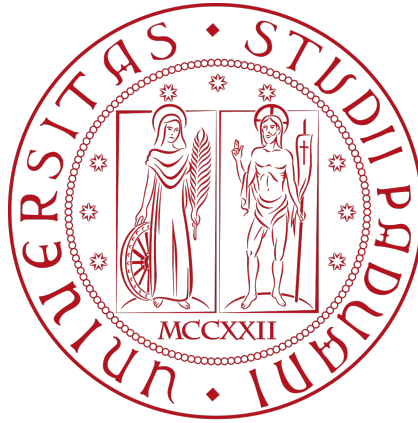


UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI FISICA E ASTRONOMIA

Tesi di laurea in Fisica



Studio di superradianza e trasparenza autoindotta  
applicate ai microtubuli nel contesto della teoria  
Orch-OR

Relatore

*Dott. Michele Allegra*

*Dipartimento di Fisica e Astronomia*

Laureando: *Alessandro Zaccaria Setti*

ANNO ACCADEMICO 2024-2025

# Indice

1	Introduzione	1
2	Modello di Dicke: costruzione dell'Hamiltoniano	2
3	Modello quantistico del microtubulo	8
4	Impulso coerente nel microtubulo e trasparenza autoindotta	16
5	Effetti di decoerenza e rumore	22
6	Conclusioni	25

# 1 Introduzione

Nel contesto della dibattuta teoria Orch-OR (Orchestrated Objective reduction), proposta da Roger Penrose e Stuart Hameroff a fine anni'90 e rivisitata alla luce di critiche teoriche e avanzamenti sperimentali [1], il microtubulo è stato e rimane un componente fondamentale del framework proposto dai due autori, essendo visto come la sede di fenomeni che nel loro complesso sono ritenuti fondamentali per l'emergere dell'esperienza cosciente dalla materia che compone il cervello umano.

Una delle prime modellizzazioni della teoria [2] presenta il microtubulo, un componente della struttura dei neuroni, come un sistema capace di emissione superradiante e trasparenza autoindotta che lo renderebbero fondamentale per un particolare tipo di computazione biomolecolare non classica che insieme con altri fenomeni, non discussi nel presente lavoro, costituiscono il quadro teorico di Orch-OR.

Il presente lavoro parte da una disamina del fenomeno della superradianza a partire dal modello proposto da Dicke (1954) [3] e prosegue analizzando l'estensione dello stesso al contesto del microtubulo per valutare come in esso possano insorgere emissione coerente superradiante e trasmissione imperturbata tramite trasparenza autoindotta. Infine si concluderà con una disamina qualitativa dei fenomeni che potrebbero invalidare la presenza effettiva dei fenomeni ricercati all'interno del microtubulo neuronale.

## 2 Modello di Dicke: costruzione dell'Hamiltoniano

Il modello di Dicke prende in esame un sistema a due livelli  $|g\rangle$  e  $|e\rangle$  identificati rispettivamente con lo stato fondamentale (ground state)  $|g\rangle$  ed uno stato eccitato (excited state)  $|e\rangle$  di un atomo.

Considerando un insieme di atomi eccitati in contatto con un bagno termico, ci si aspetta che decadano al livello fondamentale secondo una legge esponenziale del tipo:

$$I(t) = I_0 N e^{-t/\tau} \quad (1)$$

dove  $I(t)$  è intensità di emissione al tempo  $t$ ,  $N$  è il numero iniziale di atomi in uno stato eccitato,  $\tau$  un tempo caratteristico di rilassamento e  $I_0$  l'intensità di emissione di un singolo atomo.

Tuttavia, quando si considera un numero elevato di atomi confinati a distanza inferiore alla lunghezza d'onda del fotone che viene emesso per diseccitazione degli stessi, si verifica un fenomeno inusuale, detto *superradianza* [4]: a causa della reciproca interazione, mediata dal campo elettromagnetico presente nel volume dove gli atomi sono confinati, l'emissione avviene quasi interamente in un tempo caratteristico che scala inversamente con  $N$  e con un'intensità proporzionale a  $N^2$ , secondo la seguente dipendenza funzionale:

$$I(t) = \beta N^2 \operatorname{sech}^2\left(\frac{t - t_0}{t_R}\right), \quad t_R \propto \frac{1}{N} \quad (2)$$

dove  $\beta$  è una costante e  $t_0$  è il tempo di ritardo che indica dopo quanto l'emissione raggiunge la sua massima intensità.<sup>1</sup> I profili temporali caratteristici dell'emissione spontanea standard (incoerente) e di quella superradiante sono raffigurati in Fig. 1.

---

<sup>1</sup>Si riportano in appendice le formule esatte e i valori delle costanti utilizzate per i plot

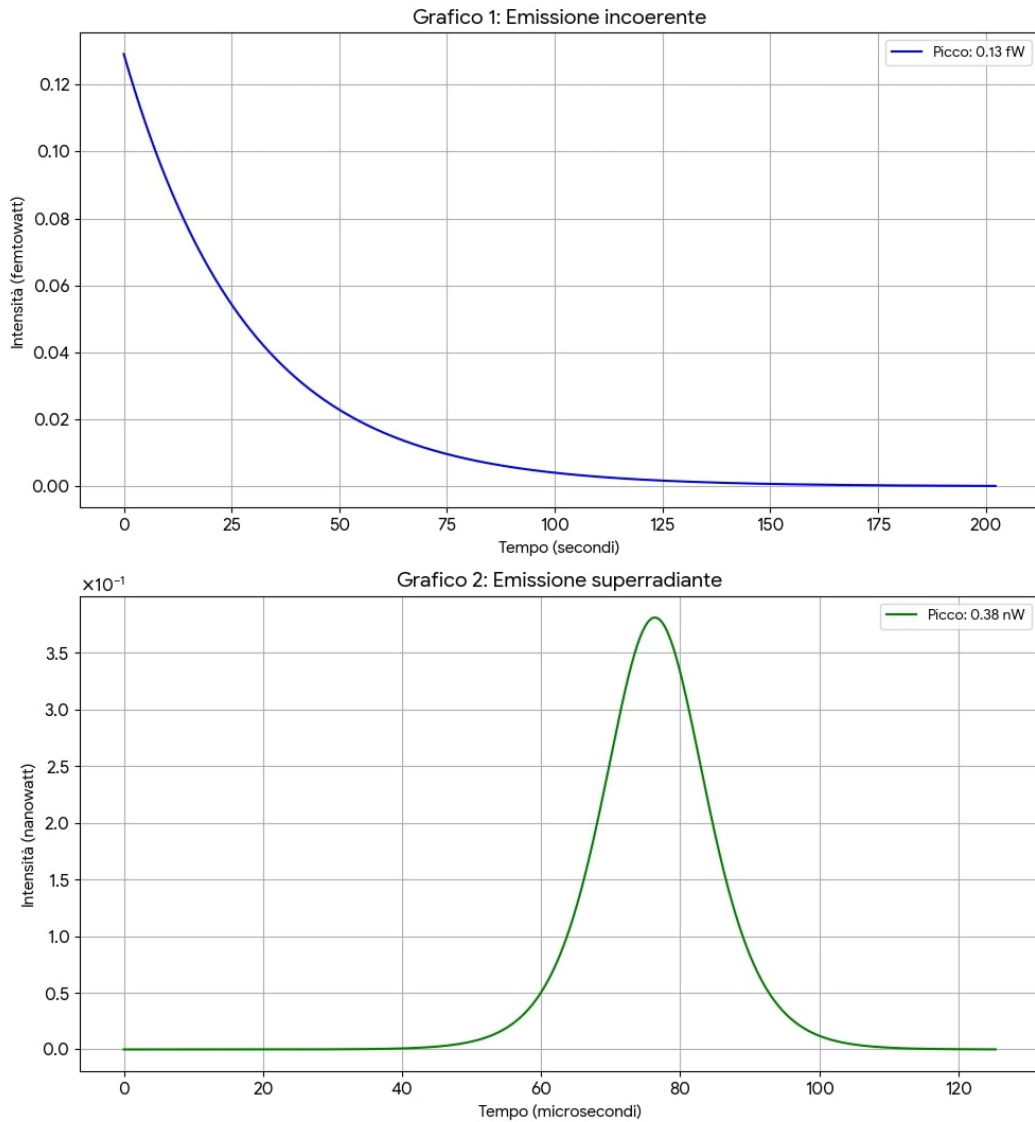


Figura 1: Confronto dei modelli di emissione

Per verificare quanto detto sopra si procede alla derivazione dell'Hamiltoniana del sistema, data da

