

"Without data you're just another person with an opinion"

*W. Edwards Deming*



# Indice

<b>1</b>	<b>Normale Asimmetrica Multidimensionale</b>	<b>1</b>
1.1	Primi quattro momenti . . . . .	3
1.2	Proprietà statistiche . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Indici di Curtosi</b>	<b>7</b>
2.1	L'indice di Mardia . . . . .	8
2.2	L'indice di Malkovich-Affi . . . . .	9
2.3	Il nuovo indice direzionale . . . . .	10
2.4	L'indice di Srivastava . . . . .	13
2.5	L'indice di Mori-Rohatgi-Székeley . . . . .	14
2.6	L'indice di Kollo . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Implementazione R</b>	<b>17</b>
3.1	Funzioni interne . . . . .	17
3.1.1	Matrice di permutazione . . . . .	17
3.1.2	Momento quarto . . . . .	18
3.1.3	Prodotto Star . . . . .	19
3.2	Funzioni esportate . . . . .	20
3.2.1	Mardia e Malkovich Affi . . . . .	20
3.2.2	Indice direzionale . . . . .	21
3.2.3	Srivastava . . . . .	23
3.2.4	Mori-Rohatgi-Székeley . . . . .	23
3.2.5	Kollo . . . . .	24

<b>4</b>	<b>Confronto tra le misure di Curtosi</b>	<b>25</b>
4.1	Performance delle misure di Curtosi . . . . .	37
<b>5</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>49</b>
<b>A</b>	<b>Operatori Matematici</b>	<b>51</b>
A.1	Operatore <i>vec</i> . . . . .	51
A.2	Il prodotto di Kronecker . . . . .	51
A.3	Il prodotto <i>star</i> . . . . .	52
A.4	Teorema per il calcolo dei momenti misti . . . . .	52
A.5	La matrice di permutazione . . . . .	53
<b>B</b>	<b>Codice R</b>	<b>55</b>
	<b>Bibliography</b>	<b>69</b>

# Elenco delle tabelle

4.1	Indici di Curtosi scalari per la distribuzione Normale Asimmetrica Multidimensionale al variare di $\Omega$ e $\alpha$ ( $d = 2$ ) . . . . .	32
4.2	Indici di Curtosi scalari per la distribuzione Normale Asimmetrica Multidimensionale al variare di $\Omega$ e $\alpha$ ( $d = 3$ ) . . . . .	36
4.3	P-value e potenza del test al variare di $\Omega$ e $\alpha$ ( $d = 2$ ) . . . . .	43



# Capitolo 1

## La distribuzione Normale Asimmetrica multidimensionale

Definita da A. Azzalini e A. Dalla Valle nel 1996 [1] come generalizzazione della corrispettiva classe di distribuzioni univariata proposta da Azzalini nel 1985 [2], la famiglia di distribuzioni Normale Asimmetrica multidimensionale presenta proprietà ideali tra cui:

- inclusione della distribuzione Normale;
- tracciabilità matematica;
- ampio numero di indici per il calcolo di asimmetria e curtosi;
- possibilità di passaggio tra normalità e non normalità attraverso un parametro di regolarizzazione.

Grazie a queste proprietà la classe di distribuzioni Normali Asimmetriche permette un ottimo adattamento ai dati, con relativa semplicità nel trattamento dal punto di vista matematico, grazie all'analogia con la distribuzione normale. Attraverso l'utilizzo del parametro di regolarizzazione è inoltre possibile modificare asimmetria e curtosi della distribuzione in quanto l'introduzione di asimmetria modifica anche le code della distribuzione portando ad una modifica della curtosi della stessa. Risulta necessario quindi ottenere

## 2 CAPITOLO 1. NORMALE ASIMMETRICA MULTIDIMENSIONALE

degli indici che permettano di calcolare sia l'asimmetria [3] che della curtosi [4] in modo da permettere una descrizione completa della forma della distribuzione.

La definizione della famiglia di distribuzioni Normale Asimmetrica multivariata nel campo pratico è stata estremamente rilevante in quanto, nel caso multivariato, il numero di distribuzioni capaci di modellare leggere asimmetrie per le distribuzioni marginali è estremamente ridotto; inoltre la famiglia Normale Asimmetrica multivariata presenta una grandissima flessibilità grazie al parametro di regolarizzazione permettendo quindi un'ottima capacità di adattamento a diversi tipi di dati. La generalizzazione multivariata della famiglia Normale Asimmetrica, fornita da Azzalini e Dalla Valle, permette di ottenere una distribuzione le cui marginali sono a loro volta delle distribuzioni Normali Asimmetriche.

**Definizione** (Azzalini e Dalla Valle, 1996). Una variabile continua  $p$ -dimensionale  $Z$  è detta avere distribuzione Normale Asimmetrica multivariata ( $Z \sim SN_p(\bar{\Omega}, \alpha)$ ) se è continua e ha funzione di densità

$$2\phi_p(z; \bar{\Omega})\Phi(\alpha^\top z) \quad (z \in \mathfrak{R})$$

Il parametro di regolarizzazione  $\alpha$  è detto in questo caso parametro di forma e permette di regolare asimmetria e curtosi. Con  $\alpha = 0$  si ottiene la distribuzione Normale Multivariata con matrice di correlazione  $\bar{\Omega}$ . Questa definizione assume  $\mu = 0$ , per questo Azzalini nel 2005 propone una generalizzazione con l'introduzione di un parametro di posizione ( $\xi$  di dimensione  $p \times 1$ ) e uno di scala ( $\omega$  matrice diagonale di dimensione  $p \times p$ ). L'introduzione del parametro di posizione  $\xi$  permette di centrare la distribuzione in un valore diverso da 0.

**Teorema 1.1** (Azzalini e Capitanio, 1999). *Sia  $Z$  una variabile Normale Asimmetrica  $p$ -dimensionale, si ottiene che  $Y = \xi + \omega Z$  con  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_p)^\top$  e  $\omega = \text{diag}(\omega_1, \dots, \omega_p)$  ha funzione di densità*

$$2\phi_p((y - \xi); \Omega)\Phi(\alpha^\top \omega^{-1}(y - \xi)) \quad (z \in \mathfrak{R})$$



con  $\phi_p((y-\xi); \Omega)$  densità di una normale con media  $\xi$  e matrice di varianze e covarianze  $\Omega = \omega\bar{\Omega}\omega$ , per la variabile  $Y$  si indicherà la distribuzione come  $Y \sim SN_p(\xi, \Omega, \alpha)$

## 1.1 I primi quattro momenti della distribuzione Normale Asimmetrica multidimensionale

Azzalini e Dalla Valle (1996) hanno calcolato la funzione generatrice dei momenti nel caso in cui  $Y \sim SN_p(\Omega, \alpha)$

**Teorema 1.2** (Azzalini e Dalla Valle, 1996). *Sia  $Z$  una variabile Normale Asimmetrica  $p$ -dimensionale con  $Z \sim SN_p(\Omega, \alpha)$ , allora la funzione generatrice dei momenti per  $Z$  è pari a:*

$$\begin{aligned} M_4 &= 2 \int_{\mathbb{R}^p} \exp(t^\top z) \phi_p(z; \Omega) \Phi(\alpha^\top z) dz \\ &= 2 \exp\left(\frac{1}{2} t^\top \Omega t\right) \Phi(\delta^\top t) \quad (t \in \mathbb{R}^p) \end{aligned}$$

con

$$\delta = \frac{\Omega \alpha}{(1 + \alpha^\top \Omega \alpha)^{\frac{1}{2}}}$$

Grazie a questo teorema Genton, nel 2001, calcola i primi quattro momenti per una distribuzione Normale Asimmetrica  $p$ -variata

**Teorema 1.3** (Genton et al., 2001). *Sia  $Z$  un vettore casuale con distribuzione  $Z \sim SN_p(\alpha, \Omega)$ , allora:*

$$\begin{aligned} M_1 &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \delta \\ M_2 &= \Omega \\ M_3 &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} [\delta \otimes \Omega + \text{vec}(\Omega) \delta^\top + (I_p \otimes \delta) \Omega - (I_p \otimes \delta) (\delta \otimes \delta^\top)] \\ M_4 &= (I_{p^2} + U_{p,p})(\Omega \otimes \Omega) + \text{vec}(\Omega) \text{vec}(\Omega^\top) \end{aligned}$$

