



UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
DI PADOVA

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PADOVA  
**Dipartimento di Ingegneria Industriale DII**  
Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica

## **Relazione per la prova finale**

*Studio e modellazione dello sterzo corretto della vettura Bernardi*

Tutor Universitario: Prof. Cavazzini Giovanna

Longo Leonardo 1201581

Anno Accademico 2021/2022



## **Sommario**

Nei suoi studi automobilistici il Professor E. Bernardi si concentrò tra le svariate cose anche ad un problema che a suo dire era stato studiato e poi risolto in maniera approssimativa. In questa trattazione si andrà a discutere di come il Professore abbia risolto il problema dello sterzo corretto il quale consente alla vettura di compiere svolte rispettivamente a destra ed a sinistra individuando nel sistema di rotolamento un unico centro di sterzata. Si andranno ad osservare la teoria alla base del funzionamento del meccanismo, i vari pezzi che lo vanno a comporre ed in fine un piccolo parallelo con i sistemi adottati nei più comuni impianti sterzanti.

# Indice

<b>1</b>	<b>Definizioni ed esempi di modelli di sterzo</b>	<b>3</b>
1.1	La traiettoria ed il centro di svolta . . . . .	3
1.2	Sistema rotolante . . . . .	3
1.3	Lo sterzo . . . . .	3
1.4	Lo sfregamento . . . . .	4
1.5	configurazione avente un unico asse di sterzo . . . . .	4
1.5.1	Lo sterzo ordinario . . . . .	4
1.6	configurazione con due assi di sterzo . . . . .	5
1.6.1	Lo sterzo Ackerman . . . . .	5
1.6.2	Lo sterzo Bourleat . . . . .	6
1.6.3	Lo sterzo Bernardi . . . . .	7
<b>2</b>	<b>La soluzione Bernardi</b>	<b>8</b>
2.1	Le componenti adatte alla costruzione di un impianto sterzante . . . . .	8
2.2	Il sistema di aste articolate . . . . .	8
2.2.1	Gradi di libertà di un sistema di aste articolate . . . . .	9
2.2.2	il possibile numero di aste . . . . .	9
2.3	Condizione fondamentale di sterzo corretto . . . . .	9
2.4	Il quadrilatero articolato, romboide . . . . .	10
2.4.1	Formulazione del problema pratico . . . . .	10
2.4.2	Idea di soluzione . . . . .	10
2.5	Dimostrazione della completa rivoluzione del meccanismo . . . . .	15
2.6	Configurazione del Bi-Quadrilatero . . . . .	16
2.7	Studio cinematico di posizione del Bi-Quadrilatero . . . . .	17
2.8	Collegamento tra gli assi verticali di sterzo e le manovelle del Bi- Quadrilatero e le possibili disposizioni . . . . .	19
2.8.1	Disposizioni dello sterzo . . . . .	20
2.9	studio cinematico di posizione dello sterzo Bernardi . . . . .	20
2.10	Il manubrio . . . . .	22
2.11	Il limitatore di sterzata . . . . .	23
2.12	Parametri costruttivi . . . . .	24
2.13	accenno al moderno impianto sterzante . . . . .	24
2.13.1	Componenti meccaniche interne . . . . .	24
2.13.2	Breve accenno al servosterzo . . . . .	24
<b>A</b>		<b>26</b>

# 1

## Definizioni ed esempi di modelli di sterzo

### 1.1 La traiettoria ed il centro di svolta

come traiettoria possiamo definire quel luogo dei punti percorso da una ruota rotolante in un piano con quest'ultimo definito piano di rotolamento. durante lo spostamento della ruota lungo la sua traiettoria, questa gira anche insieme al proprio asse intorno ad una perpendicolare al piano di rotolamento, l'intersezione tra i due si definisce centro di volta.

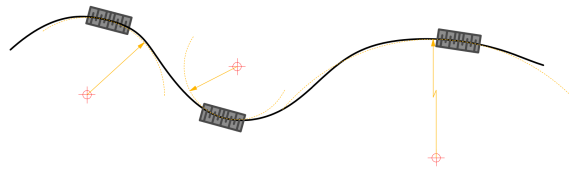


Figura 1.1: Percorso di una ruota lungo una traiettoria qualsiasi

### 1.2 Sistema rotolante

per idealizzare un luogo in cui si va poi realizzare l'auto si definisce il sistema rotolante come l'insieme di una o più ruote circolari che hanno gli assi collegati ad uno stesso telaio, e che possono ruotare sopra un piano restando tutte a contatto con lo stesso. Ciascuna ruota potrà avere diametro qualunque ed essere folle sul proprio asse.

### 1.3 Lo sterzo

si va a definire come sterzo un meccanismo di qualunque genere tale che possa permettere di mutare a piacere la posizione del centro di svolta del sistema rotolante, in modo da far seguire alle ruote una determinata traiettoria. Tale sistema si definisce

*corretto* qualora per ogni posizione del sistema in un qualsiasi percorso le proiezioni degli assi geometrici delle ruote sul piano di rotolamento si intersecano in un unico punto, il centro di svolta.

## 1.4 Lo sfregamento

ponendoci nella realtà del caso quando il meccanismo adottato nell'impianto sterzante non è corretto nelle svolte del veicolo una o più ruote sfregano al suolo, comportando, un aumento del consumo degli pneumatici dovuto al lavoro d'attrito, oltre a questo il trascinarsi della ruota fa nascere una forza perpendicolare al piano di quest'ultima, la quale va ad aggravare gli sforzi sui componenti. per evitare lo sfregamento bisogna fare in modo che sul punto di contatto tra la ruota ed il piano di rotolamento la tangente alla ruota e la tangente della traiettoria in quel punto coincidano.

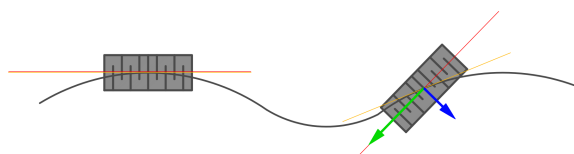


Figura 1.2: sfregamento di una ruota

## 1.5 configurazione avente un unico asse di sterzo

### 1.5.1 Lo sterzo ordinario

Formato da due coppie di ruote, gli assi delle quali a due a due, posteriore ed anteriore con la medesima proiezione sul piano di rotolamento. I due assi posteriori sono fissi al telaio, mentre i due anteriori sono fissi ad un sistema girevole attorno ad un asse di sterzo verticale al piano di riferimento. si tratta della prima configurazione qui descritta di sterzo corretto, dato che sono solo due le proiezioni distinguibili degli assi geometrici delle ruote sul piano di rotolamento, per geometria due rette non parallele in un piano si vanno ad intersecare in un unico punto, applicato alla nostra situazione sarà sempre ben definito il centro di svolta. solitamente tale soluzione viene applicata a vetture trainate infatti non dispongono mai di uno sterzo posto sopra il mezzo ma di un timone che si prolunga all'esterno del perimetro della vettura.

Nel caso tale configurazione fosse adottata per un'automobile sorgerebbero due inconvenienti da non sottovalutare:

- manovrare delle auto avente questo sterzo risulterebbe molto faticoso, e maggiormente pericoloso se la strada dovesse essere irregolare, con buche o sporgenze
- In marcia rettilinea il veicolo è stabile data la sua forma di appoggio rettangolare, nelle svolte via via che si va a diminuire il raggio di sterzata la forma del sistema cambia da rettangolo a trapezio a triangolo, minando così la stabilità in curva



Figura 1.3: telaio di un carro a 4 ruote

## 1.6 configurazione con due assi di sterzo

Si tratta di un sistema generalmente a quattro ruote, due posteriori fisse a telaio aventi assi sovrapposti, e due anteriori i cui assi sono liberi di ruotare attorno al proprio asse di sterzo, così facendo le problematiche sorte in precedenza 1.5.1 vengono di molto ridimensionate. L'idea originaria di un sistema a due assi di sterzo può essere fatta risalire ad un carrozziere di Monaco, un certo Lankensperger, la quale venne successivamente depositata come brevetto da J. Akerman nel gennaio 1818.

### 1.6.1 Lo sterzo Akerman

Il più semplice di questi sistemi prende il nome di quadrilatero o trapezio di Akerman (con brevetto risalente al 1818), costruito da una regola empirica suggerita per la prima volta dal francese Jeantaund nel 1878. Il meccanismo di sterzo in questione non si può definire corretto però tale sistema racchiude il miglior compromesso tra semplicità costruttiva e correttezza nella sterzata, considerando un angolo di sterzata limite di  $35^\circ$ . Nello scritto "Sistema pratico di semplici aste articolate che risolve il problema dello sterzo corretto degli automobili" viene esposta la costruzione del sistema:

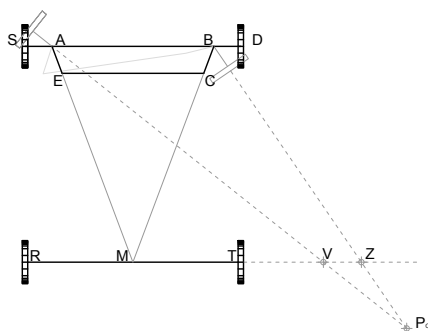


Figura 1.4: Proiezione sul piano di rotolamento dello sterzo Akerman

*Siano, in proiezione ortogonale sul piano di rotolamento che supporremo orizzontale,  $R$  e  $T$  le ruote posteriori del veicolo folli sull'asse  $RT$ ;  $S$  e  $D$  le ruote anteriori direttrici girevoli sui rispettivi fusi  $AS$  e  $BD$ ,  $A$  e  $B$  i loro assi verticali di sterzo.  $AB$  rappresenta una barra parallela ad  $RT$  la quale fa parte del telaio del veicolo,  $AE$  e  $BC$*

rappresentano due braccia di eguale lunghezza rispettivamente congiunta in modo rigido coi fusi  $\overline{AS}$  e  $\overline{BD}$ . La ruota  $S$ , il fuso  $\overline{AS}$  ed il braccio  $\overline{AE}$ ; la ruota  $D$  il fuso  $\overline{BD}$  ed il braccio  $\overline{BC}$ , formano due sistemi che indipendentemente l'uno all'altro possono volgere intorno ai rispettivi assi di sterzo  $A$  e  $B$ .[...] Nella disposizione di Akerman-Jeantaud a riunire  $E$  e  $C$  è una semplice asta rigida  $\overline{EC}$  articolata alle loro estremità, e gli angoli eguali ed invariabili  $\widehat{EAS}$  e  $\widehat{CBD}$  da esse formati con i rispettivi fusi  $\overline{AS}$  e  $\overline{BD}$  si determinano ponendo le ruote direttrici in posizione di marcia dritta, mettendo allora le braccia  $\overline{AE}$  e  $\overline{BC}$  nelle direzione dei lati eguali del triangolo isoscele  $\overline{AMB}$  che ha la base  $\overline{AB}$  ed il vertice in  $M$  al centro dell'asse delle ruote posteriori.

