ((3 * alpha1 * alpha2 * tau * lambda)/den) *
Ezeta_1 - ((alpha1^2 * alpha2^2 * tau * lambda^2)/den^3) * Ezeta_1 + 3 *
alpha2 * E_Z2_zeta1) - (1/(4 * Omega22^2)) * ((alpha1^2 * alpha2^2 * tau^2 *
lambda^2)/den^2) * Ezeta_2 + alpha2^2 * EZ2q_zeta2 + ((2 * alpha1 * alpha2^2 *
tau * lambda)/den) * E_Z2_zeta2)

i56 <- -(1/(2 * Omega22)) * ((alpha1 * alpha2 * lambda * (alpha2 * lambda + alpha1) *
tau)/(den^3) - (alpha2 * lambda * tau)/(den)) * Ezeta_1 + (1/(2 * Omega22)) *
(((alpha1 * alpha2 * lambda * tau^2 * (alpha1 + alpha2 * lambda))/(den)^2) *
Ezeta_2 + ((alpha1 * alpha2 * lambda * tau)/(den)) * E_Z1_zeta2 + ((alpha2 *
(alpha1 + alpha2 * lambda) * tau)/(den)) * E_Z2_zeta2 + alpha2 * E_Z1Z2_zeta2)

i57 <- -(1/(2 * Omega22)) * ((alpha1 * alpha2 * lambda * (alpha1 * lambda +
alpha2) * tau)/(den^3)) * Ezeta_1 - ((alpha1 * lambda * tau)/(den)) * Ezeta_1 -
E_Z2_zeta1) + (1/(2 * Omega22)) * (((alpha1 * alpha2 * lambda * tau^2 * (alpha1 *
lambda + alpha2))/den^2) * Ezeta_2 + ((alpha1 * alpha2 * lambda * tau)/den) *
E_Z2_zeta2 + ((alpha2 * (alpha1 * lambda + alpha2) * tau)/den) * E_Z2_zeta2 +
alpha2 * EZ2q_zeta2)

i58 <- ((alpha1 * alpha2 * lambda)/(2 * Omega22 * den)) * Ezeta_1 + (den/(2 *
Omega22)) * (((alpha1 * alpha2 * lambda * tau)/den) * Ezeta_2 + alpha2 *
E_Z2_zeta2)

i66 <- -(tau/den - ((alpha2 * lambda + alpha1)^2 * tau)/den^3)) * Ezeta_1 -
(((alpha1 + lambda * alpha2)^2 * tau^2)/den^2) * Ezeta_2 - EZ1q_zeta2 - ((2 *
(alpha1 + lambda * alpha2) * tau)/den) * E_Z1_zeta2

i67 <- -((lambda * tau)/den - ((alpha2 + lambda * alpha1) * (alpha1 + lambda *
alpha2) * tau)/den^3) * Ezeta_1 - ((alpha1 + lambda * alpha2) * (alpha2 +
lambda * alpha1) * tau^2)/den^2) * Ezeta_2 - (((alpha1 + lambda * alpha2) *
tau)/den) * E_Z2_zeta2 - ((alpha2 + lambda * alpha1) * tau)/den) * E_Z1_zeta2 -
E_Z1Z2_zeta2

i68 <- -((alpha1 + lambda * alpha2)/den) * Ezeta_1 - (((alpha1 + lambda * alpha2) *
tau)/den) * Ezeta_2 + E_Z1_zeta2) * den

i77 <- -(tau/den - ((alpha1 * lambda + alpha2)^2 * tau)/den^3)) * Ezeta_1 -
(((alpha2 + lambda * alpha1)^2 * tau^2)/den^2) * Ezeta_2 - EZ2q_zeta2 - ((2 *
(alpha2 + lambda * alpha1) * tau)/den) * E_Z2_zeta2

i78 <- -((alpha2 + lambda * alpha1)/den) * Ezeta_1 - (((alpha2 + lambda * alpha1) *
tau)/den) * Ezeta_2 + E_Z2_zeta2) * den

i88 <- -(1 + alphastar) * Ezeta_2 + zeta2tau

```

```
l1 <- c(i11, i12, i13, i14, i15, i16, i17, i18)
l2 <- c(i12, i22, i23, i24, i25, i26, i27, i28)
l3 <- c(i13, i23, i33, i34, i35, i36, i37, i38)
l4 <- c(i14, i24, i34, i44, i45, i46, i47, i48)
l5 <- c(i15, i25, i35, i45, i55, i56, i57, i58)
l6 <- c(i16, i26, i36, i46, i56, i66, i67, i68)
l7 <- c(i17, i27, i37, i47, i57, i67, i77, i78)
l8 <- c(i18, i28, i38, i48, i58, i68, i78, i88)