Generalizzando i momenti per gli una distribuzione con parametro di posizione  $\xi \neq 0$  Genton (2001) calcola i primi quattro momenti non centrati per la distribuzione  $Y \sim SN_p(\xi, \Omega, \alpha)$

## 4 CAPITOLO 1. NORMALE ASIMMETRICA MULTIDIMENSIONALE

**Teorema 1.4** (Azzalini, 2005). *Sia  $Y$  un vettore casuale con distribuzione  $Y \sim SN_p(\xi, \Omega, \alpha)$ , allora la funzione generatrice dei momenti per  $Y$  è:*

$$M(t) = 2 \exp(\xi^\top t + \frac{1}{2} t^\top \Omega t) \Phi(\delta^\top t) \quad (t \in \mathfrak{R}^p)$$

**Teorema 1.5** (Genton et al., 2001). *Sia  $Y$  un vettore casuale con distribuzione  $Y \sim SN_p(\xi, \Omega, \alpha)$ , allora i primi quattro momenti di  $Y$  sono:*

$$\begin{aligned} M_1 &= \xi + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \delta \\ M_2 &= \Omega + \xi \xi^\top + \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\xi \delta^\top + \delta \xi^\top) \\ M_3 &= \Omega \otimes \xi + \xi \otimes \Omega + \text{vec}(\Omega) \otimes \xi^\top + \xi \otimes \xi^\top \otimes \xi + \sqrt{\frac{2}{\pi}} [\delta \otimes \Omega + \text{vec}(\Omega) \delta^\top \\ &\quad + (I_p \otimes \delta) \Omega - \delta \otimes \delta^\top \otimes \delta + \delta \otimes \xi^\top \otimes \xi + \xi \otimes \delta^\top \otimes \xi + \xi \otimes \xi^\top \otimes \delta] \\ M_4 &= \Omega \otimes \xi \otimes \xi^\top + \xi \otimes \Omega \otimes \xi^\top + \text{vec}(\Omega) \otimes \xi^\top \otimes \xi^\top + \xi \otimes \xi^\top \otimes \xi \otimes \xi^\top + \Omega \otimes \Omega \\ &\quad + \text{vec}(\Omega) \text{vec}(\Omega)^\top + U_{p,p}(\Omega \otimes \Omega) + \xi^\top \otimes \Omega \otimes \xi + \xi \otimes \xi \otimes \text{vec}(\Omega)^\top + \xi \otimes \xi^\top \otimes \Omega \\ &\quad + \sqrt{\frac{2}{\pi}} [\delta \otimes \Omega \otimes \xi^\top + \text{vec}(\Omega) \otimes \delta^\top \otimes \xi^\top + ((I_p \otimes \delta) \Omega) \otimes \xi^\top + \delta \otimes \xi^\top \otimes \xi \otimes \xi^\top \\ &\quad + \xi \otimes \delta^\top \otimes \xi \otimes \xi^\top + \xi \otimes \xi^\top \otimes \delta \otimes \xi^\top + \delta^\top \otimes \Omega \otimes \xi + \delta \otimes \text{vec}(\Omega)^\top \otimes \xi \\ &\quad + (\Omega(I_p \otimes \delta^\top)) \otimes \xi + \xi^\top \otimes \delta \otimes \Omega + \xi^\top \otimes (\text{vec}(\Omega) \delta^\top) + \xi^\top \otimes ((I_p \otimes \delta) \Omega) \\ &\quad + \xi \otimes \delta^\top \otimes \Omega + \xi \otimes \delta \otimes \text{vec}(\Omega)^\top + \xi \otimes (\Omega(I_p \otimes \delta^\top)) + \xi \otimes \xi^\top \otimes \delta \otimes \delta^\top \\ &\quad - \delta \otimes \delta^\top \otimes \delta \otimes \xi^\top - \delta^\top \otimes \delta \otimes \delta^\top \otimes \xi - \xi^\top \otimes \delta \otimes \delta^\top \otimes \delta - \xi \otimes \delta^\top \otimes \delta \otimes \delta^\top] \end{aligned}$$

## 1.2 Le proprietà statistiche della distribuzione Normale Asimmetrica multidimensionale

Per le proprietà di seguito descritte si fa riferimento ad una variabile Normale Asimmetrica  $p$ -dimensionale  $Y \sim SN_p(\Omega, \alpha)$ . Queste proprietà possono essere divise in quattro categorie: quelle utili per creare campioni casuali (I), quelle relative alle distribuzioni marginali (II), quelle riguardanti le trasformazioni lineari (III e IV) e quelle che riguardano la forma quadratica (V). Tutte le proprietà descritte valgono anche nel caso in cui  $Y \sim SN_p(\xi, \Omega, \alpha)$  ma necessitano di una notazione più complicata che viene quindi omessa.

**Proposizione I** (Azzalini e Capitanio, 1999). *sia  $\begin{pmatrix} X_0 \\ X \end{pmatrix} \sim N_{p+1}(0, \Omega^*)$*

*con  $X_0$  scalare e  $\Omega^* = \begin{bmatrix} 1 & \delta^\top \\ \delta & \Omega \end{bmatrix}$  matrice di correlazione, allora:*

$$Z = \begin{cases} X & \text{se } X_0 > 0 \\ -X & \text{altrimenti} \end{cases}$$

è una  $SN_p(\Omega, \alpha)$  con:

$$\alpha = \frac{\Omega^{-1}\delta}{(1 - \delta^\top \Omega^{-1}\delta)^{1/2}}$$

Questa proposizione fornisce una rappresentazione stocastica di  $Z$  che permette di generare valori pseudocasuali da una distribuzione Normale Asimmetrica  $p$ -dimensionale. La proposizione è facilmente estendibile ad una Normale Asimmetrica con vettore delle medie diverso dal vettore nullo applicando il teorema **1.1**.

**Proposizione II** (Azzalini e Capitanio, 1999). sia  $Z \sim SN_p(\Omega, \alpha)$  e  $Z$  sia divisa in  $Z^\top = (Z_1^\top, Z_2^\top)$  di dimensioni rispettivamente  $h$  e  $p - h$ , siano

$$\Omega = \begin{pmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} \end{pmatrix}$$

e

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

le corrispondenti partizioni di  $\Omega$  e  $\alpha$ , allora la distribuzione marginale di  $Z_1$  è ancora una  $SN_h(\Omega_{11}, \bar{\alpha}_1)$  con  $\bar{\alpha}_1 = \frac{\alpha_1 + \Omega_{11}^{-1}\Omega_{12}\alpha_2}{(1 + \alpha_2^\top \Omega_{22.1}\alpha_2)^{1/2}}$  e  $\Omega_{22.1} = \Omega_{22} - \Omega_{21}\Omega_{11}^{-1}\Omega_{12}$ .

Quello che si ricava da questa proposizione è che sottoinsiemi di componenti di  $Z$  hanno distribuzione marginale che è ancora una variabile Normale Asimmetrica, quindi ciascuna componente marginale di  $Z$  si distribuisce come una variabile casuale Normale Asimmetrica univariata.

**Proposizione III** (Azzalini e Capitanio, 1999). sia  $Z \sim SN_p(\Omega, \alpha)$  e  $A$  una matrice non singolare  $p \times p$  tale che  $A^\top \Omega A$  sia una matrice di correlazione, allora

$$A^\top Z \sim SN_p(A^\top \Omega A, A^{-1}\alpha)$$

**Proposizione IV** (Azzalini e Capitanio, 1999). Sia  $Z \sim SN_p(\Omega, \alpha)$ , esiste una trasformazione lineare  $Z^* = A^*Z$  tale che  $Z^* \sim SN_p(I_p, \alpha^*)$ , dove al più una sola componente di  $\alpha$  è diversa da 0.