$$H = H_{at} + H_{em} + H_{int} \quad (3)$$

dove  $H_{at}$  è il contributo dovuto agli atomi,  $H_{em}$  è il contributo dovuto al campo elettromagnetico, ed  $H_{int}$  è il termine di interazione radiazione-materia.

Prima di proseguire tuttavia si introducono degli operatori detti di spin "fittizio", che differiscono da quelli per lo spin  $\frac{1}{2}$  propriamente detti, per l'adimensio-

nalità che li caratterizza. Il loro scopo è quello di permettere la modellizzazione di un sistema a 2 livelli in ambito quantomeccanico e sono definiti come:

$$S^i = \frac{1}{2}\sigma_i \quad (\text{per } i = 1, 2, 3) \quad (4)$$

con

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

nella rappresentazione in cui  $|e\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  e  $|g\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Si definiscono inoltre gli operatori di innalzamento e abbassamento

$$S_i^+ = S_i^1 + iS_i^2 = |e_i\rangle\langle g_i| \quad (6)$$

$$S_i^- = S_i^1 - iS_i^2 = |g_i\rangle\langle e_i| \quad (7)$$

e si conclude la digressione fornendo le relazioni di commutazione tra i vari operatori che si riveleranno utili nei calcoli successivi

$$[S_i^3, S_j^\pm] = \pm\delta_{ij}S_i^\pm; \quad [S_i^+, S_j^-] = 2\delta_{ij}S_i^3 \quad (8)$$

e specificando che d'ora innanzi con "spin" ci si riferirà a quello adimensionale sopra definito.

Tornando ora a considerare la (3), ci si concentra dapprima su  $H_{at}$  ovvero l'operatore che misura lo stato energetico degli atomi definito come

$$H_{at} = \frac{\hbar\omega_0}{2} \sum_i (|e_i\rangle\langle e_i| - |g_i\rangle\langle g_i|) = \hbar\omega_0 \sum_i S_i^3 \quad (9)$$

Ogni atomo è infatti un sistema a 2 livelli, separati da un intervallo energetico  $\hbar\omega_0$  ove  $\omega_0$  è la frequenza del fotone emesso per diseccitazione o assorbito per eccitazione - frequenza, dato il contesto, fissata. Da ciò viene naturale comprendere l'analogia tra questo caso e quello di una particella di spin  $\frac{1}{2}$  i cui livelli energetici up e down, fatti coincidere rispettivamente con  $|e\rangle$  e  $|g\rangle$ , han-

no energie  $E_e = \frac{\hbar\omega_0}{2}$  e  $E_g = -\frac{\hbar\omega_0}{2}$ , evidentemente autovalori dell'Hamiltoniana del singolo atomo, direttamente dipendente dall'operatore di spin  $S_i^3$ .

Gli altri due termini  $H_{em}$  e  $H_{int}$  sono ricavati a partire dalla quantizzazione del campo elettromagnetico. È noto che l'energia totale del campo elettromagnetico (classico) in un volume cubico  $V = L^3$  è

$$H_{em} = \frac{1}{2} \int_V \left( \epsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2 \right) dV \quad (10)$$

con  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  definite come

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \quad (11)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (12)$$

Usando, per semplicità di conto, il gauge di Coulomb  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  e ricordando che la carica netta all'interno del volume in cui sono confinati gli atomi è nulla si può assumere  $\phi = 0$  e ottenere per il potenziale vettore la seguente espressione

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mu=\pm 1} \left( \boldsymbol{\epsilon}^{(\mu)}(\mathbf{k}) a_{\mathbf{k}}^{(\mu)}(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \boldsymbol{\epsilon}^{*(\mu)}(\mathbf{k}) a_{\mathbf{k}}^{*(\mu)}(t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right) \quad (13)$$

ove  $a_{\mathbf{k}}^{(\mu)}(t) = e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t} \cdot a_{\mathbf{k}}^{(\mu)}(0)$  e  $\bar{a}_{\mathbf{k}}^{(\mu)}(t) = e^{i\omega_{\mathbf{k}}t} \cdot \bar{a}_{\mathbf{k}}^{(\mu)}(0)$  sono due variabili complesse e  $\mathbf{k}$  è il vettore d'onda di ogni singolo modo di oscillazione del campo; il suo modulo vale  $|\mathbf{k}| = \frac{\omega}{c}$  e le sue componenti sono sottoposte, per le condizioni a contorno, al vincolo  $k_i = \frac{2\pi n_i}{L}$ , infine  $\boldsymbol{\epsilon}^{(\mu)}(\mathbf{k})$  sono i vettori che indicano il verso di polarizzazione della singola onda monocromatica. Si ottengono quindi per campo elettrico e magnetico le seguenti espressioni:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \\ &= \sum_{\mathbf{k}} i\omega_{\mathbf{k}} \sum_{\mu=\pm 1} \left( \boldsymbol{\epsilon}^{(\mu)}(\mathbf{k}) a_{\mathbf{k}}^{(\mu)}(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \boldsymbol{\epsilon}^{*(\mu)}(\mathbf{k}) a_{\mathbf{k}}^{*(\mu)}(t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right) \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \\ &= i \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mu=\pm 1} \{ (\mathbf{k} \times \boldsymbol{\epsilon}^{(\mu)}(\mathbf{k})) a_{\mathbf{k}}^{(\mu)}(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - (\mathbf{k} \times \boldsymbol{\epsilon}^{*(\mu)}(\mathbf{k})) a_{\mathbf{k}}^{*(\mu)}(t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \} \end{aligned} \quad (15)$$

La procedura di quantizzazione consiste nel promuovere i coefficienti  $a_{\mathbf{k}}^{(\mu)}(t)$  e  $a_{\mathbf{k}}^{*(\mu)}(t)$  ad operatori [5, 6], definiti come:

$$a_{\mathbf{k}}^{(\mu)}(t) \longrightarrow \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega V \varepsilon_0}} a^{(\mu)}(\mathbf{k}) \quad (16)$$

$$a_{\mathbf{k}}^{*(\mu)}(t) \longrightarrow \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega V \varepsilon_0}} a^{\dagger(\mu)}(\mathbf{k}) \quad (17)$$

con relazioni di commutazione:

$$[a^{(\mu)}(\mathbf{k}), a^{(\mu')}(\mathbf{k}')] = 0 \quad (18)$$

$$[a^{\dagger(\mu)}(\mathbf{k}), a^{\dagger(\mu')}(\mathbf{k}')] = 0 \quad (19)$$

$$[a^{(\mu)}(\mathbf{k}), a^{\dagger(\mu')}(\mathbf{k}')] = \delta_{\mu\mu'} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \quad (20)$$

