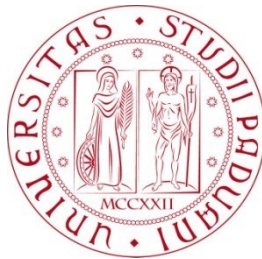


Università degli Studi di Padova  
Dipartimento di Matematica  
Corso di Laurea Triennale in  
Matematica



**Geometrie ellittiche ed iperboliche**

Relatore Prof. Maurizio Cailotto  
Dipartimento di Matematica

Laureando: Martina Bosin  
Matricola N. 1187652

Anno Accademico 2021/2022



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>5</b>
0.1 Introduzione . . . . .	5
<b>Capitolo 1</b>	<b>7</b>
<b>1 Geometrie non euclidee piane:</b>	
<b>definizioni di distanza tra punti e angolo tra rette</b>	<b>7</b>
1.1 Modello di determinazione delle geometrie sul piano proiettivo . . . . .	7
1.1.1 Caso Euclideo . . . . .	7
1.1.2 Strategia di definizione di geometrie non euclidee . . . . .	8
1.2 Distanza tra due punti . . . . .	9
1.2.1 Distanza tra due punti nella geometria del piano ellittico	10
1.2.2 Distanza tra due punti nella geometria del piano iperbolico	14
1.2.3 Confronto con le distanze tra punti nella metrica euclidea	18
1.3 Definizione dell'angolo tra due rette . . . . .	20
1.3.1 Angolo tra due rette nella geometria del piano ellittico . . . . .	21
1.3.2 Parallelismo nel piano ellittico e conseguenze . . . . .	23
1.3.3 Angolo tra due rette nella geometria del piano iperbolico	25
1.3.4 Parallelismo nel piano iperbolico e conseguenze . . . . .	27
1.3.5 Confronto con l'angolo tra rette nel piano euclideo . . . . .	32
<b>Capitolo 2</b>	<b>33</b>
<b>2 Cerchi</b>	<b>33</b>
2.1 Cerchi nel piano ellittico . . . . .	33
2.2 Cicli nel piano iperbolico . . . . .	36
2.2.1 Ipercicli . . . . .	37
2.2.2 Oricicli . . . . .	38
2.3 Confronto con i cerchi del piano euclideo . . . . .	40
<b>Capitolo 3</b>	<b>41</b>

<b>3</b>	<b>Isometrie</b>	<b>41</b>
3.1	Isometrie sul piano euclideo . . . . .	41
3.2	Isometrie sul piano ellittico . . . . .	43
3.3	Isometrie sul piano iperbolico . . . . .	46
3.3.1	Isometrie del piano iperbolico ed ipercicli . . . . .	51
3.3.2	Isometrie del piano iperbolico ed oricicli . . . . .	52
	<b>Capitolo 4</b>	<b>57</b>
<b>4</b>	<b>Triangoli</b>	<b>57</b>
4.1	Teorema dei Coseni, Teorema di Pitagora e Teorema dei Seni . .	58
4.1.1	Caso ellittico . . . . .	58
4.1.2	Caso Iperbolico . . . . .	61
4.2	Somma degli angoli interni . . . . .	64
4.2.1	Caso Ellittico . . . . .	64
4.2.2	Caso iperbolico . . . . .	65
4.3	Aree . . . . .	67
4.3.1	Caso Ellittico . . . . .	67
4.3.2	Caso Iperbolico . . . . .	67
4.4	Altezze e Ortocentro . . . . .	68
4.4.1	Caso Ellittico . . . . .	68
4.4.2	Caso Iperbolico . . . . .	70
4.5	Mediane e assi . . . . .	70
4.5.1	Caso ellittico . . . . .	71
4.5.2	Caso iperbolico . . . . .	73

## 0.1 Introduzione

Com'è noto, per geometria euclidea si intende lo studio del piano e delle sue forme a partire dai 5 postulati di Euclide. I tentativi di ricondurre il quinto postulato ai precedenti ha portato storicamente sia a dimostrare che esso ne è invece indipendente, sia a costruire geometrie in cui tale postulato non vale. Da un punto di vista moderno, la geometria euclidea viene costruita a partire da uno spazio proiettivo reale, con una fissata scelta di un iperpiano "all'infinito" e di una forma quadratica definita positiva su tale iperpiano. L'iperpiano scelto può essere considerato come una quadrica degenera (detta *assoluto*), e ci si può a questo punto chiedere come cambi la geometria dello spazio se si fissa invece all'infinito una quadrica non degenera. Grazie a questo procedimento possiamo definire in modo sistematico le cosiddette *geometrie non euclidee*, e anche ritrovare la geometria euclidea come un caso limite (degenera) delle geometrie non euclidee.

La tesi si focalizzerà sullo studio dei casi 2-dimensionali: verranno descritte, fissando una conica non degenera all'infinito sul piano proiettivo reale  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ , le costruzioni delle geometrie non euclidee piane. In particolare si parlerà di *piano ellittico* se si sceglie come assoluto una conica priva di punti reali, e in questo piano si definirà di conseguenza la *geometria ellittica*. Si parlerà invece di *piano iperbolico* se l'assoluto contiene punti reali, e in questo piano si definirà invece la *geometria iperbolica*.

La costruzione delle due metriche seguirà procedimenti analoghi sebbene nel piano iperbolico, a causa della diversa natura dei punti della conica all'infinito, diventerà necessario distinguere i punti del piano proiettivo a seconda della loro valutazione rispetto all'assoluto.

Il primo capitolo riguarderà la costruzione vera e propria della metrica ellittica e della metrica iperbolica. Prima di tutto verrà definita la distanza tra due punti, e per fare questo sarà necessario individuare uno strumento che dipenda solamente dall'assoluto e dalla coppia di punti del piano tra i quali si voglia calcolare la distanza. Tale strumento sarà il *birapporto* tra tali due punti e i due punti nei quali la retta congiungente i punti di partenza interseca l'assoluto. Verrà scelta una sua opportuna funzione per definire la distanza in modo tale che essa rispetti la definizione generale di distanza e asseconi le proprietà di additività per punti giacenti sulla stessa retta. Questa definizione di distanza renderà necessario selezionare opportunamente i punti del piano proiettivo reale per definire il piano iperbolico, affinché, anche per la geometria iperbolica, la distanza sia sempre data da una quantità reale. Al termine della costruzione verrà quindi ricavata la geometria euclidea come caso limite della geometria ellittica

(o, analogamente, dalla geometria iperbolica).

Lo strumento del birapporto verrà poi utilizzato anche per definire l'angolo tra due rette, che risulterà una nozione duale a quella di distanza nel caso del piano ellittico. La stessa cosa non accadrà, invece, nel caso iperbolico. Verranno inoltre analizzate le nozioni di perpendicolarità e parallelismo, che porteranno, come accennato, a conseguenze molto differenti a quelle euclidee nelle geometrie ellittica ed iperbolica.

Il secondo capitolo riguarderà invece la definizione dei *cerchi*, ovvero dei luoghi dei punti del piano aventi tutti la stessa distanza da un certo punto fissato detto centro. Si troverà che tali strutture deriveranno dalla costruzione di fasci di coniche bitangenti ai punti che la polare al centro interseca con l'assoluto e, nel caso iperbolico, si distingueranno diversi tipi di cerchi (o, per meglio dire, cicli) a seconda della natura del punto scelto come centro.

Il terzo capitolo riguarderà le *isometrie* del piano ellittico e del piano iperbolico, ovvero le proiettività di  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  che possono essere operate rispettivamente sul piano ellittico e su quello iperbolico lasciando invariate tutte le strutture che definiscono le metriche. Il prerequisito fondamentale di una tale proiettività è necessariamente quello di lasciare fisso l'assoluto, affinché non cambi la conica fissata all'infinito. Grazie allo studio delle isometrie sarà possibile dimostrare alcune proprietà dei circoli e dei triangoli.

Il quarto e ultimo capitolo, infine, riguarderà lo studio dei *triangoli*: verranno analizzate in un opportuno riferimento proiettivo le proprietà e i teoremi classici euclidei rispettivamente nel caso ellittico e nel caso iperbolico (somma degli angoli interni, teorema dei coseni, teorema di Pitagora e teorema dei seni) e definita l'area. Si passerà quindi alla determinazione delle altezze, delle mediane e degli assi nei due casi, traendo le dovute conclusioni sulla posizione reciproca dei loro punti notevoli d'intersezione.

L'intero elaborato si è basato sull'analisi e rielaborazione dei risultati descritti da Enrico Bompiani nelle sue note dattiloscritte dal titolo "*Metriche non-euclidee*" degli anni 1951-1952.

# Capitolo 1

## Geometrie non euclidee piane: definizioni di distanza tra punti e angolo tra rette

Il primo capitolo dell'elaborato riguarderà la definizione e la caratterizzazione delle metriche non euclidee sul piano.

Anzitutto verrà analizzata la costruzione delle stesse sul piano proiettivo a partire da quella della geometria euclidea, definendo dunque l'*assoluto*. Si distingueranno a questo punto due casi: la *geometria piana ellittica* e la *geometria piana iperbolica*. Le metriche individuate verranno quindi messe a confronto, per ricongiungersi infine al caso euclideo analizzandolo a partire dalle strategie utilizzate per definire le strutture delle geometrie non euclidee.

### 1.1 Modello di determinazione delle geometrie sul piano proiettivo

#### 1.1.1 Caso Euclideo

Dato uno spazio proiettivo  $n$ -dimensionale, lo spazio euclideo è usualmente definito fissando un iperpiano *all'infinito* ed una forma quadratica definita positiva nello spazio delle traslazioni.

Nel caso bidimensionale, dato un piano proiettivo reale  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^3/\mathbb{R}^*$  la geometria metrica euclidea sarà definita come la geometria di tale piano proiettivo in cui siano fissati sopra ad una retta due punti complessi coniugati (i punti ciclici). La forma quadratica, che i punti ciclici determinano a meno di proporzionalità, sarà poi fissata dalla scelta dell'unità di misura. I due punti ciclici

saranno detti l'*assoluto* della geometria euclidea.

Tutte le proprietà geometriche del piano euclideo deriveranno quindi da quelle del piano proiettivo considerando fissi i due punti ciclici e l'unità di misura.

Una volta individuata la costruzione a partire dal piano proiettivo, è possibile formalizzarla tramite un opportuno sistema di coordinate  $\{x_0, x_1, x_2\}$  su  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  in questo modo:

- la retta impropria contata due volte è una conica degenera  $\Psi$  di rango 1, esprimibile tramite la matrice:

$$\Psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{e l'equazione: } \Psi(x_0, x_1, x_2) = x_0^2.$$

- la conica data dai fasci di rette centrati nei due punti ciclici fissati è la conica  $\Psi^*$ , duale di  $\Psi$ , e avrà rango pari a 2 (infatti, poiché la matrice delle forme quadratiche sul piano proiettivo appartiene a  $\mathbb{M}_{n+1}(\mathbb{R})$  con  $n$  la dimensione dello spazio, si avrà:  $rk = (n + 1) - 1$  dove  $n = 2$ ). La sua matrice sarà data da:

$$\Psi^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{di equazione: } \Psi^*(\xi_0, \xi_1, \xi_2) = \xi_1^2 + \xi_2^2$$

dove  $\{\xi_0, \xi_1, \xi_2\}$  sono le coordinate duali di  $\{x_0, x_1, x_2\}$ . Si nota che la matrice di  $\Psi$  è proporzionale alla matrice dei complementi algebrici di  $\Psi^*$ .

Con questa descrizione si può dire che *tale conica duale definirà la metrica euclidea*, nel senso che la norma di un certo vettore nel piano euclideo (e poi in ogni spazio  $n$ -dimensionale euclideo) sarà data dall'espressione della stessa  $\Psi^*$ .

### 1.1.2 Strategia di definizione di geometrie non euclidee

La costruzione della geometria euclidea dipende quindi dalla definizione di un *assoluto*, determinato da una conica degenera, che rimanga invariato e fissi così la metrica a partire dalle proprietà geometriche del piano proiettivo.

La strategia utilizzata lascia ampie possibilità riguardo alla costruzione delle metriche a seconda della scelta della conica. Si può infatti decidere di usare, al posto delle coniche indicate nel caso euclideo, una conica *non* degenera  $\Omega$  e la sua conica duale  $\Omega^*$ .

Si nota a questo punto una differenza rispetto al caso euclideo. Sarà  $\Omega$  e non



$\Omega^*$ , infatti, a determinare il nuovo *assoluto*, e tutte le proprietà geometriche deriveranno da quelle del piano proiettivo considerando fissa  $\Omega$ .

A partire da questa strategia di definizione possono quindi essere individuate due possibili coniche non degeneri come assoluto sul piano proiettivo reale con un opportuno riferimento di coordinate proiettive  $x_0, x_1, x_2$  ossia:

- conica *senza punti reali*, di segnatura  $(3,0)$ , del tipo  $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$  e di equazione:  $\Omega_e(x_0, x_1, x_2) = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$ .  
Essa definirà la **metrica ellittica**.

- conica *con punti reali*, di segnatura  $(2,1)$ , del tipo  $\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$  (dove la posizione di  $-1$  è arbitraria sulla diagonale) e di equazione (relativa a questa matrice):  $\Omega_i(x_0, x_1, x_2) = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$ .  
Essa definirà la **metrica iperbolica**, che a sua volta presenterà delle differenze a seconda che si considerino i punti *interni* alla conica (ovvero quelli tali per cui  $\Omega_i < 0$ ) o i suoi punti *esterni* (ovvero quelli tali per cui  $\Omega_i > 0$ ).

## 1.2 Distanza tra due punti

Per determinare univocamente la distanza tra due punti rispetto alla metrica così definita è necessario trovare un invariante, ovvero una caratteristica che dipenda solo dai due punti dati e dalla conica scelta come assoluto.

Dati due qualsiasi punti  $P$  e  $Q \in \mathbb{P}$ , la retta reale  $P \vee Q$  congiungente interseca sempre l'assoluto in altri due punti reali o complessi (distinti o coincidenti a seconda che la retta sia tangente o meno alla conica). Si può quindi sempre definire il birapporto tra  $P, Q$ , e i due punti di intersezione.

Tale birapporto (o una sua opportuna funzione), in quanto dipendente esclusivamente da  $P, Q$  e dall'assoluto, costituisce l'invariante cercato, e diventa in questo modo lo strumento di definizione della distanza.

Si nota subito che la definizione così posta creerebbe dei problemi per i punti la cui congiungente sia tangente all'assoluto, perché in questo caso il birapporto sarebbe degenero. Una simile circostanza, però, non può verificarsi nel caso ellittico perché qualsiasi retta reale interseca una conica di soli punti complessi per forza in due punti complessi coniugati (solo le rette complesse possono essere tangenti alla conica, ma queste rette non vengono utilizzate per definire

la distanza), e viene evitata nel caso iperbolico selezionando opportunamente l'insieme dei punti del piano proiettivo che compongono il piano iperbolico. A partire da questa considerazione si definiscono le funzioni del birapporto che determinano la distanza tra due punti nel caso della geometria ellittica e in quello della geometria iperbolica.

### 1.2.1 Distanza tra due punti nella geometria del piano ellittico

Dato un piano proiettivo reale  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ , con un opportuno riferimento di coordinate  $x_0, x_1, x_2$ , si consideri l'assoluto della metrica ellittica  $\Omega_e(x) = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$  (conica di segnatura (3,0) priva di punti reali) e la sua forma bilineare associata  $\Omega_e(x, y) = x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2$ . Siano poi  $P = (p_0, p_1, p_2)^t, Q = (q_0, q_1, q_2)^t \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  i due generici punti del piano proiettivo di cui si voglia calcolare la distanza nella metrica ellittica, e la loro congiungente  $P \vee Q$ . Certamente tale congiungente interseca l'assoluto in due punti complessi coniugati, che possono essere calcolati sostituendo all'equazione dell'assoluto la combinazione lineare di  $P$  e  $Q$ , ovvero dati  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} \Omega_e(\lambda P + \mu Q) &= (\lambda P + \mu Q)_0^2 + (\lambda P + \mu Q)_1^2 + (\lambda P + \mu Q)_2^2 = \\ &= \lambda^2(p_0^2 + p_1^2 + p_2^2) + \mu^2(q_0^2 + q_1^2 + q_2^2) + 2\lambda\mu(p_0q_0 + p_1q_1 + p_2q_2) = \\ &= \lambda^2\Omega_e(P) + \mu^2\Omega_e(Q) + 2\lambda\mu\Omega_e(P, Q) = 0. \end{aligned}$$

Risolvendo l'equazione di secondo grado rispetto a  $\lambda$  si ottiene:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\mu\Omega_e(P, Q) \pm \sqrt{\mu^2(\Omega_e(P, Q)^2 - \Omega_e(P)\Omega_e(Q))}}{\Omega_e(P)} = \frac{-\mu\Omega_e(P, Q) \pm |\mu|\sqrt{\Omega_e(P, Q)^2 - \Omega_e(P)\Omega_e(Q)}}{\Omega_e(P)}.$$

In questo modo si sono quindi determinati i due coefficienti  $\lambda_{1,2}$  definiti in funzione di  $\Omega_e(P)$ ,  $\Omega_e(Q)$  e  $\mu$  tali che  $P'_\mu, Q'_\mu = \lambda_{1,2}P + \mu Q$  siano i due punti di intersezione della congiungente con l'assoluto. Senza perdita di generalità si può porre  $\mu = 1$  ed ottenere quindi:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\Omega_e(P, Q) \pm \sqrt{\Omega_e(P, Q)^2 - \Omega_e(P)\Omega_e(Q)}}{\Omega_e(P)}, \quad P', Q' = \lambda_{1,2}P + Q.$$

Si noti che  $\Omega_e(P, Q)^2 - \Omega_e(P)\Omega_e(Q) \leq 0 \quad \forall P, Q \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  (e vale l'uguaglianza solo qualora i due punti coincidano). Questo è vero perché  $\Omega_e(P, Q)$  è una forma bilineare simmetrica definita positiva, perciò può essere usata per definire un prodotto scalare tra i due punti nel piano proiettivo reale, e può essere quindi applicata la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz:  $\Omega_e(P, Q)^2 \leq \Omega_e(P)\Omega_e(Q)$ . Perciò:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\Omega_e(P, Q) \mp i\sqrt{\Omega_e(P)\Omega_e(Q) - \Omega_e(P, Q)^2}}{\Omega_e(P)}, \quad \text{ovvero:} \quad \lambda_1 = \overline{\lambda_2}.$$

Una volta determinati i punti di intersezione si può calcolare il birapporto:

$$(P \ Q \ P' \ Q') = (P \ Q \ \lambda_1 P + Q \ \lambda_2 P + Q) = (\infty \ 0 \ \lambda_1 \ \lambda_2)$$

e sviluppando i conti di quest'ultimo si ottiene:

$$(\infty \ 0 \ \lambda_1 \ \lambda_2) = \frac{(\lambda_1 - \infty)(\lambda_2 - 0)}{(\lambda_1 - 0)(\lambda_2 - \infty)} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{\Omega_e(P, Q) + i\sqrt{\Omega_e(P)\Omega_e(Q) - \Omega_e(P, Q)^2}}{\Omega_e(P, Q) - i\sqrt{\Omega_e(P)\Omega_e(Q) - \Omega_e(P, Q)^2}}$$

che, poiché  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  sono complessi coniugati, ha norma unitaria ed è pari a 1 solamente se  $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$ .

Diventa utile esprimere tale quantità in forma trigonometrica, a partire da:

$$\begin{aligned} r e^{i\theta} &= \Omega_e(P, Q) + i\sqrt{\Omega_e(P)\Omega_e(Q) - \Omega_e(P, Q)^2} \\ r e^{-i\theta} &= \Omega_e(P, Q) - i\sqrt{\Omega_e(P)\Omega_e(Q) - \Omega_e(P, Q)^2}, \end{aligned}$$

i quali rappresentano in forma trigonometrica due numeri complessi di norma:

$$\|r e^{\pm i\theta}\| = |r| |e^{\pm i\theta}| = |r| = \sqrt{\Omega_e(P)\Omega_e(Q)}.$$

Sapendo inoltre che, in generale,  $e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$  si possono ricavare  $\sin(\theta)$  e  $\cos(\theta)$  dalla normalizzazione delle quantità trovate in questo modo:

$$\frac{r e^{\pm i\theta}}{r} = e^{\pm i\theta} = \frac{\Omega_e(P, Q)}{\sqrt{\Omega_e(P)\Omega_e(Q)}} \pm i \frac{\sqrt{\Omega_e(P)\Omega_e(Q) - \Omega_e(P, Q)^2}}{\sqrt{\Omega_e(P)\Omega_e(Q)}} = \cos(\theta) \pm i\sin(\theta).$$

Perciò:

$$\cos(\theta) = \frac{\Omega_e(P, Q)}{\sqrt{\Omega_e(P)\Omega_e(Q)}}, \quad \sin(\theta) = \frac{\sqrt{\Omega_e(P)\Omega_e(Q) - \Omega_e(P, Q)^2}}{\sqrt{\Omega_e(P)\Omega_e(Q)}}.$$

Si può quindi riformulare l'espressione del birapporto, ottenendo:

$$(P \ Q \ P' \ Q') = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta}} = e^{2i\theta}.$$

Come precedentemente osservato il birapporto è un numero complesso di norma unitaria che diventa pari a 1 solamente quando sia  $\lambda_1$  sia  $\lambda_2$  appartengono ad  $\mathbb{R}$ , e dunque quando essi sono uguali. In termini geometrici questo corrisponde ad avere due punti coincidenti, ovvero di distanza nulla.

La funzione del birapporto che si vuole definire per determinare la distanza tra due punti nel piano ellittico dovrà tenerne conto e dunque essere definita in modo tale che si abbia  $d_e(P, Q) = 0$  quando  $(P \ Q \ P' \ Q') = 1$ .

Il candidato ideale diventa dunque il *logaritmo del birapporto* o un qualche suo prodotto per un fattore complesso, opportunamente scelto in modo che la distanza tra due punti sia sempre esprimibile mediante una quantità *reale*. Viene introdotta perciò la seguente definizione:

DEFINIZIONE: Si dice **distanza nel piano ellittico** la funzione

$d_e : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$  definita per  $P, Q \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  da:

$$d_e(P, Q) = \frac{k_e}{2i} \log(P \quad Q \quad \lambda_1 P + Q \quad \lambda_2 P + Q) = \frac{k_e}{2i} \log(e^{2i\theta}) = \frac{k_e}{2i} 2i\theta = k_e \theta$$

dove  $\log$  indica il *logaritmo principale* in  $\mathbb{C}$ .

Si noti che la divisione per il fattore  $2i$  fa sì che la quantità finale sia reale per ogni scelta di punti  $P$  e  $Q$  in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  e che l'ordine dei punti nel birapporto è opportunamente scelto in modo che il logaritmo sia sempre positivo.

Diventa ora necessario verificare che la funzione  $d_e$  trovata sia effettivamente una distanza, ovvero che soddisfi alle proprietà:

- $d_e(P, Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$ : questo è senz'altro vero in quanto il  $\log(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$  e nel caso della distanza il birapporto è pari a 1 se e solo se i due punti coincidono (come precedentemente dimostrato).
- $d_e(P, Q) = d_e(Q, P)$ : per le azioni delle permutazioni del birapporto si ha:  $(P \quad Q \quad P' \quad Q') = (Q \quad P \quad Q' \quad P')$ . Di conseguenza si ottiene subito applicando la definizione di distanza nel piano ellittico che:  $d_e(P, Q) = d_e(Q, P)$ .
- $d_e(P, Q) \leq d_e(P, S) + d_e(S, Q) \quad \forall P, Q, S \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  (subadditività): tale proprietà è subito verificabile quando i tre punti sono allineati perché in questo caso i punti di intersezione della conica saranno gli stessi per ogni coppia di punti tra  $P, Q$  ed  $S$ , quindi (con abuso di notazione per la differenza tra punti):

$$(P \quad Q \quad P' \quad Q') = \frac{(P'-P)(Q'-Q)}{(P'-Q)(Q'-P)} = \frac{(P'-P)(Q'-Q)(Q'-S)(P'-S)}{(P'-Q)(Q'-P)(Q'-S)(P'-S)} = (P \quad S \quad P' \quad Q')(S \quad Q \quad P' \quad Q')$$

e perciò per le proprietà del logaritmo, si ottiene:

$$d_e(P, Q) = \frac{k_e}{2i} \log(P \quad Q \quad P' \quad Q') = \frac{k_e}{2i} \log((P \quad S \quad P' \quad Q')(S \quad Q \quad P' \quad Q')) = \frac{k_e}{2i} (\log(P \quad S \quad P' \quad Q') + \log(S \quad Q \quad P' \quad Q')) = d_e(P, S) + d_e(S, Q),$$

che chiaramente verifica la subadditività tra i tre punti allineati (è evidente il vantaggio nell'utilizzo del logaritmo per la definizione della distanza anche in quanto conserva l'additività delle distanze dei punti su una retta, proprietà presente anche nella metrica euclidea).

Nel caso invece di tre punti  $P, Q, S$  qualsiasi in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ , si considera la *proiezione ortogonale*  $S'$  del punto  $S$  sulla congiungente  $P \vee Q$ , dove si può applicare l'uguaglianza  $d_e(P, Q) = d_e(P, S') + d_e(Q, S')$  appena dimostrata (la nozione di proiezione ortogonale verrà introdotta definendo gli angoli

tra due rette). Inoltre, essendo  $S'$  la proiezione ortogonale del punto  $S$  su  $P \vee Q$ , si avrà  $d_e(P, S') \leq d_e(P, S)$  (analogamente  $d_e(Q, S) \leq d_e(Q, S')$ ), perciò:  $d_e(P, Q) \leq d_e(P, S) + d_e(Q, S)$  e questo verifica la subadditività tra tre punti qualsiasi.

Dunque la funzione  $d_e$  è effettivamente una distanza.

Tale definizione della distanza tra due punti evidenzia due caratteristiche notevoli della metrica ellittica, ovvero:

- **le rette sono forme chiuse di lunghezza finita.** Questo è dovuto alla periodicità della funzione esponenziale complessa  $e^{2i\theta}$  e alla definizione stessa del logaritmo complesso:

$$\log(x + iy) = \log|x + iy| + i\beta(x, y),$$

dove  $\beta(x, y)$  è l'argomento principale, quindi vale sempre  $\beta(x, y) \in [0, 2\pi)$ . Poiché:

$$x + iy = |x + iy|(\cos(\beta(x, y)) + i\sin(\beta(x, y))) = \sqrt{x^2 + y^2}e^{i\beta}$$

per la funzione logaritmo che definisce la distanza ellittica si ha:

$$\log(e^{2i\theta}) = \log|e^{2i\theta}| + 2i\theta = \log(1) + 2i\theta = 2i\theta$$

e analogamente

$$\log(e^{2i(\theta+h\pi)}) = \log|e^{2i(\theta+h\pi)}| + 2i\theta = 2i\theta, \quad \forall h \in \mathbb{Z}, \theta \in [0, 2\pi).$$

Di conseguenza:

$$\frac{k_e}{2i} \log(e^{2i\theta}) = \frac{k_e}{2i} \log(e^{2i(\theta+h\pi)})$$

e questo implica che:  $\frac{k_e}{2i} \log(e^{2ih\pi}) = 0$ . Perciò, se  $P$  e  $Q$  sono due punti distinti del piano ellittico (con  $P' = \lambda_1 P + Q$  e  $Q' = \lambda_2 P + Q$  le intersezioni della loro congiungente con l'assoluto) tali che  $(P \ Q \ P' \ Q') = e^{2ih\pi}$ ,  $h \in \mathbb{Z}$ , allora  $d_e(P, Q) = 0$ , e questo significa che tutti i punti che realizzano un simile birapporto *coincidono* e cioè che le rette sono forme chiuse.

