UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Matematica
"Tullio Levi-Civita"

Corso di Laurea in Matematica

Giochi Differenziali Stocastici Linear-State

Relatore: Prof. Luca Grosset
Laureanda: Nidia Favaretto
Matricola: 1096785

Data Sessione di Laurea: 20 Aprile 2018

Anno Accademico 2017/2018

Alla mia famiglia,
che mi ha sempre sostenuta,
e senza la quale non avrei raggiunto
questo importante risultato.

Introduzione

Alla base di questo studio vi è l'analisi dei giochi differenziali linear-state in ambito deterministico e stocastico.
Possiamo pensare ad un gioco matematico, secondo la Teoria dei Giochi, come quell'insieme di decisioni individuali che un soggetto, chiamato giocatore, deve prendere in situazioni di conflitto o interazione strategica con altri soggetti, e finalizzate ad ottenere il massimo guadagno, tali per cui le decisioni di ciascun giocatore possano influire sui risultati degli altri. I giochi si differenziano per diversi aspetti, che possono variare dal tipo di interazioni presenti tra i giocatori, al tempo in cui viene analizzato il gioco. In particolare un gioco può essere cooperativo quando gli interessi dei giocatori non sono in opposizione diretta tra loro, ma i giocatori perseguono un fine comune e alcuni di essi possono associarsi per migliorare la propria utilità tramite degli accordi vincolanti. Invece un gioco è non-cooperativo o competitivo se i giocatori non possono stipulare accordi vincolanti, ma agiscono "tutti contro tutti", sempre con la finalità di massimizzare il proprio guadagno, detto anche "pay-off". Un gioco inoltre si può analizzare a tempo discreto o continuo. Qui ci occuperemo di giochi che avvengono a tempo continuo, detti differenziali, e in tal caso si possono descrivere tramite la formulazione di un problema di controllo ottimo, in cui il funzionale obiettivo rappresenta il guadagno che ogni giocatore deve cercare di ottimizzare; la variabile di stato, che evolve secondo un'equazione differenziale detta equazione del moto, descrive l'insieme di scelte e azioni effettuate dai singoli giocatori; il controllo ottimo, che ci permette di individuare l'Equilibrio di Nash, rappresenta la soluzione del gioco.
In questa tesi ci occuperemo di giochi differenziali non-cooperativi, e per semplificare la trattazione rendendola più chiara ed esaustiva considereremo un ambiente in cui interagiscano solamente due giocatori. Inoltre ci occuperemo di giochi che appartengono ad una particolare classe, costituita dai giochi differenziali linear-state, caratterizzati dall'avere il funzionale obiettivo e l'equazione del moto lineari rispetto alla variabile di stato. Vedremo che questi giochi, in una situazione deterministica, rivestono un ruolo molto importante poiché è possibile darne una descrizione formale e rigorosa dal punto di vista matematico, ed è sempre possibile trovarne una soluzione esplicita. Tale soluzione è costituita da un Equilibrio di Nash, ovvero un in-

sieme di strategie rispetto al quale nessun giocatore ha interesse a cambiare la propria strategia se anche quella degli avversari rimane invariata.
Per arrivare a formulare tutto questo, dovremo introdurre le nozioni fondamentali della Teoria del Controllo, e quindi definire cosa sia un problema di controllo ottimo e vedere quali siano i metodi di soluzione e i teoremi coinvolti. Sulla base dell'analisi di un problema di controllo ottimo, sarà possibile risolvere anche un gioco differenziale linear-state. Infatti cercare una soluzione sarà equivalente a risolvere l'equazione del moto e una coppia di equazioni differenziali, dette equazioni aggiunte. Queste equazioni differenziali risulteranno disaccoppiate tra loro, e quindi potremo dimostrare l'esistenza e l'unicità della loro soluzione, che permetterà di risolvere completamente il gioco.
L'obiettivo di questa tesi sarà quello di analizzare un gioco differenziale analogo a quello deterministico, ma con l'aggiunta di un disturbo stocastico, cercando di osservare se sia possibile fornire una soluzione esplicita, mettendo in evidenza analogie e differenze con i giochi trattati precedentemente.
Come per i giochi differenziali deterministici, anche per quelli stocastici daremo una definizione formale di gioco linear-state e useremo la Teoria del Controllo per descrivere il procedimento di risoluzione e la ricerca della soluzione ottima. A tal proposito sarà importante enunciare alcuni Teoremi fondamentali, come il Principio del Massimo e il Teorema di Hamilton-Jacobi-Bellman. Risolvendo un gioco differenziale linear-state stocastico troveremo che è anch'esso descritto da due equazioni differenziali, dette equazioni aggiunte, disaccoppiate dall'equazione del moto e quindi ben definite, di cui saremo in grado di dare un'unica soluzione.

In questa tesi ci riferiamo ai giochi differenziali deterministici come sono definiti in [6, cap. 8, pagina 391] oppure in [5, cap. 8, pagina 431], e alla classe dei giochi linear-state definiti in [4]. Come accennato, per definire un gioco differenziale sarà necessario conoscere gli elementi fondamentali della Teoria del Controllo: per quanto riguarda la definizione di problema di controllo ottimo deterministico e i principali risultati come il Principio del Massimo e il Teorema di Hamilton-Jacobi-Bellman ci si è riferiti a [3, cap. 2, 3, 4 rispettivamente] e [6, cap. 3].
Per quanto riguarda i giochi differenziali stocastici ci siamo invece basati su quanto è stato trattato in [7, cap. 5, pagina 165]. Anche in questo caso è stato fondamentale introdurre i concetti di problema di controllo ottimo stocastico, Principio del Massimo e Teorema di Hamilton-Jacobi-Bellman che sono esposti in maniera completa e rigorosa in [3, cap. 2, 3, 4] e in [2, cap. 19]. Per trattare i problemi di controllo ottimo stocastici è stato necessario approfondire alcuni aspetti riguardanti i processi stocastici e il moto Browniano, come pure le equazioni differenziali stocastiche e l'integrale di Itô per cui sono stati visti [1] e [2, cap. 4, 5]. Questi ultimi argomenti del calcolo stocastico si è preferito affrontarli con un approccio computazionale piutto-

sto che attraverso una trattazione rigorosa dei singoli aspetti, che non viene presentata nel corso di Laurea triennale che ho frequentato.

Lo studio dei giochi differenziali linear-state, come abbiamo anticipato, è molto importante finché ci troviamo in una situazione deterministica poiché siamo in grado di individuare un'unica soluzione che si identifica con un Equilibrio di Nash Open-Loop, ovvero una soluzione dipendente solo dal tempo. Nel caso di un gioco differenziale stocastico invece non giungeremo alle stesse importanti conclusioni. Infatti, sebbene questo genere di giochi rimanga completamente risolvibile analiticamente, non ci darà nessuna informazione in più rispetto ad un gioco deterministico. La scelta di considerare l'equazione del moto e il funzionale obiettivo come funzioni lineari rispetto alla variabile di stato, da un lato semplifica la trattabilità del problema di controllo ottimo associato al gioco, ma dall'altra fa si che venga persa tutta l'informazione che avevamo aggiunto introducendo un fattore di disturbo stocastico nel gioco differenziale. La soluzione che si trova infatti sarà del tutto equivalente a quella di un gioco differenziale deterministico, e anzi esattamente la stessa. Non solo: anche le equazioni differenziali stocastiche che interverranno nella soluzione del problema si ridurranno a equazioni deterministiche, ed esattamente alle stesse equazioni trovate per l'analogo problema deterministico.

La tesi è articolata in quattro capitoli principali e uno conclusivo. Di questi, due saranno dedicati alla costruzione formale di un problema di controllo ottimo e all'esposizione dei teoremi fondamentali che permettono di trovarne una soluzione, mentre i restanti due tratteranno la descrizione effettiva dei giochi differenziali linear-state e la ricerca della loro soluzione.

Nel primo capitolo si analizza un problema di controllo ottimo deterministico. Dopo averne dato una definizione generale, ci si concentrerà sulla definizione e la risoluzione di un problema di controllo ottimo linear-state. Per fare questo enunceremo il Principio del Massimo di Pontryagin e il Teorema di Hamilton-Jacobi-Bellman e vedremo la loro applicazione nel caso particolare di problema linear-state. Infine, nell'ultimo paragrafo, metteremo in relazione i risultati ottenuti con i due diversi approcci, evidenziando che si equivalgono completamente.

Il secondo capitolo si occupa dei giochi differenziali deterministici. Introdurremo per prima cosa tutto ciò che è necessario a definire un gioco differenziale e formuleremo tale gioco come un problema di controllo ottimo. Ci soffermeremo poi sulla definizione e sullo studio di un gioco differenziale linear-state e per farlo ci appoggeremo ai problemi di controllo ottimo e ai teoremi definiti nel capitolo precedente. Definiremo cosa siano un Equilibrio di Nash in forma Open-Loop e di Feedback, e cercheremo di trovarli applicando rispettivamente il Principio del Massimo e il Teorema di Hamilton-Jacobi-Bellman al problema associato al gioco. In conclusione metteremo in relazione i due risultati ottenuti e osserveremo che, per questa particolare classe di giochi differenziali, essi coincidono.

Nel terzo capitolo vengono presentati i risultati generali riguardati i problemi di controllo ottimo stocastici. Anche in questo caso, come nel Capitolo 1, daremo le nozioni fondamentali per costruire un problema di controllo ottimo stocastico e scriveremo sia una definizione generale, sia la definizione di problema di controllo ottimo stocastico linear-state. Verranno poi presentati il Principio del Massimo e il Teorema di Hamilton-Jacobi-Bellman, e formalizzeremo i risultati ottenuti dalla loro applicazione ad un problema linear-state. Infine osserveremo quali siano gli aspetti equivalenti che emergono nelle soluzioni trovate per il problema linear-state usando i due diversi metodi forniti dai teoremi, e cercheremo anche le analogie con la risoluzione di un problema deterministico affrontata nel primo capitolo.

Il quarto capitolo si concentra sullo studio di un gioco differenziale stocastico linear-state. Spiegheremo che cosa si intende con gioco differenziale stocastico e lo formuleremo come problema di controllo ottimo stocastico. In seguito ci occuperemo dello studio del caso particolare di gioco linear-state e della ricerca dell'Equilibrio di Nash in forma Open-Loop e di Feedback. Per trovare tali equilibri, che equivalgono alla soluzione ottima del gioco, applicheremo il Principio del Massimo e il Teorema di Hamilton-Jacobi-Bellman al gioco linear-state e formalizzeremo i risultati ottenuti in due teoremi. Per concludere il capitolo cercheremo il legame tra le due tipologie di Equilibrio di Nash, osservando che coincidono, e vedremo come la risoluzione di questi giochi differenziali equivalga a quanto trovato per un gioco deterministico.

Infine, concluderemo l'intero lavoro con un ultimo capitolo dedicato ad un breve riassunto di quanto analizzato e al commento dei risultati ottenuti. Saranno fornite inoltre delle proposte di ricerca che appaiono particolarmente interessanti per studi futuri a partire da quanto trattato in questa tesi.

Indice

Capitolo 1

Problemi di Controllo Ottimo Deterministici

In questo primo capitolo affronteremo lo studio di un problema di controllo ottimo deterministico linear-state tramite il *Principio del Massimo di Pontryagin* e il *Teorema di Hamilton-Jacobi-Bellman.* Inizialmente daremo la definizione generale di problema di controllo ottimo dipendente dal tempo $t \in [0, T]$, e poi ci soffermeremo ad analizzare un problema di controllo ottimo linear-state, ovvero un problema in cui le funzioni coinvolte sono lineari rispetto allo stato del sistema.
Uno dei principali approcci per risolvere questi problemi è definire un insieme di condizioni necessarie che devono essere soddisfatte per poter trovare una soluzione ottima. Queste condizioni necessarie diventano anche sufficienti sotto certe ipotesi di concavità delle funzioni coinvolte. Il Principio del Massimo, formulato da Pontryagin, fornisce le condizioni necessarie alla risoluzione di un problema di controllo ottimo. Esso afferma che ogni controllo e stato ottimi devono soddisfare ad un sistema di equazioni differenziali detto *sistema Hamiltoniano* e alla massimizzazione di una funzione chiamata *Hamiltoniana.*
Un altro importante approccio che fornisce le condizioni necessarie per risolvere i problemi di controllo ottimo è quello della *programmazione dinamica*, che si realizza tramite la soluzione di una equazione a derivate parziali del primo ordine detta *Equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman*, la cui formulazione è data dall'omonimo teorema. Se questa equazione è risolvibile, allora si ottiene il controllo ottimo.
Applicheremo i due teoremi allo studio di un problema di controllo ottimo linear-state e cercheremo di capire se esistono delle relazioni tra questi due approcci. Parte fondamentale di questo capitolo sarà osservare che i due teoremi forniscono un risultato equivalente. La soluzione di un problema di controllo ottimo deterministico linear-state si ridurrà in genere alla risoluzione di una equazione differenziale lineare non omogenea del primo ordine

che ammette soluzione unica. La soluzione di quest'ultima permetterà di determinare stato e controllo ottimi, e quindi di risolvere completamente il problema.

1.1 Problemi di Controllo Ottimo Deterministici

Introduciamo la definizione generale di problema di controllo ottimo deterministico. In questo capitolo assumeremo che le funzioni coinvolte nella definizione seguente siano sufficientemente regolari, e quindi in genere almeno $\mathcal{C}^1$, al fine di semplificare la trattazione e l'applicazione successiva dei teoremi. Ricordiamo che con funzione di classe $\mathcal{C}^1$ intendiamo una funzione continua e derivabile, la cui derivata prima risulta essere continua.

Definizione 1.1.1 (**Problema di Controllo Ottimo Deterministico**). *Siano dati $T \in \mathbb{R}$, $0 < T < \infty$, e $x_0 \in \mathbb{R}$. Un problema di controllo ottimo consiste nel massimizzare il seguente* funzionale obiettivo*:*

$$V(t) = \max_{\mathrm{u}\in\Omega\subseteq\mathbb{R}} J(u) = \max_{\mathrm{u}\in\Omega\subseteq\mathbb{R}} \int_0^T g(t, u(t), x(t))\, dt + S(x(T)) \tag{1.1}$$

soggetto all'equazione differenziale ordinaria (ODE) che descrive l'evoluzione dello stato $x(t)$, detta equazione del moto *del sistema:*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) & = f(t, u(t), x(t)) \\ x(0) & = x_0 \qquad\qquad \forall t \in [0, T] \end{cases}$$

Le funzioni $f : [0, T] \times \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : [0, T] \times \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, che è detta Scrap Value function *associata allo stato finale $x(T)$ del sistema, sono note e ben definite. La funzione $u : [0, T] \to \Omega \subseteq \mathbb{R}$ si dice* controllo del sistema *e $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, soluzione dell'equazione del moto, é lo* stato del sistema *corrispondente al controllo $u(t)$. Infine x_0 rappresenta lo* stato iniziale *del sistema.*

Il controllo $u(\cdot)$ si può presentare in due modi diversi:

- come funzione del tempo: $t \mapsto u(t)$. In questo caso diciamo che $u(\cdot)$ è un *controllo Open-Loop*;
- come funzione dello stato: $x \mapsto u(x)$. Allora il controllo è in forma di *Feedback*.

In genere assumiamo che f, S, g siano sufficientemente regolari per poter garantire l'esistenza e l'unicità della soluzione dell'equazione del moto $x(\cdot) \equiv x(\cdot, u(\cdot))$, per ogni scelta del controllo $u(\cdot)$ e dello stato iniziale x_0. In questo caso la coppia $(x^*(\cdot), u^*(\cdot)) : [0, T] \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ è costituita dallo *stato* e dal *controllo ottimi* per il problema di controllo ottimo (per una definizione più dettagliata e per le ipotesi di regolarità si rimanda a [3, cap. 2, pagina 52]). Infine il problema di controllo ottimo si dice essere nella *forma di Bolza* se $g \neq 0$ e $S \neq 0$, nella *forma di Lagrange* se $S = 0$, nella *forma di Mayer* se $g = 0$.

1.2 Problemi di Controllo Ottimo Linear-State

Un caso particolare di problema di controllo ottimo è rappresentato dai *problemi di controllo ottimo linear-state*, nei quali le funzioni g, f, S sono lineari rispetto alla variabile x.

Definizione 1.2.1 (**Problema di Controllo Ottimo Deterministico Linear-State**). *Definiamo* problema di controllo ottimo linear-state *il seguente problema di controllo ottimo:*

$$\max_{\mathrm{u}\in\Omega\subseteq\mathbb{R}} J(u) = \max_{\mathrm{u}\in\Omega\subseteq\mathbb{R}} \int_0^T (\alpha(t)x(t) + \beta(t, u(t)))\, dt + \gamma x(T) \tag{1.2}$$

$$\textit{soggetto a} \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) & = \delta(t)x(t) + h(t, u(t)) \\ x(0) & = x_0 \qquad\qquad\qquad \forall t \in [0, T] \end{cases}$$

Assumiamo che le funzioni α, $\delta : [0, T] \to \mathbb{R}$, e β , $h : [0, T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ siano abbastanza regolari per garantire l'esistenza e l'unicità della soluzione dell'equazione del moto, per ogni scelta del controllo $u(\cdot)$. In particolare consideriamo tali funzioni almeno di classe $\mathcal{C}^1$, in accordo con la definizione generale di problema di controllo ottimo.

1.3 Principio del Massimo di Pontryagin

Il Principio del Massimo è uno dei due principali approcci per la soluzione di un problema di controllo ottimo e fornisce delle condizioni necessarie a cui deve soddisfare la soluzione ottima. In questo caso la soluzione ottima (u^*, x^*) si presenterà in forma Open-Loop, e quindi il controllo ottimo dipenderà solo dal tempo t.
Riscriviamo innanzitutto il problema nella forma di Bolza:

$$\max_{\mathrm{u}\in\Omega\subseteq\mathbb{R}} J(u) = \max_{\mathrm{u}\in\Omega\subseteq\mathbb{R}} \int_0^T g(t, u(t), x(t))\, dt + S(x(T)) \tag{1.3}$$

$$\text{s. a} \begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) & = f(t, u(t), x(t)) \\ x(0) & = x_0 \qquad\qquad \forall t \in [0, T] \end{cases}$$

Sia $H : [0, T] \times \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la *funzione Hamiltoniana* definita da:

$$H(t, u, x, p) = g(t, u, x) + p(t)f(t, u, x) \tag{1.4}$$

Teorema 1.3.1 (**Principio del Massimo**). *Siano $u^*(t)$ e $x^*(t)$ rispettivamente controllo e stato ottimi per il problema di controllo ottimo. Allora esiste una funzione aggiunta $p : [0,T] \to \mathbb{R}$, $\mathcal{C}^1$ a tratti tale che:*

- $u^*(t) = \arg\max_{u \in \Omega \subseteq \mathbb{R}} H(t, u, x^*(t), p(t))$
- *equazione aggiunta:* $\frac{d}{dt} p(t) = -\frac{\partial}{\partial x} H(t, u^*(t), x^*(t), p(t))$
- *condizione di trasversalità:* $p(T) = \frac{\partial S}{\partial x}(x^*(T))$

Dimostrazione. Vedere [3, cap. 3, pagina 105]. □

Non riportiamo la dimostrazione del Principio del Massimo, ma vedremo la sua applicazione ad un problema di controllo ottimo linear-state. Osserviamo inoltre che il Principio del Massimo fornisce le condizioni necessarie per la risoluzione di un problema di controllo ottimo, mentre le condizioni sufficienti sono date dal *Teorema di Mangasarian* e dal *Teorema di Arrow* [3, cap. 3, pagina 112].

Consideriamo quindi il problema linear-state scritto in (1.2) e applichiamo il Principio del Massimo di Pontryagin, dividendo la risoluzione in due parti principali. Per prima cosa cercheremo l'espressione per la funzione Hamiltoniana, e in seguito faremo vedere che è possibile trovare un punto di massimo $u^{\#}(t,p)$ per la funzione $H(\cdot)$. Infine osserveremo che la risoluzione di un problema di controllo ottimo equivale a risolvere due equazioni differenziali, una per lo stato $x(\cdot)$ e una per la funzione aggiunta $p(\cdot)$. Per questo motivo, prima di proseguire con la formalizzazione di questo risultato, richiamiamo il *Teorema di Esistenza e Unicità per Equazioni Differenziali Ordinarie*:

Teorema 1.3.2 (**Esistenza e Unicità per ODEs**). *Sia $F : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che:*

- $D = [0,T] \times \mathbb{R}$
- $F \in \mathcal{C}(D)$
- *F sia lipschitziana in x, y uniformemente in t, cioè:*

$$\exists L > 0 \quad : \quad ||F(t,x) - F(t,y)|| \leq L||y - x|| \qquad \forall (t,x),(t,y) \in D$$

Allora per ogni condizione iniziale $(t_0, x_0) \in D$, esiste ed è unica la soluzione $\varphi : [0,T] \to \mathbb{R}$ del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x'(t) & = F(t,x) \\ x(t_0) & = x_0 \end{cases}$$

Possiamo formalizzare ora l'applicazione del Principio del Massimo ad un problema di controllo ottimo linear-state nel seguente risultato:

Teorema 1.3.3. *Consideriamo il problema di controllo ottimo linear-state definito precedentemente in* (1.2)*, e supponiamo che le funzioni coinvolte siano sufficientemente regolari. Allora la risoluzione di questo problema tramite il Principio del Massimo di Pontryagin equivale a risolvere due equazioni differenziali dette* two-points boundary value problem*:*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) & = f(t, u^{\#}(t,p), x(t)) = \delta(t)x(t) + h(t, u^{\#}(t,p)) \\ x(0) & = x_0 \\ \frac{d}{dt}p(t) & = -\frac{\partial}{\partial x}H(t, u^{\#}(t,p), x^*(t), p(t)) = -\alpha(t) - \delta(t)p(t) \\ p(T) & = \frac{\partial S}{\partial x}(x^*(T)) = \gamma \end{cases}$$

Dimostrazione. Dividiamo la dimostrazione in due parti principali, e applichiamo il Principio del Massimo al problema linear-state.
Step 1. Osserviamo per cominciare che la funzione Hamiltoniana associata al problema di controllo ottimo linear-state presenta la seguente espressione:

$$\begin{aligned} H(t,u,x,p) &= g(t,u,x) + p(t)f(t,u,x) \\ &= \alpha(t)x + \beta(t,u) + p(t)(\delta(t)x + h(t,u)) \end{aligned}$$

Cerchiamo ora il valore $u^{\#}(\cdot)$, in funzione di $p(\cdot)$, che realizza il massimo per la funzione Hamiltoniana:

$$u^{\#}(t,p) = \arg\max_{\mathrm{u}\in\Omega}\{H(t,u,x,p)\} \tag{1.5}$$

Derivando quindi $H(\cdot)$ rispetto a u otteniamo che:

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{u}}(t,u,x,p) &= \frac{\partial}{\partial u}H(t,u,x,p) = \frac{\partial}{\partial u}\beta(t,u) + p\frac{\partial}{\partial u}h(t,u) \\ H_{\mathrm{u,u}}(t,u,x,p) &= \frac{\partial^2}{\partial u^2}H(t,u,x,p) = \frac{\partial^2}{\partial u^2}\beta(t,u) + p\frac{\partial^2}{\partial u^2}h(t,u) \end{aligned}$$

Imponendo la condizione $H_{\mathrm{u}}(t,u^{\#},x,p) = 0\ \forall p$ si trova il punto stazionario $u^{\#}(\cdot)$ per la funzione Hamiltoniana, mentre se è verificata la condizione $H_{\mathrm{u,u}}(t,u^{\#},x,p) < 0\ \forall p$ e $\forall t \in [0,T]$, allora la funzione Hamiltoniana risulta essere concava: quindi il punto stazionario $u^{\#}(t,p)$ è esattamente il punto di massimo cercato. Osserviamo che il controllo trovato è in forma Open-Loop poiché $u^{\#}(\cdot)$ dipende solo dal tempo t (e dalla funzione aggiunta $p(t)$).