Facendo uso delle equazioni (14) e (15), sostituendole in (10), e tenendo solo i termini della sommatoria con  $\mathbf{k} = \mathbf{k}'$  e  $\mu = \mu'$  (grazie a  $\int_V e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r} = V\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}$  che, come relazione d'ortogonalità, elimina i termini misti), si ottiene l'espressione

$$H_{em} = V\varepsilon_0 \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mu=\pm 1} \omega_{\mathbf{k}}^2 \left( a_{\mathbf{k}}^{(\mu)*}(t) a_{\mathbf{k}}^{(\mu)}(t) + a_{\mathbf{k}}^{(\mu)}(t) a_{\mathbf{k}}^{(\mu)*}(t) \right) \quad (21)$$

che altro non è che l'espressione dell'Hamiltoniana classica del campo elettromagnetico in termini della decomposizione di Fourier del campo. Quantizzando tale espressione secondo le regole sopra esposte si ottiene:

$$H_{em} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}, \mu=\pm 1} \hbar\omega_{\mathbf{k}} \left( a^{\dagger(\mu)}(\mathbf{k}) a^{(\mu)}(\mathbf{k}) + a^{(\mu)}(\mathbf{k}) a^{\dagger(\mu)}(\mathbf{k}) \right) \quad (22)$$

Poiché, tramite (20), si ha

$$\begin{aligned} [a^{(\mu)}(\mathbf{k}), a^{\dagger(\mu)}(\mathbf{k})] &= a^{(\mu)}(\mathbf{k})a^{\dagger(\mu)}(\mathbf{k}) + a^{\dagger(\mu)}(\mathbf{k})a^{(\mu)}(\mathbf{k}) = 1 \\ a^{(\mu)}(\mathbf{k})a^{\dagger(\mu)}(\mathbf{k}) &= a^{\dagger(\mu)}(\mathbf{k})a^{(\mu)}(\mathbf{k}) + 1 \end{aligned}$$

otteniamo dunque l'espressione comunemente usata,

$$H_{em} = \sum_{\mathbf{k}, \mu=\pm 1} \hbar\omega_{\mathbf{k}} \left( a^{\dagger(\mu)}(\mathbf{k})a^{(\mu)}(\mathbf{k}) + \frac{1}{2} \right) \quad (23)$$

Volendo infine ricavare il termine di interazione si parte dalla sua espressione classica per un singolo atomo:

$$H_{int} = -\mathcal{D} \cdot \mathbf{E} \quad (24)$$

Il termine di dipolo, opportunamente quantizzato, può essere ulteriormente scomposto come:

$$\mathcal{D}_{ai} = (S_i^+ + S_i^-)d\mathcal{E}_a \quad (25)$$

con  $\mathcal{E}_a$  versore che indica la direzione della polarizzazione e  $d$  elemento della matrice di dipolo elettrico, assunto reale senza alcuna perdita di generalità.

D'altro canto anche il campo elettrico, quantizzato come

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = i \sum_{\mathbf{k}, \mu} \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2V\epsilon_0}} \{ \boldsymbol{\epsilon}^{(\mu)}(\mathbf{k})a^{(\mu)}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \boldsymbol{\epsilon}^{(\mu)*}(\mathbf{k})a^{\dagger(\mu)}(\mathbf{k})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \} \quad (26)$$

può essere scomposto nella componente che distrugge fotoni

$$\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}) = i \sum_{\mathbf{k}, \mu} \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2V\epsilon_0}} \boldsymbol{\epsilon}^{(\mu)}(\mathbf{k})a^{(\mu)}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (27)$$

e in quella che li crea

$$\mathbf{E}^{(-)}(\mathbf{r}) = -i \sum_{\mathbf{k}, \mu} \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2V\epsilon_0}} \boldsymbol{\epsilon}^{(\mu)*}(\mathbf{k})a^{\dagger(\mu)}(\mathbf{k})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (28)$$

pertanto l'ultima componente dell'Hamiltoniano ha la seguente forma:

$$H_{int} = - \sum_i d\mathcal{E}_a (S_i^+ + S_i^-) (\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}_i) + \mathbf{E}^{(-)}(\mathbf{r}_i)) \quad (29)$$

Dunque l'espressione complessiva dell'operatore Hamiltoniano del sistema è

$$H = \hbar\omega_0 \sum_i S_{i3} + \sum_{\mathbf{k}, \mu=\pm 1} \hbar\omega_k \left( a^{\dagger(\mu)}(\mathbf{k}) a^{(\mu)}(\mathbf{k}) + \frac{1}{2} \right) - \sum_i d\mathcal{E}_a (S_i^+ + S_i^-) (\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}_i) + \mathbf{E}^{(-)}(\mathbf{r}_i)) \quad (30)$$

### 3 Modello quantistico del microtubulo

Il microtubulo è una struttura di forma cilindrica con diametro interno di 15 *nm* e diametro esterno di 25 *nm* con lunghezza variabile tra i 100 e i 1000 *nm*. L'interno è cavo e riempito prevalentemente da molecole d'acqua in un numero stimato di  $\approx 10^7$  unità per microtubulo. Per ciascuna molecola si considereranno lo stato eccitato e fondamentale rispetto alle transizioni rotazionali.

Si applica quindi ora l'Hamiltoniano generale del sistema, trovato nella sezione precedente, al contesto del microtubulo, tramite una serie di manipolazioni matematiche e di assunzioni e approssimazioni fisiche che descrivano accuratamente il caso in esame, permettendo quindi di arrivare a una espressione analitica per l'intensità di emissione.

Innanzitutto assumiamo che le molecole siano inizialmente, grazie all'eccitazione termica proveniente dal resto dei processi neuronali, ognuna nello stato  $|e\rangle$  e confinate in un volume  $V$  di dimensioni lineari molto minori della lunghezza d'onda del fotone di transizione tra  $|e\rangle$  e  $|g\rangle$  e polarizzate lungo una stessa direzione. Tale assunzione ci permette di vedere le molecole come un insieme di elementi distinguibili ma che hanno condizione iniziale simmetrica per scambio e, siccome risentono tutti, punto per punto, dello stesso campo elettrico all'interno di  $V$ , sono soggetti ad un'interazione che si sviluppa in modo simmetrico per scambio in qualsiasi istante del processo. Pertanto dei  $2^N$  stati del sistema ci si restringe a considerare gli  $N + 1$  stati simmetrici. Da

questa condizione discende che gli unici operatori che contano nella dinamica del sistema sono gli operatori collettivi

$$S^3 = \sum_i S_i^3, \quad S^\pm = \sum_i S_i^\pm \quad (31)$$

$$[S^3, S^\pm] = \pm S^\pm; \quad [S^+, S^-] = 2S^3 \quad (32)$$

e l'operatore di campo elettrico che diventa in ogni punto di  $V$

$$\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}_i) + \mathbf{E}^{(-)}(\mathbf{r}_i) \longrightarrow \mathbf{E}^{(+)} + \mathbf{E}^{(-)} \quad (33)$$

Inoltre si assume che sia presente nell'interazione un unico modo di campo rilevante con frequenza  $\omega_k$  coincidente con quella della transizione tra gli stati eccitato e fondamentale delle molecole  $\omega_0$  e con vettore d'onda  $k_0$  che si sceglie, senza perdita di generalità, orientato verso  $z$  (asse del microtubulo). Infine affinché il sistema sia risonante assumiamo che la già menzionata polarizzazione delle molecole sia coincidente con quella del campo elettrico che si genererà tramite la diseccitazione delle molecole stesse.