Quindi, poiché  $|e^{2i\theta}| = 1$  per ogni valore di  $\theta$  e poiché  $\beta(x, y) \in [0, 2\pi)$  per ogni numero complesso  $x + iy$ , sicuramente dati due generici punti  $A, B$ :  $d_e(A, B) = \frac{k_e}{2i} \log(e^{2i\theta}) = \frac{k_e}{2i} (2i\theta) \leq \frac{k_e}{2i} (2i\pi) = k_e\pi$ .

In conclusione qualsiasi retta ha lunghezza finita in quanto qualsiasi coppia di punti su essa ha distanza massima pari a  $k_e\pi$ .

- **la massima distanza possibile tra due punti è pari a  $\frac{k_e\pi}{2}$ .** Infatti considerato un certo punto  $P$ , il punto rispetto a cui esso ha distanza

massima è il suo punto reciproco rispetto all'assoluto, ovvero il punto  $P'$  tale per cui:  $\Omega_e(P, P') = 0$ . Per le definizioni date, se questo avviene si ha anche che  $\cos(\theta) = 0$  e quindi  $\theta = \frac{\pi}{2} + h\pi, \forall h \in \mathbb{Z}$ . Dunque, poiché come dimostrato al punto precedente, tutti questi tali punti coincidono nel piano ellittico, si ha:  $d_e(P, P') = k_e \frac{\pi}{2}$ , che corrisponde anche alla distanza tra il punto  $P$  dato e un punto qualsiasi della sua polare rispetto all'assoluto.

### 1.2.2 Distanza tra due punti nella geometria del piano iperbolico

Dato un piano proiettivo reale  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ , una volta fissato un opportuno riferimento di coordinate  $x_0, x_1, x_2$ , l'assoluto della metrica iperbolica è dato dalla conica  $\Omega_i(x) = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$  (di segnatura (2,1) con punti reali) e si definisce la sua forma bilineare associata  $\Omega_i(x, y) = -x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2$ .

Nella metrica ellittica, in cui l'assoluto non ammette punti reali, ogni retta reale lo interseca in due punti complessi coniugati. Così non è, invece, per la metrica iperbolica. L'assoluto iperbolico, infatti, ammette punti reali, i quali dividono  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  in due regioni, una di punti *interni* alla conica e una di punti *esterni* ad essa. Ogni retta reale congiungente i due punti di tale piano proiettivo di cui si vuole misurare la distanza potrà intersecare l'assoluto in due punti reali, in due punti complessi, oppure essere tangente all'assoluto in un punto reale (la tangenza all'assoluto in un punto complesso avviene solo con rette complesse). Diventa opportuno introdurre la seguente definizione:

DEFINIZIONE: Dato il punto  $P \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  e la conica  $\Omega_i$  l'assoluto di tale piano proiettivo,  $P$  sarà detto un punto **proprio** se  $\Omega_i(P) < 0$  (ovvero se si tratta di un punto interno), sarà detto **improprio** se  $\Omega_i(P) = 0$  (ovvero se si tratta di un punto dell'assoluto), sarà detto **ideale** se  $\Omega_i(P) > 0$  (ovvero se si tratta di un punto esterno).

Una retta  $r$  in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  potrà quindi essere *secante* l'assoluto, e in questo caso lo intersecherà in due punti reali (impropri), *tangente* all'assoluto, cioè avente un solo punto improprio e tutti gli altri ideali, oppure *esterna* all'assoluto, ovvero composta da solo punti ideali, e in questo caso sarà appunto detta **ideale** (è il caso di intersezione della retta con l'assoluto in due punti complessi coniugati). Si presenta a questo punto un ostacolo fondamentale, assente nel caso del piano ellittico: non può essere definita una distanza esprimibile mediante quantità reali tra tutti i punti del piano proiettivo reale rispetto all'assoluto iperbolico. Il piano iperbolico non può quindi essere costituito da tutti i punti di  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ , e diventa necessario selezionarne una regione che lo definisca.

DEFINIZIONE: Si dice **piano iperbolico** l'insieme del piano proiettivo reale formato dai punti propri e dai punti impropri.

Diventa opportuno introdurre una nuova notazione:

- si indichi con  $\mathbb{H}$  l'insieme dei punti *propri* di  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$
- si indichi invece con la sua chiusura,  $\overline{\mathbb{H}}$ , l'insieme dei punti *propri e impropri* di  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ , ovvero l'insieme dei punti che compongono il piano iperbolico sopra definito.

Sul piano proiettivo si può così calcolare la distanza tra due punti propri  $P$  e  $Q$  similmente al piano ellittico grazie alla congiungente  $P \vee Q$ . Tale retta, in quanto passante per due punti propri, non può che essere una retta *secante* l'assoluto. Grazie a questa retta può essere dunque definito l'invariante mediante cui calcolare la distanza tra due punti del piano iperbolico, che sarà quindi dato dal birapporto tra  $P, Q$  e i due punti di intersezione della retta con l'assoluto.

Dati due punti  $P = (p_0, p_1, p_2)^T, Q = (q_0, q_1, q_2)^T \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ , il procedimento per la costruzione della distanza tra due punti è del tutto analogo al caso ellittico. Si determinano anzitutto i punti di intersezione della congiungente  $P \vee Q$  con l'assoluto:

$$\begin{aligned} \Omega_i(\lambda P + \mu Q) &= -(\lambda p_0 + \mu q_0)^2 + (\lambda p_1 + \mu q_1)^2 + (\lambda p_2 + \mu q_2)^2 = \\ \lambda^2(-p_0^2 + p_1^2 + p_2^2) + \mu^2(-q_0^2 + q_1^2 + q_2^2) + 2\lambda\mu(-p_0q_0 + p_1q_1 + p_2q_2) &= \\ \lambda^2\Omega_i(P) + 2\lambda\mu\Omega_i(P, Q) + \mu^2\Omega_i(Q) &= 0 \end{aligned}$$

E risolvendo rispetto a  $\lambda$ , posto  $\mu = 1$ , si ottiene:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\Omega_i(P, Q) \pm \sqrt{\Omega_i(P, Q)^2 - \Omega_i(P)\Omega_i(Q)}}{\Omega_i(P)}$$

In questo caso si può osservare che la quantità sotto radice è sempre positiva (a differenza del caso ellittico). Infatti sviluppando i conti si ottiene:

$$\begin{aligned} \Omega_i(P, Q)^2 - \Omega_i(Q)\Omega_i(P) &= \\ p_0^2q_0^2 + p_1^2q_1^2 + p_2^2q_2^2 - 2p_0q_0p_1q_1 + 2p_2q_2p_1q_1 - 2p_0q_0p_2q_2 - p_0^2q_0^2 - p_1^2q_1^2 - p_2^2q_2^2 + \\ p_0^2q_1^2 + p_0^2q_2^2 - p_1^2q_2^2 + p_1^2q_0^2 + p_2^2q_0^2 - p_2^2q_1^2 &= \\ - (p_1q_2 - p_2q_1)^2 + (p_2q_0 - p_0q_2)^2 + (p_0q_1 - p_1q_0)^2 &= \\ \Omega_i((p_0, p_1, p_2)^T \times (q_0, q_1, q_2)^T), \end{aligned}$$

dove il prodotto esterno di due punti nel piano proiettivo indica la retta congiungente tali due punti. Poiché la matrice di  $\Omega_i^*$  è uguale, a meno di proporzionalità, alla matrice di  $\Omega_i$ , le due coniche saranno associate alla stessa forma bilineare, quindi la valutazione del prodotto esterno dei due punti rispetto ad  $\Omega_i$  è equivalente alla valutazione della retta congiungente rispetto ad  $\Omega_i^*$ . Essendo i due punti  $P$  e  $Q$  due punti in  $\mathbb{H}$ , la retta congiungente sarà secante l'assoluto in due punti reali e sarà quindi la polare di un punto ideale  $R$ , ovvero tale che

$\Omega_i(R) > 0$ . Perciò, poiché la valutazione della polare rispetto ad una conica è equivalente alla valutazione del rispettivo polo rispetto alla sua conica duale, grazie alla proporzionalità delle matrici si avrà che certamente:  $\Omega_i(P \times Q) > 0$ . Quindi  $\lambda_{1,2}$  saranno quantità *reali*, e questo implica che i punti di intersezione della congiungente  $P \vee Q$  con l'assoluto  $P', Q' = \lambda_{1,2}P + Q$  sono a loro volta punti reali.

Si procede calcolando il birapporto:

$$(P \quad Q \quad P' \quad Q') = (\infty \quad 0 \quad \lambda_1 \quad \lambda_2) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{\Omega_i(P, Q) + \sqrt{\Omega_i(P, Q)^2 - \Omega_i(P)\Omega_i(Q)}}{\Omega_i(P, Q) - \sqrt{\Omega_i(P, Q)^2 - \Omega_i(P)\Omega_i(Q)}}.$$

Si nota che la quantità data dal birapporto è sempre *reale positiva* in quanto quoziente di reali positivi (e questo è dovuto al fatto che i punti di intersezione non separano i punti propri nella congiungente) perciò il suo logaritmo è sempre un numero *reale*. La stessa cosa non si sarebbe potuta concludere se per calcolare la distanza si fossero considerati anche i punti ideali. In questo caso, infatti, il calcolo del birapporto avrebbe fornito una quantità variabile in  $\mathbb{C}$  e non in  $\mathbb{R}_{>0}$ , e quindi sarebbe stato impossibile trovare una costante unica per cui moltiplicare il suo logaritmo che rendesse le distanze tra ogni coppia di punti in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  contemporaneamente reali. Solo alla luce di questo ha senso quindi definire la distanza nel piano iperbolico:

DEFINIZIONE: Si dice **distanza nel piano iperbolico** la funzione  $d_i : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{R}$  definita per  $P, Q \in \mathbb{H}$ :

$$d_i(P, Q) = \frac{k_i}{2} \log(P \quad Q \quad \lambda_1 P + Q \quad \lambda_2 P + Q)$$

La verifica che tale funzione  $d_i$  sia effettivamente una distanza è del tutto analoga al caso ellittico, in quanto si basa sulle proprietà di additività del logaritmo, sulle azioni di permutazioni dei birapporti e sulla nozione di proiezione ortogonale, tutti strumenti utilizzati anche per la definizione della distanza nel piano ellittico (anche la proiezione ortogonale iperbolica verrà definita una volta introdotti gli angoli tra due rette nel piano iperbolico). Inoltre, anche in questo caso, il birapporto avrà valore 1 solamente quando  $P \equiv Q$ , e dunque applicandovi il logaritmo come nel caso ellittico si otterrà la distanza nulla.

A differenza del caso ellittico, essendo il birapporto definito reale positivo, non sembra possibile esprimerlo in termini di un certo angolo  $\theta$ . Tuttavia, invertendo



la formula della distanza, si ottiene:

$$\begin{aligned}\log(P Q P' Q') &= \frac{2d_i(P, Q)}{k_i} \Rightarrow e^{\frac{2d_i(P, Q)}{k_i}} = (P Q P' Q') \Rightarrow e^{\frac{d_i(P, Q)}{k_i}} = \sqrt{(P Q P' Q')}, \\ -\log(P Q P' Q') &= -\frac{2d_i(P, Q)}{k_i} \Rightarrow e^{-2\frac{d_i(P, Q)}{k_i}} = (P Q P' Q')^{-1} \Rightarrow e^{-\frac{d_i(P, Q)}{k_i}} = \sqrt{\frac{1}{(P Q P' Q')}},\end{aligned}$$

e questo dà la possibilità di definire il birapporto in termini di seno e coseno iperbolici di un angolo  $\theta = \frac{d_i(P, Q)}{k_i}$ . Infatti, per definizione:

$$\cosh \theta = \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2} \quad \sinh \theta = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2}, \quad \text{e perciò:} \quad \cosh \theta + \sinh \theta = e^\theta.$$

Quindi, rispetto all'angolo in esame, grazie all'espressione trovata per  $\sqrt{(P Q P' Q')}$ , possono essere ricavate le espressioni di coseno iperbolico e seno iperbolico:

$$\begin{aligned}\cosh\left(\frac{d_i(P, Q)}{k_i}\right) &= \frac{e^{\frac{d_i(P, Q)}{k_i}} + e^{-\frac{d_i(P, Q)}{k_i}}}{2} = \frac{\sqrt{(P Q P' Q')} + \frac{1}{\sqrt{(P Q P' Q')}}}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\Omega_i(P, Q) + \sqrt{\Omega_i(P, Q)^2 - \Omega_i(P)\Omega_i(Q)}}{\Omega_i(P, Q) - \sqrt{\Omega_i(P, Q)^2 - \Omega_i(P)\Omega_i(Q)}}} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\Omega_i(P, Q) - \sqrt{\Omega_i(P, Q)^2 - \Omega_i(P)\Omega_i(Q)}}{\Omega_i(P, Q) + \sqrt{\Omega_i(P, Q)^2 - \Omega_i(P)\Omega_i(Q)}}} = \\ &= \frac{1}{2} \left| \frac{\Omega_i(P, Q) + \sqrt{\Omega_i(P, Q)^2 - \Omega_i(P)\Omega_i(Q)} + \Omega_i(P, Q) - \sqrt{\Omega_i(P, Q)^2 - \Omega_i(P)\Omega_i(Q)}}{\Omega_i(P)\Omega_i(Q)} \right| = \frac{|\Omega_i(P, Q)|}{\sqrt{\Omega_i(P)\Omega_i(Q)}}, \\ \sinh\left(\frac{d_i(P, Q)}{k_i}\right) &= \frac{e^{\frac{d_i(P, Q)}{k_i}} - e^{-\frac{d_i(P, Q)}{k_i}}}{2} = \frac{\sqrt{(P Q P' Q')} - \frac{1}{\sqrt{(P Q P' Q')}}}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{\Omega_i(P, Q) + \sqrt{\Omega_i(P, Q)^2 - \Omega_i(P)\Omega_i(Q)}}{\Omega_i(P, Q) - \sqrt{\Omega_i(P, Q)^2 - \Omega_i(P)\Omega_i(Q)}}} - \sqrt{\frac{\Omega_i(P, Q) - \sqrt{\Omega_i(P, Q)^2 - \Omega_i(P)\Omega_i(Q)}}{\Omega_i(P, Q) + \sqrt{\Omega_i(P, Q)^2 - \Omega_i(P)\Omega_i(Q)}}} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\Omega_i(P, Q) + \sqrt{\Omega_i(P, Q)^2 - \Omega_i(P)\Omega_i(Q)} - \Omega_i(P, Q) + \sqrt{\Omega_i(P, Q)^2 - \Omega_i(P)\Omega_i(Q)}}{\Omega_i(P)\Omega_i(Q)} \right) = \frac{\sqrt{\Omega_i(P, Q)^2 - \Omega_i(P)\Omega_i(Q)}}{\sqrt{\Omega_i(P)\Omega_i(Q)}}.\end{aligned}$$

Si noti che è stato necessario imporre il modulo nei calcoli sviluppati per determinare il coseno iperbolico di  $\theta$ . Il segno della valutazione dei punti in  $\Omega_i$ , infatti, dipende dall'ordine in cui i punti vengono imposti per calcolare il birapporto che determina la distanza, ed è quindi del tutto arbitrario. Diventa quindi necessario imporre il modulo affinché la definizione del coseno iperbolico sia consistente (la funzione coseno iperbolico, infatti, è positiva in ogni punto del dominio in cui viene valutata).

Le funzioni  $\cosh(\theta)$  e  $\sinh(\theta)$  caratterizzano la metrica iperbolica.

Un'importante differenza con la metrica ellittica è che nella metrica iperbolica **le rette hanno lunghezza infinita**. Infatti, essendo il birapporto espresso da una quantità reale, dati  $P, Q \in \mathbb{H}$  e  $P', Q'$  i punti impropri di intersezione della congiungente con l'assoluto, si ottiene, con un abuso di notazione per quanto riguarda la differenza tra punti:

$$(P Q P' Q') = \frac{(P' - P)(Q' - Q)}{(P' - Q)(Q' - P)} \longrightarrow \infty \text{ con } Q \longrightarrow P', P \longrightarrow Q'$$

quindi anche  $\log(P Q P' Q') \longrightarrow \infty$ .

Si noti che, svolgendo il limite per  $P$  che tende a  $P'$  e  $Q$  a  $Q'$ , si ottiene:  $\log(P Q P' Q') \rightarrow -\infty$ , e la cosa può dipendere solamente dal fatto che l'ordine dei punti del birapporto rispecchi l'ordine dei punti sulla congiungente. La distanza risulta in ambo i casi degenerare.

Perciò per ogni valore  $d \in \mathbb{R}_{>0}$  esiste sempre una coppia di punti  $D_1, D_2 \in \mathbb{H}$  tale che  $d_i(D_1, D_2) > d$ , e questo vuol dire che la funzione  $d_i$  è una funzione *non limitata*. Ne segue che le rette iperboliche hanno lunghezza infinita.

### 1.2.3 Confronto con le distanze tra punti nella metrica euclidea

Alla luce del procedimento svolto per costruire le distanze nella metrica ellittica e in quella iperbolica, è subito evidente come lo stesso non possa essere utilizzato per definire la distanza nella metrica euclidea.

Il problema sta nell'impiego del birapporto come invariante. Infatti, mentre nei casi non euclidei la definizione dell'assoluto mediante una conica non degenera rende possibile individuare sempre due punti distinti di intersezione con la retta congiungente la coppia di punti di cui si vuole calcolare la distanza, questo non è possibile nel piano euclideo dove l'assoluto è determinato da una conica degenera. Presi due punti qualsiasi nel piano euclideo, la loro congiungente interseca per forza l'assoluto in due punti coincidenti (essendo la retta su cui sono fissati i due punti ciclici contata due volte come conica) e quindi qualsiasi birapporto che li riguardi sarà degenera (e a maggior ragione il suo logaritmo).

Tuttavia, ciò che si può invece analizzare è il ruolo della conica degenera corrispondente all'assoluto euclideo rispetto alle coniche non degeneri degli assoluti non euclidei. A tal fine è utile considerare il fascio di coniche bitangenti parametrizzato da un certo  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ :  $\Omega_\varepsilon(x_0, x_1, x_2) = \varepsilon x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$ . Le possibili matrici

per tale fascio saranno quindi:  $\Omega_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\Omega'_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix}$ .

Certamente le coniche non degeneri del fascio saranno tutte quelle ottenute sostituendo al parametro  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  valori non nulli (e si avranno coniche ellittiche per  $\varepsilon > 0$ , iperboliche per  $\varepsilon < 0$ ), mentre invece quelle degeneri si otterranno per  $\varepsilon = 0$  oppure  $\frac{1}{\varepsilon} = 0$ , quindi tramite i limiti:

$$\Omega_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Omega_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Omega_\infty = \lim_{\frac{1}{\varepsilon} \rightarrow 0} \Omega'_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \Omega'_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nello spazio proiettivo reale  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ , la conica degenera  $\Omega_0(x_0, x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$  è una coppia di rette all'infinito complesse coniugate, mentre  $\Omega_\infty(x_0, x_1, x_2) = x_0^2$

è una retta all'infinito contata due volte. Si può oltretutto notare subito che  $\Omega_0$  e  $\Omega_\infty$  sono l'una la duale dell'altra, perciò, in questa veste,  $\Omega_\infty = \Omega_0^*$  corrisponde al punto doppio di intersezione delle due rette complesse coniugate, mentre  $\Omega_0 = \Omega_\infty^*$  corrisponde alla coppia di punti ciclici complessi coniugati  $P = (0, 1, i)^T$ ,  $P' = (0, 1, -i)^T$ , base del fascio. Dunque, ricordando la costruzione della metrica euclidea a partire dal piano proiettivo reale  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ , si individuano in  $\Omega_\infty$  e  $\Omega_\infty^*$  le coniche caratterizzanti l'assoluto degenerare della geometria euclidea.

Il fatto che le due coniche degeneri siano l'una la duale dell'altra e non possano essere descritte dalla stessa espressione in nessun opportuno sistema di riferimento, esclude la possibilità che esse siano autoduali, perciò le proprietà metriche della geometria che definiscono non godranno del principio di dualità. Alla luce di queste nuove considerazioni diventa evidentemente possibile studiare le proprietà della metrica euclidea in relazione a quelle delle metriche ellittica ed iperbolica, guardando alla conica  $\Omega_\infty$  e alla sua duale  $\Omega_\infty^*$  come limiti di coniche non degeneri in un opportuno fascio di coniche parametrizzato da  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  e, di conseguenza, analizzando la definizione di distanza tra punti come limite della distanza tra due punti nelle metriche non euclidee.

Data quindi una generica conica non degenerare ellittica del fascio parametrizzato in  $\varepsilon$ ,  $\Omega_\kappa(x_0, x_1, x_2) = \kappa x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$ , con  $\kappa \in \mathbb{R}_{>0}$  e forma bilineare associata  $\Omega_\kappa(x, y) = \kappa x_0 y_0 + x_1 y_1 + x_2 y_2$ , si è precedentemente ricavato che la distanza tra due punti  $P = (p_0, p_1, p_2)^T$ ,  $Q = (q_0, q_1, q_2)^T \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  non appartenenti all'assoluto nella metrica individuata da  $\Omega_\kappa$  dipende da un angolo  $\theta_\kappa$ , di cui sono definiti:

$$\sin(\theta_\kappa) = \frac{\sqrt{\Omega_\kappa(P)\Omega_\kappa(Q) - \Omega_\kappa(P, Q)^2}}{\sqrt{\Omega_\kappa(P)\Omega_\kappa(Q)}}, \quad \cos(\theta_\kappa) = \frac{\Omega_\kappa(P, Q)}{\sqrt{\Omega_\kappa(P)\Omega_\kappa(Q)}}.$$

Assumendo per comodità di trovarsi in un opportuno sistema di riferimento (che esiste sempre) in cui  $p_0 = q_0 = 1$ , sviluppando  $\sin(\theta_\kappa)$  si ottiene:

$$\begin{aligned} \sin(\theta_\kappa) &= \frac{\sqrt{(\kappa+p_1^2+p_2^2)(\kappa+q_1^2+q_2^2) - (\kappa+p_1q_1+p_2q_2)^2}}{\sqrt{(\kappa+p_1^2+p_2^2)(\kappa+q_1^2+q_2^2)}} = \\ &= \frac{\sqrt{\kappa^2 + \kappa(p_1^2+p_2^2+q_1^2+q_2^2) + p_1^2q_1^2 + p_2^2q_2^2 + p_1^2q_2^2 + p_2^2q_1^2 - \kappa^2 - p_1^2q_1^2 - p_2^2q_2^2 - 2\kappa p_1q_1 - 2\kappa p_2q_2 - 2p_1p_2q_1q_2}}{\sqrt{(\kappa+p_1^2+p_2^2)(\kappa+q_1^2+q_2^2)}} = \\ &= \frac{\sqrt{\kappa[(p_1-q_1)^2 + (p_2-q_2)^2] + (p_1q_2 - p_2q_1)^2}}{\sqrt{\kappa^2 + \kappa(p_1^2+p_2^2+q_1^2+q_2^2) + (p_1^2+p_2^2)(q_1^2+q_2^2)}} \longrightarrow 0 \quad \text{per } \kappa \longrightarrow \infty \quad \text{all'ordine di } \frac{1}{\sqrt{\kappa}}. \end{aligned}$$

Da qui si può ricavare un'espressione per la distanza  $d_\kappa$  tra due punti visto che, grazie all'andamento asintotico a 0 per  $\kappa$  che tende a  $\infty$ , si può approssimare il seno con il suo argomento, che si può ricavare dalla definizione di distanza nella metrica ellittica:

$$d_\kappa(P, Q) = k_\kappa \theta_\kappa \quad \text{quindi} \quad \theta_\kappa = \frac{d_\kappa(P, Q)}{k_\kappa}.$$

Perciò si ottiene:

$$d_\kappa(P, Q) = k_\kappa \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \frac{\sqrt{[(p_1 - p_2)^2 + (p_2 - q_2)^2] + \frac{(p_1 q_2 - p_2 q_1)^2}{\kappa}}}{\sqrt{1 + \frac{(p_1^2 + p_2^2 + q_1^2 + q_2^2)}{\kappa} + \frac{(p_1^2 + p_2^2)(q_1^2 + q_2^2)}{\kappa^2}}}.$$

A questo punto, dunque, procedendo con il ragionamento limite, la distanza nel piano definito fissando la conica  $\Omega_\infty$  e la sua duale  $\Omega_\infty^*$ , sarà:

$$d(P, Q) = \lim_{\kappa \rightarrow \infty} d_\kappa(P, Q),$$

dove si è imposta la costante dipendente da  $\kappa$ :  $k_\kappa = l\sqrt{\kappa}$ , con  $l \in \mathbb{R}_{>0}$  costante arbitraria. In conclusione:

$$d(P, Q) = \lim_{\kappa \rightarrow \infty} \frac{l\sqrt{\kappa}}{\sqrt{\kappa}} \frac{\sqrt{[(p_1 - p_2)^2 + (p_2 - q_2)^2] + \frac{(p_1 q_2 - p_2 q_1)^2}{\kappa}}}{\sqrt{1 + \frac{(p_1^2 + p_2^2 + q_1^2 + q_2^2)}{\kappa} + \frac{(p_1^2 + p_2^2)(q_1^2 + q_2^2)}{\kappa^2}}} = l\sqrt{(p_1 - p_2)^2 + (q_1 - q_2)^2},$$

che coincide proprio con la nota definizione della distanza nella metrica euclidea moltiplicata per la costante arbitraria  $l$ , la cui scelta equivale ad imporre un'unità di misura per le lunghezze. Si noti che tale costante moltiplicativa permette l'esistenza nella geometria euclidea delle similitudini (definite appunto al variare dell'unità di misura), assenti in tutte le altre metriche.

In conclusione, la geometria euclidea può essere descritta come il caso limite che separa la geometria iperbolica da quella ellittica dato dalla conica degenerare del fascio costituita da una retta doppia su cui vengono fissati i due punti ciclici. La distanza euclidea tra due punti può essere quindi allo stesso modo descritta come caso limite delle distanze non euclidee.