I.dp <- matrix(rbind(l1, l2, l3, l4, l5, l6, l7, l8), 8, 8)
list(info.dp = I.dp)
}
```

Bibliografia

- Anděl, J., Netuka, I., & Zvrá, K. (1984). On threshold autoregressive processes. *Kybernetika*, 20, 89–106.
- Arellano-Valle, R. B. & Azzalini, A. (2008). The centred parametrization for the multivariate skew-normal distribution. *J. Multivariate Analysis*, 99, 1362–1382. Corrigendum: vol.100 (2009), 816.
- Arnold, B. C. & Beaver, R. J. (2000). Hidden truncation model. *Sankhyā, series A*, 62, 22–35.
- Arnold, B. C., Beaver, R. J., Groeneveld, R. A., & Meeker, W. Q. (1993). The nontruncated marginal of a truncated bivariate normal distribution. *Psychometrika*, 58, 471–488.
- Azzalini, A. (1985). A class of distributions wich includes the normal ones. *Scand. J. Statist.*, 12, 171–178.
- Azzalini, A. (1986). Further result on a class of distributions which includes the normal ones, si veda errata corrige. *Statistica*, 46, 199–208. Corrigendum: <http://azzalini.stat.unipd.it/SN/errata86.pdf>.
- Azzalini, A. (2001). *Inferenza statistica. Una presentazione basata sul concetto di verosimiglianza*. Milano: Springer-Verlag Italia.
- Azzalini, A. (2005). The skew-normal distribution and related multivariate families. *Scand. J. Statist.*, 32(2), 159–188.
- Azzalini, A. & Capitanio, A. (1999). Statistical applications of the multivariate skew normal distribution. *J. R. Statist Soc. series B*, 61, 579–602.
- Azzalini, A. & Capitanio, A. (2003). Distributions generated by perturbation of symmetry with emphasis on a multivariate skew t distribution. *J. R. Statist. Soc. B*, 65, Part 2, 367–389.

- Azzalini, A. & Dalla Valle, A. (1996). The multivariate skew-normal distribution. *Biometrika*, 83, 715–726.
- Birnbaum, Z. W. (1950). Effect of linear truncation on a multinormal population. *Ann. Math. Statist.*, 21, 272–279.
- Canale, A. (2008). Aspetti statistici nella normale asimmetrica estesa. Tesi di laurea specialistica, Facoltà di Scienze Statistiche, Università degli Studi di Padova.
- Capitanio, A., Azzalini, A., & Stanghellini, E. (2003). Graphical models for skew-normal variates. *Scand. J. Statist.*, 30, 129–144.
- Chiogna, M. (1998). Some results on the scalar skew-normal distribution. *J. Ital. Statist. Soc.*, 7, 1–13.
- Chiogna, M. (2005). A note on the asymptotic distribution of the maximum likelihood estimator for the scalar skew-normal distribution. *Statistical Methods and Applications*, 14, 331–341.
- de Helguero, F. (1908). Sulla rappresentazione analitica delle curve abnormali. *Atti del IV congresso internazionale dei matematici*, Vol.III (sez. III-b), 288–299. Ed. G. Castelnuovo. R. Accademia dei Lincei, Roma.
- Genton, M. G. & editor (2004). *Skew-Elliptical Distributions and Their Applications: a Journey Beyond Normality*. Chapman & Hall/CRC.
- Gilbert, P. (2009). *numDeriv: Accurate Numerical Derivatives*. R package version 2009.2-1, <http://www.bank-banque-canada.ca/pgilbert>.
- Liseo, B. (1990). La classe delle densità normali sghembe: aspetti inferenziali da un punto di vista bayesiano. *Statistica*, 50, 59–70.
- Mardia, K. V. (1970). Measures of multivariate skewness and kurtosis with application. *Biometrika*, 57, 519–530.
- Mardia, K. V. (1974). Applications of some measures of multivariate skewness and kurtosis in testing normality and robustness studies. *Sankhyā*, 36, 115–128.

- Mardia, K. V., Kent, J. T., & Bibby, J. M. (1979). *Multivariate analysis*. London: Academic Press.
- Nelson, L. (1964). The sum of values from a normal and a truncated normal distribution. *Technometrics*, 4, 469–471.
- Pace, L. & Salvan, A. (2001). *Introduzione alla statistica - II. Inferenza, Verosimiglianza, Modelli*. Padova: CEDAM.
- Pearson, K. (1895). On skew probability curves. *Nature*, 52, 317.
- Pewsey, A. (2000). Problems of inference for Azzalini's skew-normal distribution. *J. Appl. Stat.*, 27, 859–870.
- R Development Core Team (2010). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. <http://www.R-project.org/>.
- Rotnizsky, A., Cox, D. R., Bottai, M., & Robins, J. (2000). Likelihood-based inference with singular information matrix. *Bernoulli*, 6, 243–284.
- Schelter, W. et al. (2009). Maxima, a Computer Algebra System. Website. <http://maxima.sourceforge.net>.
- Thomas Hahn, A. B. & Kiêu, K. (2010). *R2Cuba: Multidimensional Numerical Integration*. R package version 1.0-6, <http://CRAN.R-project.org/package=R2Cuba>.
- Weinstein, M. A. (1964). The sum of values from a normal and a truncated normal distribution. *Technometrics*, 6, 104–105.
- Zacks, S. (1981). *Parametric Statistical Inference*. Oxford: Pergamon.