



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA



Dipartimento
di Fisica
e Astronomia
Galileo Galilei

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea Triennale

Applicazione del Modello Geometrico Collettivo alla

Catena di Isotopi del Tungsteno

Relatore

Prof. Lorenzo Fortunato

Laureando

Tommaso Bonsembiante

Anno Accademico 2023/2024

Indice

1	Introduzione	1
2	Deformazione della Superficie	3
2.1	Parametrizzazione della Superficie del Nucleo	3
2.2	Eccitazioni Quadrupolari	4
3	Modello Vibrazionale	7
3.1	Energia Potenziale	7
3.1.1	Elettrostatica	7
3.1.2	Superficiale	7
3.2	Energia Cinetica	9
3.3	Quantizzazione Hamiltoniano	9
3.4	Spettro dell'Hamiltoniano	10
4	Modello Roto-Vibrazionale	14
4.1	Rotore Asimmetrico	15
4.2	Rotore Simmetrico	15
4.3	Energia Cinetica	16
5	Soluzione Numerica per Potenziali di Gneuss-Greiner	19
5.1	Potenziale di Gneuss-Greiner	19
5.2	Programma per il Calcolo della Soluzione Numerica	19
5.2.1	Costruzione della Matrice Hamiltoniana e Calcolo dei Coefficienti	20
5.2.2	Implementazioni per Migliorare la Precisione Numerica e Diagonalizzazione dell'Hamiltoniana	21
5.3	Soluzione Numerica per una Catena di Isotopi del Tungsteno	22
5.3.1	Spettro del ^{180}W	23
5.3.2	Spettro del ^{182}W	24
5.3.3	Spettro del ^{184}W	25
5.3.4	Spettro del ^{186}W	26
6	Conclusioni	29

Capitolo 1

Introduzione

La fisica nucleare è un ramo fondamentale della fisica, dedicato allo studio della struttura e delle dinamiche interne dei nuclei atomici. Le sue origini risalgono al 1896, anno in cui Henri Becquerel scoprì il fenomeno della radioattività, evento che segnò l'inizio di un nuovo campo di ricerca scientifica. Nel corso del XX secolo, questo ambito ha conosciuto un'evoluzione significativa, caratterizzata da scoperte fondamentali e sviluppi teorici che hanno ampliato la comprensione delle interazioni nucleari, rendendolo un settore cruciale della fisica moderna.

Due dei modelli teorici più rilevanti nella fisica nucleare sono il modello a goccia di liquido e il modello a *shell*. Il modello a goccia, proposto inizialmente da Niels Bohr nel 1939, tratta il nucleo atomico come una goccia di liquido incompressibile, ignorando la struttura discreta del nucleo composta da nucleoni (protoni e neutroni), e favorendo invece una descrizione collettiva. Il principale successo di questo modello risiede nella formula semiempirica della massa nucleare, espressa come:

$$M(Z, N) = Zm_p + Nm_n - B \quad (1.1)$$

dove Z è il numero di protoni e N il numero di neutroni, e l'energia di legame B è data da:

$$B = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_a \frac{(N - Z)^2}{A} \pm \frac{a_p}{A^{1/2}} \quad (1.2)$$

con i seguenti coefficienti empirici: $a_v = 16$ MeV, $a_s = 20$ MeV, $a_c = 0,751$ MeV, $a_a = 21,4$ MeV e $a_p = 12$ MeV. Questa formula ha permesso di descrivere in modo accurato l'energia di legame dei nuclei e ha avuto un ruolo cruciale nella comprensione della fissione nucleare.

Il modello a *shell*, ispirato al modello a gusci dell'atomo, descrive il nucleo come un insieme di nucleoni che si muovono indipendentemente all'interno di un potenziale medio generato dall'interazione collettiva con gli altri nucleoni. In questo modello, i nucleoni sono organizzati in livelli energetici, "gusci", analogamente agli elettroni negli atomi. Il modello a *shell* ha avuto il suo maggiore successo nello spiegare le proprietà dei nuclei stabili, come l'energia di legame e gli spettri nucleari, e ha risolto l'enigma della stabilità nucleare in corrispondenza dei cosiddetti numeri magici, che indicano configurazioni particolarmente stabili dei nucleoni. Tuttavia, questi due modelli non sono sufficienti per spiegare completamente i fenomeni che si verificano nei nuclei stabili. Ad esempio, nei nuclei pari-pari, per eccitazioni a basse energie (fino a circa 2 MeV), si osservano alcuni livelli energetici che non possono essere spiegati come eccitazioni di singola particella. Per interpretare tali fenomeni, nel 1953, Aage Bohr e Ben Roy Mottelson hanno proposto il modello collettivo, noto anche come modello di Bohr-Mottelson. Questo modello si basa sull'ipotesi che, per eccitazioni a basse energie, il nucleo possa essere descritto come una goccia di liquido nucleare carico e incompressibile.

In questo contesto, la struttura interna del nucleo viene semplificata e trascurata, privilegiando una descrizione del nucleo come un fluido omogeneo. Le eccitazioni di questo fluido possono essere interpretate come vibrazioni della superficie del nucleo o come rotazioni del nucleo stesso.

L'obiettivo principale di questa tesi è analizzare in dettaglio il modello di Bohr-Mottelson, studiando la teoria alla base del modello e focalizzandosi sulla sua applicazione nella predizione degli spettri energetici di alcuni nuclei, e sul confronto con i dati sperimentali, al fine di evidenziarne bontà e limiti. In particolare, la tesi è organizzata come segue: dopo l'introduzione, saranno trattate le basi del modello collettivo, ovvero la parametrizzazione matematica della descrizione della deformazione della superficie nucleare, nel Capitolo 2. Nel Capitolo 3 verranno analizzate le soluzioni proposte da Bohr-Mottelson per nuclei con forma sferica all'equilibrio, considerando potenziali beta armonici. Il Capitolo 4 offrirà una descrizione generale del termine cinetico per nuclei con forme di equilibrio arbitrarie. Infine, la tesi si concluderà con il Capitolo 5, nel quale saranno presentate le predizioni dello spettro di una catena di isotopi del tungsteno, utilizzando un programma che fornisce soluzioni numeriche, per un potenziale di Gneuss-Greiner.

Capitolo 2

Deformazione della Superficie

2.1 Parametrizzazione della Superficie del Nucleo

Per iniziare la costruzione del nostro modello, è fondamentale descrivere le eccitazioni del nucleo attraverso una parametrizzazione della superficie nucleare. Questa può essere espressa come segue. Per i dettagli su questa parametrizzazione, faremo riferimento al lavoro di Bohr in [1].

$$R(\vartheta, \varphi, t) = R_0 \left(1 + \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\lambda}^{+\lambda} \alpha_{\lambda\mu}^*(t) Y_{\lambda}^{\mu}(\vartheta, \varphi) \right) \quad (2.1)$$

dove $R(\vartheta, \varphi, t)$ rappresenta la coordinata radiale del nucleo nella direzione (ϑ, φ) al tempo t , mentre R_0 è il raggio del nucleo nella configurazione sferica di equilibrio. I parametri $\alpha_{\lambda\mu}$ sono chiamati coordinate collettive, e le funzioni Y_{λ}^{μ} sono le armoniche sferiche. Gli indici λ e μ variano negli intervalli $\lambda = 0, \dots, \infty$ e $\mu = -\lambda, \dots, +\lambda$.

Questa parametrizzazione consente di derivare alcune proprietà fondamentali delle coordinate collettive:

- **Coniugazione complessa**

Poiché la coordinata radiale del nucleo deve essere reale, cioè $R(\vartheta, \varphi, t) = R^*(\vartheta, \varphi, t)$, ne consegue che i parametri $\alpha_{\lambda\mu}$ devono soddisfare la condizione $\alpha_{\lambda\mu}^* = (-1)^{\mu} \alpha_{\lambda, -\mu}$.

- **Parità**

La parametrizzazione deve essere invariante rispetto alla parità, pertanto le coordinate collettive devono trasformarsi con la stessa parità delle armoniche sferiche: $P(\alpha_{\lambda\mu}) = (-1)^{\lambda} \alpha_{\lambda\mu}$.

- **Carattere di tensore sferico**

Il raggio $R(\vartheta, \varphi, t)$ deve comportarsi come uno scalare rispetto alle rotazioni. Pertanto, $R'(\vartheta', \varphi', t)$ deve avere la stessa forma funzionale, ma con parametri ruotati $\alpha'_{\lambda\mu}$. Questo implica che:

$$\sum_{\lambda\mu} \alpha'_{\lambda\mu} Y_{\lambda}^{\mu}(\vartheta', \varphi') = \sum_{\lambda\mu} \alpha_{\lambda\mu} Y_{\lambda}^{\mu}(\vartheta, \varphi) \quad (2.2)$$

il che conduce alla relazione:

$$\alpha'_{\lambda\mu} = \sum_{\mu'} D_{\mu\mu'}^{(\lambda)} \alpha_{\lambda\mu'} \quad (2.3)$$

dove $D_{\mu\mu'}^{(\lambda)}$ è una matrice di rotazione di Wigner.

2.2 Eccitazioni Quadrupolari

Nella parametrizzazione della superficie nucleare, abbiamo considerato l'intervallo $\lambda = 0, \dots, \infty$. Tuttavia, non tutti i valori di λ sono fisicamente significativi e alcuni hanno un'importanza superiore ad altri:

- $\lambda = 0$ descrive l'eccitazione di monopolo, che rappresenta la compressione/espansione del nucleo. A basse energie, questa eccitazione è trascurabile.
- $\lambda = 1$ descrive l'eccitazione di dipolo, che non corrisponde a una deformazione della superficie del nucleo, ma solo a una traslazione.
- $\lambda = 2$ descrive l'eccitazione di quadrupolo, che è la più importante nella descrizione delle eccitazioni collettive.
- $\lambda = 3$ descrive l'eccitazione di ottupolo, che ha un'importanza parziale nella descrizione delle eccitazioni.
- $\lambda = 4$ descrive l'eccitazione esadecupolo, che è l'eccitazione con il momento angolare maggiore con una certa rilevanza.

I modi di eccitazione con momento maggiore hanno un'importanza pratica limitata nella descrizione delle eccitazioni. Nella seguente trattazione, considereremo esclusivamente le eccitazioni quadrupolari, poiché sono le più rilevanti nel contesto del modello collettivo. Esse assumono la seguente parametrizzazione:

$$R(\vartheta, \varphi, t) = R_0 \left(1 + \sum_{\mu=-2}^{+2} \alpha_{2\mu}^* Y_2^\mu(\vartheta, \varphi) \right) \quad (2.4)$$

Per una comprensione più chiara delle deformazioni del nucleo, è conveniente passare alle coordinate cartesiane come fatto in [2]:

$$\xi = \sin \vartheta \cos \varphi, \quad \eta = \sin \vartheta \sin \varphi, \quad \zeta = \cos \vartheta \quad (2.5)$$

che permettono di esprimere:

$$\begin{aligned} Y_2^0(\vartheta, \varphi) &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (2\zeta^2 - \xi^2 - \eta^2) \\ Y_2^{\pm 1}(\vartheta, \varphi) &= \mp \sqrt{\frac{5}{8\pi}} (\xi\zeta \pm i\eta\zeta) \\ Y_2^{\pm 2}(\vartheta, \varphi) &= \sqrt{\frac{15}{32\pi}} (\xi^2 - \eta^2 \pm 2i\xi\eta) \end{aligned} \quad (2.6)$$

La parametrizzazione può essere riscritta in funzione delle coordinate cartesiane come:

$$R(\vartheta, \varphi, t) = R_0 (1 + \alpha_{\xi\xi}\xi^2 + \alpha_{\eta\eta}\eta^2 + \alpha_{\zeta\zeta}\zeta^2 + 2\alpha_{\xi\eta}\xi\eta + 2\alpha_{\xi\zeta}\xi\zeta + 2\alpha_{\eta\zeta}\eta\zeta) \quad (2.7)$$

I parametri collettivi possono essere espressi in termini dei parametri α come segue:

$$\begin{aligned} \alpha_{2\pm 2} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{8\pi}{15}} (\alpha_{\xi\xi} - \alpha_{\eta\eta} \pm 2i\alpha_{\xi\eta}) \\ \alpha_{2\pm 1} &= \sqrt{\frac{8\pi}{15}} (\alpha_{\xi\zeta} \pm i\alpha_{\eta\zeta}) \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\alpha_{20} = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{\frac{8\pi}{15}} (2\alpha_{\zeta\zeta} - \alpha_{\xi\xi} - \alpha_{\eta\eta})$$

Le variabili cartesiane forniscono una comprensione più chiara del significato fisico delle coordinate collettive. In particolare:

- α_{20} rappresenta l'allungamento dell'asse z rispetto agli assi x e y .
- $\alpha_{2\pm 2}$ descrive la differenza di lunghezza tra gli assi x e y e una deformazione obliqua nel piano xy .
- $\alpha_{2\pm 1}$ indica la deformazione obliqua lungo l'asse z .