### 1.3 Definizione dell'angolo tra due rette

Similmente a come si è lavorato per le distanze tra due punti, anche l'angolo tra due rette può essere definito tramite un birapporto. Infatti, date due rette proiettive  $r$  ed  $s$  di  $\mathbb{P}$ , per il loro punto di incontro  $r \wedge s$  possono essere tracciate le due tangenti all'assoluto. Il birapporto tra le due rette di partenza e le due tangenti dipende anche in questo caso soltanto dai dati iniziali e dall'assoluto, e per questo motivo questo stesso birapporto (o una sua opportuna funzione) può essere usato per misurare l'angolo tra  $r$  ed  $s$ .

A partire da questa considerazione si definiscono le funzioni del birapporto che determinano la misura dell'angolo tra due rette nel caso della geometria ellittica e in quello della geometria iperbolica.

### 1.3.1 Angolo tra due rette nella geometria del piano ellittico

Date due rette  $r, s$  nel piano proiettivo reale, una volta fissato un opportuno sistema di riferimento  $(x_0, x_1, x_2)$  e una la conica  $\Omega_e(x) = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$  (senza punti reali di segnatura  $(3,0)$ ) come assoluto del piano ellittico costruito su  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ , è conveniente studiare il birapporto tra  $r, s$  e le due tangenti per  $r \wedge s$  all'assoluto tramite la *conica duale* di  $\Omega_e$ .

Infatti, essendo  $\Omega_e(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  la matrice di  $\Omega_e$ , la matrice della co-

nica duale di  $\Omega_e$  sarà proporzionale alla sua inversa, e l'inversa della matrice identità è ancora la matrice identità. Perciò anche la forma bilineare associata alle due coniche è la stessa. Dunque, detta  $\Omega_e^*$  la conica duale di  $\Omega_e$  e date  $r = (r_0, r_1, r_2), s = (s_0, s_1, s_2)$  le rette espresse nelle loro coordinate pluckeriane, esse corrispondono a due punti nello spazio ellittico costruito rispetto alla conica duale  $\Omega_e^*$ , ed essendo  $r, s$  e le due rette tangenti all'assoluto quattro rette di uno stesso fascio per  $r \wedge s$  in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ , esse corrisponderanno a quattro punti allineati del piano duale (la cui dimensione è la stessa del piano dato).

A questo punto è evidente che i calcoli da svolgere per determinare l'angolo tra due rette saranno gli stessi di quelli svolti per determinare la distanza tra due punti. Dunque, data la forma bilineare associata alla conica duale  $\Omega_e^*(r, s) = r_0s_0 + r_1s_1 + r_2s_2$ , si avrà il birapporto:

$$(r \ s \ r' \ s') = \frac{\Omega_e^*(r, s) + i\sqrt{\Omega_e^*(r)\Omega_e^*(s) - \Omega_e^*(r, s)^2}}{\Omega_e^*(r, s) - i\sqrt{\Omega_e^*(r)\Omega_e^*(s) - \Omega_e^*(r, s)^2}} = e^{2i\theta}$$

**DEFINIZIONE:** Date due rette  $r, s$ , il loro punto di intersezione  $r \wedge s$  e le tangenti  $r', s'$  all'assoluto da questo punto in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ , si definisce **l'angolo tra due rette nel piano ellittico** come:

$$\alpha_e(r, s) = \frac{1}{2i} \log(r \ s \ r' \ s') = \frac{1}{2i} \log(e^{2i\theta}) = \frac{1}{2i} 2i\theta = \theta$$

perciò  $\alpha_e(r, s)$  sarà definito da:

$$\cos(\alpha_e(r, s)) = \cos(\theta) = \frac{\Omega_e^*(r, s)}{\sqrt{\Omega_e^*(r)\Omega_e^*(s)}} \quad \sin(\alpha_e(r, s)) = \sin(\theta) = \frac{\sqrt{\Omega_e^*(r)\Omega_e^*(s) - \Omega_e^*(r, s)^2}}{\sqrt{\Omega_e^*(r)\Omega_e^*(s)}}$$

L'evidente parallelismo tra la definizione di distanza ellittica e quella di angolo tra due rette nel piano ellittico dato dal fatto che si possano identificare  $\Omega_e$  ed  $\Omega_e^*$  porta alla possibilità di esprimere la distanza in funzione dell'angolo:

$$\frac{d_e(P, Q)}{k_e} = \alpha_e(p, q)$$

con  $P, Q \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  punti e  $p, q$  le loro rispettive polari. Se ne conclude che, nel piano ellittico, i concetti di *distanza tra punti* e *angolo tra rette* sono duali.

### Ortogonalità e proiezioni ortogonali nel piano ellittico

Si introduce la seguente definizione:

DEFINIZIONE: Due rette  $r, s$  in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  sono dette **ortogonali** nel piano ellittico se sono reciproche rispetto all'assoluto, ovvero se  $\Omega_e^*(r, s) = 0$  o, analogamente, se ciascuna contiene il polo dell'altra.

Quindi due rette sono ortogonali se e solo se  $\cos(\alpha_e(r, s)) = 0$  cioè  $\alpha_e = \frac{\pi}{2}$ . Dalla dualità individuata poc'anzi si ottiene quindi:

$$\Omega_e^*(p, q) = 0 \Leftrightarrow \cos(\alpha_e(p, q)) = 0 \Leftrightarrow \alpha_e(p, q) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow d_e(P, Q) = \frac{k_e\pi}{2}$$

(dove le doppie implicazioni derivano dalla coincidenza periodica dei punti nel piano ellittico). Tutto ciò sancisce la corrispondenza duale tra punti opposti (ovvero tali che ognuno passi per la polare dell'altro), che sono di distanza massima per la metrica ellittica, e rette ortogonali.

La definizione di rette ortogonali rende inoltre possibile introdurre il concetto di *proiezione ortogonale di un certo punto  $P$  su una retta  $r$  in cui non è contenuto* (utilizzato precedentemente per dimostrare che la funzione  $d_e$  fosse effettivamente una distanza).

DEFINIZIONE: Dati una retta  $r$  sul piano proiettivo reale ed un punto  $P$  che non vi appartiene, il punto  $H \in r$  è una **proiezione ortogonale** di  $P$  su  $r$  se la retta  $P \vee H$  è ortogonale a  $r$ .

Questo è equivalente a dire che la retta  $P \vee H$  è ortogonale ad  $r$  se passa per il polo di  $r$ , e da questa considerazione si deduce che la proiezione ortogonale è unica solamente se  $P$  non è polo di  $r$ , altrimenti *ogni punto di  $r$  è proiezione ortogonale del suo polo*. Detto poi  $R$  il polo di  $r$ , poiché si è ricavato che i punti reciproci rispetto all'assoluto realizzano la massima distanza pari a  $\frac{k_e\pi}{2}$ , e ogni punto di  $r$  è reciproco rispetto all'assoluto al polo  $R$ , si ha quindi la relazione:  $\frac{k_e\pi}{2} = d_e(P, R) + d_e(P, H)$ .

Dato un punto  $P \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  e una retta  $r$  che non lo contiene, la *proiezione ortogonale  $H$  di  $P$  su  $r$  è il punto che realizza la minima distanza tra  $P$  ed  $r$* . Tale proprietà si può dimostrare fissando un opportuno sistema di riferimento

in cui  $H$  sia l'origine. Siano quindi:

$$H = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ y \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R}, \quad \text{e sia poi } X = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \in r, x \in \mathbb{R}, X \neq H.$$

Grazie alla definizione della distanza nel piano ellittico in funzione di un certo angolo  $\theta$ , è possibile mettere a confronto  $d_e(P, H) = k_e\theta_1$  e  $d_e(P, X) = k_e\theta_2$  tramite l'espressione di  $\cos(\theta)$ . Infatti, poiché dati due generici punti  $A, B \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  si ha  $d_e(A, B) = k_e\theta \leq \frac{k_e\pi}{2}$  (quindi  $\theta \leq \frac{\pi}{2}$ ), grazie alla decrescenza della funzione coseno in  $[0, \pi]$ , si avrà che:

$$d_e(P, H) \leq d_e(P, X) \quad \forall X \in r \iff \cos(\theta_1) \geq \cos(\theta_2).$$

Sviluppando i conti si ottiene:

$$\cos(\theta_1) = \frac{\Omega_e(P, H)}{\sqrt{\Omega_e(P)\Omega_e(H)}} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \geq \cos(\theta_2) = \frac{\Omega_e(P, X)}{\sqrt{\Omega_e(P)\Omega_e(X)}} = \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Questo prova che la proiezione ortogonale di  $P$  su  $r$  realizza la minima distanza tra  $P$  ed  $r$ , per ogni punto  $P$  del piano proiettivo e ogni retta  $r$  che non lo contiene. Tale proprietà è fondamentale per dimostrare che  $d_e$  rispetta la disuguaglianza traingolare.

### 1.3.2 Parallelismo nel piano ellittico e conseguenze

In geometria euclidea vengono dette *rette parallele* due o più rette del piano che non s'intersecano. Sul piano euclideo esse possono essere caratterizzate in due modi: data una retta  $r$ , le rette ad essa parallele sono le rette che formano un angolo nullo con  $r$ , oppure data una retta  $r$  le rette ad essa parallele sono i luoghi dei punti del piano tutti ad una certa distanza costante da  $r$ . Nel piano euclideo le due caratterizzazioni individuano lo stesso luogo geometrico.

Per quanto riguarda la prima caratterizzazione, dalla corrispondenza duale individuata si ricava che, così come due punti nel piano ellittico hanno distanza nulla se e solo se coincidono, allo stesso modo tra due rette del piano ellittico vi sarà un angolo nullo se e solo se le due rette coincidono. Ne segue un'importante caratteristica della metrica piana ellittica: nel piano ellittico *non esistono rette distinte che formino tra loro un angolo nullo*, e questo vuol dire che nel piano ellittico non esistono rette parallele secondo la prima caratterizzazione data in geometria euclidea.

## Distanze e angoli tra un punto e una retta

In analogia al caso euclideo, possono introdursi le seguenti definizioni:

DEFINIZIONE: si definisce la **distanza tra un punto  $P$  e una retta  $r$**  del piano ellittico come la minima distanza tra  $P$  e i punti di  $r$ .

DEFINIZIONE: si definisce l'**angolo tra un punto  $P$  e una retta  $r$**  del piano ellittico come il minimo angolo tra  $r$  e il fascio di rette per  $P$  che intersecano  $r$ .

Dove si è dimostrato che la minima distanza tra  $P$  ed  $r$  è realizzata dalla proiezione ortogonale di  $P$  su  $r$ . Inoltre, grazie alla dualità dei concetti di distanza e di angolo nel piano ellittico, come la somma delle distanze di un certo punto  $P$  da una retta  $p$  e di  $P$  dal polo di  $p$  è necessariamente pari a  $\frac{k_e\pi}{2}$ , così la somma dell'angolo tra una retta  $r$  e una retta  $s$  e dell'angolo tra  $r$  ed il polo di  $s$  è pari a  $\frac{\pi}{2}$ . Segue in particolare da queste considerazioni che il calcolo della distanza tra un certo punto e una retta dà la stessa informazione del calcolo della distanza tra il punto e il polo di tale retta (dato che la prima distanza sarà data dalla differenza tra  $\frac{k_e\pi}{2}$  e la seconda distanza). Analogamente accade per il calcolo dell'angolo tra una retta e un punto e quello dell'angolo tra la retta e la polare di tale punto.

A partire dalle definizioni introdotte, è possibile definire anche la distanza tra due rette nel piano ellittico come il minimo della distanza tra i loro punti e, dualmente, l'angolo tra due punti come il minimo degli angoli tra le rette dei fasci per quei dei punti (analogamente a quanto avviene nel piano euclideo). Tuttavia, le due definizioni sono banali nel piano ellittico: per quanto riguarda la distanza tra rette, nel piano proiettivo ogni coppia di rette s'interseca, quindi nel piano ellittico definito certamente ogni coppia di rette avrà distanza nulla (il minimo viene realizzato dal punto di intersezione). Per quanto riguarda l'angolo tra punti, invece, le rette che realizzano il minimo angolo coincideranno entrambe con la retta congiungente i due punti in esame, quindi chiaramente tra ogni coppia di punti l'angolo sarà nullo.

Queste ultime considerazioni permettono di analizzare la seconda caratterizzazione euclidea di rette parallele nel caso ellittico: poiché ogni coppia di rette ha distanza nulla, *non esistono nel piano ellittico rette che abbiano distanza costante da una retta data diverse dalla retta stessa*, perciò non esistono rette parallele usando la seconda caratterizzazione data in geometria euclidea (si dimostrerà in seguito che i luoghi dei punti del piano che realizzano distanza costante da una retta data non sono rette, bensì cerchi). In conclusione, **nel piano ellittico non esistono rette parallele**.



### 1.3.3 Angolo tra due rette nella geometria del piano iperbolico

Nel caso della geometria iperbolica, la regione parziale del piano proiettivo dove è stata definita la distanza tra due punti sarà la stessa in cui operare per definire l'angolo tra due rette, le quali, per appartenere al piano iperbolico, dovranno per forza essere secanti l'assoluto. A seconda però della natura del loro punto di intersezione differiranno le tangenti all'assoluto da quel punto con le quali calcolare il birapporto e di conseguenza la stessa definizione dell'angolo. Date dunque due rette  $r, s$  in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  con un opportuno sistema di riferimento fissato  $(x_0, x_1, x_2)$  e l'assoluto determinato da  $\Omega_i(x) = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$ , esse s'intersecheranno nel punto  $r \wedge s$ , che potrà essere proprio, improprio, oppure ideale.

- $r \wedge s$  è un punto **proprio**: in questo caso le rette tangenti all'assoluto per  $r \wedge s$  sono rette complesse coniugate, ed è quindi possibile definire il birapporto tra  $r, s$  e le due tangenti. Ha senso dare quindi la seguente definizione:

DEFINIZIONE: Date due rette  $r, s$  in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  che s'intersecano nel punto  $r \wedge s$  tale che  $\Omega_i(r \wedge s) < 0$ , e le rette  $r', s'$  tangenti all'assoluto passanti per tale punto, si definisce l'**angolo tra le due rette nel piano iperbolico**:

$$\alpha_i(r, s) = \frac{1}{2i} \log(r s r' s')$$

definito da:

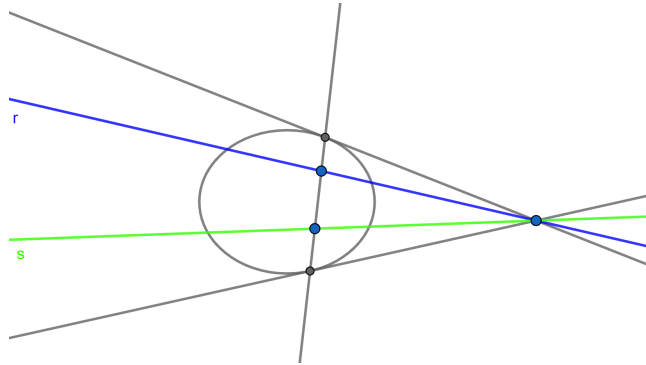
$$\cos(\alpha_i(r, s)) = \frac{\Omega_i^*(r, s)}{\sqrt{\Omega_i^*(r)\Omega_i^*(s)}} \quad \sin(\alpha_i(r, s)) = \frac{\sqrt{\Omega_i^*(r)\Omega_i^*(s) - \Omega_i^*(r, s)^2}}{\sqrt{\Omega_i^*(r)\Omega_i^*(s)}}$$

Dove  $\Omega_i^*$  è la conica duale di  $\Omega_i$  e  $\Omega_i^*(r, s)$  è la forma bilineare associata alla conica duale, definita rispetto alle coordinate pluckeriane delle rette (in modo del tutto analogo al caso ellittico). Si è individuato in questo modo un angolo reale tra le due rette.

- $r \wedge s$  è un punto **improprio**: in questo caso le tangenti all'assoluto passanti per il punto  $r \wedge s$  saranno anche tangenti in quel punto all'assoluto, di conseguenza, essendo la tangente ad una conica in un punto su un piano proiettivo unica, le due tangenti saranno coincidenti. Questo significa che, calcolando l'angolo come nel caso precedente tramite il birapporto tra  $r, s$  e le due tangenti  $r' \equiv s'$ , poiché  $(r s r' s') = (r s r' r') = 1$  si avrà:

$$\alpha_i(r, s) = \frac{1}{2i} \log(r s r' s') = \frac{1}{2i} \log(1) = 0$$

Quindi nella metrica iperbolica esistono rette distinte il cui angolo compreso sia nullo, ovvero *la metrica iperbolica ammette le rette parallele* secondo la prima caratterizzazione data in geometria euclidea.



**Figura 1.1:** Le rette  $r$  ed  $s$  in figura si intersecano in un punto ideale, e il birapporto tra  $r, s$  e le due tangenti alla conica può essere equivalentemente calcolato come il birapporto tra i due punti di tangenza e i due punti individuati dall'intersezione della loro congiungente rispettivamente con  $r$  ed  $s$ .

- $r \wedge s$  è un punto **ideale**: in questo caso esistono due rette reali  $r', s'$  distinte tangenti all'assoluto. Per calcolare il birapporto  $(r \ s \ r' \ s')$  tra le rette si può calcolare equivalentemente il birapporto tra i punti ottenuti intersecando la polare di  $r \wedge s$  con le quattro rette nel piano iperbolico (la polare sarà la congiungente dei punti di tangenza di  $r'$  ed  $s'$  con la conica). Il birapporto così ottenuto sarà un numero reale positivo (in quanto i punti impropri non dividono i punti propri sulla polare) e di conseguenza, applicando la definizione di angolo:  $\alpha_i(r, s) = \frac{1}{2i} \log(r \ s \ r' \ s')$  si otterrà un numero complesso. Dunque non può essere definito tra queste rette un angolo reale, ma solo uno immaginario.

Si può subito notare che, a differenza del caso ellittico, le nozioni di distanza tra punti e di angolo fra rette *non sono duali*. Infatti, mentre la distanza tra due punti di  $\mathbb{H}$  è sempre definita, l'angolo tra due rette può non esserlo. Inoltre, anche nel caso in cui l'angolo risulti definito, il logaritmo del birapporto che lo definisce è una quantità immaginaria, e dev'essere quindi moltiplicato per un'altra quantità immaginaria per avere la misura espressa da quantità reali positive, mentre invece la distanza nel piano iperbolico viene definita dal logaritmo di un birapporto reale positivo, e quindi dev'essere moltiplicata per una costante reale perché ne risulti una quantità reale. Per avere una geometria duale a quella iperbolica così definita è necessario che il birapporto tra punti che immaginario, e per averlo il piano iperbolico dev'essere costituito dai punti impropri e i punti ideali (si parla in questo caso di geometria iperbolica esterna, o di Lorentz). Per avere invece una geometria iperbolica che sia autoduale è necessario ammettere entrambe le regioni e di conseguenza accettare come misure quantità sia reali sia immaginarie.

### Ortogonalità e proiezioni ortogonali nel piano iperbolico

Anche nel piano iperbolico potrà definirsi la nozione di *rette ortogonali*:

DEFINIZIONE: Due rette  $r, s$  in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  sono dette **ortogonali** nel piano iperbolico se sono reciproche rispetto all'assoluto, ovvero se  $\Omega_i^*(r, s) = 0$  o, analogamente, ciascuna contiene il polo dell'altra.

(la definizione è del tutto analoga a quella del piano ellittico). Anche in questo caso, la definizione di rette ortogonali permette di definire la *proiezione ortogonale di un punto  $P \in \overline{\mathbb{H}}$  su una retta  $r$  in cui non è contenuto* nel piano iperbolico come il punto  $H \in r$  tale che la retta  $H \vee P$  sia ortogonale ad  $r$ , ed è, come nel caso ellittico, il punto che realizza la minima distanza (quindi il punto di  $r$  rispetto cui calcolare la distanza tra  $P$  ed  $r$ ). A differenza della geometria ellittica, in quella iperbolica la proiezione ortogonale è sempre unica, perché il polo di qualsiasi retta del piano iperbolico (secante quindi l'assoluto in due punti reali) è un punto ideale, quindi  $P$  non può essere un polo di  $r$ . L'unica retta ortogonale ad  $r$  passante per  $P$  sarà quindi la retta congiungente  $P$  con il polo di  $r$ .

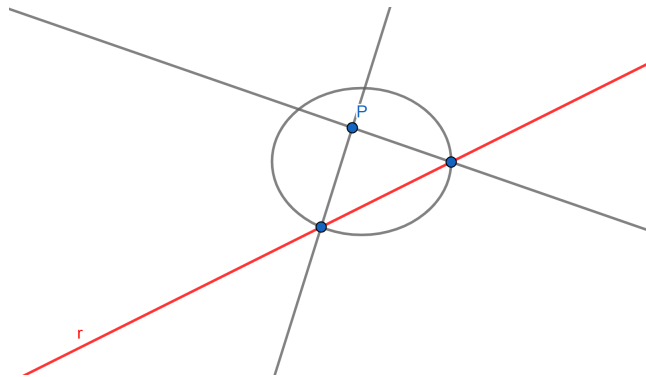
#### 1.3.4 Parallelismo nel piano iperbolico e conseguenze

L'esistenza del parallelismo nel piano iperbolico e il fatto che sia definito da rette che s'intersecano in punti impropri porta ad importanti conseguenze sia nel calcolo delle distanze tra rette (nozione che in questo caso ha senso di esistere, in quanto esistono rette che non s'intersecano in  $\overline{\mathbb{H}}$ , visto che  $\overline{\mathbb{H}}$  è contenuto propriamente in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ ), sia nel calcolo degli angoli tra rette.

Anzitutto si può notare che, poiché i punti di intersezione tra rette nella geometria iperbolica possono avere diversa natura, essi individueranno anche diversi tipi di *fasci di rette*. Si distinguono infatti:

- il **fascio proprio** di centro un punto proprio composto da rette incidenti
- il **fascio improprio** di centro un punto improprio composto da rette parallele
- il **fascio ideale** di centro un punto ideale, quest'ultimo caratterizzato dal fatto che tutte le rette hanno una normale comune data dalla polare al punto d'intersezione.

Si presenta nel piano iperbolico una caratteristica peculiare del tutto nuova: poiché ogni retta  $p$  secante l'assoluto fa parte di due fasci impropri (uno per ogni punto di intersezione improprio), per ogni punto proprio del piano iperbolico  $P \notin p$  potranno essere tracciate due rette, ognuna congiungente  $P$  con uno



**Figura 1.2:** Per il punto  $P$  in figura passano due rette parallele a  $r$ , ognuna congiungente  $P$  con uno dei due punti impropri  $r \cap \Omega_i$ .

dei due punti di intersezione di  $p$  con l'assoluto. Entrambe queste rette saranno parallele a  $p$  in quanto appartenenti rispettivamente ai due fasci impropri che  $p$  individua. Quindi per ogni punto  $P \notin p$  passano **due** rette parallele a  $p$ .

Si nota subito che una tale caratteristica rende inconsistente la definizione di angolo tra un punto e una retta (e quindi anche di angolo tra due punti), diversamente da quanto accade per il piano ellittico: per un qualsiasi punto di  $\overline{\mathbb{H}}$  può sempre essere tracciata una retta parallela ad una qualsiasi retta di  $\overline{\mathbb{H}}$ , quindi l'angolo tra un punto e una retta è sempre nullo.

Tale nuova caratteristica del piano iperbolico porta ad introdurre una nuova definizione:

**DEFINIZIONE:** Data una retta  $r$  del piano iperbolico secante l'assoluto in due punti reali e un punto  $P \in \overline{\mathbb{H}}$  non appartenente ad  $r$ , si definisce **angolo di parallelismo** l'angolo tra le due rette parallele ad  $r$  passanti per  $P$ .

L'angolo di parallelismo può essere equivalentemente caratterizzato come la somma dei due angoli uguali che la normale alla retta  $r$  data forma con le rette parallele ad  $r$  passanti per  $P$ . Chiaramente, se  $P$  dovesse appartenere ad  $r$  le rette parallele sarebbero da considerarsi sovrapposte ad  $r$ , quindi perpendicolari alla normale ad  $r$ , e perciò l'angolo di parallelismo pari a  $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$ . Se ne deduce che all'aumentare della distanza di  $P$  da  $r$  diminuisca la misura degli angoli tra le rette e la normale ad  $r$ , e di conseguenza anche la misura dell'angolo di parallelismo.

Per calcolare l'angolo di parallelismo è opportuno fissare un sistema di riferimento  $\{x_0, x_1, x_2\}$  in cui l'origine sia posta nella proiezione ortogonale  $P'$  del punto  $P$  su  $r$  e in cui la retta  $r$  abbia equazione  $x_2 = 0$ . Il punto  $P$  sia quindi posto di coordinate  $P = (1, 0, c)^T$ ,  $0 \leq c \leq 1$ , in modo che  $s = P \vee P' = (0, 1, 0)$ .

Intersecando  $r$  con l'assoluto si ricavano i punti  $P_1 = (1, 1, 0)^T$ ,  $P_2 = (1, -1, 0)^T$ , dai quali si calcolano le due rette  $r_1$  ed  $r_2$  congiungenti  $P$  con  $P_1$  e  $P_2$ :  $r_1 = (-c, c, 1)$ ,  $r_2 = (-c, -c, 1)$ . Grazie a questi dati è ora possibile calcolare l'angolo  $\alpha$  compreso tra la normale ad  $r$  e  $r_1$  (o equivalentemente tra la normale ad  $r$  ed  $r_2$ ), usando le formule ricavate precedentemente per il coseno e il seno dell'angolo tra rette:

$$\cos(\alpha) = \frac{\Omega_i^*(r_j, s)}{\sqrt{\Omega_i^*(r_j)\Omega_i^*(s)}} = c, \quad \sin(\alpha) = \frac{\sqrt{\Omega_i^*(r_j)\Omega_i^*(s) - \Omega_i^*(r_j, s)^2}}{\sqrt{\Omega_i^*(r_j)\Omega_i^*(s)}} = \sqrt{1 - c^2}, \quad j = 1, 2.$$

Grazie a questo sistema di coordinate si calcola inoltre:

$$\begin{aligned} \cosh\left(\frac{d_i(P, P')}{k_i}\right) &= \frac{\Omega_i(P, P')}{\sqrt{\Omega_i(P)\Omega_i(P')}} = \frac{1}{\sqrt{1-c^2}} = \frac{1}{\sin(\alpha)}, \\ \sinh\left(\frac{d_i(P, P')}{k_i}\right) &= \frac{\sqrt{\Omega_i(P, P')^2 - \Omega_i(P)\Omega_i(Q)}}{\sqrt{\Omega_i(P)\Omega_i(P')}} = \frac{c}{\sqrt{1-c^2}} = \frac{1}{\tan(\alpha)}, \\ \tanh\left(\frac{d_i(P, P')}{k_i}\right) &= \frac{\sqrt{\Omega_i(P, P')^2 - \Omega_i(P)\Omega_i(Q)}}{\Omega_i(P, P')} = c = \cos(\alpha), \quad j = 1, 2 \end{aligned}$$

A questo punto, poiché certamente la misura dell'angolo di parallelismo sarà  $2\alpha$  in quanto somma dei due angoli uguali compresi rispettivamente tra  $r$  ed  $r_1$  e tra  $r$  ed  $r_2$ , basterà applicare le formule di duplicazione per ricavare la sua espressione. Si è dimostrato così che *la misura dell'angolo di parallelismo dipende soltanto dalla distanza di  $P$  da  $r$*  (cosa che verrà dimostrata anche in seguito parlando di isometrie sul piano iperbolico).