Questo risultato permette di definire una "forma canonica" per la distribuzione Normale Asimmetrica multivariata, le cui componenti sono mutualmente indipendenti con una sola componente a rappresentare tutta l'asimmetria della distribuzione multivariata. Se solo una delle componenti del vettore  $\alpha$  è diversa da 0, questo implica che non solo tutta l'asimmetria della distribuzione viene "assorbita" da una componente, ma anche la curtosi. Esiste, perciò, al più una sola componente con curtosi diversa da quella di una Normale multivariata. La densità di  $Z^*$  è data da (Azzalini e Capitanio, 1999):

$$2 \prod_{i=1}^p \phi(u_i) \Phi(\alpha_m^* u_m)$$

con  $\alpha_m^* = (\alpha^\top \Omega \alpha)^{1/2}$  unica componente (se esiste) di  $\alpha^*$  diversa da 0.

**Proposizione V** (Azzalini e Capitanio, 1999). Sia  $Z \sim SN_p(\Omega, \alpha)$  e  $B$  matrice  $p \times p$  simmetrica semi-definita positiva di rango  $k$  tale che  $B\Omega B = B$ , allora  $Z^\top B Z \sim \chi_k^2$

Generalizzando questa proposizione si ottiene

**Proposizione V.1** (Azzalini e Capitanio, 1999). Sia  $Z \sim SN_p(\Omega, \alpha)$  e  $C$  matrice a rango pieno  $p \times k$  ( $p \leq k$ ), allora  $Z^\top C (C^\top \Omega C)^{-1} C^\top Z \sim \chi_p^2$

Da queste due proprietà si ricava che  $Z^\top \Omega Z \sim \chi_p^2$ .

Come si può notare questa proprietà non coinvolge il parametro  $\alpha$

## Capitolo 2

# Indici di Curtosi per la Normale Asimmetrica multidimensionale

Nella descrizione delle caratteristiche di una distribuzione, oltre agli indici di posizione, variabilità globale e asimmetria è utile definire anche un indice di curtosi. Etimologicamente la parola deriva dal greco *κυρτός* che significa "curvo, arcuato". In generale la curtosi è un indice di forma della curva definito usualmente come rapporto tra la lontananza delle osservazioni dall'indice di posizione rispetto alla sua distanza media, permettendo di definire la pesantezza delle code di una distribuzione. L'indice di curtosi calcola quindi l'allontanamento dalla normalità distributiva a parità di media e varianza, verificando un maggior appiattimento (distribuzione platicurtica) o un maggior appuntimento (distribuzione leptocurtica) della distribuzione. È importante tenere conto però del fatto che oltre a dipendere dall'andamento delle code della distribuzione l'indice di curtosi dipende anche dal comportamento della stessa nella sua parte centrale, un ispessimento delle code della distribuzione porterà ad un minor numero di osservazioni nella parte centrale della distribuzione e viceversa code meno spesse portano ad un maggior numero di osservazioni nella parte centrale in quanto l'integrale della densità deve valere sempre 1. La complessità di questo fenomeno ha portato negli anni alla definizione di vari indici per il calcolo della curtosi.

Nel caso multidimensionale si ha un aumento della complessità di questo

indice poiché è intrinsecamente connesso con le altre caratteristiche della distribuzione come la pesantezza delle code, la variabilità e l'asimmetria, inoltre la presenza di più dimensioni connesse tra loro ne complica l'interpretazione. Risulta però più utile il calcolo della curtosi nel caso multidimensionale perché permette una descrizione più accurata della distribuzione insieme agli altri indici in quanto la visualizzazione grafica risulta complicata quando il numero di dimensioni è maggiore di 3. Vista l'importanza di questo fenomeno e la sua natura estremamente articolata sono stati proposti in letteratura vari indici, ognuno dei quali analizza aspetti diversi della curtosi vista la difficoltà nel cogliere il fenomeno nella sua interezza.

Gli indici in questione possono essere suddivisi in due categorie principali:

- indici riassuntivi che calcolano un unico valore complessivo per la curtosi;
- indici direzionali che permettono di identificare la curtosi per le varie direzioni della distribuzione.

I primi cercano di identificare un allontanamento generale dalla normalità distributiva mentre i secondi mirano ad individuare la direzione su cui avviene questo allontanamento. Di seguito sono riportati gli indici identificati per una distribuzione Normale Asimmetrica multidimensionale (Zanotto, 2012). Tutti gli indici si riferiscono ad una variabile casuale  $Y \sim SN_p(\xi, \Omega, \alpha)$  con media

$$E(Y) = \xi + \mu$$

e varianza

$$Var(Y) = \Omega - \mu\mu^\top$$

con  $\mu = \omega\sqrt{\frac{2}{\pi}}\delta$

## 2.1 L'indice di Mardia

L'indice di Mardia (1970) è uno degli indici più conosciuti per il calcolo della curtosi. Si tratta di un indice scalare che può essere considerato come la

generalizzazione multivariata dell'indice di Pearson.

**Definizione** (Mardia, 1970). Sia  $X = (X_1, \dots, X_p)^\top$  un vettore casuale  $p$ -dimensionale con media  $\mu = E(X)$  e matrice di varianze e covarianze non singolare  $\Sigma = E((X - \mu)(X - \mu)^\top)$ , allora l'indice di curtosi è definito come:

$$\beta_{2,p} = E [(X - \mu)^\top \Sigma^{-1} (X - \mu)]^2$$

Come per l'indice di Pearson, si ottiene un valore di riferimento di  $p(p+1)$  con  $p$  numero di dimensioni per una distribuzione Normale multidimensionale,  $\beta_{2,p} > p(p+1)$  indica quindi una distribuzione leptocurtica e  $\beta_{2,p} < p(p+1)$  una distribuzione platicurtica. L'indice può essere centrato come per l'indice di Pearson come

$$\gamma_{2,p} = \beta_{2,p} - p(p+1)$$

Per la distribuzione Normale Asimmetrica multidimensionale si ottiene:

$$\gamma_{2,p} = \beta_{2,p} - p(p+1) = 2(\pi - 3) \left( \frac{\mu_Z^\top \bar{\Omega}^{-1} \mu_Z}{1 - \mu_Z^\top \bar{\Omega}^{-1} \mu_Z} \right)$$

con  $\mu_Z = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \delta$  il valore atteso variabile casuale  $Z = \omega(Y - \xi) \sim SN_p(0, \bar{\Omega}, \alpha)$ . L'indice viene calcolato per una variabile casuale Normale Asimmetrica standardizzata, questo perchè risulta invariante rispetto a trasformazioni non singolari, di conseguenza  $\xi$  e  $\omega$  non influenzano il risultato.

## 2.2 L'indice di Malkovich-Affi

Malkovich e Afifi (1973) hanno introdotto un modo diverso di misurare la curtosi nell'ambito multidimensionale calcolando la curtosi in ogni direzione della curva e considerando il massimo di questi valori.

**Definizione** (Malkovich e Afifi, 1973). Sia  $\varnothing_p$  una sfera unitaria  $p$ -dimensionale definita come  $\varnothing_p = \{x \in \mathbb{R}^p : |x| = 1\}$ , allora la variabile casuale  $p$ -dimensionale  $Y$  ha curtosi nella direzione  $u \in \varnothing_p$  definita come:

$$[\beta_2(u)]^2 = \left[ \frac{E[(u^\top Y - u^\top E(Y))^4]}{\text{Var}(u^\top Y)^2} \right]^2 > 9$$

allora l'indice di curtosi è definito come:

$$(\beta_2^*)^2 = \sup_{u \in \mathcal{S}_p} [\beta_2(u) - 3]^2$$

Come si può notare dalla definizione questo indice fa riferimento all'indice di Mardia unidimensionale ( $p = 1$ ) calcolato per ogni direzione ed elevato al quadrato. Anche questo indice è di tipo scalare in quanto restituisce un solo valore riassuntivo di curtosi.