Step 2. Ora è possibile riscrivere i due problemi di Cauchy, che forniscono rispettivamente lo stato ottimo del sistema e la funzione aggiunta:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) & = f(t, u^{\#}(t,p), x(t)) = \delta(t)x(t) + h(t, u^{\#}(t,p)) \\ x(0) & = x_0 \\ \frac{d}{dt}p(t) & = -\frac{\partial}{\partial x}H(t, u^{\#}(t,p), x^*(t), p(t)) = -\alpha(t) - \delta(t)p(t) \\ p(T) & = \frac{\partial S}{\partial x}(x^*(T)) = \gamma \end{cases}$$

I due problemi ammettono un'unica soluzione $(x^*(t), p^*(t))$ per il Teorema di Esistenza e Unicità per ODEs richiamato sopra. $\square$

Osserviamo quindi che dallo studio di un problema di controllo ottimo linear-state con il Principio del Massimo di Pontryagin, abbiamo ottenuto due equazioni differenziali del primo ordine lineari non omogenee, che per il Teorema di Esistenza e Unicità per ODEs ammettono un'unica soluzione. Possiamo osservare inoltre che le equazioni differenziali per lo stato $x(\cdot)$ e la funzione aggiunta $p(\cdot)$ sono disaccoppiate tra loro, ovvero non dipendono dall'altra variabile del problema. Allora è possibile risolvere l'equazione differenziale per $p(\cdot)$ indipendentemente dalle altre incognite, e quindi sostituendo questa soluzione nell'espressione trovata precedentemente per $u^{\#}(t,p)$, si ottiene il controllo ottimo $u^*(t) = u^{\#}(t, p(t))$. Questo infine permette di risolvere anche l'equazione del moto e di trovare quindi lo stato del sistema $x(\cdot)$. In questo modo il problema di controllo ottimo linear-state risulta completamente risolto.

Possiamo riassumere queste osservazioni nel seguente corollario:

Corollario 1.3.1. *Consideriamo il problema di controllo ottimo linear-state come definito in* (1.2)*, e supponiamo che le funzioni coinvolte siano sufficientemente regolari. Allora per poterne dare una soluzione completa è sufficiente poter risolvere l'equazione aggiunta associata al problema:*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}p(t) & = -\alpha(t) - \delta(t)p(t) \\ p(T) & = \gamma \end{cases}$$

1.4 Teorema di Hamilton-Jacobi-Bellman

Consideriamo il problema di controllo ottimo $P_{\mathrm{t,y}}$ con condizioni iniziali $(t, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}$, e supponiamo che le funzioni g, f, S siano sufficientemente regolari per poter garantire l'esistenza e l'unicità dello stato e del controllo ottimi (quindi le consideriamo in genere almeno $\mathcal{C}^1$):

$$\max_{\mathrm{u}\in\Omega\subseteq\mathbb{R}} J(u) = \max_{\mathrm{u}\in\Omega\subseteq\mathbb{R}} \int_t^T g(s, u(s), x(s))\, ds + S(x(T))$$

$$\text{s. a } \begin{cases} \frac{d}{ds}x(s) & = f(s, u(s), x(s)) \\ x(t) & = y \qquad\qquad \forall s \in [t, T] \end{cases}$$

dove $u(s) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}$, $\forall s \in [t, T]$.
Per ogni coppia (t, y) assumiamo che il problema $P_{\mathrm{t,y}}$ ammetta un controllo ottimo $u^{*\mathrm{t,y}}$, al quale associamo lo stato ottimo $x^{*\mathrm{t,y}}$ ottenuto dalla soluzione

dell'equazione del moto. Allora la *funzione valore ottimo*, detta *funzione di Bellman*, è definita come:

$$
\begin{aligned}
V(t,x) &= \max_{\mathrm{u}\in\Omega\subseteq\mathbb{R}} \int_t^T g(s,u(s),x(s))\,ds + S(x(T)) \\
&= \int_t^T g(s,u^{*\mathrm{t,y}},x^{*\mathrm{t,y}})\,ds + S(x^{*\mathrm{t,y}}(T))
\end{aligned}
$$

Tramite il Teorema di Hamilton-Jacobi-Bellman è possibile caratterizzare la funzione valore come unica soluzione di una equazione a derivate parziali (PDE) del primo ordine, e trovare la soluzione ottima del problema. In genere questo approccio permette di trovare una soluzione in forma di Feedback, per cui il controllo ottimo sarà $u^*(t,x^*(t))$.

Teorema 1.4.1 (Hamilton-Jacobi-Bellman). *Assumiamo che per ogni condizione iniziale $y \in \mathbb{R}$ e $t \in [0,T]$ esita un controllo ammissibile $u^{*\mathrm{t,y}}$ e il corrispondente stato ammissibile $x^{*\mathrm{t,y}}$. Sia inoltre la funzione valore $V(t,x)$, definita come sopra, di classe $\mathcal{C}^1([0,T]\times\mathbb{R},\mathbb{R})$. Allora la coppia $(u^{*\mathrm{t,y}},x^{*\mathrm{t,y}})$ è la soluzione ottima per il problema di controllo ottimo se e solo se la funzione valore $V(\cdot)$ soddisfa la seguente PDE, detta Equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB):*

$$
\begin{cases}
-\frac{\partial}{\partial t}V(t,x) & = \max_{\mathrm{u}\in\Omega\subseteq\mathbb{R}}\left\{ f(t,u,x)\frac{\partial}{\partial x}V(t,x) + g(t,u,x)\right\} \\
V(T,x) & = S(x(T))
\end{cases}
$$

$\forall (t,y) \in [0,T]\times\mathbb{R}$ per cui $u^{*\mathrm{t,y}}$ è continuo.

Dimostrazione. Si veda [3, cap. 4, pagina 160]. □

Anche questo teorema fornisce solamente le condizioni necessarie per la risoluzione di un problema di controllo ottimo, mentre le condizioni sufficienti sono date dal *Teorema di Verifica* [3, cap. 5, pagina 241].
Analogamente a quanto fatto per il Principio del Massimo di Pontryagin, non riportiamo la dimostrazione del Teorema di Hamilton-Jacobi-Bellman, ma la sua applicazione ad un problema di controllo ottimo linear-state.

Consideriamo allora il problema di controllo ottimo linear-state, come definito in (1.2):

$$
\max_{\mathrm{u}\in\Omega\subseteq\mathbb{R}} J(u) = \max_{\mathrm{u}\in\Omega\subseteq\mathbb{R}} \int_0^T (\alpha(t)x(t) + \beta(t,u(t)))\,dt + \gamma x(T)
$$

$$
\text{soggetto a } \begin{cases}
\frac{d}{dt}x(t) & = \delta(t)x(t) + h(t,u(t)) \\
x(0) & = x_0 \qquad\qquad \forall t \in [0,T]
\end{cases}
$$

dove le funzioni α, β, δ, h sono funzioni note e di classe almeno $\mathcal{C}^1$ e applichiamo il Teorema di Hamilton-Jacobi-Bellman. Si può dividere il ragionamento in due parti principali. Per prima cosa scriveremo l'Equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman nel caso particolare di questo problema di controllo ottimo linear-state, e supporremo l'esistenza della funzione valore per poter trovare il punto di massimo nell'Equazione di HJB. In seguito risolveremo l'equazione a derivate parziali e potremmo osservare che si ottengono due equazioni differenziali ordinarie.
Possiamo formalizzare questo ragionamento nel seguente risultato:

Teorema 1.4.2. *Consideriamo il problema di controllo ottimo linear-state definito precedentemente in* (1.2)*, e supponiamo che le funzioni coinvolte siano sufficientemente regolari. Supponiamo inoltre che la funzione valore sia lineare rispetto allo stato $x(t)$ e che abbia quindi la seguente espressione*

$$V(t,x) = a(t)x(t) + b(t)$$

dove le funzioni a, $b : [0,T] \to \mathbb{R}$ sono sufficientemente regolari. Allora la risoluzione di un problema di controllo ottimo linear-state tramite il Teorema di Hamilton-Jacobi-Bellman equivale a risolvere le due seguenti equazioni differenziali:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}a(t) & = -a(t)\delta(t) - \alpha(t) \\ a(T) & = \gamma \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}b(t) & = -a(t)h(t, u^{\#}(t, a(t))) - \beta(t, u^{\#}(t, a(t))) \\ b(T) & = 0 \end{cases}$$

Dimostrazione. Dividiamo la dimostrazione in due step principali:
Step 1. Consideriamo l'Equazione di HJB come definita nell'omonimo teorema e la riscriviamo nel caso del problema di controllo ottimo linear-state definito precedentemente:

$$\begin{cases} V_{\mathrm{t}}(t,x) + \max_{\mathrm{u}\in\Omega}\{V_{\mathrm{x}}(t,x)(\delta(t)x + h(t,u)) + \alpha(t)x + \beta(t,u)\} = 0 \\ V(T,x) = \gamma x(T) \end{cases}$$

In genere con $V_{\mathrm{t}}(\cdot)$ e $V_{\mathrm{x}}(\cdot)$ indichiamo le derivate parziali della funzione $V(t,x)$ rispetto al tempo t e allo stato x.
Per ipotesi, definiamo la funzione valore come $V(t,x) = a(t)x(t) + b(t)$, ovvero stiamo supponendo che sia una funzione lineare nella variabile x. Allora, derivando rispetto a t e x otteniamo:

$$V_{\mathrm{t}}(t,x) = a'(t)x + b'(t) \quad \text{e} \quad V_{\mathrm{x}}(t,x) = a(t)$$

Per quanto riguarda la condizione finale presente nell'Equazione di HJB invece imponiamo che $V(T,x) = \gamma x = a(T)x + b(T)$ da cui, per il principio di identità dei polinomi, si ottiene che $a(T) = \gamma$ e $b(T) = 0$.

Step 2. Per risolvere l'Equazione di HJB, cerchiamo ora il massimo della funzione $u \mapsto M(u) \equiv V_x(t,x)(\delta(t)x+h(t,u))+\alpha(t)x+\beta(t,u) = a(t)(\delta(t)x+h(t,u)) + \alpha(t)x + \beta(t,u)$. Derivando rispetto a u otteniamo che:

$$\frac{\partial}{\partial u}M(u) = a(t)\frac{\partial}{\partial u}h(t,u) + \frac{\partial}{\partial u}\beta(t,u)$$
$$\frac{\partial^2}{\partial u^2}M(u) = a(t)\frac{\partial^2}{\partial u^2}h(t,u) + \frac{\partial^2}{\partial u^2}\beta(t,u)$$

Analogamente alle considerazioni fatte per il Principio del Massimo ponendo $\frac{\partial}{\partial u}M(u) = 0$, e verificando la concavità con $\frac{\partial^2}{\partial u^2}M(u) < 0$, otteniamo il controllo ottimo del sistema $u^{\#}(t,a(t))$. Osserviamo che per un problema linear-state non troviamo una controllo Feedback come accade in genere, ma il controllo appare in forma Open-Loop, poiché tutte le funzioni coinvolte nella definizione del problema sono lineari rispetto alla variabile di stato.
Infine se sostituiamo il controllo ottimo appena trovato nell'Equazione di HJB otteniamo che:

$$a'(t)x + b'(t) + a(t)(\delta(t)x + h(t,u^{\#}(t,a(t)))) + \alpha(t)x + \beta(t,u^{\#}(t,a(t))) = 0$$

e quindi raccogliendo rispetto alla variabile x:

$$[a'(t) + a(t)\delta(t) + \alpha(t)]x + b'(t) + a(t)h(t,u^{\#}(t,a(t))) + \beta(t,u^{\#}(t,a(t))) = 0$$

da cui per il principio di identità dei polinomi si ottengono le due seguenti equazioni differenziali ordinarie:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}a(t) & = -a(t)\delta(t) - \alpha(t) \\ a(T) & = \gamma \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}b(t) & = -a(t)h(t,u^{\#}(t,a(t))) - \beta(t,u^{\#}(t,a(t))) \\ b(T) & = 0 \end{cases}$$

I due Problemi di Cauchy così trovati ammettono un'unica soluzione, che sostituita in $V(t,x) = a(t)x + b(t)$ e in $u^{\#}(t,a(t))$ permette di trovare la funzione valore ottimo e il controllo ottimo $u^*(t)$. $\square$

Osserviamo che le due equazioni differenziali ordinarie ottenute ammettono un'unica soluzione per il Teorema di Esistenza e Unicità per ODEs.
Possiamo in realtà dire di più: le due equazioni sono disaccoppiate. Infatti l'equazione differenziale per $a(\cdot)$ non dipende dalla variabile $b(\cdot)$, e quindi è possibile risolverla indipendentemente. Sostituendo l'espressione trovata per la funzione $a(\cdot)$ nell'equazione per $b(\cdot)$, osserviamo che la risoluzione di quest'ultima si riduce al calcolo di un integrale, poiché tutte le funzioni coinvolte

sono note e univocamente determinate. Inoltre l'integrale per la funzione $b(\cdot)$ è ben definito secondo Riemann grazie alle ipotesi di regolarità che abbiamo assunto per le funzioni $a(\cdot)$, $h(\cdot)$ e $\beta(\cdot)$ coinvolte. A tal proposito, prima di formalizzare quest'ultima osservazione richiamiamo la seguente definizione:

Definizione 1.4.1 (**Funzione Riemann-Integrabile**). *Una funzione $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ si dice* Riemann-integrabile *se* $\sup \mathcal{S}_{\mathrm{f}}^{-} = \inf \mathcal{S}_{\mathrm{f}}^{+}$ *dove indichiamo con $\mathcal{S}_{\mathrm{f}}^{-}$ e $\mathcal{S}_{\mathrm{f}}^{+}$ rispettivamente le somme inferiori e superiori per f.*

Inoltre ricordiamo che:

Proposizione 1.4.1. *Sia $[c, d] \subset \mathbb{R}$ un intervallo chiuso e limitato. Se la funzione $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ è continua, allora è integrabile su $[c, d]$.*

In conclusione possiamo riassumere quanto visto nel seguente corollario:

Corollario 1.4.1. *Consideriamo il problema di controllo ottimo linear-state come definito in* (1.2)*, e supponiamo che le funzioni coinvolte siano sufficientemente regolari. Allora per poterne dare una soluzione completa tramite il Teorema di Hamilton-Jacobi-Bellman è sufficiente poter risolvere l'equazione differenziale per $a(\cdot)$, in modo che $V(t, x) = a(t)x(t) + b(t)$ sia la funzione valore associata al problema:*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}a(t) & = -\alpha(t) - \delta(t)a(t) \\ a(T) & = \gamma \end{cases}$$

1.5 Relazioni tra il Principio del Massimo di Pontryagin e il Teorema di Hamilton-Jacobi-Bellman

Consideriamo un problema di controllo ottimo come definito precedentemente e osserviamo ora quali sono le relazioni tra il Principio del Massimo di Pontryagin e il Teorema di Hamilton-Jacobi-Bellman sulla base di quanto visto nei paragrafi precedenti. Abbiamo visto che in una situazione deterministica l'applicazione del Principio del Massimo ad un problema di controllo ottimo si traduce nella risoluzione di equazioni differenziali ordinarie (ODEs), mentre l'Equazione di HJB associata all'omonimo teorema consiste nella risoluzione di un'equazione a derivate parziali del primo ordine (PDEs) che, nel caso linear-state, si riduce poi ad un'equazione differenziale.

Analizziamo in particolare il caso di un problema di controllo ottimo linear-state, come quello definito in (1.2). Ricordiamo che il sistema Hamiltoniano relativo all'applicazione del Principio del Massimo ad un problema linear-state era dato da:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) & = f(t, u^*(t), x(t)) = \delta(t)x(t) + h(t, u^*(t)) \\ x(0) & = x_0 \\ \frac{d}{dt}p(t) & = -\frac{\partial}{\partial x}H(t, u^*(t), x^*(t), p(t)) = -\alpha(t) - \delta(t)p(t) \\ p(T) & = p_0\frac{\partial S}{\partial x}(x^*(T)) = \gamma \end{cases}$$

dove la funzione Hamiltoniana era definita da $H(t, u, x, p) = \alpha(t)x + \beta(t, u) + p(t)(\delta(t)x + h(t, u))$.
Per quanto riguarda il Teorema di HJB invece, la formulazione generale dell'Equazione di HJB era:

$$\begin{cases} V_{\mathrm{t}}(t, x) + \max_{\mathrm{u}\in\Omega}\{V_{\mathrm{x}}(t, x)(\delta(t)x + h(t, u)) + \alpha(t)x + \beta(t, u)\} = 0 \\ V(T, x) = \gamma x(T) \end{cases}$$

e in seguito all'applicazione del Teorema al caso linear-state risultavano le due seguenti equazioni differenziali ordinarie:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}a(t) & = -a(t)\delta(t) - \alpha(t) \\ a(T) & = \gamma \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}b(t) & = -a(t)h(t, u^*(t)) - \beta(t, u^*(t)) \\ b(T) & = 0 \end{cases}$$

dove la funzione valore era definita da $V(t, x) = a(t)x(t) + b(t)$.

Osserviamo che i due sistemi di equazioni differenziali trovati nell'applicazione dei due Teoremi sono equivalenti. Infatti è evidente che la funzione aggiunta $p(\cdot)$ del Principio del Massimo deve soddisfare alla stessa equazione differenziale per la funzione $a(\cdot)$ trovata con il Teorema di HJB. Inoltre, come abbiamo visto nei paragrafi precedenti, l'equazione differenziale per $p(\cdot)$, e quindi quella per $a(\cdot)$, sono due equazioni differenziali lineari non omogenee del primo ordine che non dipendono dall'altra incognita del problema, ovvero rispettivamente dallo stato $x(\cdot)$ o dalla funzione $b(\cdot)$, e ammettono un'unica soluzione per il Teorema di Esistenza e Unicità per ODEs. Questo significa che i due problemi di Cauchy trovati sono disaccoppiati. Infatti, come appena visto, è possibile risolvere l'equazione per $p(\cdot)$, o per $a(\cdot)$, indipendentemente dalle altre incognite, mentre la soluzione così trovata permette di risolvere anche l'equazione del moto e di trovare quindi lo stato del sistema $x(\cdot)$, e l'espressione per la funzione $b(\cdot)$. Da queste si possono ricavare anche il controllo ottimo $u^*(\cdot)$ e la funzione valore ottimo $V(\cdot)$.

Abbiamo osservato inoltre che, applicando sia il Teorema di HJB sia il Principio del Massimo ad un problema linear-state, il controllo ottimo u^*

si presenta in forma Open-Loop. Infatti abbiamo trovato che $u^*(\cdot)$ dipende solamente dal tempo t e dalla funzione aggiunta $p(t)$, o equivalentemente da $a(t)$, a causa della linearità rispetto allo stato del sistema delle funzioni coinvolte nella definizione di problema di controllo ottimo linear-state.

Quindi possiamo concludere dicendo che i due teoremi, Principio del Massimo e Teorema di Hamilton-Jacobi-Bellman, per un problema di controllo ottimo linear-state sono equivalenti. Risolvere il problema equivale infatti a risolvere la seguente equazione differenziale:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}p(t) & = -a(t)\delta(t) - \alpha(t) \\ p(T) & = \gamma \end{cases}$$

che abbiamo visto ammettere unica soluzione per il Teorema di Esistenza e Unicità per ODEs grazie alle ipotesi di regolarità assunte inizialmente nella definizione di un problema di controllo ottimo, e di un problema di controllo ottimo linear-state. Inoltre entrambi gli approcci portano alla stessa soluzione ottima $(u^*(t), x^*(t))$, che si presenta in forma Open-Loop.

Capitolo 2

Giochi Differenziali Deterministici

In questo capitolo considereremo i *giochi differenziali deterministici.* Per descrivere cosa sono possiamo immaginare una situazione di conflitto in cui un numero arbitrario di decisori, che in seguito chiameremo giocatori, interagiscono in un ambiente, in un modo che viene influenzato dalle scelte degli stessi giocatori. Tale ambiente in genere evolve su un orizzonte temporale, che qui considereremo finito. Parliamo di gioco *differenziale* se l'ambiente è descritto da un sistema dinamico a tempo continuo, e quindi possiamo formulare il gioco come un problema di controllo ottimo, anche se la loro strategia di soluzione è differente. Notiamo infatti che la Teoria dei Giochi non è solo uno sviluppo della Teoria del Controllo, ma discende da un campo diverso di ricerca.
Solo alcune tipologie di giochi differenziali prevedono una soluzione che si possa descrivere analiticamente ed è per questo che, dopo aver dato una prima definizione generale di gioco differenziale, ci soffermeremo sulla descrizione di un *gioco differenziale linear-state*, ovvero in cui le funzioni coinvolte siano lineari rispetto alla variabile di stato. Ai fini della nostra trattazione considereremo due giocatori e una tipologia particolare di gioco, detto *non-cooperativo*, ovvero un gioco in cui i giocatori non possano stipulare accordi tra loro.
La soluzione di questi giochi è data dalla ricerca dell'*Equilibrio di Nash*, per cui ogni giocatore mira a massimizzare la propria utilità secondo un comportamento razionale, ovvero secondo cui ogni scelta debba essere presa con lo scopo di perseguire sempre la strategia più vantaggiosa per il giocatore stesso. Definiremo due tipi di Equilibrio di Nash: in forma *Open-Loop* e di *Feedback*, e vedremo come si possono trovare nel caso di un gioco linear-state.
In conclusione cercheremo di capire il legame esistente tra i due diversi tipi di equilibrio, e osserveremo che nel particolare caso di gioco linear-state l'Equilibrio in forma di Feedback coincide con un Equilibrio Open-Loop.

2.1 Giochi Differenziali

In questo paragrafo ci concentriamo sulla definizione generale di gioco differenziale non-cooperativo. Questo si può formulare tramite un problema di controllo ottimo, anche se vedremo che le strategie di soluzione si differenziano per alcuni aspetti.
Si parla di *gioco non-cooperativo* quando ogni giocatore non ha la possibilità di cooperare o stringere accordi con gli altri giocatori, e il suo scopo è quello di ottimizzare la propria utilità, o il proprio guadagno, indipendentemente dagli altri giocatori presenti.
Consideriamo due giocatori che chiameremo $i, j \in \{1, 2\}$, con $i \neq j$, il cui scopo è quello di massimizzare il rispettivo funzionale obiettivo in funzione del tempo $t \in [0, T]$. La funzione $u_{\mathrm{i}}(\cdot)$, definita su un insieme $\Omega_{\mathrm{i}} \subseteq \mathbb{R}$ per ogni giocatore $i \in \{1.2\}$, rappresenta il *controllo* del giocatore i-esimo, mentre le decisioni passate prese dai giocatori sono descritte dall'*equazione del moto* per la variabile $x(t)$, detta *stato* del sistema. Lo stato del sistema $x : [0, T] \to X \subseteq \mathbb{R}$ evolve secondo un'equazione differenziale:

$$\begin{cases} x'(t) & = f(t, u_{\mathrm{i}}, u_{\mathrm{j}}, x) \\ x(0) & = x_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

dove $(0, x_0)$ sono le condizioni iniziali del sistema e sono note a tutti i giocatori.