### Distanze tra rette

A differenza del caso ellittico in cui la definizione di distanza tra rette come minima distanza tra i punti dell'una e quelli dell'altra risulta inconsistente, nel caso del piano iperbolico non è così. Infatti, come accennato, la diversa natura dei punti di intersezione tra le rette fa sì che esistano rette che non s'incontrano in  $\mathbb{H}$ , e per le quali ha senso calcolare una distanza. Dette  $r, s$  due rette secanti l'assoluto e  $P$  il loro punto di intersezione si distinguono quindi tre casi:

- Se  $P$  è un punto proprio allora le due rette saranno incidenti in  $\mathbb{H}$  quindi, analogamente al caso ellittico, la loro distanza sarà nulla:

$$d_i(r, s) = \inf_{\{R \in r \cap \mathbb{H}, S \in s \cap \mathbb{H}\}} d_i(R, S) = \min_{\{R \in r \cap \mathbb{H}, S \in s \cap \mathbb{H}\}} d_i(R, S) = d_i(P, P) = 0.$$

- Se  $P$  è un punto ideale, allora le due rette non saranno incidenti in  $\mathbb{H}$  né parallele, dunque si potrà calcolare la loro distanza tramite la retta congiungente i poli delle due rette, che, proprio in quanto contenente i loro poli, sarà ortogonale ad entrambe. La congiungente dei poli individuerà quindi i punti  $R' \in r$  ed  $S' \in s$  tra i quali calcolare la distanza:

$$d_i(r, s) = \inf_{\{R \in r \cap \mathbb{H}, S \in s \cap \mathbb{H}\}} d_i(R, S) = \min_{\{R \in r \cap \mathbb{H}, S \in s \cap \mathbb{H}\}} d_i(R, S) = d_i(R', S').$$

- Se invece  $P$  è un punto improprio, allora le due rette saranno parallele. Provando a calcolare la loro distanza con lo stesso metodo impiegato nel caso del fascio ideale, si vede subito che la congiungente dei poli coincide con la tangente alla conica nel punto di intersezione improprio (inevitabile per la costruzione stessa con cui viene individuato il polo di una certa retta), e questo vuol dire che i due punti delle rette in esame nei quali essi intersecano la congiungente dei poli coincidono con il punto improprio d'intersezione, e quindi, poiché la distanza non è definita per i punti dell'assoluto, non è possibile calcolare la distanza tra due rette parallele con questo procedimento. Tuttavia si può considerare l'intersezione delle due rette in un certo punto ideale che tenda verso un punto dell'assoluto, e tracciando progressivamente la congiungente dei poli di  $r$  ed  $s$  si otterrà una distanza tendente a 0. Infatti, si considerino le tre rette  $r', s', t$  appartenenti ad un fascio ideale di centro un punto  $T$  tali che  $t = T \vee P, r' = T \vee A$  e  $s' = T \vee B$  con  $A \in \Omega_i \cap r, B \in \Omega_i \cap s, A, B \neq P$ . Poiché  $r'$  ed  $s'$  si intersecano in un punto ideale, è possibile calcolare la loro distanza tramite la congiungente dei loro poli rispetto ad  $\Omega_i$ , detti rispettivamente  $R'$  e  $S'$ :

$$d_i(r', s') = \inf_{\{R' \in r' \cap \mathbb{H}, S' \in s' \cap \mathbb{H}\}} d_i(R', S') = d_i((R' \vee S') \cap r', (R' \vee S') \cap s') =$$

$$\frac{k_i}{2} \log((R' \vee S') \cap r' \quad (R' \vee S') \cap s' \quad \lambda_1((R' \vee S') \cap r') + ((R' \vee S') \cap s') \quad \lambda_2((R' \vee S') \cap r') + ((R' \vee S') \cap s')),$$

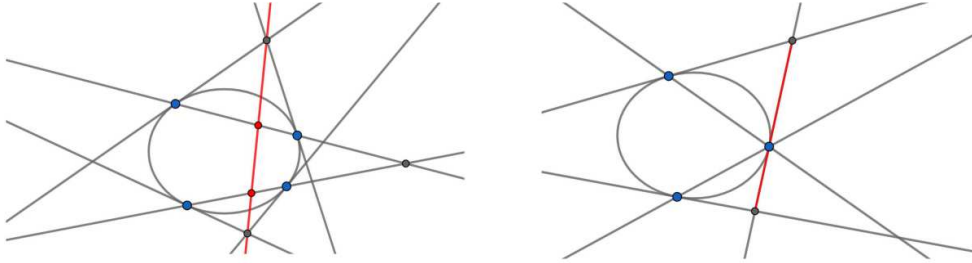
con  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ . Al tendere di  $T$  a  $P$  in  $t$  le rette  $r'$  ed  $s'$  tenderanno a coincidere con  $r$  ed  $s$  rispettivamente (in quanto secanti l'assoluto nelle medesime coppie di punti) e quindi, come premesso, la retta congiungente i loro poli tenderà alla tangente ad  $\Omega_i$  in  $P$ . Sviluppando dunque i conti, con  $K = (R' \vee S') \cap r'$  e  $H = (R' \vee S') \cap s'$ , si ottiene:

$$d_i(r, s) = \lim_{T \rightarrow P} d_i(r', s') = \lim_{T \rightarrow P} \inf_{\{R' \in r' \cap \mathbb{H}, S' \in s' \cap \mathbb{H}\}} d_i(R', S') =$$

$$\lim_{r \rightarrow r', s \rightarrow s'} \frac{k_i}{2} \log(K \quad H \quad \lambda_1 K + H \quad \lambda_2 K + H) = \lim_{\lambda_1 \rightarrow \lambda_2} \frac{k_i}{2} \log(K \quad H \quad \lambda_1 K + H \quad \lambda_2 K + H) = 0.$$

Quindi *rette parallele nel piano iperbolico hanno distanza nulla*. Neanche nel piano iperbolico, quindi, le rette parallele ad una certa retta data possono essere caratterizzate come i luoghi dei punti del piano a distanza costante da tale retta, perché per qualsiasi distanza non nulla un tale luogo geometrico non potrà certamente essere una retta (si dimostrerà successivamente che si tratta di un iperciclo).

Questo tipo di descrizione del parallelismo nel piano iperbolico evidenzia l'indipendenza del quinto postulato di Euclide dagli altri quattro. La geometria iperbolica, infatti, mantiene la correttezza dei primi quattro postulati:



**Figura 1.3:** Nella prima immagine le rette appartengono ad un fascio ideale e i punti di minima distanza sono individuati tramite la congiungente dei loro poli. Nella seconda immagine le rette sono parallele, quindi hanno distanza nulla poiché la retta ortogonale ad entrambe (passante quindi per entrambi i loro poli) le interseca in due punti coincidenti nel centro del fascio improprio di cui fanno parte.

- Tra due punti distinti del piano passa una e una sola retta: e questo è certamente vero in quanto la distanza tra due punti è definita mediante l'unica retta che li congiunge nel piano proiettivo (che individua i quattro punti tra i quali fare il birapporto) ;
- Un segmento può essere sempre indefinitamente prolungato ad una retta: e anche questo è vero in quanto le rette hanno lunghezza infinita e per ogni coppia di punti del segmento passerà sempre la stessa retta;
- Dato un punto e una lunghezza si può descrivere un cerchio: è possibile nel piano iperbolico definire una circonferenza come l'insieme dei punti equidistanti da un dato punto in  $\overline{\mathbb{H}}$ ;
- Tutti gli angoli retti sono congruenti: e questo anche è vero per come sono definiti gli angoli. Il birapporto che definisce l'angolo tra due rette sarà lo stesso per ogni coppia di rette ortogonali in quanto le rette ortogonali dividono sempre armonicamente le tangenti alla conica.

Il quinto invece asserisce che se una retta taglia altre due rette e forma dalla stessa parte angoli interni la cui somma delle ampiezze è minore di due angoli retti, allora le due rette si incontreranno dalla parte di tali angoli. Col passare dei secoli è stato dimostrato che tale postulato è equivalente a dire che data una retta  $r$  ed un qualsiasi punto  $P$  del piano che non vi appartiene, esiste un'unica retta parallela ad  $r$  passante per  $P$ . Evidentemente questo assioma non è rispettato dalla metrica iperbolica, e quindi di certo non può dipendere dai precedenti quattro.

### 1.3.5 Confronto con l'angolo tra rette nel piano euclideo

A differenza di quanto accade per la definizione delle distanze, il birapporto può essere già utilizzato come invariante per definire l'angolo tra due rette anche nella metrica euclidea e non solo in quelle non euclidee, senza neanche dover passare ad analizzare il caso limite.

Infatti, date due rette  $r, s \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  e il loro punto di intersezione  $r \wedge s$ , esisteranno sempre le rette cicliche  $p, q$  congiungenti  $r \wedge s$  con i due punti ciclici che determinano l'assoluto, e tra queste rette è sempre possibile calcolare il birapporto. Il risultato cruciale si ha con la formula di Laguerre che esprime l'angolo in funzione del birapporto:  $\theta = \frac{i}{2} \log(r s p q)$ .

Un tale risultato, coerente con le strategie di definizione dell'angolo tra due rette nei casi non euclidei, rafforza ulteriormente il ruolo della geometria euclidea intesa come caso limite tra la geometria ellittica e quella iperbolica al variare delle coniche che definiscono l'assoluto in un opportuno fascio.



# Capitolo 2

## Cerchi

Per *cerchi* (o, più precisamente, circonferenze) s'intende il luogo dei punti del piano aventi tutti la stessa distanza da un certo punto fissato  $C \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ , detto *centro*. La distanza costante verrà invece detta *raggio* del cerchio. A seconda della metrica impiegata poiché muta la distanza varierà anche l'espressione che definisce i cerchi. Inoltre, la diversa natura dei punti che costituiscono l'assoluto determina diverse possibilità quanto alla posizione reciproca tra il centro  $C$  e l'assoluto. Infatti, mentre nel caso ellittico  $\Omega_e$  non contiene punti del piano proiettivo reale e quindi  $C$  sarà sempre esterno ad essa, nel piano iperbolico  $C$  potrà essere proprio, improprio oppure ideale, e al variare della sua natura varierà anche la struttura del cerchio.

### 2.1 Cerchi nel piano ellittico

Nel caso ellittico, la ricerca del luogo dei punti del piano a distanza costante da un certo punto  $C \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  può essere convenientemente ricavata in funzione dell'angolo  $\theta$  rispetto cui è definita la distanza nella metrica ellittica. Infatti, detta  $r_e$  la distanza da  $C$  rispetto alla quale si vuole determinare il cerchio, essa sarà espressa da:

$$r_e = k_e \theta, \quad k_e \in \mathbb{R}_{>0}, \quad \text{perci\`o:} \quad \theta = \frac{r_e}{k_e}.$$

Si sfrutta a questo punto l'espressione del coseno di  $\theta$ , definito in funzione della valutazione della conica nei punti tra i quali si vuole calcolare la distanza. In questo caso, conoscendo  $r_e$ , quindi l'angolo  $\theta$ , e uno dei punti rispetto cui si è calcolato il raggio (ovvero il centro  $C$ ), detto  $X$  l'altro punto si avrà:

$$\cos\left(\frac{r_e}{k_e}\right) = \frac{\Omega_e(X, C)}{\sqrt{\Omega_e(X)\Omega_e(C)}},$$

e da qui perciò si definisce il luogo dei punti  $X \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  a distanza  $r$  da un dato punto  $C$  tramite l'equazione:

$$\cos^2\left(\frac{r_e}{k_e}\right) \Omega_e(X)\Omega_e(C) = \Omega_e(X, C)^2.$$

Sviluppando quindi i conti con  $X = (x_0, x_1, x_2)^T$ ,  $C = (c_0, c_1, c_2)^T$  si ottiene:

$$\cos^2\left(\frac{r_e}{k_e}\right) (x_0^2 + x_1^2 + x_2^2)(c_0^2 + c_1^2 + c_2^2) = (x_0c_0 + x_1c_1 + x_2c_2)^2,$$

ovvero, in termini matriciali:

$$\mathcal{C} = \cos^2\left(\frac{r_e}{k_e}\right) (c_0^2 + c_1^2 + c_2^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_0^2 & c_0c_1 & c_0c_2 \\ c_0c_1 & c_1^2 & c_1c_2 \\ c_0c_2 & c_1c_2 & c_2^2 \end{pmatrix},$$

che è una conica appartenente al fascio di coniche:

$$\mathcal{F} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} c_0^2 & c_0c_1 & c_0c_2 \\ c_0c_1 & c_1^2 & c_1c_2 \\ c_0c_2 & c_1c_2 & c_2^2 \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

del quale fa parte anche  $\Omega_e$  (si vede subito sostituendo  $\beta = 0$ ). Imponendo quindi come centro il punto  $C = (1, 0, 0)$  (è sempre possibile farlo scegliendo un opportuno sistema di riferimento), l'equazione in termini matriciali del fascio

$$\text{diventa: } \mathcal{F} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ e l'equazione del cerchio}$$

è:  $\cos^2\left(\frac{r_e}{k_e}\right) (x_0^2 + x_1^2 + x_2^2) - x_0^2 = 0$ . A questo punto può essere determinato il ciclo base del fascio tramite il sistema:

$$\begin{cases} x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0 \\ x_0^2 = 0 \end{cases} \quad \text{che dà come soluzioni i punti: } P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix},$$

entrambi di molteplicità 2. Ne segue quindi che il luogo dei punti del piano ellittico con distanza costante  $r_e$  dal centro  $C$  è una conica del fascio *bitangente* a  $\Omega_e$ , le cui coniche degeneri sono costituite dalle due rette tangenti ad  $\Omega_e$  (e a tutte le altre coniche del fascio) nei punti del ciclo base tracciate da  $C$  e dalla polare rispetto a  $C$  contata due volte, congiungente  $P_0$  e  $P_1$ .

Poiché un fascio di coniche corrisponde ad una retta proiettiva nello spazio proiettivo 5-dimensionale individuato dalle coniche, è possibile determinare il

birapporto tra  $\Omega_e$ , la polare a  $C$  contata due volte (ovvero  $x_0^2 = 0$ ), la conica degenerata costituita dalle rette tangenti a  $\Omega_e$  da  $C$  e il cerchio, il quale birapporto risulta essere un invariante tra le quattro coniche. Tale birapporto dipende solo dal raggio del cerchio. Per dimostrarlo si consideri il fascio di coniche analizzato:  $\mathcal{F} = \alpha\Omega_e(X) + \beta\Omega_e(X, C)^2$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Di questo si considerino:

- L'assoluto ellittico  $\Omega_e$ , corrispondente ai coefficienti:  $(\alpha, \beta) = (1, 0)$ ;
- La polare comune a tutte le coniche del fascio contata due volte, corrispondente ai coefficienti:  $(\alpha, \beta) = (0, 1)$ ;
- Il cerchio  $\mathcal{C}$ , corrispondente ai coefficienti:  $(\alpha, \beta) = (\cos^2(\frac{r_e}{k_e}), -1)$ ;
- La conica degenerata data dalle due tangenti al fascio nei punti del ciclo base, unica conica del fascio passante per il centro  $C$ . Grazie a questa condizione possono ricavarsi i coefficienti corrispondenti:

$$\alpha\Omega_e(C) + \beta\Omega_e(C, C)^2 = \alpha\Omega_e(C) + \beta\Omega_e(C)^2 = 0 \implies (\alpha, \beta) = (\Omega_e(C), -1).$$

Si può quindi calcolare il birapporto cercato grazie ai coefficienti trovati:

$$\begin{aligned} & \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_e(C) \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos^2\left(\frac{r_e}{k_e}\right)\Omega_e(C) \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \\ & = \left( \infty \ 0 \ -\Omega_e(C) \ -\cos^2\left(\frac{r_e}{k_e}\right)\Omega_e(C) \right) = \frac{-\cos^2\left(\frac{r_e}{k_e}\right)\Omega_e(C)}{-\Omega_e(C)} = \cos^2\left(\frac{r_e}{k_e}\right), \end{aligned}$$

e questo prova che il birapporto tra le coniche è una funzione del raggio e quindi un invariante per ogni cerchio.

La struttura del fascio di coniche bitangenti  $\mathcal{F}$  utilizzato per determinare il cerchio  $\mathcal{C}$  di centro  $C$  nel piano ellittico permette di notare che la polare  $c$  di  $C$  rispetto al cerchio è comune a tutte le coniche del fascio e coincide con la retta  $A \vee B$  dove  $A, B \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  sono i due punti base del fascio. Si consideri quindi un punto  $X_0$  del cerchio e la retta  $C \vee X_0$ , incidente  $c$  in un certo punto  $C'$ . Certamente tale retta sarà ortogonale a  $c$ , e inoltre la polare di  $C'$  rispetto al cerchio dovrà contenere  $C$ , e così anche la polare di  $C'$  rispetto all'assoluto (questo perché  $C'$  appartiene alla polare di  $C$  rispetto a tutte le coniche del fascio, quindi in particolare a  $\mathcal{C}$  e a  $\Omega_e$ ). Inoltre, una volta individuato  $C' \in c$ , poiché esiste un unico punto  $C''$  di  $c$  tale che il birapporto  $(A \ C' \ B \ C'')$  sia armonico, si ha che  $C''$  dev'essere il polo della retta  $C \vee X_0 = C \vee C'$  rispetto a tutte le coniche del fascio. In particolare,  $C''$  è polo di  $C \vee C'$  rispetto a  $\mathcal{C}$  e  $\Omega_e$ . Questo vuol dire che la retta  $C'' \vee X_0$ , tangente al cerchio in  $X_0$  è ortogonale alla retta  $C \vee C'$ , e questo accade per ogni punto  $X_0 \in \mathcal{C}$ .

In conclusione, i cerchi del piano ellittico costituiscono le traiettorie ortogonali alle rette del fascio per il centro  $C$ , ovvero *i cerchi costituiscono le traiettorie ortogonali ai loro raggi*.

Come si è dimostrato precedentemente, dato un punto  $Q$ , la distanza tra  $Q$  e un certo punto  $P$  determina univocamente la distanza tra  $Q$  e la polare di  $P$ , perciò, data una retta  $r$ , *il luogo dei punti del piano equidistanti da  $r$  è un cerchio nel piano ellittico*.

Si noti, infine, che la dualità del concetto di distanza tra punti e angolo tra rette nella metrica ellittica permette di caratterizzare dualmente i cerchi come i luoghi dei punti del piano ellittico che formano un angolo fissato con una fissata retta, ossia la polare di  $C$  rispetto a  $\Omega_e$ .

## 2.2 Cicli nel piano iperbolico

Similmente al caso ellittico, anche per la metrica iperbolica il luogo dei punti del piano ad una distanza fissata  $r_i$  da un centro  $C$  può essere individuato in funzione del parametro  $\theta$  rispetto a cui è definita la distanza iperbolica. A questo scopo si utilizza l'espressione del coseno iperbolico di  $\theta = \frac{r_i}{k_i}$  in funzione della valutazione dell'assoluto in  $C \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  e di un punto  $X = (x_0, x_1, x_2)^T \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  a distanza costante  $r_i$  da  $C$ :  $\cosh\left(\frac{r_i}{k_i}\right) = \frac{\Omega_i(C, X)}{\sqrt{\Omega_i(C)\Omega_i(X)}}$ .

Essendo i calcoli del tutto analoghi a quelli svolti nella metrica ellittica, si ricaverà che i cerchi di raggio  $r_i$  nel piano iperbolico sono coniche di un fascio bitangente a  $\Omega_i$  in due punti genericamente indicati con  $Q_0$  e  $Q_1$  dove le coniche degeneri sono definite dalla congiungete  $Q_0 \vee Q_1$  contata due volte (polare di  $C$ ) e dalle due rette tangenti a  $Q_0$  e a  $Q_1$  all'assoluto passanti per  $C$ . Il fascio così ottenuto diventa:

$$\alpha(-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2) + \beta(x_0^2) = 0, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

nel quale l'equazione del cerchio sarà data da  $\alpha = \cosh^2\left(\frac{r_i}{k_i}\right), \beta = -1$ :

$$\cosh^2\left(\frac{r_i}{k_i}\right)(-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2) - x_0^2 = 0.$$

A differenza del caso ellittico, però, poiché l'assoluto  $\Omega_i$  è costituito anche da punti reali, non è possibile assumere a priori che  $C \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  sia un punto non appartenente all'assoluto. Non solo, anche qualora invece lo fosse, esso può realizzare  $\Omega_i(C) < 0$  ed essere quindi un punto proprio, oppure  $\Omega_i(C) > 0$ , ed essere un punto ideale. A seconda della natura di  $C$  cambierà anche la natura della sua polare rispetto a  $\Omega_i$  e, di conseguenza, la natura dei punti di intersezione della polare con  $\Omega_i$ , che sono anche i punti base del fascio bitangente.

- Se  $C$  è un punto *proprio* allora sarà polo di una retta ideale, che quindi intersecherà  $\Omega_i$  in due punti complessi coniugati. In questo caso si parla proprio di **cerchi** per indicare le coniche composte di punti tutti equidistanti da un tale centro  $C$ , che possono essere descritti analogamente al caso ellittico. Anche in questo caso è possibile individuare nel birapporto tra l'assoluto, il cerchio stesso e le due coniche degeneri del fascio un invariante per ogni cerchio dipendente unicamente dal raggio.
- Se  $C$  è un punto *ideale* sarà polo di una retta secante  $\Omega_i$  in due punti reali distinti. In questo caso al cerchio viene dato il nome più specifico di **iperciclo**.
- Infine, se  $C$  è un punto improprio sarà polo della retta tangente ad  $\Omega_i$  in sé stesso, perciò l'intersezione di tale retta con  $\Omega_i$  si realizza in due punti reali coincidenti proprio in  $C$ . Il ciclo base di questo fascio di coniche in realtà è dato da:  $2C + 2C = 4C$ , ovvero consiste di un solo punto, il centro. Il fascio in questione quindi non è più bitangente bensì *iperosculatore*. In questo caso al cerchio viene dato il nome di **orificio**.

In generale, nel piano iperbolico il luogo dei punti ad una distanza costante dal centro  $C$  viene detto **ciclo**.

### 2.2.1 Ipercicli

Nel caso degli ipercicli, essendo  $C$  un punto ideale, qualsiasi retta propria congiungente  $C$  con la sua polare (comune a tutte le coniche appartenenti al fascio bitangente per i due punti base  $Q_0$  e  $Q_1$ ) interseca l'assoluto in due punti reali. Siano quindi  $\bar{X}$  un generico punto proprio della polare di  $C$ ,  $A$  e  $B$  i due punti nei quali la retta  $C \vee \bar{X}$  interseca l'assoluto. Trovare i punti dell'iperciclo equivale a trovare i punti  $X$  del piano iperbolico tali che  $d_i(C, X)$  sia costante, ma una richiesta simile non ha senso perché  $C$ , essendo ideale, non è un punto del piano iperbolico. Tuttavia, poiché l'impossibilità di definire una distanza iperbolica tra tutti i punti del piano proiettivo sta nel fatto di voler assumere come distanza per ogni coppia di punti considerata una quantità *reale* ma non nella consistenza della scelta del birapporto come invariante, la quantità:  $(C \ X \ A \ B)$  sarà comunque costante (negativa), così come  $(C \ \bar{X} \ A \ B)$ . Quest'ultimo birapporto sarà pari a  $-1$  in quanto  $C$  e  $\bar{X}$  sono punti opposti rispetto ad  $\Omega_i$  e quindi realizzano con i punti di intersezione della retta con la conica un birapporto armonico. Si ricava così:

$$(X \ \bar{X} \ A \ B) = \frac{(A - X)(B - \bar{X})}{(A - \bar{X})(B - X)} = \frac{(A - C)(B - \bar{X})}{(A - \bar{X})(B - C)} \frac{(A - X)(B - C)}{(A - C)(B - X)} = \frac{(C \ \bar{X} \ A \ B)}{(C \ X \ A \ B)} = \text{cost}_{>0}.$$

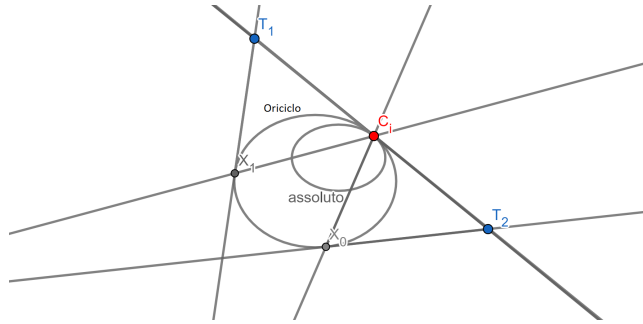
Quello che si è dimostrato è quindi che la distanza tra un punto  $X$  dell'iperciclo e la polare rispetto al centro  $C$  è costante, in quanto il birapporto tra  $X, \bar{X}$  e

i due punti di intersezione con  $\Omega_i$  è costante positivo (quindi può definire una distanza iperbolica, che sarà costante), e questo significa che i punti dell'iperciclo sono tutti equidistanti dalla polare, retta base dell'iperciclo (si noti che  $\overline{X}$  è la proiezione ortogonale del punto  $X$  sulla polare del centro, per questo motivo la distanza tra  $X$  e la polare è definita dal birapporto precedentemente calcolato). Perciò, data una certa retta  $p$  in  $\overline{\mathbb{H}}$ , il luogo dei punti del piano ad una distanza costante  $r_i > 0$  da  $p$  è l'iperciclo di centro il polo di  $p$ , appartenente al fascio bitangente di coniche contenente l'assoluto di cui  $p$  è la retta base.

## 2.2.2 Oricci

Come precedentemente mostrato, quando si è in presenza di un punto improprio come centro del ciclo, il fascio di cui tale ciclo farà parte non sarà più un fascio bitangente, bensì un fascio iperosculatore con punto base il centro  $C$ . Detta  $c$  la sua polare, tangente a tutte le coniche del fascio in  $C$ , un qualsiasi punto  $T \in c$  individua la stessa polare (certamente passante per  $C$ ) per ogni conica del fascio. Questo vuol dire che, preso il punto  $X \neq C$  dell'oriciclo tale che  $T \vee X$  è tangente all'oriciclo, la congiungente  $X \vee C$  sarà chiaramente perpendicolare a  $X \vee T$ , in quanto polare di  $T$  per ogni conica del fascio. Per ogni punto  $X$  dell'oriciclo è quindi possibile tracciare la tangente, che intersecherà la tangente in  $C$  a tutte le coniche del fascio (e quindi in particolare all'oriciclo) in un certo punto  $T$ , e la retta  $X \vee C$ , dove giace il raggio per  $X$  dell'oriciclo considerato, è quindi la polare di tale punto  $T$  e di conseguenza ogni retta congiungente un suo punto a  $T$  sarà perpendicolare a  $X \vee C$ . In conclusione, quindi, gli oricci nel piano ellittico costituiscono le *traiettorie ortogonali al fascio di rette parallele passanti per il centro improprio  $C$* . Una simile caratteristica si discosta drasticamente da quanto accade sul piano euclideo, dove le traiettorie ortogonali di un fascio di rette parallele sono costituite a loro volta da rette.