Questa descrizione parametrizza la superficie nel sistema di riferimento cartesiano. Tuttavia, è spesso più comodo passare a una descrizione nel sistema di riferimento intrinseco, in cui gli assi sono allineati con gli assi principali del nucleo. In questo sistema, la parametrizzazione cartesiana della superficie diventa diagonale, con tutti i termini misti nulli: $\alpha'_{\xi\eta} = \alpha'_{\xi\zeta} = \alpha'_{\eta\zeta} = 0$. Di conseguenza, i parametri collettivi si riducono a $\alpha'_{2\pm 1} = 0$, $\alpha'_{2+2} = \alpha'_{2-2} = a_2$ e $\alpha_{20} = a_0$. Pertanto, la superficie sferica può essere descritta attraverso cinque parametri con significati geometrici evidenti:

- a_0 descrive l'allungamento lungo l'asse principale z' .
- a_2 descrive la differenza di lunghezza tra gli assi principali x' e y' .
- $\vartheta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ sono i tre angoli di Eulero che determinano la rotazione dal sistema xyz a quello intrinseco $x'y'z'$.

Infine, seguendo l'approccio di Bohr e Mottelson, possiamo effettuare un ulteriore cambio di parametri definendo $a_0 = \beta \cos \gamma$ e $a_2 = \frac{1}{2} \beta \sin \gamma$, dove $\beta = \sqrt{\sum_{\mu} |\alpha_{\mu}|^2}$. Questo cambio di parametri porta alla seguente espressione:

$$R_k(\beta, \gamma) = R_0 \left(1 + \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \beta \cos \left(\gamma - \frac{2\pi k}{3} \right) \right); \quad k = 1, 2, 3 \quad (2.9)$$

che descrive la lunghezza dell'asse k nel sistema intrinseco in funzione di β e γ .

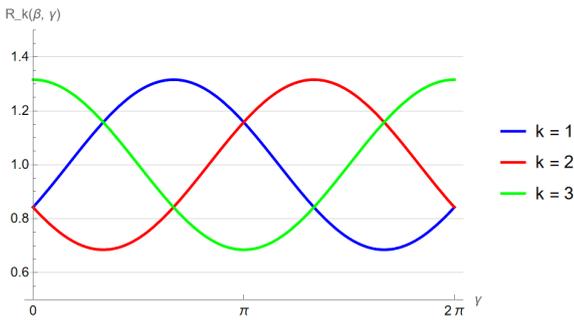


Figura 2.1: Grafico della lunghezza degli assi in funzione di γ con $\beta = 0.5$ e $R_0 = 1$.

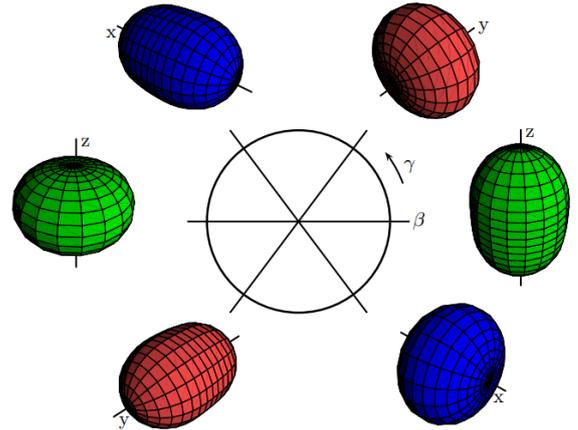


Figura 2.2: Grafico della periodicità della deformazione quadrupolare in funzione delle variabili β e γ . L'immagine è tratta da [3].

Si osserva nella Figura 2.1 e nella Figura 2.2 che la variabile γ ha periodicità $\pi/3$. La superficie del nucleo può assumere diverse forme:

- Per $\gamma = 0^\circ$, si ottiene un allungamento dell'asse z , mentre gli assi x e y hanno la stessa lunghezza, risultando in uno sferoide prolato.

- Per $\gamma = 60^\circ$, gli assi x e z hanno la stessa lunghezza, mentre l'asse y è più corto, producendo una figura oblata.
- Per $\gamma \in (0^\circ, 60^\circ)$, tutti e tre gli assi hanno lunghezze diverse, dando luogo a un nucleo triassiale.

Capitolo 3

Modello Vibrazionale

Dopo aver descritto la parametrizzazione della goccia di fluido nucleare, passiamo alla descrizione dell'energia del nucleo, data dalla fisica classica. L'energia totale E del nucleo può essere espressa come la somma delle seguenti energie:

$$E = T + E_c + E_S. \quad (3.1)$$

Dove T rappresenta l'energia cinetica del nucleo, E_c l'energia Coulombiana del nucleo, ed E_S l'energia di vibrazione della superficie, calcolate secondo la descrizione fornita in [2].

3.1 Energia Potenziale

3.1.1 Elettrostatica

L'energia Coulombiana del nucleo è descritta come una distribuzione uniforme di carica positiva data dai protoni all'interno del volume del nucleo parametrizzato dalle coordinate collettive. Essa è espressa come:

$$E_C = \frac{1}{2} \rho_q^2 \int d^3r \int d^3r' \frac{1}{|r - r'|} \quad (3.2)$$

dove ρ_q è la densità di carica. Passando in coordinate sferiche e separando una parte dell'integrale a raggio costante $E_C^{(0)} = \frac{16}{15} \pi \rho_q^2 R^5$ e una dovuta alla deformazione, otteniamo:

$$E_C = E_C^{(0)} \left(1 - \frac{5}{4\pi} \sum_{\lambda\mu} \frac{\lambda - 1}{2\lambda + 1} |\alpha_{\lambda\mu}|^2 \right) = E_C^{(0)} \left(1 - \frac{\beta^2}{4\pi} \right). \quad (3.3)$$

3.1.2 Superficiale

L'energia di superficie è data dalla formula:

$$E_S = \sigma \int dS \quad (3.4)$$

dove σ è la tensione superficiale mentre dS è l'elemento di superficie che in coordinate sferiche può essere scritto come:

$$dS = \sqrt{1 + \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial R}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial R}{\partial \phi} \right)^2} R^2 \sin \theta d\theta d\phi \quad (3.5)$$

$$\approx \left[R^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial R}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial R}{\partial \phi} \right)^2 \right] \sin \theta d\theta d\phi \quad (3.6)$$

in espansione al primo ordine.

Facendo il seguente cambio di variabili $\eta = R_0 \sum_{\lambda\mu} \alpha_{\lambda\mu}^* Y_\lambda^\mu(\Omega)$ e $E_S^{(0)} = 4\pi\sigma R_0^2$, si può riscrivere:

$$E_S = E_S^{(0)} + \frac{1}{2} \int \sin \theta d\theta d\phi \left\{ -2\eta^2 + R_0^2 \left[\left(\frac{\partial \eta}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{\partial \eta}{\partial \phi} \right)^2 \right] \right\}. \quad (3.7)$$

Infine, passando alla riscrittura nelle armoniche sferiche e sfruttando le loro proprietà di integrazione si ottiene:

$$E_S = E_S^{(0)} \left[1 + \frac{1}{8\pi} \sum_{\lambda\mu} (\lambda - 1)(\lambda + 2) |\alpha_{\lambda\mu}|^2 \right] = E_S^{(0)} \left[1 + \frac{\beta^2}{2\pi} \right]. \quad (3.8)$$

Combinando i termini dell'energia Coulombiana e dell'energia di superficie, si ottiene l'espressione:

$$E = E_C^{(0)} \left(1 - \frac{\beta^2}{4\pi} \right) + E_S^{(0)} \left(1 + \frac{\beta^2}{2\pi} \right). \quad (3.9)$$

Questa espressione può essere semplificata trascurando i contributi costanti $E_C^{(0)}$ e $E_S^{(0)}$, portando alla seguente forma:

$$V(\beta, \gamma) = \frac{1}{2} C_2 \beta^2 = \frac{1}{2} C_2 \sum_{\mu} |\alpha_{\mu}|^2 \quad (3.10)$$

dove il coefficiente C_2 è dato da:

$$C_2 = 4R_0^2\sigma - \frac{3e^2 Z^2}{10\pi R_0}. \quad (3.11)$$

Questa espressione, in prima approssimazione, descrive le eccitazioni della superficie del nucleo.

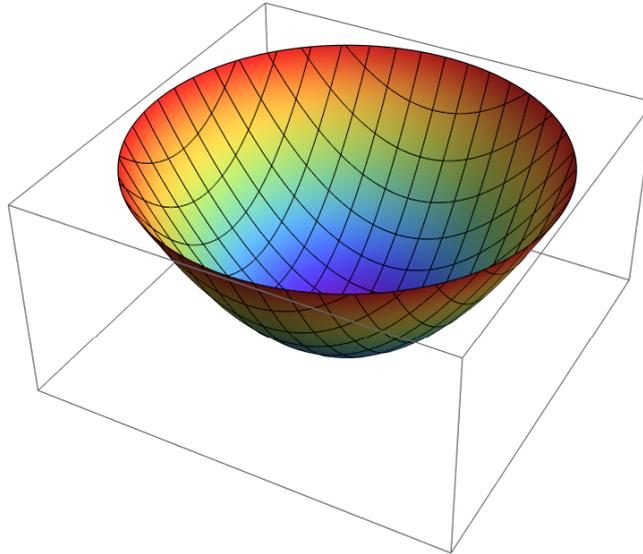


Figura 3.1: Grafico del potenziale $V(\beta, \gamma)$ armonico con $B_2 = 1$ e $0 < \gamma < 2\pi$.

3.2 Energia Cinetica

Si assume che all'interno del nucleo, modellato come un fluido nucleare, il moto sia descritto da un campo di velocità $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$. L'energia cinetica associata al flusso è data da:

$$T = \int d^3r \frac{1}{2} \rho_m v^2(\mathbf{r}, t), \quad (3.12)$$

dove ρ_m rappresenta la densità di massa. Per semplificare i calcoli, si ipotizza che il fluido sia irrotazionale, ovvero $\nabla \times \mathbf{v} = 0$. Dal punto di vista fisico, ciò equivale a considerare un fluido non viscoso, un'ipotesi che può presentare delle criticità nel caso di un insieme di nucleoni, ma che in questo contesto trascureremo. Data l'irrotazionalità del campo, è possibile definire un potenziale scalare tale che $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \nabla\phi(\mathbf{r}, t)$.