Per la distribuzione Normale Asimmetrica multidimensionale questo indice risulterà uguale a 0 per tutte le direzioni tranne quella che presenta non normalità. Risulterà quindi che l'indice di Malkovich-Afifi, scegliendo il massimo valore tra quelli calcolati elevato al quadrato, esso sarà pari al quadrato dell'indice di Mardia:

$$\gamma_2 = [\beta_{2,p} - p(p+2)]^2 = \left[ 2(\pi - 3) \left( \frac{\mu_Z^\top \bar{\Omega}^{-1} \mu_Z}{1 - \mu_Z^\top \bar{\Omega}^{-1} \mu_Z} \right) \right]^2$$

### 2.3 Il nuovo indice direzionale

Gli indici presentati fino ad ora forniscono una visione globale della curtosi, senza invece dare indicazioni sulla sua direzione. Questa scelta presenta alcuni vantaggi, come la semplicità di lettura ed interpretazione dell'indice, ma al tempo stesso presentano la limitazione di rappresentare un fenomeno complesso come la curtosi con un unico valore senza caratterizzare in alcun modo le varie direzioni. Può infatti succedere che la distribuzione sia platicurtica in alcune direzioni, leptocurtica in altre e normocurtica in altre ancora e questa informazione viene persa utilizzando indici riassuntivi. Può inoltre accadere che un indice scalare presenti lo stesso valore per distribuzioni molto diverse tra loro, questo significa che lo stesso valore della misura di curtosi non significa uno stesso comportamento delle distribuzioni. Questo indice ma-



triale descritto da L. Zanotto (2012) è stato costruito tenendo conto dello stesso procedimento adottato da Balakrishnan e coautori (2007) per ricavare l'indice di asimmetria e basandosi sull'indice di Malkovich e Afifi (1973). Si definisca con  $S = S_X$  la matrice di varianze e covarianze per il campione  $X = (X_1, \dots, X_n)$ ,  $S^{-1/2}$  la radice dell'inversa di  $S$  tale che  $S^{-1/2}SS^{-1/2} = I_p$ . Allora si può definire

**Definizione** (Malkovich e Afifi, 1973). Sia  $Z_i = S^{-1/2}(X_i - \bar{X})$  per  $i = 1, \dots, n$  all'ora l'indice di Malkovich e Afifi  $\beta_2^*$  è equivalente a:

$$(\beta_2^*)^2 = \sup_{u \in \theta_p} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (u^\top Z_i)^4 - K \right)^2$$

con  $K$  opportuna costante.

Ogni valore  $c_{2,n}(u) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (u^\top Z_i)^4 - K$  può essere considerato come una misura di curtosi per il campione standardizzato nella direzione  $u$ . Moltiplicando questo valore per  $uu^\top$  si può ottenere un valore per la curtosi nella direzione  $u$ . Sommando queste espressioni per  $u$  si può ottenere una misura complessiva della curtosi per il campione  $X$ . Si consideri quindi la statistica

$$T_n = \int_{\theta_p} uu^\top c_{2,n}(u) d\lambda(u)$$

Sviluppando l'integrale per l' $r$ -esima coordinata di  $T_n$  si ottiene

$$T_{n,r} = \int_{\theta_p} u_r^2 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq r} (u_r Z_{i,r} + u_j Z_{i,j})^4 d\lambda(u) - \int_{\theta_p} u_r^2 K d\lambda(u)$$

sviluppando i calcoli e utilizzando i momenti misti  $J_{i,j}$  per  $u_i u_j$  si ottiene

$$\begin{aligned} T_{n,r} = & J_6 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_{i,r}^4 + 4 \sum_{j \neq r} J_{5,1} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_{i,r}^3 Z_{i,j} + 6 \sum_{j \neq r} J_{4,2} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_{i,r}^2 Z_{i,j}^2 \\ & + 4 \sum_{j \neq r} J_{3,3} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_{i,r} Z_{i,j}^3 + \sum_{j \neq r} J_{2,4} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_{i,j}^4 - J_2 K \end{aligned}$$

Essendo quindi  $\lambda$  la misura della probabilità uniforme, invariante per rotazioni, uniformemente distribuita nella sfera unitaria, si può applicare il teorema per il calcolo dei momenti misti (descritto nell'appendice A.4) per calcolare  $J_{i,j}$ , ottenendo quindi

$$T_{n,r} = J_6 E(Y_r^4) + 6 \sum_{j \neq r} J_{4,2} E(Y_r^2 Y_j^2) + \sum_{j \neq r} J_{2,4} E(Y_j^4) - J_2 K$$

È utile inoltre introdurre l'indice  $Q$  calcolato come

$$Q = T_n^\top \Sigma T_n$$

in quanto è utile per scopi di inferenza.

Per calcolare questo indice per la distribuzione normale asimmetrica multidimensionale dobbiamo calcolare i momenti  $E(Y_i^4)$  ed  $E(Y_i^2 Y_j^2)$ . Per fare questo possiamo utilizzare la matrice del momento quarto ottenendo

$$E(Y_i^4) = M_4[(i-1)p+i, (i-1)p+i] = 6\omega_{i,i}\xi_i^2 + \xi_i^4 + 3\omega_{i,i}^2 + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\delta_i\xi_i[12\omega_{i,i} + 3\xi_i^2 + \delta_i\xi_i - 4\delta_i]$$

$$\begin{aligned} E(Y_i^2 Y_j^2) = M_4[(i-1)p+i, j] &= 4\omega_{ij}\xi_i\xi_j + \omega_{ii}\xi_j^2 + \xi_i^2\xi_j^2 + 2\omega_{ij}^2 + \omega_{ii}\omega_{jj} + \omega_{ii}\xi_i^2 \\ &+ \sqrt{\frac{2}{\pi}}[4\delta_i\omega_{ij}\xi_j + 2\delta_j\omega_{ii}\xi_j + 2\delta_i\xi_i\xi_j^2 + \delta_j\xi_i^2\xi_j + 4\delta_i\omega_{ij}\xi_i + 2\delta_i\omega_{ij}\xi_i \\ &+ \delta_i\delta_j\xi_i\xi_j - 2\delta_i^2\delta_j\xi_j - 2\delta_i\delta_j^2\xi_i] \end{aligned}$$

Ottenendo quindi

$$\begin{aligned}
T_{n,i} = & J_6 \left\{ 6\omega_{i,i}\xi_i^2 + \xi_i^4 + 3\omega_{i,i}^2 + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\delta_i\xi_i[12\omega_{i,i} + 3\xi_i^2 + \delta_i\xi_i - 4\delta_i] \right\} \\
& + 6 \sum_{j \neq i} \left\{ 4\omega_{ij}\xi_i\xi_j + \omega_{ii}\xi_j^2 + \xi_i^2\xi_j^2 + 2\omega_{ij}^2 + \omega_{ii}\omega_{jj} + \omega_{ii}\xi_i^2 \right. \\
& + \sqrt{\frac{2}{\pi}}[4\delta_i\omega_{ij}\xi_j + 2\delta_j\omega_{ii}\xi_j + 2\delta_i\xi_i\xi_j^2 + \delta_j\xi_i^2\xi_j + 4\delta_i\omega_{ij}\xi_i + \\
& \left. 2\delta_i\omega_{ij}\xi_i + \delta_i\delta_j\xi_i\xi_j - 2\delta_i^2\delta_j\xi_j - 2\delta_i\delta_j^2\xi_i] \right\} \\
& + 4 \sum_{j \neq i} \left\{ 6\omega_{j,j}\xi_j^2 + \xi_j^4 + 3\omega_{j,j}^2 + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\delta_j\xi_j[12\omega_{j,j} + 3\xi_j^2 + \delta_j\xi_j - 4\delta_j] \right\}
\end{aligned}$$

## 2.4 L'indice di Srivastava

L'indice di Srivastava è basato sul metodo delle componenti principali.