A questo punto diventa opportuno individuare oricci a partire dai punti del piano iperbolico. In particolare, dati due punti  $P_0, P_1 \in \mathbb{H}$ , la retta  $P_0 \vee P_1$  interseca  $\Omega_i$  in due punti  $A, B \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  ed esiste un'unica coppia di punti  $Q_0, Q_1$  su tale retta che divida armonicamente sia  $P_0$  e  $P_1$ , sia  $A$  e  $B$ . Essendo  $A$  e  $B$  due punti dell'assoluto, qualsiasi coppia di punti che li divida armonicamente sarà costituita da un punto proprio e uno improprio. In questo caso, il punto proprio tra  $Q_0$  e  $Q_1$  sarà detto *punto medio* fra  $P_0$  e  $P_1$ . Dal polo di  $P_0 \vee P_1$  si può quindi tracciare la retta  $q$  ortogonale a  $P_0 \vee P_1$  nel punto medio. L'intersezione di  $q$  con l'assoluto individua due punti impropri, e quindi anche due fasci di rette parallele e due fasci iperosculatori alla conica in tali punti, perciò per ognuno di questi può essere individuato un oriciclo passante per  $P_0$  e  $P_1$ . In conclusione, per due qualsiasi punti di  $\mathbb{H}$  passano *due* oricci.



**Figura 2.1:** In figura sono rappresentate  $\Omega_i$  e l'oriciclo appartenenti al fascio iperosculatore in  $C_i$ . Si nota che, da due diversi punti  $T_0$  e  $T_1$  appartenenti alla tangente in  $C_i$  alla conica, le tangenti all'oriciclo da  $T_0$  e  $T_1$  rispettivamente sono sempre perpendicolari ai raggi.

Un'altra analisi utile riguarda il rapporto tra oricicli aventi lo stesso centro, e a tal proposito si può introdurre la seguente definizione:

**DEFINIZIONE:** Due (o più) oricicli sono detti **paralleli** se ammettono lo stesso centro  $C$ . I punti di essi allineati con il centro  $C$  sono detti **punti corrispondenti**.

Si dimostrerà in seguito, parlando di isometrie del piano iperbolico, che la distanza tra punti corrispondenti di due oricicli paralleli è costante. Dati quindi due punti  $A, B$  distinti in un certo oriciclo, i corrispondenti  $A', B'$  in un suo oriciclo parallelo a distanza  $h \in \mathbb{R}_{>0}$  e i corrispondenti  $A'', B''$  in un altro oriciclo parallelo ad entrambi, a distanza  $k \in \mathbb{R}_{>0}$  dal secondo e  $h + k$  dal primo, si può definire la funzione  $f : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ :

$$f(h) = \frac{\text{arc}(A, B)}{\text{arc}(A', B')}, \quad f(k) = \frac{\text{arc}(A', B')}{\text{arc}(A'', B'')},$$

dove con  $\text{arc}(X, Y)$  viene indicata la misura dell'arco individuato sull'oriciclo cui i due punti  $X, Y$  appartengono. La funzione  $f$  definita esprime il rapporto tra archi corrispondenti di oricicli paralleli, che è costante per ogni coppia di oricicli paralleli e dipende solo dalla distanza tra i due oricicli (anche questo si dimostrerà parlando di isometrie del piano iperbolico). Inoltre  $f$  è di certo una funzione continua. Si trova quindi la proprietà:

$$f(h + k) = \frac{\text{arc}(A, B)}{\text{arc}(A'', B'')} = \frac{\text{arc}(A, B)}{\text{arc}(A', B')} \frac{\text{arc}(A', B')}{\text{arc}(A'', B'')} = f(h)f(k).$$

Perciò la funzione che esprime il rapporto tra archi corrispondenti di oricicli paralleli deve essere espressa tramite un'esponenziale.

## 2.3 Confronto con i cerchi del piano euclideo

Determinare i cerchi nel piano euclideo equivale a determinare il luogo dei punti del piano tutti ad una certa distanza  $r$  da un certo centro  $C = (c_1, c_2)$ , dove la distanza tra  $C$  e un generico punto  $P = (x, y)$  è chiaramente la distanza euclidea:  $d(C, P) = \sqrt{(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2}$ . Dunque tale luogo è definito dalla nota equazione:

$$(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = r^2.$$

I cerchi euclidei, come i cerchi ellittici ed i cicli iperbolici, rappresentano le traiettorie ortogonali alle rette del fascio per il centro del cerchio (è noto infatti che le tangenti al cerchio in un certo punto sono sempre ortogonali al raggio del cerchio per tale punto). Mentre, però, nel caso dei cerchi ellittici e dei cerchi iperbolici essi sono dati da una conica del fascio bitangente di rette generato dall'assoluto e dalla polare al centro contata due volte, che quindi individua un raggio ben determinato a seconda del punto (proprio nel caso iperbolico) scelto come centro, il raggio dei cerchi euclidei dipende dall'unità di misura scelta.



## Capitolo 3

# Isometrie

Per come sono stati definiti gli ambienti nei quali prendono forma le geometrie considerate, è lecito analizzare quali applicazioni dello spazio proiettivo in sé lascino invariate le proprietà conseguenti dalla specifica geometria imposta sul piano. La peculiarità di tali proiettività dev'essere necessariamente quella di *lasciare fisso l'assoluto*, perché, in caso contrario, la geometria del piano *non può* rimanere invariata al variare della conica che la definisce.

### 3.1 Isometrie sul piano euclideo

Le isometrie del piano euclideo sono date dalle *proiettività* del piano proiettivo reale che siano del tipo:  $\{\phi : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2 \mid \phi(ass) \subseteq (ass)\}$ , dove  $ass = \{P, P'\}$  è appunto l'assoluto, e che rispettino la forma quadratica che lo definisce. Esse si dividono in:

- *isometrie dirette*, che mandano i due punti ciclici in sé stessi, ovvero sono tali che:  $\phi(P) = P$ ,  $\phi(P') = P'$ , dunque anche  $\phi(ass) = ass$ .
- *isometrie inverse*, che scambiano i due punti tra loro (lasciando comunque fisso l'assoluto), ovvero sono tali che:  $\phi(P) = P'$ ,  $\phi(P') = P$ , dunque globalmente  $\phi(ass) = ass$ . Esse si ottengono componendo una similitudine diretta con una simmetria.

Il fatto che le isometrie debbano fissare la forma quadratica equivale ad imporre per le distanze tra punti un'unità di misura.

Le proiettività che definiscono queste isometrie formano un gruppo. Infatti, considerandole in termini matriciali, fissando opportunamente l'unità di misura affinché sia rispettata la forma quadratica, esse saranno determinate da un sottogruppo di  $PGL_3(\mathbb{R}) = GL_3(\mathbb{R})/\mathbb{R}^*$ , ovvero il gruppo delle matrici ortogonali di ordine 3 su  $\mathbb{R}$ . Si tratta certamente di un sottogruppo moltiplicativo, in

quanto l'identità è un'isometria che lascia fissi tutti i punti, quindi in particolare quelli dell'assoluto, e in quanto la composizione di isometrie del piano euclideo sarà ancora un'isometria del piano euclideo (la composizione di due isometrie dirette del piano proiettivo lascerà ancora fissi  $P$  e  $P'$  e definirà quindi ancora un'isometria diretta, la composizione di due isometrie inverse scambierà due volte  $P$  e  $P'$  generando così un'isometria diretta, mentre la composizione di un'isometria diretta e di una inversa scambierà una sola volta i due punti e sarà quindi un'isometria inversa). Inoltre, essendo  $PGL_3(\mathbb{R})$  un gruppo, certamente ogni suo elemento ammetterà un inverso e certamente per ogni isometria diretta  $\phi$  l'inversa  $\phi^{-1}$  dovrà mantenere fissi  $P$  e  $P'$  perché la composizione  $\phi \circ \phi^{-1}$  dia l'identità, e sarà dunque a sua volta un'isometria diretta, mentre per ogni isometria inversa  $\psi$  l'inversa  $\psi^{-1}$  dovrà nuovamente invertire tra loro i due punti, e sarà dunque ancora un'isometria inversa (questo per la biunivocità di  $\psi$ ). Perciò il sottoinsieme considerato, essendo chiuso per identità, composizione ed elementi inversi, sarà certamente un sottogruppo di  $PGL_3(\mathbb{R})$ , dunque è lecito parlare di *gruppo delle isometrie*.

Si considerino quindi una matrice  $\mathcal{A} \in GL_3(\mathbb{R})/\mathbb{R}^*$  (definita in generale da 9 parametri) e l'assoluto euclideo  $ass = \{P_0, P_1\}$  costituito dai due punti ciclici:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad P' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix},$$

e si imponga la prima condizione della definizione di isometria su  $P$  e  $P'$  (sarà sufficiente lavorare su  $P$ , in quanto, essendo  $P$  e  $P'$  complessi coniugati, l'immagine di  $P'$  sarà univocamente determinata da quella di  $P$ , e così anche l'immagine della retta all'infinito  $P \vee P'$  che risulterà fissata):

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} \quad (\text{con } \alpha \neq 0) \implies \begin{cases} b + ic = 0 \\ b' + ic' = \alpha \\ b'' + ic'' = i\alpha \end{cases} = \begin{cases} b = c = 0 \\ b' + ic' = c'' - ib'' \end{cases}$$

Perciò quello che si ottiene è:

$$\begin{cases} b = c = 0 \\ b' = c'' \\ b'' = -c' \end{cases} \implies \mathcal{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ a' & c'' & c' \\ a'' & -c' & c'' \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{a'}{a} & \frac{c''}{a} & \frac{c'}{a} \\ \frac{a''}{a} & \frac{-c'}{a} & \frac{c''}{a} \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ A' & C'' & C' \\ A'' & -C' & C'' \end{pmatrix},$$

posti  $A' = \frac{a'}{a}, A'' = \frac{a''}{a}, C' = \frac{c'}{a}, C'' = \frac{c''}{a}$ , che, insieme ad  $a$ , diventano i nuovi parametri liberi di  $\mathcal{A}$  (è certamente sempre possibile scegliere un sistema di

riferimento in cui  $a \neq 0$  e quindi in cui tale calcolo sia lecito). La proiettività così individuata fissa l'assoluto ma non la forma quadratica corrispondente. La matrice  $\mathcal{A}$ , infatti, non è una matrice ortogonale (si può notare dal fatto che la prima colonna non può essere parte di una base ortonormale dello spazio di definizione della matrice), ma la sottomatrice:  $\mathcal{B} = \begin{pmatrix} C'' & C' \\ -C' & C'' \end{pmatrix}$ , è una *matrice conforme*, ovvero tale per cui  $B^T B = \gamma \mathbb{I}$ , con  $\gamma \in \mathbb{R}$ . Imponendo però la condizione ulteriore che la proiettività così definita rispetti la forma quadratica, viene imposto univocamente anche di rispettare l'unità di misura che definisce la norma euclidea e le distanze, e vincola uno dei parametri liberi della matrice  $\mathcal{A}$  trovata. Essendo inoltre le proiettività definite a meno di proporzionalità, il parametro  $a$  per cui è moltiplicata la matrice non contribuisce alla definizione della specifica isometria, e può essere quindi posto pari a 1 senza perdita di generalità. In definitiva, quindi, il gruppo delle isometrie sarà definito da 3 parametri liberi.

Si nota poi che anche l'insieme delle isometrie dirette costituisce un gruppo, in quanto l'identità è un'isometria diretta e, come dimostrato precedentemente, inverso e composizione di isometrie dirette è ancora un'isometria diretta. L'insieme delle isometrie inverse, invece, non dà luogo ad un gruppo (l'identità *non* è un'isometria inversa, inoltre composizione di due isometrie inverse dà luogo ad un'isometria diretta, quindi non vi è neppure la chiusura per composizioni).

## 3.2 Isometrie sul piano ellittico

**DEFINIZIONE:** le **isometrie del piano ellittico** sono le proiettività del piano ellittico che lasciano globalmente fisso l'assoluto, ovvero  $\phi_e : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  è un'isometria del piano ellittico se  $\phi_e(\Omega_e) \subseteq \Omega_e$ .

Se  $\mathcal{H}_e \in GL_3(\mathbb{R})/\mathbb{R}^*$  è la matrice di  $\phi_e$  (quindi definita a meno di proporzionalità), è possibile imporre  $\mathcal{H}_e^t \Omega_e \mathcal{H}_e = \Omega_e$  e, poiché  $\Omega_e = \mathbb{I}_3$ , si ottiene:  $\mathcal{H}_e^T \mathcal{H}_e = \mathbb{I}_3$ , e perciò  $\mathcal{H}_e \in O_3(\mathbb{R})$ . Le proiettività così individuate corrispondono alle isometrie di una forma quadratica di segnatura  $(3,0)$  a meno di proporzionalità.

Come è noto, l'insieme delle coniche forma uno spazio proiettivo di dimensione  $\binom{2+2}{2} - 1 = 5$ , perciò, data una matrice ortogonale  $\mathcal{H}_e \in PGL_3(\mathbb{R})$ , dipendente quindi da 9 parametri, che diventano 8 considerando l'equivalenza tra proiettività proporzionali, imporre l'immagine rispetto alla proiettività di 5 punti equivale a vincolare 5 di questi 8 parametri, lasciandone solo 3 di liberi. Se ne conclude che il gruppo delle isometrie che lasciano invariato l'assoluto  $\Omega_e$  che definisce la metrica del piano ellittico è un gruppo dipendente da 3 parametri liberi.

Il fatto che le matrici delle isometrie siano sempre ortogonali di ordine 3 implica che necessariamente presentino un autovalore reale, pari a  $\pm 1$ , corrispondente ad un punto unito reale  $e$ , poiché, come affermato in precedenza, ogni proiettività è definita a meno di proporzionalità, non è restrittivo imporre che tale autovalore sia sempre pari a 1. Essendo  $\Omega_e$  priva di punti reali, il punto unito individuato da un tale autovalore non può appartenere all'assoluto. Detto quindi  $v_0$  un suo autovettore corrispondente, si consideri una base ortonormale (reale)  $\{v_0, v_1, v_2\}$  che lo contiene. I vettori  $v_1$  e  $v_2$  genereranno il sottospazio  $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_0 \rangle^\perp$ . Il determinante della matrice dell'isometria dipenderà quindi unicamente dal determinante della sottomatrice di  $PGL_2(\mathbb{R})$ , il quale restringe la proiettività a  $\langle v_1, v_2 \rangle$ , ovvero alla retta congiungente i due punti corrispondenti a  $v_1$  e a  $v_2$  ed interseca l'assoluto in due punti (complessi coniugati). Lo studio dell'isometria su tale retta determinerà completamente l'isometria per i punti dell'assoluto. Avendo a che fare con matrici ortogonali, tale determinante sarà certamente di modulo 1, perciò potrà essere pari a 1 oppure a  $-1$ . In base al suo valore le isometrie del piano ellittico saranno divise in isometrie dirette e isometrie inverse.

Le *isometrie dirette* sono le isometrie le cui matrici delle proiettività corrispondenti ristrette al sottospazio  $\langle v_1, v_2 \rangle$  hanno determinante 1. Gli autovalori corrispondenti a  $v_1$  e  $v_2$  possono essere quindi entrambi uguali a 1 (e si ottiene l'identità) oppure complessi coniugati di modulo 1. In questo sistema di riferimento, in quanto composto da una base ortonormale (reale), la matrice della proiettività corrispondente sarà del tipo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

(si noti che si sarebbe ottenuta una matrice diagonale a valori complessi qualora la base fosse stata composta da  $v_0$  e due autovettori  $v'_1, v'_2$  corrispondenti ai punti in cui la polare al punto unito relativo a  $v_0$  interseca l'assoluto). La proiettività così ottenuta presenterà quindi tre punti uniti: uno non appartenente all'assoluto (dovuto all'autovalore reale che ogni matrice reale di ordine tre, come quella che rappresenta la proiettività, deve per forza avere) e gli altri due dati dai due punti complessi coniugati uniti dell'assoluto che vengono mandati in sé stessi (chiaramente anche la loro retta congiungente, polare del terzo punto unito, sarà globalmente unita). Gli altri punti di  $\Omega_e$  invece permuteranno, lasciando comunque  $\Omega_e$  globalmente fissa. Analogamente al caso euclideo, l'insieme delle isometrie dirette con l'operazione di composizione forma un gruppo.

Le *isometrie inverse* sono invece le isometrie le cui matrici delle proiettività

corrispondenti ristrette al sottospazio  $\langle v_1, v_2 \rangle$  hanno determinante  $-1$ , e ciò implica che gli autovalori corrispondenti a  $v_1$  e  $v_2$  debbano essere per forza reali e pari a  $\pm 1$ . Si avrà quindi un'involuzione, la cui matrice, in questo sistema di riferimento ortonormale (reale), dipendente dalla specifica isometria inversa, sarà del tipo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}, \text{ dove } \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

In questo caso la proiettività presenterà un punto unito e una retta unita (sua polare), determinata dalla coppia involutoria dei punti complessi coniugati che tramite l'involuzione si scambiano tra loro, oltre ad una retta di punti uniti individuata da  $v_0$  e  $v_1$ . Anche qui, analogamente al caso euclideo, le isometrie inverse non formano un gruppo in quanto tutte date dalla composizione di un'isometria diretta con una inversa fissata.

Guardando alla forma assunta dalle matrici delle proiettività, le isometrie del piano ellittico sembrano dipendere, a differenza di quanto preannunciato, dall'unico parametro libero  $\theta$ . La ragione di questo sta dall'aver scelto un opportuno sistema di riferimento che, identificando l'immagine di un certo punto nell'origine  $(1, 0, 0)$ , fissa gli altri due parametri originariamente liberi. Chiaramente un tale sistema di riferimento è, appunto, specifico per l'isometria considerata, perciò quanto detto non contraddice la dipendenza del gruppo delle isometrie da 3 parametri liberi rispetto ad un certo sistema di riferimento fissato.

Dati due generici punti  $P, P' \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ , è sempre possibile trovare un'isometria  $\phi_e$  del piano ellittico tale che  $\phi_e(P) = (P')$ , ovvero il gruppo delle isometrie *agisce transitivamente* sui punti del piano proiettivo reale. Detta infatti  $\mathcal{H}_e$  la matrice corrispondente all'isometria  $\phi_e$ , per imporre la condizione  $\mathcal{H}_e(P) = P'$  basta supporre che  $P$  abbia coordinate  $(1, 0, 0)^T$  (ovvero che corrisponda all'origine, cosa che è sempre possibile fare) e fissarne l'immagine rispetto a  $\phi_e$ . Come si è detto, una tale condizione fissa il sistema di riferimento e di conseguenza 2 dei 3 parametri liberi rispetto a cui si esprime l'isometria, e rende il gruppo delle isometrie che mandano  $P$  in  $P'$  un gruppo dipendente da un unico parametro libero. Per identificare univocamente un'isometria diventa quindi necessario fissare l'immagine di un secondo punto  $Q$  in un certo punto  $Q'$  tale che  $d_e(P, Q) = d_e(P', Q')$ . La proprietà di transitività si estende naturalmente ad ogni coppia punto-retta posti ad una certa distanza fissata (esiste sempre un'isometria del piano ellittico che mandi una coppia punto-retta ad una certa distanza in un'altra qualsiasi coppia punto-retta del piano posti alla stessa di-

stanza). Si noti, per altro, che il comportamento delle isometrie euclidee è del tutto analogo.

Grazie alla dualità delle definizioni di distanza e angolo nella metrica ellittica, si avrà analogamente la transitività del gruppo delle isometrie tra rette e la corrispondenza tra coppie di rette con lo stesso angolo una volta fissata l'immagine di due specifiche rette.

### 3.3 Isometrie sul piano iperbolico

DEFINIZIONE: le **isometrie del piano iperbolico** sono le proiettività del piano iperbolico che lasciano globalmente fisso l'assoluto e che mandano il piano iperbolico in se stesso, ovvero data  $\phi_i : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ ,  $\phi_i$  è un'isometria del piano iperbolico se  $\phi_i(\Omega_i) \subseteq \Omega_i$  e  $\phi_i(\overline{\mathbb{H}}) \subseteq \overline{\mathbb{H}}$ .

In termini matriciali, se  $\mathcal{H}_i \in PGL_3(\mathbb{R})$  è la matrice corrispondente alla proiettività  $\phi_i$ , allora  $\mathcal{H}_i^t \Omega_i \mathcal{H}_i = \Omega_i$ . Le proiettività così individuate corrispondono alle isometrie della forma quadratica di segnatura (2,1) a meno di proporzionalità che abbiano la proprietà aggiuntiva di mantenere invariato il segno della forma calcolata sui vettori (in modo che venga rispettata la natura dei punti del piano iperbolico: punti propri e ideali non possono essere invertiti dall'isometria. Tale condizione non è automatica, ed è necessario imporla nella definizione). Anche in questo caso si ha a che fare con un gruppo 3-parametrico (si ricava svolgendo gli stessi conti fatti nel caso ellittico), ma la condizione aggiuntiva sul segno delle forme dei vettori fa sì che le isometrie cercate determinino un *sottogruppo* del gruppo ortogonale di segnatura (2,1) delle matrici di ordine 3.

Anche in questo caso, avendo a che fare con matrici ortogonali di dimensione 3, certamente almeno uno dei loro autovalori sarà reale e di modulo 1, e, poiché le proiettività sono definite a meno di proporzionalità, non è restrittivo imporre tale autovalore pari a 1 e considerare di conseguenza una base ortonormale  $\{v_0, v_1, v_2\}$  di autovettori tali che  $v_0$  sia un autovettore di autovalore 1. In questo caso, però, poiché la conica associata a  $\Omega_i$  ammette punti reali, il punto unito corrispondente all'autovalore reale 1 potrà essere proprio, improprio, oppure ideale, e così anche la sua polare unita per dualità avrà diversa natura a seconda della natura del punto. La retta infatti sarà tangente se il punto è improprio, ideale se il punto è proprio, oppure secante l'assoluto in due punti reali se il punto è ideale. Se i vettori  $v_1$  e  $v_2$  generano  $\langle v_0 \rangle^\perp$ , si potrà distinguere tra *isometrie dirette* ed *isometrie inverse* a seconda che il valore del determinante della sottomatrice di  $\mathcal{H}_i$  in  $PGL_2(\mathbb{R})$  che restringe l'isometria al sottospazio  $\langle v_1, v_2 \rangle$  sia 1 oppure  $-1$ . Nel piano iperbolico, però, potrà anche presentarsi il caso in cui  $v_0$  sia un vettore *isotropo*, ovvero  $v_0 \in \langle v_0 \rangle^\perp$ , che si verifica qualora

il punto unito sia un punto improprio, appartenente quindi alla propria polare. Si tratta, come si vedrà, di un caso particolare di isometria diretta.

Analogamente a quanto accade nel piano ellittico, essendo  $\Omega_i$  una conica non degenera essa è anche razionale, ovvero i suoi punti possono essere descritti tutti a partire da un fascio di rette per un suo qualsiasi punto. Quindi è possibile, e in questo caso comodo, studiare le *isometrie dirette* restringendosi alla polare del punto reale fisso dovuto all'autovettore  $v_0$ , ottenendo così il numero e la natura dei punti uniti dell'isometria a seconda di come tale retta interseca  $\Omega_i$ . In questo modo i calcoli verranno svolti in  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  anziché in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ . Per trovare invece le forme canoniche delle matrici di  $\mathbb{O}_{(2,1)}(\mathbb{R})$  che esprimono tali isometrie è opportuno un approccio algebrico, rifacendosi allo studio delle isometrie su  $\langle v_0 \rangle^\perp$ .

Dato il punto  $\xi = x + iy \in \mathbb{C}$ , con  $x, y \in \mathbb{R}$ , definita:  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$  con  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$  tali che  $\alpha\delta - \beta\gamma > 0$  (per comodità è utile impiegare sostituzioni unimodulari, ovvero tali che  $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ ), la condizione di punto fisso è equivalente a imporre che  $f(\xi) = \xi$  (e quindi anche che  $f(\bar{\xi}) = \bar{\xi}$  in quanto complessi coniugati). Ciò che si ottiene è quindi:

$$\frac{\alpha\xi + \beta}{\gamma\xi + \delta} = \xi \Rightarrow \gamma\xi^2 + (\delta - \alpha)\xi - \beta = 0 \Rightarrow \xi_{1,2} = \frac{\alpha - \delta \pm \sqrt{(\delta - \alpha)^2 + 4\gamma\beta}}{2\gamma},$$

ed è evidente che a seconda del segno di  $\Delta = (\delta - \alpha)^2 + 4\gamma\beta$  differiscono il numero e la natura delle soluzioni.