All'inizio del modello, abbiamo assunto che il fluido fosse incomprimibile; questo implica che $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, il che porta alla conclusione che il potenziale ϕ deve soddisfare l'equazione di Laplace $\Delta\phi(\mathbf{r}, t) = 0$. In coordinate sferiche, una soluzione di questa equazione può essere espressa come:

$$\phi(r, \theta, \varphi, t) = \sum_{\lambda\mu} A_{\lambda\mu}(t) r^\lambda Y_\lambda^\mu(\theta, \varphi), \quad (3.13)$$

dove i coefficienti $A_{\lambda\mu}(t)$ sono determinati dalle condizioni al contorno $\frac{\partial}{\partial t} R(\theta, \varphi, t) = \frac{\partial}{\partial r} \phi(r, \theta, \varphi)$. Per piccole oscillazioni, approssimando $R(\Omega) = R_0$, si ottiene:

$$A_{\lambda\mu} = \frac{1}{\lambda} R_0^{2-\lambda} \dot{\alpha}_{\lambda\mu}^*. \quad (3.14)$$

A questo punto, l'equazione dell'energia cinetica può essere riscritta in coordinate polari sferiche come:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \rho_m \int \sin\theta d\theta d\varphi dr r^2 \left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial\phi}{\partial\theta} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \left(\frac{\partial\phi}{\partial\varphi} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \rho_m \sum_{\lambda\mu} \sum_{\lambda'\mu'} A_{\lambda\mu} A_{\lambda'\mu'}^* \int_0^{R(\Omega)} dr r^{\lambda+\lambda'} \int d\Omega \left[\lambda\lambda' Y_\lambda^\mu Y_{\lambda'}^{\mu'} + \frac{\partial Y_\lambda^\mu}{\partial\theta} \frac{\partial Y_{\lambda'}^{\mu'}}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial Y_\lambda^\mu}{\partial\varphi} \frac{\partial Y_{\lambda'}^{\mu'}}{\partial\varphi} \right]. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Calcolando l'integrale e approssimando nuovamente per piccole oscillazioni, imponendo $R(\Omega) = R_0$, si ottiene:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\lambda\mu} B_\lambda |\dot{\alpha}_{\lambda\mu}|^2 T = \frac{1}{2} B_2 \sum_{\mu} |\dot{\alpha}_\mu|^2 \quad (3.16)$$

dove $B_\lambda = \rho_m \frac{R_0^5}{\lambda}$ è il cosiddetto coefficiente di massa.

3.3 Quantizzazione Hamiltoniano

L'ultimo passo per descrivere le vibrazioni della superficie è quantizzare l'Hamiltoniana e risolvere il problema degli autovalori. Il primo passo è trovare i momenti coniugati delle variabili α_μ .

La Lagrangiana è data da:

$$L = T - V = \frac{1}{2} B_2 \sum_{\mu} |\dot{\alpha}_\mu|^2 - \frac{1}{2} C_2 \sum_{\mu} |\alpha_\mu|^2. \quad (3.17)$$

I momenti coniugati π_μ sono calcolati come segue:

$$\pi_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}_\mu} = \frac{\partial}{\partial \dot{\alpha}_\mu} \left(\frac{1}{2} B_2 \sum_{\mu'} \dot{\alpha}_{\mu'} (-1)^{\mu'} \dot{\alpha}_{-\mu'} \right) = B_2 (-1)^\mu \dot{\alpha}_{-\mu} = B_2 \dot{\alpha}_\mu^*. \quad (3.18)$$

Il momento coniugato ottenuto soddisfa le seguenti proprietà:

$$\pi'_\mu = \sum_{\mu'} D_{\mu\mu'}^* \pi_{\mu'}, \quad \pi_\mu^* = (-1)^\mu \pi_{-\mu}. \quad (3.19)$$

Grazie a queste proprietà, è possibile riscrivere l'energia cinetica del sistema come:

$$T = \frac{\sum_\mu (-1)^\mu \pi_\mu \pi_{-\mu}}{2B_2} = \frac{\sum_\mu |\pi_\mu|^2}{2B_2}. \quad (3.20)$$

Con l'energia cinetica riscritta, possiamo procedere alla riscrittura dell'Hamiltoniana, che ora costituisce il punto di partenza per la quantizzazione:

$$H = \frac{\sum_\mu |\pi_\mu|^2}{2B_2} + \frac{1}{2} C_2 \sum_\mu |\alpha_\mu|^2. \quad (3.21)$$

Ora, dobbiamo trasformare le coordinate collettive e i loro momenti coniugati in operatori e imporre che soddisfino le regole di quantizzazione canonica:

$$[\hat{\alpha}_\mu, \hat{\alpha}_{\mu'}] = 0, \quad [\hat{\pi}_\mu, \hat{\pi}_{\mu'}] = 0, \quad [\hat{\alpha}_\mu, \hat{\pi}_{\mu'}] = i\hbar \delta_{\mu\mu'}. \quad (3.22)$$

Queste relazioni di commutazione possono essere soddisfatte imponendo che:

$$\hat{\pi}_\mu = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \hat{\alpha}_\mu}. \quad (3.23)$$

Imponendo queste condizioni, si ottengono le seguenti relazioni per gli operatori:

$$\hat{\pi}_\mu^* = (-1)^{\mu+1} \hat{\pi}_{-\mu}, \quad \hat{\alpha}_\mu^* = (-1)^\mu \hat{\alpha}_{-\mu}. \quad (3.24)$$

In conclusione, l'operatore Hamiltoniano del sistema quantizzato assume la forma di un oscillatore armonico 5-D:

$$\hat{H} = \frac{\sum_\mu |\hat{\pi}_\mu|^2}{2B_2} + \frac{1}{2} C_2 \sum_\mu |\hat{\alpha}_\mu|^2. \quad (3.25)$$

3.4 Spettro dell'Hamiltoniano

Per risolvere il sistema, si procede con la seconda quantizzazione, introducendo gli operatori di creazione e distruzione:

$$\hat{\beta}_\mu = \sqrt{\frac{B_2\omega_2}{2\hbar}}(-1)^\mu \hat{\alpha}_{-\mu} + i\sqrt{\frac{1}{2B_2\omega_2\hbar}} \hat{\pi}_\mu, \quad (3.26)$$

$$\hat{\beta}_\mu^+ = \sqrt{\frac{B_2\omega_2}{2\hbar}} \hat{\alpha}_\mu - i\sqrt{\frac{1}{2B_2\omega_2\hbar}}(-1)^\mu \hat{\pi}_{-\mu}, \quad (3.27)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{C_2}{B_2}}. \quad (3.28)$$

Gli operatori definiti in questo modo descrivono la creazione e l'annichilazione di fononi, che sono bosoni responsabili dell'energia vibrazionale del nucleo. Tali operatori rispettano le seguenti relazioni di commutazione:

$$[\hat{\beta}_\mu, \hat{\beta}_{\mu'}] = 0, \quad [\hat{\beta}_\mu^+, \hat{\beta}_{\mu'}^+] = 0, \quad [\hat{\beta}_\mu, \hat{\beta}_{\mu'}^+] = \delta_{\mu\mu'}. \quad (3.29)$$

L'Hamiltoniana può essere riscritta come:

$$\hat{H} = \hbar\omega_2 \left(\hat{N} + \frac{5}{2} \right), \quad (3.30)$$

dove

$$\hat{N} = \sum_{\mu} \hat{\beta}_\mu^+ \hat{\beta}_\mu. \quad (3.31)$$

Gli autovalori dell'Hamiltoniana sono quindi:

$$E_N = \hbar\omega_2 \left(N + \frac{5}{2} \right). \quad (3.32)$$

Ci sono due modi per descrivere gli autostati dell'Hamiltoniana. Il primo metodo utilizza i numeri quantici dei singoli oscillatori armonici disaccoppiati n_μ . Gli stati del sistema possono essere descritti come:

$$|n_2, n_1, n_0, n_{-1}, n_{-2}\rangle = \prod_{\mu=-2}^2 \frac{(\hat{\beta}_\mu^+)^{n_\mu}}{\sqrt{n_\mu!}} |0, 0, 0, 0, 0\rangle, \quad (3.33)$$

soggetto alla condizione:

$$\sum_{\mu=-2}^2 n_\mu = N. \quad (3.34)$$

Questa descrizione è analoga a quella dell'oscillatore armonico 3D. Pertanto, la funzione d'onda deve essere simmetrica rispetto allo scambio di due numeri di fononi n_μ , considerando tutte le permutazioni possibili di n_μ che rispettano il vincolo imposto $\sum_{\mu=-2}^2 n_\mu = N$.

Il secondo approccio per descrivere gli autostati del sistema si basa sull'analisi delle simmetrie del sistema, descritte in [4]. La prima simmetria rilevata è l'invarianza rispetto alle rotazioni nello spazio a 5 dimensioni, descritto dal gruppo $SO(5)$. Questo è il gruppo delle rotazioni nello spazio Euclideo a cinque dimensioni, ovvero delle trasformazioni lineari ortogonali con determinante pari a 1 che preservano il prodotto scalare in uno spazio a cinque dimensioni.

Il gruppo $SO(5)$ e il suo operatore di Casimir possono essere utilizzati per descrivere gli autostati dell'oscillatore armonico 5D. Tuttavia, il sistema presenta simmetrie più complesse, interamente descritte dal gruppo $U(5)$, di cui $SO(5)$ è un sottogruppo. Pertanto, il sistema gode della seguente catena di gruppi di simmetria:

$$U(5) \supset SO(5) \supset SO(3) \supset SO(2). \quad (3.35)$$

A ciascuno di questi gruppi corrisponde un operatore di Casimir, che è un invariante del moto, a cui corrisponde un buon numero quantico. L'operatore di Casimir per il gruppo unitario $U(5)$ è l'operatore numero di fononi \hat{N} con numero quantico associato N . L'operatore di Casimir per $SO(n)$ in generale ha come autovalore $\Lambda(\Lambda + n - 2)$. Per $SO(5)$, l'operatore di Casimir è:

$$C_2 = \sum_{i \neq j} \hat{G}_{ij}^2, \quad (3.36)$$

dove

$$(\hat{G}_{ij})_{kl} = \begin{cases} \epsilon_{ijk} & \text{se } (k, l) = (i, j) \text{ o } (j, i), \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases} \quad (3.37)$$

Per $SO(3)$, l'operatore di Casimir è \hat{J}^2 con autovalore $J(J + 1)$, e infine per $SO(2)$, l'operatore è \hat{J}_z con autovalore M .

Pertanto, è possibile descrivere completamente un autostato utilizzando i numeri quantici $|n_\beta, \tau, J, M\rangle$, dove $N = 2n_\beta + \tau$. La prima parte dello spettro può essere scritta come segue:

- **Stato fondamentale** $N = 0$

Lo stato fondamentale si scrive come: $|0, 0, 0, 0\rangle$

- **Primo stato eccitato** $N = 1$

Il primo stato eccitato può essere ottenuto solo con la combinazione $n_\beta = 0$ e $\tau = 1$. Per quanto riguarda gli ultimi due numeri quantici, la creazione di un fonone dovuto a un'eccitazione di quadrupolo comporta $J = 2$ e, di conseguenza, $J = -2, \dots, +2$. Per cui si ottiene uno stato: $|0, 1, 2, M\rangle$

ovvero uno stato con degenerazione 5.

- **Secondo stato eccitato** $N = 2$

Il secondo stato eccitato può essere ottenuto in due modi differenti: $n_\beta = 1$ e $\tau = 0$ oppure $n_\beta = 0$ e $\tau = 2$. L'aggiunta di un altro fonone di quadrupolo J_Q a uno stato con $J_i = 2$ implica che in questo stato $|J_i - J_Q| \leq J_f \leq J_i + J_Q$, ovvero $J_f = 0, 1, 2, 3, 4$. Per ottenere gli stati con momento angolare totale J e componente lungo l'asse z , M , si usa la serie di Clebsch-Gordan per combinare i singoli stati con un certo momento angolare:

$$|J, M\rangle = \sum_{M', M''} (2, 2, J | M', M'', M) |2, M', 2, M''\rangle = \sum_{M', M''} (2, 2, JM', M'', M) \hat{\beta}_{2\mu}^\dagger \hat{\beta}_{2\mu'}^\dagger |0, 0, 0, 0\rangle. \quad (3.38)$$

Utilizzando la relazione di simmetria dei coefficienti di Clebsch-Gordan tratta da [5]:

$$(j_1, j_2, J | m_1, m_2, M) = (-1)^{j_1 + j_2 - J} (j_2, j_1, J | m_2, m_1, M) \quad (3.39)$$

si ottiene:

$$|J, M\rangle = \frac{1}{2} \sum_{M', M''} [1 + (-1)^J] (2, 2, J | M', M'', M) \hat{\beta}_{2\mu}^\dagger \hat{\beta}_{2\mu'}^\dagger |0, 0, 0, 0\rangle. \quad (3.40)$$

Dalle regole di selezione si può osservare che per i valori dispari di J lo stato si annulla, quindi rimangono possibili solo i numeri quantici $J = 0, 2, 4$. In generale, la regola di selezione è: $J = 2\tau, 2\tau - 2, 2\tau - 4, \dots, \tau$

Quindi lo spettro previsto dal modello di Bohr-Mottelson per i primi due stati eccitati segue lo schema riportato nella Figura 3.2.