Definizione 2.1.1 (Gioco Differenziale). *Un gioco differenziale non- cooperativo è definito come segue:*

$$\max_{\mathrm{u_i} \in \Omega_{\mathrm{i}} \subseteq \mathbb{R}} J_{\mathrm{i}}(u_{\mathrm{i}}, u_{\mathrm{j}}) = \max_{\mathrm{u_i} \in \Omega_{\mathrm{i}} \subseteq \mathbb{R}} \int_0^T g_{\mathrm{i}}(t, u_{\mathrm{i}}(t), u_{\mathrm{j}}(t), x(t))\, dt + S_{\mathrm{i}}(x(T)) \tag{2.1}$$

$$s.\ a \begin{cases} x'(t) & = f(t, u_{\mathrm{i}}, u_{\mathrm{j}}, x) \\ x(0) & = x_0 \end{cases}$$

dove $i, j \in \{1, 2\}$ e $i \neq j$. Il numero dei giocatori, i loro funzionali obiettivo e l'insieme delle strategie ammissibili costituiscono le regole del gioco*, che sono note a tutti i giocatori.*

Assumiamo che le funzioni $g_{\mathrm{i}}, f : [0, T] \times \Omega_{\mathrm{i}} \times \Omega_{\mathrm{j}} \times X \to \mathbb{R}$, $S_{\mathrm{i}} : X \to \mathbb{R}$ con $i \in \{1, 2\}$ siano sufficientemente regolari, e quindi almeno $\mathcal{C}^1$, in modo tale da garantire l'esistenza e l'unicità della soluzione dell'equazione del moto per ogni scelta del controllo ammissibile $u_{\mathrm{i}}(\cdot)$. Inoltre richiediamo che, per ogni scelta del controllo, l'integrale del funzionale obiettivo sia convergente (per maggiori dettagli [4], oppure [6, cap. 8]).

Supponiamo inoltre che ogni giocatore possa scegliere il proprio controllo in accordo con la *strategia* φ_{i}, che è la regola che determina un'azione sulla base dell'insieme di informazioni disponibili al giocatore. La scelta della strategia avviene in genere a $t = 0$ e deve essere seguita per tutta la durata del gioco. Come per i problemi di controllo ottimo, anche nei giochi differenziali il controllo del sistema può assumere due forme:

- $u_{\mathrm{i}}(t) = \varphi_{\mathrm{i}}(t, x(t))$: in questo caso il controllo è in forma di *Feedback*, per cui ogni giocatore sceglie la propria strategia $\varphi_{\mathrm{i}}(\cdot)$ in funzione dello stato e del tempo;
- $u_{\mathrm{i}}(t) = \varphi_{\mathrm{i}}(t)$ è invece un controllo *Open-Loop* in cui la strategia del giocatore dipende solo dal tempo.

2.2 Giochi Differenziali Linear-State

I giochi differenziali *linear-state* si caratterizzano per avere l'equazione del moto e il funzionale obiettivo lineari rispetto allo stato del sistema $x(\cdot)$ e per non presentare alcuna interazione tra la variabile del controllo e la variabile di stato. Il loro studio risulta particolarmente importante perché sono in genere risolvibili analiticamente, cosa che invece risulta molto complicata per altre classi di giochi differenziali. Inoltre hanno la proprietà di avere un *Equilibrio di Nash Open-Loop* che si identifica con quello in forma di *Feedback* che definiremo nei paragrafi successivi.

Definizione 2.2.1 (Giochi Differenziali Linear-State). *Un gioco differenziale non-cooperativo con due giocatori è definito* linear-state *se e solo se presenta la seguente forma:*

$$\max_{u_{\mathrm{i}} \in \Omega_{\mathrm{i}} \subseteq \mathbb{R}} J_{\mathrm{i}}(u_{\mathrm{i}}, u_{\mathrm{j}}) = \max_{u_{\mathrm{i}} \in \Omega_{\mathrm{i}}} \int_0^T \left(\alpha_{\mathrm{i}}(t, u_{\mathrm{j}}(t))x(t) + \beta_{\mathrm{i}}(t, u_{\mathrm{i}}(t), u_{\mathrm{j}}(t))\right) dt + \gamma_{\mathrm{i}} x(T) \tag{2.2}$$
$$s.\ a \begin{cases} x'(t) & = \delta(t)x(t) + h(t, u_{\mathrm{i}}(t), u_{\mathrm{j}}(t)) \\ x(0) & = x_0 \end{cases}$$

dove $i, j \in \{1, 2\}$ e $i \neq j$.

In genere assumiamo, in accordo con la definizione generale di gioco differenziale, che le funzioni $\alpha_{\mathrm{i}} : [0, T] \times \Omega_{\mathrm{j}} \to \mathbb{R}$, $\beta_{\mathrm{i}}, h : [0, T] \times \Omega_{\mathrm{i}} \times \Omega_{\mathrm{j}} \to \mathbb{R}$ e $\delta : [0, T] \to \mathbb{R}$ siano sufficientemente regolari, e quindi almeno $\mathcal{C}^1$, per garantire l'esistenza e l'unicità della soluzione dell'equazione del moto per ogni scelta del controllo $u_{\mathrm{i}}(\cdot), u_{\mathrm{j}}(\cdot)$. Inoltre richiediamo che, per ogni scelta del controllo ammissibile, l'integrale del funzionale obiettivo sia convergente (per maggiori dettagli [4]).

2.3 Equilibrio di Nash Open-Loop

Un concetto fondamentale per descrivere la soluzione di un gioco differenziale è quello di *Equilibrio di Nash Open-Loop.*
Se un gioco ammette almeno un Equilibrio di Nash significa che ogni giocatore ha a disposizione almeno una strategia ottima $\varphi_{\mathrm{i}}^*(\cdot)$ dalla quale non ha alcun interesse ad allontanarsi se anche tutti gli altri giocatori hanno giocato la propria strategia ottima. Infatti, come si può vedere dalla disuguaglianza nella definizione seguente, se il giocatore i gioca una qualunque strategia a sua disposizione diversa da quella ottima può solo peggiorare il proprio guadagno o, al più, lasciarlo invariato. Quindi possiamo dedurre che se i giocatori raggiungono un Equilibrio di Nash, nessuno può migliorare il proprio risultato modificando solo la propria strategia, ed è quindi vincolato alle scelte degli altri. Poiché questo vale per tutti i giocatori, è evidente che se esiste un Equilibrio di Nash ed è unico, esso rappresenta la soluzione del gioco, in quanto nessuno dei giocatori ha interesse a cambiare strategia. Tutto questo è espresso dalla seguente definizione:

Definizione 2.3.1 (Equilibrio di Nash Open-Loop (OLNE)). *Una coppia di controlli ammissibili* $(u_1^{\mathrm{N}}(t), u_2^{\mathrm{N}}(t))$ *è un* Equilibrio di Nash Open-Loop *se e solo se per ogni controllo ammissibile* $u_{\mathrm{i}}(\cdot)$ *vale:*

$$J_{\mathrm{i}}\big(u_{\mathrm{i}}^{\mathrm{N}}(\cdot), u_{\mathrm{j}}^{\mathrm{N}}(\cdot)\big) \geq J_{\mathrm{i}}\big(u_{\mathrm{i}}(\cdot), u_{\mathrm{j}}^{\mathrm{N}}(\cdot)\big) \tag{2.3}$$

per ogni $i, j \in \{1, 2\}$ *e* $i \neq j$*.*

Osserviamo in particolare che in un caso di Equilibrio di Nash Open-Loop non è necessaria nessuna distinzione tra il controllo $u_{\mathrm{i}}^{\mathrm{N}}(\cdot)$ e la strategia $\varphi_{\mathrm{i}}^*(\cdot)$ del giocatore i-esimo.

Per caratterizzare un OLNE per un gioco in cui interagiscono due giocatori, dobbiamo quindi risolvere una coppia di problemi di controllo ottimo associati al gioco differenziale. La seguente strategia di soluzione, a cui ci riferiremo in seguito con "*Schema di Soluzione*", risolve un gioco differenziale usando il Principio del Massimo di Pontryagin e applicandolo ai due problemi di controllo ottimo coinvolti. La prima parte dello "Schema di Soluzione" ripercorre i punti fondamentali del Principio del Massimo, per cui verrà determinato il punto di massimo candidato ad essere la soluzione ottima e il sistema Hamiltoniano. In questo modo sarà possibile trovare una soluzione ottima per i problemi costituita da un controllo ottimo Open-Loop, e quindi un OLNE per il gioco differenziale. Infine si daranno anche le condizioni sufficienti per garantire l'ottimalità della soluzione.

Definiamo *funzione Hamiltoniana del giocatore i-esimo* la seguente funzione $H_{\mathrm{i}} : [0, T] \times \Omega_{\mathrm{i}} \times X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$H_{\mathrm{i}}(t, u_{\mathrm{i}}, x, \lambda_{\mathrm{i}}; u_{\mathrm{j}}) = g_{\mathrm{i}}(t, u_{\mathrm{i}}, u_{\mathrm{j}}, x) + \lambda_{\mathrm{i}} f(t, u_{\mathrm{i}}, u_{\mathrm{j}}, x) \tag{2.4}$$

dove $\lambda_i : [0, T] \to \mathbb{R}$ è l'equivalente della funzione aggiunta del Principio del Massimo.

Schema di Soluzione

Step 1. Per ogni $i, j \in \{1, 2\}$ sia ben definito il punto di massimo della funzione Hamiltoniana:

$$u_i^{\#}(t, x, \lambda_i; u_j) = \arg\max_{u_i \in \Omega_i} H_i(t, u_i, x^*, \lambda_i; u_j) \tag{2.5}$$

Step 2. Il sistema, che descrive le dipendenze tra i controlli dei due giocatori i, j,

$$\begin{cases} u_i &= u_i^{\#}(t, x, \lambda_i; u_j) \\ u_j &= u_j^{\#}(t, x, \lambda_j; u_i) \end{cases}$$

nelle due incognite u_i, u_j abbia un'unica soluzione data da:

$$\left(u_i^{OL}(t, x, \lambda_i, \lambda_j), u_j^{OL}(t, x, \lambda_i, \lambda_j)\right) \tag{2.6}$$

Step 3. La soluzione appena trovata, per essere un Equilibrio di Nash, deve soddisfare il seguente sistema di equazioni differenziali del primo ordine per la funzione di stato $x(t)$ e le funzioni aggiunte $\lambda_i(t)$. In particolare il sistema, detto *two-points boundary value problem*, deve avere un'unica soluzione $(x^*(t), \lambda_1^*(t), \lambda_2^*(t))$:

$$\begin{cases} x'(t) &= f(t, u_i^{OL}(t, x, \lambda_i, \lambda_j), u_j^{OL}(t, x, \lambda_i, \lambda_j), x) \\ x(0) &= x_0 \\ \lambda_i'(t) &= -\partial_x H_i(t, u_i^{OL}(t, x, \lambda_i, \lambda_j), x, \lambda_i; u_j^{OL}(t, x, \lambda_i, \lambda_j)) \\ \lambda_i(T) &= \partial_x S_i(x(T)) \end{cases}$$

con $i, j \in \{1, 2\}$ e $i \neq j$, e dove è stata omessa la dipendenza dal tempo per le funzioni x, λ_i, λ_j.
Step 4. La funzione $H_i(t, u_i, x, \lambda_i^*(t); u_j^{OL}(t, x, \lambda_i^*(t), \lambda_j^*(t)))$ deve essere concava in (x, u_i) e la funzione $S_i(x)$ deve essere concava in x per ogni $t \in [0, T]$ e per ogni $i, j \in \{1, 2\}$ con $i \neq j$.

Se tutti gli step possono essere eseguiti, allora la soluzione ottima

$$u_i^N(t) = u_i^{OL}(t, x^*(t), \lambda_i^*(t), \lambda_j^*(t)) \tag{2.7}$$

con $i, j \in \{1, 2\}$ e $i \neq j$ è un Equilibrio di Nash Open-Loop per un gioco differenziale, come quello definito in (2.1).

Osserviamo che gli Step 1, 2, 3 rappresentano le condizioni necessarie per un OLNE e sono equivalenti a quelle date dal Principio del Massimo di Pontryagin per un problema di controllo ottimo deterministico, mentre lo Step 4 fornisce le condizioni sufficienti (per maggiori dettagli [4], [6] oppure [5]). Vediamo che in genere questo metodo di soluzione risulta particolarmente complicato per un generico gioco differenziale, mentre si può discutere analiticamente nel caso di un gioco differenziale linear-state, come quello definito in (2.2). In particolare osserveremo che sono presenti delle analogie con la risoluzione di un problema di controllo ottimo linear-state deterministico e con i risultati ottenuti. A questo proposito possiamo enunciare il seguente teorema, analogamente a quanto fatto nel Capitolo 1:

Teorema 2.3.1. *Consideriamo il gioco differenziale linear-state definito in* (2.2)*. Allora la sua risoluzione tramite lo "Schema di Soluzione" e la ricerca di un Equilibrio di Nash Open-Loop equivale a risolvere il seguente sistema di equazioni differenziali, detto* two-points boundary value problem*:*

$$\begin{cases} x'(t) &= f(t, u_{\mathrm{i}}^{\mathrm{OL}}(t, x, \lambda_{\mathrm{i}}, \lambda_{\mathrm{j}}), u_{\mathrm{j}}^{\mathrm{OL}}(t, x, \lambda_{\mathrm{i}}, \lambda_{\mathrm{j}}), x) \\ &= \delta(t)x(t) + h(t, u_{\mathrm{i}}^{\mathrm{OL}}(t, \lambda_{\mathrm{i}}, \lambda_{\mathrm{j}}), u_{\mathrm{j}}^{\mathrm{OL}}(t, \lambda_{\mathrm{i}}, \lambda_{\mathrm{j}})) \\ x(0) &= x_0 \\ \lambda_{\mathrm{i}}'(t) &= -\partial_{\mathrm{x}} H_{\mathrm{i}}(t, u_{\mathrm{i}}^{\mathrm{OL}}(t, x, \lambda_{\mathrm{i}}, \lambda_{\mathrm{j}}), x, \lambda_{\mathrm{i}}; u_{\mathrm{j}}^{\mathrm{OL}}(t, x, \lambda_{\mathrm{i}}, \lambda_{\mathrm{j}})) \\ &= -\alpha_{\mathrm{i}}(t, u_{\mathrm{j}}^{\mathrm{OL}}(t, \lambda_{\mathrm{i}}, \lambda_{\mathrm{j}})) - \lambda_{\mathrm{i}}(t)\delta(t) \\ \lambda_{\mathrm{i}}(T) &= \partial_{\mathrm{x}} S_{\mathrm{i}}(x(T)) = \gamma_{\mathrm{i}} \end{cases}$$

dove $i, j \in \{1, 2\}$ *e* $i \neq j$*.*

Dimostrazione. Per questa dimostrazione applichiamo i quattro step descritti dallo "Schema di Soluzione" al gioco differenziale linear-state.
Iniziamo scrivendo la funzione Hamiltoniana per il giocatore i-esimo:

$$H_{\mathrm{i}}(t, u_{\mathrm{i}}, x, \lambda_{\mathrm{i}}; u_{\mathrm{j}}) = \alpha_{\mathrm{i}}(t, u_{\mathrm{j}})x + \beta_{\mathrm{i}}(t, u_{\mathrm{i}}, u_{\mathrm{j}}) + \lambda_{\mathrm{i}}(\delta(t)x + h(t, u_{\mathrm{i}}, u_{\mathrm{j}}))$$

Step 1. Per ogni $i, j \in \{1, 2\}$ sia:

$$\begin{aligned} u_{\mathrm{i}}^{\#}(t, \lambda_{\mathrm{i}}; u_{\mathrm{j}}) &= \arg\max_{u_{\mathrm{i}}} H_{\mathrm{i}}(t, u_{\mathrm{i}}, x^*, \lambda_{\mathrm{i}}; u_{\mathrm{j}}) \\ &= \arg\max_{u_{\mathrm{i}}} \big\{\beta_{\mathrm{i}}(t, u_{\mathrm{i}}, u_{\mathrm{j}}) + \lambda_{\mathrm{i}} h(t, u_{\mathrm{i}}, u_{\mathrm{j}})\big\} \end{aligned}$$

una funzione ben definita, che coinvolge solo le funzioni dipendenti da u_{i} nell'Hamiltoniana e quindi le funzioni $\beta_{\mathrm{i}}(\cdot)$ e $h_{\mathrm{i}}(\cdot)$. Infatti possiamo vedere che ponendo la derivata prima della funzione Hamiltoniana uguale a zero abbiamo la condizione che ci permette di definire l'esistenza di un punto stazionario. Se vale anche la condizione di concavità rispetto a u_{i} per la funzione Hamiltoniana possiamo dimostrare che il punto stazionario è esattamente il massimo cercato.

Notiamo inoltre che dall'uguaglianza sopra emerge che $u_{\mathrm{i}}^{\#}$ non dipende dallo stato $x(\cdot)$ per come è stato definito il gioco linear-state, e infatti vale che:

$$\frac{\partial H_{\mathrm{i}}}{\partial u_{\mathrm{i}} \partial x} = 0 \quad \text{per} \quad \frac{\partial H_{\mathrm{i}}}{\partial u_{\mathrm{i}}} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 H_{\mathrm{i}}}{\partial x^2} = 0 \quad \text{per} \quad i, j \in \{1, 2\}$$

Step 2. Possiamo assumere che il sistema

$$\begin{cases} u_{\mathrm{i}} & = u_{\mathrm{i}}^{\#}(t, \lambda_{\mathrm{i}}; u_{\mathrm{j}}) \\ u_{\mathrm{j}} & = u_{\mathrm{j}}^{\#}(t, \lambda_{\mathrm{j}}; u_{\mathrm{i}}) \end{cases}$$

nelle due incognite $u_{\mathrm{i}}, u_{\mathrm{j}}$ abbia un'unica soluzione in forma Open-Loop

$$\big(u_{\mathrm{i}}^{\mathrm{OL}}(t, \lambda_{\mathrm{i}}, \lambda_{\mathrm{j}}), u_{\mathrm{j}}^{\mathrm{OL}}(t, \lambda_{\mathrm{i}}, \lambda_{\mathrm{j}})\big)$$

che infatti dipende esclusivamente dalle variabili aggiunte λ_{i}, e dal tempo t.
Step 3. Inoltre possiamo assumere che il sistema "*two-points boundary value problem*":

$$\begin{cases} x'(t) & = \delta(t)x(t) + h(t, u_{\mathrm{i}}^{\mathrm{OL}}(t, \lambda_{\mathrm{i}}, \lambda_{\mathrm{j}}), u_{\mathrm{j}}^{\mathrm{OL}}(t, \lambda_{\mathrm{i}}, \lambda_{\mathrm{j}})) \\ x(0) & = x_0 \\ \lambda_{\mathrm{i}}'(t) & = -\alpha_{\mathrm{i}}(t, u_{\mathrm{j}}^{\mathrm{OL}}(t, \lambda_{\mathrm{i}}, \lambda_{\mathrm{j}})) - \lambda_{\mathrm{i}}(t)\delta(t) \\ \lambda_{\mathrm{i}}(T) & = \gamma_{\mathrm{i}} \end{cases}$$

con $i, j \in \{1, 2\}$ e $i \neq j$ abbia un'unica soluzione ottima $(x^*(t), \lambda_1^*(t), \lambda_2^*(t))$.
Osserviamo che le due equazioni aggiunte sono accoppiate tra loro, ma sono entrambe disaccoppiate dall'equazione del moto, come accadeva in un problema di controllo ottimo deterministico linear-state. Grazie a questo fatto e a quanto assunto nello Step 2, si ha che le equazioni aggiunte sono risolvibili indipendentemente dalle altre incognite dei problemi che compaiono nello studio del gioco differenziale, e la loro soluzione permette di trovare l'espressione per il controllo ottimo $u_{\mathrm{i}}^{\mathrm{N}}(t)$ e successivamente quella per lo stato ottimo $x^*(t)$.
A questo punto abbiamo dimostrato l'esistenza di una soluzione ottima che soddisfa alle condizioni necessarie del Principio del Massimo di Pontryagin, e quindi l'esistenza di un OLNE per il gioco differenziale linear-state.

Step 4. Infine verifichiamo le condizioni di sufficienza. Osserviamo che per un problema linear-state la condizione di concavità in x per la funzione $S_{\mathrm{i}}(x) \equiv \gamma_{\mathrm{i}} x$ è automaticamente soddisfatta. Dobbiamo solo verificare quindi la condizione di concavità per l'Hamiltoniana. Assumiamo allora che la funzione $H_{\mathrm{i}}(t, u_{\mathrm{i}}, x, \lambda_{\mathrm{i}}^*;\ u_{\mathrm{j}}^{\mathrm{OL}}(t, \lambda_{\mathrm{i}}^*(t), \lambda_{\mathrm{j}}^*(t)))$ sia due volte differenziabile e che la sua matrice Hessiana rispetto alle variabili (x, u_{i}), data da:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \partial^2_{u_{\mathrm{i}}, u_{\mathrm{i}}} \beta_{\mathrm{i}}(t, u_{\mathrm{i}}, u_{\mathrm{j}}^{\mathrm{OL}}(t, \lambda_{\mathrm{i}}^*, \lambda_{\mathrm{j}}^*)) + \lambda_{\mathrm{i}}^* \partial^2_{u_{\mathrm{i}}, u_{\mathrm{i}}} h(t, u_{\mathrm{i}}, u_{\mathrm{j}}^{\mathrm{OL}}(t, \lambda_{\mathrm{i}}^*, \lambda_{\mathrm{j}}^*)) \end{pmatrix}$$

sia definita negativa. Allora la funzione Hamiltoniana è concava in (x, u_{i}) per ogni $i, j \in \{1, 2\}$ e $i \neq j$ e sono quindi soddisfatte anche le condizioni di sufficienza.
In conclusione abbiamo ottenuto che

$$u_{\mathrm{i}}^{\mathrm{N}}(t) = u_{\mathrm{i}}^{\mathrm{OL}}(t, \lambda_{\mathrm{i}}^*(t), \lambda_{\mathrm{j}}^*(t))$$

è un OLNE per il gioco differenziale linear-state (2.2). □

Abbiamo quindi visto che per un gioco differenziale linear-state è possibile trovare un Equilibrio di Nash tramite la risoluzione delle equazioni differenziali per le variabili aggiunte λ_{i} che ammetto una soluzione unica per il Teorema di Esistenza e Unicità per ODEs e grazie alle ipotesi di regolarità assunte per le funzioni coinvolte nella definizione di gioco differenziale linear-state. Inoltre abbiamo dimostrato che le equazioni aggiunte sono disaccoppiate rispetto all'equazione del moto del sistema, e quindi la loro risoluzione permette di determinare univocamente sia il controllo ottimo $u_{\mathrm{i}}^{\mathrm{N}}(t)$, $i \in \{1, 2\}$, sia lo stato ottimo $x^*(t)$.
Allora, come abbiamo fatto per un problema di controllo ottimo linear-state, possiamo riassumere quanto ottenuto nel seguente corollario:

Corollario 2.3.1. *Consideriamo il gioco differenziale linear-state definito in* (2.2). *Allora l'Equilibrio di Nash corrispondente, e quindi la soluzione del gioco, si può trovare se e solo se è possibile risolvere le equazioni aggiunte relative al problema:*

$$\begin{cases} \lambda_{\mathrm{i}}'(t) & = -\alpha_{\mathrm{i}}(t, u_{\mathrm{j}}^{\mathrm{OL}}(t, \lambda_{\mathrm{i}}, \lambda_{\mathrm{j}})) - \lambda_{\mathrm{i}}(t)\delta(t) \\ \lambda_{\mathrm{i}}(T) & = \gamma_{\mathrm{i}} \end{cases}$$

per ogni $i, j \in \{1, 2\}$ *e* $i \neq j$.