- Se  $\Delta > 0$ ,  $\xi_{1,2}$  sono due punti reali distinti. Si tratta del caso in cui il punto fisso è ideale e dunque la sua polare (ovvero la retta unita) è una secante l'assoluto in due punti reali. L'isometria così ottenuta viene detta **isometria iperbolica**, ed è riferita ad una proiettività con tre punti uniti (il punto ideale fisso di partenza corrispondente a  $\langle v_0 \rangle$  e i due punti dati da  $\langle v_0 \rangle^\perp \cap \Omega_i = \langle v_1, v_2 \rangle \cap \Omega_i$ . In termini matriciali, poiché  $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_0 \rangle^\perp$ , selezionando un opportuno sistema di riferimento contenuto in  $\Omega_i$  tale da creare con  $v_0$  una base ortonormale, si trova che l'isometria è esprimibile

tramite una matrice del tipo: 
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh(\theta) & \sinh(\theta) \\ 0 & \sinh(\theta) & \cosh(\theta) \end{pmatrix}$$

- Se  $\Delta < 0$ ,  $\xi_{1,2}$  sono due punti complessi coniugati. Si tratta del caso in cui il punto fisso è proprio e dunque la sua polare fissa è una retta ideale, cioè secante l'assoluto in due punti complessi coniugati. L'isometria così ottenuta viene detta **isometria ellittica**, ed è riferita ad una proiettività con tre punti uniti, di cui due però complessi coniugati (perciò non

appartenenti a  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ ). Anche in questo caso  $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_0 \rangle^\perp$ , quindi si può procedere analogamente al punto precedente ottenendo la matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

- Se  $\Delta = 0$ ,  $\xi_{1,2}$  sono due punti reali coincidenti. Si tratta del caso in cui il punto fisso è improprio e dunque la sua polare fissa è una retta tangente all'assoluto. L'isometria così ottenuta viene detta **isometria parabolica**, ed è riferita ad una proiettività ristretta a  $\langle v_0 \rangle^\perp$  con un unico punto unito dato da  $\langle v_0 \rangle = \langle v_0 \rangle \cap \Omega_i$ . In questo caso, a differenza dei precedenti,  $v_0 \in \langle v_0 \rangle^\perp$ , ovvero  $v_0$  è un vettore isotropo (infatti il punto fisso appartiene alla propria polare). Per ricavare una forma matriciale dell'isometria si consideri una base ortonormale  $\{v_0, v'_1, v'_2\}$  tale che  $v'_1$  appartenga alla tangente a  $\Omega_i$  nel punto unito corrispondente a  $v_0$  e  $v'_2$  sia un altro vettore isotropo individuato dall'altra tangente alla conica per  $v'_1$ . La matrice di

$\Omega_i$  in questo sistema di riferimento sarà quindi:  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , norma-

lizzando  $\Omega_i(v_0, v'_2) = -1$ . La matrice  $\mathcal{H}$  corrispondente alla proiettività dovrà soddisfare all'equazione:  $\mathcal{H}^T \Omega_i \mathcal{H} = \Omega_i$ , e dovrà mantenere fisso  $v_0$ ,

quindi sarà del tipo:  $\begin{pmatrix} 1 & d & g \\ 0 & e & h \\ 0 & f & i \end{pmatrix}$ , con  $d, e, f, g, h, i \in \mathbb{R}$ . Sviluppando i

conti si ottiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d & g \\ 0 & e & h \\ 0 & f & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -f & -i \\ -f & e^2 - 2df & -id + he - fg \\ -i & -id + he - fg & -2ig + h^2 \end{pmatrix}.$$

Imponendo poi l'uguaglianza:

$$\begin{pmatrix} 0 & -f & -i \\ -f & e^2 - 2df & -id + he - fg \\ -i & -id + he - fg & -2ig + h^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$



$$\text{si ricavano le condizioni: } \begin{cases} f = 0 \\ -i = -1 \\ e^2 - df = 1 \\ -fg + he - id = 0 \\ -2ig + h^2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} f = 0 \\ i = 1 \\ e^2 = 1 \\ h = d \\ -2g + h^2 = 0 \end{cases} .$$

Si possono ottenere dunque due tipi di matrici, la prima di determinante 1, la seconda di determinante -1:

$$\begin{pmatrix} 1 & d & d^2/2 \\ 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & d & d^2/2 \\ 0 & -1 & -d \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Andando però ad analizzare in dettaglio la seconda matrice si nota che il suo polinomio caratteristico è  $p(X) = (X - 1)^2(X + 1)$ , e si calcola che l'autospazio di autovalore -1 ha dimensione 1 ed è generato dal vettore  $(d, -2, 0)^T$  mentre l'autospazio di autovalore 1 ha dimensione 2 ed è generato da  $v_0$  e dal vettore  $(0, -d, 2)^T$ . Di conseguenza, poiché molteplicità algebrica e geometrica del polinomio caratteristico coincidono per ogni autovalore, la seconda matrice ricavata è in realtà simile alla matrice

diagonale:  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ , cioè esprime un'isometria inversa del piano

iperbolico in cui i punti uniti non corrispondono necessariamente a vettori isotropi. Questo perché, essendoci due autovettori di autovalore 1, i punti uniti ad essi corrispondenti genereranno una retta di punti uniti passante per l'autovettore isotropo, dunque potranno essere scelti due punti qualsiasi di questa retta come autovettori di autovalore 1 ed esisterà certamente una base ortonormale per l'isometria che non contiene  $v_0$ . Se ne conclude che le isometrie paraboliche del piano iperbolico sono tutte

isometrie dirette esprimibili tramite una matrice del tipo:  $\begin{pmatrix} 1 & d & d^2/2 \\ 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

con parametro  $d \in \mathbb{R}$ .

Come nel caso ellittico ed euclideo, anche nel caso iperbolico le isometrie dirette formano un gruppo determinato da 3 parametri liberi.

Per quanto riguarda invece le *isometrie inverse*, una volta fissato il sistema di riferimento, la condizione da imporre è che, a seconda della natura del punto fisso individuato dall'autovettore  $v_0$ , restringendosi alla sua polare, ovvero allo spazio  $\langle v_0 \rangle^\perp$ , la coppia di punti (distinti o coincidenti) individuata dall'intersezione  $\langle v_0 \rangle^\perp \cap \Omega_i$  sia una coppia involutoria.

- *Caso Iperbolico*: se il punto fisso relativo a  $v_0$  è un punto ideale, allora la sua polare intersecherà l'assoluto in due punti reali distinti. Studiare le isometrie restringendosi a  $\langle v_0 \rangle^\perp = \langle v_1, v_2 \rangle$  equivale a studiare le forme di segnatura (1,1) su uno spazio vettoriale di dimensione 2. In termini matriciali questo equivale a considerare le matrici di  $\mathbb{O}_{1,1} \setminus \mathbb{S}\mathbb{O}_{1,1}$ . Le matrici di queste isometrie inverse saranno del tipo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh(\theta) & -\sinh(\theta) \\ 0 & \sinh(\theta) & -\cosh(\theta) \end{pmatrix}$$

- *Caso Ellittico*: se il punto fisso relativo a  $v_0$  è un punto proprio, allora la sua polare intersecherà l'assoluto in due punti complessi coniugati. Studiare le isometrie restringendosi a  $\langle v_0 \rangle^\perp = \langle v_1, v_2 \rangle$  equivale a studiare le forme di segnatura (2,0) su uno spazio vettoriale di dimensione 2. In termini matriciali questo equivale a considerare le matrici di  $\mathbb{O}_2 \setminus \mathbb{S}\mathbb{O}_2$ . Le matrici di queste isometrie inverse saranno del tipo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

- *Caso Parabolico*: se il punto fisso relativo a  $v_0$  è un punto improprio, allora esso apparterrà alla sua polare, la quale intersecherà l'assoluto in due punti reali coincidenti. Studiare le isometrie restringendosi a  $\langle v_0 \rangle^\perp$  equivale a studiare le forme di segnatura (1,0) su uno spazio vettoriale di dimensione 2 e questo rende impossibile la presenza di una coppia involutoria sulla retta considerata. Infatti, come si è dimostrato in precedenza analizzando il caso parabolico, nessuna isometria che abbia per punto fisso un punto proprio può avere determinate pari a -1. Dunque questo caso non si può verificare.

Le isometrie inverse non contengono l'identità ed inoltre, per come sono costruite, non sono chiuse rispetto alla composizione, quindi, come nel caso ellittico non possono formare un gruppo.

Anche per il piano iperbolico, come per quello ellittico, si nota che, una volta fissato il sistema di riferimento per ogni specifica isometria (diretta o inversa), la matrice corrispondente risulta dipendere da un unico parametro libero. Analogamente al caso ellittico, dunque, si avrà che le isometrie *agiscono transitivamente* sui punti del piano proiettivo (a patto che siano entrambi della stessa natura ovvero propri, impropri, oppure ideali, per definizione stessa di isometria del piano iperbolico) e sulle coppie punto-retta posti alla stessa distanza. Inoltre l'imposizione della condizione su un punto  $P$  di una certa isometria  $\phi_i$  (cioè  $\phi_i(P) = P'$  con  $P' \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  della stessa natura di  $P$ ) fissa univocamente il sistema di riferimento e rende il gruppo di tali isometrie iperboliche  $\phi_i$  un gruppo 1-parametrico se tale punto  $P$  è un punto proprio oppure ideale, e in questo caso per identificare univocamente un'isometria diventa necessario fissare l'immagine di un secondo punto della stessa natura del primo che mantenga invariata la distanza. Se invece  $P$  è un punto improprio si ha a che fare con un gruppo 2-parametrico, e questo perché l'assoluto è già mandato in sé stesso per definizione di isometria. L'imposizione  $\phi_i(P) = P'$  (con  $P' \in \Omega_i$  perché tale  $\phi$  sia effettivamente un'isometria), quindi, sarà una condizione linearmente dipendente con la condizione di fissità globale dell'assoluto perciò non fisserà nessun ulteriore parametro.

### 3.3.1 Isometrie del piano iperbolico ed ipercicli

Grazie alla caratterizzazione dei diversi tipi di cicli nel piano iperbolico e all'analisi delle isometrie del piano iperbolico è possibile dimostrare alcune proprietà dell'*angolo di parallelismo* tra una retta  $r \in \overline{\mathbb{H}}$  e un punto  $P \notin r$ . Detta  $r$  una retta di  $\overline{\mathbb{H}}$  e  $P \in \overline{\mathbb{H}}$  un punto che non vi appartiene, si era precedentemente definito l'angolo di parallelismo come l'angolo su  $P$  tra le due rette parallele ad  $r$  passanti per  $P$ . Detto quindi  $R$  il polo di  $r$  (punto ideale), è possibile tracciare l'iperciclo passante per  $P$  di centro  $R$ , che, come si è dimostrato, corrisponde al luogo dei punti del piano equidistanti dalla polare di  $R$  (ovvero  $r$ , appartenente al piano iperbolico). Grazie alla proprietà di transitività, detto  $Q$  un altro punto dell'iperciclo di centro  $r$ , poiché esso è composto di soli punti propri esiste sempre un'isometria del piano iperbolico  $\psi_i$  tale che  $\psi_i(P) = Q$ . Poiché per definizione tali isometrie lasciano globalmente fisso l'assoluto e di conseguenza anche i punti base del fascio bitangente, l'applicazione di  $\psi_i$  non fa che scambiare il ruolo dei punti indicati. In particolare, le due rette del fascio per  $P$  parallele ad  $r$  rispetto alle quali si vuole calcolare l'angolo di parallelismo diventeranno rette del fascio per  $Q$  parallele ad  $r$ . Poiché inoltre la misura di un angolo tra due rette nel piano iperbolico dipende dal birapporto tra tali due rette e le tangenti all'assoluto dal loro punto di intersezione, se ne conclude che l'angolo di parallelismo è lo stesso per tutti i punti dell'iperciclo di centro  $R$

e quindi che esso dipende unicamente dalla distanza del punto  $P$  dalla retta  $r$  (cosa che si era provata anche in precedenza calcolandolo).

### 3.3.2 Isometrie del piano iperbolico ed oricicli

Come si è visto in precedenza, gli oricicli sono cicli nel piano iperbolico di centro un punto improprio. A differenza degli altri cicli, essi sono coniche iperosculatrici (e non bitangenti) all'assoluto nei loro centri, di conseguenza per ogni punto di  $\Omega_i$  può essere individuato un fascio di oricicli di centro quel punto e per ogni punto del piano iperbolico esisterà un unico oriciclo di tale fascio passante per quel punto.

Ci si chiede quindi se sia sempre possibile tramite isometrie mandare un oriciclo in un altro e in quanti modi. Anzitutto, perché un oriciclo sia mandato in un altro è necessario che il centro dell'uno sia mandato nel centro dell'altro, questo perché i centri sono punti impropri e le isometrie, per definizione, devono lasciare globalmente fisso l'assoluto. Come si è visto, poi, le isometrie che fissano l'immagine di un certo punto improprio (in questo caso del centro dell'oriciclo di partenza) formano un gruppo 2-parametrico. Perciò, poiché per ogni punto del piano iperbolico passa un solo oriciclo di un certo centro, fissare l'immagine di un qualsiasi punto dell'oriciclo di partenza una volta fissata l'immagine del centro equivale a trovare sempre, in generale, un gruppo 1-parametrico di isometrie che mandino un oriciclo nell'altro. Questo accadrà per ogni coppia di oricicli nel piano iperbolico, sia che facciano parte dello stesso fascio (e in questo caso il centro sarà punto fisso per l'isometria), sia che facciano parte di fasci differenti (e allora il centro non sarà punto fisso dell'isometria).

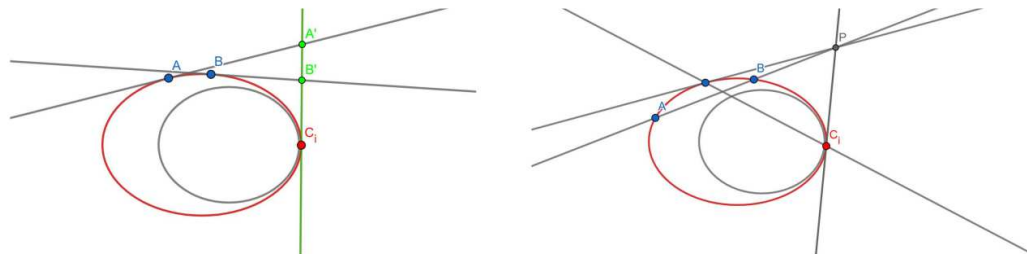
Analizzando il caso specifico delle isometrie che mantengono fisso un certo oriciclo, si osserva che esse mantengono fisse anche tutti gli altri oricicli appartenenti allo stesso fascio iperosculatore (il cui centro sarà necessariamente il punto del quale si fissa l'immagine in sé stesso). Questa proprietà si ottiene da un limite al caso delle isometrie di un fascio bitangente in cui si imponga che i due punti base siano mandati in sé stessi. Un'isometria di questo tipo fisserà, oltre all'assoluto (per definizione) anche la congiungente i due punti e le rette tangenti all'assoluto (e quindi anche a tutte le altre coniche del fascio) nei punti base, quindi ben 3 coniche del fascio bitangente. Poiché il fascio di coniche corrisponde ad una retta proiettiva nello spazio proiettivo delle coniche (5-dimensionale), un'isometria del piano che fissi tre coniche del fascio è equivalente ad un'isometria dello spazio 5-dimensionale che fissi tre punti della retta, quindi l'identità. Perciò tutte le coniche del fascio bitangente saranno mandate in sé stesse dall'isometria. Ragionando sul caso di un fascio iperosculatore come caso limite di un fascio bitangente, però, sia la congiungente i punti base del fascio sia le tangenti a tali

punti tenderanno a coincidere con la tangente al fascio nell'unico punto base. Di conseguenza, le coniche fissate dalla condizione di fissità del centro del fascio di oricicli non saranno più tre ma soltanto due (ovvero l'assoluto e la tangente al fascio nel centro). Per fissare tutte le coniche del fascio iperosculatore in se stesse è necessario perciò imporre che una terza conica sia fissa (ovvero uno degli oricicli).

A questo proposito, dato un oriciclo di centro  $C_i \in \Omega_i$  e due sue punti  $A$  e  $B$ , è possibile determinare la costruzione di *due* isometrie del piano iperbolico che mandino l'oriciclo in sé e il punto  $A$  in  $B$ .

- Per determinare la prima isometria, è necessario anzitutto fissare l'immagine del centro  $C_i$  in sé e tracciare la retta  $c_i$ , tangente all'oriciclo in  $C_i$ . Tracciando poi le tangenti all'oriciclo nei punti  $A$  e  $B$ , si individuano i punti di intersezione su  $c_i$  di  $c_i$  con le altre due tangenti tracciate, rispettivamente  $A'$  e  $B'$ . A questo punto è possibile costruire una proiettività parabolica (ovvero con un unico punto unito) che mandi  $c_i$  in sé di cui  $C_i$  è punto unito e  $A'$  sia mandato in  $B'$ . Una tale proiettività induce un'isometria del piano iperbolico, la quale lascerà unita, oltre all'assoluto  $\Omega_i$ , la tangente comune alle coniche del fascio iperosculatore. Inoltre, il fatto che  $A'$  vada in  $B'$  a seguito dell'isometria farà sì che anche la tangente in  $A$  all'oriciclo vada nella tangente in  $B$  all'oriciclo, e quindi, in particolare, il punto  $A$  sarà mandato nel punto  $B$ . Di conseguenza, automaticamente, l'oriciclo contenente  $A$  e  $B$  sarà mandato in sé stesso dall'isometria, e con lui tutti gli altri oricicli del fascio iperosculatore. Un'isometria di questo tipo è analoga alla traslazione nel piano euclideo che porta il punto  $A$  nel punto  $B$ .
- Per determinare la seconda isometria è necessario invece considerare il punto di intersezione tra la congiungente  $A \vee B$  la retta  $c_i$  (tangente all'oriciclo nel centro  $C_i$ ). Detto tale punto  $P$  e tracciata la sua polare rispetto a tutte le coniche del fascio iperosculatore (quindi in particolare all'oriciclo e all'assoluto), si può costruire la riflessione di che scambia  $A$  e  $B$  di centro  $P$  e di asse la sua polare.

Grazie all'analisi delle isometrie che lasciano fisso un certo oriciclo, segue immediatamente che *la distanza tra punti corrispondenti di oricicli paralleli è costante*. Infatti, la stessa isometria in grado di fissare un punto  $C$  e un certo oriciclo di cui è centro e di mandare un certo suo punto  $A$  in un altro suo punto  $B$  manderà di conseguenza la retta  $A \vee C$  nella retta  $B \vee C$  e lascerà fisse, come si è detto, anche tutte le altre coniche del fascio iperosculatore, ovvero tutti gli oricicli ad esso paralleli. Perciò necessariamente i punti corrispondenti di  $A$  verranno mandati nei punti corrispondenti di  $B$ , e quindi per forza, essendo gli oricicli complessivamente fissi per l'isometria applicata, la distanza tra  $A$  e  $A'$



**Figura 3.1:** La prima immagine rappresenta la prima isometria descritta, in cui lo scambio di  $A'$  e  $B'$  sulla tangente all'orriciclo induce lo scambio di  $A$  e  $B$  sull'orriciclo. La seconda immagine invece rappresenta la seconda isometria descritta, ovvero la riflessione di centro  $P$  e asse la sua polare.

e tra  $B$  e  $B'$  dovrà essere la stessa per ogni coppia di punti corrispondenti dei due oricicli paralleli.

Certamente, inoltre, l'applicazione di una tale isometria  $\psi_i$  prova che *il rapporto tra archi corrispondenti di oricicli paralleli è costante*. Sia per esempio  $\phi$  un'isometria iperbolica dove il centro  $C$  dell'orriciclo è l'unico punto fisso.

Sulla ogni retta per  $C$  essa avrà matrice:  $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Una tale matrice

verifica l'uguaglianza:  $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Dunque esiste sempre:

$\phi_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\alpha}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , tale che  $\phi_n^n = \phi$ , e per ogni  $i = \{0, \dots, n\}$  esisterà un certo punto

dell'orriciclo  $A_i$  tale che  $\phi_n^i(A) = A_i$ , dove  $A_n = B$  (e, analogamente, esisterà un certo punto nell'orriciclo parallelo considerato  $A'_i$  tale che  $\phi_n^i(A') = A'_i$  dove  $A'_n = B'$ ). Si avrà quindi certamente che:

$$d_i(A, \phi_n(A)) = d_i(\phi_n(A), \phi_n^2(A)) = \dots = d_i(\phi_n^i(A), \phi_n^{i+1}(A))$$

per ogni valore di  $i$  (e così anche per i punti corrispondenti sull'orriciclo parallelo considerato. Perciò si avrà anche che:

$$\frac{d_i(A, \phi_n(A))}{d_i(A', \phi_n(A'))} = \frac{d_i(\phi_n(A), \phi_n^2(A))}{d_i(\phi_n(A'), \phi_n^2(A'))} = \dots = \frac{d_i(\phi_n^i(A), \phi_n^{i+1}(A))}{d_i(\phi_n^i(A'), \phi_n^{i+1}(A'))} = k,$$

e quindi:

$$\frac{\sum_{i=0}^n d_i(\phi_n^i(A), \phi_n^{i+1}(A))}{\sum_{i=0}^n d_i(\phi_n^i(A'), \phi_n^{i+1}(A'))} = k, \text{ con } k \text{ un certo valore costante.}$$

Facendo ora il limite per  $n \rightarrow \infty$  si avrà:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=0}^n d_i(\phi_n^i(A), \phi_n^{i+1}(A))}{\sum_{i=0}^n d_i(\phi_n^i(A'), \phi_n^{i+1}(A'))} = \frac{\text{arc}(A, B)}{\text{arc}(A', B')} = k,$$

il che dimostra che il rapporto tra archi corrispondenti è costante.





## Capitolo 4

# Triangoli

Come è noto, si parla di *triangolo* in presenza del dato di tre punti del piano non allineati e tre rette che li congiungono a due a due. Un tale oggetto può certamente essere definito in qualsiasi piano (euclideo, ellittico o iperbolico) ed esistono alcune proprietà che, opportunamente espresse nei tre casi, caratterizzano i triangoli in qualsiasi piano essi vengano analizzati. L'obiettivo di quest'ultimo capitolo è quello di verificare tali proprietà nei casi non euclidei, ponendosi, senza perdita di generalità, in un sistema di riferimento di  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  che sia comodo per lo sviluppo dei calcoli.

Dato un triangolo qualsiasi di vertici  $A, B$  e  $C$ , grazie alla transitività delle isometrie nei piani euclideo, ellittico ed iperbolico, è sempre possibile considerare un sistema di riferimento in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  dove  $A = (1, 0, 0)^T, B = (1, x, 0)^T, C = (1, t, u)^T$  con  $x, t, u \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ . I lati di tale triangolo saranno:

- Il lato  $AB$ , giacente sulla retta  $c = A \vee B = (0, 0, x) = (0, 0, 1)$ ,
- Il lato  $AC$ , giacente sulla retta  $b = A \vee C = (0, u, -t)$ ,
- Il lato  $BC$ , giacente sulla retta  $a = B \vee C = (-ux, u, x - t)$ .

A partire da questo riferimento è possibile analizzare il teorema dei coseni, il teorema di Pitagora, e il teorema dei seni nel piano ellittico e nel piano iperbolico.

## 4.1 Teorema dei Coseni, Teorema di Pitagora e Teorema dei Seni

### 4.1.1 Caso ellittico

Grazie alla costruzione della geometria ellittica, note le formule per seno e coseno di un certo angolo  $\theta$  compreso tra due rette  $r, s$  nel piano ellittico:

$$\cos(\theta) = \frac{\Omega_e(r, s)}{\sqrt{\Omega_e(r)\Omega_e(s)}} \quad \sin(\theta) = \frac{\sqrt{\Omega_e(r)\Omega_e(s) - \Omega_e(r, s)^2}}{\sqrt{\Omega_e(r)\Omega_e(s)}},$$

(dove grazie all'autodualità del piano ellittico è analogo l'utilizzo di  $\Omega_e$  al posto di  $\Omega_e^*$ ), è possibile calcolare gli angoli del triangolo considerato, ottenendo:

- per  $\alpha$  l'angolo compreso tra le rette  $b$  e  $c$ :  

$$\cos(\alpha) = \frac{-t}{\sqrt{u^2+t^2}}, \quad \sin(\alpha) = \frac{u}{\sqrt{u^2+t^2}}$$
- per  $\beta$  l'angolo compreso tra le rette  $a$  e  $c$ :  

$$\cos(\beta) = \frac{x-t}{\sqrt{u^2x^2+u^2+(x-t)^2}} \quad \sin(\beta) = \frac{u\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{u^2x^2+u^2+(x-t)^2}}$$
- per  $\gamma$  l'angolo compreso tra le rette  $a$  e  $b$ :  

$$\cos(\gamma) = \frac{u^2+t^2-tx}{\sqrt{(u^2x^2+u^2+(x-t)^2)(u^2+t^2)}} \quad \sin(\gamma) = \frac{\sqrt{(u^2x^2+u^2+(x-t)^2)(u^2+t^2)-(u^2+t^2-tx)^2}}{\sqrt{(u^2x^2+u^2+(x-t)^2)(u^2+t^2)}}$$

Si è inoltre ricavato che, detti  $P, Q$  due generici punti di  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  e  $d_e$  la loro distanza nel piano ellittico, tale distanza può essere espressa rispetto ad un certo angolo  $\theta$  come:  $\frac{d_e(P, Q)}{k_e} = \theta$ .