## 1.6.2 Lo sterzo Bourleat

Il meccanismo ideato dal professore Carlo Bourlet costituisce la più semplice e pratica delle soluzioni esatte del problema. Tale meccanismo è basato su una proposizione, schematizzata nella figura 1.5:

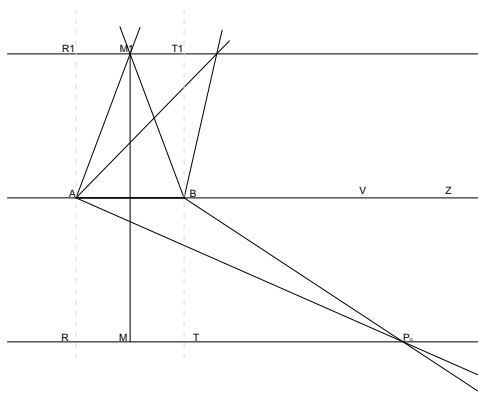


Figura 1.5: Schema della proposizione sfruttata da Carlo Bourleat per la realizzazione del suo sterzo

Se  $\overline{AM_1B}$  è un triangolo isoscele  $\overline{R_1T_1}$  la parallela alla sua base  $\overline{AB}$  che passa per il suo vertice  $\overline{M_1}$  ed  $\overline{AV}$  e  $\overline{BZ}$  due rette sdraiate su  $\overline{AB}$  e rispettivamente collegate alle  $\overline{AM_1}$  e  $\overline{BM_1}$  sotto gli angoli costanti  $\widehat{M_1AV}$  e  $\widehat{M_1BZ}$  mentre retando fissi i centri  $\overline{A}$  e  $\overline{B}$  il punto d'incontro delle  $\overline{AM_1}$  e  $\overline{BM_1}$  percorre la  $\overline{R_1T_1}$ , le  $\overline{AV}$  e  $\overline{BZ}$  si tagliano sempre sulla  $\overline{RT}$  simmetrica alla  $\overline{R_1T_1}$  rispetto ad  $\overline{AB}$ .<sup>1</sup>

Ponendoci in proiezione sul piano di rotolamento si prenda come riferimento la figura 1.6, siano  $\overline{AS}$  e  $\overline{BD}$  i fusi delle ruote direttrici del veicolo;  $\overline{A}$  e  $\overline{B}$  gli assi di sterzo, i quali si suppongono perpendicolari al piano di rotolamento; sia  $\overline{RT}$  l'asse delle ruote posteriori ad  $\overline{AB}$ . dal punto di mezzo  $\overline{Q}$  di  $\overline{AB}$  congiungiamo a questa la perpendicolare che taglierà in  $\overline{M}$  la  $\overline{RT}$ ; sul prolungamento di  $\overline{MQ}$  prendiamo  $\overline{QM_1}$  eguale a  $\overline{MQ}$ , e per  $\overline{R_1T_1}$  parallela ad  $\overline{AB}$  per tal modo  $\overline{R_1T_1}$  ed  $\overline{RT}$  saranno simmetriche rispetto ad  $\overline{AB}$ . Condotte le  $\overline{AM_1}$  e  $\overline{BM_1}$  e disposti i fusi  $\overline{AS}$  e  $\overline{BD}$  in direzione parallela ad  $\overline{RT}$  (marcia dritta del veicolo) supponiamo che le braccia  $\overline{AE}$  e  $\overline{BC}$  siano rigidamente fissate a questi fusi nelle direzione  $\overline{AM_1}$  e  $\overline{BM_1}$ . Gli angoli  $\widehat{M_1AV}$  e  $\widehat{M_1BZ}$  allora saranno invariabili, ed il triangolo  $\overline{AM_1B}$  essendo isoscele sarà vero, per la proposizione di sopra citata che qualora esista fra le braccia  $\overline{AE}$  e  $\overline{BC}$

<sup>1</sup>proposizione alla base dell'impianto sterzante Carlo Bourlet



un legame tale che per qualsiasi posizione del sistema gli assi geometrici delle braccia medesime si taglino sulla  $R_1T_1$  le  $AS$  e  $BD$  si taglieranno sempre sulla  $RT$ , per tal modo le proiezioni sul piano di rotolamento degli assi di tutte le ruote s'incontreranno costantemente in un unico punto. Resta quindi da definire come sono collegati i componenti, dunque; le braccia  $AE$  e  $BC$  si sdoppiano formando le feritoie rettilinee  $Ee$  e  $Cc$ , in queste possono scorrere i rulli  $E$  e  $C$ , aventi gli assi rigidamente congiunti con l'asta  $EC$ . Due guide  $i$  e  $v$  solidali con il telaio del veicolo permettono all'asta medesima di scorrere sulla direzione parallela ad  $AB$  ad una distanza nota  $Qr$  dalla stessa  $AB$ . Per tal modo i triangoli  $AM_1B$  ed  $EM_1C$  restano simili per qualsiasi posizione del sistema; e poiché  $AB$ ,  $EC$  e  $Qr$  sono costanti, resterà pure costante  $QM_1$  e quindi in tutti i movimenti possibili del meccanismo l'intersezione  $M_1$  degli assi geometrici delle braccia  $AE$  e  $BC$  si manterrà sulla parallela  $R_1T_1$ .

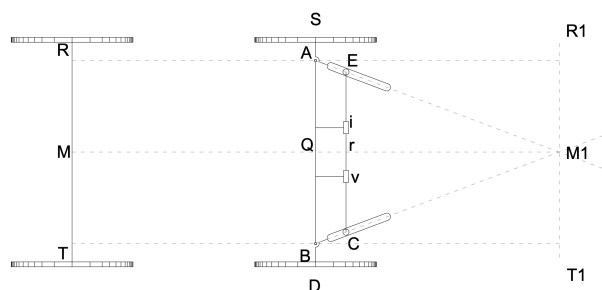


Figura 1.6: Proiezione sul piano di rotolamento dello Sterzo Bourleat

### 1.6.3 Lo sterzo Bernardi

Si tratta di una configurazione a sette aste progettata dal professor E. Bernardi e brevettata nel febbraio del 1898, si tratta di una soluzione di sterzo corretto applicata alle autovetture costruite dalla *società Miari Giusti e C. di Padova* e poi dalla *società Italiana Bernardi di Padova*.

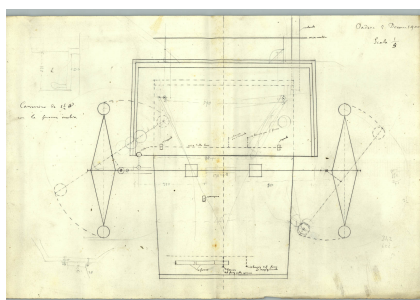


Figura 1.7: Vettura Bernardi

## 2

# La soluzione Bernardi

## 2.1 Le componenti adatte alla costruzione di un impianto sterzante

durante la marcia del veicolo su una qualsiasi strada avvengono una grande quantità di sobbalzi, colpi, una grande esposizione ai fenomeni atmosferici ed alla polvere stradale; questi eventi durante tutta la vita della vettura provocano una degradazione delle sue componenti soprattutto quelle più esposte. Lo sterzo all'epoca del Professore come oggi veniva posto sulla pancia del mezzo ma con la differenza che era posto esternamente, senza alcuna protezione data da rivestimenti; quindi i costruttori delle case automobilistiche del tempo ritenevano poco conveniente applicare uno sterzo che se pur corretto impiegasse dei componenti che avrebbero subito un rapido degrado, tra questi :contorni dentati, eccentrici, boccioli, guide rettilinee o curvilinee con slitte o rulli. Tale componente deve dimostrare quindi solidità, una buona durata ed una certezza nel funzionamento, l'oggetto che sembrò ricoprire bene tali caratteristiche fu la semplice asta articolata.

## 2.2 Il sistema di aste articolate

seguendo quanto detto al paragrafo precedente poniamo che il meccanismo per collegare cinematicamente i due assi di sterzo di un automobile, per essere pratico, debba comporsi di sole aste articolate. Questa situazione rende palese il fatto che il sistema che si andrà a privilegiare oltre a soddisfare rigorosamente alla condizione di sterza corretto deve corrispondere al tempo stesso alle esigenze della pratica, quindi sarà quello più semplice che si comporrà del minor numero di aste possibili. va detto che per un qualunque sistema di aste articolate qualora ve ne sia una che compie la funzione di telaio o che durante il moto del meccanismo questa rimane ferma, essa non andrà contata, come esempio si può prendere il parallelogramma di Akerman per il quale non si va a contare l'asta congiungente i due assi di sterzo; quando invece due o più aste sono rigidamente incastrate tra loro queste devono essere contate come un unica asta.

### 2.2.1 Gradi di libertà di un sistema di aste articolate

poniamoci in un sistema di aste articolate qualunque, prendiamo come riferimento la figura BLA , per un motivo qualunque si rende necessari aumentare il numero di aste senza modificare il grado di libertà del sistema.