**Definizione** (Srivastava, 1984). Sia  $Y$  una variabile casuale multidimensionale con media  $\mu$  con matrice di varianze e covarianze  $\Sigma$ ; sia  $\Gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_p)$  una matrice ortogonale tale che  $\Gamma^\top \Sigma \Gamma = I_p(\lambda)$ , con  $I_p(\lambda) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$  gli autovalori della matrice  $\Sigma$ . Definiamo  $F = \Gamma Y$  e  $\theta = \Gamma \mu$ , allora l'indice di curtosi è pari a:

$$\beta_{2,p \times p} = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \left\{ \frac{E(F_i - \theta)^4}{\lambda_i^2} \right\} = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \left\{ \frac{E[\gamma_i^\top (Y - \mu)]^4}{\lambda_i^2} \right\}$$

Questo indice è basato sul momento centrato di quarto ordine  $E[\gamma_i^\top (Y - \mu)]^4$ . Per calcolarlo è invece possibile centrare la variabile ricodificando  $X = Y - \mu$  e calcolare il momento quarto non centrato per  $X$ . Utilizzando trasformazioni affini dei momenti si ottiene:

$$E[\gamma_i^\top X]^4 = (\gamma_i^\top \otimes \gamma_i^\top) M_4(\gamma_i \otimes \gamma_i)$$

Per calcolare questo indice per una variabile casuale Normale Asimmetrica multidimensionale è sufficiente sostituire il momento non centrato di quarto ordine con quello della Normale Asimmetrica multidimensionale (paragrafo

1.1) dopo aver centrato la variabile  $Y$ . Si ottiene quindi:

$$\begin{aligned}
E[\gamma_i^\top(X)]^4 &= (\gamma_i^\top \otimes \gamma_i^\top)M_4(\gamma_i \otimes \gamma_i) \\
&= (\gamma_i^\top \otimes \gamma_i^\top)(\Omega \otimes \xi \otimes \xi^\top + \xi \otimes \Omega \otimes \xi^\top + \text{vec}(\Omega) \otimes \xi^\top \otimes \xi^\top \\
&\quad + \xi \otimes \xi^\top \otimes \xi \otimes \xi^\top + \Omega \otimes \Omega + \text{vec}(\Omega)\text{vec}(\Omega)^\top + U_{p,p}(\Omega \otimes \Omega) \\
&\quad + \xi^\top \otimes \Omega \otimes \xi + \xi \otimes \xi \otimes \text{vec}(\Omega)^\top + \xi \otimes \xi^\top \otimes \Omega + \sqrt{\frac{2}{\pi}}[\delta \otimes \Omega \otimes \xi^\top \\
&\quad + \text{vec}(\Omega) \otimes \delta^\top \otimes \xi^\top + ((I_p \otimes \delta)\Omega) \otimes \xi^\top + \delta \otimes \xi^\top \otimes \xi \otimes \xi^\top \\
&\quad + \xi \otimes \delta^\top \otimes \xi \otimes \xi^\top + \xi \otimes \xi^\top \otimes \delta \otimes \xi^\top + \delta^\top \otimes \Omega \otimes \xi + \delta \otimes \text{vec}(\Omega)^\top \otimes \xi \\
&\quad + (\Omega(I_p \otimes \delta^\top)) \otimes \xi + \xi^\top \otimes \delta \otimes \Omega + \xi^\top \otimes (\text{vec}(\Omega)\delta^\top) + \xi^\top \otimes ((I_p \otimes \delta)\Omega) \\
&\quad + \xi \otimes \delta^\top \otimes \Omega + \xi \otimes \delta \otimes \text{vec}(\Omega)^\top + \xi \otimes (\Omega(I_p \otimes \delta^\top)) + \xi \otimes \xi^\top \otimes \delta \otimes \delta^\top \\
&\quad - \delta \otimes \delta^\top \otimes \delta \otimes \xi^\top - \delta^\top \otimes \delta \otimes \delta^\top \otimes \xi - \xi^\top \otimes \delta \otimes \delta^\top \otimes \delta \\
&\quad - \xi \otimes \delta^\top \otimes \delta \otimes \delta^\top])(\gamma_i \otimes \gamma_i)
\end{aligned}$$

## 2.5 L'indice di Mori-Rohatgi-Székeley

Mori e coautori (1993) introducono un ulteriore indice di curtosi multivariato in forma matriciale. L'indice utilizza una variabile  $Z$  standardizzata.

**Definizione** (Mori,Rohatgi e Székeley, 1993). Sia  $X$  una variabile casuale  $p$ -dimensionale con matrice di varianze e covarianze  $\Sigma$  non singolare. Definiamo  $Y = \Sigma^{-1}(X - E(X))$ , allora l'indice di curtosi è pari a:

$$K(X) = E(YY^\top YY^\top) - (p+2)I_p$$

L'indice può essere riscritto utilizzando il prodotto *star* come definito da Kollo (2008)

$$K(X) = I_p \star M_4(Y) - (p+2)I_p$$

Utilizzando il momento quarto calcolato da Genton e coautori (2001) descritto nel paragrafo 1.1 è possibile ottenere l'indice per la distribuzione Normale Asimmetrica multidimensionale come:

$$\begin{aligned}
K(X) = & I_p \star (\Omega \otimes \xi \otimes \xi^\top + \xi \otimes \Omega \otimes \xi^\top + \text{vec}(\Omega) \otimes \xi^\top \otimes \xi^\top \\
& + \xi \otimes \xi^\top \otimes \xi \otimes \xi^\top + \Omega \otimes \Omega + \text{vec}(\Omega)\text{vec}(\Omega)^\top + U_{p,p}(\Omega \otimes \Omega) \\
& + \xi^\top \otimes \Omega \otimes \xi + \xi \otimes \xi \otimes \text{vec}(\Omega)^\top + \xi \otimes \xi^\top \otimes \Omega + \sqrt{\frac{2}{\pi}}[\delta \otimes \Omega \otimes \xi^\top \\
& + \text{vec}(\Omega) \otimes \delta^\top \otimes \xi^\top + ((I_p \otimes \delta)\Omega) \otimes \xi^\top + \delta \otimes \xi^\top \otimes \xi \otimes \xi^\top \\
& + \xi \otimes \delta^\top \otimes \xi \otimes \xi^\top + \xi \otimes \xi^\top \otimes \delta \otimes \xi^\top + \delta^\top \otimes \Omega \otimes \xi + \delta \otimes \text{vec}(\Omega)^\top \otimes \xi \\
& + (\Omega(I_p \otimes \delta^\top)) \otimes \xi + \xi^\top \otimes \delta \otimes \Omega + \xi^\top \otimes (\text{vec}(\Omega)\delta^\top) + \xi^\top \otimes ((I_p \otimes \delta)\Omega) \\
& + \xi \otimes \delta^\top \otimes \Omega + \xi \otimes \delta \otimes \text{vec}(\Omega)^\top + \xi \otimes (\Omega(I_p \otimes \delta^\top)) + \xi \otimes \xi^\top \otimes \delta \otimes \delta^\top \\
& - \delta \otimes \delta^\top \otimes \delta \otimes \xi^\top - \delta^\top \otimes \delta \otimes \delta^\top \otimes \xi - \xi^\top \otimes \delta \otimes \delta^\top \otimes \delta \\
& - \xi \otimes \delta^\top \otimes \delta \otimes \delta^\top]) - (p+2)I_p
\end{aligned}$$

Come si può notare questo indice è calcolato utilizzando solo gli elementi diagonali della matrice dei momenti quarti non centrati  $M_4$ . Questo perché l'utilizzo della matrice identità  $I_p$  porta all'annullamento di tutti gli elementi non si trovano sulla diagonale di  $M_4$  e ad un "collasso" degli altri elementi in una matrice di dimensione  $p \times p$ .

## 2.6 L'indice di Kollo

Kollo (2008) parte dalla considerazione che l'indice di Mardia non tiene conto dei momenti misti di quarto ordine nel calcolo della curtosi. Secondo questo autore, infatti, per avere un indice che descriva completamente la curtosi della variabile casuale bisogna considerare anche i momenti misti. Per questo Kollo descrive un nuovo indice

**Definizione** (Kollo, 2008). Sia  $X$  una variabile casuale  $p$ -dimensionale e  $Y = \Sigma^{-1/2}(X - E(X))$  con  $\Sigma$  matrice di varianze e covarianze per la variabile casuale  $X$ , allora l'indice di curtosi può essere calcolato come:

$$B(X) = \sum_{i,j=1}^p E(Y_i Y_j) E(Y Y^\top)$$

Kollo dimostra inoltre che utilizzando il prodotto *star* questo prodotto può essere riscritto come

$$B(X) = \mathbf{1}_{p \times p} \star M_4(Y)$$

Come nei casi precedenti per la distribuzione Normale Asimmetrica multidimensionale è sufficiente sostituire la matrice  $M_4$  presentata nel paragrafo 1.1 calcolata da Genton e coautori ottenendo quindi:

$$\begin{aligned}
K(X) = & \mathbf{1}_{p \times p} \star (\Omega \otimes \xi \otimes \xi^\top + \xi \otimes \Omega \otimes \xi^\top + \text{vec}(\Omega) \otimes \xi^\top \otimes \xi^\top \\
& + \xi \otimes \xi^\top \otimes \xi \otimes \xi^\top + \Omega \otimes \Omega + \text{vec}(\Omega)\text{vec}(\Omega)^\top + U_{p,p}(\Omega \otimes \Omega) \\
& + \xi^\top \otimes \Omega \otimes \xi + \xi \otimes \xi \otimes \text{vec}(\Omega)^\top + \xi \otimes \xi^\top \otimes \Omega + \sqrt{\frac{2}{\pi}}[\delta \otimes \Omega \otimes \xi^\top \\
& + \text{vec}(\Omega) \otimes \delta^\top \otimes \xi^\top + ((I_p \otimes \delta)\Omega) \otimes \xi^\top + \delta \otimes \xi^\top \otimes \xi \otimes \xi^\top \\
& + \xi \otimes \delta^\top \otimes \xi \otimes \xi^\top + \xi \otimes \xi^\top \otimes \delta \otimes \xi^\top + \delta^\top \otimes \Omega \otimes \xi + \delta \otimes \text{vec}(\Omega)^\top \otimes \xi \\
& + (\Omega(I_p \otimes \delta^\top)) \otimes \xi + \xi^\top \otimes \delta \otimes \Omega + \xi^\top \otimes (\text{vec}(\Omega)\delta^\top) + \xi^\top \otimes ((I_p \otimes \delta)\Omega) \\
& + \xi \otimes \delta^\top \otimes \Omega + \xi \otimes \delta \otimes \text{vec}(\Omega)^\top + \xi \otimes (\Omega(I_p \otimes \delta^\top)) + \xi \otimes \xi^\top \otimes \delta \otimes \delta^\top \\
& - \delta \otimes \delta^\top \otimes \delta \otimes \xi^\top - \delta^\top \otimes \delta \otimes \delta^\top \otimes \xi - \xi^\top \otimes \delta \otimes \delta^\top \otimes \delta \\
& - \xi \otimes \delta^\top \otimes \delta \otimes \delta^\top])
\end{aligned}$$

Come per l'indice di Mori anche in questo caso avviene un "collasso" di alcuni elementi della matrice dei momenti quarti che non vengono più annullati ma sommati tra di loro. In questo modo quindi manteniamo nell'indice di curtosi anche l'informazione relativa ai momenti misti della variabile ottenendo comunque una matrice di dimensioni  $p \times p$ .

# Capitolo 3

## Implementazione R

Per poter procedere con il calcolo degli indici è stato deciso di creare un pacchetto R che possa contenere tutte le funzionalità utili al calcolo di questi. Il pacchetto in questione è stato chiamato `msnk`, un acronimo che sta per `Multivariate Skew Normal Kurtosis`, e contiene sia delle funzioni per il calcolo dei vari indici, esportate e disponibili all'utente, che delle funzioni interne di supporto al calcolo di questi. Il codice è sotto licenza GPLv3, quindi completamente Open Source e disponibile sul sito internet Github.

### 3.1 Funzioni interne

Prima di procedere alla descrizione del codice utilizzato per il calcolo degli indici è bene introdurre come sono invece state sviluppate le funzioni di supporto. Queste non sono state esportate per il libero utilizzo dell'utente in quanto ritenuto non necessario per lo scopo finale del pacchetto, si tratta solamente di funzioni interne utili al calcolo degli indici.

#### 3.1.1 Matrice di permutazione

Seguendo la formula A.5 è possibile definire una matrice di permutazione utilizzando le matrici elementari  $E_{ij}$  e il prodotto di Kronecker come definito nell'appendice A.2. Risulta quindi immediata l'implementazione di tale formula in R

```

1 perm<-function(n,m){
2   E <- matrix(rep(0,n*m),nrow = n,ncol = m)
3   U <- matrix(rep(0,(n*m)^2),nrow = n*m,ncol = n*m)
4   for(i in 1:n){
5     for(j in 1:m){
6       E[i,j]<- 1
7       U <- U + E%x%t(E)
8       E[i,j]<- 0
9     }
10  }
11  return(U)
12 }

```

### 3.1.2 Momento quarto

Si è deciso di implementare una funzione per il calcolo della matrice dei momenti quarti per la distribuzione Normale Asimmetrica Multidimensionale in quanto questa risulta essere utilizzata nel calcolo della maggior parte degli indici. Seguendo la formulazione fornita da Azzalini e Dalla Valle 1.5 è stato quindi implementato il calcolo del momento quarto non centrato.

```

1 M4 <- function(Omega,xi=rep(0,length(alpha)),alpha)
2   delta <-c((Omega%*%alpha)/sqrt(1+t(alpha)%*%Omega%*%alpha)
3     [1,1])
4   p <- nrow(Omega)
5   return(
6     Omega %x% xi %x% t(xi)      +
7     xi %x% Omega %x% t(xi)      +
8     c(Omega) %x% t(xi) %x% t(xi) +
9     xi %x% t(xi) %x% xi %x% t(xi)+
10    Omega %x% Omega              +
11    c(Omega) %*% t(c(Omega))      +
12    perm(p,p)                    %*%
13    (Omega %x% Omega)             +
14    t(xi) %x% Omega %x% xi        +
15    xi %x% xi %x% t(c(Omega))     +
16    xi %x% t(xi) %x% Omega        +

```



```

16     sqrt(2/pi)          *
17     (
18         delta %x% Omega %x% t(xi)          +
19         c(Omega) %x% t(delta) %x% t(xi)    +
20         ((diag(p)%x%delta)%*%Omega)%x% t(xi) +
21         delta%x%t(xi)%x%xi%x%t(xi)        +
22         xi%x%t(delta)%x%xi%x%t(xi)        +
23         xi%x%t(xi)%x%delta%x%t(xi)        +
24         t(delta)%x%Omega%x%xi              +
25         delta%x%t(c(Omega))%x%xi          +
26         (Omega%*(diag(p)%x%t(delta)))%x% xi +
27         t(xi)%x%delta%x%Omega              +
28         t(xi)%x%(c(Omega)%*%t(delta))     +
29         t(xi)%x%((diag(p)%x%delta)%*%Omega) +
30         xi%x%t(delta)%x%Omega              +
31         xi%x%delta%x%t(c(Omega))           +
32         xi%x%(Omega%*(diag(p)%x%t(delta))) +
33         xi%x%t(xi)%x%delta%x%t(delta)     -
34         delta%x%t(delta)%x%delta%x%t(xi)  -
35         t(delta)%x%delta%x%t(delta)%x%xi  -
36         t(xi)%x%delta%x%t(delta)%x%delta  -
37         xi%x%t(delta)%x%delta%x%t(delta)
38     )
39 )

```

### 3.1.3 Prodotto Star

Vista la mancanza di un operatore per il calcolo del prodotto Star introdotto nell'appendice A.3 è stato deciso di implementare anche questo in modo da semplificare la lettura e l'implementazione di altre parti del codice.

```

1 '%s%' <- function(A,B) {
2   if(typeof(A)!='matrix') A<-as.matrix(A)
3   if(typeof(B)!='matrix') B<-as.matrix(B)
4   p <- nrow(B)/nrow(A)
5   q <- ncol(B)/ncol(A)
6   res <- matrix(rep(0,p*q),nrow = p,ncol=q)
7   for(i in 0:(nrow(A)-1)){

```

```

8   for(j in 0:(ncol(A)-1)){
9     B.sub<-B[(1+i*p):((i+1)*p),(1+j*q):((j+1)*q)]
10    res<-res+A[i+1,j+1]*as.matrix(B.sub)
11  }
12 }
13 return(res)
14 }

```

In questo caso si è deciso di implementare un operatore e non una funzione per coerenza con la natura di operatore matematico dello stesso e per conformarlo ad altri operatori simili, come ad esempio il prodotto di Kronecker.

## 3.2 Funzioni esportate

Le funzioni riportate di seguito sono state esportate e rese accessibili all'utente in quanto rappresentano l'implementazione degli indici definiti fino ad ora per una distribuzione Normale Asimmetrica Multidimensionale.