Alla luce di ciò l'Hamiltoniano del termine elettromagnetico diventa

$$H_{em} = \hbar\omega_0(a_0^\dagger a_0 + \frac{1}{2}) \quad (34)$$

che ci permette, insieme ai risultati precedenti, di scrivere l'Hamiltoniano libero

$$H_0 = H_{mol} + H_{em} = \hbar\omega_0 S^3 + \hbar\omega_0(a_0^\dagger a_0 + \frac{1}{2}) \quad (35)$$

che può essere usato, nella rappresentazione di interazione, per costruire le equazioni di Heisenberg degli operatori  $S_I^\pm(t)$  ed  $\mathbf{E}_I^\pm(t)$ ,

$$\frac{dS_I^\pm}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[S_I^\pm, \hbar\omega_0 S^3 + \hbar\omega_0(a_0^\dagger a_0 + \frac{1}{2})] = \pm i\omega_0 S_I^\pm \quad (36)$$

$$\frac{d\mathbf{E}_I^\pm}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\mathbf{E}_I^\pm, \hbar\omega_0 S^3 + \hbar\omega_0(a_0^\dagger a_0 + \frac{1}{2})] = \mp i\omega_0 \mathbf{E}_I^\pm \quad (37)$$

che risolte rendono

$$\begin{aligned} S_I^+(t) &= S^+ e^{+i\omega_0 t} & S_I^-(t) &= S^- e^{-i\omega_0 t} \\ \mathbf{E}_I^+(t) &= \mathbf{E}^+ e^{-i\omega_0 t} & \mathbf{E}_I^-(t) &= \mathbf{E}^- e^{+i\omega_0 t} \end{aligned} \quad (38)$$

Espandendo il termine di interazione si ottiene

$$\begin{aligned} H_{int} &= -d\mathcal{E}_a(S_I^+(t) + S_I^-(t))(\mathbf{E}_I^{(+)}(t) + \mathbf{E}_I^{(-)}(t)) \\ &= -d\mathcal{E}_a\left(S^+\mathbf{E}^{(+)}e^{\cancel{i\omega_0 t} - i\omega_0 t} + S^-\mathbf{E}^{(-)}e^{\cancel{i\omega_0 t} - i\omega_0 t} + S^+\mathbf{E}^{(-)}e^{2i\omega_0 t} + S^-\mathbf{E}^{(+)}e^{-2i\omega_0 t}\right) \end{aligned}$$

Si nota che i termini  $S^+\mathbf{E}^{(+)}$  ed  $S^-\mathbf{E}^{(-)}$  rimangono costanti nel tempo mentre gli altri due evolvono ad una frequenza  $2\omega_0$  molto alta, pertanto l'evoluzione dei termini misti, considerata su una scala temporale come quella dei processi di eccitazione e diseccitazione, dà un contributo medio nullo che autorizza a trascurarli - approssimazione detta "di onda rotante". La forma finale del termine di interazione è pertanto

$$H_{int} = -d\mathcal{E}_a(S^+\mathbf{E}^{(+)} + S^-\mathbf{E}^{(-)}) \quad (39)$$

e l'Hamiltoniano totale del sistema microtubulo è

$$H_{mt} = \hbar\omega_0 S^3 + \hbar\omega_0(a_0^\dagger a_0 + \frac{1}{2}) - d\mathcal{E}_a(S^+\mathbf{E}^{(+)} + S^-\mathbf{E}^{(-)}) \quad (40)$$

Si hanno ora a disposizione tutti gli elementi per scrivere accuratamente le equazioni di Heisenberg degli operatori  $S^3$ ,  $S^\pm$  ed  $\mathbf{E}^\pm$  che, onde semplificare i successivi calcoli, verranno risolte in visuale di interazione rispetto al solo termine del campo elettromagnetico presente nell'Hamiltoniano  $H_{mt}$ .

Sviluppando i commutatori si ottengono:

$$\begin{aligned} \frac{dS^3}{dt} &= \frac{1}{i\hbar}[S^3, H_{at} + H_{int}] = \frac{1}{i\hbar}[S^3, H_{int}] = \\ &= \frac{1}{i\hbar}[S^3, d\mathcal{E}_a(S^+\mathbf{E}^+ + S^-\mathbf{E}^-)] = i\frac{d\mathcal{E}_a}{\hbar}(S^+\mathbf{E}^+ - S^-\mathbf{E}^-) \end{aligned} \quad (41)$$

$$\frac{dS^\pm}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[S^\pm, H_{at} + H_{int}] = \frac{i}{\hbar}(\pm\hbar\omega_0 S^\pm \pm 2d\mathcal{E}_a S^3 \mathbf{E}^\mp) \quad (42)$$

$$\frac{d\mathbf{E}^\pm}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\mathbf{E}^\pm, H_{at} + H_{int}] = \frac{1}{i\hbar}[\mathbf{E}^\pm, H_{int}] = \pm \frac{i}{\hbar} d\mathcal{E}_a \frac{\hbar\omega_0}{2\varepsilon_0 V} S^\mp \quad (43)$$

Provvedendo ora alla soluzione di tali equazioni si introducono ulteriori approssimazioni: il campo elettrico si propaga nel microtubulo ad una velocità pari a  $c$  permanendovi dunque per un tempo pari a  $t_{mt} = \frac{l_{mt}}{c}$  dove  $l_{mt} = 10^2 - 10^3 nm$  è la lunghezza di un microtubulo. Tali scale temporali, estremamente piccole, consentono di approssimare la soluzione di (43) come

$$\mathbf{E}^\pm(t) \approx \mathbf{E}^\pm(0) + \frac{d\mathbf{E}^\pm}{dt} \cdot t_{mt} = \pm id\mathcal{E}_a \frac{\hbar\omega_0 l_{mt}}{2\varepsilon_0 V \hbar c} S^\mp \quad (44)$$

con  $\mathbf{E}^\pm(0)$  nullo poichè nell'istante iniziale tutta l'energia è contenuta nei dipoli, riducendo il problema alla soluzione delle due equazioni differenziali operatoriali non lineari accoppiate (3) e (42) che possono essere riscritte come

$$\frac{dS^3}{dt} = -\alpha S^+ S^- \quad (45)$$

$$\frac{dS^\pm}{dt} = \alpha S^3 S^\pm \pm i\omega_0 S^\pm \quad (46)$$

con  $\alpha = (d\mathcal{E}_a)^2 \frac{\omega_0 l_{mt}}{\varepsilon_0 \hbar V c}$ .

La risoluzione di equazioni differenziali di questo genere è resa particolarmente complessa dalla presenza di operatori non commutanti al posto di funzioni e variabili algebriche. Tuttavia considerando che il sistema è composto da un grande numero  $N$  di emettitori, nel limite di  $N$  molto grande è possibile analizzarlo in approssimazione semiclassica sostituendo agli operatori il loro valor medio, che trasforma le equazioni operatoriali in equazioni differenziali accoppiate non lineari “ordinarie”. Infatti si dimostra che valgono, per  $N \rightarrow \infty$ ,

i seguenti rapporti:

$$\begin{aligned}
\frac{\langle [S^+, S^-] \rangle}{\langle S^+ S^- \rangle} &= \frac{2\langle S^3 \rangle}{\langle \sum_{i=1}^N S_i^+ \sum_{j=1}^N S_j^- \rangle} \\
&= \frac{2\langle S^3 \rangle}{\sum_{i=1}^N \langle S_i^+ S_i^- \rangle + \sum_{i \neq j} \langle S_i^+ S_j^- \rangle} \\
&= \frac{2\langle S^3 \rangle}{\sum_{i=1}^N \langle |e_i\rangle \langle e_i| \rangle + \sum_{i \neq j} \langle |e_i\rangle \langle g_i| |g_j\rangle \langle e_j| \rangle} \\
&\propto \frac{N}{N + N(N+1)} \sim \frac{1}{N} \rightarrow 0
\end{aligned}$$

$$\frac{\langle [S^3, S^\pm] \rangle}{\langle S^3 S^\pm \rangle} = \frac{\pm \langle S^\pm \rangle}{\langle S^3 S^\pm \rangle} \approx \frac{\pm \langle S^\pm \rangle}{\langle S^3 \rangle \langle S^\pm \rangle} \propto \frac{1}{N} \rightarrow 0 \quad (47)$$

dove la proporzionalità nei limiti è giustificata dal fatto che nello stato iniziale:

1.  $\langle S^3 \rangle = \frac{N}{2}$ .
2.  $\sum_{i=1}^N \langle |e_i\rangle \langle e_i| \rangle$ , proiettore sullo stato eccitato, è  $N$ .
3.  $\sum_{i \neq j} \langle |e_i\rangle \langle g_i| |g_j\rangle \langle e_j| \rangle$  è uguale a  $N(N-1)C_{corr}$  con  $C_{corr}$  termine di correlazione dovuto alla simmetria degli stati del caso specifico in esame già discussa ad inizio capitolo.
4.  $\langle S^3 S^\pm \rangle \approx \langle S^3 \rangle \langle S^\pm \rangle$  poichè si dimostra che la covarianza tra  $S^3$  e  $S^\pm$  tende ad annullarsi con l'aumentare di  $N$ .

Pertanto da qui in avanti, con i simboli  $S^\pm$  e  $S^3$ , si intenderanno i valori medi degli omonimi operatori.

Definendo

$$w = S^+ S^-$$

possiamo trasformare (45) in

$$\frac{dS^3}{dt} = -\alpha w \quad (48)$$

e ottenere, dalla (46),

$$\begin{aligned}
\frac{dw}{dt} &= \frac{dS^+}{dt}S^- + S^+\frac{dS^-}{dt} = \\
&= (\alpha S^3 S^+ + i\omega_0 S^+)S^- + (\alpha S^3 S^- - i\omega_0 S^-)S^+ \\
&= 2\alpha S^3 S^+ S^- = 2\alpha w S^3
\end{aligned}$$

Abbiamo così ridotto il sistema originario a un sistema di due equazioni differenziali ordinarie nelle variabili  $w$  e  $S^3$ . Tramite opportune manipolazioni dei differenziali, abbiamo

$$\frac{dw}{dS^3} \frac{dS^3}{dt} = 2\alpha w S^3 \quad (49)$$

e, in virtù di (48),

$$-\alpha w \frac{dw}{dS^3} = 2\alpha w S^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{dw}{dS^3} = -2S^3 \quad (50)$$

che ha come soluzione generica<sup>2</sup>

$$w = C - 2(S^3)^2 \quad (51)$$

con  $C$  costante di integrazione numerica.

Ne consegue che (48) viene nuovamente riscritta come

$$\frac{dS^3}{dt} = -\alpha(-2(S^3)^2 + C) \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2\alpha} \cdot \frac{dS^3}{\left(\frac{C}{2}\right) - (S^3)^2} = dt \quad (52)$$

che risolta integrando per le diverse variabili rende

$$\sqrt{\frac{2}{C}} \operatorname{artanh} \left( S^3 \sqrt{\frac{2}{C}} \right) = -2\alpha t + K \quad (53)$$

---

<sup>2</sup>Si presti particolare attenzione a non confondere il ruolo del "3", indice della terza componente dell'operatore di spin, con quello del "2", semplice esponente numerico.

e dunque l'espressione finale

$$S^3(t) = -\sqrt{\frac{C}{2}} \cdot \tanh \left( 2\alpha\sqrt{\frac{C}{2}}t - \sqrt{\frac{C}{2}}K \right) = -\sqrt{\frac{C}{2}} \cdot \tanh \left( \frac{t-t_0}{2t_R} \right)$$

con  $t_R = \frac{1}{4\alpha\sqrt{\frac{C}{2}}}$  e  $t_0 = 2t_R\sqrt{\frac{C}{2}}K$ .

Ai fini di rendere più evidenti i risultati anticipati si opera una sostituzione che verrà ora introdotta: si può vedere tramite una banale sostituzione e derivazione che l'equazione (51), riscritta come

$$C = S^+S^- + 2(S^3)^2 \quad (54)$$

rende la  $C$  costante durante tutta l'evoluzione del sistema, pertanto se si considera lo stato iniziale con tutte le molecole in  $|e\rangle$  si ottiene  $C = 2(\frac{N}{2})^2 = \frac{N^2}{2}$  che se sostituita nella rende la (54)

$$S^3(t) = -\frac{N}{2} \cdot \tanh \left( \frac{t-t_0}{2t_R} \right) \quad (55)$$

L'ultimo passaggio necessario a dimostrare la presenza di emissione superradiante passa per il calcolo della derivata dell'espressione presentata nella riga precedente. Infatti il processo di emissione considera la diseccitazione coerente di un sistema di atomi inizialmente collettivamente eccitati che in termini matematici è descritta da

$$I(t) = -\hbar\omega_0 \frac{dS^3}{dt} = \frac{N\hbar\omega_0}{4t_R} \operatorname{sech}^2 \left( \frac{t-t_0}{2t_R} \right) \quad (56)$$

che è esattamente l'espressione anticipata in (2) da cui si possono ricavare le conclusioni, già menzionate nell'introduzione, circa l'impulso superradiante. In particolare: l'ampiezza dell'intensità va come il quadrato del numero  $N$  di emettitori

$$A = \frac{N\hbar\omega_0}{4t_R} = \frac{\alpha N^2 \hbar\omega_0}{2} \quad (57)$$

e, considerando la durata dell'impulso come la larghezza temporale della FWHM

della funzione  $I(t)$ , si ottiene

$$\operatorname{sech}^2\left(\frac{t-t_0}{2t_R}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\cosh\left(\frac{t-t_0}{2t_R}\right) = \sqrt{2}$$

$$t_{1,2} = t_0 \pm 2t_R \cdot \operatorname{arccosh}(\sqrt{2})$$

$$\Delta t_{1,2} = 4t_R \operatorname{arccosh}(\sqrt{2}) = \tau_{sr} = \frac{2 \operatorname{arccosh}(\sqrt{2})}{\alpha N}$$

ovvero che è inversamente proporzionale a  $N$ .

## 4 Impulso coerente nel microtubulo e trasparenza autoindotta

Si è dimostrato nei paragrafi precedenti come sia possibile avere un fenomeno di emissione coerente superradiante da un sistema a 2 livelli come le molecole d'acqua in un microtubulo. Jibu et al. [2] vedono in ciò la possibilità di interpretare il microtubulo non solo come una componente strutturale delle cellule cerebrali ma come un encoder che genera un impulso luminoso coerente capace di trasmettere informazione, proteggendola dagli effetti di decoerenza che inevitabilmente avverrebbero in un sistema “caldo e caotico” come il cervello, finché uscendo dal microtubulo l'informazione contenuta nell'impulso luminoso non andrebbe incontro ad altri fenomeni di interferenza che, secondo gli autori, definiscono un modello di computazione basato sull'olografia, tema che va ben oltre lo scopo del presente studio. In questo capitolo l'obiettivo sarà dimostrare come il microtubulo possa permettere la trasmissione coerente dell'impulso superradiante senza variazioni o perdite di coerenza dovute ad interazioni con altre molecole presenti nella struttura microtubulare (“trasparenza autoindotta”). Si introducono sin da ora due assunzioni cruciali: siccome il numero di fotoni prodotti in un'emissione superradiante è molto alto, la propagazione del campo elettrico viene trattata in maniera semiclassica e le molecole d'acqua (i dipoli oscillanti) verranno modellizzate con i valori medi degli operatori a loro associati; inoltre, si considererà la propagazione dell'impulso elettromagnetico unicamente lungo la direzione  $z$  coincidente asse del cilindro che approssima la forma del microtubulo.