Se aggiungiamo un nuovo elemento articolato a due punti del sistema, fisso l'uno e mobile l'altro, o mobili entrambi ma non appartenenti al medesimo elemento , si va ad imporre che la distanza tra gli estremi della nuova asta rimanga costante, togliendo così un grado di libertà al sistema.

se invece raddoppiamo un componente dello stesso sistema , cioè nel posto di un elemento se ne posizionino due articolandoli separatamente ai due punti del sistema e tra loro, la distanza che prima era imposta viene a meno aumentando così il grado di libertà.

per passare da un dato sistema articolato meno complesso ad uno più complesso vanno aggiunti due elementi uno che tolga ,l'altro che aggiunga gradi di libertà, nel caso di aste articolate con una diede RRR.

### 2.2.2 il possibile numero di aste

Quindi dato che il sistema di sterzo più semplice è lo sterzo ordinario 1.5.1 , composto da un unica asta con al centro l'asse di sterzo, i sistemi successivi saranno formati da un numero di aste dispari :  $1, 1+2=3, 3+2=5, 5+2=7 \dots$

Va anche detto che per un sistema composto da due assi di sterzo non si può pensare ad un sistema di un solo elemento, ed il loro sterzo non potrà quindi essere combinato che mediante sistemi di 3,5,7,9 ,. . . . elementi.

## 2.3 Condizione fondamentale di sterzo corretto

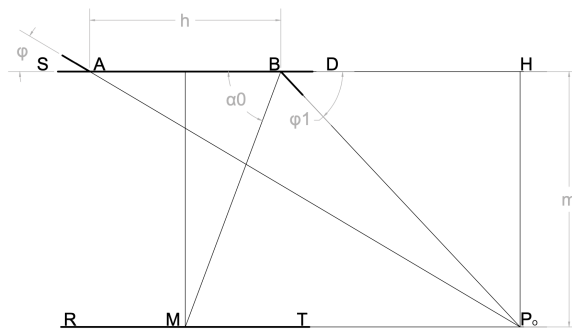


Figura 2.1: Condizione necessaria allo sterzo corretto

Consideriamo un veicolo a quattro (tre) ruote con due assi di sterzo  $A$  e  $B$  , andiamo a ragionare sulla proiezione ortogonale al piano di rotolamento di ogni singolo componente che verrà successivamente menzionato. Poniamo che la congiungente degli assi di sterzo  $A$  e  $B$  delle rispettive ruote direttrici sia parallela ma non sovrapposta all'asse  $RT$  delle ruote posteriori, e quando i fusi delle rispettive ruote  $AS$  e  $BD$  sono anch'essi paralleli ad  $RT$  allora il veicolo procederà dritto, mentre quando per effetto dello sterzo girano in modo opportuno rispetto ad  $A$  e  $B$  il veicolo farà delle svolte più o meno strette.

Perché poi lo sterzo risulti corretto dovrà accadere che gli assi geometrici di quei fusi in ogni loro posizione si taglino sempre in un punto  $P$  appartenente alla retta passante per  $\overline{RT}$  (asse delle ruote posteriori).

Supponiamo di svoltare a destra, quindi ipotizziamo che i detti fusi ruotino in senso orario portandosi alle posizioni  $\overline{S_1A}$  e  $\overline{BD_1}$  con i rispettivi angoli  $\phi$  e  $\phi_1$ . Dalla figura 2.1 si può riconoscere l'uguaglianza:

$$(2.1) \quad \overline{AH} - \overline{BH} = \overline{AB}$$

ossia:

$$(2.2) \quad \overline{PH} \cdot \cot \phi - \overline{PH} \cdot \cot \phi_1 = \overline{AB}$$

Indichiamo con  $h$  la distanza  $\overline{AB}$  e  $m$  la distanza tra  $\overline{AB}$  e  $\overline{RT}$ , l'equazione si potrà riscrivere come:

$$(2.3) \quad \cot \phi - \cot \phi_1 = \frac{h}{m} = \text{cost.}$$

Tale equazione traduce in linguaggio algebrico la condizione di sterzo corretto, essa può anche essere riscritta da un'unica costante caratteristica del veicolo  $\alpha_0$  individuabile come l'angolo  $\widehat{ABM}$  con  $M$  punto centrale dell'asse posteriore  $\overline{RT}$ ;  $\alpha_0$  può assumere valori compresi tra  $0^\circ$  e  $90^\circ$ , i quali implicano rispettivamente  $m = 0$  ed  $m = \infty$ . Si faccia riferimento alla figura 2.1.

$$(2.4) \quad \frac{\overline{QB}}{\overline{QM}} = \frac{\frac{h}{2}}{m} = \cot \alpha_0$$

Dunque l'equazione (2.2) andrà riscritta come:

$$(2.5) \quad \cot \phi - \cot \phi_1 = 2 \cdot \cot \alpha_0$$

## 2.4 Il quadrilatero articolato, romboide

### 2.4.1 Formulazione del problema pratico

I fusi  $\overline{AS}$  e  $\overline{BD}$  delle ruote direttrici possono comportarsi in generale come corpi girevoli intorno ad assi paralleli, perché tali si suppongono gli assi di sterzo  $A$  e  $B$ ; perciò il problema che ci poniamo di risolvere può proporsi così;

Con sole aste articolate collegare cinematicamente due corpi volubili intorno a determinati assi fra loro paralleli in modo che partendo da una posizione particolare del sistema, gli angoli  $\phi$  e  $\phi_1$  di cui girano contemporaneamente quei corpi soddisfino l'equazione (2.5).

### 2.4.2 Idea di soluzione

Mediante un parallelogramma articolato, si può sempre trasmettere il movimento fra due corpi girevoli intorno ad assi paralleli, di una rotazione identica da un asse all'altro, dunque: basterà in generale trovare un sistema articolato piano nel quale a partire da una sua determinata forma "originaria", gli angoli  $\phi$  e  $\phi_1$  descritti da due delle sue manovelle  $\beta$  e  $\beta_1$  soddisfino rigorosamente l'equazione (2.5).

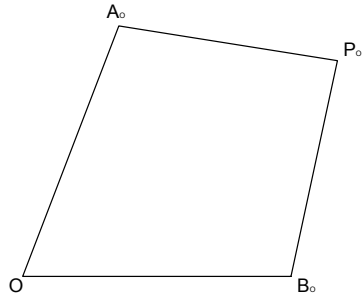


Figura 2.2: Quadrilatero romboidale

Si consideri il quadrilatero articolato  $\overline{OA_0P_0B_0}$  con  $O$  vertice fisso (figura 2.2), dove sono:

$$\begin{cases} \overline{OA} = \overline{OB} = r \\ \overline{PA} = \overline{PB} = l \\ \widehat{AOB} = \alpha \end{cases}$$

Quindi un romboide determinato dai tre parametri  $r, l$  ed  $\alpha$ , per i quali saremo liberi di scegliere le loro grandezze come meglio potrà convenire.

poniamo ora in rotazione le manovelle ( $r$ ) rispettivamente degli angoli  $\phi$  e  $\phi_1$  nel verso delle lancette di un orologio, angoli variabili ma che rispettino all'equazione (2.5). Il punto  $P$  andrà cambiando sempre la sua posizione per ogni variazione degli angoli, si potrà quindi andare a determinare il luogo dei punti coperto dal vertice  $P$  durante il movimento del meccanismo.

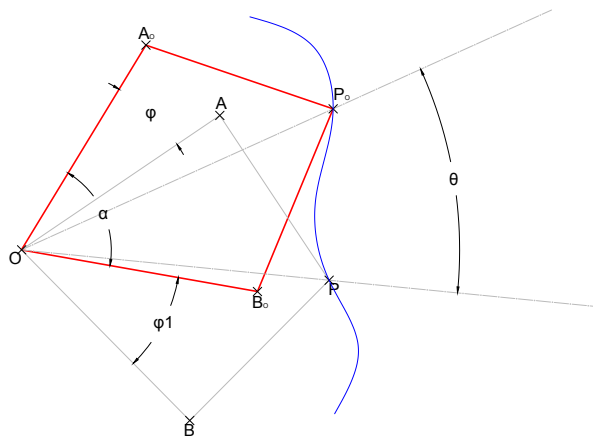


Figura 2.3: Rotazione oraria delle due manovelle

Si procede alla ricerca dell'equazione del percorso di  $P$  fissando un sistema di coordinate polari con centro  $O$  con asse  $OP_o$  ed angoli positivi orari, siano le coordinate  $\rho$  per la lunghezza e  $\theta$  per l'angolo per individuare  $P$ .

Con riferimento alla figura 2.3 si vanno a ricercare delle relazioni tra gli angoli:

$$(2.6) \widehat{A_oOP_o} = \widehat{B_oOP_o} = \frac{\alpha}{2}$$

dalla figura 2.3 si deduce:

$$(2.7) \widehat{AOP} = \widehat{AOP_o} + \theta = \frac{\alpha}{2} - \phi + \theta$$

$$(2.8) \widehat{BOP} = \widehat{BOP_o} - \theta = \frac{\alpha}{2} + \phi_1 - \theta$$

riscrivendo l'eguaglianza (2.6) si ottiene:

$$(2.9) \phi + \phi_1 = 2\theta$$

Applicando il teorema di Carnot al triangolo  $\overline{OAP}$  si ha una prima equazione che va a descrivere il punto  $P$ :

$$(2.10) \overline{AP}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{OA}^2 - 2 \cdot \overline{OP} \cdot \overline{OA} \cdot \cos \widehat{AOP}$$

$$(2.11) l^2 = \rho^2 + r^2 - 2 \cdot \rho \cdot r \cdot \cos \widehat{AOP}$$

sostituendo l'angolo  $\widehat{AOP}$  con la (2.7) risulta:

$$(2.12) l^2 = \rho^2 + r^2 - 2 \cdot \rho \cdot r \cdot \cos \frac{1}{2} \cdot (\alpha + \phi_1 - \phi)$$

Le relazioni (2.9) e (2.12) fra gli angoli  $\phi$  e  $\phi_1$  e le coordinate  $\rho$  e  $\theta$ , determinano la natura dei legami che il romboide articolato stabilisce fra il vertice  $P$  ed i suoi lati  $\overline{OA}$  e  $\overline{OB}$ .