2.4 Equilibrio di Nash Feedback

Osserviamo che un Equilibrio di Nash Open-Loop porta informazioni solo riguardo al tempo t in cui avviene la scelta del giocatore, mentre non dice nulla su quella che è l'informazione a disposizione dei giocatori al momento della loro decisione, descritta dallo stato del sistema $x(t)$. Questo problema ci suggerisce di introdurre una nuova definizione, in cui la soluzione ottima del gioco dipenda dal tempo t e dallo stato $x(t)$:

Definizione 2.4.1 (Equilibrio di Nash Feedback (FNE)). *Una coppia di funzioni* (φ_1, φ_2) *tali che*

$$\varphi_{\mathrm{i}} : [0, T] \times X \to \mathbb{R} \quad , \quad i = 1, 2$$

è un Equilibrio di Nash Feedback *se per ogni giocatore i esiste un controllo ottimo per il gioco differenziale* (2.1) *generato dalla strategia* $u_{\mathrm{i}}^{\mathrm{N}}(t) = \varphi_{\mathrm{i}}(t, x^*(t))$*, e se soddisfa la condizione:*

$$J_{\mathrm{i}}\big(u_{\mathrm{i}}^{\mathrm{N}}(\cdot), u_{\mathrm{j}}^{\mathrm{N}}(\cdot)\big) \geq J_{\mathrm{i}}\big(u_{\mathrm{i}}(\cdot), u_{\mathrm{j}}^{\mathrm{N}}(\cdot)\big)$$

per ogni $i, j \in \{1, 2\}$ *e* $i \neq j$.

Trovare un Equilibrio di Nash Feedback per un gioco differenziale con N giocatori equivale quindi a risolvere N problemi di controllo ottimo. Osserviamo che se nella definizione si ha che $\varphi_{\mathrm{i}}(t, x) \equiv \varphi_{\mathrm{i}}(t)$, ovvero la strategia non dipende dalla variabile x e quindi dalle azioni passate, si ritrova la definizione di Equilibrio di Nash Open-Loop, mentre non vale il viceversa.

Per trovare un FNE risulta naturale seguire un procedimento che si basa sul Teorema di Hamilton-Jacobi-Bellman e sulla sua applicazione ai problemi di controllo ottimo associati al gioco differenziale. La seguente "Strategia di Soluzione" permette di applicare il teorema e si articola in due step. Il primo fornisce le condizioni necessarie per risolvere l'Equazione di HJB, mentre il secondo permette di trovare l'Equilibrio di Nash in forma di Feedback.

Definiamo la *funzione valore* per un gioco differenziale come:

$$V_{\mathrm{i}}(t, x) = \max_{u_{\mathrm{i}} \in \Omega_{\mathrm{i}}} \int_t^T g_{\mathrm{i}}(s, \varphi_{\mathrm{i}}(s, x(s)), \varphi_{\mathrm{j}}(s, x(s)), x(s))\, dt + S_{\mathrm{i}}(x(T))$$

dove $s \in [0, T]$, e l'*Equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman*:

$$\begin{cases} -\partial_{\mathrm{t}} V_{\mathrm{i}}(t, x) & = \max_{u_{\mathrm{i}} \in \Omega_{\mathrm{i}}} \big\{ \partial_{\mathrm{x}} V_{\mathrm{i}}(t, x) f(t, \varphi_{\mathrm{i}}(t, x), \varphi_{\mathrm{j}}(t, x), x(t)) + \\ & \quad + g_{\mathrm{i}}(t, \varphi_{\mathrm{i}}(t, x), \varphi_{\mathrm{j}}(t, x), x(t)) \big\} \\ V_{\mathrm{i}}(T, x) & = S_{\mathrm{i}}(x(T)) \end{cases}$$

in cui si ha che $u_{\mathrm{i}} \equiv \varphi_{\mathrm{i}}(t, x)$.

Strategia di Soluzione

Step 1. Per ogni $i, j \in \{1, 2\}$ il massimo della funzione a secondo membro nell'Equazione di HJB sia ben definito e sia dato da:

$$u_{\mathrm{i}}^{\#}(t, x, \partial_{\mathrm{x}} V_{\mathrm{i}}; u_{\mathrm{j}}) = \max_{u_{\mathrm{i}} \in \Omega_{\mathrm{i}}} \big\{ \partial_{\mathrm{x}} V_{\mathrm{i}}(t, x) f(t, u_{\mathrm{i}}, u_{\mathrm{j}}, x) + g_{\mathrm{i}}(t, u_{\mathrm{i}}, u_{\mathrm{j}}, x) \big\}$$

dove $u_{\mathrm{i}}^{\#} \equiv \varphi_{\mathrm{i}}^*(t, x^*(t))$.
Step 2. Assumiamo che la funzione valore $V_{\mathrm{i}}(t, x)$ soddisfi l'Equazione di HJB per ogni giocatore i. Allora la sua risoluzione permette di definire un unico FNE:

$$u_{\mathrm{i}}^{\mathrm{N}}(t) = \varphi_{\mathrm{i}}^*(t, x^*(t), \partial_{\mathrm{x}} V_{\mathrm{i}}(t, x^*)) \tag{2.8}$$

con $i, j \in \{1, 2\}$ e $i \neq j$. Ques'ultimo costituisce la soluzione ottima per un gioco differenziale, come quello definito in (2.1).

Consideriamo ora il gioco differenziale linear-state definito in (2.2) e applichiamo il Teorema di Hamilton-Jacobi-Bellman per trovare un equilibrio in forma di Feedback.

Teorema 2.4.1. *Consideriamo il gioco differenziale linear-state definito in* (2.2) *e supponiamo che la funzione valore sia lineare rispetto alla variabile* $x(\cdot)$ *e assuma quindi la seguente forma:*

$$V_{\mathrm{i}}(t, x) = a_{\mathrm{i}}(t)x(t) + b_{\mathrm{i}}(t)$$

dove le funzioni $a_{\mathrm{i}}, b_{\mathrm{i}} : [0, T] \to \mathbb{R}$ *sono ben definite. Allora la risoluzione di un gioco differenziale con il Teorema di Hamilton-Jacobi-Bellman, e quindi la ricerca di un Equilibrio di Nash, equivale a risolvere la seguente equazione differenziale per la funzione* $a_{\mathrm{i}}(\cdot)$*:*

$$\begin{cases} a_{\mathrm{i}}'(t) & = -\alpha_{\mathrm{i}}(t, u_{\mathrm{j}}^{\mathrm{OL}}(t, a_{\mathrm{i}}, a_{\mathrm{j}})) - a_{\mathrm{i}}(t)\delta(t) \\ a_{\mathrm{i}}(T) & = \gamma_{\mathrm{i}} \end{cases}$$

Inoltre l'Equilibrio di Nash in forma di Feedback si identifica con quello Open-Loop per cui vale:

$$u_{\mathrm{i}}^{\mathrm{N}}(t) \equiv \varphi_{\mathrm{i}}^{*}(t, x^{*}(t))$$

Dimostrazione. La dimostrazione è del tutto analoga a quella svolta per risolvere un problema di controllo ottimo linear-state, quindi ne riportiamo solo i passaggi salienti. Per questa dimostrazione applichiamo i due step descritti dalla "Strategia di Soluzione" definita sopra.
Riscriviamo l'Equazione di HJB per i problemi linear-state associati al gioco differenziale, per cui vale:

$$\begin{cases} -\partial_{\mathrm{t}} V_{\mathrm{i}}(t, x) & = \max_{u_{\mathrm{i}} \in \Omega_{\mathrm{i}}} \big\{ \partial_{\mathrm{x}} V_{\mathrm{i}}(t, x)(\delta(t)x(t) + h(t, u_{\mathrm{i}}, u_{\mathrm{j}})) + \\ & \quad + \alpha_{\mathrm{i}}(t, u_{\mathrm{j}})x(t) + \beta_{\mathrm{i}}(t, u_{\mathrm{i}}, u_{\mathrm{j}}) \big\} \\ V_{\mathrm{i}}(T, x) & = \gamma_{\mathrm{i}} x(T) \end{cases}$$

Osserviamo che la funzione valore $V_{\mathrm{i}}(t, x)$ è lineare rispetto alla variabile x per ipotesi, e quindi assume la forma $V_{\mathrm{i}}(t, x) = a_{\mathrm{i}}(t)x(t) + b_{\mathrm{i}}(t)$.
Step 1. Cercando il punto ottimo $u_{\mathrm{i}}^{\#}(\cdot)$ per la funzione da massimizzare nell'Equazione di HJB, possiamo notare che questo non dipende dallo stato del sistema, ma solamente dal tempo t (e dalla funzione $a_{\mathrm{i}}(t)$), poiché:

$$u_{\mathrm{i}}^{\#}(t, a_{\mathrm{i}}) = \max_{u_{\mathrm{i}} \in \Omega_{\mathrm{i}}} \big\{ a_{\mathrm{i}}(t)h(t, u_{\mathrm{i}}, u_{\mathrm{j}}) + \beta_{\mathrm{i}}(t, u_{\mathrm{i}}, u_{\mathrm{j}}) \big\}$$

Step 2. Con ragionamenti analoghi a quelli fatti nella dimostrazione del Teorema 1.4.2, possiamo risolvere l'Equazione di HJB ottenendo l'equazione

differenziale per la funzione $a_{\mathrm{i}}(\cdot)$ voluta.
Inoltre, come abbiamo già osservato nel paragrafo precedente, un gioco differenziale linear-state si caratterizza tra le altre cose per avere il controllo $u_{\mathrm{i}}(\cdot)$, $i \in \{1,2\}$, indipendente dallo stato del sistema $x(\cdot)$, e quindi anche la strategia $\varphi_{\mathrm{i}}(\cdot)$ scelta dal giocatore non dipende dalla variabile di stato. Queste osservazioni sono sufficienti per identificare un Equilibrio di Nash in forma di *Feedback* per un gioco linear-state con quello in forma *Open-Loop*, per cui la strategia di soluzione del gioco, e quindi la soluzione ottima, si riducono a quelle esposte nel paragrafo precedente:

$$u_{\mathrm{i}}^{\mathrm{N}}(t) = u_{\mathrm{i}}^{\mathrm{OL}}(t, a_{\mathrm{i}}^*(t), a_{\mathrm{j}}^*(t))$$

con $i, j \in \{1,2\}$ e $i \neq j$. □

2.5 Legame tra l'Equilibrio di Nash Open-Loop e l'Equilibrio di Nash Feedback

Consideriamo un gioco differenziale linear-state come definito in (2.2) e vediamo quali sono le relazioni tra l'Equilibrio di Nash Open-Loop e l'Equilibrio di Nash Feedback sulla base delle considerazioni fatte nei paragrafi precedenti.
Abbiamo visto che lo studio di un gioco linear-state è particolarmente importate perché ci da la possibilità di descrivere analiticamente un metodo di risoluzione che ci permette di trovare l'espressione dell'Equilibrio di Nash in forma Open-Loop. Infatti la soluzione del gioco differenziale si riduce alla risoluzione delle equazioni differenziali per le funzioni aggiunte $\lambda_{\mathrm{i}}(\cdot)$, $i \in \{1,2\}$, che avevamo ottenuto applicando lo "Schema di Soluzione" al problema:

$$\begin{cases} \lambda_{\mathrm{i}}'(t) & = -\alpha_{\mathrm{i}}(t, u_{\mathrm{j}}^{\mathrm{OL}}(t, \lambda_{\mathrm{i}}, \lambda_{\mathrm{j}})) - \lambda_{\mathrm{i}}(t)\delta(t) \\ \lambda_{\mathrm{i}}(T) & = \gamma_{\mathrm{i}} \end{cases}$$

oppure alla soluzione delle equazioni differenziali per la funzione $a_{\mathrm{i}}(\cdot)$, ottenute applicando il Teorema di HJB:

$$\begin{cases} a_{\mathrm{i}}'(t) & = -\alpha_{\mathrm{i}}(t, u_{\mathrm{j}}^{\mathrm{OL}}(t, a_{\mathrm{i}}, a_{\mathrm{j}})) - a_{\mathrm{i}}(t)\delta(t) \\ a_{\mathrm{i}}(T) & = \gamma_{\mathrm{i}} \end{cases}$$

dove la funzione valore era definita da $V_{\mathrm{i}}(t,x) = a_{\mathrm{i}}(t)x(t) + b_{\mathrm{i}}(t)$.

Per prima cosa osserviamo che le equazioni differenziali per le funzioni $\lambda_{\mathrm{i}}(\cdot)$ e $a_{\mathrm{i}}(\cdot)$ ottenute con i due diversi approcci sono equivalenti. Abbiamo visto anche che esse sono disaccoppiate dall'equazione del moto del sistema, e quindi è possibile risolverle indipendentemente dalle altre variabili del gioco. La loro soluzione permette di determinare il controllo e lo stato ottimi.

Inoltre sia applicando lo "Schema di Soluzione", che il Teorema di HJB, abbiamo potuto osservare che il controllo ottimo $u_{\mathrm{i}}^{\mathrm{N}}(\cdot)$ del problema o la strategia ottima $\varphi_{\mathrm{i}}^{*}(\cdot)$, che permettono di individuare l'Equilibrio di Nash, non dipendono dallo stato del sistema $x(\cdot)$ ma solamente dal tempo t. Questo ci permette di identificare automaticamente un Equilibrio in forma di Feedback con quello Open-Loop e di dare quindi un'unica soluzione per il gioco differenziale linear-state:

$$u_{\mathrm{i}}^{\mathrm{N}}(t) = u_{\mathrm{i}}^{\mathrm{OL}}(t, \lambda_{\mathrm{i}}^{*}(t), \lambda_{\mathrm{j}}^{*}(t))$$

con $i, j \in \{1, 2\}$ e $i \neq j$.

Un gioco differenziale deterministico linear-state quindi risulta essere molto importante perché ne possiamo dare una descrizione analitica e un unico Equilibrio di Nash, che costituisce l'unica soluzione ottima dei problemi di controllo ottimo linear-state associati al gioco, e l'unica soluzione ottima del gioco stesso. Vedremo nel Capitolo 4 che un gioco differenziale linear-state stocastico non rivestirà un ruolo altrettanto importante nello studio dei giochi differenziali stocastici.

Capitolo 3

Problemi di Controllo Ottimo Stocastici

In questo capitolo descriveremo i problemi di controllo ottimo stocastici dandone prima una definizione generale, per poi soffermarci sullo studio di un problema di controllo ottimo stocastico linear-state. Questi problemi si presentano come la massimizzazione del *funzionale obiettivo*, soggetto ad un'equazione differenziale stocastica detta *equazione del moto* del sistema. La loro formulazione risulta quindi simile a quella di un problema deterministico, ma si differenzia per l'aggiunta di un disturbo stocastico nell'equazione del moto. Lo scopo del capitolo sarà quello di capire quanto questo disturbo influenzi la soluzione del problema, e se sia sempre possibile trovare una soluzione unica.
Come abbiamo visto nel Capitolo 1, uno dei principali approcci per risolvere tali problemi di ottimizzazione, è quello di derivare un insieme di condizioni necessarie a cui deve soddisfare la soluzione ottima. Il *Principio del Massimo* permette di definire queste condizioni necessarie e afferma che ogni soluzione ottima, formata da stato e controllo ottimi, deve risolvere il *sistema Hamiltoniano*, che è composto da due equazioni differenziali stocastiche *forward-backward*, e una condizione di massimo sulla *funzione Hamiltoniana*.
Un altro importante approccio per determinare delle condizioni necessarie è dato dalla *programmazione dinamica* che attraverso il *Teorema di Hamilton-Jacobi-Bellman* definisce una equazione differenziale a derivate parziali non lineare del secondo ordine. Dalla risoluzione di questa equazione si può ottenere il controllo ottimo e la funzione valore ottimo del problema.
Applicheremo in seguito entrambi questi Teoremi allo studio di un problema di controllo ottimo stocastico linear-state, cercheremo di capire quali siano le relazioni tra i due diversi approcci, e se i risultati ottenuti si equivalgano. Fondamentale sarà osservare che nel caso di un problema linear-state, la sua risoluzione di ridurrà allo studio di una equazione differenziale lineare non omogenea deterministica, che ammette unica soluzione.

3.1 Problemi di Controllo Ottimo Stocastici

Introduciamo ora una classe più generale di problemi di controllo ottimo rispetto a quelli visti nel Capitolo 1, data dai *problemi di controllo ottimo stocastici.*
Siano $f(t,u,x)$ e $\sigma(t,u,x)$ due funzioni date della forma:

$$f : [0,T] \times U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \sigma : [0,T] \times U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

dove $f(\cdot)$ rappresenta la domanda al tempo t e $\sigma(\cdot)$ rappresenta un fattore di incertezza nella domanda. Assumeremo in seguito che le funzioni $f(\cdot)$ e $\sigma(\cdot)$ siano sufficientemente regolari, e quindi ai fini della nostra trattazione basterà considerarle almeno di classe $\mathcal{C}^1([0,T] \times U \times \mathbb{R})$, (in genere risulta necessario che esse siano almeno $\mathcal{L}^1$, ovvero Lebesgue-misurabili, per le ipotesi di regolarità vedere [3, cap. 2]).
Per poter definire lo *stato del sistema* diamo prima la definizione di *Processo Stocastico*, (per maggiori dettagli vedere [1, cap. 2, pagina 12]).

Definizione 3.1.1 (Processo Stocastico). *Si dice* Processo Stocastico *una famiglia di variabili aleatorie* $\{X(t),\, t \in T \subseteq \mathbb{R}_+\}$ *dipendenti dal tempo, definite su uno spazio campione e a valori su un insieme definito spazio degli stati del processo.*

Allora, dato $x_0 \in \mathbb{R}$ stato iniziale del sistema, consideriamo lo *stato del sistema* $x(t)$ non più come una funzione deterministica, ma come un *processo stocastico*:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(s,u(s),x(s))\,ds + \int_0^t \sigma(s,u(s),x(s))\,dW(s) \text{ per } t \in [0,T]$$

e la seguente equazione differenziale stocastica (SDE):

$$\begin{cases} dx(t) & = f(t,u(t),x(t))dt + \sigma(t,u(t),x(t))dW(t) \\ x(0) & = x_0 \end{cases}$$

La funzione $u(\cdot)$ è il *controllo del sistema*, mentre $W(t)$ è un *moto Browniano*, detto anche *Processo di Wiener*, che descrive l'evoluzione del fattore di incertezza o rischio nell'equazione del moto del sistema.

Definizione 3.1.2 (Moto Browniano). *Definiamo* moto Browniano *un processo stocastico* $W(\cdot)$ *tale che:*

- $W(0) = 0$*;*
- *per ogni tempo* $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_\mathrm{n}$*, le variabili casuali* $W(t_1)$*,* $W(t_2) - W(t_1)$*,* $\cdots$ *,* $W(t_\mathrm{n}) - W(t_{\mathrm{n}-1})$ *sono indipendenti ("incrementi indipendenti");*

- *$W(t) - W(s)$ ha una distribuzione Gaussiana $\mathcal{N}(0, t-s)$ $\forall\, 0 \leq s \leq t$;*
- *$W(t)$ ha una traiettoria continua, ma è derivabile a tratti.*

Notiamo inoltre che $\mathbb{E}(W(t)) = 0$, $\mathbb{E}(W^2(t)) = t$ $\forall$ tempo $t \geq 0$, dove con $\mathbb{E}(\cdot)$ indichiamo il *valore atteso* (per una descrizione dettagliata e le applicazioni del moto Browniano vedere [1, cap. 3, pagina 41] oppure [2, cap. 4, pagina 36]).

Per dare un controllo ammissibile per il problema di controllo ottimo, è naturale richiedere che il controllo $u(\cdot)$ sia un processo stocastico *adattato* al processo $x(t)$ ([3, cap. 2, pagina 63]), ovvero cerchiamo una funzione $u(\cdot)$ che al tempo t dipenda solo dagli eventi passati osservati per $x(\cdot)$, quindi

$$u(\cdot) \in U[0,T] = \{u : [0,T] \to \mathbb{R} \quad | \quad u(\cdot) \text{ sia un processo adattato}\}$$

Un controllo $u(\cdot)$ è detto *ammissibile* e $(x(\cdot), u(\cdot))$ rappresenta la *coppia stato-controllo ammissibili* se:

- $u(t) \in U \subseteq \mathbb{R} \quad \forall t \in [0,T]$;
- per ogni punto iniziale (t, x_0), la SDE ammette un'unica soluzione:

$$\begin{cases} dx(s) & = f(s, u(s), x(s))ds + \sigma(s, u(s), x(s))dW(s) \\ x(t) & = x_0 \end{cases}$$

- $f(\cdot)$ e $\sigma(\cdot)$ sono sufficientemente regolari da garantire l'esistenza di stato e controllo, (in genere si considerano Lebesgue-misurabili $\mathcal{L}^1$: si veda [3, cap. 2, pagina 63]).

Il controllo $u(\cdot)$ si può presentare in due modi diversi:

- in forma *Open-Loop*, ovvero come un processo adattato alla filtrazione Browniana e dipendente dal tempo: $t \mapsto u(t)$;
- in forma di *Feedback*, ovvero come funzione deterministica del tempo e dello stato: $(t, x) \mapsto u(t, x(t))$.

Consideriamo infine il *funzionale obiettivo* per un problema di controllo ottimo stocastico. Date $g : [0,T] \times U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiamo *funzione valore* del problema:

$$J : U \to \mathbb{R} \qquad J(u) = \mathbb{E}\left[\int_0^T g(t, u(t), x(t))\, dt + S(x(T))\right]$$

dove consideriamo le funzioni $g(\cdot)$ e $S(\cdot)$ sufficientemente regolari, e quindi almeno di classe $\mathcal{C}^1$, affinché l'integrale sia convergente e sia garantita l'esistenza e l'unicità della soluzione ottima.

Un problema di controllo ottimo si può scrivere formalmente come la massimizzazione di $J(u)$ per $u \in U$: perciò definiamo *funzione valore ottimo* $\bar{J}(u) = \max_{\mathrm{u \in U}} J(u)$. Se esiste un controllo ammissibile che soddisfa tale massimizzazione, allora è detto *controllo ottimo del sistema*, e lo chiameremo $u^*(t)$.
In conclusione, diamo la definizione generale di problema di controllo ottimo stocastico, dove assumiamo che le funzioni coinvolte siano definite come sopra.

Definizione 3.1.3 (**Problema di Controllo Ottimo Stocastico**). *Un problema di controllo ottimo stocastico consiste nella massimizzazione di un funzionale obiettivo, soggetto all'equazione del moto del sistema, ovvero ad una equazione differenziale stocastica. Nella sua formulazione generale quindi si presenta come:*

$$\bar{J}(u) = \max_{\mathrm{u \in U}} J(u) = \max_{\mathrm{u \in U}} \mathbb{E}\left[\int_0^T g(t, u(t), x(t))\, dt + S(x(T))\right] \tag{3.1}$$

$$s.\ a \begin{cases} dx(t) & = f(t, u(t), x(t))dt + \sigma(t, u(t), x(t))dW(t) \\ x(0) & = x_0 \qquad\qquad \forall\, t \in [0, T] \end{cases}$$

dove le funzioni g, S, f, σ sono note e ben definite.