Diventa quindi possibile caratterizzare le distanze dei lati tramite le espressioni:

$$\cos\left(\frac{d_e(P, Q)}{k_e}\right) = \cos(\theta) = \frac{\Omega_e(P, Q)}{\sqrt{\Omega_e(P)\Omega_e(Q)}}, \quad \sin\left(\frac{d_e(P, Q)}{k_e}\right) = \sin(\theta) = \frac{\sqrt{\Omega_e(P)\Omega_e(Q) - \Omega_e(P, Q)^2}}{\sqrt{\Omega_e(P)\Omega_e(Q)}}.$$

Si otterranno così le seguenti espressioni per i vari lati:

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{d_e(A, B)}{k_e}\right) &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & \sin\left(\frac{d_e(A, B)}{k_e}\right) &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \\ \cos\left(\frac{d_e(B, C)}{k_e}\right) &= \frac{1+xt}{\sqrt{(1+t^2+u^2)(1+x^2)}}, & \sin\left(\frac{d_e(B, C)}{k_e}\right) &= \frac{\sqrt{(1+t^2+u^2)(1+x^2)-(1+xt)^2}}{\sqrt{(1+t^2+u^2)(1+x^2)}}, \\ \cos\left(\frac{d_e(A, C)}{k_e}\right) &= \frac{1}{\sqrt{1+t^2+u^2}}, & \sin\left(\frac{d_e(A, C)}{k_e}\right) &= \frac{\sqrt{t^2+u^2}}{\sqrt{1+t^2+u^2}}. \end{aligned}$$

Da queste espressioni è immediato verificare la validità della formula dei coseni nel piano ellittico sia per i lati sia per gli angoli (qui ricavate per il lato  $AC$  e per l'angolo  $\beta$ ):

$$\begin{aligned} &\cos\left(\frac{d_e(B, C)}{k_e}\right) \cos\left(\frac{d_e(A, B)}{k_e}\right) + \sin\left(\frac{d_e(B, C)}{k_e}\right) \sin\left(\frac{d_e(A, B)}{k_e}\right) \cos(\beta) = \\ &= \frac{1+xt}{\sqrt{(1+t^2+u^2)(1+x^2)}} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{\sqrt{(1+t^2+u^2)(1+x^2)-(1+xt)^2}}{\sqrt{(1+t^2+u^2)(1+x^2)}} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \frac{x-t}{\sqrt{u^2x^2+u^2+(x-t)^2}} = \\ &= \frac{1+xt+x(x-t)}{(x^2+1)(\sqrt{1+t^2+u^2})} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2+u^2}} = \cos\left(\frac{d_e(A, C)}{k_e}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\cos(\alpha)\cos(\gamma) + \sin(\alpha)\sin(\gamma)\cos\left(\frac{d_e(A,C)}{k_e}\right) = \\
& = \frac{-t}{\sqrt{u^2+t^2}} \frac{u^2+t^2-tx}{\sqrt{(u^2x^2+u^2+(x-t)^2)(u^2+t^2)}} + \frac{u}{\sqrt{u^2+t^2}} \frac{\sqrt{(u^2x^2+u^2+(x-t)^2)(u^2+t^2)-(u^2+t^2-tx)^2}}{\sqrt{(u^2x^2+u^2+(x-t)^2)(u^2+t^2)}} \frac{1}{\sqrt{1+t^2+u^2}} = \\
& = \frac{-t}{\sqrt{u^2+t^2}} \frac{u^2+t^2-tx}{\sqrt{(u^2x^2+u^2+(x-t)^2)(u^2+t^2)}} + \frac{ux}{(u^2+t^2)\sqrt{u^2x^2+u^2+(x-t)^2}} = \\
& = \frac{(u^2+t^2)(x-t)}{(u^2+t^2)\sqrt{u^2x^2+u^2+(x-t)^2}} = \frac{x-t}{\sqrt{u^2x^2+u^2+(x-t)^2}} = \cos(\beta).
\end{aligned}$$

Poiché ogni triangolo è certamente invariante per isometrie del piano ellittico (e questo permette di sviluppare i conti in un sistema di riferimento generico come quello impostato), i conti effettuati per l'angolo  $\beta$  e per il lato  $AC$  concludono la dimostrazione del teorema dei coseni rispettivamente per i lati e per gli angoli di un triangolo nel piano ellittico:

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{d_e(A,C)}{k_e}\right) &= \cos\left(\frac{d_e(B,C)}{k_e}\right)\cos\left(\frac{d_e(A,B)}{k_e}\right) + \sin\left(\frac{d_e(B,C)}{k_e}\right)\sin\left(\frac{d_e(A,B)}{k_e}\right)\cos(\beta), \\
\cos(\beta) &= -\cos(\alpha)\cos(\gamma) + \sin(\alpha)\sin(\gamma)\cos\left(\frac{d_e(A,C)}{k_e}\right).
\end{aligned}$$

A partire dal teorema dei coseni ellittico per i lati del triangolo è possibile inoltre dedurre il teorema dei coseni euclideo (o teorema di Carnot) mediante lo stesso procedimento impiegato per le distanze. Si era precedentemente dimostrato, infatti, che facendo tendere  $k_e$  all'infinito veniva ricavata l'espressione usuale euclidea della distanza tra due punti. Operando lo stesso limite in questo caso si otterranno degli argomenti tendenti a 0 per le funzioni seno e coseno, ed è quindi possibile sostituire tali quantità con lo sviluppo di Taylor corrispondente:

$$\begin{aligned}
& \cos\left(\frac{d_e(A,C)}{k_e}\right) \stackrel{k_e \rightarrow \infty}{\sim} 1 - \frac{(d_e(A,C))^2}{2k_e^2} + o\left(\frac{1}{k_e^3}\right), \\
& \cos\left(\frac{d_e(B,C)}{k_e}\right)\cos\left(\frac{d_e(A,B)}{k_e}\right) + \sin\left(\frac{d_e(B,C)}{k_e}\right)\sin\left(\frac{d_e(A,B)}{k_e}\right)\cos(\beta) \stackrel{k_e \rightarrow \infty}{\sim} \\
& \left(1 - \frac{(d_e(B,C))^2}{2k_e^2} + o\left(\frac{1}{k_e^3}\right)\right)\left(1 - \frac{(d_e(A,B))^2}{2k_e^2} + o\left(\frac{1}{k_e^3}\right)\right) + \frac{d_e(A,C)d_e(A,B)\cos(\beta)}{k_e^2}.
\end{aligned}$$

Si ottiene quindi l'uguaglianza:

$$1 - \frac{(d_e(A,C))^2}{2k_e^2} + o\left(\frac{1}{k_e^3}\right) = 1 - \frac{(d_e(B,C))^2}{2k_e^2} - \frac{(d_e(A,B))^2}{2k_e^2} + \frac{d_e(B,C)d_e(A,B)\cos(\beta)}{k_e^2} + o\left(\frac{1}{k_e^3}\right).$$

Facendo le dovute semplificazioni si raggiunge la forma:

$$d_e(A,C)^2 = d_e(B,C)^2 + d_e(A,B)^2 - 2d_e(B,C)d_e(A,B)\cos(\beta),$$

la quale, facendo il limite per  $k_e$  che tende all'infinito, esprime proprio il teorema dei coseni sul piano euclideo:

$$d(A, C)^2 = d(B, C)^2 + d(A, B)^2 - 2d(B, C)(A, B) \cos(\beta),$$

dove  $d$  indica la distanza nel piano euclideo.

Il teorema dei coseni permette di dimostrare anche il teorema di Pitagora nel piano ellittico, che non è altro che un suo caso particolare. Infatti, nel caso di un triangolo rettangolo in cui  $\beta$  è un angolo retto, si avrà  $\cos(\beta) = 0$ , e di conseguenza, sostituendo questo dato alla formula che esprime il teorema dei coseni per i lati, si otterrà:

$$\cos\left(\frac{d_e(A, C)}{k_e}\right) = \cos\left(\frac{d_e(B, C)}{k_e}\right) \cos\left(\frac{d_e(A, B)}{k_e}\right),$$

che dimostra appunto il teorema di Pitagora ellittico. La stessa relazione si era precedentemente verificata dimostrando che la proiezione ortogonale di un punto su una retta non è altro che il punto che realizza la minima distanza del punto dalla retta.

Procedendo analogamente a quanto fatto per il teorema dei coseni, inoltre, è possibile ricavare da quest'ultima relazione il teorema di Pitagora nel piano euclideo. Infatti, se vale:

$$\cos\left(\frac{d_e(A, C)}{k_e}\right) = \cos\left(\frac{d_e(B, C)}{k_e}\right) \cos\left(\frac{d_e(A, B)}{k_e}\right) + \sin\left(\frac{d_e(B, C)}{k_e}\right) \sin\left(\frac{d_e(A, B)}{k_e}\right) \cos(\beta) \stackrel{k_e \rightarrow \infty}{\sim}$$

$$d(A, C)^2 = d(B, C)^2 + d(A, B)^2 - 2d(B, C)(A, B) \cos(\beta),$$

allora, con la condizione  $\cos(\beta) = 0$ , si ricaverà la relazione:

$$d(A, C)^2 = d(B, C)^2 + d(A, B)^2, \text{ che è appunto il teorema di Pitagora euclideo.}$$

Il sistema di riferimento introdotto è utile anche per ricercare una relazione tra il seno di ogni angolo del triangolo ed il seno della lunghezza del proprio lato opposto. Calcolando infatti:

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sin\left(\frac{d_e(B, C)}{k_e}\right)} = \frac{u}{\sqrt{u^2+t^2}} \frac{\sqrt{(1+t^2+u^2)(1+x^2)}}{\sqrt{(1+t^2+u^2)(1+x^2)-(1+xt)^2}} = \frac{u\sqrt{(1+t^2+u^2)(1+x^2)}}{\sqrt{(u^2+t^2)((t-x)^2+u^2(x^2+1))}},$$

$$\frac{\sin(\beta)}{\sin\left(\frac{d_e(A, C)}{k_e}\right)} = \frac{u\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{u^2x^2+u^2+(x-t)^2}} \frac{\sqrt{1+t^2+u^2}}{\sqrt{t^2+u^2}} = \frac{u\sqrt{(1+t^2+u^2)(1+x^2)}}{\sqrt{(u^2+t^2)((t-x)^2+u^2(x^2+1))}},$$

$$\frac{\sin(\gamma)}{\sin\left(\frac{d_e(A, B)}{k_e}\right)} = \frac{\sqrt{(u^2x^2+u^2+(x-t)^2)(u^2+t^2)-(u^2+t^2-tx)^2}}{\sqrt{(u^2x^2+u^2+(x-t)^2)(u^2+t^2)}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \frac{u\sqrt{(1+t^2+u^2)(1+x^2)}}{\sqrt{(u^2+t^2)((t-x)^2+u^2(x^2+1))}},$$

si ottiene che il rapporto tra il seno di un angolo e il seno della lunghezza del lato ad esso opposto è costante. In altre parole è dimostrato il teorema dei

seni ellittico:

$$\frac{\sin\left(\frac{d_e(B,C)}{k_e}\right)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin\left(\frac{d_e(A,C)}{k_e}\right)}{\sin(\beta)} = \frac{\sin\left(\frac{d_e(A,B)}{k_e}\right)}{\sin(\gamma)}.$$

Anche in questo caso, facendo il limite per  $k_e$  che tenda ad infinito in modo da trovare la metrica euclidea, si otterrà il teorema dei seni nel piano euclideo:

$$\frac{\sin\left(\frac{d_e(A,C)}{k_e}\right)}{\sin(\beta)} \underset{k_e \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\left(\frac{d_e(A,C)}{k_e}\right) + o\left(\frac{1}{k_e^3}\right)}{\sin(\beta)} \xrightarrow{k_e \rightarrow \infty} \frac{|A,C|}{\sin(\beta)}.$$

Si ottiene così il teorema dei seni euclideo:

$$\frac{|A,C|}{\sin(\beta)} = \frac{|B,C|}{\sin(\alpha)} = \frac{|A,B|}{\sin(\gamma)}$$

#### 4.1.2 Caso Iperbolico

Per procedere alla verifica dell'analogo iperbolico del teorema dei coseni, è necessario calcolare il coseno e il seno degli angoli del triangolo di partenza similmente a quanto fatto per il piano ellittico, tramite le formule:

$$\cos(\theta) = \frac{\Omega_i(r,s)}{\sqrt{\Omega_i(r)\Omega_i(s)}}, \quad \sin(\theta) = \frac{\sqrt{\Omega_i(r)\Omega_i(s) - \Omega_i(r,s)^2}}{\sqrt{\Omega_i(r)\Omega_i(s)}},$$

dove si sono indicate con  $r$  ed  $s$  due qualsiasi rette di  $\overline{\mathbb{H}}$  tra le quali sia compreso  $\theta$  (si noti che un tale procedimento può essere eseguito in quanto in questo caso i vertici del triangolo, ovvero i punti di incidenza delle rette tra cui sono compresi gli angoli, sono tutti appartenenti a  $\overline{\mathbb{H}}$ ). Anche in questo caso, inoltre, è analogo l'utilizzo di  $\Omega_i$  al posto di  $\Omega_i^*$  in quanto descrivibili con matrici tra loro proporzionali). Si possono quindi calcolare gli angoli del triangolo in questo modo:

- per  $\alpha$  l'angolo compreso tra le rette  $b$  e  $c$ :

$$\cos(\alpha) = \frac{-t}{\sqrt{u^2+t^2}}, \quad \sin(\alpha) = \frac{u}{\sqrt{u^2+t^2}}$$

- per  $\beta$  l'angolo compreso tra le rette  $a$  e  $c$ :

$$\cos(\beta) = \frac{x-t}{\sqrt{-u^2x^2+u^2+(x-t)^2}}, \quad \sin(\beta) = \frac{u\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{-u^2x^2+u^2+(x-t)^2}}$$

- per  $\gamma$  l'angolo compreso tra le rette  $a$  e  $b$ :

$$\cos(\gamma) = \frac{u^2+t^2-tx}{\sqrt{(-u^2x^2+u^2+(x-t)^2)(u^2+t^2)}},$$

$$\sin(\gamma) = \frac{\sqrt{(-u^2x^2+u^2+(x-t)^2)(u^2+t^2)-(u^2+t^2-tx)^2}}{\sqrt{(-u^2x^2+u^2+(x-t)^2)(u^2+t^2)}} = \frac{ux\sqrt{1-u^2-t^2}}{\sqrt{(-u^2x^2+u^2+(x-t)^2)(u^2+t^2)}}$$

Si è inoltre ricavato dalla costruzione della metrica iperbolica che, detti  $P, Q$  due generici punti di  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  e  $d_i$  la loro distanza nel piano iperbolico, tale distanza può essere espressa rispetto ad un certo parametro  $\theta$  analogamente a quanto fatto per il piano ellittico, in questo modo:  $\frac{d_i(P,Q)}{k_i} = \theta$ .

Si può così esprimere la misura dei lati del triangolo tramite le funzioni seno iperbolico e coseno iperbolico dell'angolo  $\theta$ :

$$\cosh\left(\frac{d_i(P,Q)}{k_i}\right) = \cosh(\theta) = \frac{|\Omega_i(P,Q)|}{\sqrt{\Omega_i(P)\Omega_i(Q)}}, \quad \sinh\left(\frac{d_i(P,Q)}{k_i}\right) = \sinh(\theta) = \frac{\sqrt{\Omega_i(P,Q)^2 - \Omega_i(P)\Omega_i(Q)}}{\sqrt{\Omega_i(P)\Omega_i(Q)}}.$$

Si otterranno dunque le seguenti espressioni per i vari lati:

$$\begin{aligned} \cosh\left(\frac{d_i(A,B)}{k_i}\right) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & \sinh\left(\frac{d_i(A,B)}{k_i}\right) &= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \\ \cosh\left(\frac{d_i(A,C)}{k_i}\right) &= \frac{1}{\sqrt{1-t^2-u^2}}, & \sinh\left(\frac{d_i(A,C)}{k_i}\right) &= \frac{\sqrt{t^2+u^2}}{\sqrt{1-t^2-u^2}}, \\ \cosh\left(\frac{d_i(B,C)}{k_i}\right) &= \frac{|-1+xt|}{\sqrt{(1-x^2)(1-t^2-u^2)}}, & \sinh\left(\frac{d_i(B,C)}{k_i}\right) &= \frac{\sqrt{(xt-1)^2 - (x^2-1)(t^2+u^2-1)}}{\sqrt{(1-x^2)(1-t^2-u^2)}}. \end{aligned}$$

Perché sia consistente la definizione del coseno iperbolico, nel sistema di riferimento scelto si avranno  $x, t, u < 1$ . Da queste espressioni è immediato verificare la validità della formula dei coseni nel piano iperbolico sia per i lati sia per gli angoli (qui ricavate per il lato  $AC$  e per l'angolo  $\beta$ ):

$$\begin{aligned} &\cosh\left(\frac{d_i(A,B)}{k_i}\right) \cosh\left(\frac{d_i(B,C)}{k_i}\right) - \sinh\left(\frac{d_i(A,B)}{k_i}\right) \sinh\left(\frac{d_i(B,C)}{k_i}\right) \cos(\beta) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{xt-1}{\sqrt{(1-x^2)(1-t^2-u^2)}} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \frac{\sqrt{(xt-1)^2 - (x^2-1)(t^2+u^2-1)}}{\sqrt{(1-x^2)(1-t^2-u^2)}} \frac{x-t}{\sqrt{-u^2x^2+u^2+(x-t)^2}} = \\ &= \frac{-(xt-1)+x(x-t)}{(1-x^2)\sqrt{1-t^2-u^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2-u^2}} = \cosh\left(\frac{d_i(A,C)}{k_i}\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\cos(\alpha) \cos(\gamma) + \sin(\alpha) \sin(\gamma) \cosh\left(\frac{d_i(A,C)}{k_i}\right) = \\ &\frac{-t}{\sqrt{u^2+t^2}} \frac{u^2+t^2-tx}{\sqrt{(-u^2x^2+u^2+(x-t)^2)(u^2+t^2)}} + \frac{u}{\sqrt{u^2+t^2}} \frac{ux\sqrt{1-u^2-t^2}}{\sqrt{(-u^2x^2+u^2+(x-t)^2)(u^2+t^2)}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2-u^2}} = \\ &\frac{-u^2t-t^3+t^2x+u^2x}{(u^2+t^2)\sqrt{-u^2x^2+u^2+(x-t)^2}} = \frac{(x-t)(u^2+t^2)}{(u^2+t^2)\sqrt{-u^2x^2+u^2+(x-t)^2}} = \frac{x-t}{\sqrt{-u^2x^2+u^2+(x-t)^2}} = \\ &\cos(\beta). \end{aligned}$$

Analogamente si procederà per gli altri lati e per gli altri angoli. Questo dimostra il teorema dei coseni per i lati e per gli angoli di un triangolo nel piano iperbolico:

$$\begin{aligned} \cosh\left(\frac{d_i(A,C)}{k_i}\right) &= \cosh\left(\frac{d_i(B,C)}{k_i}\right) \cosh\left(\frac{d_i(A,B)}{k_i}\right) - \sinh\left(\frac{d_i(B,C)}{k_i}\right) \sinh\left(\frac{d_i(A,B)}{k_i}\right) \cos(\beta), \\ \cos(\beta) &= \cos(\alpha) \cos(\gamma) + \sin(\alpha) \sin(\gamma) \cosh\left(\frac{d_i(A,C)}{k_i}\right). \end{aligned}$$

A partire dal teorema dei coseni iperbolico per i lati del triangolo è possibile dedurre il teorema dei coseni euclideo (o teorema di Carnot) facendo tendere  $k_i$  all'infinito, operando analogamente a quanto si era fatto nel piano ellittico. Sostituendo gli argomenti delle funzioni seno iperbolico e coseno iperbolico con gli sviluppi di Taylor corrispondenti si avrà:

$$\cosh\left(\frac{d_i(A, C)}{k_e}\right) \stackrel{k_i \rightarrow \infty}{\sim} 1 + \frac{(d_i(A, C))^2}{2k_i^2} + o\left(\frac{1}{k_i^3}\right),$$

$$\begin{aligned} & \cosh\left(\frac{d_i(B, C)}{k_e}\right) \cosh\left(\frac{d_i(A, B)}{k_i}\right) - \sinh\left(\frac{d_i(B, C)}{k_i}\right) \sinh\left(\frac{d_i(A, B)}{k_i}\right) \cos(\beta) \stackrel{k_i \rightarrow \infty}{\sim} \\ & \left(1 + \frac{(d_i(B, C))^2}{2k_i^2} + o\left(\frac{1}{k_i^3}\right)\right) \left(1 + \frac{(d_i(A, B))^2}{2k_i^2} + o\left(\frac{1}{k_i^3}\right)\right) - \frac{d_i(A, C)d_i(A, B) \cos(\beta)}{k_i^2}. \end{aligned}$$

Si ottiene quindi l'uguaglianza:

$$1 + \frac{(d_i(A, C))^2}{2k_i^2} + o\left(\frac{1}{k_i^3}\right) = 1 + \frac{(d_i(B, C))^2}{2k_i^2} + \frac{(d_i(A, B))^2}{2k_i^2} - \frac{d_i(B, C)d_i(A, B) \cos(\beta)}{k_i^2} + o\left(\frac{1}{k_i^3}\right).$$

Facendo le dovute semplificazioni si raggiunge la forma:

$$d_i(A, C)^2 = d_i(B, C)^2 + d_i(A, B)^2 - 2d_i(B, C)d_e(A, B) \cos(\beta),$$

la quale, facendo il limite per  $k_i$  che tende all'infinito, esprime proprio il teorema dei coseni sul piano euclideo:

$$d(A, C)^2 = d(B, C)^2 + d(A, B)^2 - 2d(B, C)(A, B) \cos(\beta),$$

dove  $d$  indica la distanza nel piano euclideo.

In maniera parallela al caso ellittico, il teorema dei coseni permette di dimostrare anche il teorema di Pitagora nel piano iperbolico, che non è altro che un suo caso particolare. Infatti, nel caso di un triangolo rettangolo in cui  $\beta$  è un angolo retto, si avrà  $\cosh(\beta) = 0$ , e di conseguenza, sostituendo questo dato alla formula che esprime il teorema dei coseni per i lati, si otterrà:

$$\cosh\left(\frac{d_i(A, C)}{k_i}\right) = \cosh\left(\frac{d_i(B, C)}{k_i}\right) \cosh\left(\frac{d_i(A, B)}{k_i}\right),$$

che dimostra appunto il teorema di Pitagora iperbolico. La stessa relazione si era precedentemente verificata dimostrando che la proiezione ortogonale di un punto su una retta non è altro che il punto che realizza la minima distanza del punto dalla retta.

Procedendo analogamente a quanto fatto per il teorema dei coseni, inoltre, è possibile ricavare da quest'ultima relazione il teorema di Pitagora nel piano euclideo. Infatti, se vale:

$$\cosh\left(\frac{d_i(A, C)}{k_i}\right) = \cosh\left(\frac{d_i(B, C)}{k_i}\right) \cosh\left(\frac{d_i(A, B)}{k_i}\right) - \sinh\left(\frac{d_i(B, C)}{k_i}\right) \sinh\left(\frac{d_i(A, B)}{k_i}\right) \cos(\beta) \stackrel{k_e \rightarrow \infty}{\rightarrow}$$

$$d(A, C)^2 = d(B, C)^2 + d(A, B)^2 - 2d(B, C)d(A, B)\cos(\beta)$$

allora, con la condizione  $\cosh(\beta) = 0$ , si ricaverà la relazione:

$$d(A, C)^2 = d(B, C)^2 + d(A, B)^2, \text{ che è appunto il teorema di Pitagora euclideo.}$$

Anche nel caso del piano iperbolico il sistema di riferimento introdotto è utile per ricavare una relazione tra il seno di ogni angolo del triangolo e il seno iperbolico del suo lato opposto. Calcolando i rapporti:

$$\begin{aligned} \frac{\sin(\alpha)}{\sinh\left(\frac{d_i(B, C)}{k_i}\right)} &= \frac{u}{\sqrt{u^2+t^2}} \frac{\sqrt{(1-x^2)(1-u^2+t^2)}}{\sqrt{(xt-1)^2-(x-1)^2(t^2+u^2-1)}} = \frac{u\sqrt{(1-x^2)(1-t^2-u^2)}}{\sqrt{(u^2+t^2)(-u^2x^2+u^2+(x-t)^2)}}, \\ \frac{\sin(\beta)}{\sinh\left(\frac{d_i(A, C)}{k_i}\right)} &= \frac{u\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{-u^2x^2+u^2+(x-t)^2}} \frac{\sqrt{1-t^2-u^2}}{\sqrt{t^2+u^2}}, \\ \frac{\sin(\gamma)}{\sinh\left(\frac{d_i(A, B)}{k_i}\right)} &= \frac{ux\sqrt{1-u^2-t^2}}{\sqrt{(-u^2x^2+u^2+(x-t)^2)(u^2+t^2)}} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \end{aligned}$$

si ottiene che il rapporto tra il seno di un angolo e il seno iperbolico del lato ad esso opposto è costante. In altre parole è dimostrato il teorema dei seni iperbolico:

$$\frac{\sinh\left(\frac{d_i(B, C)}{k_i}\right)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sinh\left(\frac{d_i(A, C)}{k_i}\right)}{\sin(\beta)} = \frac{\sinh\left(\frac{d_i(A, B)}{k_i}\right)}{\sin(\gamma)}.$$

Anche in questo caso, facendo il limite per  $k_i$  che tenda ad infinito in modo da trovare la metrica euclidea, si otterrà il teorema dei seni nel piano euclideo:

$$\frac{\sinh\left(\frac{d_i(A, C)}{k_i}\right)}{\sin(\beta)} \underset{k_i \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\left(\frac{d_i(A, C)}{k_i}\right) + o\left(\frac{1}{k_i^3}\right)}{\sin(\beta)} \underset{k_i \rightarrow \infty}{\xrightarrow{}} \frac{|A, C|}{\sin(\beta)}.$$

Si ottiene così il teorema dei seni euclideo:

$$\frac{|A, C|}{\sin(\beta)} = \frac{|B, C|}{\sin(\alpha)} = \frac{|A, B|}{\sin(\gamma)}$$

## 4.2 Somma degli angoli interni

### 4.2.1 Caso Ellittico

A differenza di quanto accade nella metrica euclidea, nel caso ellittico *la somma degli angoli interni di un triangolo non è una quantità fissata*. La cosa è subito analizzabile a partire dal caso dei triangoli rettangoli, ovvero i triangoli tali per cui le rette sulle quali giacciono i loro lati sono ortogonali (ovvero formano tra loro un angolo di  $\frac{\pi}{2}$ ). Grazie alla nozione di perpendicolarità ellittica precedentemente introdotta, è chiaro che tali triangoli sono da costruire a partire da una retta ed il suo polo. Dunque, data una retta  $p$  ed il suo polo



$P$ , tracciando due rette da  $P$  a due punti distinti  $P', P''$  di  $p$  si avranno due rette ortogonali a  $p$  e, di conseguenza, il triangolo  $PP'P''$  individuato avrà due angoli retti. Se poi le rette  $P \vee P'$  e  $P \vee P''$  sono a loro volta ortogonali tra loro, anche il terzo angolo sarà un angolo retto. Perciò nella metrica ellittica la somma degli angoli interni di un triangolo non è  $\pi$ , inoltre il fatto che esistano sia triangoli con tre angoli retti sia triangoli che invece ne presentano solo due mostra, come anticipato, che la somma degli angoli interni non sarà neppure pari ad una quantità fissata. Nel caso specifico di un triangolo con tre angoli retti, inoltre, si ha automaticamente che la lunghezza di ogni lato è  $\frac{k_e \pi}{2}$ , in quanto i vertici sono tutti opposti gli uni agli altri e quindi la loro distanza reciproca sarà massima. Quest'ultima considerazione unita al fatto che ogni angolo tra due rette sia definibile in funzione della distanza tra i loro poli dimostra che *il concetto di similitudine tra triangoli non esiste nel piano ellittico*, perché ogni angolo determina univocamente la distanza tra i poli delle rette tra cui è creato e, viceversa, la posizione reciproca dei poli delle rette determina univocamente l'angolo tra esse compreso. Questo inoltre permette di osservare che, poiché gli angoli sono univocamente determinati dalla lunghezza dei lati e poiché i punti di distanza massima pari a  $\frac{k_e \pi}{2}$  sono punti opposti rispetto a  $\Omega_e$  i quali, come si è visto, individuano nell'intersezione con la polare angoli di ampiezza  $\frac{\pi}{2}$ , al massimo sarà possibile avere un triangolo con tre angoli retti, e non potrà esserci nessun angolo nel triangolo di ampiezza maggiore. Se ne conclude che la somma degli angoli interni di un qualsiasi triangolo nel piano ellittico è sempre minore uguale di  $\frac{3\pi}{2}$ .

Inoltre, la verifica appena svolta della validità del teorema dei coseni per gli angoli permette di ricavare la misura minima della somma degli angoli interni di un triangolo nel piano ellittico.

Infatti, se  $\cos(\beta) = -\cos(\alpha)\cos(\gamma) + \sin(\alpha)\sin(\gamma)\cos\left(\frac{d_e(A,C)}{k_e}\right)$ , allora si avrà:

$$\cos(\beta) \leq -\cos(\alpha)\cos(\gamma) + \sin(\alpha)\sin(\gamma) = -\cos(\alpha + \gamma).$$

Perciò:

$$\cos(\pi - \beta) \geq \cos(\alpha + \gamma),$$

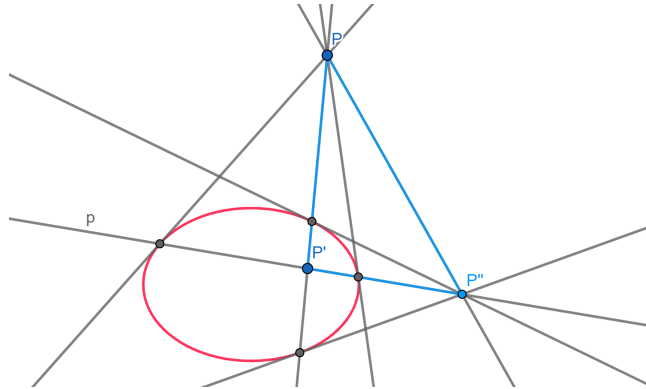
e quindi, per la decrescenza della funzione coseno:

$$\pi - \beta < \alpha + \gamma \quad \longrightarrow \quad \pi < \beta + \gamma + \alpha.$$

Se ne conclude che la somma degli angoli interni di un triangolo nel piano ellittico è compresa nell'intervallo:  $]\pi, \frac{3\pi}{2}]$ .