Procediamo con ulteriori semplificazioni, si prenda la (2.5) e la si sviluppi in modo che:

$$(2.13) \cot \phi - \cot \phi_1 = 2 \cdot \cot \alpha_0$$

$$(2.14) \frac{\cos \phi}{\sin \phi} - \frac{\cos \phi_1}{\sin \phi_1} = 2 \cot \alpha_0$$

$$(2.15) \left( \frac{\cos \phi}{\sin \phi} - \frac{\cos \phi_1}{\sin \phi_1} \right) \cdot \sin \phi \cdot \sin \phi_1 = 2 \cot \alpha_0 \cdot \sin \phi \cdot \sin \phi_1$$

$$(2.16) \quad \cos \phi \cdot \sin \phi_1 - \cos \phi_1 \cdot \sin \phi = 2 \cot \alpha_o \cdot \sin \phi \cdot \sin \phi_1$$

$$(2.17) \quad \sin(\phi_1 - \phi) = 2 \cot \alpha_o \cdot \left[ \frac{1}{2} [\cos(\phi_1 - \phi) - \cos(\phi_1 + \phi)] \right]$$

$$(2.18) \quad \sin(\phi_1 - \phi) = \cot \alpha_o \cos(\phi_1 - \phi) - \cot \alpha_o \cos(\phi_1 + \phi)$$

quindi la (2.12) può risciversi come:

$$(2.19) \quad l^2 = \rho^2 + r^2 - 2 \cdot \rho \cdot r \cdot \cos \frac{1}{2} \cdot (\alpha + \phi_1 - \phi)$$

$$(2.20) \quad \rho^2 + r^2 - l^2 = 2 \cdot \rho \cdot r \cdot \cos \frac{1}{2} \cdot (\alpha + \phi_1 - \phi)$$

$$(2.21) \quad \rho^2 + r^2 - l^2 = 2 \cdot \rho \cdot r \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \cdot (1 + \cos(\alpha + \phi_1 - \phi))}$$

quadrando quest'ultima equazione (la (2.21)), risulta:

$$(2.22) \quad (\rho^2 + r^2 - l^2)^2 = 4 \cdot \rho^2 \cdot r^2 \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot (1 + \cos(\alpha + \phi_1 - \phi)) \right)$$

$$(2.23) \quad \rho^4 - 2 \cdot \rho^2 \cdot l^2 + (r^2 - l^2)^2 = 2 \cdot \rho^2 \cdot r^2 \cdot [\cos \alpha \cdot \cos(\phi_1 - \phi) - \sin \alpha \cdot \sin(\phi_1 - \phi)]$$

$$(2.24) \quad \rho^4 - 2 \cdot \rho^2 \cdot l^2 + (r^2 - l^2)^2 = 2 \cdot \rho^2 \cdot r^2 \cdot [\cos \alpha \cdot \cos(\phi_1 - \phi) - \sin \alpha \cdot [\cot \alpha_o \cdot \cos(\phi_1 - \phi) - \cot \alpha_o \cdot \cos(2\theta)]]$$

### Prima ipotesi semplificativa

Approfittando ora della libertà di scelta dei parametri, si procede a manipolare l'equazione (2.24) in modo tale che:  $\alpha = \alpha_o$ <sup>1</sup> dalla quale deriva:

$$(2.25) \quad \rho^4 - 2 \cdot \rho^2 \cdot l^2 + (r^2 - l^2)^2 = 2 \cdot \rho^2 \cdot r^2 \cdot [\cos \alpha_o \cdot \cos(\phi_1 - \phi) - \sin \alpha_o \cdot \left[ \frac{\cos \alpha_o}{\sin \alpha_o} \cdot \cos(\phi_1 - \phi) - \frac{\cos \alpha_o}{\sin \alpha_o} \cdot \cos(2\theta) \right]]$$

$$(2.26) \quad \rho^4 - 2 \cdot \rho^2 \cdot l^2 + (r^2 - l^2)^2 = 2 \cdot \rho^2 \cdot r^2 \cdot \cos \alpha_o \cdot \cos(2\theta)$$

$$(2.27) \quad \rho^4 - 2\rho^2 \cdot (l_o^2 - r^2 \cos \alpha_o) + (l_o^2 - r^2 \cos \alpha_o)^2 = 4\rho^2 r^2 \cdot \cos \alpha_o \cdot \cos \theta$$

<sup>1</sup>l'angolo  $\alpha_o$  viene indicato nelle condizione fondamentale di sterzo corretto

## Seconda ipotesi semplificativa

$l = l_0$  tale che renda un quadrato perfetto il primo membro della (2.27) un quadrato perfetto tale da soddisfare la condizione:

$$r^2 - l_0^2 = l_0^2 - r^2 \cdot \cos \alpha_o$$

si avrà così:

$$(2.28) \quad (\rho^2 - l_o^2 + r^2 \cos \alpha_o)^2 = 4\rho^2 r^2 \cdot \cos \alpha_o \cdot \cos \theta$$

$$(2.29) \quad \rho^2 - l_o^2 + r^2 \cos \alpha_o = \pm 2\rho \cdot r \cdot \cos \theta \cdot \sqrt{\cos \alpha_o}$$

sostituendo:

$$a = \pm \cdot r \cdot \sqrt{\cos \alpha_o}$$

ottenendo quindi:

$$(2.30) \quad \rho^2 + a^2 - \rho \cdot a \cdot \cos \theta = l_o^2$$

Si ottiene così il luogo dei punti percorso dal vertice  $P$  durante la rotazione delle manovelle  $\overline{OA}$  e  $\overline{OB}$ ; si è ottenuto come risultato un cerchio <sup>2</sup>di raggio  $l_o$  e di centro appartenente all'asse polare ad una distanza  $a$  dal polo  $O$ . saranno le lunghezze  $l_o$  ed  $a$  pari a:

$$(2.31) \quad l_o = r \cdot \cos \frac{\alpha_o}{2}$$

$$(2.32) \quad a = \pm \cdot r \cdot \sqrt{\cos \alpha_o}$$

Riassumendo, se  $\overline{PA_o} = \overline{P_oB_o} = l_o$  e come forma originaria del romboide quella determinata dall'angolo  $\alpha = \alpha_o$ , se le manovelle  $\overline{OA}$  ed  $\overline{OB}$  descrivono spazi angolari  $\phi$  e  $\phi_1$  che a due a due soddisfino l'equazione (2.3), il punto  $P$  descriverà un cerchio di centro  $G$  il quale sarà sulla diagonale  $\overline{OP_o}$  del romboide alla distanza  $a$  da  $O$  ed il raggio  $\overline{GP_o}$  avrà lunghezza  $l_o$ . Portandoci alla realtà del sistema il punto  $P$  potrà essere guidato nel suo percorso semplicemente articolando un'asta  $\overline{GP_o}$  dal centro  $G$  al vertice  $P$ , portando così la conta totale delle aste a 5. Si forma un sistema  $\overline{PBOAPG}$  composto di due quadrilateri articolati  $\overline{OAPGO}$  ed  $\overline{OBPGO}$ . Chiameremo questo sistema Bi-quadrilatero Romboideale (per brevità Bi-quadrilatero). Da notare che il parametro "r" resta per ora arbitrario e ad esso sono proporzionali le lunghezze assolute delle varie aste componenti il meccanismo.

<sup>2</sup>una circonferenza di centro e raggio qualsiasi è descritta dall'equazione polare  $\rho^2 + \rho(a \cos \theta + b \sin \theta) + c = 0$



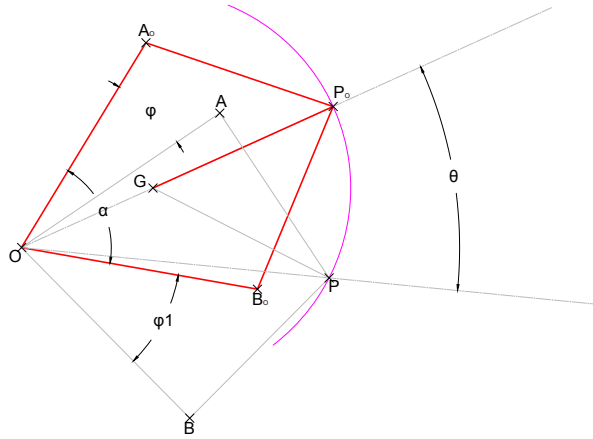


Figura 2.4: Bi-Quadrilatero romboide in rotazione

## 2.5 Dimostrazione della completa rivoluzione del meccanismo

Consideriamo solo uno dei quadrilateri,  $\overline{OAPGO}$  (lo stesso ragionamento può essere fatto in maniera speculare nel quadrilatero  $\overline{OBPGO}$ ) per il quale si ha:

$$\begin{cases} \overline{OA_o} = r \\ \overline{A_oP_o} = \overline{GP_o} = l_O = r \cos \frac{\alpha_o}{2} \\ \overline{OG} = a = r \sqrt{\cos \alpha_o} \end{cases}$$

Dove l'angolo  $\alpha_o$  è compreso tra  $0^\circ$  e  $90^\circ$ ,

$$(2.33) \quad r \sqrt{\cos \alpha_o} = r \sqrt{\cos^2 \left( \frac{\alpha_o}{2} \right) - \sin^2 \left( \frac{\alpha_o}{2} \right)}$$

Dunque si avrà sempre:

$$(2.34) \quad r \sqrt{\cos \alpha_o} < r \cos \left( \frac{\alpha_o}{2} \right) < r$$

ossia:

$$(2.35) \quad \overline{OG} < \overline{A_oP_o} = \overline{GP_o} < \overline{OA_o}$$