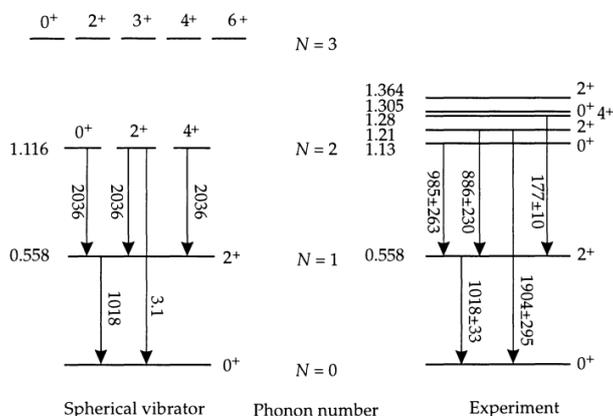


Figura 3.2: C per un nucleo di ^{114}Cd . Le energie degli stati sono espresse in MeV. L'immagine riportata è tratta da [2].

Dalla Figura 3.2 si può osservare che il nostro modello descrive adeguatamente il nucleo di ^{114}Cd . Infatti, i salti energetici tra lo stato 0^+ e il primo stato 2^+ sono quasi identici a quelli tra il primo stato 2^+ e il tripletto $0^+, 2^+, 4^+$, come previsto dal modello armonico. Però si osserva che la degenerazione del tripletto $0^+, 2^+, 4^+$ è rotta nei dati sperimentali e ciò suggerisce che sono presenti delle deviazioni dal potenziale armonico che generano questo fenomeno osservato. In conclusione, il modello delle vibrazioni superficiali è in grado di descrivere accuratamente lo spettro solo di una ristretta gamma di nuclei, in particolare quelli con una *shell* quasi chiusa, poiché tali nuclei sono meglio approssimabili da una forma sferica all'equilibrio.

Capitolo 4

Modello Roto-Vibrazionale

Per descrivere nuclei che, all'equilibrio, presentano una forma non sferica, ovvero nuclei per i quali la posizione del minimo dipende sia dalla variabile β che da γ , è necessario introdurre la componente cinetica dell'energia associata alla rotazione del nucleo e successivamente, bisogna riscrivere l'intero termine cinetico in funzione di β e γ . Pertanto, il primo passo consiste nello scrivere l'energia cinetica di un nucleo in rotazione nel sistema di riferimento intrinseco, ossia l'Hamiltoniana di un rotore.

$$H = \sum_{i=1}^3 \frac{J_i'^2}{2\Theta_i}, \quad (4.1)$$

dove Θ_i sono i momenti d'inerzia rispetto ai principali assi del nucleo.

Per quantizzare questa espressione, non è sufficiente sostituire i momenti angolari con i rispettivi operatori, poiché nel sistema di riferimento intrinseco gli assi principali coincidono inizialmente con quelli del sistema, ma dopo una rotazione ciò non è più vero. Gli operatori dei momenti angolari devono quindi soddisfare le seguenti relazioni di commutazione, tratte da [2]:

$$[\hat{J}'_1, \hat{J}'_2] = -i\hbar\hat{J}'_3, \quad [\hat{J}'_2, \hat{J}'_3] = -i\hbar\hat{J}'_1, \quad [\hat{J}'_3, \hat{J}'_1] = -i\hbar\hat{J}'_2. \quad (4.2)$$

Dalla Formula 4.2 si osserva che le relazioni di commutazione presentano il segno invertito rispetto alle note relazioni di commutazione di $SO(3)$. Questa differenza di segno deriva dal diverso ordine con cui vengono applicate le rotazioni nel sistema di riferimento intrinseco. Per gli operatori spaziali fissi, $J_y J_x$ rappresenta una rotazione infinitesimale intorno all'asse x , seguita da una rotazione intorno all'asse y . Nel sistema di riferimento solidale al corpo, invece, la seconda rotazione avviene intorno all'asse x' , già ruotato dalla prima operazione. Dalla Formula 4.2 si ricava che $\hat{J}'^2 = \hat{J}^2$.

Inoltre, in meccanica quantistica, un rotore non può ruotare attorno agli assi di simmetria, poiché una rotazione attorno a questi assi lascerebbe invariata la forma del nucleo descritta dal nostro modello, portando così a uno stato quantico identico al precedente.

Considerando queste osservazioni, possiamo quantizzare l'Hamiltoniana ottenendo:

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^3 \frac{\hat{J}_i'^2}{2\Theta_i} \quad (4.3)$$

nel caso in cui non ci siano assi di simmetria intrinseci, cioè per un nucleo triassiale. Se invece l'asse z è un asse di simmetria, l'Hamiltoniana si riduce a

$$\hat{H} = \frac{1}{2\Theta} (\hat{J}'_1{}^2 + \hat{J}'_2{}^2). \quad (4.4)$$

In questo caso, i momenti d'inerzia attorno agli assi x e y sono equivalenti, mentre il momento d'inerzia lungo l'asse di simmetria z è differente. Tuttavia, poiché il nucleo è invariante rispetto alle rotazioni attorno a quest'asse, tale momento d'inerzia è ininfluenza.

4.1 Rotore Asimmetrico

In questo caso, i tre assi d'inerzia sono asimmetrici, il che implica che i tre momenti d'inerzia siano differenti. Di conseguenza, i buoni numeri quantici del sistema sono J e M , associati rispettivamente agli operatori \hat{J}^2 e \hat{J}_3 . Tralasciando la descrizione dettagliata della soluzione, riportiamo solo il risultato tratto da [2]: gli autostati sono espressi come segue:

$$\psi_{JM_i}(\theta) = \sum_{K=0}^J a_K^{J_i} \phi_{JK}(\theta), \quad (4.5)$$

dove

$$\phi_{JK}(\theta) = \sqrt{\frac{2J+1}{(1+\delta_{K0})16\pi^2}} \left(D_{MK}^{(J)}(\theta) + (-1)^J D_{(M-K)}^{(J)*}(\theta) \right),$$

e $a_K^{J_i}$ sono coefficienti; $0 \leq K \leq J$.

Il sistema è simmetrico rispetto all'inversione degli assi x e y , il che significa che è invariante sotto la trasformazione $\hat{R}_2^2(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = (\theta_1, \theta_2, \theta_3 + \pi)$. Questo implica che anche le autofunzioni devono essere invarianti secondo tale trasformazione, e tale condizione è soddisfatta quando K è pari. Pertanto, osservando la formula delle autofunzioni del sistema (equazione 4.5), possiamo dedurre la seguente proprietà: le autofunzioni si annullano se J è dispari e $K = 0$. Di conseguenza, non esistono stati con $J = 1$, mentre per $J = 3$ esiste solo lo stato con $K = 2$.

4.2 Rotore Simmetrico

Per un nucleo in cui l'asse z funge da asse di simmetria, il nucleo è invariante rispetto alle rotazioni dell'angolo θ_3 . In questo caso, esiste un ulteriore numero quantico K associato all'operatore \hat{J}'_3 . Gli autovalori dell'energia cinetica di un nucleo con simmetria assiale sono dati da:

$$E = \frac{\hbar^2}{2\Theta} [J(J+1) - K^2], \quad (4.6)$$

poiché $\hat{J}'_1{}^2 + \hat{J}'_2{}^2 = \hat{J}^2 - \hat{J}'_3{}^2$.

Per quanto riguarda le autofunzioni, si ottengono

$$\phi_{JK}(\theta) = D_{MK}^{(J)*}(\theta). \quad (4.7)$$

Le autofunzioni d'onda devono però soddisfare le simmetrie del sistema, ovvero:

- **Invarianza rispetto alla rotazione attorno all'asse z :** La rotazione è data da $\hat{R}_2(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = (\theta_1, \theta_2, \theta_3 + \eta)$. Poiché $\phi_{JK}(\theta_1, \theta_2, \theta_3 + \eta) = e^{i\eta K} \phi_{JK}(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$, è necessario avere $K = 0$.
- **Invarianza dovuta alla scelta del verso dell'asse z :** La rotazione è data da $\hat{R}_1(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = (\theta_1 + \pi, \pi - \theta_2, -\theta_3)$. Poiché $\phi_{JK=0}(\theta_1 + \pi, \pi - \theta_2, -\theta_3) = (-1)^J \phi_{JK}(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$, si conclude che J deve essere pari.

Pertanto, possiamo concludere che gli autovalori del rotore simmetrico sono

$$E = \frac{\hbar^2}{2\Theta} J(J+1), \quad (4.8)$$

e gli autostati possono essere scritti come $|J, M\rangle$, con $J = 0, 2, 4, \dots$ e $M = -J, \dots, +J$.

4.3 Energia Cinetica

Per descrivere sistemi nucleari che presentano un minimo sia nei parametri β che γ , è utile riscrivere il termine cinetico dell'Hamiltoniana direttamente in funzione di queste variabili. L'energia cinetica nel modello vibrazionale è espressa come:

$$T = \frac{\sum_{\mu} |\dot{\alpha}_{\mu}|^2}{2B_2}. \quad (4.9)$$

Assumendo che il minimo del potenziale si ottenga per $a_0 = \beta_0$ e $a_2 = 0$, cioè per una forma assiale, possiamo introdurre le variabili $\xi = a_0 - \beta_0$ e $\eta = a_2$ per descrivere le deviazioni dalla configurazione di equilibrio del nucleo.

Il passo successivo consiste nel riscrivere l'energia cinetica in funzione dei momenti angolari del sistema intrinseco, poiché questi sono costanti del moto. Pertanto, l'energia cinetica dipende dalle velocità angolari degli assi intrinseci ω'_i con $i = 1, 2, 3$.