Dall'elettrodinamica classica si sa che l'equazione che descrive la propagazione di un'onda (in una sola dimensione  $z$ ) attraverso un materiale dielettrico è

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) E(z, t) = \mu_0 \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \quad (58)$$

dove  $P$  è la polarizzazione ossia il momento di dipolo per unità di volume. A questo punto per procedere si separano il campo elettrico e il momento di dipolo nelle loro componenti a frequenza positiva e negativa di evoluzione

temporale e si assume che esse siano ulteriormente scomponibili nel prodotto di un termine a evoluzione veloce e di uno a evoluzione lenta<sup>3</sup> così definiti<sup>4</sup>

$$E^{(+)}(z, t) = \tilde{E}^{(+)}(z, t) \cdot e^{i(k_0 z - \omega_0 t)} \quad (59)$$

$$P^{(+)}(z, t) = \tilde{P}^{(+)}(z, t) \cdot e^{i(k_0 z - \omega_0 t)} \quad (60)$$

dove le componenti lente sono indicate con tilde. Pertanto lo sviluppo del lato sinistro dell'equazione (58) diventa:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \tilde{E}^{(+)}(z, t) \cdot e^{i(k_0 z - \omega_0 t)} \\ & \approx \left[ 2ik_0 \frac{\partial \tilde{E}^{(+)}}{\partial z} - k_0^2 \tilde{E}^{(+)} - \frac{1}{c^2} \left( -2i\omega_0 \frac{\partial \tilde{E}^{(+)}}{\partial t} - \omega_0^2 \tilde{E}^{(+)} \right) \right] e^{i(k_0 z - \omega_0 t)} \\ & \approx 2ik_0 \left[ \frac{\partial \tilde{E}^{(+)}}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial \tilde{E}^{(+)}}{\partial t} \right] e^{i(k_0 z - \omega_0 t)} \end{aligned}$$

dove si è assunto che i termini contenenti le derivate seconde delle componenti siano trascurabili rispetto agli altri. Il lato destro della (58) diventa

$$\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\tilde{P}^{(+)} e^{i(k_0 z - \omega_0 t)}) \approx (-i\omega_0)^2 \mu_0 \tilde{P}^{(+)} e^{i(k_0 z - \omega_0 t)} = -\mu_0 \omega_0^2 \tilde{P}^{(+)} e^{i(k_0 z - \omega_0 t)} \quad (61)$$

Mettendo tutto assieme, otteneniamo:

$$\frac{\partial \tilde{E}^{(+)}}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial \tilde{E}^{(+)}}{\partial t} = i \frac{\mu_0 c \omega_0}{2} \tilde{P}^{(+)} \quad (62)$$

e analogamente per la componente negativa del campo:

$$\frac{\partial \tilde{E}^{(-)}}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial \tilde{E}^{(-)}}{\partial t} = -i \frac{\mu_0 c \omega_0}{2} \tilde{P}^{(-)} \quad (63)$$

Per rendere più immediato il legame con la dinamica delle molecole d'acqua ricordiamo che il momento di dipolo di una singola molecola è definito come nella (25). In uno spazio  $dz$  in un istante  $dt$  si sa che le molecole sono soggette

<sup>3</sup>Evoluzione considerata in visuale di interazione così da mettere in evidenza la componente rapida e lasciando implicita l'espressione completa

<sup>4</sup>Analogamente si definiscono le componenti negative con l'unica differenza riscontrata nel segno negativo all'esponente di  $E$  e nella diversa forma dell'involuppo lento

tutte allo stesso campo dunque vale ancora la condizione di simmetria che permette di scrivere il dipolo collettivo come

$$\mathcal{D}_a = (S^+ + S^-)d\mathcal{E}_a \quad (64)$$

Allora, dato che la polarizzazione può essere scritta come la somma di tutti i singoli dipoli rapportata al volume totale considerato, si ha

$$\mathbf{P} = \frac{(S^+ + S^-)d\mathcal{E}_a}{V} \quad (65)$$

Volendo verificare come ridefinire  $P^{(+)}(z, t)$  e  $P^{(-)}(z, t)$  alla luce della (65) basta guardare come evolvono temporalmente i termini  $S^{(+)}$  ed  $S^{(-)}$  nell'equazione (38) per comprendere che

$$P^{(+)} \propto S^{(-)}, \quad P^{(-)} \propto S^{(+)}$$

perciò la (62) e (63) danno

$$\frac{\partial \tilde{E}^{(\pm)}}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial \tilde{E}^{(\pm)}}{\partial t} = \pm i \frac{d\mu_0 c \omega_0}{2V} \tilde{S}^{\mp} \quad (66)$$

Da ora in poi si ometteranno le tilde sopra le varie componenti di campo e valori medi di operatori dal momento che nel proseguo si trascureranno tutti gli involuppi rapidi.

Oltre alla (66) si hanno a disposizione anche le equazioni differenziali <sup>5</sup>

$$\frac{dS^3}{dt} = i \frac{d}{\hbar} (S^+ E^+ - S^- E^-) \quad (67)$$

$$\frac{dS^{\pm}}{dt} = \pm 2 \frac{i}{\hbar} dS^3 E^{\mp} \quad (68)$$

che formano un sistema di tre equazioni differenziali accoppiate dette Equazioni di Maxwell-Bloch. In realtà è possibile semplificare ulteriormente la loro forma introducendo la variabile  $\tau = t - \frac{z}{c}$ , sostituendola a  $t$  si verifica che le (67) e (68) rimangono formalmente invariate (eccetto che la derivazione parziale è

---

<sup>5</sup>sempre considerando solo il termine di evoluzione per l'involuppo lento

rispetto a  $\tau$  anziché  $t$ ) mentre la (66) assume la forma

$$\frac{\partial \tilde{E}^{(\pm)}}{\partial z} = \pm i \frac{d\mu_0 c \omega_0}{2V} \tilde{S}^{\mp} \quad (69)$$

Volendo cercare un'espressione per gli operatori  $S^3$  e  $S^\pm$  si considera la somma dei quadrati dei valori medi degli operatori  $S^i$  ottenendo

$$(S^1)^2 + (S^2)^2 + (S^3)^2 = \left(\frac{N}{2}\right)^2 \quad (70)$$

Sapendo che  $S^3$  può essere scritto come

$$S^3 = \frac{N}{2} \cos \theta(z, \tau) \quad (71)$$

dato che il suo valore oscilla tra  $\pm \frac{N}{2}$  partendo dal valore massimo nella condizione iniziale, e che

$$S^1 = \frac{S^+ + S^-}{2} \quad (72)$$

$$S^2 = \frac{S^+ - S^-}{2i} \quad (73)$$

si arriva ad ottenere

$$S^+ S^- + \left(\frac{N}{2} \cos \theta(z, \tau)\right)^2 = \left(\frac{N}{2}\right)^2$$

$$S^+ S^- = \frac{N^2}{4} \sin^2 \theta(z, \tau)$$

Inoltre siccome

$$S^+ = S^1 + iS^2, \quad S^- = S^1 - iS^2 \quad (74)$$

sono complessi coniugati l'uno dell'altro con modulo uguale a  $\frac{N}{2} \sin \theta(z, \tau)$ , possono essere scritti come

$$S^+ = \frac{N}{2} \sin \theta(z, \tau) e^{i\phi(z, \tau)}, \quad S^- = \frac{N}{2} \sin \theta(z, \tau) e^{-i\phi(z, \tau)} \quad (75)$$