3.2 Problemi di Controllo Ottimo Linear-State

Analogamente a quanto fatto nel caso deterministico, definiamo un *problema di controllo ottimo linear-state*, ovvero un problema di controllo in cui le funzioni $g(\cdot)$, $f(\cdot)$, $\sigma(\cdot)$ e $S(\cdot)$ sono lineari rispetto allo stato del sistema $x(t)$.

Definizione 3.2.1 (**Problema di Controllo Ottimo Stocastico Linear-State**). *Definiamo* Problema di Controllo Ottimo Stocastico Linear-State *il seguente problema di controllo ottimo stocastico:*

$$\max_{\mathrm{u \in U}} J(u) = \max_{\mathrm{u \in U}} \mathbb{E}\left[\int_0^T (\alpha(t)x(t) + \beta(t, u(t)))\, dt + \gamma x(T)\right] \tag{3.2}$$

$$s.\ a \begin{cases} dx(t) & = [\delta(t)x(t) + h(t, u(t))]dt + [\varepsilon(t)x(t) + k(t, u(t))]dW(t) \\ x(0) & = x_0 \end{cases}$$

dove $\alpha(\cdot)$, $\delta(\cdot)$, $\varepsilon(\cdot)$ e $\beta(\cdot)$, $h(\cdot)$, $k(\cdot)$ sono funzioni note:

$$\alpha, \delta, \varepsilon : [0, T] \to \mathbb{R} \qquad e \qquad \beta, h, k : [0, T] \times U \to \mathbb{R}$$

e sufficientemente regolari, quindi di classe $\mathcal{C}^1$, in accordo con la definizione generale.

3.3 Principio del Massimo

In questo paragrafo analizzeremo, attraverso la formulazione del Principio del Massimo, le condizioni necessarie per lo studio di un problema di controllo ottimo. Con questo approccio potremo trovare una soluzione ottima $(u^*(\cdot), x^*(\cdot))$ in forma Open-Loop, ovvero in cui il controllo ottimo sia un processo stocastico dipendente solo dal tempo, per cui $t \mapsto u^*(t)$.
Consideriamo il seguente sistema per un problema di controllo stocastico, con f, σ, g, S definite come sopra:

$$\begin{cases} dx(t) & = f(t, u(t), x(t))dt + \sigma(t, u(t), x(t))dW(t) \\ x(0) & = x_0 \qquad\qquad\qquad\qquad \forall\, t \in [0, T] \end{cases}$$

e il funzionale obiettivo dato da:

$$J(u(\cdot)) = \mathbb{E}\left[\int_0^T g(t, u(t), x(t))\, dt + S(x(T))\right]$$

Dato il controllo $u \in U$ assumiamo che la SDE scritta sopra ammetta un'unica soluzione $x(\cdot) \equiv x(\cdot, u(\cdot))$ e che il funzionale sia ben definito, [3, cap. 3, pagina 114]. Allora se $u^*(t)$ soddisfa a

$$J(u^*) = \max_{\mathrm{u} \in \mathrm{U}} J(u(\cdot))$$

si dice che $u^*(\cdot)$ è il *controllo ottimo* e $x^*(\cdot)$ è il corrispondente *stato ottimo* per il problema.

Introduciamo ora la *funzione Hamiltoniana* $H(t, u, x, p, q) : [0, T] \times U \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da:

$$H(t, u, x, p, q) = p(t)f(t, u, x) + q(t)\sigma(t, u, x) + g(t, u, x)$$

dove $(p(\cdot), q(\cdot))$ è la coppia di processi adattati che serve a definire l'*equazione aggiunta* nel Principio del Massimo:

$$\begin{cases} dp(t) & = -[f_{\mathrm{x}}(t, u, x)p(t) + \sigma_{\mathrm{x}}(t, u, x)q(t) + g_{\mathrm{x}}(t, u, x)]dt + q(t)dW(t) \\ p(T) & = S_{\mathrm{x}}(x(T)) \qquad\qquad\qquad\qquad \forall\, t \in [0, T] \end{cases}$$

Un'equazione di questo tipo è detta *backward stochastic differential equation (BSDE)* e nella sua scrittura, come faremo pure in seguito, con F_{x} e $F_{\mathrm{x,x}}$ denotiamo rispettivamente le derivate prima e seconda di una funzione F rispetto alla variabile x.
Possiamo osservare che la funzione Hamiltoniana definita sopra coincide con l'Hamiltoniana $H(t, u, x, p)$ definita nel caso deterministico non appena $\sigma(\cdot) \equiv 0$.

È necessario inoltre introdurre, al fine di enunciare il Principio del Massimo, la *funzione Hamiltoniana Generalizzata* $G(t,u,x,p,P) : [0,T] \times U \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$G(t,u,x,p,P) = \frac{1}{2}P(t)\sigma^2(t,u,x) + p(t)f(t,u,x) + g(t,u,x)$$

ed un'altra coppia di processi adattati $(P(\cdot), Q(\cdot))$ che descrivono l'evoluzione del fattore di rischio o incertezza nel sistema, e la corrispondente *equazione aggiunta*:

$$\begin{cases} dP(t) & = -[2f_{\mathrm{x}}(t,u,x)P(t) + \sigma_{\mathrm{x}}^2(t,u,x)P(t) + 2\sigma_{\mathrm{x}}(t,u,x)Q(t) + \\ & \quad + H_{\mathrm{x,x}}(t,u,x,p,q)]dt + Q(t)dW(t) \\ P(T) & = S_{\mathrm{x,x}}(x(T)) \end{cases}$$

Osserviamo che la funzione H dipende da $p(\cdot)$ e $q(\cdot)$, mentre G dipende da $p(\cdot)$ e $P(\cdot)$ e confrontando le due espressioni si ottiene che:

$$\begin{aligned} H(t,u,x,p,q) &= q(t)\sigma(t,u,x) + H(t,u,x) \\ G(t,u,x,p,P) &= \frac{1}{2}P(t)\sigma^2(t,u,x) + H(t,u,x) \end{aligned}$$

Teorema 3.3.1 (Principio del Massimo). *Sia $(x^*(\cdot), u^*(\cdot))$ la coppia stato-controllo ottimi per un problema di controllo ottimo stocastico. Allora esistono due coppie di processi stocastici $(p(\cdot), q(\cdot))$ e $(P(\cdot), Q(\cdot))$ appartenenti ad $\mathcal{L}^2([0,T], \mathbb{R})$ che soddisfano le equazioni aggiunte e tali che valga la seguente disequazione, detta* disuguaglianza variazionale*:*

$$H(t,u^*,x^*,p,q) - H(t,u,x^*,p,q) - \frac{1}{2}(\sigma(t,u^*,x^*) - \sigma(t,u,x^*))^2 P(t) \geq 0 \qquad \forall u, \forall t \in [0,T]$$

o equivalentemente valga la condizione del massimo*:*

$$\tilde{H}(t,u^*(t),x^*(t)) = \max_{\mathrm{u} \in \mathrm{U}} \tilde{H}(t,u,x^*(t)) \qquad \forall t \in [0,T]$$

dove

$$\begin{aligned} \tilde{H}(t,u,x) &= p(t)f(t,u,x) + q(t)\sigma(t,u,x) + g(t,u,x) + \\ & \quad + \frac{1}{2}P(t)\sigma(t,u,x)(\sigma(t,u,x) - 2\sigma(t,u^*,x^*)) \\ &= H(t,u,x,p,q) + \frac{1}{2}P(t)\sigma(t,u,x)(\sigma(t,u,x) - 2\sigma(t,u^*,x^*)) \end{aligned}$$

Dimostrazione. Si può vedere [3, cap. 3, pagina 123]. □

Come per il caso deterministico, si può scrivere l'equazione del moto in funzione dell'equazione aggiunta e delle derivate della funzione Hamiltoniana:

$$\begin{cases} dx(t) &= H_{\mathrm{p}}(t,u(t),x(t),p(t),q(t))dt + H_{\mathrm{q}}(t,u(t),x(t),p(t),q(t))dW(t) \\ x(0) &= x_0 \\ dp(t) &= -H_{\mathrm{x}}(t,u(t),x(t),p(t),q(t))dt + q(t)dW(t) \\ p(T) &= S_{\mathrm{x}}(x(T)) \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \forall t \in [0,T] \end{cases}$$

La combinazione di questo sistema e dell'equazione aggiunta in $(P(\cdot), Q(\cdot))$ è detto *sistema stocastico Hamiltoniano*, la cui soluzione è la 6-upla $(x(\cdot), u(\cdot), p(\cdot), q(\cdot), P(\cdot), Q(\cdot))$.
Osserviamo infine che se $\sigma(t,u,x) \equiv \sigma(t,x)$, ovvero non dipende dalla variabile u, allora $H(t,u^*,x^*,p,q) = \max_{\mathrm{u}\in\mathrm{U}} H(t,u,x,p,q)$ non dipende da $(P(\cdot), Q(\cdot))$, e si ha quindi una situazione parallela al caso deterministico.

Come nel caso deterministico, il Principio del Massimo fornisce le condizioni necessarie per la risoluzione di un problema di controllo ottimo; qui non trattiamo le condizioni sufficienti di ottimalità per cui si suggerisce [3, cap. 3, pagina 137]. Non diamo inoltre una dimostrazione del Principio del Massimo, ma discutiamo la sua applicazione ad un problema di controllo ottimo linear-state.

Consideriamo il problema di controllo ottimo stocastico linear-state definito precedentemente in (3.2), e supponiamo che $(x^*(\cdot), u^*(\cdot))$ sia una coppia stato-controllo ottimo. Applichiamo ora il Principio del Massimo a questo problema dividendo la risoluzione in due parti principali. Per prima cosa cercheremo l'espressione per la funzione Hamiltoniana e le equazioni aggiunte, e in seguito faremo vedere che è possibile trovare un punto di massimo $u^{\#}(t,p)$ per la funzione $H(\cdot)$. Infine, dopo alcune osservazioni sulle equazioni aggiunte, vedremo che la risoluzione di un problema di controllo ottimo stocastico linear-state equivale a risolvere due equazioni differenziali, una per lo stato $x(\cdot)$ e una per la funzione aggiunta $p(\cdot)$. In particolare vedremo che l'equazione differenziale stocastica per $p(\cdot)$ si riduce ad una equazione differenziale ordinaria, che ammette quindi soluzione per il Teorema di Esistenza e Unicità per ODEs richiamato nel paragrafo 1.3.
Prima di proseguire con la formalizzazione di questo risultato, richiamiamo un importante teorema che ci servirà in seguito, sulle equazioni differenziali stocastiche.

Teorema 3.3.2 (Esistenza e Unicità per SDEs). *Supponiamo che le funzioni $f : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\sigma : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ siano continue e soddisfino le seguenti condizioni:*

- $|f(t,x) - f(t,y)| \leq L|x-y|$ *e* $|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq L|x-y|$ $\forall\, 0 \leq t \leq T$, $x, y \in \mathbb{R}$ *(Lipschitziana in x, y, uniformemente in t);*

- $|f(t,x)| \leq L(1+|x|)$ *e* $|\sigma(t,x))| \leq L(1+|x|)$ $\forall\, 0 \leq t \leq T$, $x, y \in \mathbb{R}$ *per una costante* L*;*
- x_0 *sia una variabile casuale tale che* $\mathbb{E}(|x_0|^2) < \infty$*;*

Allora esiste un'unica soluzione $x(\cdot)$ *per l'equazione differenziale stocastica:*

$$\begin{cases} dx(t) & = f(t,x)dt + \sigma(t,x)dW(t) \\ x(0) & = x_0 \end{cases}$$

Dimostrazione. Si rimanda a [1, cap. 5, pagine 90-91]. □

Possiamo formalizzare ora l'applicazione del Principio del Massimo ad un problema di controllo ottimo stocastico linear-state nel seguente risultato:

Teorema 3.3.3. *Consideriamo il problema di controllo ottimo linear-state definito precedentemente in* (3.2)*, e supponiamo che le funzioni coinvolte siano sufficientemente regolari. Allora la risoluzione di questo problema tramite il Principio del Massimo equivale a risolvere due equazioni differenziali stocastiche* forward-backward*:*

$$\begin{cases} dx(t) & = [\delta(t)x(t) + h(t,u^{\#}(t))]dt + [\varepsilon(t)x(t) + k(t,u^{\#}(t))]dW(t) \\ x(0) & = x_0 \\ dp(t) & = -[\delta(t)p(t) + \varepsilon(t)q(t) + \alpha(t)]dt + q(t)dW(t) \\ p(T) & = \gamma \end{cases}$$

Dimostrazione. Dividiamo la dimostrazione in due parti principali, e applichiamo il Principio del Massimo al problema di controllo ottimo stocastico linear-state.
Step 1. La funzione Hamiltoniana è data da:

$$\begin{aligned} H(t,u,x,p,q) = p(t)[\delta(t)x(t) + h(t,u(t))] + q(t)[\varepsilon(t)x(t) + k(t,u(t))]+ \\ + \alpha(t)x(t) + \beta(t,u(t)) \end{aligned}$$

e le equazioni aggiunte assumono la forma, per $t \in [0,T]$:

$$\begin{cases} dp(t) & = -[\delta(t)p(t) + \varepsilon(t)q(t) + \alpha(t)]dt + q(t)dW(t) \\ p(T) & = \gamma \end{cases}$$

$$\begin{cases} dP(t) & = -[2\delta(t)P(t) + \varepsilon^2(t)P(t) + 2\varepsilon(t)Q(t) + H_{\mathrm{x,x}}]dt + Q(t)dW(t) \\ P(T) & = 0 \end{cases}$$

dove le derivate prima e seconda della funzione Hamiltoniana rispetto alla variabile x sono $H_{\mathrm{x}} = \delta(t)p(t) + \varepsilon(t)q(t) + \alpha(t)$, e quindi $H_{\mathrm{x,x}} = 0$.
Consideriamo ora l'equazione differenziale stocastica per $P(\cdot)$ e vediamo che non influisce nella risoluzione di un problema linear-state. Osserviamo che

la condizione finale $P(T) = 0$ ci permette di trovare una soluzione costante per il processo $Q(t)$ che risulta essere quindi $Q(t) \equiv 0$. Allora, sostituendo quanto appena trovato, vediamo che l'equazione differenziale stocastica per $P(\cdot)$ si riduce ad una equazione differenziale deterministica lineare omogenea:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}P(t) & = -[2\delta(t) + \varepsilon^2(t)]P(t) \\ P(T) & = 0 \end{cases}$$

che per il Teorema di Esistenza e Unicità per ODEs ammette soluzione costante $P(t) \equiv 0$. Allora una soluzione ottima per i processi $(P(\cdot), Q(\cdot))$ è $(P^*(\cdot), Q^*(\cdot)) = (0, 0)$.
Cerchiamo ora di massimizzare la funzione Hamiltoniana, e per questo calcoliamo le derivate prima e seconda di quest'ultima rispetto a u. In particolare ponendo la derivata prima $H_{\mathrm{u}} = 0$ si ottiene un punto stazionario $u^{\#}$, mentre la derivata seconda, se soddisfa $H_{\mathrm{u,u}} < 0$, fornisce la condizione di concavità che garantisce che il punto stazionario sia effettivamente il massimo cercato, per cui possiamo porre $u^{\#} \equiv u^*$:

$$\frac{\partial}{\partial u}H(t,u,x,p,q) = p(t)\frac{\partial}{\partial u}h(t,u) + q(t)\frac{\partial}{\partial u}k(t,u) + \frac{\partial}{\partial u}\beta(t,u) = 0$$
$$\frac{\partial^2}{\partial u^2}H(t,u,x,p,q) = p(t)\frac{\partial^2}{\partial u^2}h(t,u) + q(t)\frac{\partial^2}{\partial u^2}k(t,u) + \frac{\partial^2}{\partial u^2}\beta(t,u) < 0$$

Osserviamo che il controllo ottimo $u^*(\cdot)$ trovato è in forma Open-Loop poiché dipende solamente dal tempo t, e dalle funzioni aggiunte $p(t)$ e $q(t)$.

Step 2. Il sistema stocastico allora è dato da:

$$\begin{cases} dx(t) & = [\delta(t)x(t) + h(t, u^{\#}(t))]dt + [\varepsilon(t)x(t) + k(t, u^{\#}(t))]dW(t) \\ x(0) & = x_0 \\ dp(t) & = -[\delta(t)p(t) + \varepsilon(t)q(t) + \alpha(t)]dt + q(t)dW(t) \\ p(T) & = \gamma \end{cases}$$

La risoluzione delle SDEs, che esiste ed è unica grazie alle ipotesi di regolarità che abbiamo supposto nella definizione del problema di controllo ottimo linear-state e al Teorema di Esistenza e Unicità per SDEs richiamato sopra, fornisce la soluzione ottima $(x^*(\cdot), u^*(\cdot))$ del problema di controllo ottimo stocastico linear-state. $\square$

Possiamo in realtà dire qualcosa in più sulla soluzione del sistema stocastico Hamiltoniano. Osservando l'equazione differenziale per $p(\cdot)$, vediamo che ammette la soluzione costante $q(t) \equiv 0$ e quindi si riduce ad una equazione differenziale deterministica, e in particolare alla stessa equazione differenziale per la funzione aggiunta $p(\cdot)$ che avevamo trovato per un problema linear-state deterministico.

Osserviamo quindi che dallo studio di un problema di controllo ottimo stocastico linear-state con il Principio del Massimo, abbiamo ottenuto una equazione differenziale stocastica per lo stato del sistema $x(\cdot)$, che ammette soluzione per il Teorema di Esistenza e Unicità per SDEs, e un'equazione differenziale del primo ordine deterministica lineare non omogenea per la funzione aggiunta $p(\cdot)$, che per il Teorema di Esistenza e Unicità per ODEs ammette una unica soluzione.
Possiamo osservare inoltre che l'equazione differenziale per la funzione aggiunta $p(\cdot)$ non dipende dall'altra incognita del problema $x(\cdot)$, ovvero le due equazioni sono disaccoppiate. Infatti è possibile risolvere l'equazione differenziale per $p(\cdot)$ indipendentemente dalle altre variabili, e quindi sostituendo questa soluzione nell'espressione trovata precedentemente per $u^{\#}(t,p)$, si ottiene il controllo ottimo $u^*(t) = u^{\#}(t, p(t))$. Questo infine permette di risolvere anche l'equazione del moto e di trovare quindi lo stato ottimo del sistema $x^*(\cdot)$. In questo modo il problema di controllo ottimo linear-state risulta completamente risolto.

In conclusione, possiamo riassumere queste ultime considerazioni nel seguente corollario:

Corollario 3.3.1. *Consideriamo il problema di controllo ottimo stocastico linear-state come definito in* (3.2)*, e supponiamo che le funzioni coinvolte siano sufficientemente regolari. Allora per poterne dare una soluzione completa tramite il Principio del Massimo è sufficiente poter risolvere l'equazione aggiunta associata al problema:*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}p(t) & = -\alpha(t) - \delta(t)p(t) \\ p(T) & = \gamma \end{cases}$$

3.4 Teorema di Hamilton-Jacobi-Bellman

Consideriamo ora un secondo approccio alla risoluzione di un problema di controllo ottimo, dato dal Teorema di Hamilton-Jacobi-Bellman. Anche con questo Teorema, come abbiamo fatto nel paragrafo precedente, formuleremo delle condizioni necessarie a cui deve soddisfare la soluzione ottima del problema (u^*, x^*). In questo caso troveremo il controllo ottimo tramite la risoluzione di un'equazione a derivate parziali (PDE), conosciuta come *Equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman*, e in genere sarà un controllo in forma di Feedback, che dipende dal tempo t e dallo stato del sistema $x(t)$.

Fissato un tempo t, $0 \leq t \leq T$, e un punto $y \in \mathbb{R}$, definiamo il seguente problema di controllo ottimo $P_{\mathrm{t,y}}$, con condizioni iniziali (t, y):

$$\max_{\mathrm{u} \in \mathrm{U}} J(u) = \max_{\mathrm{u} \in \mathrm{U}} \mathbb{E}\left[\int_t^T g(s, u(s), x(s))\, ds + S(x(T))\right]$$

$$\text{s. a} \begin{cases} dx(s) & = f(s, u(s), x(s))ds + \sigma(s, u(s), x(s))dW(s) \\ x(t) & = y \end{cases}$$

dove $u(s, y) \in U \ \forall (s, y) \in [t, T] \times \mathbb{R}$ è il controllo del sistema e supponiamo che le funzioni g, S, f, σ siano sufficientemente regolari (almeno $\mathcal{C}^1$). Osserviamo che rispetto a questa nuova definizione, il problema di controllo iniziale è P_{0,x_0} .

La *funzione valore* è definita da

$$J : \mathbb{R}_+ \times U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad J(t, u, x) = \mathbb{E}\left[\int_t^T g(s, u(s), x(s))\, ds + S(x(T))\right]$$

La *funzione valore ottimo* invece è

$$V : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad V(t, x) = \max_{\mathrm{u} \in \mathrm{U}} J(t, u, x) \quad , \quad V(T, x) = S(x(T))$$

Teorema 3.4.1 (**Hamilton-Jacobi-Bellman**). *Assumiamo che esista un controllo ottimo $u^*(\cdot)$ per il problema di controllo ottimo e che la funzione valore ottimo sia sufficientemente regolare $V \in \mathcal{C}^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R})$, ovvero appartenga all'insieme delle funzioni $v : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che le derivate v_{t}, v_{x}, $v_{\mathrm{x,x}}$ siano continue in (t, x). Allora si ha che:*

- *$V(\cdot)$ soddisfa l'Equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB), ovvero la seguente PDE:*

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial t} V(t, x) & = \max_{\mathrm{u} \in \mathrm{U}} \Big\{ g(t, u, x) + V_{\mathrm{x}}(t, x) f(t, u, x) + \\ & \qquad + \frac{1}{2} V_{\mathrm{x,x}}(t, x) \sigma^2(t, u, x) \Big\} \\ V(T, x) & = S(x(T)) \end{cases}$$

  dove con V_{x} e $V_{\mathrm{x,x}}$ si indicano le derivate prima e seconda della funzione $V(t, x)$ rispetto alla variabile x;

- *$\forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}$ il massimo nell'Equazione di HJB è dato da $u^{\#} \equiv u^*(t, x)$.*

Dimostrazione. Vedere [3, cap. 4, pagina 183]. □

Per maggiori dettagli sulle assunzioni fatte nel Teorema, quali la regolarità della funzione valore e l'esistenza del controllo ottimo si veda [2, cap. 19, pagina 277] oppure [3, cap. 4, pagina 177-178], mentre per quanto riguarda l'espressione dell'Equazione di HJB, e la sua applicazione in seguito, si rimanda alla teoria delle equazioni differenziali stocastiche e alla Formula di Itô [2, cap. 4-5], oppure [1, cap. 4, pagina 65] e [1, cap. 5].

Inoltre il Teorema di Hamilton-Jacobi-Bellman non tratta le condizioni sufficienti che sono invece date dal *Teorema di Verifica*, ma solamente le condizioni necessarie per trovare una funzione valore ottimo e il controllo ottimo (per le condizioni sufficienti vedere quindi [3, cap. 4, pagina 186] oppure [2, cap. 19, pagina 280]).
Infine, analogamente a quanto fatto per il Principio del Massimo, non diamo una dimostrazione del Teorema di HJB, ma riportiamo la sua applicazione ad un problema di controllo ottimo stocastico linear-state.