In tutti i casi possibili dunque  $\overline{OG}$  sarà il lato più piccolo ed  $\overline{OA_o}$  il più grande del quadrilatero considerato. Poniamo le due Grandezze  $V$  e  $U$  tali che:

$$\begin{cases} V = \overline{OA_o} + \overline{OG} \\ U = \overline{A_oP_o} + \overline{GP_o} \end{cases}$$

$$\begin{cases} V = r + r\sqrt{\cos\alpha_o} \\ U = 2r \cos\left(\frac{\alpha_o}{2}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} V = r \cdot (1 + \sqrt{\cos\alpha_o}) \\ U = 2r \cos\left(\frac{\alpha_o}{2}\right) \end{cases}$$

quadrando prima e sottraendo poi l'equazione (??) sopra si ottiene:

$$\begin{cases} V^2 = r^2 \cdot (1 + \sqrt{\cos\alpha_o})^2 \\ U^2 = 4r^2 \cos^2\left(\frac{\alpha_o}{2}\right) \end{cases}$$

$$(2.36) \quad U^2 - V^2 = 4r^2 \cos^2\left(\frac{\alpha_o}{2}\right) - r^2 \cdot (1 + \sqrt{\cos\alpha_o})^2$$

$$(2.37) \quad U^2 - V^2 = 4r^2 \cos^2\left(\frac{\alpha_o}{2}\right) - r^2 \cdot (1 + 2\sqrt{\cos\alpha_o} + \cos\alpha_o)$$

$$(2.38) \quad U^2 - V^2 = 2r^2 \cos^2\left(\frac{\alpha_o}{2}\right) - 2r^2 \cdot \sqrt{\cos\alpha_o}$$

$$(2.39) \quad U^2 - V^2 = r^2(1 - \sqrt{\cos\alpha_o})^2$$

Il secondo membro risulta sempre positivo, ciò implica che la grandezza numerica di  $V$  è sempre minore della grandezza  $U$ . Si avrà in tutti i casi:

$$(2.40) \quad \overline{OA_o} + \overline{OG} < \overline{A_oP_o} + \overline{GP_o}$$

In conclusione si può dire che se in un quadrilatero articolato la somma delle lunghezze dell'asta più grande e più piccola, è minore della somma della lunghezza delle due aste intermedie il quadrilatero è a rivoluzione completa quando l'asta fissa al telaio è quella di lunghezza minore<sup>3</sup>.

## 2.6 Configurazione del Bi-Quadrilatero

Dai risultati precedenti risulta incerto l'effettivo posizionamento del perno dato che la sua distanza "a" dal polo  $O$  assume due valori identici ma di segno opposto, questi due risultati sono entrambi possibili ed applicabili ad un caso reale, infatti è possibile passare dall'una all'altra configurazione semplicemente ruotando di  $180^\circ$  la manovella  $\overline{GP}$ :

---

<sup>3</sup>regola di Grashof

- $a_{(min)}$  è il telaio: il quadrilatero è a doppia manovella
- $a_{(min)}$  è la biella: il quadrilatero è a doppio bilanciato
- $a_{(min)}$  è una delle due aste collegate a telaio: il quadrilatero ha una manovella e un bilanciato, con  $a_{(min)}$  come manovella

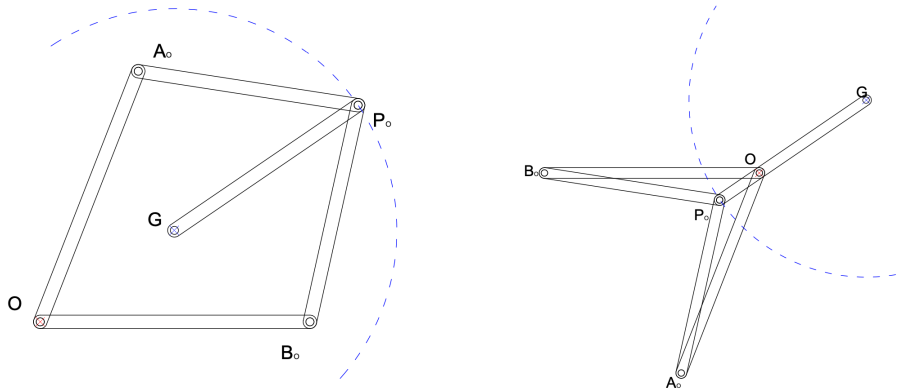


Figura 2.5: Possibili disposizioni in marcia dritta del Bi-Quadrilatero

Nella applicazioni pratiche vanno considerati eventuali ingombri, rappresentati anche dalle stesse aste, i quali impediscono una completa rivoluzione intorno del manovellismo come dimostrato al paragrafo precedente. La configurazione che da qui in poi prenderemo come riferimento sarà rappresentata dalla figura destra sovrastante, cioè con  $a > 0$ ; seguendo il ragionamento del Professore perché nel caso contrario con  $a < 0$  gli angoli  $\widehat{OAP}$  ed  $\widehat{OBP}$  risultano sempre piccoli, di conseguenza rendendo malsicura la trasmissione del moto fra le manovelle  $\overline{OA_0}$  e  $\overline{OB_0}$ .

## 2.7 Studio cinematico di posizione del Bi-Quadrilatero

il meccanismo del Bi-Quadrilatero è stato progettato seguendo gli studi fatti del Professor E. Bernardi e riassunti nei precedenti paragrafi precedenti. È quindi interessante procedere ad un breve studio del sistema per verificarne il funzionamento ed i movimenti delle componenti, avendo sempre come obiettivo l'equazione (2.5) questa volta però prendendo come organo motore la manovella  $\overline{GP_0}$

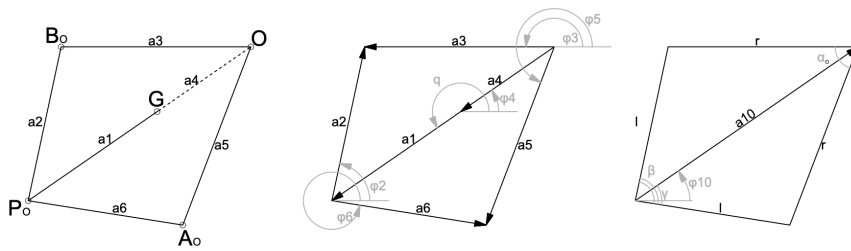


Figura 2.6: Poligono di chiusura del Bi-Quadrilatero articolato

vado a trascrivere l'equazione di chiusura:

$$(2.41) \begin{cases} z_1 + z_2 - z_3 - z_4 = 0 \\ z_1 + z_6 - z_5 - z_4 = 0 \end{cases}$$

svilupandolo si ottiene:

$$(2.42) \quad \begin{cases} a_1 \cdot \begin{pmatrix} \cos q \\ \sin q \end{pmatrix} + a_2 \cdot \begin{pmatrix} \cos \phi_2 \\ \sin \phi_2 \end{pmatrix} - a_3 \cdot \begin{pmatrix} \cos \phi_3 \\ \sin \phi_3 \end{pmatrix} - a_4 \cdot \begin{pmatrix} \cos \phi_6 \\ \sin \phi_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ a_1 \cdot \begin{pmatrix} \cos q \\ \sin q \end{pmatrix} + a_6 \cdot \begin{pmatrix} \cos \phi_5 \\ \sin \phi_5 \end{pmatrix} - a_5 \cdot \begin{pmatrix} \cos \phi_4 \\ \sin \phi_4 \end{pmatrix} - a_4 \cdot \begin{pmatrix} \cos \phi_6 \\ \sin \phi_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$(2.43) \quad \begin{cases} l \cdot \begin{pmatrix} \cos q \\ \sin q \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} \cos \phi_2 \\ \sin \phi_2 \end{pmatrix} - r \cdot \begin{pmatrix} \cos \phi_3 \\ \sin \phi_3 \end{pmatrix} - a \cdot \begin{pmatrix} \cos \phi_4 \\ \sin \phi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ l \cdot \begin{pmatrix} \cos q \\ \sin q \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} \cos \phi_6 \\ \sin \phi_6 \end{pmatrix} - r \cdot \begin{pmatrix} \cos \phi_5 \\ \sin \phi_5 \end{pmatrix} - a \cdot \begin{pmatrix} \cos \phi_4 \\ \sin \phi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

le incognite del sistema saranno gli angoli  $\phi_2, \phi_3, \phi_5, \phi_6$ . Si procede a risolvere le quattro equazioni non lineari. Come prima cosa vado a stabilire la lunghezza del segmento  $a_10$  ed il rispettivo angolo  $\phi_{10}$ :

$$(2.44) \quad a_{10} = \sqrt{l_o^2 + a^2 - 2 \cdot l_o \cdot a \cdot \cos(q - \phi_4)}$$

$$(2.45) \quad \phi_{10} = \arctan \frac{a \cos \phi_4 - l_o \cos q}{a \cos \phi_4 - l_o \sin q}$$

i due angoli  $\beta$  e  $\gamma$  visibili nella figura 2.8 si ottengono invece dalle rispettive formule:

$$(2.46) \quad \beta = \arccos \frac{a_{10}^2 + l_o^2 - r^2}{2 \cdot a_{10} \cdot l_o}$$

$$(2.47) \quad \gamma = \arccos \frac{a_{10}^2 + l_o^2 - r^2}{2 \cdot a_{10} \cdot l_o}$$

da notare che i due angoli risultano uguali, infatti, come si può anche vedere dalla figura 2.8 essi sono tra la bisettrice  $a_{10}$  ed i lati del rombo, quindi non potranno che essere uguali per geometria.