### 4.2.2 Caso iperbolico

Anche nel caso del piano iperbolico  $\overline{\mathbb{H}}$ , come nel caso del piano ellittico, è evidente che la somma degli angoli interni di un triangolo non può sicuramente



**Figura 4.1:** Il triangolo in figura  $PP'P''$  è un triangolo con tre angoli retti:  $P$  è il polo della retta  $p$ , quindi sia la retta  $P \vee P'$  sia la retta  $P \vee P''$  sono ortogonali a  $p$ . Inoltre  $P''$  è polo della retta  $P \vee P'$ , dunque  $P' \vee P''$  è ortogonale a  $P \vee P'$

essere uguale a  $\pi$ . Anzi, in generale non può essere nemmeno una quantità costante, basti guardare il caso dei triangoli aventi per vertici punti impropri. Un triangolo con un vertice improprio avrà certamente un angolo nullo, compreso tra le due rette incidenti nel punto improprio (quindi parallele). Nel triangolo di vertici un punto proprio e due impropri, l'angolo di parallelismo sarà l'unico angolo di misura non nulla e minore uguale a  $\pi$ , in quanto gli altri due angoli del triangolo così definito sono nulli poiché compresi tra rette parallele. Infine, per un triangolo avente per vertici solamente punti impropri, tutti e tre gli angoli saranno nulli poiché tutti e tre compresi tra rette parallele. Questo mostra come nel piano iperbolico la somma degli angoli interni di un triangolo possa essere addirittura nulla.

Grazie al teorema dei coseni iperbolico per gli angoli, è possibile trovare anche un estremo superiore dell'intervallo entro il quale può trovarsi il valore della somma degli angoli interni di un triangolo nel piano iperbolico. Infatti, la validità della formula  $\cos(\beta) = -\cos(\alpha)\cos(\gamma) + \sin(\alpha)\sin(\gamma)\cosh\left(\frac{d_i(A,C)}{k_i}\right)$ , si avrà, poiché  $\cosh(x) \in [1, +\infty[$ ,  $x \in \mathbb{R}$ :

$$\cos(\beta) \geq -\cos(\alpha)\cos(\gamma) + \sin(\alpha)\sin(\gamma) = -\cos(\alpha + \gamma),$$

e perciò varrà anche:

$$\cos(\pi - \beta) \leq \cos(\alpha + \gamma).$$

Quindi, per via della decrescenza della funzione coseno, si avrà:

$$\pi - \beta > \alpha + \gamma \quad \longrightarrow \quad \alpha + \beta + \gamma < \pi,$$

Se ne conclude che la somma degli angoli interni di un triangolo nel piano iperbolico è compresa nell'intervallo:  $[0, \pi[$ .

## 4.3 Aree

L'area di un triangolo è un ente geometrico ad esso riferito, e, come tale, deve rispettare la struttura dello spazio in cui il triangolo si trova, ovvero deve essere invariante per le isometrie di tale spazio e deve annullarsi sui triangoli degeneri. Inoltre, viene abitualmente considerato come elemento infinitesimo di superficie un elemento infinitesimo triangolare. Qualsiasi figura chiusa dello spazio in cui ci si restringe, quindi, dovrà essere scomponibile in elementi infinitesimi triangolari. Per questo motivo, è necessario che le aree dei triangoli godano della *proprietà additiva*, ovvero dato il triangolo di partenza di vertici  $A, B, C$  e un punto  $B' = (1, x + k, 0)^T$ ,  $k \in \mathbb{R}_{>0}$ , l'area del triangolo di vertici  $A, B', C$  dovrà essere data dalla somma delle aree dei triangoli di vertici  $A, B, C$  e  $B, B', C$ . A partire da queste considerazioni, grazie alle conclusioni tratte sulla somma degli angoli interni, è possibile dare sia nel caso ellittico sia in quello iperbolico una definizione consistente di area.

### 4.3.1 Caso Ellittico

DEFINIZIONE: Dato un triangolo di vertici  $A, B, C$ , detti  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  i suoi angoli interni, si definisce **l'area di un triangolo nel piano ellittico** come:

$$\alpha + \beta + \gamma - \pi,$$

ovvero una funzione degli angoli che rappresenta l'*eccesso ellittico*.

Una tale definizione di area rispetta tutte le proprietà richieste: è certamente invariante per isometrie ellittiche in quanto lo sono gli angoli, è additiva sulle decomposizioni in triangoli infinitesimi in quanto la misura stessa degli angoli è additiva, e si annulla per triangoli degeneri (ovvero costituiti da tre punti allineati). Se si considera il triangolo di vertici  $A, B, C$  allineati su una retta con  $B$  compreso tra  $A$  e  $C$ , certamente gli angoli compresi tra i lati  $AB$  e  $AC$  e tra i lati  $AC$  e  $BC$  saranno nulli, mentre l'angolo compreso tra i lati  $AB$  e  $BC$  tenderà  $\pi$  (ma non potrà assumere il valore  $\pi$  per via della periodicità della funzione logaritmo complesso), e questo verifica il fatto che l'area del triangolo così definita tenda ad annullarsi nel caso di un triangolo degenero. Si noti poi che l'area così definita varrà  $\frac{\pi}{2}$  sui triangoli trirettangoli, valore che costituisce quindi la massima area di un triangolo sul piano ellittico.

### 4.3.2 Caso Iperbolico

DEFINIZIONE: Dato un triangolo di vertici  $A, B, C$ , detti  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  i suoi angoli interni, si definisce **l'altra di un triangolo nel piano iperbolico** come:

$$\pi - \alpha - \beta - \gamma,$$

ovvero una funzione degli angoli che rappresenta il *difetto iperbolico*.

Anche in questo caso una definizione così posta rispetta tutte le proprietà richieste: è invariante per isometrie iperboliche in quanto lo sono gli angoli, è additiva sulle decomposizioni in triangoli infinitesimi in quanto la misura stessa degli angoli è additiva, e si annulla per triangoli degeneri (costituiti da tre punti allineati). Infatti, se i tre punti sono allineati certamente almeno quello centrale sarà un punto proprio, ed esso individuerà due lati tra i quali è compreso un angolo la cui misura è definita allo stesso modo del piano ellittico, e tenderà quindi a  $\pi$ . Gli angoli compresi tra le altre due coppie di lati, invece, saranno in ogni caso nulli. Infatti, qualora essi siano compresi tra lati che s'intersecano in punti propri, si potrà replicare lo stesso calcolo effettuato sul piano ellittico; qualora invece essi siano compresi tra lati che s'intersecano in punti impropri certamente saranno nulli visto che, come si è dimostrato, qualsiasi angolo compreso tra rette di un fascio improprio è nullo. Questo verifica il fatto che l'area del triangolo così definita tenda ad annullarsi nel caso di un triangolo degenero. Si noti poi che l'area così definita varrà  $\pi$  sui triangoli con tre angoli nulli, valore che costituisce quindi la massima area di un triangolo sul piano iperbolico.

## 4.4 Altezze e Ortocentro

In geometria euclidea in un triangolo si definiscono *altezze* i segmenti congiungenti ciascun vertice con il lato ad esso opposto, giacente sulla retta ortogonale a tale lato. In ogni triangolo le altezze hanno la proprietà di intersecarsi tutte e tre in uno stesso punto del piano, detto *ortocentro*. Grazie alle definizioni introdotte di distanza e di ortogonalità sia nel piano ellittico sia nel piano iperbolico, è possibile definire anche per le geometrie non euclidee il concetto di altezza, ed indagare sull'esistenza dell'ortocentro a partire dal generico triangolo di vertici  $A, B, C$  considerato.

### 4.4.1 Caso Ellittico

Per calcolare le altezze nel piano ellittico, è utile sfruttare la caratterizzazione di rette ortogonali in geometria ellittica. Infatti, data una certa retta  $r$ , un'altra retta  $s$  è ad essa ortogonale se passa per il polo  $R$  di  $r$  rispetto all'assoluto  $\Omega_e$ . Data  $r$ , è possibile calcolare le coordinate del suo polo  $R$  mediante l'equivalenza:  $R^T = r\Omega_e^{-1} = r\Omega_e$ . Si trovano quindi in questo modo le coordinate dei poli delle

rette su cui giacciono i lati del triangolo generico considerato:

$$A_p = \begin{pmatrix} -ux \\ u \\ x-t \end{pmatrix}, B_p = \begin{pmatrix} 0 \\ -u \\ t \end{pmatrix}, C_p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

A questo punto, poiché le altezze rispetto ai lati devono essere perpendicolari agli stessi e passanti per il vertice opposto al lato, è possibile determinare ognuna di essere come retta congiungente il polo del lato rispetto cui è calcolata con il vertice opposto a tale lato:

$$\bullet h_a = (A \times A_p)^T = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -ux \\ u \\ x-t \end{pmatrix} \right)^T = \begin{pmatrix} 0 & t-x & u \end{pmatrix},$$

$$\bullet h_b = (B \times B_p)^T = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -u \\ t \end{pmatrix} \right)^T = \begin{pmatrix} xt & -t & -u \end{pmatrix},$$

$$\bullet h_c = (C \times C_p)^T = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ u \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)^T = \begin{pmatrix} t & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcolando dunque il determinante:

$$\begin{vmatrix} -t & 1 & 0 \\ 0 & t-x & -t \\ 0 & u & -u \end{vmatrix} = -t(-tu + xu + tu) - uxt = 0,$$

si dimostra che le tre rette sono tutte concorrenti in un unico punto, l'ortocentro, che può essere calcolato tramite l'intersezione di due qualsiasi delle tre altezze:

$$\begin{pmatrix} 0 & t-x & u \end{pmatrix}^T \wedge \begin{pmatrix} xt & -t & -u \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} u \\ tu \\ -t^2 + tx \end{pmatrix}$$

#### 4.4.2 Caso Iperbolico

Il procedimento per ricavare le altezze nel caso iperbolico è del tutto analogo a quello del piano ellittico, sfruttando l'uguaglianza:  $R^T = r\Omega_i^{-1} = r\Omega_i$  con  $r$  generica retta del piano iperbolico ed  $R$  il suo polo. In questo caso chiaramente, poiché il triangolo appartiene a  $\overline{\mathbb{H}}$ , i poli delle rette su cui giacciono i suoi lati saranno punti ideali. Poiché le coordinate dei vertici del triangolo e delle rette dove giacciono i suoi lati sono definite sul piano proiettivo (quindi sono le stesse sia nel piano ellittico sia nel piano iperbolico), si nota subito che i poli  $C_p$  e  $B_p$ , relativi rispettivamente alle rette  $c$  e  $b$ , calcolati nel caso ellittico, saranno gli stessi nel caso iperbolico, e di conseguenza anche le altezze  $h_c$  e  $h_b$  avranno le stesse coordinate proiettive calcolate nel piano ellittico. L'unico polo differente sarà quello della retta  $a$ , che sarà dato dal punto  $A'_p = (ux, u, x-t)^T$ . Tuttavia calcolando l'altezza relativa ad  $a$  nel piano iperbolico si trova che:

$$h'_a = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ux \\ u \\ x-t \end{pmatrix} \right)^T = \begin{pmatrix} 0 & t-x & u \end{pmatrix} = h_a.$$

Dunque le altezze relative ai lati del triangolo nel piano iperbolico sono esattamente le stesse altezze calcolate nel piano ellittico e di conseguenza saranno analoghi anche i calcoli svolti per determinare l'ortocentro.

#### 4.5 Mediane e assi

In geometria euclidea si definiscono *mediane* dei lati di un triangolo i segmenti congiungenti ogni vertice del triangolo con il punto medio del lato ad esso opposto. Si definiscono *assi* dei lati di un triangolo le rette passanti per il punto medio di ogni lato del triangolo e ad essi perpendicolari. In entrambi i casi, per determinare questi elementi si sfrutta la definizione di *punto medio*, che, in geometria euclidea, indica sia il quarto armonico tra due punti su una retta e il punto all'infinito di tale retta, sia il punto su una retta equidistante da due punti dati giacenti sulla stessa retta. La coincidenza di tali nozioni, però, è puramente affine, e non può ripetersi nei casi delle geometrie non euclidee, dove il calcolo del quarto armonico non può avere lo stesso significato del caso euclideo. Si possono però determinare mediane e assi grazie ai punti medi dei lati del triangolo dato intesi come i punti equidistanti dai due estremi di ogni lato.

### 4.5.1 Caso ellittico

Per calcolare mediane e assi in un triangolo nel piano ellittico è anzitutto necessario calcolare i punti medi dei lati del triangolo rispetto alla metrica ellittica.

Dato il lato  $AB$  del triangolo generico considerato, il suo punto medio  $C'$  è definito come il punto  $C' \in c$  tale che  $d_e(A, C') = d_e(B, C')$ , ovvero sarà una combinazione lineare dei punti  $A$  e  $B$  che soddisfi all'uguaglianza sulla distanza. Essendo la distanza definibile in funzione di un certo angolo  $\theta$  di cui si è determinata l'espressione di seno e coseno, imporre una tale uguaglianza equivale ad imporre l'uguaglianza sulle funzioni coseno delle distanze, ovvero:

$$\text{Dati: } A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{si avrà: } C' = \begin{pmatrix} \alpha \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{tale che:}$$

$$\frac{\Omega_e(A, C')}{\sqrt{\Omega_e(A)\Omega_e(C')}} = \frac{\Omega_e(B, C')}{\sqrt{\Omega_e(B)\Omega_e(C')}} \rightarrow C' = \begin{pmatrix} x \\ \sqrt{1+x^2}-1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Analogamente, dato il lato  $AC$  del triangolo generico considerato, il suo punto medio  $B'$  è definito come il punto  $B' \in b$  tale che  $d_e(A, B') = d_e(C, B')$ , ovvero sarà una combinazione lineare dei punti  $A$  e  $C$  che soddisfi all'uguaglianza dei coseni delle distanze:

$$\text{Dati: } A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ u \end{pmatrix} \quad \text{si avrà: } B' = \begin{pmatrix} \alpha \\ t \\ u \end{pmatrix} \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{tale che:}$$

$$\frac{\Omega_e(A, B')}{\sqrt{\Omega_e(A)\Omega_e(B')}} = \frac{\Omega_e(C, B')}{\sqrt{\Omega_e(C)\Omega_e(B')}} \rightarrow B' = \begin{pmatrix} t^2 + u^2 \\ t(\sqrt{1+t^2+u^2}-1) \\ u(\sqrt{1+t^2+u^2}-1) \end{pmatrix}.$$

Infine, dato il lato  $BC$  del triangolo generico considerato, il suo punto medio  $A'$  è definito come il punto  $A' \in a$  tale che  $d_e(B, A') = d_e(C, A')$ , ovvero sarà una combinazione lineare dei punti  $B$  e  $C$  che soddisfi all'uguaglianza dei coseni delle distanze:

$$\text{Dati: } B = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ u \end{pmatrix} \quad \text{si avrà: } A' = \begin{pmatrix} \alpha + 1 \\ x\alpha + t \\ u \end{pmatrix} \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{tale che:}$$

$$\frac{\Omega_e(B, A')}{\sqrt{\Omega_e(B)\Omega_e(A')}} = \frac{\Omega_e(C, A')}{\sqrt{\Omega_e(C)\Omega_e(A')}} \rightarrow A' = \begin{pmatrix} \sqrt{1+t^2+u^2} + \sqrt{1+x^2} \\ x\sqrt{1+t^2+u^2} + t\sqrt{1+x^2} \\ u\sqrt{1+x^2} \end{pmatrix}.$$

A questo punto, per calcolare le mediane è sufficiente calcolare le rette congiungenti il punto medio di ogni lato con il vertice opposto a tale lato, ottenendo:

$$\begin{aligned} \bullet m_a = A \vee A' &= \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \sqrt{1+t^2+u^2} + \sqrt{1+x^2} \\ x\sqrt{1+t^2+u^2} + t\sqrt{1+x^2} \\ u\sqrt{1+x^2} \end{pmatrix} \right)^T = \begin{pmatrix} 0 \\ -u\sqrt{1+x^2} \\ x\sqrt{1+t^2+u^2} + t\sqrt{1+x^2} \end{pmatrix}, \\ \bullet m_b = B \vee B' &= \left( \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} t^2+u^2 \\ t(\sqrt{1+t^2+u^2}-1) \\ u(\sqrt{1+t^2+u^2}-1) \end{pmatrix} \right)^T = \begin{pmatrix} xu(\sqrt{1+t^2+u^2}-1) \\ -u(\sqrt{1+t^2+u^2}-1) \\ t(\sqrt{1+t^2+u^2}-1) - x(t^2+u^2) \end{pmatrix}, \\ \bullet m_c = C \vee C' &= \left( \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ u \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ \sqrt{1+x^2}-1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)^T = \begin{pmatrix} u(\sqrt{1+x^2}-1) \\ -ux \\ 1+xt-\sqrt{1+x^2} \end{pmatrix}^T. \end{aligned}$$

Per calcolare gli assi, invece, sarà sufficiente calcolare le rette passanti per il punto medio di ogni lato ed il polo della retta dove tale lato giace:

$$\begin{aligned} \bullet a_a = A' \vee A_p &= \left( \begin{pmatrix} \sqrt{1+t^2+u^2} + \sqrt{1+x^2} \\ x\sqrt{1+t^2+u^2} + t\sqrt{1+x^2} \\ u\sqrt{1+x^2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -ux \\ u \\ x-t \end{pmatrix} \right)^T = \\ &= \begin{pmatrix} x(x-t)\sqrt{1+t^2+u^2} + (xt-t^2-u^2)\sqrt{1+x^2} \\ (t-x)\sqrt{1+t^2+u^2} + (t-x-u^2x)\sqrt{1+x^2} \\ u(1+x^2)\sqrt{1+t^2+u^2} + u(1+tx)\sqrt{1+x^2} \end{pmatrix}^T, \\ \bullet a_b = B' \vee B_p &= \left( \begin{pmatrix} t^2+u^2 \\ t(\sqrt{1+t^2+u^2}-1) \\ u(\sqrt{1+t^2+u^2}-1) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -u \\ t \end{pmatrix} \right)^T = \begin{pmatrix} \sqrt{1+t^2+u^2}-1 \\ -t \\ -u \end{pmatrix}^T, \end{aligned}$$



$$\bullet \quad a_c = C' \vee C_p = \left( \left( \begin{pmatrix} x \\ \sqrt{1+x^2}-1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)^T = \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{1+x^2} \\ x \\ 0 \end{pmatrix}^T .$$

Si può dimostrare che, come nel caso delle altezze, il calcolo del determinante delle matrici di  $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$  nelle cui righe vi siano rispettivamente le mediane e gli assi del triangolo nel piano ellittico, dà sempre 0, e questo dimostra l'esistenza del *baricentro* (ovvero il punto di incontro delle mediane) e del *circocentro* (ovvero il punto di incontro degli assi) anche nel caso ellittico come nel caso euclideo. Tuttavia, a differenza di quanto accade nel caso euclideo, ortocentro, baricentro e circocentro *non sono* allineati in generale. Esiste però un caso particolare: se il triangolo è isoscele i tre punti sono allineati (ovvio, in quanto per uno dei lati altezza, asse e mediana coincidono e quindi giacciono su una stessa retta e dunque ortocentro, baricentro e incentro dovranno appartenere tutti e tre a tale retta). Non solo: si può anche dimostrare che i tre punti sono allineati solo se si è in presenza di un triangolo isoscele. Infatti il calcolo del determinante della matrice avente per colonne le coordinate dei tre punti notevoli ricavati (che si annulla quindi solo se tali punti sono allineati), sarà dato dal prodotto di tre fattori pari esattamente alla differenza tra le lunghezze dei lati del triangolo. Perciò evidentemente il determinante si potrà annullare solo nel caso in cui almeno due dei tre lati abbiano la stessa lunghezza, ovvero solo nel caso in cui il triangolo sia isoscele.

#### 4.5.2 Caso iperbolico

Anche per calcolare mediane e assi in un triangolo nel piano iperbolico è necessario calcolare i punti medi dei lati del triangolo rispetto alla metrica iperbolica.

Dato il lato  $AB$  del triangolo generico considerato, il suo punto medio  $C'$  è definito come il punto  $C' \in c$  tale che  $d_i(A, C') = d_i(B, C')$ , ovvero sarà una combinazione lineare dei punti  $A$  e  $B$  che soddisfi all'uguaglianza sulla distanza. Essendo la distanza definibile in funzione di un certo parametro  $\theta$  di cui si è determinata l'espressione di seno iperbolico e coseno iperbolico, imporre una tale uguaglianza equivale ad imporre l'uguaglianza sulle funzioni coseno iperbolico delle distanze, ovvero:

$$\text{Dati: } A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{si avrà } C' = \begin{pmatrix} \beta \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \quad \beta \in \mathbb{R} \quad \text{tale che:}$$

$$\frac{\Omega_i(A, C')}{\sqrt{\Omega_i(A)\Omega_e(C')}} = \frac{\Omega_i(B, C')}{\sqrt{\Omega_i(B)\Omega_e(C')}} \rightarrow C' = \begin{pmatrix} x \\ 1 - \sqrt{1 - x^2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Analogamente, dato il lato  $AC$  del triangolo generico considerato, il suo punto medio  $B'$  è definito come il punto  $B' \in b$  tale che  $d_i(A, B') = d_i(C, B')$ , ovvero sarà una combinazione lineare dei punti  $A$  e  $C$  che soddisfi all'uguaglianza dei coseni iperbolici delle distanze:

$$\text{Dati: } A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ u \end{pmatrix} \text{ si avrà: } B' = \begin{pmatrix} \beta \\ t \\ u \end{pmatrix} \beta \in \mathbb{R} \text{ tale che:}$$

$$\frac{\Omega_i(A, B')}{\sqrt{\Omega_i(A)\Omega_i(B')}} = \frac{\Omega_i(C, B')}{\sqrt{\Omega_i(C)\Omega_i(B')}} \rightarrow B' = \begin{pmatrix} t^2 + u^2 \\ t(1 - \sqrt{1 - t^2 - u^2}) \\ u(1 - \sqrt{1 - t^2 - u^2}) \end{pmatrix}.$$

Infine, dato il lato  $BC$  del triangolo generico considerato, il suo punto medio  $A'$  è definito come il punto  $A' \in a$  tale che  $d_i(B, A') = d_i(C, A')$ , ovvero sarà una combinazione lineare dei punti  $B$  e  $C$  che soddisfi all'uguaglianza dei coseni iperbolici delle distanze:

$$\text{Dati: } B = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ u \end{pmatrix} \text{ si avrà: } A' = \begin{pmatrix} \beta + 1 \\ x\beta + t \\ u \end{pmatrix} \beta \in \mathbb{R} \text{ tale che:}$$

$$\frac{\Omega_i(B, A')}{\sqrt{\Omega_i(B)\Omega_i(A')}} = \frac{\Omega_i(C, A')}{\sqrt{\Omega_i(C)\Omega_i(A')}} \rightarrow A' = \begin{pmatrix} \sqrt{1 - t^2 - u^2} + \sqrt{1 - x^2} \\ x\sqrt{1 - t^2 - u^2} + t\sqrt{1 - x^2} \\ u\sqrt{1 - x^2} \end{pmatrix}.$$

A questo punto, per calcolare le mediane è sufficiente calcolare le rette congiungenti il punto medio di ogni lato con il vertice opposto a tale lato, ottenendo:

$$\bullet m_a = AVA' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \sqrt{1 - t^2 - u^2} + \sqrt{1 - x^2} \\ x\sqrt{1 - t^2 - u^2} + t\sqrt{1 - x^2} \\ u\sqrt{1 - x^2} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 \\ -u\sqrt{1 - x^2} \\ x\sqrt{1 - t^2 - u^2} + t\sqrt{1 - x^2} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad m_b = B \vee B' &= \left( \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} t^2 + u^2 \\ t(1 - \sqrt{1 - t^2 - u^2}) \\ u(1 - \sqrt{1 - t^2 - u^2}) \end{pmatrix} \right)^T = \begin{pmatrix} xu(1 - \sqrt{1 - t^2 - u^2}) \\ -u(1 - \sqrt{1 - t^2 - u^2}) \\ t(1 - \sqrt{1 - t^2 - u^2}) - x(t^2 + u^2) \end{pmatrix}, \\ \bullet \quad m_c = C \vee C' &= \left( \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ u \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ 1 - \sqrt{1 - x^2} \\ 0 \end{pmatrix} \right)^T = \begin{pmatrix} u(1 - \sqrt{1 - x^2}) \\ -ux \\ 1 - xt - \sqrt{1 - x^2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Per calcolare gli assi, invece, sarà sufficiente congiungere il punto medio di ogni lato con il polo della retta su cui il lato giace, ottenendo:

$$\begin{aligned} \bullet \quad a_a = A' \vee A_p &= \left( \begin{pmatrix} \sqrt{1 - t^2 - u^2} + \sqrt{1 - x^2} \\ x\sqrt{1 - t^2 - u^2} + t\sqrt{1 - x^2} \\ u\sqrt{1 - x^2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ux \\ u \\ x - t \end{pmatrix} \right)^T = \\ &= \begin{pmatrix} x(x - t)\sqrt{1 - t^2 - u^2} + (xt - t^2 - u^2)\sqrt{1 - x^2} \\ (t - x)\sqrt{1 - t^2 - u^2} + (t - x + u^2x)\sqrt{1 - x^2} \\ u(1 - x^2)\sqrt{1 - t^2 - u^2} + u(1 - tx)\sqrt{1 - x^2} \end{pmatrix}^T, \\ \bullet \quad a_b = B' \vee B_p &= \left( \begin{pmatrix} t^2 + u^2 \\ t(1 - \sqrt{1 - t^2 - u^2}) \\ u(1 - \sqrt{1 - t^2 - u^2}) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -u \\ t \end{pmatrix} \right)^T = \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{1 - t^2 - u^2} \\ -t \\ -u \end{pmatrix}^T, \\ \bullet \quad a_c = C' \vee C_p &= \left( \begin{pmatrix} x \\ 1 - \sqrt{1 - x^2} \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)^T = \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{1 - x^2} \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}^T. \end{aligned}$$

Anche in questo caso si può dimostrare il determinante delle matrici di  $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$  nelle cui righe vi siano rispettivamente le mediane e gli assi del triangolo nel piano iperbolico è sempre 0, e questo dimostra l'esistenza del *baricentro* (ovvero il punto di incontro delle mediane) e del *circocentro* (ovvero il punto di incontro degli assi) anche nel caso iperbolico come nel caso euclideo. Tuttavia anche nel piano iperbolico, a differenza di quanto accade nel caso euclideo, ortocentro, baricentro e circocentro *non sono* allineati in generale. Vale però lo stesso caso particolare individuato nella geometria ellittica: il triangolo è isoscele se e solo se i tre punti sono allineati (le dimostrazioni svolte per provarlo sono del tutto analoghe al caso ellittico).