Consideriamo quindi il problema di controllo ottimo stocastico linear-state come scritto in (3.2), e fissiamo $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}$. Applicheremo il Teorema di Hamilton-Jacobi-Bellman dividendo il ragionamento in due parti principali. Per prima cosa scriveremo l'Equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman nel caso particolare di un problema di controllo ottimo stocastico linear-state, e supporremo l'esistenza della funzione valore per poter trovare il punto di massimo nell'Equazione di HJB. In seguito risolveremo l'equazione a derivate parziali del secondo ordine e potremmo osservare che otterremo due equazioni differenziali deterministiche del primo ordine, che siamo quindi in grado di risolvere grazie al Teorema di Esistenza e Unicità per ODEs.
Possiamo formalizzare questo ragionamento nel seguente risultato:

Teorema 3.4.2. *Consideriamo il problema di controllo ottimo stocastico linear-state definito precedentemente in* (3.2)*, e supponiamo che le funzioni coinvolte siano sufficientemente regolari. Supponiamo inoltre che la funzione valore sia lineare rispetto allo stato* $x(t)$ *e che abbia quindi la seguente espressione*

$$V(t, x) = a(t)x(t) + b(t)$$

dove assumiamo che le funzioni a, $b : [0, T] \to \mathbb{R}$ *siano sufficientemente regolari. Allora la risoluzione di un problema di controllo ottimo stocastico linear-state tramite il Teorema di Hamilton-Jacobi-Bellman equivale a risolvere le due seguenti equazioni differenziali:*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}a(t) & = -a(t)\delta(t) - \alpha(t) \\ a(T) & = \gamma \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}b(t) & = -a(t)h(t, u^{\#}(t, a(t))) - \beta(t, u^{\#}(t, a(t))) \\ b(T) & = 0 \end{cases}$$

Dimostrazione. Dividiamo la dimostrazione in due step principali:
Step 1. L'Equazione di HJB per un problema di controllo ottimo stocastico

assume la seguente forma:

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial t}V(t,x) & = \max_{\mathrm{u}\in\mathrm{U}}\Big\{\alpha(t)x(t)+\beta(t,u)+V_{\mathrm{x}}(t,x)[\delta(t)x(t)+h(t,u)]+ \\ & \quad +\frac{1}{2}V_{\mathrm{x,x}}(t,x)[\varepsilon(t)x(t)+k(t,u)]^2\Big\} \\ V(T,x) & = \gamma x(T) \end{cases}$$

Per semplicità chiamiamo la funzione di cui si deve trovare il massimo nell'Equazione di HJB $M(t,u,x)$ e calcoliamo tale massimo per $u \in U \subseteq \mathbb{R}$. Imponendo che $\frac{\partial}{\partial u}M = 0$ troviamo un punto stazionario $u^{\#}$ candidato a realizzare il massimo, mentre se risulta essere $\frac{\partial^2}{\partial u^2}M < 0$ è verificata anche la condizione di concavità, che garantisce che il punto stazionario sia esattamente il massimo cercato, e quindi $u^{\#} \equiv u^*(t,x)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u}M(t,u,x) = \frac{\partial}{\partial u}\beta(t,u) + V_{\mathrm{x}}(t,x)\frac{\partial}{\partial u}h(t,u) + \\ + V_{\mathrm{x,x}}(t,x)(\varepsilon(t)x(t)+k(t,u))\frac{\partial}{\partial u}k(t,u) \end{aligned}$$

Step 2. Supponiamo ora, come nelle ipotesi del teorema, che la funzione valore sia lineare nello stato $x(\cdot)$ e che quindi si possa scrivere come $V(t,x) = a(t)x(t) + b(t)$. Allora le derivate della funzione valore rispetto al tempo t e allo stato x sono

$$\frac{\partial}{\partial t}V(t,x) = a'(t)x(t) + b'(t) \quad , \quad \frac{\partial}{\partial x}V(t,x) = a(t) \quad , \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}V(t,x) = 0$$

e sostituendo queste espressioni nell'Equazione di HJB otteniamo:

$$a'(t)x(t) + b'(t) + \alpha(t)x(t) + \beta(t,u^*(t)) + a(t)(\delta(t)x(t) + h(t,u^*(t))) = 0$$

per cui, raccogliendo rispetto alla variabile x:

$$x(t)[a'(t) + \alpha(t) + a(t)\delta(t)] + b'(t) + \beta(t,u^*(t)) + a(t)h(t,u^*(t)) = 0$$

Infine da $V(T,x) = \gamma x(T) = a(T)x(T) + b(T)$, e per il principio di identità dei polinomi, otteniamo le condizioni finali $a(T) = \gamma$ e $b(T) = 0$.
Allora la soluzione delle due seguenti equazioni differenziali

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}a(t) & = -\alpha(t) - a(t)\delta(t) \\ a(T) & = \gamma \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}b(t) & = -\beta(t,u^*(t)) - a(t)h(t,u^*(t)) \\ b(T) & = 0 \end{cases}$$

fornisce le espressioni per le funzioni $a(t)$ e $b(t)$. Queste sostituite in $V(t,x)$ e $u^*(t,x)$ permettono di trovare la funzione valore ottimo e il controllo ottimo del problema, ovvero la soluzione al problema di controllo ottimo. Osserviamo che per un problema linear-state non troviamo un controllo Feedback come accade in generale, ma un controllo che dipende solamente dal tempo t e dalla funzione $a(t)$ a causa della linearità rispetto allo stato che abbiamo assunto per le funzioni coinvolte nella definizione di problema di controllo ottimo linear-state. Il controllo ottimo $u^*(t,a(t))$ è quindi in forma Open-Loop. □

Osserviamo che abbiamo ottenuto due equazioni differenziali ordinarie, che sappiamo ammettere un'unica soluzione per il Teorema di Esistenza e Unicità per ODEs. Inoltre tali equazioni sono esattamente le stesse che avevamo trovato studiando un problema linear-state deterministico.
Possiamo in realtà dire di più: le due equazioni sono disaccoppiate. Infatti l'equazione differenziale per $a(\cdot)$ non dipende dalla variabile $b(\cdot)$, e quindi è possibile risolverla indipendentemente. Sostituendo l'espressione trovata per la funzione $a(\cdot)$ nell'equazione per $b(\cdot)$ osserviamo che la risoluzione di quest'ultima si riduce al calcolo di un integrale, poiché tutte le funzioni coinvolte sono note e univocamente determinate. Inoltre l'integrale per la funzione $b(\cdot)$ è ben definito secondo Riemann grazie alle ipotesi di regolarità che abbiamo assunto per le funzioni $a(\cdot)$, $h(\cdot)$ e $\beta(\cdot)$ coinvolte. In conclusione, possiamo riassumere quanto trovato nel seguente corollario.

Corollario 3.4.1. *Consideriamo il problema di controllo ottimo stocastico linear-state come definito in* (3.2)*, e supponiamo che le funzioni coinvolte siano sufficientemente regolari. Allora per poterne dare una soluzione completa tramite il Teorema di Hamilton-Jacobi-Bellman è sufficiente poter risolvere l'equazione differenziale per $a(\cdot)$:*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}a(t) & = -\alpha(t) - \delta(t)a(t) \\ a(T) & = \gamma \end{cases}$$

in modo che $V(t,x) = a(t)x(t) + b(t)$ sia la funzione valore associata al problema.

3.5 Relazioni tra il Principio del Massimo e il Teorema di Hamilton-Jacobi-Bellman

Come abbiamo fatto per il caso deterministico, cerchiamo di capire quali siano le relazioni tra il Principio del Massimo e il Teorema di Hamilton-Jacobi-Bellman per un problema di controllo ottimo stocastico. In generale dal Principio del Massimo otteniamo il sistema Hamiltoniano che, in questo caso, è costituito da equazioni differenziali stocastiche forward-backward (FBSDEs), mentre il Teorema di Hamilton-Jacobi-Bellman fornisce delle equazioni a derivate parziali: la relazione che cerchiamo è quindi tra FBSDEs e PDEs.

Consideriamo un problema di controllo ottimo stocastico linear-state, come è stato definito in (3.2), e richiamiamo innanzitutto i risultati trovati con l'applicazione del Principio del Massimo e del Teorema di Hamilton-Jacobi-Bellman. Nel primo caso il sistema Hamiltoniano stocastico che si otteneva era costituito da due equazioni differenziali stocastiche *forward-backward*:

$$\begin{cases} dx(t) &= [\delta(t)x(t) + h(t, u^*(t))]dt + [\varepsilon(t)x(t) + k(t, u^*(t))]dW(t) \\ x(0) &= x_0 \\ dp(t) &= -[\delta(t)p(t) + \varepsilon(t)q(t) + \alpha(t)]dt + q(t)dW(t) \\ p(T) &= \gamma \end{cases}$$

mentre per quanto riguarda il Teorema di HJB si ottenevano due equazioni differenziali deterministiche:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}a(t) &= -\alpha(t) - a(t)\delta(t) \\ a(T) &= \gamma \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}b(t) &= -\beta(t, u^*(t)) - a(t)h(t, u^*(t)) \\ b(T) &= 0 \end{cases}$$

dove $a(\cdot)$ e $b(\cdot)$ erano tali che la funzione valore avesse la seguente espressione: $V(t, x) = a(t)x(t) + b(t)$.

Osserviamo che, avendo posto la funzione valore lineare nello stato, dal Teorema di HJB abbiamo ottenuto due equazioni differenziali deterministiche e in particolare sono le stesse equazioni che risultavano per un problema di controllo ottimo deterministico. In questo modo abbiamo quindi perso l'informazione che portava il moto Browniano. Infatti le funzioni $\varepsilon(\cdot)$ e $k(\cdot, u(\cdot))$, che descrivevano l'evoluzione della parte stocastica dell'equazione del moto, non compaiono nelle equazioni differenziali per $a(\cdot)$ e $b(\cdot)$.
Vediamo inoltre che il Principio del Massimo ci porta alle stesse conclusioni non appena troviamo la soluzione ammissibile $q(t) \equiv 0 \ \forall t \in [0, T]$ per il processo $q(\cdot)$, che nell'equazione aggiunta del sistema Hamiltoniano descriveva l'evoluzione della parte stocastica.
In questo modo otteniamo la seguente equazione differenziale per la funzione aggiunta del Principio del Massimo:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}p(t) &= -\delta(t)p(t) - \alpha(t) \\ p(T) &= \gamma \end{cases}$$

che corrisponde sia all'equazione differenziale trovata con il Teorema di HJB per la funzione $a(\cdot)$, sia all'equazione per la funzione aggiunta trovata con il

Principio del Massimo deterministico.
Abbiamo visto inoltre che anche in questo caso i problemi di Cauchy relativi alla funzione aggiunta $p(\cdot)$ e all'equazione del moto $x(\cdot)$, come pure i problemi di Cauchy per le funzioni $a(\cdot)$ e $b(\cdot)$ risultano disaccoppiati. Quindi è possibile risolvere l'equazione differenziale per $p(\cdot)$, o equivalentemente quella per $a(\cdot)$, che ammette soluzione unica per il Teorema di Esistenza e Unicità per ODEs, indipendentemente dalle altre incognite del problema di controllo ottimo. La soluzione di quest'ultima permette poi di risalire alla soluzione dell'equazione del moto e di trovare lo stato ottimo $x^*(t)$ e il controllo ottimo $u^*(t)$, oppure l'espressione per la funzione $b(\cdot)$ e quindi quella per la funzione valore ottimo $V(t,x)$.

Infine possiamo osservare che, applicando sia il Principio del Massimo sia il Teorema di Hamilton-Jacobi-Bellman ad un problema linear-state, abbiamo trovato un controllo ottimo $u^*(\cdot)$ in forma Open-Loop. Infatti il controllo ottimo trovato dipende solamente dal tempo t e dalla funzione aggiunta $p(t)$, o equivalentemente dalla funzione $a(t)$, poiché le funzioni coinvolte nella definizione di problema di controllo ottimo linear-state sono lineari rispetto allo stato $x(\cdot)$.

La risoluzione di un problema di controllo ottimo stocastico linear-state quindi degenera nella risoluzione di un'equazione differenziale deterministica, ed in particolare della stessa equazione trovata per l'analogo problema di controllo ottimo linear-state deterministico. Inoltre la soluzione ottima, costituita da controllo e stato ottimi, è la stessa sia per un problema linear-state stocastico che per uno deterministico ed in particolare si presenta in forma Open-Loop per quanto riguarda il controllo, ovvero quest'ultimo dipende solamente dal tempo. Quindi un problema linear-state stocastico non ci fornisce informazioni in più rispetto ad un problema deterministico.

Capitolo 4

Giochi Differenziali Stocastici

Questo capitolo è dedicato allo studio dei *giochi differenziali stocastici*. Analogamente a quanto fatto nel Capitolo 2 per i giochi differenziali deterministici, daremo una definizione generale per poi concentrarci sullo studio di un gioco differenziale *linear-state*, che vedremo ricoprire un ruolo importante in Teoria dei Giochi poiché si può risolvere dandone una trattazione matematica rigorosa.
Anche nel caso stocastico, un gioco differenziale si può formulare come un insieme di problemi di controllo ottimo stocastici interdipendenti tra loro, ed in particolare in un gioco dove interagiscono N giocatori sarà necessario definire N problemi di controllo ottimo stocastici.
Cercheremo poi di risolvere tali problemi seguendo due approcci differenti. Nel primo caso useremo una versione del Principio del Massimo per trovare la soluzione ottima, che in questa situazione si identifica con un *Equilibrio di Nash* in forma *Open-Loop*. Nel secondo caso invece applicheremo il Teorema di Hamilton-Jacobi-Bellman esposto nel capitolo precedente e cercheremo un Equilibrio di Nash in forma di *Feedback*.
Infine vedremo quali sono le relazioni tra le due diverse tipologie di equilibrio, ed in particolare potremo osservare che per un gioco differenziale linear-state esse coincidono. Metteremo in relazione anche i risultati trovati in questo capitolo con quelli analoghi esposti nel Capitolo 2 per i giochi differenziali deterministici, osservando che nel caso di giochi differenziali linear-state si equivalgono completamente.

Anche in questo capitolo, come nel Capitolo 2, ai fini di semplificare la trattazione considereremo giochi differenziali *non-cooperativi* in cui interagiscano solamente due giocatori, che chiameremo generalmente i, j con $i, j \in \{1, 2\}$ e $i \neq j$.

4.1 Giochi Differenziali Stocastici

Introduciamo per prima cosa gli elementi fondamentali per definire un gioco differenziale stocastico. Come nel caso deterministico, anche in un gioco stocastico non-cooperativo lo scopo di ogni giocatore deve essere quello di massimizzare il proprio guadagno, attraverso delle scelte influenzate dalle azioni effettuate in passato, e indipendentemente dalle scelte degli avversari. Un tale gioco si può formulare come un problema di controllo ottimo stocastico, in cui assumiamo che in ogni istante $t \in [0, T]$ i giocatori agiscano sul sistema, il cui stato $x(\cdot)$ è influenzato dalle scelte prese. Denotiamo con $U_{\mathrm{i}} \subseteq \mathbb{R}$ l'insieme dei *controlli* ammissibili al tempo t per il giocatore $i \in \{1, 2\}$. Chiameremo tali controlli $u_{\mathrm{i}} : [0, T] \to U_{\mathrm{i}}$, e assumiamo che ogni u_{i} sia un processo adattato, in accordo con quanto definito nel capitolo precedente per un problema di controllo ottimo stocastico. Per ogni scelta del controllo u_{i}, assumiamo che lo *stato del sistema* $x(\cdot)$ evolva sul tempo e sia descritto da un'equazione differenziale stocastica analoga a quella vista nel Capitolo 3:

$$\begin{cases} dx(t) &= f(t, u_{\mathrm{i}}, u_{\mathrm{j}}, x)dt + \sigma(t, u_{\mathrm{i}}, u_{\mathrm{j}}, x)dW(t) \\ x(0) &= x_0 \in \mathbb{R} \qquad\qquad\qquad\qquad \forall t \in [0, T] \end{cases}$$

dove $f, \sigma : [0, T] \times U_{\mathrm{i}} \times U_{\mathrm{j}} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sono sufficientemente regolari per garantire l'esistenza e l'unicità della soluzione dell'equazione del moto (per maggiori dettagli si veda [7]).

Lo scopo di ogni giocatore sarà quello di effettuare delle scelte al fine di ottimizzare la propria utilità, che si traduce nella massimizzazione del *funzionale obiettivo*:

$$\bar{J}_{\mathrm{i}}(u_{\mathrm{i}}, u_{\mathrm{j}}) = \max_{\mathrm{u_i \in U_i}} J_{\mathrm{i}}(u_{\mathrm{i}}, u_{\mathrm{j}}) = \max_{\mathrm{u_i \in U_i}} \mathbb{E}\left[\int_0^T g_{\mathrm{i}}(t, u_{\mathrm{i}}(t), u_{\mathrm{j}}(t), x(t))\, dt + S_{\mathrm{i}}(x(T))\right]$$

dove le funzioni $g_{\mathrm{i}} : [0, T] \times U_{\mathrm{i}} \times U_{\mathrm{j}} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $S_{\mathrm{i}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sono sufficientemente regolari, in accordo con la definizione di problema di controllo ottimo stocastico.

Definizione 4.1.1 (Gioco Differenziale Stocastico). *Un gioco differenziale stocastico è definito come segue:*

$$\max_{\mathrm{u_i \in U_i}} J_{\mathrm{i}}(u_{\mathrm{i}}, u_{\mathrm{j}}) = \max_{\mathrm{u_i \in U_i}} \mathbb{E}\left[\int_0^T g_{\mathrm{i}}(t, u_{\mathrm{i}}(t), u_{\mathrm{j}}(t), x(t))\, dt + S_{\mathrm{i}}(x(T))\right] \tag{4.1}$$

$$s.\ a \begin{cases} dx(t) &= f(t, u_{\mathrm{i}}, u_{\mathrm{j}}, x)dt + \sigma(t, u_{\mathrm{i}}, u_{\mathrm{j}}, x)dW(t) \\ x(0) &= x_0 \end{cases}$$

dove $i, j \in \{1, 2\}$ con $i \neq j$, e le funzioni g_{i}, S_{i}, f, σ sono note e ben definite.

Supponiamo inoltre che ogni giocatore possa scegliere la propria *strategia* $\varphi_{\mathrm{i}}(\cdot)$, ovvero l'insieme di azioni da effettuare, sulla base delle informazioni disponibili, e che questa debba soddisfare ad alcune condizioni definite dai singoli giocatori, per cui si rimanda a [7, cap. 5, pagina 165]. In genere tale strategia è un processo stocastico adattato alla filtrazione Browniana, che si presenta come $\varphi_{\mathrm{i}}(\cdot) \equiv \varphi_{\mathrm{i}}(t, W_{[0,\mathrm{t}]})$, per cui dipende dal tempo t e dalla traiettoria del moto Browniano $W(t)$.
Nel contesto della Teoria dei Giochi, risolvere un gioco differenziale equivale a risolvere gli N problemi di controllo ottimo corrispondenti, dove N è il numero di giocatori coinvolti, per trovare la soluzione ottima che si identifica con un *Equilibrio di Nash*. Come per i giochi differenziali deterministici, anche in questo caso il controllo del sistema, e quindi l'Equilibrio di Nash, si può presentare nelle due seguenti forme:

- in forma *Open-Loop*: allora si ha che $u_{\mathrm{i}}(t) = \varphi_{\mathrm{i}}(t)$, ovvero il controllo dipende solo dal tempo e si identifica con la strategia;
- in forma di *Feedback* se $u_{\mathrm{i}}(t) = \varphi_{\mathrm{i}}(t, x(t))$, ovvero se la strategia è una funzione deterministica che dipende dal tempo e dallo stato del sistema.

4.2 Giochi Differenziali Stocastici Linear-State

Un gioco differenziale *linear-state* si caratterizza per avere l'equazione del moto e il funzionale obiettivo lineari rispetto allo stato del sistema $x(\cdot)$ e per non presentare interazioni tra il controllo e lo stato. Questi giochi rivestono un ruolo particolarmente rilevante in Teoria dei Giochi perché sono risolvibili analiticamente e perché hanno la proprietà di avere un unico Equilibrio di Nash, che definiremo in seguito.

Definizione 4.2.1 (Gioco Differenziale Stocastico Linear-State). *Un gioco differenziale stocastico si dice* linear-state *se presenta la seguente forma:*

$$\max_{\mathrm{u_i \in U_i}} J_{\mathrm{i}}(u_{\mathrm{i}}, u_{\mathrm{j}}) = \max_{\mathrm{u_i \in U_i}} \mathbb{E}\left[\int_0^T (\alpha_{\mathrm{i}}(t, u_{\mathrm{j}}(t))x(t) + \beta_{\mathrm{i}}(t, u_{\mathrm{i}}(t), u_{\mathrm{j}}(t)))\, dt + \gamma_{\mathrm{i}} x(T)\right] \tag{4.2}$$

$$s.\ a \begin{cases} dx(t) &= [\delta(t)x(t) + h(t, u_{\mathrm{i}}(t), u_{\mathrm{j}}(t))]dt + \\ & \quad +[\varepsilon(t)x(t) + k(t, u_{\mathrm{i}}(t), u_{\mathrm{j}}(t))]dW(t) \\ x(0) &= x_0 \end{cases}$$

dove $i, j \in \{1, 2\}$ *e* $i \neq j$.

Assumiamo che le funzioni $\alpha_{\mathrm{i}} : [0, T] \times U_{\mathrm{j}} \to \mathbb{R}$, $\beta_{\mathrm{i}}, h, k : [0, T] \times U_{\mathrm{i}} \times U_{\mathrm{j}} \to \mathbb{R}$ e $\delta, \varepsilon : [0, T] \to \mathbb{R}$ coinvolte in questa definizione siano sufficientemente regolari per garantire l'esistenza e l'unicità della soluzione dell'equazione del moto per ogni scelta del controllo $u_{\rm i}(\cdot), u_{\rm j}(\cdot)$, in accordo con la definizione generale di gioco differenziale stocastico e di problema di controllo ottimo stocastico data nel Capitolo 3.

4.3 Equilibrio di Nash Open-Loop

Abbiamo visto che lo scopo di ogni giocatore è quello di massimizzare la propria utilità, ovvero il proprio funzionale obiettivo per trovare una soluzione ottima per il problema di controllo ottimo stocastico e quindi per il gioco differenziale. Questa soluzione si identifica con il concetto di *Equilibrio di Nash*, ovvero l'insieme di strategie ottime che realizzano il massimo guadagno per ogni giocatore, e tali per cui nessun giocatore abbia interesse a cambiare la propria strategia finché anche quella degli avversari rimane invariata.

Definizione 4.3.1 (**Equilibrio di Nash Open-Loop (OLNE)**). *Una coppia di controlli ammissibili* $(u_1^{\rm N}(t), u_2^{\rm N}(t))$ *è un* Equilibrio di Nash Open-Loop *per il gioco differenziale stocastico se e solo se per ogni controllo ammissibile* $u_{\rm i}(\cdot)$ *vale:*

$$J_{\rm i}\big(u_{\rm i}^{\rm N}(\cdot), u_{\rm j}^{\rm N}(\cdot)\big) \geq J_{\rm i}\big(u_{\rm i}(\cdot), u_{\rm j}^{\rm N}(\cdot)\big) \tag{4.3}$$

per ogni $i, j \in \{1, 2\}$ *e* $i \neq j$*.*

Osserviamo che in genere il controllo è della forma $u_{\rm i}(t) = \varphi_{\rm i}(t, x_0, W_{[0,{\rm t}]})$ dove $\varphi_{\rm i}$ rappresenta una funzione deterministica, mentre con $W_{[0,{\rm t}]}$ indichiamo la traiettoria del moto Browniano in $[0, t]$. Quindi non appena la strategia $\varphi_{\rm i}$ dipende solamente da $(t, x_0) \in [0, T] \times \mathbb{R}$ e non dal moto Browniano si ritrova la definizione di Equilibrio di Nash per un gioco deterministico ([7]).