Le coordinate collettive possono essere scritte come: $\alpha_0 = \beta_0 + \xi$, $\alpha_1 = \alpha_{-1} = 0$, $\alpha_2 = \alpha_{-2} = \eta$. Da queste espressioni è possibile ottenere le derivate rispetto al tempo applicando la regola della catena:

$$\dot{\alpha}_{\mu} = \sum_k \left(\frac{\partial \alpha_{\mu}}{\partial \theta'_k} \omega'_k \right) + \frac{\partial \alpha_{\mu}}{\partial \xi} \dot{\xi} + \frac{\partial \alpha_{\mu}}{\partial \eta} \dot{\eta}. \quad (4.10)$$

Le derivate rispetto a ξ e η sono semplici da calcolare, mentre quelle rispetto ai tre angoli di Eulero sono più complesse. Tuttavia, possono essere determinate nel seguente modo:

$$\frac{\partial \alpha_{\mu}}{\partial \theta'_k} = \frac{\partial}{\partial \theta'_k} \left(\exp \left(-\frac{i\theta'_k}{\hbar} \hat{J}'_k \right) \alpha_{\mu} \right) = -\frac{i}{\hbar} \hat{J}'_k \alpha_{\mu} = -\frac{i}{\hbar} \sum_{\nu} \langle 2, \mu | \hat{J}'_k | 2, \nu \rangle \alpha_{\nu}. \quad (4.11)$$

Da queste relazioni, si possono ricavare i seguenti risultati:

$$\begin{aligned} \langle 2, \mu | \hat{J}'_1 | 2, \mu \rangle &= \frac{\hbar}{2} \left[\sqrt{(2+\mu+1)(2-\mu)} \delta_{\mu', \mu+1} + \sqrt{(2-\mu+1)(2+\mu)} \delta_{\mu', \mu-1} \right], \\ \langle 2, \mu | \hat{J}'_2 | 2, \mu \rangle &= -\frac{i\hbar}{2} \left[\sqrt{(2-\mu+1)(2+\mu)} \delta_{\mu', \mu-1} - \sqrt{(2+\mu+1)(2-\mu)} \delta_{\mu', \mu+1} \right], \\ \langle 2, \mu | \hat{J}'_3 | 2, \mu \rangle &= \hbar \mu \delta_{\mu', \mu}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Da cui si ottengono, per la componente z' :

$$\frac{\partial \alpha_{\pm 2}}{\partial \theta'_3} = \mp 2i\alpha_2, \quad \frac{\partial \alpha_{\pm 0}}{\partial \theta'_3} = \frac{\partial \alpha_{\pm 1}}{\partial \theta'_3} = 0, \quad (4.13)$$

mentre per le derivate lungo x' e y' :

$$\frac{\partial \alpha_{\pm 1}}{\partial \theta'_1} = -\frac{i}{2} \left(\sqrt{6}\alpha_0 + 2\alpha_2 \right), \quad \frac{\partial \alpha_{\pm 1}}{\partial \theta'_2} = -\frac{i}{2} \left(\sqrt{6}\alpha_0 - 2\alpha_2 \right), \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial \alpha_0}{\partial \theta'_1} = \frac{\partial \alpha_0}{\partial \theta'_2}, \quad \frac{\partial \alpha_{\pm 2}}{\partial \theta'_1} = \frac{\partial \alpha_{\pm 2}}{\partial \theta'_2} = 0. \quad (4.15)$$

Da cui si ottiene:

$$\dot{\alpha}_0 = \dot{\xi}, \quad \dot{\alpha}_{\pm 1} = -\frac{i}{2} \left[\sqrt{6}(\beta_0 + \xi) + 2\eta \right] \omega'_1 \pm \frac{i}{2} \left[\sqrt{6}(\beta_0 + \xi) - 2\eta \right] \omega'_2, \quad \dot{\alpha}_{\pm 2} = \dot{\eta} \mp 2i\eta\omega'_3. \quad (4.16)$$

Inserendo queste derivate nell'espressione per l'energia cinetica ricavata nel caso vibrazionale si ottiene:

$$T = \frac{1}{2}B_2 \left(\dot{\xi}^2 + 2\dot{\eta}^2 \right) + 4B_2\eta^2\omega_3'^2 + \frac{B_2}{4} \left[\sqrt{6}(\beta_0 + \xi) + 2\eta \right]^2 \omega_1'^2 + \frac{B_2}{4} \left[\sqrt{6}(\beta_0 + \xi) - 2\eta \right]^2 \omega_2'^2. \quad (4.17)$$

Che può essere riscritto come:

$$T = \frac{1}{2}B_2 \left(\dot{\xi}^2 + 2\dot{\eta}^2 \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 I_i \omega_i'^2, \quad (4.18)$$

con i momenti d'inerzia $I_i = 4B_2\beta^2 \sin^2 \left(\gamma - \frac{3}{2}\pi i \right)$, detti irrotazionali. A questo punto tornando alle variabili β e γ si può scrivere l'energia cinetica nel seguente modo:

$$T = T_{\text{vib}} + T_{\text{rot}} \quad (4.19)$$

$$T_{\text{vib}} = \frac{1}{2}B_2 \left(\dot{\beta}^2 + \beta^2\dot{\gamma}^2 \right) \quad (4.20)$$

$$T_{\text{rot}} = 2B_2\beta^2 \left[\sin^2 \left(\gamma - \frac{3}{2}\pi \right) \omega_1'^2 + \sin^2 \left(\gamma - \frac{6}{2}\pi \right) \omega_2'^2 + \sin^2 \left(\gamma - \frac{9}{2}\pi \right) \omega_3'^2 \right]. \quad (4.21)$$

L'energia cinetica ottenuta può essere suddivisa in due contributi: il primo è il termine cinetico vibrazionale, che dipende esclusivamente dalle velocità di deformazione del nucleo; il secondo è il termine rotazionale, che include i tre termini associati alle velocità angolari attorno agli assi principali di inerzia.

Il passo successivo consiste nella quantizzazione dell'energia cinetica, che effettueremo utilizzando le coordinate (ξ, η, θ) . Poiché queste sono coordinate curvilinee, non è possibile applicare il metodo di coniugazione adottato finora. Al contrario, è necessario utilizzare una procedura specifica per le coordinate curvilinee, sviluppata da Boris Podolsky in [6].

Per quantizzare l'Hamiltoniano curvilineo si adotta il seguente metodo. Si scrive:

$$\hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2B_2}\Delta, \quad \Delta = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{g} g_{ij}^{-1} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \quad (4.22)$$

nel nostro caso

$$ds^2 = \sum_{\mu=-2}^{+2} \left(|d\alpha_\mu|^2 d\xi^2 + 2d\eta^2 + \sum_k \frac{I_k}{B_2} d\theta_k'^2 \right) = \sum_{ij} g_{ij} dx_i dx_j \quad (4.23)$$

Allora si ottiene che il tensore metrico g_{ij} assume la seguente forma diagonale:

$$g_{\xi\xi} = 1, \quad g_{\eta\eta} = 2, \quad g_{\theta'_k\theta'_k} = \frac{I_k}{B_2}. \quad (4.24)$$

Pertanto il suo determinante vale:

$$g = \frac{I^2 I_3}{2B_2^3}; \quad I = I_1 + I_2 + I_3. \quad (4.25)$$

Allora l'operatore dell'energia cinetica risulta essere:

$$\hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2B_2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{1}{2\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) + \frac{\hat{J}_1'^2 + \hat{J}_2'^2}{2I} + \frac{\hat{J}_3'^2}{16B_2\eta^2}. \quad (4.26)$$

Tornando alle coordinate β e γ , otteniamo l'operatore:

$$\hat{T} = \hat{T}_{\text{rot}} + \hat{T}_{\text{vib}} \quad (4.27)$$

dove

$$\hat{T}_{\text{vib}} = -\frac{\hbar^2}{2B_2} \left[\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{\beta^2} \frac{1}{\sin(3\gamma)} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\sin(3\gamma) \frac{\partial}{\partial \gamma} \right) \right] \quad (4.28)$$

e

$$\hat{T}_{\text{rot}} = \frac{\hbar^2}{2B_2} \frac{1}{4\beta^2} \sum_{k=1}^3 \frac{\hat{j}_k'^2}{\sin^2(\gamma - 2\pi k/3)}. \quad (4.29)$$

In conclusione, si osserva che l'operatore dell'energia cinetica si divide in una parte, \hat{T}_{rot} , che dipende solamente dalla coordinata γ , mentre l'altro termine, \hat{T}_{vib} , coinvolge entrambe le coordinate.

Capitolo 5

Soluzione Numerica per Potenziali di Gneuss-Greiner

5.1 Potenziale di Gneuss-Greiner

Nella descrizione fornita finora ci siamo limitati a considerare l'oscillatore armonico attorno all'equilibrio del nucleo nella sua forma sferica. Tuttavia, con la trattazione introdotta nel paragrafo precedente, intendiamo estendere la nostra analisi a potenziali che dipendono anche dalla variabile γ . Infatti, la maggior parte dei nuclei non è descritta adeguatamente dal modello sviluppato fino a questo punto, poiché molti di essi presentano un minimo nel potenziale che dipende dalla variabile γ . Inoltre, il potenziale in questi casi non è molto profondo e la semplice approssimazione armonica nella variabile β risulta inefficace. Per questo motivo, si cerca di trovare soluzioni per potenziali $V(\beta, \gamma)$ più generali.

Nel sistema di riferimento intrinseco, il potenziale deve essere invariante rispetto alle rotazioni, e quindi non deve dipendere dagli angoli di Eulero θ_i . Inoltre, dato che la variabile γ ha una periodicità di $\pi/3$, il potenziale deve essere invariato sotto le trasformazioni $\gamma \rightarrow -\gamma$ e $\gamma \rightarrow \gamma + \frac{2\pi}{3}$, come descritto alle pagine 20-22 dell'articolo [1]. Questo requisito è soddisfatto facendo dipendere il potenziale da $\cos(3\gamma)$ anziché da γ .

Pertanto, il potenziale generale che si può utilizzare è:

$$V(\beta, \gamma) = \sum_{i,j=0}^{\infty} V_{ij} \beta^i \cos^j(3\gamma) \quad (5.1)$$

con il termine $i = 0$ escluso per $j \neq 0$, poiché altrimenti risulterebbe indefinito per $\beta \rightarrow 0$.

Il potenziale più utilizzato in fisica nucleare è quello di Gneuss-Greiner, introdotto in [7]:

$$V(\beta, \gamma) = C'_1 \beta^2 + C'_2 \beta^3 \cos(3\gamma) + C'_3 \beta^4 + C'_4 \beta^5 \cos(3\gamma) + C'_5 \beta^6 \cos^2(3\gamma) + C'_6 \beta^6. \quad (5.2)$$

Questo potenziale non è l'unico possibile; tuttavia, è dimostrabile che tutti questi potenziali possono essere ridotti a potenze di due tensori di base: $[\alpha \times \alpha]^0 \propto \beta^2$ e $[\alpha \times [\alpha \times \alpha]^2]^0 \propto \beta^3 \cos(3\gamma)$, come mostrato in [8]. Inoltre, il potenziale si arresta al termine β^6 , poiché questo livello di approssimazione cattura efficacemente la deformazione del nucleo senza introdurre complessità inutili o trascurabili, mantenendo il modello gestibile e pratico per le applicazioni fisiche.

5.2 Programma per il Calcolo della Soluzione Numerica

In questa sezione verrà presentato il programma per il calcolo di soluzioni numeriche dei potenziali di Gneuss-Greiner, sviluppato da L. Fortunato e F. F. Ruffino e descritto in [9]. Lo scopo del program-

ma è diagonalizzare gli Hamiltoniani del modello collettivo con i potenziali di Gneuss-Greiner (5.2), determinando preliminarmente il potenziale che meglio approssima i dati sperimentali di alcuni stati energetici, per predire lo spettro energetico del nucleo a partire dalla sua forma all'equilibrio.

Il programma è composto nel seguente modo:

5.2.1 Costruzione della Matrice Hamiltoniana e Calcolo dei Coefficienti

Nella prima parte, il programma costruisce gli elementi di matrice dell'Hamiltoniana, per fare ciò richiama le funzioni `basis[Nph]` e `subbasis[J,Nph]` che sono presenti nel file `basismodules.nb`. La funzione `basis[Nph]` genera una base di funzioni per un dato numero di fononi, mentre `subbasis[J,Nph]` genera la sottobase per un dato valore del momento angolare.

La base di funzioni utilizzata dal programma è la base armonica, presentata in [10], ovvero le soluzioni dell'equazione:

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2B_2} \left[\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{\beta^2} \frac{1}{\sin(3\gamma)} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\sin(3\gamma) \frac{\partial}{\partial \gamma} \right) \right] + \frac{\hbar^2}{2B_2} \frac{1}{4\beta^2} \sum_{k=1}^3 \frac{\hat{j}_k'^2}{\sin^2 \left(\gamma - \frac{2\pi k}{3} \right)} + \frac{1}{2} C_2 \beta^2 \right\} \Psi(\beta, \gamma, \Omega) = E \Psi(\beta, \gamma, \Omega). \quad (5.3)$$

L'equazione è risolvibile separando le variabili:

$$\Psi(\beta, \gamma, \Omega) = F(\beta) \Phi(\gamma, \Omega) \quad (5.4)$$

Allora l'equazione che deve soddisfare la parte radiale è:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2B_2} \frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} \right) - \frac{\Lambda}{\beta^2} + \frac{1}{2} C_2 \beta^2 - E \right) F(\beta) = 0 \quad (5.5)$$

dove Λ è l'autovalore associato all'invariante di Casimir per lo spazio 5-D delle rotazioni che può essere riscritto come $\Lambda = \tau(\tau+3)$ come descritto nella sezione 3.4, da cui si ottiene la soluzione dell'equazione radiale:

$$\begin{aligned} F_{NJ}(\beta) &= \sqrt{\frac{2N!}{\Gamma(N+J+\frac{5}{2})}} \beta^J L_N^{J+3/2}(\beta^2) e^{-\beta^2/2} \\ &= \sqrt{\frac{2\Gamma(N+J+\frac{5}{2})}{\Gamma(J+\frac{5}{2})^2 N!}} {}_1F_1(-N, J+5/2; \beta^2) \beta^J e^{-\beta^2/2} \end{aligned} \quad (5.6)$$

dove L_a^b sono i polinomi di Laguerre, $\Gamma(x)$ è la funzione gamma di Eulero, ovvero $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$, e infine ${}_1F_1(a, b, x)$ sono le funzioni di Kummer descritte in [11].