Diventa ora di radicale importanza chiarire un'assunzione fondamentale che consente di arrivare alla trasparenza autoindotta (self-induced transparency o SIT): che le oscillazioni di  $E^\pm$  e di  $S^\pm$  abbiano una differenza di fase costante e uguale a  $\frac{\pi}{2}$ . Infatti, i termini positivi e negativi del campo  $E^\pm$  e di  $S^\pm$  sono ulteriormente<sup>6</sup> scomponibili in un termine reale ed in un termine esponenziale immaginario:

$$E^\pm = \mathcal{E}e^{\pm i\psi(z,t)}, \quad S^\pm = \mathcal{S}e^{\pm i\phi(z,t)}$$

Si ha che la differenza di fase  $\gamma(z, \tau) = \psi(z, \tau) - \phi(z, \tau)$  evolve nel tempo come

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \Delta\omega$$

dove  $\Delta\omega$  è la differenza tra le frequenze di oscillazione del campo e di  $S^\pm$ , che tuttavia deve necessariamente essere nulla (dato che la frequenza della luce e quella del fotone necessario all'eccitazione di una molecola sono perfettamente identiche). Pertanto la differenza di fase è costante nel tempo  $\gamma = \gamma(z)$ . Per permettere il massimo trasferimento di energia dal campo ai dipoli, e viceversa, fondamentale per SIT e l'ottenimento della soluzione particolare che si sta cercando, occorre assumere che  $E$  e  $S$  siano in opposizione di fase, cioè fissare  $|\gamma(z)| = \frac{\pi}{2}$ .

Per comodità di calcolo si imporranno dunque da ora in avanti  $\psi = 0$  e  $\phi = \frac{\pi}{2}$  rendendo  $E^\pm = \mathcal{E} = E$  reale ed  $S^\pm$  puramente immaginari. Alla luce di ciò si ridefiniscono espressioni come la (67) e (68) sostituendo  $E^\pm$  con  $E$  e  $\theta^\pm$  con  $\theta$ . Le equazioni di Maxwell-Bloch si riducono così a

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\frac{d}{\hbar}E \tag{76}$$

$$\frac{\partial E}{\partial z} = \frac{N}{2} \sin \theta \frac{d\mu_0 c \omega_0}{2V} \tag{77}$$

---

<sup>6</sup>Ora stiamo considerando solamente l'inviluppo lento, le tilde sono omesse come anticipato in una nota precedente

La (76) permette di ottenere  $\theta$ , che può essere espresso come

$$\theta(z, \tau) \equiv \frac{2d}{\hbar} \int_{-\infty}^{\tau} E(z, \tau') d\tau' \quad (78)$$

Mettendo insieme le (76), (77) si ottiene un'equazione differenziale alle derivate parziali nota come Equazione di Sine Gordon:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial z \partial \tau} = \frac{(d)^2 \mu_0 c \omega_0 N}{2V \hbar} \sin \theta(z, \tau) \quad (79)$$

Per risolverla si introduce il termine  $\eta = \tau - \alpha z$ , con  $\alpha = \frac{1}{v_0}$  reciproco della velocità di propagazione dell'onda nel mezzo, al fine di riscrivere la funzione cercata come  $\theta(z, \tau) = f(\eta)$ . Riderivando la S-G rispetto a  $\eta$  si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} &= \frac{df}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial \tau} = \frac{df}{d\eta} = f' \\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial z \partial \tau} &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \right) = \frac{\partial}{\partial z} (f') = \frac{d(f')}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} = -\alpha f'' \end{aligned}$$

e sostituendo nella (79)

$$-\alpha \frac{d^2 f}{d\eta^2} = K \sin(f), \quad \frac{d^2 f}{d\eta^2} = - \left( \frac{K}{\alpha} \right) \sin(f)$$

che ha soluzione notevole

$$f(\eta) = 4 \arctan \left( e^{\sqrt{K/|\alpha|} \cdot \eta} \right) \quad (80)$$

dalla quale si ottiene l'espressione del campo elettrico<sup>7</sup> cercata

$$E(z, \tau) = \sqrt{\frac{\hbar \mu_0 c \omega_0 N v_0}{2V}} \operatorname{sech} \left( \sqrt{\frac{d^2 \mu_0 c \omega_0 N v_0}{2V \hbar}} \cdot \left( \tau - \frac{z}{v_0} \right) \right) \quad (81)$$

che è un'onda solitonica, ossia un profilo d'onda che si trasmette in maniera coerente e inalterata lungo tutto il suo tragitto.

---

<sup>7</sup>Più precisamente dell'inviluppo lento del campo elettrico

## 5 Effetti di decoerenza e rumore

Si discutono in questa sezione i principali effetti che possono impedire o attenuare l'emissione superradiante e la trasparenza autoindotta.

### Rottura di simmetria a causa delle interazioni di Van der Waals

Come discusso all'inizio della sezione (3) una delle condizioni fondamentali per la presenza di emissione superradiante è la completa simmetria per scambio di due emettitori contenuti in  $V$ , sia nello stato iniziale che durante il resto dell'evoluzione del sistema: in pratica si riconoscono gli emettitori come particelle distinte ma tutte nella stessa condizione iniziale e tutte che risentono in ogni istante delle stesse interazioni indipendentemente dalla loro posizione spaziale.

Supponendo che gli emettitori non interagiscano tra loro tale condizione è pienamente soddisfatta. Tuttavia essendo gli emettitori, nel caso del microtubulo, molecole d'acqua, esse presentano un momento di dipolo elettrico che permette l'instaurarsi di interazioni di Van der Waals che hanno intensità proporzionale a  $\frac{1}{r_{ij}^3}$ . Evidentemente in questa condizione ogni molecola risente di un termine d'interazione aggiuntivo determinato dalla sua specifica posizione all'interno del microtubulo, portando quindi ad una rottura della simmetria di evoluzione e ad uno shift della frequenza di risonanza di ogni molecola che non interagisce più in maniera "corale" con le altre quando avviene l'emissione portando ad una emissione disordinata di tipo classico. Una problematica del genere è evidentemente di primaria importanza per il verificarsi della superradianza all'interno del microtubulo. Gli autori del paper da cui questo lavoro prende le mosse (Jibu et al. [2]) suggeriscono che le molecole all'interno del microtubulo possano disporsi in una configurazione spaziale tale da restituire all'interazione dipolo-dipolo le condizioni di invarianza per scambio di molecole richieste per la simmetria dell'evoluzione. Tuttavia il processo con cui questa configurazione spaziale dovrebbe essere raggiunta è piuttosto oscuro e basato su ipotesi

altamente speculative e, allo stato attuale, prive di consenso teorico o conferme sperimentali.

## Termini dispersivi nell'evoluzione del sistema

### Correzioni per effetto Doppler alle equazioni di Maxwell-Bloch

Un'altra condizione che è stata implicitamente assunta all'interno della trattazione, in particolare nella sezione 4, è che le molecole siano ferme all'interno del microtubulo. Ciò è evidentemente irrealistico a causa dell'agitazione termica causata dai processi cerebrali. Si stima dunque che le molecole abbiano una velocità compresa in un intervallo  $\Delta v = \sqrt{\frac{k_b T}{m}}$ , centrato in  $v = 0$ , con  $k_b$  costante di Boltzmann,  $T$  temperatura dell'ambiente cerebrale e  $m$  massa della singola molecola. Alla luce di ciò si modificano le equazioni di Maxwell-Bloch in modo che, trattando  $v$  come un parametro, possano descrivere accuratamente la dinamica di ogni gruppo di particelle a velocità  $v$ :

$$\frac{\partial \tilde{E}^{(\pm)}}{\partial z} = \pm i \frac{d\mu_0 c \omega_0}{2V} \int_{\Delta v} \tilde{S}_v^\mp(z, \tau) \mathcal{F}(v) dv \quad (82)$$

$$\frac{dS_v^3}{d\tau} = i \frac{d}{\hbar} (S_v^+ E^+ - S_v^- E^-) \quad (83)$$

$$\frac{dS_v^\pm}{d\tau} = \pm i (k_0 v) S_v^\pm \pm i \frac{2d}{\hbar} S_v^3 E^\mp \quad (84)$$

Con  $\mathcal{F}(v)$  termine di distribuzione di Boltzmann delle velocità e  $(k_0 v)$  termine che quantifica lo scostamento dal modo di risonanza  $k_0$  al variare della velocità. Il termine per  $S_v^\pm$  in particolare introduce un dephasing che fa variare il termine  $\gamma$  introdotto in sezione (4) smorzando nel tempo la trasmissione dell'onda solitonica.