Cerchiamo di caratterizzare ora la soluzione di un gioco differenziale stocastico come quello definito in (4.1) applicando il Principio del Massimo ai problemi di controllo ottimo associati al gioco. Per farlo, delineeremo uno "Schema di Soluzione" formato da quattro step. Di questi, i primi tre forniranno le condizioni necessarie per l'esistenza di un Equilibrio di Nash ripercorrendo i punti fondamentali del Principio del Massimo, mentre il quarto step darà le condizioni sufficienti per l'ottimalità della soluzione. Come accadeva per un problema di controllo ottimo, applicando il Principio del Massimo al gioco differenziale in genere troveremo una soluzione ottima dipendente solo dal tempo, e quindi un Equilibrio di Nash in forma Open-Loop.

Per prima cosa definiamo la *Funzione Hamiltoniana* $H_{\rm i} : [0, T] \times U_{\rm i} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ per l'i-esimo giocatore, $i \in \{1, 2\}$:

$$H_{\rm i}(t, u_{\rm i}, x, \lambda_{\rm i}, \mu_{\rm i}; u_{\rm j}) = g_{\rm i}(t, u_{\rm i}, u_{\rm j}, x) + \lambda_{\rm i} f(t, u_{\rm i}, u_{\rm j}, x) + \mu_{\rm i}\sigma(t, u_{\rm i}, u_{\rm j}, x)$$

dove $\lambda_i, \mu_i : [0,T] \to \mathbb{R}$ è la coppia di processi adattati equivalenti alle funzioni aggiunte del Principio del Massimo. Definiamo inoltre la *funzione Hamiltoniana Generalizzata* $G_i : [0,T] \times U_i \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ come:

$$G_i(t, u_i, x, \lambda_i, \Lambda_i; u_j) = \frac{1}{2}\Lambda_i(t)\sigma^2(t, u_i, u_j, x) + \lambda_i f(t, u_i, u_j, x) + g_i(t, u_i, u_j, x)$$

dove $(\Lambda_i(\cdot), M_i(\cdot))$ sono i processi adattati che risolvono la seconda equazione aggiunta del Principio del Massimo.

Schema di Soluzione

Step 1. Per ogni $i, j \in \{1, 2\}$ sia ben definito il punto di massimo della funzione Hamiltoniana

$$u_i^{\#}(t, x, \lambda_i, \mu_i; u_j) = \arg\max_{u_i \in U_i} H_i(t, u_i, x^*, \lambda_i, \mu_i; u_j) \tag{4.4}$$

Step 2. Il sistema, che descrive le interazioni tra i controlli dei giocatori,

$$\begin{cases} u_i &= u_i^{\#}(t, x, \lambda_i, \mu_i; u_j) \\ u_j &= u_j^{\#}(t, x, \lambda_j, \mu_j; u_i) \end{cases}$$

nelle due incognite u_i, u_j abbia un'unica soluzione

$$\big(u_i^{OL}(t, x, \lambda_i, \lambda_j, \mu_i, \mu_j), u_j^{OL}(t, x, \lambda_i, \lambda_j, \mu_i, \mu_j)\big) \tag{4.5}$$

Step 3. La soluzione appena trovata, per essere un Equilibrio di Nash, deve soddisfare il seguente sistema di equazioni differenziali del primo ordine per le funzioni $x(t)$ e $\lambda_i(t)$, detto *sistema stocastico*, e l'equazione differenziale per $\Lambda_i(t)$ analoga a quella definita nel Principio del Massimo nel Capitolo 3. In particolare i sistemi di equazioni differenziali devono avere un'unica soluzione $(x^*(t), \lambda_i^*(t), \mu_i^*(t), \Lambda_i^*(t), M_i^*(t))$:

$$\begin{cases} dx(t) &= f(t, u_i^{OL}(t, x, \lambda_i, \lambda_j, \mu_i, \mu_j), u_j^{OL}(t, x, \lambda_i, \lambda_j, \mu_i, \mu_j), x)dt + \\ & \quad + \sigma(t, u_i^{OL}(t, x, \lambda_i, \lambda_j, \mu_i, \mu_j), u_j^{OL}(t, x, \lambda_i, \lambda_j, \mu_i, \mu_j), x)dW(t) \\ x(0) &= x_0 \\ d\lambda_i(t) &= -\partial_x H_i(t, u_i^{OL}(t, x, \lambda_i, \lambda_j, \mu_i, \mu_j), x, \lambda_i; u_j^{OL}(t, x, \lambda_i, \lambda_j, \mu_i, \mu_j)) + \\ & \quad + \mu_i(t)dW(t) \\ \lambda_i(T) &= \partial_x S_i(x(T)) \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} d\Lambda_i(t) &= -[2f_x(t, u_i^{OL}(\dots), u_j^{OL}(\dots), x)\Lambda_i(t) + \\ & \quad + \sigma_x^2(t, u_i^{OL}(\dots), u_j^{OL}(\dots), x)\Lambda_i(t) + \\ & \quad + 2\sigma_x(t, u_i^{OL}(\dots), u_j^{OL}(\dots), x)M_i(t) + \\ & \quad + \partial_{x,x} H_i(t, u_i^{OL}(\dots), x, \lambda_i, \mu_i; u_j^{OL}(\dots))]dt + M_i(t)dW(t) \\ \Lambda_i(T) &= \partial_{x,x} S_i(x(T)) \end{cases}$$

con $i, j \in \{1, 2\}$ e $i \neq j$, e dove sono state omesse alcune dipendenze per le funzioni $x, u_{\mathrm{i}}^{\mathrm{OL}}, u_{\mathrm{j}}^{\mathrm{OL}}, \lambda_{\mathrm{i}}, \lambda_{\mathrm{j}}, \mu_{\mathrm{i}}, \mu_{\mathrm{j}}$. Il sistema stocastico è costituito da due equazioni differenziali forward-backward che ammettono un'unica soluzione per il Teorema di Esistenza e Unicità per SDEs e grazie alle ipotesi di regolarità assunte per le funzioni coinvolte ([7, cap. 5]).

Step 4. In questo ultimo passo scriviamo le condizioni sufficienti che garantiscono l'esistenza e l'unicità dell'Equilibrio di Nash che stiamo cercando. Supponiamo ora che le funzioni coinvolte siano almeno di classe $\mathcal{C}^2$, ovvero due volte differenziabili, con derivate continue rispetto alle variabili $(x, u_{\mathrm{i}}) \in \mathbb{R} \times U_{\mathrm{i}}$ e con derivate parziali limitate. Assumiamo che $u_{\mathrm{i}}^{\#}(\cdot)$ sia un controllo adattato ammissibile (Open-Loop), $x^{\#}(\cdot)$ sia il corrispondente stato ottimo e $(\lambda_{\mathrm{i}}^{\#}, \mu_{\mathrm{i}}^{\#})$ la corrispondente coppia di processi adattati. Se supponiamo inoltre che per ogni $i \in \{1, 2\}$ la funzione $H_{\mathrm{i}}(\cdot)$ sia concava in (x, u_{i}), e $S_{\mathrm{i}}(\cdot)$ sia concava in x allora il punto di ottimo $u_{\mathrm{i}}^{\#}$ che soddisfa alla condizione di massimo dello Step 1 è esattamente l'Equilibrio di Nash Open-Loop cercato: cioè $u_{\mathrm{i}}^{\mathrm{N}} \equiv u_{\mathrm{i}}^{\#}$.

Vediamo che questo metodo di soluzione si può applicare ad un gioco differenziale linear-state, come quello definito in (4.2), e che presenta delle forti analogie con la risoluzione di un problema di controllo ottimo stocastico linear-state. Con il seguente teorema vedremo che se tutti gli step possono essere applicati, è possibile determinare un unico Equilibrio di Nash Open-Loop:

$$u_{\mathrm{i}}^{\mathrm{N}}(t) = u_{\mathrm{i}}^{\mathrm{OL}}(t, x^*(t), \lambda_{\mathrm{i}}^*(t), \lambda_{\mathrm{j}}^*(t), \mu_{\mathrm{i}}^*(t), \mu_{\mathrm{j}}^*(t))$$

con $i, j \in \{1, 2\}$ e $i \neq j$.

Teorema 4.3.1. *Consideriamo il gioco differenziale linear-state come definito in* (4.2). *Allora la sua risoluzione tramite lo "Schema di Soluzione" definito sopra e la ricerca di un Equilibrio di Nash Open-Loop equivale a risolvere il seguente sistema stocastico, costituito da equazioni differenziali forward-backward:*

$$\begin{cases} dx(t) &= f(t, u_{\mathrm{i}}^{\mathrm{OL}}(t, x, \lambda_{\mathrm{i}}, \lambda_{\mathrm{j}}, \mu_{\mathrm{i}}, \mu_{\mathrm{j}}), u_{\mathrm{j}}^{\mathrm{OL}}(t, x, \lambda_{\mathrm{i}}, \lambda_{\mathrm{j}}, \mu_{\mathrm{i}}, \mu_{\mathrm{j}}), x)dt+ \\ &\quad +\sigma(t, u_{\mathrm{i}}^{\mathrm{OL}}(t, x, \lambda_{\mathrm{i}}, \lambda_{\mathrm{j}}, \mu_{\mathrm{i}}, \mu_{\mathrm{j}}), u_{\mathrm{j}}^{\mathrm{OL}}(t, x, \lambda_{\mathrm{i}}, \lambda_{\mathrm{j}}, \mu_{\mathrm{i}}, \mu_{\mathrm{j}}), x)dW(t) \\ &= [\delta(t)x(t) + h(t, u_{\mathrm{i}}^{\mathrm{OL}}, u_{\mathrm{j}}^{\mathrm{OL}})]dt + [\varepsilon(t)x(t) + k(t, u_{\mathrm{i}}^{\mathrm{OL}}, u_{\mathrm{j}}^{\mathrm{OL}})]dW(t) \\ x(0) &= x_0 \\ d\lambda_{\mathrm{i}}(t) &= -\partial_{\mathrm{x}} H_{\mathrm{i}}(t, u_{\mathrm{i}}^{\mathrm{OL}}(\dots), x, \lambda_{\mathrm{i}}; u_{\mathrm{j}}^{\mathrm{OL}}(\dots)) + \mu_{\mathrm{i}}(t)dW(t) \\ &= -[\delta(t)\lambda_{\mathrm{i}}(t) + \varepsilon(t)\mu_{\mathrm{i}}(t) + \alpha_{\mathrm{i}}(t, u_{\mathrm{j}}^{\mathrm{OL}})]dt + \mu_{\mathrm{i}}(t)dW(t) \\ \lambda_{\mathrm{i}}(T) &= \partial_{\mathrm{x}} S_{\mathrm{i}}(x(T)) = \gamma_{\mathrm{i}} \end{cases}$$

dove $i, j \in \{1, 2\}$ *e* $i \neq j$.

Dimostrazione. Per questa dimostrazione applichiamo i quattro step descritti dallo "Schema di Soluzione" al gioco differenziale stocastico linear-state. Iniziamo scrivendo la funzione Hamiltoniana per il giocatore i-esimo:

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{i}}(t, u_{\mathrm{i}}, x, \lambda_{\mathrm{i}}, \mu_{\mathrm{i}}; u_{\mathrm{j}}) = \alpha_{\mathrm{i}}(t, u_{\mathrm{j}})x + \beta_{\mathrm{i}}(t, u_{\mathrm{i}}, u_{\mathrm{j}}) + \lambda_{\mathrm{i}}(\delta(t)x + h(t, u_{\mathrm{i}}, u_{\mathrm{j}}))+ \\ +\mu_{\mathrm{i}}(\varepsilon(t)x + k(t, u_{\mathrm{i}}, u_{\mathrm{j}})) \end{aligned} \tag{4.6}$$

Step 1. Per ogni $i, j \in \{1, 2\}$ sia:

$$\begin{aligned} u_{\mathrm{i}}^{\#}(t, \lambda_{\mathrm{i}}, \mu_{\mathrm{i}}; u_{\mathrm{j}}) &= \arg\max_{\mathrm{u_i \in U_i}} H_{\mathrm{i}}(t, u_{\mathrm{i}}, x^*, \lambda_{\mathrm{i}}, \mu_{\mathrm{i}}; u_{\mathrm{j}}) \\ &= \arg\max_{\mathrm{u_i \in U_i}} \big\{\beta_{\mathrm{i}}(t, u_{\mathrm{i}}, u_{\mathrm{j}}) + \lambda_{\mathrm{i}} h(t, u_{\mathrm{i}}, u_{\mathrm{j}}) + \mu_{\mathrm{i}} k(t, u_{\mathrm{i}}, u_{\mathrm{j}})\big\} \end{aligned}$$

una funzione ben definita, dove sono coinvolte solo le funzioni dipendenti da u_{i} tra quelle che costituivano la funzione Hamiltoniana. Possiamo vedere che ponendo la derivata prima della funzione Hamiltoniana uguale a zero abbiamo la condizione che ci permette di definire l'esistenza di un punto stazionario. Se vale anche la condizione di concavità per la funzione Hamiltoniana possiamo dimostrare che il punto stazionario è esattamente il massimo cercato.
Notiamo inoltre che $u_{\mathrm{i}}^{\#}(\cdot)$ non dipende dallo stato $x(\cdot)$ per come è stato definito il gioco linear-state, e quindi se sarà un Equilibrio di Nash sarà in forma Open-Loop.
Step 2. Possiamo assumere che il sistema

$$\begin{cases} u_{\mathrm{i}} &= u_{\mathrm{i}}^{\#}(t, \lambda_{\mathrm{i}}, \mu_{\mathrm{i}}; u_{\mathrm{j}}) \\ u_{\mathrm{j}} &= u_{\mathrm{j}}^{\#}(t, \lambda_{\mathrm{j}}, \mu_{\mathrm{j}}; u_{\mathrm{i}}) \end{cases}$$

nelle due incognite $u_{\mathrm{i}}, u_{\mathrm{j}}$ abbia un'unica soluzione, data da:

$$\big(u_{\mathrm{i}}^{\mathrm{OL}}(t, \lambda_{\mathrm{i}}, \lambda_{\mathrm{j}}, \mu_{\mathrm{i}}, \mu_{\mathrm{j}}), u_{\mathrm{j}}^{\mathrm{OL}}(t, \lambda_{\mathrm{i}}, \lambda_{\mathrm{j}}, \mu_{\mathrm{i}}, \mu_{\mathrm{j}})\big)$$

che dipende quindi solamente dalle variabili aggiunte $\lambda_{\mathrm{i}}, \mu_{\mathrm{i}}$, e dal tempo t.
Step 3. Inoltre possiamo assumere che il sistema stocastico:

$$\begin{cases} dx(t) &= [\delta(t)x(t) + h(t, u_{\mathrm{i}}^{\mathrm{OL}}, u_{\mathrm{j}}^{\mathrm{OL}})]dt + [\varepsilon(t)x(t) + k(t, u_{\mathrm{i}}^{\mathrm{OL}}, u_{\mathrm{j}}^{\mathrm{OL}})]dW(t) \\ x(0) &= x_0 \\ d\lambda_{\mathrm{i}}(t) &= -[\delta(t)\lambda_{\mathrm{i}}(t) + \varepsilon(t)\mu_{\mathrm{i}}(t) + \alpha_{\mathrm{i}}(t, u_{\mathrm{j}}^{\mathrm{OL}})]dt + \mu_{\mathrm{i}}(t)dW(t) \\ \lambda_{\mathrm{i}}(T) &= \gamma_{\mathrm{i}} \end{cases}$$

con $i, j \in \{1, 2\}$ e $i \neq j$ abbia un'unica soluzione ottima $(x^*(t), \lambda_{\mathrm{i}}^*(t), \mu_{\mathrm{i}}^*(t))$. Con considerazioni analoghe a quelle fatte nello studio di un problema linear-state stocastico con il Principio del Massimo visto nel paragrafo 3.3 del capitolo precedente, possiamo vedere che esite la soluzione $(\Lambda_{\mathrm{i}}(t), M_{\mathrm{i}}(t)) \equiv (0, 0)$

per l'equazione aggiunta del secondo ordine in $\Lambda_{\rm i}(\cdot)$ e $M_{\rm i}(\cdot)$.
Inoltre esiste la soluzione $\mu_{\rm i}(t) \equiv 0$, da cui l'equazione differenziale stocastica per la funzione aggiunta $\lambda_{\rm i}(\cdot)$ si riduce ad una equazione differenziale ordinaria, ed in particolare è la stessa equazione che avevamo trovato nel caso di un gioco differenziale deterministico. Possiamo osservare anche che le equazioni aggiunte per $\lambda_{\rm i}$ sono accoppiate tra loro, ma sono disaccoppiate dall'equazione del moto. Per questo, e grazie a quanto assunto nello Step 2, esse si possono risolvere indipendentemente dalle altre variabili del gioco. La loro soluzione permette di trovare anche l'espressione per le altre incognite del problema e in particolare quella per il controllo ottimo $u_{\rm i}^{\rm N}(t)$.
In questo modo abbiamo potuto dimostrare l'esistenza della soluzione ottima $u_{\rm i}^{\rm N}(\cdot)$, che soddisfa le condizioni necessarie del Principio del Massimo.

Step 4. Infine verifichiamo le condizioni di sufficienza. Assumiamo che la funzione $H_{\rm i}(t, u_{\rm i}, x, \lambda_{\rm i}^*, \mu_{\rm i}^*; u_{\rm j}^{\rm OL}(t, \lambda_{\rm i}^*, \lambda_{\rm j}^*, \mu_{\rm i}^*, \mu_{\rm j}^*))$ sia due volte differenziabile e che la sua matrice Hessiana in $(x, u_{\rm i})$ sia definita negativa:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \partial^2_{\rm u_i,u_i}\beta_{\rm i}(t, u_{\rm i}, u_{\rm j}^{\rm OL}) + \lambda_{\rm i}^*\partial^2_{\rm u_i,u_i}h(t, u_{\rm i}, u_{\rm j}^{\rm OL}) + \mu_{\rm i}^*\partial^2_{\rm u_i,u_i}k(t, u_{\rm i}, u_{\rm j}^{\rm OL}) \end{pmatrix}$$

Allora l'Hamiltoniana $H_{\rm i}(\cdot)$ è una funzione concava in $(x, u_{\rm i})$ per ogni $i, j \in \{1, 2\}$ e $i \neq j$. La condizione di concavità per la funzione $S_{\rm i}(x(T)) = \gamma_{\rm i} x(T)$ nel caso linear-state è invece automaticamente soddisfatta.
Allora abbiamo che

$$u_{\rm i}^{\rm N}(t) = u_{\rm i}^{\rm OL}(t, \lambda_{\rm i}^*(t), \lambda_{\rm j}^*(t))$$

è un OLNE per il gioco differenziale linear-state (4.2). $\square$

Abbiamo quindi visto che per un gioco differenziale stocastico linear-state è possibile trovare un Equilibrio di Nash tramite la risoluzione delle equazioni differenziali stocastiche per le variabili aggiunte $\lambda_{\rm i}(\cdot)$ che si riducono poi ad equazioni differenziali ordinarie grazie alla particolare struttura di questa tipologia di gioco e che ammettono una soluzione unica per il Teorema di Esistenza e Unicità per ODEs richiamato precedentemente. Inoltre abbiamo dimostrato che le equazioni aggiunte sono disaccoppiate dall'equazione del moto del sistema, e quindi la loro risoluzione permette di determinare univocamente sia il controllo ottimo $u_{\rm i}^{\rm N}(t)$, $i \in \{1, 2\}$, sia lo stato ottimo $x^*(t)$. Allora, la risoluzione di un gioco differenziale stocastico linear-state e la ricerca di un Equilibrio di Nash Open-Loop consiste nella soluzione di un'equazione differenziale deterministica lineare del primo ordine.

Possiamo riassumere questo risultato nel seguente corollario.

Corollario 4.3.1. *Consideriamo il gioco differenziale stocastico linear-state definito in* (4.2). *Allora l'Equilibrio di Nash corrispondente, e quindi la soluzione ottima del gioco, si può trovare tramite l'applicazione del Principio* *del Massimo se e solo se è possibile risolvere le equazioni aggiunte relative al problema:*

$$\begin{cases} \lambda_{\mathrm{i}}'(t) & = -\alpha_{\mathrm{i}}(t, u_{\mathrm{j}}^{\mathrm{OL}}(t, \lambda_{\mathrm{i}}, \lambda_{\mathrm{j}})) - \lambda_{\mathrm{i}}(t)\delta(t) \\ \lambda_{\mathrm{i}}(T) & = \gamma_{\mathrm{i}} \end{cases}$$

per ogni $i, j \in \{1, 2\}$ e $i \neq j$.

4.4 Equilibrio di Nash Feedback

Vediamo ora la definizione di Equilibrio di Nash in forma di *Feedback*. Risulta importante definirlo poiché un Equilibrio Open-Loop, dipendendo solo dal tempo t, non tiene in considerazione l'insieme delle azioni effettuate dai giocatori e descritte dallo stato del sistema $x(t)$ secondo l'equazione del moto. Per questo motivo, nonostante dal punto di vista matematico sia un importante concetto, da un punto di vista pratico risulta piuttosto irreale.

Definizione 4.4.1 (Equilibrio di Nash Feedback (FNE)). *Una coppia di funzioni deterministiche (φ_1, φ_2) tali che*

$$\varphi_{\mathrm{i}} : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , \quad i = 1, 2$$

è un Equilibrio di Nash Feedback *se e solo se*

- *$\forall\,(t, x_0) \in [0, T] \times \mathbb{R}$ condizioni iniziali, il controllo ottimo $u_{\mathrm{i}}^{\mathrm{N}} \in U_{\mathrm{i}}$ è definito da $u_{\mathrm{i}}^{\mathrm{N}}(\tau) = \varphi_{\mathrm{i}}(\tau, x^*(\tau))$ per $\tau \in [t, T]$, dove $x^*(\cdot)$ è l'unica soluzione dell'equazione del moto;*

- *soddisfa la condizione:*

$$J_{\mathrm{i}}\big(u_{\mathrm{i}}^{\mathrm{N}}(\cdot), u_{\mathrm{j}}^{\mathrm{N}}(\cdot)\big) \geq J_{\mathrm{i}}\big(u_{\mathrm{i}}(\cdot), u_{\mathrm{j}}^{\mathrm{N}}(\cdot)\big) \tag{4.7}$$

  per ogni $i, j \in \{1, 2\}$ e $i \neq j$, con $u_{\mathrm{i}}(t) = \varphi_{\mathrm{i}}(t, x(t))$.

In genere per poter dare un FNE chiediamo che le funzioni f, σ presenti nell'equazione del moto siano funzioni lipschitziane in (x, u_{i}) uniformemente in $t \in [0, T]$, mentre non sono necessarie particolari ipotesi di regolarità per le funzioni φ_{i} ([7, cap. 5, pagina 174]). Osserviamo che se nella definizione si pone $\varphi_{\mathrm{i}}(t, x) \equiv \varphi_{\mathrm{i}}(t)$, ovvero la strategia non dipende dalla variabile x, si ritrova la definizione di Equilibrio di Nash Open-Loop.