Gli angoli incogniti  $\phi_2$  e  $\phi_6$  risultano:

$$(2.48) \quad \phi_2 = \phi_{10} + \beta$$

$$(2.49) \quad \phi_6 = \phi_{10} - \gamma$$

non resta che da ricavare gli angoli  $\phi_3$  e  $\phi_5$ :

$$(2.50) \quad \begin{cases} a_1 \cos q + a_2 \cos \phi_2 - a_3 \cos \phi_3 - a_4 \cos \phi_4 = 0 \\ a_1 \cos q + a_6 \cos \phi_6 - a_4 \cos \phi_4 - a_5 \cos \phi_5 = 0 \end{cases}$$

$$(2.51) \begin{cases} a_3 \cos \phi_3 = a_1 \cos q + a_2 \cos \phi_2 - a_4 \cos \phi_4 \\ a_5 \cos \phi_5 = a_1 \cos q + a_6 \cos \phi_6 - a_4 \cos \phi_4 \end{cases}$$

$$(2.52) \begin{cases} \phi_3 = \arccos \left( \frac{1}{r} \cdot (l(\cos q + \cos \phi_2) - a \cos \phi_4) \right) \\ \phi_5 = \arccos \left( \frac{1}{r} \cdot (l(\cos q + \cos \phi_6) - a \cos \phi_4) \right) \end{cases}$$

L'analisi cinematica di posizione del meccanismo bi-quadrilatero è completata. Nell'appendice A viene fatta una verifica della formula (2.5) considerando una sterzata verso destra.

## 2.8 Collegamento tra gli assi verticali di sterzo e le manovelle del Bi-Quadrilatero e le possibili disposizioni

Come detto in precedenza le manovelle  $\overline{OA_o}$  e  $\overline{OB_o}$  ruotano contemporaneamente attorno ad  $O$  rispettando l'equazione (2.5), per trasmettere il movimento ai fusi delle ruote verranno collegati direttamente o tramite parallelogrammi articolati.

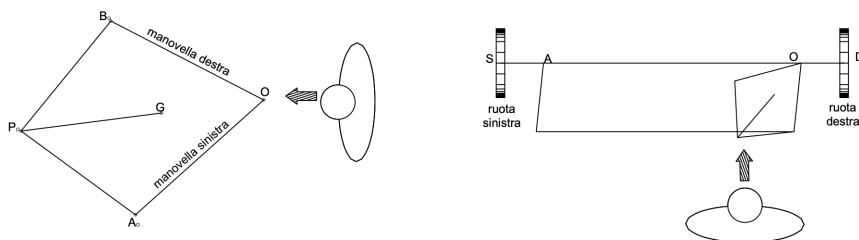


Figura 2.7

Chiamiamo ruota destra quella posizionata alla destra del guidatore, intenderemo invece manovella di destra del bi-quadrilatero quella alla destra di una persona posta in piedi sopra il centro  $O$  girata verso  $P_o$ . Si collegano le manovelle destra e sinistra del Bi-Quadrilatero con rispettivamente i fusi delle ruote destra e sinistra.

il ragionamento alla base del collegamento è supportato dalla figura 2.7, supponiamo sempre una svolta a destra, il punto di incrocio tra gli assi geometriche delle ruote cade a destra del veicolo, la ruota destra girerà di più rispetto a quella sinistra, per le manovelle invece seguendo il sistema di coordinate polari la rotazione oraria implica angoli positivi  $\phi$  e  $\phi_1$  devono rispettare la (2.5) la quale da un risultato costante positivo, dunque  $\phi < \phi_1$ , (lo stesso può essere fatto per una svolta a sinistra ricordando però l'inversione di segno dovuta al riferimento preso con le coordinate polari) dimostrando quanto scritto sopra.

### 2.8.1 Disposizioni dello sterzo

Riprendendo quanto scritto sopra il collegamento tra manovelle e fusi viene fatto tramite un collegamento diretto o con parallelogrammi articolati. La disposizione più semplice possibile con questo sterzo consiste nel porre il vertice  $O$  in uno degli assi verticali di sterzo, poniamo il destro, quindi collegando direttamente la manovella destra  $\overline{OB_o}$  al fuso della ruota destra, rendendo l'angolo  $\widehat{B_oOD}$  fisso, poi servirsi di una diade RRR che faccia da collegamento tra la manovella sinistra  $\overline{OA_o}$  e l'asse di sterzo verticale sinistro, il fuso della ruota sinistra sarà rigidamente collegato alla manovella addiacente al fuso, rendendo l'angolo  $\widehat{SAE}$  costante, in totale le aste articolate che si possono contare saranno sette.

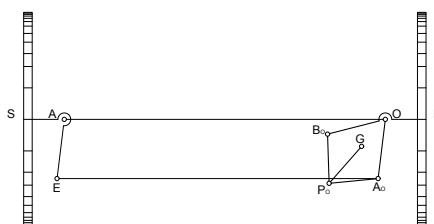


Figura 2.8: Disposizione applicata alla vettura Bernardi esposta al museo delle Macchine

La disposizione sopra descritta rappresenta quella applicata alla vettura Bernardi in mostra al museo delle macchine "Enrico Bernardi" il dipartimento di ingegneria industriale a Padova. Se ne possono contare svariate disposizioni dello sterzo partendo sempre da sette aste, infatti grazie all'applicazione dei parallelogrammi è possibile porre il Bi-Quadrilatero pressoché ovunque, dalla figura 2.9 se ne possono vedere alcune.

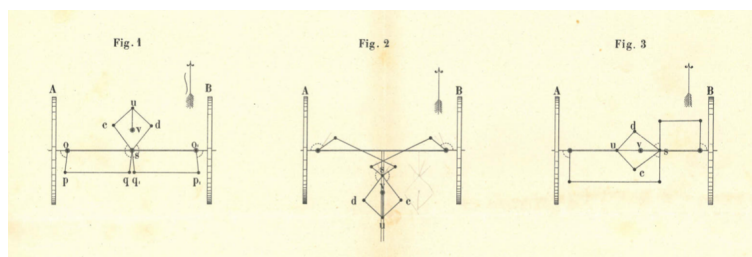


Figura 2.9: Possibili disposizioni dello sterzo Bernardi

## 2.9 studio cinematico di posizione dello sterzo Bernardi

Prendiamo la disposizione dello sterzo descritta al paragrafo appena precedente 2.8.1, avvalendoci dello studio cinematico fatto per il Bi-Quadrilatero 2.7, procediamo nello studio del parallelogramma e dei punti di manovella.

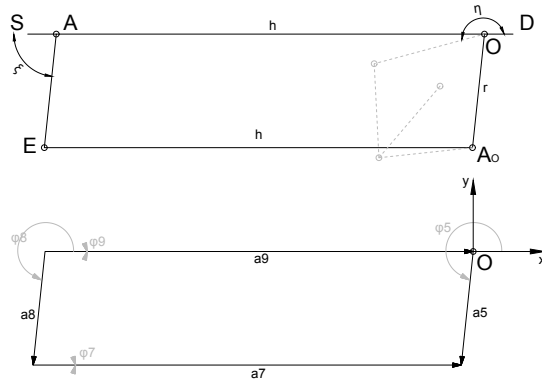


Figura 2.10: poligono di chiusura del parallelogramma articolato di collegamento fuso-manovella

Per la geometria del parallelogramma i lati opposti sono uguali tra loro, dunque  $\overline{AE} = \overline{OA_o} = r$  e  $\overline{AO} = \overline{EA_o} = m$ , visto che il lato  $\overline{AO}$  corrisponde al telaio l'angolo di riferimento è noto, ciò restringe le incognite agli angoli  $\phi_7$  e  $\phi_8$ .

$$(2.53) \quad z_5 - z_7 - z_8 + z_9 = 0$$

$$(2.54) \quad a_5 \cdot \begin{pmatrix} \cos \phi_5 \\ \sin \phi_5 \end{pmatrix} - a_7 \cdot \begin{pmatrix} \cos \phi_7 \\ \sin \phi_7 \end{pmatrix} - a_8 \cdot \begin{pmatrix} \cos \phi_8 \\ \sin \phi_8 \end{pmatrix} + a_9 \cdot \begin{pmatrix} \cos \phi_9 \\ \sin \phi_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

il sistema trova subito una soluzione, il lato  $\overline{A_oE}$  date le caratteristiche geometriche del parallelogramma è costretta a rimanere sempre parallelo all'asse del telaio  $\overline{OA}$  quindi gli angoli che vanno a caratterizzare i due lati risultano uguali o discordi di  $180^\circ$ , ricavando così una delle due incognite. I due addendi contenenti gli angoli  $\phi_7$  e  $\phi_9$  si andranno ad eliminare, esplicitando l'uguaglianza tra gli angoli  $\phi_5$  e  $\phi_8$ .

$$(2.55) \quad r \cdot \begin{pmatrix} \cos \phi_5 \\ \sin \phi_5 \end{pmatrix} - r \cdot \begin{pmatrix} \cos \phi_8 \\ \sin \phi_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(2.56) \quad \phi_8 = \phi_5$$

Concluso lo studio del parallelogramma ci si può concentrare sul movimento dei fusi delle ruote,  $\overline{AS}$  e  $\overline{OD}$ . I quali assumono una lunghezza arbitraria e solitamente non molto elevata, gli angoli che li descrivono invece differiranno di un certo grado ma seguiranno pari passo le manovelle di riferimento; manovella destra  $\overline{OB_o}$  per il fuso della ruota destra  $\overline{OD}$  e manovella sinistra  $\overline{OA_o}$  per il fuso della ruota sinistra  $\overline{SA}$ , appoggiandoci alla figura 2.10, prendiamo un sistema di coordinate cartesiane con origine in  $O$  proiezione dell'asse verticale destro sul piano di rotolamento, possiamo andare a descrivere le coordinate dei fusi tramite le equazioni:

$$(2.57) \begin{pmatrix} x_D \\ y_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_o \\ y_o \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} \cos(\phi_3 - \eta) \\ \sin(\phi_3 - \eta) \end{pmatrix}$$

$$(2.58) \begin{pmatrix} x_D \\ y_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} \cos(\phi_3 - \eta) \\ \sin(\phi_3 - \eta) \end{pmatrix}$$

$$(2.59) \begin{pmatrix} x_S \\ y_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} \cos(\phi_5 - \xi) \\ \sin(\phi_5 - \xi) \end{pmatrix}$$

$$(2.60) \begin{pmatrix} x_S \\ y_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h \\ 0 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} \cos(\phi_5 - \xi) \\ \sin(\phi_5 - \xi) \end{pmatrix}$$

Lo studio cinematico può dirsi concluso, può però essere fatto un ulteriore passaggio verificando dove i prolungamenti dei fusi delle ruote si intersecano confermando o meno la correttezza dello sterzo.