L'equazione che deve soddisfare la parte angolare è:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2B_2} \frac{1}{\beta^2} \frac{1}{\sin(3\gamma)} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\sin(3\gamma) \frac{\partial}{\partial \gamma} \right) - \Lambda + \frac{\hbar^2}{2B_2} \frac{1}{4\beta^2} \sum_{k=1}^3 \frac{\hat{j}_k'^2}{\sin^2 \left(\gamma - \frac{2\pi k}{3} \right)} \right) \Phi(\gamma, \Omega) = 0. \quad (5.7)$$

La cui soluzione è:

$$\Phi_{JM\tau\nu}(\gamma, \Omega) = N_{J\tau\nu} \sum_{K=0 \text{ pari}}^J \frac{1}{1 + \delta_{K0}} g_{JK\tau\nu}(\gamma) [D_{MK}^{J*}(\Omega) + (-1)^J D_{M-K}^{J*}(\Omega)] \quad (5.8)$$

dove N è la costante di normalizzazione, D rappresenta le funzioni di Wigner, e $g(\gamma)$ sono delle funzioni con la seguente forma:

$$g_{\nu LK}(\gamma) = \cos(\gamma)^l \sum_{i=0}^{\frac{1}{2}(l-p)-q} A_{\nu LK}^{(i)} \tan\left(\frac{\gamma}{2}\right)^{2i+\frac{K}{2}}, \quad (5.9)$$

dove $K = 0, 2, 4, \dots, J$; $q = 0, 1, 2, \dots$; $p = 0, 1, 2, \dots$; $\tau = N, N - 2, \dots, 0$ o 1 ; $\nu = 0, 1, 2, \dots, \tau/3$, mentre $A_{JK\tau\nu}^{(i)}$ sono dei coefficienti.

Successivamente, il programma carica una libreria chiamata **BasMat**, contenente matrici specifiche per ciascun termine del potenziale e per il valore del momento angolare. Queste matrici vengono utilizzate per costruire la matrice Hamiltoniana tramite una combinazione lineare, usando un insieme di coefficienti determinati per adattare lo spettro dell'Hamiltoniana ai dati sperimentali. I coefficienti sono calcolati mediante una routine che esegue un *random walk* nello spazio dei parametri. Il procedimento è il seguente: il programma genera un insieme iniziale di coefficienti, con cui viene calcolato il valore della funzione \mathbf{f} , data dalla somma dei quadrati delle differenze tra gli autovalori calcolati e gli autovalori misurati sperimentalmente, sui quali viene effettuato il *fitting* del potenziale. Successivamente, il programma genera casualmente un nuovo insieme di coefficienti attorno a quello precedente, utilizzando una distribuzione Gaussiana. Se il nuovo valore della funzione \mathbf{f} è inferiore a quello precedente, il nuovo insieme di coefficienti viene accettato come il migliore, e il processo iterativo riparte da questi nuovi coefficienti. Se, invece, il valore della funzione \mathbf{f} è maggiore, il nuovo insieme viene rigettato e si ritorna all'insieme di coefficienti precedente. Questo processo stocastico viene ripetuto per 100 iterazioni; al termine delle quali, si riparte dall'insieme iniziale e il ciclo viene ripetuto per 15 volte. Al termine del processo, si ottiene l'insieme di coefficienti che meglio approssima i dati sperimentali, da cui si ricava la forma del potenziale del sistema e, di conseguenza, la forma del nucleo all'equilibrio. I cicli multipli vengono eseguiti perché non è garantito che il *random walk* converga al minimo assoluto della funzione nella prima iterazione.

I dati sperimentali utilizzati sono contenuti nel file `data-sets.nb`, al quale è possibile aggiungere nuovi dati relativi all'isotopo di interesse. Nel caso analizzato in questa tesi, i dati sono stati estratti dal sito del *National Nuclear Data Center* [12]. Gli stati considerati per il *fitting* dei coefficienti includono gli stati $0^+, 2^+, 4^+$ del livello fondamentale, gli stati $2^+, 3^+$ della banda- γ , e infine lo stato 0^+ della banda- β .

5.2.2 Implementazioni per Migliorare la Precisione Numerica e Diagonalizzazione dell'Hamiltoniana

Dopo aver descritto la base di funzioni utilizzata dal programma e aver ottenuto il potenziale del sistema, è possibile scrivere esplicitamente gli elementi di matrice dell'Hamiltoniana. Tuttavia, prima di procedere con la diagonalizzazione, è necessario trattare alcune implementazioni per migliorare la precisione dei calcoli.

La prima implementazione riguarda gli effetti di bordo, dovuti al fatto che il programma utilizza un numero massimo finito di fononi, in particolare $N_{\max} = 40$. Questa troncatura della base può introdurre errori di calcolo. Per ridurre tali errori, il programma applica una regola di selezione basata sulle proprietà degli operatori di creazione e distruzione di fononi. Poiché β può essere espressa come una combinazione lineare degli operatori di creazione e annichilazione dei fononi, l'esponente k di β^k nel termine del potenziale corrisponde al numero massimo di fononi aggiunti o sottratti da uno stato. Di conseguenza, si può affermare che ogni coppia di stati che differisce per un numero di fononi maggiore di k produce un elemento di matrice nullo. Questa regola di selezione non solo ottimizza la velocità di calcolo del programma, ma contribuisce anche a risolvere il problema degli effetti di bordo. Infatti, dato che il valore massimo dell'esponente di β è $k = 6$, uno stato con N_{\max} fononi interagisce al massimo con stati aventi fino a $N = N_{\max} + 6$ fononi. Pertanto, per eliminare gli effetti di bordo, è sufficiente estendere la dimensione delle matrici da N_{\max} a $N_{\max} + 6$ e poi considerare solo gli autovalori corrispondenti alla matrice originaria, tralasciando quelli provenienti dal bordo.

La seconda implementazione riguarda l'introduzione di un parametro di scala s che minimizza gli autovalori e migliora la precisione dei calcoli. Questo parametro s viene utilizzato per ridimensionare le funzioni d'onda radiali, espresse come:

$$F_s^{NJ}(\beta) = s^{5/2} F^{NJ}(s\beta). \quad (5.10)$$

Utilizzando le proprietà degli elementi di matrice, possiamo riscrivere gli elementi della matrice Hamiltoniana come indicato in [13]:

$$\langle \Psi_s^i | \hat{H}(\beta, \gamma) | \Psi_s^j \rangle = \langle \Psi_1^i | \hat{H}(\beta/s, \gamma) | \Psi_1^j \rangle, \quad (5.11)$$

dove

$$\begin{aligned} \hat{H}(\beta/s, \gamma) = & s^2 C_0 \hat{T} + s^{-2} \sqrt{5} C_1 \beta^2 - s^{-3} \sqrt{\frac{2}{35}} C_2 \beta^3 \cos(3\gamma) + s^{-4} \frac{5}{2} C_3 \beta^4 \\ & - s^{-5} \sqrt{\frac{2}{175}} C_4 \beta^5 \cos(3\gamma) + s^{-6} \frac{2}{35} C_5 \beta^6 \cos^2(3\gamma) + s^{-6} \frac{5}{2} \sqrt{5} C_6 \beta^6. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Questa riformulazione degli elementi di matrice consente di calcolare gli autovalori dell'energia minimizzando le funzioni $E_i(s)$. Questa ottimizzazione è effettuata all'interno del programma tramite la funzione `sfind[]`.

Dopo aver implementato queste due modifiche per migliorare la precisione delle soluzioni, il programma, attraverso la funzione `Diago`, diagonalizza l'Hamiltoniana scritta e calcola i corrispondenti autovalori e autofunzioni. In particolare, gli autovalori calcolati dal programma sono presentati nel seguente modo (Tabella 5.1):

J	Abs. En. (MeV)				Rel. En. (MeV)				Rel. En. (adim)			
0	-0.293	0.633	1.337	1.711	0.0	0.926	1.630	2.005	0.0	6.055	10.659	13.107
2	-0.140	0.329	0.989	1.377	0.153	0.622	1.282	1.670	1.0	4.069	8.384	10.922
3	0.479	1.815	2.688	3.263	0.772	2.108	2.981	3.556	5.049	13.782	19.492	23.252
4	0.119	0.642	1.134	1.387	0.412	0.935	1.428	1.680	2.693	6.116	9.334	10.986
5	0.808	1.372	2.290	2.826	1.101	1.665	2.583	3.119	7.200	10.888	16.891	20.395
6	0.448	1.061	1.571	1.823	0.742	1.354	1.864	2.116	4.849	8.853	12.190	13.837
7	1.205	1.838	2.411	2.803	1.498	2.131	2.704	3.097	9.795	13.933	17.680	20.247
8	0.831	1.561	2.070	2.309	1.125	1.854	2.363	2.602	7.353	12.120	15.452	17.014

Tabella 5.1: Autovalori del nucleo di ^{186}W calcolati attraverso il programma presentato in [9]

Nella prima colonna è indicato il momento angolare associato a ciascuno stato. La seconda colonna riporta l'energia degli stati espressa in MeV. La terza colonna mostra l'energia degli stati, normalizzata in modo che l'energia dello stato fondamentale sia zero. Infine, l'ultima colonna fornisce l'energia relativa adimensionale degli stati, normalizzata in modo che la differenza di energia tra gli stati 0^+ e 2^+ (ovvero i primi due stati di ciascuna riga) sia pari a 1.

5.3 Soluzione Numerica per una Catena di Isotopi del Tungsteno

In questa ultima sezione saranno presentate le soluzioni numeriche, ottenute con il programma presentato nella sezione precedente, per la catena di isotopi del tungsteno, con particolare riferimento ai nuclei ^{180}W , ^{182}W , ^{184}W e ^{186}W .

5.3.1 Spettro del ^{180}W

Per questo nucleo, non è chiaro quali siano, tra i dati sperimentali, gli stati della banda- β allora si è ipotizzato che lo stato 0^+ di questa banda corrisponda con lo stato con energia $E = 1.381 \text{ MeV}$, per poter procedere con il *fitting*. Questa ipotesi si basa sul fatto che tale stato è lo stato ad energia più bassa, dopo lo stato fondamentale, che presenta le caratteristiche di momento angolare e parità desiderate. Il potenziale ottenuto in questo caso ha l'insieme di coefficienti riportati nella Tabella 5.2, che si riferiscono alla Formula 5.12.