### Modi di emissione in competizione con la superradianza

Si considerano qui invece, i modi di decadimento trascurati in precedenza per via delle condizioni imposte su  $k_0$  e  $\omega_k$  all'inizio di sezione (3) e che competono con il decadimento superradiante in particolare quando si un emettitore più realistico ossia non a soli 2 livelli.

$$\Gamma_e = \Gamma + \sum_{g' \neq g} \Gamma_{e \rightarrow g'} \quad (85)$$

è l'espressione che quantifica i rate di transizione di un singolo atomo in maniera incoerente: il termine  $\Gamma$  indica il rate di transizione da  $|e\rangle$  a  $|g\rangle$  tramite accoppiamento a tutti i modi  $\mathbf{k} \neq \mathbf{k}_0$  non risonanti presenti all'interno del volume  $V$  che sono stati precedentemente ignorati, mentre il termine  $\sum_{g' \neq g} \Gamma_{e \rightarrow g'}$  indica il rate di transizione ad uno stato  $|g'\rangle$  diverso dallo stato fondamentale, ipotesi anche questa trascurata precedentemente. Siccome questi decadimenti seguono un modi distinti da  $k_0$  e/o hanno frequenze di emissione differenti da  $\omega_0$ , essi non possono innescare un fenomeno risonante come l'emissione superradiante o la trasparenza autoindotta e dunque sono da considerarsi a tutti gli effetti dei processi competitor indesiderati. La condizione affinché l'emissione superradiante ed SIT avvengano prevalendo sugli altri processi è:

$$t_r^{-1}, t_0^{-1} \gg \Gamma_e \quad (86)$$

Ossia, rispettivamente, il tempo caratteristico della superradianza e il tempo di ritardo dell'impulso devono essere molto piccoli, cioè il processo di emissione superradiante (o di riemissione per SIT) devono essere estremamente veloci. Dalle dipendenze trovate alla fine di sezione (3) questo si traduce nella necessità di avere un alto numero  $N$  di emettitori.

## Altre condizioni

Si menzionano per completezza altre due condizioni necessarie allo sviluppo dell'impulso superradiante e della SIT:

- Le molecole devono essere, come già detto in sezione (3), polarizzate parallelamente al campo elettrico per poter permettere emissione superradiante e SIT. Questa è un'assunzione fortissima da parte della Proposta di Jibu. et al che trova giustificazioni vaghe o poco solide.

- Secondo Gross & Haroche, a seguito di un'analisi del sistema svolta in visuale di Schrödinger emerge che durante la SIT se il numero di  $N$  emettitori è alto al punto di restituire un  $t_r \ll t_{mt} = \frac{Lmt}{c}$ , con  $t_{mt}$  tempo impiegato dall'impulso solitonico a viaggiare attraverso il microtubulo, il modello in visuale di Schrödinger collassa mentre in visuale di Heisenberg si notano delle emissioni secondarie simili a degli echi che vanno a interferire con la propagazione delle onde solitoniche effettivamente impedendo la trasparenza autoindotta.

## 6 Conclusioni

Nel presente lavoro sono stati trattati, a partire dal paper di Jibu et al. [2], il fenomeno della superradianza e della trasparenza autoindotta con lo scopo di riprodurre in maniera chiara i risultati da loro ottenuti e vagliare criticamente le assunzioni alla base del modello. La sezione (2) è stata dedicata a ricavare l'hamiltoniano generale del modello di Dicke, base fisica della superradianza, quantizzando esprimendo in forma quantizzata i termini energetici per la componente atomica, di campo elettromagnetico e di interazione. Nelle sezioni (3) e (4) si sono riprodotti i risultati del paper seminale ponendo particolare attenzione alle assunzioni e approssimazioni alla base dei calcoli ed esplicitando i passaggi logici, spesso impliciti nel lavoro originale, che hanno portato alle conclusioni attese. Infine in sezione (5) è stata effettuata una breve analisi critica delle assunzioni precedentemente utilizzate distinguendo tra alcune giustificate e ragionevoli ed altre troppo forti allo stato attuale delle conoscenze o, ancora, basate su ipotesi che trovano poco consenso nella fisica mainstream e nelle ricerche sperimentali. La modellizzazione del microtubulo analizzata è, a giudizio dell'autore di questo lavoro, un tentativo interessante e coraggioso di ricercare in contesto biologico, le condizioni per il verificarsi di fenomeni fisici normalmente riscontrati in sistemi molto più chiusi e controllabili. Tuttavia, più di un'assunzione cruciale per il successo della modellizzazione è da considerarsi eccessivamente stringente e/o non ragionevolmente giustificabile. Pertanto non stupisce che all'interno dello stesso dibattuto framework della

teoria Orch-OR, la proposta analizzata nel corso di quest'opera sia stata superata da modelli che poggiano su assunzioni meno aridte, venendo così relegata al ruolo di interessante ipotesi seminale speculativa.

## Riferimenti bibliografici

- [1] Stuart Hameroff e Roger Penrose. «Consciousness in the universe: A review of the ‘Orch OR’theory». In: *Physics of life reviews* 11.1 (2014), pp. 39–78.
- [2] Mari Jibu et al. «Quantum optical coherence in cytoskeletal microtubules: implications for brain function». In: *Biosystems* 32.3 (1994), pp. 195–209.
- [3] Robert H Dicke. «Coherence in spontaneous radiation processes». In: *Physical review* 93.1 (1954), p. 99.
- [4] Michel Gross e Serge Haroche. «Superradiance: An essay on the theory of collective spontaneous emission». In: *Physics reports* 93.5 (1982), pp. 301–396.
- [5] Luca Salasnich. *Quantum Physics of Light and Matter: A Modern Introduction to Photons, Atoms and Many-Body Systems*. Springer, 2014.
- [6] Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu e Franck Laloë. «Quantum Mechanics. Vol. 3. Fermions, bosons, photons, correlations and entanglement. 5». In: (2020).

## Appendice

Si riportano qui le formule e i valori dei parametri non standard utilizzati per la realizzazione del grafico:

- $I(t) = I_0 \cdot e^{-\Gamma t}$
- $I(t) = \frac{N^2 \hbar \omega_0 \Gamma}{2} \frac{1}{\cosh^2(\frac{1}{2} N \Gamma (t - t_d))}$

$N \approx 5.9 \times 10^6$	$\omega_0 \approx 6.0 \times 10^{12} \text{ rad/s}$
$d \approx 6.17 \times 10^{-30} \text{ C}\cdot\text{m}$	$\Gamma = \frac{d^2 \omega_0^3}{3\pi \epsilon_0 \hbar c^3} \approx 3.46 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1}$
$I_0 = N \hbar \omega_0 \Gamma \approx 1.29 \times 10^{-16} \text{ W}$	$t_d = \frac{\ln(N)}{N\Gamma} = 7.65 \times 10^{-5} \text{ s}$