Si vanno a definire le tre rette date rispettivamente dalle equazioni:

- dal prolungamento degli assi delle ruote posteriori la quale è riassunta dall'equazione

$$(2.61) y = -m$$

- dal prolungamento del fuso della ruota destra

$$(2.62) \frac{y - y_o}{y_o - y_D} = \frac{x - x_o}{x_o - x_D}$$

- dal prolungamento del fuso della ruota sinistra

$$(2.63) \frac{y - y_A}{y_A - y_S} = \frac{x - x_A}{x_A - x_S}$$

implementando le precedenti equazioni per ogni rotazione della manovella  $\overline{GP_0}$  è possibile ricavare il punto di intersezione delle rette, nell'appendice A si possono vedere i risultati per una svolta a destra.

## 2.10 Il manubrio

Rappresenta il mezzo con cui il pilota riesce ad agire sullo sterzo, nel *Sistema pratico di semplici aste articolate che risolve il problema dello sterzo corretto degli automobili* E. Bernardi espone che: *Nei carrozzoni a tre ruote [...] il manubrio di direzione è applicato al sommo di un albero che si eleva verticalmente sopra G (vertice fisso del bi-quadrilatero) ed alla cui estremità inferiore è fissata la manovella  $\overline{GP_0}$ .* Avendo sempre come riferimento la disposizione descritta in ?? il volante sarà posizionato alla destra della seduta lasciando completamente libere le gambe del pilota. nel suo opuscolo il professore non esclude un altro metodo di collegamento tra volante e sterzo quale un quadrilatero opportunamente posizionato, inoltre nel caso la situazione lo renda conveniente consiglia l'utilizzo di de-moltiplicatori.



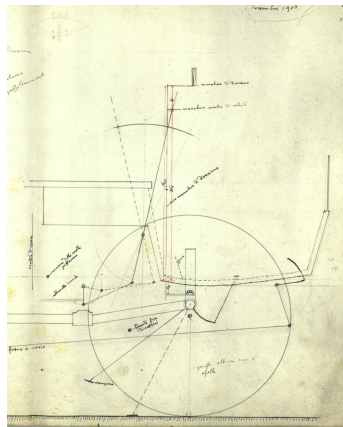


Figura 2.11: Il manubrio della vettura bernardi

## 2.11 Il limitatore di sterzata

Avviene sempre che la presenza del telaio e della carrozzeria limitano l'angolo di sterzata delle ruote direttrici, si rende necessario impedire che il guidatore girando esageratamente il manubrio conduca le ruote o qualche organo del meccanismo di sterzo ad urtare e sfregare contro parti del veicolo.

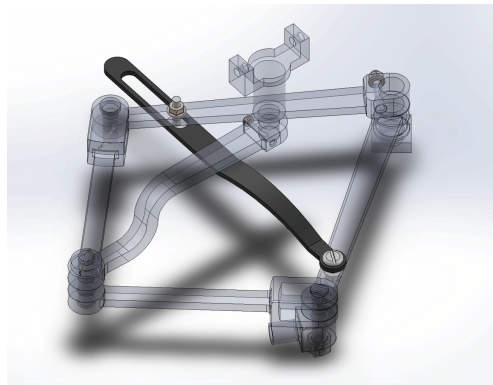
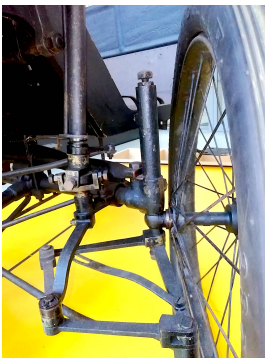


Figura 2.12: Il limitatore di sterzo nella vettura bernardi

Fra i diversi mezzi ai quali si può ricorrere per raggiungere questo scopo, uno semplice e pratico è rappresentato dalla seguente configurazione:

- Alle manovelle  $\overline{OA_o}$  ed  $\overline{OB_o}$  del bi-quadrilatero si fissano due bottoni  $u$  e  $v$  ad eguale distanza da  $O$
- si prenda un'asta di  $\overline{UQ}$  articolata ad un estremo e con un'asola nell'altra di una lunghezza tale da impedire qualunque sfregamento, e la si colleghi ai due bottoni  $u$  all'estremo articolato e  $v$  nell'asola
- avviene così che mentre le manovelle si aprono durante la sterzata, il bottone  $v$  scorre nell'asola e raggiunto l'estremo impedisce la loro ulteriore apertura così facendo lo sterzo resta limitato, ugualmente a destra come a sinistra.

## 2.12 Parametri costruttivi

parlando del progetto esecutivo si può dire qualunque ingegnere meccanico può certamente combinarlo e qualunque costruttore di macchine comporlo ci si limita a parlare a proposito delle seguenti avvertenze generali:

- Il perno fisso  $G$  deve trovarsi tutto al di sopra o tutto al di sotto dei piani nei quali si muovono le manovelle  $\overline{OA_o}$  ed  $\overline{OB_o}$ , se così non fosse la sua presenza tra di esse ne limiterebbe di troppo il movimento
- Le spine delle articolazioni non possono assolutamente uscire dalle proprie sedi, è consigliato l'uso di un dado trattenuto da una coppiglia spaccata esterna al dado medesimo
- I fusi delle ruote e le manovelle che si uniscono agli assi di sterzo devono essere fissati in modo robusto ancora meglio se composti da un unico pezzo
- È assolutamente necessario che le misure di progetto siano pienamente rispettate, la forma originaria del bi-quadrilatero deve corrispondere alla marcia dritta del veicolo, si avrà riguardo che i parallelogrammi articolati che entrano nel sistema siano rettangoli
- La lunghezza arbitraria di  $r$  va scelta piuttosto grande, ciò per rendere meno sensibili gli effetti nocivi di giochi nelle articolazioni del sistema. In generale sarà bene prenderla come  $1/5$  della distanza fra gli assi di sterzo  $h$ .
- nelle vetture a tre ruote costruite dalla "Società Italiana Bernardi di Padova" il rapporto fra lunghezza e larghezza è piuttosto grande; per la precisione  $\frac{h}{m} = 0,77$

## 2.13 accenno al moderno impianto sterzante

### 2.13.1 Componenti meccaniche interne

Gli impianti sterzanti adottati oggi nelle vetture vedono alcune similitudini con il sistema Ackermann-Jeantaud. Questo impianto è costruito da diversi elementi meccanici che vanno a garantire il cambio di traiettoria dell'auto, quali tiranti, scatola guida, piantone e volante. Partendo dall'elemento direttamente a contatto con il guidatore si ha: il volante al quale viene impressa una rotazione in base alla direzione da prendere; successivamente si arriva al piantone dello sterzo il quale fa da collegamento tra volante e scatola dello sterzo trasferendo la coppia dal primo al secondo. Successivamente si incontra la scatola dello sterzo, qui avviene il mutamento del moto rotatorio del volante a traslatorio, solitamente grazie all'accoppiamento di un sistema pignone cremagliera, questa sezione è rappresentata da un insieme di aste e giunti che trasferiscono le forze alle ruote. All'impianto si va sommare il sistema di servosterzo il quale va a diminuire lo sforzo del guidatore.

### 2.13.2 Breve accenno al servosterzo

Il servosterzo utilizza una sorgente di energia esterna (non impressa dal pilota) la cui funzione è quella di ridurre la forza necessaria da imprimere al volante, tale sistema si fa apprezzare soprattutto nelle manovre dove gli pneumatici generano il maggior attrito col terreno. La stragrande maggioranza dei sistemi di servosterzo è coperta dal : servosterzo elettrico ed il servosterzo idraulico.

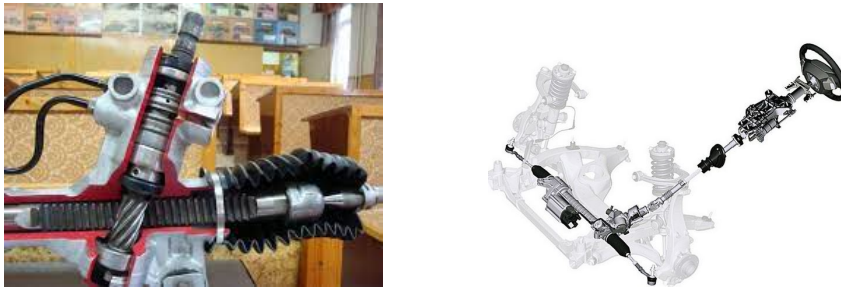


Figura 2.13: rispettivamente alla destra un tagli della scatola dello sterzo, a sinistra l'intero impianto sterzante

### **Servosterzo elettrico**

Quando si parla di servosterzo elettrico si intende un dispositivo che utilizza un motore elettrico collegato al piantone dello sterzo o addiacente ad esso, gestito da una centralina grazie alla quale viene assistita l'azione della sterzata tramite le informazioni rilevate da sensori.

Adottando questa soluzione si ottiene un maggior risparmio di energia rispetto a quello idraulico, in una combinazione di buon rendimento del motore elettrico e la possibilità di essere disattivato quando non c'è la necessità di svoltare.

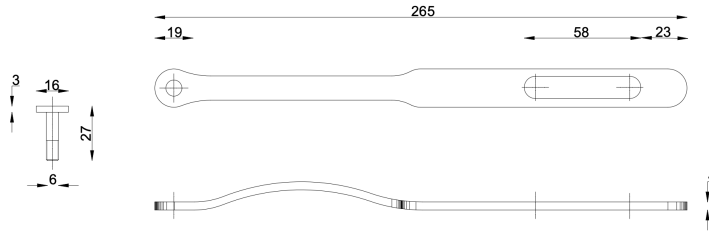
### **Sistema idroguida**

Si compone di un serbatoio dell'olio, una pompa (azionata direttamente dal motore termico o da un motorino elettrico), un distributore, un tubo di recupero (usato durante la direzione rettilinea), un dispositivo di comando del distributore, un cilindro operatore al cui interno scorre su uno stelo uno stantuffo che divide il cilindro in due camere ed una valvola limitatrice di pressione al fine corsa dello sterzo. Quando si effettua una sterzata, si aziona il distributore, questo va a comandare l'apertura delle luci, che attraverso un tubicino conducono l'olio in una delle due camere del cilindro operatore.