C_0	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
$1.62733 \cdot 10^{-3}$	30.0932	935.392	-88511.3	233843	40329.9	$7.53024 \cdot 10^6$

Tabella 5.2: Coefficienti del potenziale di Gneuss-Greiner per il nucleo di ^{180}W

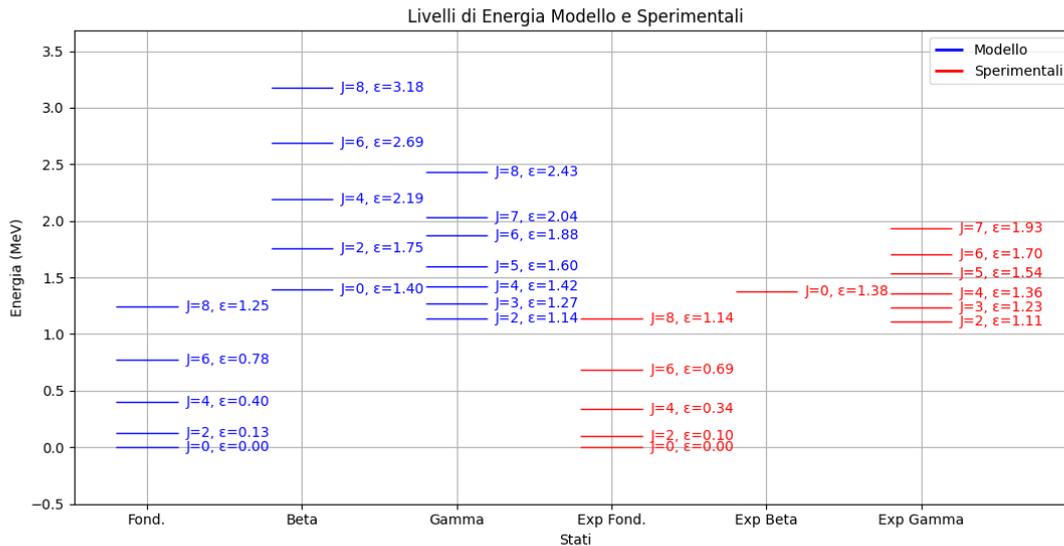


Figura 5.1: Confronto spettro calcolato dal programma e dati sperimentali ^{180}W

Dalla Figura 5.2 si osserva che il potenziale presenta un minimo nella posizione $\beta = 0.143$, $\gamma = 0^\circ$, con una profondità di $V_{\min} = -2.405 \text{ MeV}$, indicando che la forma all'equilibrio del nucleo è prolata.

J	Rel. En. (MeV)			
0	0.000	1.397	2.371	2.833
2	0.130	1.141	1.755	2.585
3	1.266	2.997	4.227	4.861
4	0.401	1.419	2.192	2.416
5	1.600	2.614	3.505	4.436
6	0.777	1.875	2.693	2.726
7	2.036	3.075	4.063	4.086
8	1.246	2.433	3.178	3.274

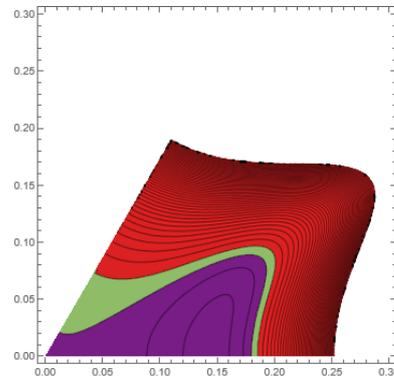


Tabella 5.3: Stati energetici calcolati dal programma per il nucleo di ^{180}W

Figura 5.2: Potenziale di Gneuss-Greiner per il nucleo di ^{180}W calcolato dal programma.

Dalla Figura 5.1 si può osservare come il nostro programma riproduca bene l'andamento generale dello spettro del nucleo, in modo molto più accurato rispetto alle predizioni fatte dal modello vibrazionale presentato nella Sezione 3.4. In particolare, per questo nucleo, sia la banda fondamentale che la

banda- γ sono riprodotte molto bene dai nostri calcoli, come si può osservare nella Tabella 5.4. In particolare si osserva che la deviazione massima tra l'energia degli stati calcolati e quella sperimentale è 170 keV. Per quanto riguarda la banda- β , non sono presenti dati sperimentali con cui confrontare i nostri risultati; tuttavia, i nostri calcoli possono fornire un'indicazione sulla possibile presenza degli stati della banda- β nell'intervallo [1.69 – 3.21] MeV.

Banda	J	Diff. (Sper. - Calc.) (MeV)
Fondamentale	0	0.000
Fondamentale	2	-0.027
Fondamentale	4	-0.064
Fondamentale	6	-0.090
Fondamentale	8	-0.107
Beta	0	-0.015
Gamma	2	-0.029
Gamma	3	-0.034
Gamma	4	-0.059
Gamma	5	-0.065
Gamma	6	-0.172
Gamma	7	-0.103

Tabella 5.4: Differenza di energia tra gli stati calcolati dal programma e gli stati misurati sperimentalmente del nucleo ^{180}W

5.3.2 Spettro del ^{182}W

Per questo nucleo, gli stati delle tre bande da considerare per il *fitting* sono chiaramente distinguibili.

C_0	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
$2.30425 \cdot 10^{-3}$	32.8737	3895.44	858.600	24802.4	$1.30234 \cdot 10^6$	193016

Tabella 5.5: Coefficienti del potenziale di Gneuss-Greiner per il nucleo di ^{182}W

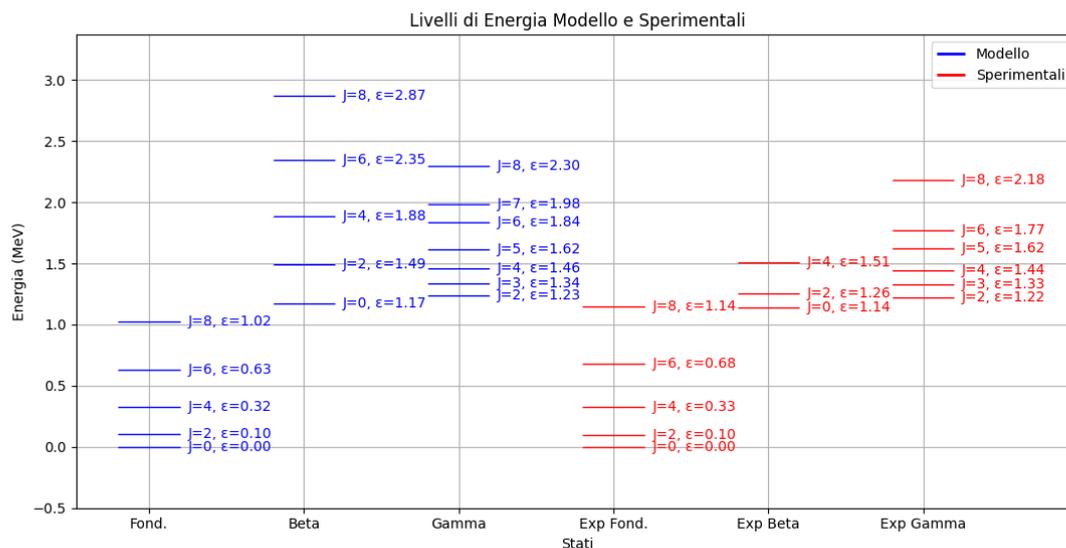


Figura 5.3: Confronto spettro calcolato dal programma e dati sperimentali ^{182}W .

Dalla Figura 5.4 si osserva che il potenziale presenta un minimo nella posizione $\beta = 0.171$, $\gamma = 0^\circ$, con una profondità di $V_{\min} = -3.924$ MeV, indicando che la forma di equilibrio del nucleo è, anche in questo caso, prolata.

J	Rel. En. (MeV)			
0	0.000	1.173	2.12	2.651
2	0.103	1.233	1.491	2.408
3	1.339	2.783	4.102	4.407
4	0.322	1.462	1.885	2.570
5	1.616	2.739	3.251	4.240
6	0.630	1.837	2.346	2.844
7	1.982	3.125	3.770	4.232
8	1.022	2.298	2.870	3.241

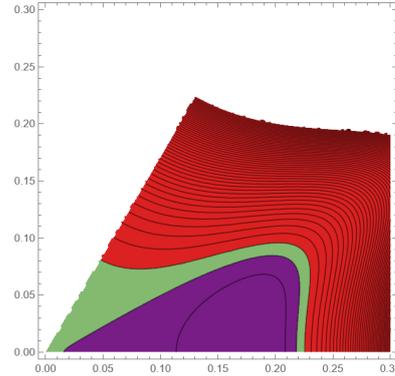


Tabella 5.6: Stati energetici calcolati dal programma per il nucleo di ^{182}W Figura 5.4: Potenziale di Gneuss-Greiner per il nucleo di ^{182}W calcolato dal programma.

Per questo nucleo si osservano piccole deviazioni, entro i 100 keV, per gli stati della banda fondamentale e della banda- γ , come riportato nella Tabella 5.7. A differenza del nucleo precedente, per la banda- β sono disponibili alcuni dati sperimentali con cui confrontare i calcoli teorici, e si può notare che le energie degli stati calcolati tendono a sovrastimare le energie degli stati appartenenti a questa banda. Questo può essere dovuto ad un potenziale troppo dritto, a pareti ripide, mentre quello reale risente di altri effetti che lo smussano ancor di più.

Banda	J	Diff. (Sper. - Calc.) (MeV)
Fondamentale	0	0.000
Fondamentale	2	-0.003
Fondamentale	4	0.007
Fondamentale	6	0.050
Fondamentale	8	0.123
Beta	0	-0.037
Beta	2	-0.234
Beta	4	-0.374
Gamma	2	-0.012
Gamma	3	-0.008
Gamma	4	-0.019
Gamma	5	0.007
Gamma	6	-0.067
Gamma	8	-0.120

Tabella 5.7: Differenza di energia tra gli stati calcolati dal programma e gli stati misurati sperimentalmente del nucleo ^{182}W

5.3.3 Spettro del ^{184}W

Per questo nucleo, gli stati delle tre bande da considerare per il *fitting* sono chiaramente distinguibili.

C_0	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
$1.36313 \cdot 10^{-3}$	-492.875	-2179.09	27244.3	29944.9	641232	964572

Tabella 5.8: Coefficienti del potenziale di Gneuss-Greiner per il nucleo di ^{184}W

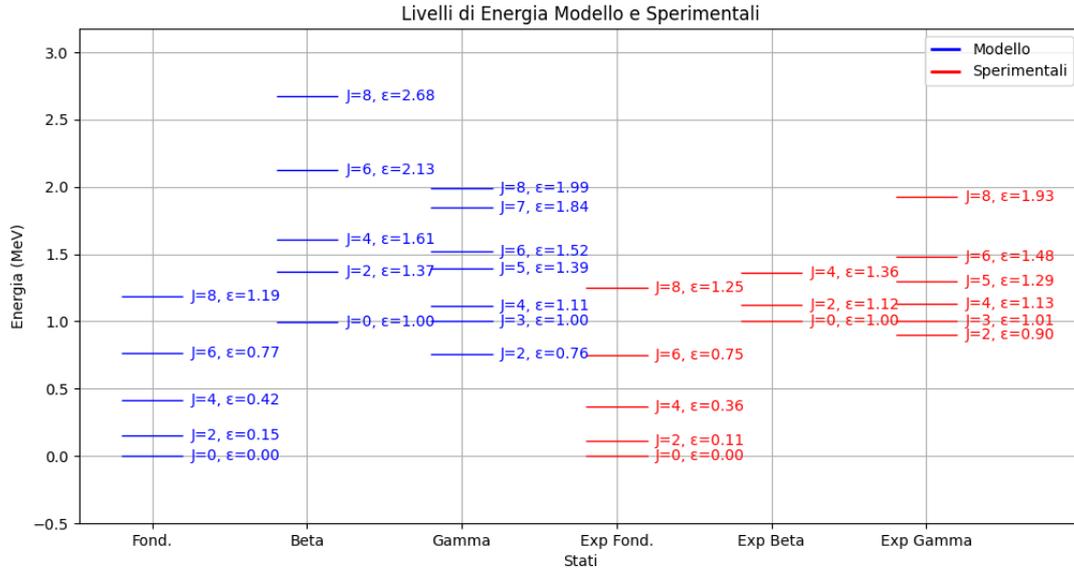


Figura 5.5: Confronto spettro calcolato dal programma e dati sperimentali ^{184}W

Nella Figura 5.6 si osserva che il potenziale presenta un minimo nella posizione $\beta = 0.126$, $\gamma = 60^\circ$, con una profondità di $V_{\min} = -2.572$ MeV, indicando che la forma di equilibrio del nucleo è, diversamente dai due casi precedenti, obolata.