### 3.2.1 Mardia e Malkovich Afifi

Essendo gli indici di Mardia e di Malkovich e Afifi definiti uno come il quadrato dell'altro è stato deciso di implementare un'unica funzione per il calcolo di questi indici scalari

```

1 univar.kurtosis<- function(Omega,alpha,type='mardia'){
2   O<-cov2cor(Omega)
3   mu<-sqrt(2/pi)*0**alpha**((1+t(alpha)**0**alpha)^(-1/2))
4   k<-t(mu)**solve(O)**mu
5   r <- 2*(pi-3)*(k)/(1+k)
6   if(type=='malkovich-afifi') r<-r^2
7   return(r)
8 }

```

Questa funzione prevede come parametri la matrice di varianza e covarianza  $\Omega$  e il parametro di asimmetria  $\alpha$ , oltre al tipo di indice, sia esso l'indice di Mardia o di Malkovich e Afifi. Per comodità di utilizzo di questa funzione sono stati quindi implementati due alias, la funzione `mardia(Omega, alpha)` e la funzione `malkaf(Omega, alpha)`, entrambe con parametri la matrice di varianza e covarianza  $\Omega$  e il parametro di asimmetria  $\alpha$

```
1 | mardia <- function(Omega, alpha) {
2 |   return(univar.kurtosis(Omega, alpha))
3 | }
```

```
1 | malkaf <- function(Omega, alpha) {
2 |   return(univar.kurtosis(Omega, alpha, 'malkovich-afifi'))
3 | }
```

Come già definito entrambi questi indici non necessitano del parametro di posizione della distribuzione  $\xi$  in quanto sono invarianti a traslazioni.

### 3.2.2 Indice direzionale

L'implementazione di questo indice, come i successivi, prevede invece come parametri di input la matrice di varianza e covarianza  $\Omega$ , il parametro di posizione  $\xi$  e quello di asimmetria  $\alpha$ . Il parametro  $\xi$  ha un valore di default uguale a  $0_p$ . Per l'indice viene ricalcolato il valore di  $\xi$  in quanto per definizione questo è calcolato su una variabile centrata  $X - \mu$ , di conseguenza il nuovo parametro di posizione per una variabile centrata nella media sarà uguale a  $-\mu$ .

```
1 | directional <- function(Omega, xi=rep(0, length(alpha)), alpha) {
2 |   p <- NROW(Omega)
3 |   O <- cov2cor(Omega)
4 |   delta <- 0%%alpha%%(1+t(alpha)%%0%%alpha)^(-1/2)
5 |   xi2 <- -(xi + sqrt(2/pi)*delta)
6 |   J24 <- 3/(p*(p+2)*(p+4))
7 |   J6 <- 15/(p*(p+2)*(p+4))
8 |   J2 <- 1/p
```

```

9  K<-(9*(2+3*p))/((p+2)*(p+4))
10 T <- rep(0,p)
11 for(i in 1:p){
12   T[i]<-J6*
13     (
14       6*0[i,i]*xi2[i]^2+xi2[i]^4+3*0[i,i]+sqrt(2/pi)*delta[
15         i]*xi2[i]*
16         (
17           12*0[i,i]+3*xi2[i]^2+delta[i]*xi2[i]-4*delta[i]
18         )
19     )
20   for(j in 1:p){
21     if(j!=i){
22       T[i]<-T[i]+
23         6*J24*(
24           4*0[i,j]*xi2[i]*xi2[j]+0[i,i]*xi2[i]^2+xi2[i]^2*
25             xi2[j]^2+
26           2*0[i,j]^2+0[i,i]*0[j,j]+0[i,i]*xi2[i]^2+sqrt(2/
27             pi)*
28           (
29             4*delta[i]*0[i,j]*xi2[j]+2*delta[j]*0[i,j]*xi2[
30               j]+2*delta[i]*xi2[i]*xi2[j]^2+
31             delta[j]*xi2[i]^2*xi2[j]+4*delta[j]*0[i,j]*xi2[
32               i]+2*delta[i]*0[i,j]*xi2[i]+
33             delta[j]*delta[i]*xi2[j]*xi2[i]-2*delta[i]^2*
34               delta[j]*xi2[j]-2*delta[i]*delta[j]^2*xi2[i]
35           )
36         )+J24*(
37           6*0[j,j]*xi2[j]^2+xi2[j]^4+3*0[j,j]+sqrt(2/pi)*
38             delta[j]*xi2[j]*
39           (12*0[j,j]+3*xi2[j]^2+delta[j]*xi2[j]-4*delta[j]
40         )
41       )
42     }
43   }
44   T[i]<-T[i]-J2*K
45 }
46 return(list("T"=T,"Q"=t(T)%%solve(0)%%T))

```

41 | }

Il valore di ritorno della funzione è una lista contenente il valore  $T$  come definito da 2.3 e il valore  $Q$  da 2.3

### 3.2.3 Srivastava

L'indice di Srivastava è stato implementato come segue secondo la formula (2.4)

```

1 | srivastava <- function(Omega, xi=rep(0, length(alpha)), alpha){
2 |   p <- nrow(Omega)
3 |   O <- cov2cor(Omega)
4 |   delta <- 0%%alpha%%(1+t(alpha)%%0%%alpha)^(-1/2)
5 |   xi <- xi+sqrt(2/pi)*delta
6 |   m <- M4(0, -xi, alpha)
7 |   dec <- eigen(O)
8 |   E<- apply(
9 |     X = dec$vectors,
10 |     FUN = function(gamma){
11 |       (t(gamma)%x%t(gamma))%%m%%(gamma%x%gamma)
12 |     },
13 |     MARGIN = 2)
14 |
15 |   return(1/p*sum(E/dec$values^2))
16 | }
```

### 3.2.4 Mori-Rohatgi-Székeley

L'indice di Mori Rohatgi e Székeley è stato implementato seguendo la formulazione 2.5

```

1 | mori.rohatgi.szkeley <- function(Omega, xi=rep(0, length(alpha
2 |   )), alpha){
3 |   O <- cov2cor(Omega)
4 |   p<- nrow(Omega)
```

```

4 | Ip<- diag(p)
5 | delta <- 0%%alpha%%(1+t(alpha)%%0%%alpha)^(-1/2)
6 | xi <- xi+sqrt(2/pi)*delta
7 | K<-Ip%%s%%M4(0,-xi,alpha)-(p+2)*diag(p)
8 | return(list(K=K,scalar=sum(diag(K))))
9 | }

```

Il valore di ritorno di questa funzione è una lista che contiene la matrice  $K(X)$  e  $tr(K(X))$  misura scalare associata alla misura di curtosi di Mori Rohatgi e Székeley.

### 3.2.5 Kollo

L'indice di Kollo è stato implementato seguendo la formulazione 2.6

```

1 | kollo <- function(Omega,xi=rep(0,length(alpha)),alpha){
2 |   O <- cov2cor(Omega)
3 |   p<- nrow(Omega)
4 |   One.p<- matrix(rep(1,p^2),p,p)
5 |   delta <- 0%%alpha%%(1+t(alpha)%%0%%alpha)^(-1/2)
6 |   xi <- xi+sqrt(2/pi)*delta
7 |   K<-One.p%%s%%M4(0,-xi,alpha)
8 |   K<-K-p*diag(p)-2*One.p
9 |
10 |   return(list(K=K,scalar=sqrt(sum(diag(K%%t(K)))))
11 |
12 | }

```

Come per l'indice di Mori anche questa funzione ha come valore di ritorno una lista contenente la matrice  $B(X)$  e  $\|B(X)\| = \sqrt{tr[B^T(X)B(X)]}$  misura scalare di curtosi associata all'indice di Kollo e che corrisponde all'indice di Koziol.