Un servosterzo idraulico molto spesso implica un maggior feeling di guida rispetto a quello elettrico, tuttavia il sistema ha un grande peso ed implica un costante assorbimento di energia.

# Appendice A

Dalle rilevazioni fatte sulla vettura Bernardi per integrarle ai disegni tecnici di riferimento, sono state misurate le seguenti grandezze per quanto riguarda il limitatore di sterzata:



Questo ci porta a calcolare il massimo angolo possibile tra le manovelle  $\overline{OA_0}$  ed  $\overline{OB_0}$ . Rendendo possibile risalire al massimo angolo di manovellismo di  $\overline{GP_0}$  (la rotazione limite del volante). Contando l'ingombro dovuto al perno che durante la sterzata scorre lungo l'asola, si ha un ampiezza massima di apertura  $a_{MAX} = 228mm$ , dunque:

$$(A.1) \quad \alpha_{MAX} = \arccos\left(\frac{l_i^2 + l_i^2 - a_{MAX}^2}{2 \cdot l_i \cdot l_i}\right)$$

$$(A.2) \quad l^2 = a_{10}^2 + r^2 - 2 \cdot a_{10} \cdot r \cdot \cos\left(\frac{\alpha_{MAX}}{2}\right)$$

$$(A.3) \quad a_{10}^2 - 2 \cdot a_{10} \cdot r \cdot \cos\left(\frac{\alpha_{MAX}}{2}\right) + (r^2 - l^2) = 0$$

risolvendo l'equazione di secondo grado considero il risultato maggiore

$$(A.4) \quad \sigma = q_{MAX} - \phi_4$$

$$(A.5) \quad \sigma = \arccos\left(\frac{l^2 + a^2 - a_{10}^2}{2 \cdot l \cdot a}\right)$$

$$(A.6) \quad q_{MAX} = \phi_4 + \sigma$$

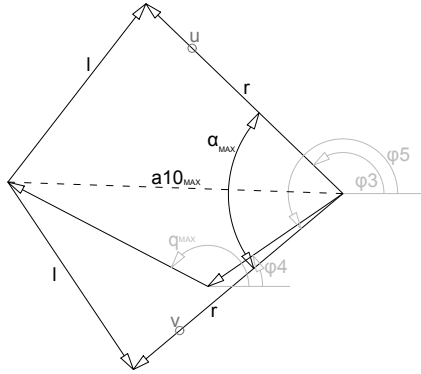


Figura A.1

r	200	mm
l	164.9	mm
a	119.9	mm
uv <sub>MAX</sub>	228	mm
l <sub>1</sub>	175.5	mm
α <sub>0</sub>	68.9433	°
α <sub>MAX</sub>	81.0188	°
a <sub>10_max</sub>	253.6	mm
q <sub>i</sub>	214.4716	°
q <sub>MAX</sub>	159.5885	°
q	54.8831	°

Tabella A.1: Didascalia 2.

Il risultato trovato rappresenta l'angolo limite in una direzione di svolta, quindi la manovella  $\overline{GP_0}$  potrà oscillare tra  $\pm 54.8831$ . Dai risultati precedenti si trovano i raggi minimi di sterzata pari a:

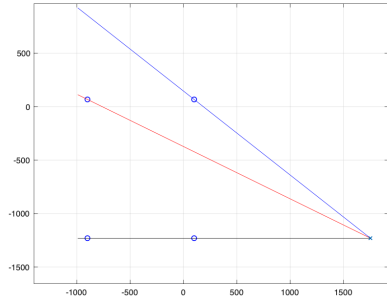


Figura A.2: Prolungamenti degli assi di sterzo incrociati in un punto

h		1	m
m	$\frac{h}{0.77}$	1.2987	m
φ	$ \phi_{3i} - \phi_3 $	26.857	m
φ <sub>1</sub>	$ \phi_{5i} - \phi_5 $	38.161	m
r <sub>sx</sub>	$\frac{m}{\sin(\phi)}$	2.953	m
r <sub>dx</sub>	$\frac{m}{\sin(\phi_1)}$	2.102	m

Tabella A.2: Didascalia 2.

Considerando per brevità solo la svolta verso destra, è interessante vedere numericamente la correttezza dello sterzo, verificando come prima cosa l'equazione fondamentale per lo sterzo corretto (A.7) e successivamente anche se può risultare ridondante, osservare l'intersezione tra gli assi dei fusi delle ruote:

Implementando lo studio cinematico del Bi-Quadrilatero con un ciclo for in MatLab si ottengono i seguenti risultati:

$\phi_{3i}$	$\phi_3$	$\phi_{5i}$	$\phi_5$	$\phi_1$	$\phi$	$2 \cdot \cot(\alpha_0)$	$\cot(\phi) - \cot(\phi_1)$
121.1215	212.8911	180	248.9433	58.8785	36.0522	0.7700	0.77002
126.2328	215.3020	180	248.9433	53.7672	33.6413	0.7700	0.7700
131.2618	217.6839	180	248.9433	48.7382	31.2594	0.7700	0.7700
136.2023	220.0617	180	248.9433	43.7977	28.8816	0.7700	0.7700
141.0468	222.4578	180	248.9433	38.9532	26.4855	0.7700	0.7700
145.7871	224.8930	180	248.9433	34.2129	24.0503	0.7700	0.7699
150.4145	227.3870	180	248.9433	29.5855	21.5563	0.7700	0.7700
154.9196	229.9582	180	248.9433	25.0804	18.9851	0.7700	0.7700
159.2932	232.6240	180	248.9433	20.7068	16.3193	0.7700	0.7700
163.5262	235.4005	180	248.9433	16.4738	13.5428	0.7700	0.7700
167.6107	238.3022	180	248.9433	12.3893	10.6411	0.7700	0.7700
171.5398	241.3417	180	248.9433	8.4602	7.6016	0.7700	0.7700
175.3086	244.5296	180	248.9433	4.6914	4.4137	0.7700	0.7699
178.9147	247.8736	180	248.9433	1.0853	1.0697	0.7700	0.7699

(A.7)  $\cot\phi - \cot\phi_1 = 2 \cdot \cot\alpha_0$

come si può vedere la differenza tra i membri dell'equazione (A.7) sono infinitesime ed un eventuale errore può essere ricondotto ad approssimazioni del calcolatore. Proseguendo poi con una successiva implementazione si calcola in che punto il prolungamento degli assi dei fusi delle ruote direttrici (anteriori) intersecano la retta passante per i fusi delle ruote posteriori, si ottengono i seguenti risultati:

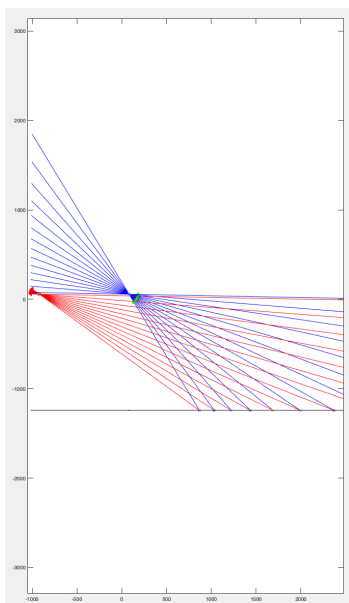


Figura A.3: Prolungamenti degli assi di sterzo incrociati in un punto

$X_{dx}$	$X_{sx}$	$ X_{dx} - X_{sx} $
866.4513	866.4513	-3.4106e-13
1.0340e+03	1.0340e+03	1.5916e-12
1.2218e+03	1.2218e+03	6.8212e-13
1.4367e+03	1.4367e+03	1.8190e-12
1.6888e+03	1.6888e+03	6.8212e-13
1.9924e+03	1.9924e+03	1.1141e-11
2.3698e+03	2.3698e+03	-9.0949e-13
2.8573e+03	2.8573e+03	6.3665e-12
3.5180e+03	3.5180e+03	7.2760e-12
4.4741e+03	4.4741e+03	5.4570e-12
5.9945e+03	5.9945e+03	4.5475e-12
8.8136e+03	8.8136e+03	4.7294e-11
1.5908e+04	1.5908e+04	6.4392e-10
6.8635e+04	6.8635e+04	1.0739e-08
...	...	....

Tabella A.3: Didascalia 2.

# Conclusioni

Lo sterzo ideato dal Professor Bernardi nel 1898 rappresenta sicuramente un'innovazione per quanto riguarda l'ambito automobilistico, il primo sterzo a potersi definire corretto e applicabile ad una vettura reale e commercializzata. Rappresenta una grande soluzione per l'epoca come per oggi nel comandare la direzione delle vetture.

Il mercato automobilistico ha fatto passi da gigante dalle prime automobili (vettura Bernardi compresa), andando ad aumentare sempre più potenza, velocità e dimensioni delle vetture. La soluzione Bernardi fu surclassata dalla soluzione Akerman la quale con una buona ottimizzazione (come già riportato) permette di avere un buon compromesso fino a  $35^\circ$  di sterzata, i quali permettono un'ottima svolta, in più è una soluzione semplice quindi preferibile alle altre.

Ciò non toglie nulla al lavoro svolto dal Professor E. Bernardi che con i suoi studi ha dato un grande contributo al settore automobilistico, lui che ad un problema al quale si era trovata una risposta accettabile ma con notevoli limitazioni ha dato una soluzione sempre corretta.

# Bibliografia

- [1] Enrico Bernardi (1904), *Sistema pratico di semplici aste articolate che risolve il problema dello sterzo corretto per automobili*, officine grafiche di C. Ferrari, Venezia. pages
- [2] Enrico Bernardi (1905), *Soluzione del problema generale dello sterzo corretto con sole aste articolate per un sistema rotolante comunque complesso*, officine grafiche di C. Ferrari, Venezia. pages