Se vogliamo trovare un equilibrio in forma di Feedback per ogni giocatore i si deve avere che le funzioni φ_{i} che definiscono il controllo ottimo risolvano i problemi di controllo ottimo stocastico associati al gioco differenziale. Per ottenere ciò è naturale considerare un approccio che si basa sulla soluzione dell'Equazione di HJB, che deriva dal Teorema di Hamilton-Jacobi-Bellman introdotto nel capitolo precedente. Per questo, delineeremo una "Strategia di Soluzione" che si articola in due step principali, che permettono di definire le condizioni necessarie per risolvere l'Equazione di HJB e trovare l'Equilibrio di Nash in forma di Feedback.

Definiamo allora la *funzione valore* per un gioco differenziale, con $s \in [t, T]$, come:

$$V_{\mathrm{i}}(t,x) = \max_{\mathrm{u_i} \in \mathrm{U_i}} \mathbb{E}\left[\int_t^T g_{\mathrm{i}}(s, \varphi_{\mathrm{i}}(s, x(s)), \varphi_{\mathrm{j}}(s, x(s)), x(s))\, ds + S_{\mathrm{i}}(x(T))\right]$$

e l'*Equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman*, che dipende dalla strategia in forma di Feedback $u_{\mathrm{i}} \equiv \varphi_{\mathrm{i}}(t,x)$:

$$-\partial_{\mathrm{t}} V_{\mathrm{i}}(t,x) = \max_{\mathrm{u_i} \in \mathrm{U_i}} \Big\{ g_{\mathrm{i}}(t, \varphi_{\mathrm{i}}(t,x), \varphi_{\mathrm{j}}(t,x), x) + \partial_{\mathrm{x}} V_{\mathrm{i}}(t,x) f(t, \varphi_{\mathrm{i}}(t,x), \varphi_{\mathrm{j}}(t,x), x) + \\ + \frac{1}{2}\partial_{\mathrm{x,x}} V_{\mathrm{i}}(t,x)\sigma^2(t, \varphi_{\mathrm{i}}(t,x), \varphi_{\mathrm{j}}(t,x), x) \Big\} \tag{4.8}$$

con condizione finale data da $V_{\mathrm{i}}(T, x) = S_{\mathrm{i}}(x(T))$. Osserviamo che le Equazioni di HJB che abbiamo trovato sono fortemente collegate tra loro a causa delle dipendenze tra le strategie dei singoli giocatori.

Strategia di Soluzione

Step 1. Per semplicità chiamiamo

$$M_{\mathrm{i}}(t, u_{\mathrm{i}}, x, \partial_{\mathrm{x}} V_{\mathrm{i}}, \partial_{\mathrm{x,x}} V_{\mathrm{i}}; u_{\mathrm{j}}) = g_{\mathrm{i}}(t, u_{\mathrm{i}}, u_{\mathrm{j}}, x) + \partial_{\mathrm{x}} V_{\mathrm{i}}(t,x) f(t, u_{\mathrm{i}}, u_{\mathrm{j}}, x) + \\ + \frac{1}{2}\partial_{\mathrm{x,x}} V_{\mathrm{i}}(t,x)\sigma^2(t, u_{\mathrm{i}}, u_{\mathrm{j}}, x)$$

dove $u_{\mathrm{i}}^{\#} \equiv \varphi_{\mathrm{i}}(t, x^*(t))$, la funzione da massimizzare nell'Equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman. Per ogni $i, j \in \{1, 2\}$ il massimo della funzione $M_{\mathrm{i}}(\cdot)$ nell'Equazione di HJB sia ben definito e sia dato da:

$$u_{\mathrm{i}}^{\#}(t, x, \partial_{\mathrm{x}} V_{\mathrm{i}}, \partial_{\mathrm{x,x}} V_{\mathrm{i}}; u_{\mathrm{j}}) = \max_{\mathrm{u_i} \in \mathrm{U_i}} M_{\mathrm{i}}(t, u_{\mathrm{i}}, x^*, \partial_{\mathrm{x}} V_{\mathrm{i}}, \partial_{\mathrm{x,x}} V_{\mathrm{i}}; u_{\mathrm{j}}) \tag{4.9}$$

dove $u_{\mathrm{i}}^{\#} \equiv \varphi_{\mathrm{i}}^*(t, x^*(t))$.
Step 2. Assumiamo che la funzione valore V_{i} soddisfi l'Equazione di HJB per ogni giocatore i. Allora la sua risoluzione permette di definire un unico FNE, che costituisce la soluzione ottima del gioco:

$$u_{\mathrm{i}}^{\mathrm{N}}(t) = \varphi_{\mathrm{i}}^*(t, x^*(t), \partial_{\mathrm{x}} V_{\mathrm{i}}(t, x^*), \partial_{\mathrm{x,x}} V_{\mathrm{i}}(t, x^*)) \tag{4.10}$$

con $i, j \in \{1, 2\}$ e $i \neq j$.

Consideriamo ora un gioco differenziale linear-state, come quello definito in (4.2), e cerchiamo di trovare un Equilibrio di Nash in forma di Feedback, seguendo la "Strategia di Soluzione" appena descritta.

Teorema 4.4.1. *Consideriamo il gioco differenziale linear-state definito in (4.2) e supponiamo che la funzione valore $V_{\mathrm{i}}(t,x)$ sia lineare rispetto allo stato del sistema $x(t)$. Allora risolvere il gioco differenziale e trovare un Equilibrio di Nash tramite il Teorema di Hamilton-Jacobi-Bellman equivale a risolvere le seguenti equazioni differenziali:*

$$\begin{cases} a_{\mathrm{i}}'(t) & = -\alpha_{\mathrm{i}}(t, u_{\mathrm{j}}^{\mathrm{OL}}(t, a_{\mathrm{i}}, a_{\mathrm{j}})) - a_{\mathrm{i}}(t)\delta(t) \\ a_{\mathrm{i}}(T) & = \gamma_{\mathrm{i}} \end{cases}$$

dove la funzione valore è $V_{\mathrm{i}}(t,x) = a_{\mathrm{i}}(t)x(t) + b_{\mathrm{i}}(t)$, con $a_{\mathrm{i}}, b_{\mathrm{i}} : [0,T] \to \mathbb{R}$ ben definite.
Inoltre l'Equilibrio di Nash in forma di Feedback si identifica con quello in forma Open-Loop, per cui

$$u_{\mathrm{i}}^{\mathrm{N}}(t) \equiv \varphi_{\mathrm{i}}^{*}(t, x^{*}(t))$$

Dimostrazione. Questa dimostrazione ripercorre quanto visto nell'applicazione del Teorema di HJB ad un problema di controllo ottimo stocastico linear-state (Teorema 3.4.2), per cui ne riportiamo solamente i passaggi fondamentali. Per questa dimostrazione applichiamo i due step descritti dalla "Strategia di Soluzione" al gioco differenziale stocastico linear-state.
Riscriviamo innanzitutto l'Equazione di HJB per questo problema:

$$\begin{cases} -\partial_{\mathrm{t}} V_{\mathrm{i}}(t,x) & = \max_{u_{\mathrm{i}} \in \mathrm{U}_{\mathrm{i}}} \Big\{ \alpha_{\mathrm{i}}(t, u_{\mathrm{j}})x(t) + \beta_{\mathrm{i}}(t, u_{\mathrm{i}}, u_{\mathrm{j}}) + \\ & \quad + \partial_{\mathrm{x}} V_{\mathrm{i}}(t,x)(\delta(t)x(t) + h(t, u_{\mathrm{i}}, u_{\mathrm{j}})) + \\ & \quad + \frac{1}{2}\partial_{\mathrm{x,x}} V_{\mathrm{i}}(t,x)(\varepsilon(t)x(t) + k(t, u_{\mathrm{i}}, u_{\mathrm{j}}))^2 \Big\} \\ V_{\mathrm{i}}(T,x) & = \gamma_{\mathrm{i}} x(T) \end{cases}$$

Step 1. Osserviamo che la funzione valore, come nel caso di un problema linear-state deve essere lineare rispetto allo stato del sistema $x(t)$, e quindi assume la forma $V_{\mathrm{i}}(t,x) = a_{\mathrm{i}}(t)x(t) + b_{\mathrm{i}}(t)$. Per ogni $i, j \in \{1,2\}$ possiamo trovare il punto di massimo $u_{\mathrm{i}}^{\#}(\cdot)$ per la funzione M_{i} nell'Equazione di HJB, che è definito da:

$$\begin{aligned} u_{\mathrm{i}}^{\#}(t, a_{\mathrm{i}}) &= \max_{u_{\mathrm{i}} \in \mathrm{U}_{\mathrm{i}}} M_{\mathrm{i}}(t, u_{\mathrm{i}}, x^{*}, \partial_{\mathrm{x}} V_{\mathrm{i}}, \partial_{\mathrm{x,x}} V_{\mathrm{i}}; u_{\mathrm{j}}) = \\ &= \max_{u_{\mathrm{i}} \in \mathrm{U}_{\mathrm{i}}} \Big\{ \beta_{\mathrm{i}}(t, u_{\mathrm{i}}, u_{\mathrm{j}}) + a_{\mathrm{i}}(t)h(t, u_{\mathrm{i}}, u_{\mathrm{j}}) \Big\} \end{aligned} \tag{4.11}$$

Notiamo che il punto di massimo dipende solamente dal tempo t (e dalla funzione $a_{\mathrm{i}}(t)$), grazie alla linearità della funzione valore.

Step 2. Con ragionamenti analoghi a quelli fatti nella dimostrazione del Teorema 3.4.2 possiamo risolvere l'Equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman, ottenendo l'equazione differenziale per la funzione $a_{\mathrm{i}}(t)$ voluta.
Inoltre, come abbiamo già osservato anche nel paragrafo precedente, un gioco differenziale linear-state si caratterizza tra le altre cose per avere il controllo $u_{\mathrm{i}}(\cdot)$, $i \in \{1, 2\}$, indipendente dallo stato del sistema $x(\cdot)$, e quindi anche la strategia $\varphi_{\mathrm{i}}(\cdot)$ scelta dal giocatore non dipende dalla variabile di stato. Questo è sufficiente per identificare un Equilibrio di Nash in forma di *Feedback* per un gioco linear-state con quello in forma *Open-Loop*. La soluzione ottima del gioco allora è unica ed è costituita da un Equilibrio di Nash Open-Loop, ed esattamente quello trovato nel paragrafo precedente:

$$u_{\mathrm{i}}^{\mathrm{N}}(t) = u_{\mathrm{i}}^{\mathrm{OL}}(t, a_{\mathrm{i}}^*(t), a_{\mathrm{j}}^*(t))$$

con $i, j \in \{1, 2\}$ e $i \neq j$. □

4.5 Legame tra l'Equilibrio di Nash Open-Loop e l'Equilibrio di Nash Feedback

Consideriamo un gioco differenziale stocastico linear-state come definito in (4.2) e vediamo quali sono le relazioni tra l'Equilibrio di Nash Open-Loop e l'Equilibrio di Nash Feedback sulla base delle considerazioni fatte nei paragrafi precedenti.
Abbiamo visto che un gioco linear-state è particolarmente importate perché ci dà la possibilità di descrivere analiticamente un metodo di risoluzione che ci permette di trovare la soluzione ottima dei problemi di controllo ottimo associati al gioco differenziale e quindi l'Equilibrio di Nash. Infatti la soluzione del gioco differenziale si riduce alla risoluzione delle equazioni differenziali deterministiche per le funzioni aggiunte $\lambda_{\mathrm{i}}(\cdot)$, $i \in \{1, 2\}$, che avevamo ottenuto applicando lo "Schema di Soluzione" al problema:

$$\begin{cases} \lambda_{\mathrm{i}}'(t) & = -\alpha_{\mathrm{i}}(t, u_{\mathrm{j}}^{\mathrm{OL}}(t, \lambda_{\mathrm{i}}, \lambda_{\mathrm{j}})) - \lambda_{\mathrm{i}}(t)\delta(t) \\ \lambda_{\mathrm{i}}(T) & = \gamma_{\mathrm{i}} \end{cases}$$

oppure alla risoluzione delle equazioni differenziali per la funzione $a_{\mathrm{i}}(\cdot)$ ottenute applicando il Teorema di HJB ai problemi di controllo ottimo associati al gioco differenziale:

$$\begin{cases} a_{\mathrm{i}}'(t) & = -\alpha_{\mathrm{i}}(t, u_{\mathrm{j}}^{\mathrm{OL}}(t, a_{\mathrm{i}}, a_{\mathrm{j}})) - a_{\mathrm{i}}(t)\delta(t) \\ a_{\mathrm{i}}(T) & = \gamma_{\mathrm{i}} \end{cases}$$

dove si aveva la funzione valore $V_{\mathrm{i}}(t, x) = a_{\mathrm{i}}(t)x(t) + b_{\mathrm{i}}(t)$.

Osserviamo per prima cosa che in entrambi i casi abbiamo ottenuto le stesse

equazioni differenziali per le funzioni $\lambda_{\mathrm{i}}(\cdot)$ e $a_{\mathrm{i}}(\cdot)$. Come abbiamo visto, queste ultime sono disaccoppiate dalle altre variabili del gioco, per cui possono essere risolte indipendentemente, e ammettono un'unica soluzione per il Teorema di Esistenza e Unicità per ODEs sotto le ipotesi di regolarità assunte per le funzioni coinvolte.
Inoltre le equazioni differenziali ottenute sono le stesse che determinavano unicamente la soluzione di un gioco differenziale deterministico e quindi possiamo dire di aver perso l'informazione che era data dalla presenza di un disturbo stocastico nel gioco. Infatti le funzioni $\varepsilon(\cdot)$ e $k(\cdot, u_{\mathrm{i}}(\cdot), u_{\mathrm{j}}(\cdot))$, che descrivevano l'evoluzione della parte stocastica nell'equazione del moto, non compaiono nelle equazioni differenziali ottenute per le funzioni λ_{i} e a_{i}.
Infine, applicando sia lo "Schema di Soluzione" derivante dal Principio del Massimo, sia il Teorema di Hamilton-Jacobi-Bellman ai problemi di controllo ottimo stocastici linear-state associati al gioco differenziale abbiamo potuto osservare che il controllo ottimo $u_{\mathrm{i}}^{\mathrm{N}}(\cdot)$ del problema, che ci permette di trovare l'Equilibrio di Nash, non dipende dallo stato del sistema $x(\cdot)$ ma solamente dal tempo t. Questo ci permette di identificare un Equilibrio in forma di Feedback con quello Open-Loop e di dare quindi un'unica soluzione per il gioco differenziale stocastico linear-state:

$$u_{\mathrm{i}}^{\mathrm{N}}(t) = u_{\mathrm{i}}^{\mathrm{OL}}(t, \lambda_{\mathrm{i}}^*(t), \lambda_{\mathrm{j}}^*(t))$$

con $i, j \in \{1, 2\}$ e $i \neq j$.

Possiamo concludere quindi questo capitolo riconoscendo che lo studio dei giochi differenziali stocastici linear-state presenta un aspetto molto importante legato alla loro trattabilità, poiché come abbiamo visto sono risolvibili analiticamente, ma allo stesso tempo la loro soluzione degenera nella soluzione di un'equazione differenziale deterministica, ed in particolare della stessa equazione trovata per l'analogo gioco differenziale linear-state deterministico. Quindi un gioco differenziale linear-state stocastico non ci fornisce nessuna informazione in più rispetto ad un gioco linear-state deterministico.

Capitolo 5

Conclusioni

Questo studio ha cercato di approfondire un aspetto particolare dei giochi differenziali e dei problemi di controllo ottimo associati a tali giochi.

Siamo partiti dallo studio dei problemi di controllo ottimo deterministici, e abbiamo osservato che considerandone una classe particolarmente semplice (quella dei linear-state), eravamo in grado di trovarne sempre un'unica soluzione ben definita. Inoltre abbiamo visto che non disponevamo di un unico metodo di soluzione, ma di due: il Principio del Massimo di Pontryagin e il Teorema di Hamilton-Jacobi-Bellman. Entrambi questi approcci ci hanno portato, oltre che alla stessa soluzione ottima del problema, anche alle stesse equazioni differenziali da cui deriva la soluzione.
Abbiamo allora cercato di estendere quanto trovato allo studio dei giochi differenziali linear-state, e anche in questo caso siamo giunti a conclusioni interessanti.
Un gioco differenziale, come abbiamo visto, può essere descritto da un insieme di problemi di controllo ottimo, interdipendenti tra loro e tanti quanti sono i giocatori che partecipano al gioco. Da subito ci siamo accorti che trovare una soluzione ottima, corrispondente ad un Equilibrio di Nash, secondo una descrizione matematica rigorosa non si presentava come un obiettivo facile da raggiungere. Infatti non eravamo certi né di poter definire tale soluzione in forma esplicita, né che tale equilibrio fosse effettivamente ottimo.
Per ovviare a tali problemi, abbiamo cercato di considerare una classe particolare di giochi differenziali, e vedere se per questa tipologia più semplice di giochi fosse possibile definire una soluzione ottima.
La classe di giochi differenziali che abbiamo analizzato e che risolve questi inconvenienti è quella dei giochi differenziali linear-state non-cooperativi. In questo caso, per risolvere il gioco abbiamo applicato il Principio del Massimo di Pontryagin e il Teorema di Hamilton-Jacobi-Bellman ai problemi di controllo ottimo associati e abbiamo visto che era possibile ottenere un'unica soluzione ottima in forma esplicita e ben definita. Questa si poteva ricavare

tramite la risoluzione di equazioni differenziali ordinarie che risultavano disaccoppiate le une dalle altre e per le quali era possibile determinare un'unica soluzione.

Ottenuto questo importante risultato, è sorta spontanea una domanda: è possibile allora risolvere in modo completo anche un gioco differenziale linear-state in cui venga aggiunto un disturbo stocastico?
Per poter rispondere abbiamo prima dovuto soffermarci sullo studio dei problemi di controllo ottimo stocastici. Abbiamo formulato il problema in termini generali, e ci siamo poi concentrati su un caso particolarmente semplice costituito dai problemi di controllo ottimo stocastici linear-state, come avevamo fatto inizialmente nella situazione deterministica. La costruzione di questo argomento ripercorre, con le opportune modifiche, quella dei problemi di controllo ottimo deterministici e infatti ci ha portato allo studio del Principio del Massimo e del Teorema di Hamilton-Jacobi-Bellman e alla loro applicazione al caso linear-state.
Abbiamo ottenuto però un risultato non del tutto soddisfacente. Aver considerato un problema linear-state, in cui le funzioni coinvolte nella definizione sono lineari rispetto allo stato del sistema, si è rivelata una semplificazione eccessiva. Infatti, se da un lato ci ha permesso di risolvere completamente il problema dandone una unica soluzione esplicita secondo una descrizione matematica rigorosa e seguendo entrambi i diversi approcci, dall'altro ci ha condotto alla stessa soluzione trovata per un problema deterministico, perdendo l'informazione sulla parte stocastica.
Abbiamo studiato poi un gioco differenziale stocastico linear-state, cercando di capire se anche in questo caso la ricerca di un Equilibrio di Nash, in forma Open-Loop o Feedback, degenerasse nella risoluzione di un problema deterministico, o se portasse qualche informazione in più. Per prima cosa abbiamo contestualizzato il problema, definendo un gioco differenziale stocastico in forma generale e linear-state. In seguito abbiamo applicato il Principio del Massimo e il Teorema di Hamilton-Jacobi-Bellman al gioco stocastico linear-state e abbiamo ottenuto le stesse conclusioni. Il gioco infatti risulta completamente risolvibile dal punto di vista analitico, ma allo stesso tempo la sua risoluzione si riduce a quella di un gioco linear-state deterministico e quindi anche la soluzione trovata degenera in una soluzione deterministica.

Lo studio di un gioco differenziale linear-state, o equivalentemente di un problema di controllo ottimo linear-state, in ambito deterministico riveste un ruolo molto importante perché permette di analizzare ogni aspetto del problema, risolverlo secondo un approccio matematico rigoroso e trovare un'unica soluzione. Se consideriamo invece l'ambito stocastico, nonostante sia possibile fornire una soluzione esplicita del problema, non otteniamo nulla di più di quanto già visto in una situazione deterministica. La linearità delle funzioni coinvolte fa si che venga persa tutta l'informazione portata dal disturbo stocastico e che la risoluzione del problema degeneri a quella di un problema deterministico.

Per scrivere questa tesi, si è partiti da quanto affrontato nel corso di Matematica per l'Economia della Laurea triennale in Matematica, e quindi dallo studio dei problemi di controllo ottimo, del Principio del Massimo e del Teorema di Hamilton-Jacobi-Bellman. Si sono poi ampliati gli orizzonti ai problemi di controllo ottimo stocastici e ai giochi differenziali deterministici e stocastici. Per fare questo sono stati sfiorati alcuni aspetti dell'analisi stocastica, di cui però non si sono esaminati i dettagli. L'approccio è stato di tipo empirico: non si è affrontata la costruzione formale e rigorosa dell'argomento dal punto di vista matematico, ma si è guardato soprattutto all'aspetto computazionale, riguardante l'esistenza di soluzioni ottime per le equazioni differenziali stocastiche o le prime definizioni di processo stocastico e moto Browniano.

Questa tesi si pone come il punto di partenza per ulteriori studi e approfondimenti futuri. Avendo visto che un problema di controllo ottimo stocastico linear-state non ci dà informazioni aggiuntive rispetto ad un problema deterministico, possiamo pensare di complicare la formulazione del problema aggiungendo un termine quadratico nella Scrap Value function e ripercorrendo quanto svolto nel caso linear-state. Già in questa situazione si può vedere che il problema acquista una maggiore importanza: infatti le equazioni differenziali coinvolte nella soluzione non sono più disaccoppiate tra loro e quindi la soluzione del problema non sarà banale.
L'obiettivo può essere quello di arrivare alla formulazione di un problema di controllo ottimo lineare-quadratico, ovvero un problema in cui le funzioni coinvolte siano lineari rispetto allo stato e al controllo del sistema, che appaiono però come variabili quadratiche. Questo genere di problemi riveste un ruolo molto importante perché permette di modellizzare vari problemi reali, per esempio nelle applicazioni dell'economia, oppure di approssimare alcuni problemi di controllo non lineari, e permette di esibire importanti proprietà nella ricerca della loro soluzione, come lo studio dell'equazione di Riccati.

Bibliografia

[1] Lawrence C. Evans, *An Introduction to Stochastic Differential Equation*, AMS (Americal Mathematical Society), Rhode Island, 2013

[2] Tomas Björk, *Arbitrage Theory in Continuous Time second edition*, Oxford University Press, Oxford, 2003

[3] Jiongmin Yong, Xun Yu Zhou, *Stochastic Controls - Hamiltonian Systems and HJB Equations*, Springer, New York, 1999

[4] L. Grosset, A Note on Open Loop Nash Equilibrium in Linear-State Differential Games, *Applied Mathematical Sciences*, **8** (2014), 7239-7248. `http://dx.doi.org/10.12988/ams.2014.49746`

[5] Martino Bardi, Italo Capuzzo-Dolcetta, *Optimal Control and Viscosity Solution of Hamilton-Jacobi-Bellman Equations*, Birkhäuser, Boston, 2008

[6] Dieter Grass, Jonathan P. Caulkins, Gustav Feichtinger, Gernot Tragler, Doris A. Behrens, *Optimal Control of Nonlinear Process*, Springer, Berlin, 2008

[7] René Carmona, *Lectures on BSDEs, Stochastic Control, and Stochastic Differential Games with Financial Applications*, SIAM (Society for Industrial and Applied Mathematics), Philadelphia, 2016