J	Rel. En. (MeV)			
0	0.000	0.999	1.557	2.231
2	0.153	0.758	1.371	1.807
3	1.000	2.379	2.917	4.034
4	0.417	1.113	1.605	1.829
5	1.389	2.029	2.939	3.412
6	0.767	1.523	2.127	2.342
7	1.844	2.559	3.191	3.543
8	1.188	1.994	2.675	2.901

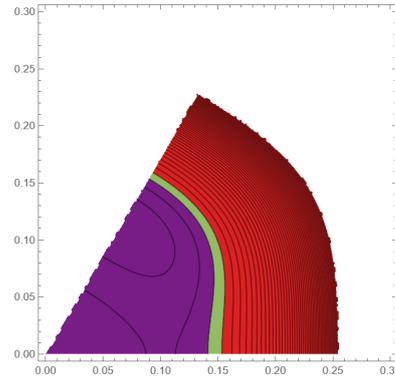


Tabella 5.9: Stati energetici calcolati dal programma per il nucleo di ^{184}W Figura 5.6: Potenziale di Gneuss-Greiner per il nucleo di ^{184}W calcolato dal programma.

Anche in questo nucleo, come nel caso precedente, le deviazioni per gli stati della banda fondamentale e della banda- γ sono piccole, in questo caso inferiori a 90 keV. Anche il comportamento delle deviazioni della banda- β è simile al caso precedente; infatti, si osserva che per gli stati 2^+ e 4^+ l'energia è sovrastimata di circa 250 keV.

5.3.4 Spettro del ^{186}W

Per questo nucleo, gli stati delle tre bande da considerare per il *fitting* sono chiaramente distinguibili.

Nella Figura 5.8 si osserva che il potenziale presenta un minimo nella posizione $\beta = 0.158$, $\gamma = 22.1^\circ$, con una profondità di $V_{\min} = -1.482$ MeV, indicando che la forma di equilibrio del nucleo è triassiale.

Il programma si dimostra particolarmente efficace nella predizione dello spettro di questo nucleo. In particolare, lo stato calcolato che presenta la maggiore deviazione rispetto ai dati sperimentali è il livello 2^+ della banda- β , con una differenza di circa 250 keV, come riportato nella Tabella 5.13. Inoltre per questo nucleo, a differenza degli altri, sono stati misurati sperimentalmente tutti gli stati energetici delle tre bande fino a $J = 8$. Questo ci consente di effettuare confronti con stati noti con

Banda	J	Diff. (Sper. - Calc.) (MeV)
Fondamentale	0	0.000
Fondamentale	2	-0.041
Fondamentale	4	-0.053
Fondamentale	6	-0.019
Fondamentale	8	0.064
Beta	0	0.004
Beta	2	-0.249
Beta	4	-0.245
Gamma	2	0.145
Gamma	3	0.006
Gamma	4	0.021
Gamma	5	-0.094
Gamma	6	-0.046
Gamma	8	0.081

Tabella 5.10: Differenza di energia tra gli stati calcolati dal programma e gli stati misurati sperimentalmente del nucleo ^{184}W

C_0	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
$1.56214 \cdot 10^{-3}$	-75.4486	1728.59	-12650.3	105089	$3.83626 \cdot 10^6$	$1.06801 \cdot 10^6$

Tabella 5.11: Coefficienti del potenziale di Gneuss-Greiner per il nucleo di ^{184}W

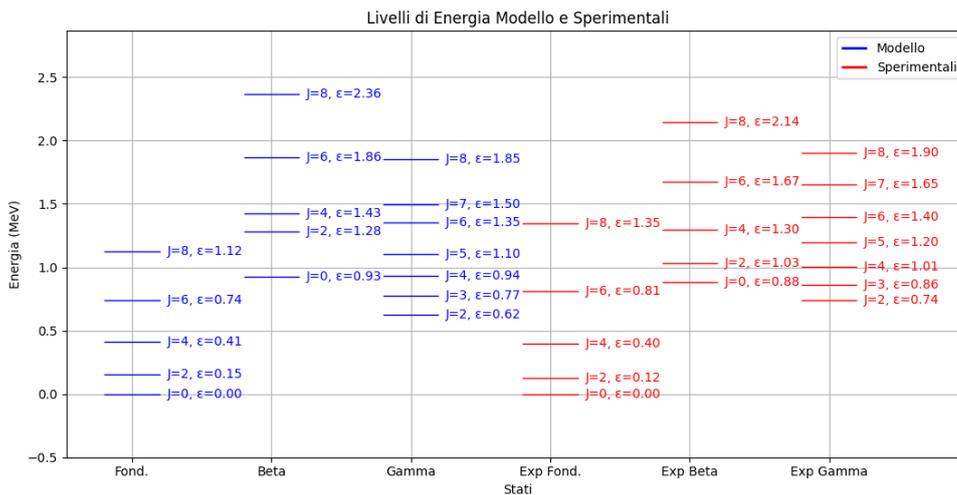


Figura 5.7: Confronto spettro calcolato dal programma e dati sperimentali ^{186}W

un momento angolare elevato. Poiché la differenza tra le energie calcolate e quelle sperimentali per questi stati è relativamente contenuta, ciò conferma e rafforza l'affidabilità del modello descritto fino a questo punto.

J	Rel. En. (MeV)			
0	0.000	0.926	1.630	2.004
2	0.153	0.6223	1.282	1.670
3	0.772	2.108	2.981	3.556
4	0.412	0.935	1.428	1.680
5	1.101	1.665	2.582	3.119
6	0.742	1.354	1.864	2.116
7	1.498	2.131	2.704	3.096
8	1.125	1.854	2.363	2.602

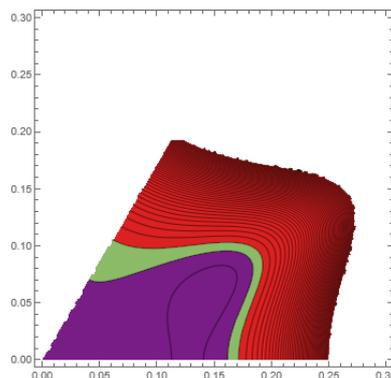


Tabella 5.12: Stati energetici calcolati dal programma per il nucleo di ^{186}W Figura 5.8: Potenziale di Gneuss-Greiner per il nucleo di ^{186}W calcolato dal programma.

Banda	J	Diff. (Sper. - Calc.) (MeV)
Fondamentale	0	0.000
Fondamentale	2	-0.030
Fondamentale	4	-0.015
Fondamentale	6	0.068
Fondamentale	8	0.224
Beta	0	-0.043
Beta	2	-0.252
Beta	4	-0.129
Beta	6	-0.192
Beta	8	-0.221
Gamma	2	0.116
Gamma	3	0.090
Gamma	4	0.071
Gamma	5	0.096
Gamma	6	0.044
Gamma	7	0.154
Gamma	8	0.050

Tabella 5.13: Differenza di energia tra gli stati calcolati dal programma e gli stati misurati sperimentalmente del nucleo ^{186}W

In conclusione, possiamo affermare che i calcoli effettuati descrivono accuratamente la struttura degli spettri energetici lungo la catena di isotopi del tungsteno. In particolare, riproducono con precisione le energie degli stati appartenenti alla banda fondamentale e alla banda- γ . Per la banda- β , le discrepanze tra i livelli energetici calcolati e quelli sperimentali risultano leggermente più elevate, ma comunque entro un margine di 350 keV, con una differenza più marcata per lo stato 2^+ di questa banda. Complessivamente, il confronto tra le previsioni teoriche e i dati sperimentali dimostra che i calcoli sono affidabili, entro le deviazioni osservate, e possono essere utilizzati come strumento predittivo per l'identificazione di nuovi stati energetici negli isotopi del tungsteno.

Capitolo 6

Conclusioni

In questa tesi si è presentato il modello collettivo per descrivere il comportamento del nucleo atomico, il quale è basato sull'ipotesi di considerare il nucleo come una goccia di fluido. L'obiettivo principale era ripercorrere alcune soluzioni del modello, partendo dalla descrizione classica del sistema per poi, tramite le regole di quantizzazione, arrivare a scrivere l'Hamiltoniano quantizzato e, infine, determinare lo spettro energetico del sistema e, dove si potesse, confrontare i risultati con i dati sperimentali. In particolare, l'analisi è stata condotta inizialmente per il modello vibrazionale, per poi includere il termine delle rotazioni attraverso il modello roto-vibrazionale. La tesi si è conclusa presentando le soluzioni numeriche per il potenziale di Gneuss-Greiner, applicate alla catena di isotopi del tungsteno, con l'obiettivo di verificare l'attendibilità delle predizioni del modello e formulare previsioni su alcuni stati nucleari non ancora osservati. Il successo di questo modello emerge chiaramente dalla trattazione sviluppata in questa tesi. Il contributo fondamentale di Aage Bohr e Ben Roy Mottelson, che ha portato alla loro vittoria del Premio Nobel nel 1975, ne è una prova significativa. Inoltre, il modello ha dimostrato una notevole capacità di spiegare lo spettro energetico dei nuclei pari-pari per eccitazioni a basse energie con grande precisione. Questa capacità deriva dal continuo adattamento e miglioramento del modello attraverso nuove soluzioni analitiche e numeriche, proposte anche nel XXI secolo, che hanno permesso di ottenere un confronto sempre più accurato con i dati sperimentali. In conclusione, il modello collettivo rappresenta un potente strumento teorico per la descrizione dei nuclei atomici, dimostrando costantemente la sua validità e flessibilità nella fisica nucleare moderna. Il confronto tra le previsioni del modello e i dati sperimentali, unito alla capacità di predire stati nucleari ancora non osservati, ne evidenzia il potenziale sia come mezzo per una comprensione più profonda della struttura nucleare, sia come strumento predittivo per guidare future scoperte. I risultati ottenuti in questa tesi confermano non solo la robustezza del modello, ma anche il suo contributo al progresso nella comprensione dei complessi fenomeni nucleari.

Bibliografia

- [1] Aage Bohr, Ben N. Mottelson, *The coupling of Nuclear Surface Oscillation to the Motion of Individual Nucleons*, Nuclear Physics, Vol. 2, 1956.
- [2] W. Greiner, J. A. Maruhn, *Nuclear Models*, Springer-Verlag, 99-205, 1996.
- [3] Lorenzo Fortunato, *Solutions of the Bohr Hamiltonian, a compendium*, European Physics Journal A, 2005.
- [4] Francesco Iachello, *Lie Algebras and Applications*, Lecture Notes Physics 891, Springer, 247-263, 2006.
- [5] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laoë, *Quantum Mechanics Vol. II*, pg. 1057, WILEY-VCH, 2020
- [6] B.Podolsky, *Quantum-Mechanically Correct Form of Hamiltonian Function for Conservative Systems*, Phys. Rev. Lett. 32, 812, 1928.
- [7] G. Gneuss, W. Greiner, *Nuclear Physics*, A171, 449, 1971
- [8] C. C. Noack, *Nuclear Physics*, A171, 493, 1968
- [9] Lorenzo Fortunato, Fabrizio Ferrari-Ruffino, *GCM Solver (Ver3.0): A Mathematica Notebook for Diagonalization of the Geometric Collective Model (Bohr Hamiltonian) with Generalized Gneuss-Greiner Potential*, MDPI Journal, 2018.
- [10] T. M. Corrigan, F. J. Margetan, S. A. Williams, *Exact solution of the quadrupole surface vibration Hamiltonian in body fixed coordinates*, Phys. Rev. C, 14, 6, 1976.
- [11] R. W. Barnar, G. Dahlquist, K. Pearce, L. Reichel, K. C. Richards, *Gram Polynomials and the Kummer Function*, Journal of Approximation Theory 94, 128-143, 1998
- [12] *Isotope Explorer*, LBNL-Lund Collaboration. <http://ie.lbl.gov/ensdf/>
- [13] F. J. Margetan, S. A. Williams, *Optimization of finite expansion bases for nuclear collective-model calculations*, Phys. Rev. C, 25, 1602, 1982.