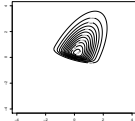
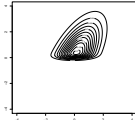
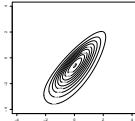
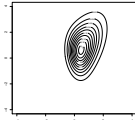
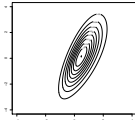
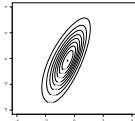
## Capitolo 4

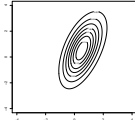
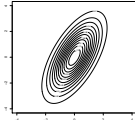
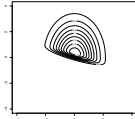
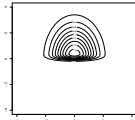
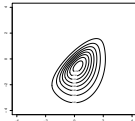
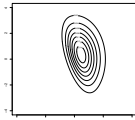
# Confronto tra le misure di Curtosi

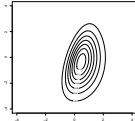
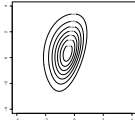
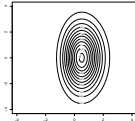
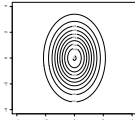
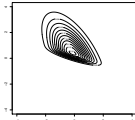
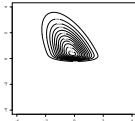
Basandosi sulle misure di curtosi introdotte nel capitolo 2 è quindi possibile confrontarle tra di loro in modo da capire quali caratteristiche della distribuzione siano colte dai vari indici. Le tabelle 1 e 2 di seguito presentano i valori calcolati per gli indici al variare di  $\Omega$  e  $\alpha$  per distribuzioni normali asimmetriche rispettivamente bivariate e trivariate. Come già detto gli indici di Mardia e Malkovich-Afifi presentano un indice globale di curtosi per la distribuzione. Si può notare che l'indice risulta essere sempre positivo a conferma dei risultati teorici (Azzalini, 2005) indicando una distribuzione leptocurtica o al più normocurtica, questo perché il parametro di forma oltre ad introdurre asimmetria provoca un innalzamento della curva rendendo le code più leggere. Si può notare anche che il campo di variazione di questi indici è molto ristretto per le distribuzioni prese in esame. L'indice di Srivastava ( $\beta_{2,p \times p}$ ) invece ha il comportamento più inusuale. Secondo la formulazione dell'indice, infatti, questo dovrebbe essere equivalente all'indice di Mardia non centrato calcolato sui dati trasformati utilizzando il metodo delle componenti principali. Come previsto per una normale multidimensionale questo indice vale 3, mentre sembra che in presenza di asimmetria questo tenda a decrescere invece che a crescere, indicando una distribuzione quindi platicurtica che non coincide con i risultati teorici e con gli indici precedenti. L'indice direzionale (Zanotto, 2012) invece risulta influenzato dalla correlazione presente tra le variabili. Questo infatti è definito come indice di

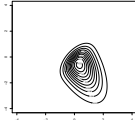
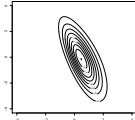
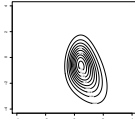
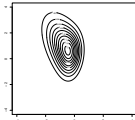
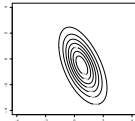
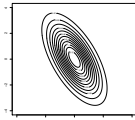
Mardia per le distribuzioni marginali. Osservando i valori dell'indice ottenuti per le distribuzioni che presentano covarianza non nulla ma con parametro di asimmetria  $\alpha = 0_p$  questi risultano non normocurtiche, mentre quando la covarianza è nulla si ottiene un indice pari a zero come atteso per una distribuzione normale. Questa considerazione resta a quanto pare valida per gli indici di Mori-Rohatgi-Székeley e Kollo in quanto risultano anch'essi non nulli per le distribuzioni che presentano covarianza non nulla. Si può notare inoltre come i valori esterni alla diagonale principale per l'indice di Mori siano influenzati sia dalla presenza di correlazione che dall'asimmetria, confrontando il valore dell'indice alla riga 26 con quello alla riga 18 della prima tabella è possibile notare come, nonostante in entrambi i casi il parametro di asimmetria  $\alpha$  non influenzi entrambe le direzioni, i valori esterni alla diagonale risultino non nulli nel caso 18 a differenza del 26. Questo indica come i valori esterni alla diagonale siano influenzati sia dalla covarianza che dall'asimmetria. Inoltre si può notare confrontando la riga 2 e la riga 18 della prima tabella come questi valori cambino di segno in accordo con quello di  $\Omega_{12}$ , il comportamento è analogo anche per l'indice di Kollo. Confrontando inoltre 28,29 e 30, essendo questi indici non influenzati dalla correlazione in quanto nulla si può notare come i valori esterni alla diagonale principale cambino segno in accordo con l'inverso del segno complessivo di  $\alpha$ , nel caso bivariato infatti quando si ha segno di tutti gli  $\alpha_i$  concorde si ottiene una compressione della distribuzione verso il primo o il terzo quadrante e un valore negativo dei valori di  $K(X)$  e  $B(X)$  esterni alla diagonale principale, al contrario se i segni sono discordi la compressione avviene verso il secondo o il quarto quadrante, e si ottengono valori positivi per  $K(X)$  e  $B(X)$

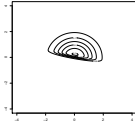
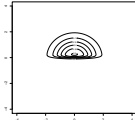
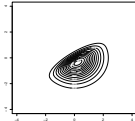
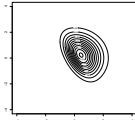
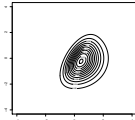
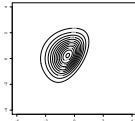


#	$\Omega$	$\alpha$	$\gamma_{2,p}$	$(\beta_2^*)^2$	$\beta_{2,p \times p}$	$T_{n,r}$	$Q$	$K(X)$	$B(X)$	
1		$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2.5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 10 \end{bmatrix}$	0.11	0.012	2	$\begin{bmatrix} -0.35 \\ -0.25 \end{bmatrix}$	0.12	$\begin{bmatrix} -1.6 & 1.7 \\ 1.7 & -1.7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.074 & 1.3 \\ 1.3 & 0.091 \end{bmatrix}$
2		$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2.5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}$	0.11	0.012	1.9	$\begin{bmatrix} -0.37 \\ -0.24 \end{bmatrix}$	0.13	$\begin{bmatrix} -1.4 & 1.7 \\ 1.7 & -1.8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.19 & 1.3 \\ 1.3 & -2.2e-05 \end{bmatrix}$
3		$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2.5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$	0.099	0.0098	2	$\begin{bmatrix} 0.0065 \\ -0.44 \end{bmatrix}$	0.33	$\begin{bmatrix} 0.54 & 3.3 \\ 3.3 & -0.75 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4.4 & 4.4 \\ 4.4 & 2 \end{bmatrix}$
4		$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2.5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$	0.1	0.01	2.1	$\begin{bmatrix} -0.28 \\ -0.32 \end{bmatrix}$	0.11	$\begin{bmatrix} -1.8 & 1.6 \\ 1.6 & -1.6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.041 & 1.4 \\ 1.4 & -0.057 \end{bmatrix}$
5		$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2.5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$	0.088	0.0078	2	$\begin{bmatrix} -0.026 \\ -0.0061 \end{bmatrix}$	0.00083	$\begin{bmatrix} -1.1 & 2.9 \\ 2.9 & 0.22 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.2 & 3.5 \\ 3.5 & 3.6 \end{bmatrix}$
6		$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2.5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$	0.088	0.0078	2	$\begin{bmatrix} -0.66 \\ -0.14 \end{bmatrix}$	0.56	$\begin{bmatrix} -1.1 & 2.9 \\ 2.9 & 0.22 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.2 & 3.5 \\ 3.5 & 3.6 \end{bmatrix}$

#	$\Omega$	$\alpha$	$\gamma_{2,p}$	$(\beta_2^*)^2$	$\beta_{2,p \times p}$	$T_{n,r}$	Q	$K(X)$	$B(X)$	
7		$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2.5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	0.068	0.0047	2.2	$\begin{bmatrix} -0.15 \\ -0.16 \end{bmatrix}$	0.03	$\begin{bmatrix} -1.3 & 2.2 \\ 2.2 & -0.6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.81 & 2.4 \\ 2.4 & 1.8 \end{bmatrix}$
8		$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2.5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	0	0	3	$\begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.3 \end{bmatrix}$	0.11	$\begin{bmatrix} 0.8 & 3.8 \\ 3.8 & 0.8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4.6 & 5.4 \\ 5.4 & 4.6 \end{bmatrix}$
9		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2.5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 10 \end{bmatrix}$	0.11	0.012	2.1	$\begin{bmatrix} -0.088 \\ -0.0057 \end{bmatrix}$	0.0077	$\begin{bmatrix} -0.69 & -0.3 \\ -0.3 & -2.2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1.4 & -1.4 \\ -1.4 & -2.1 \end{bmatrix}$
10		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2.5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}$	0.11	0.012	2.2	$\begin{bmatrix} -0.098 \\ -0.018 \end{bmatrix}$	0.0099	$\begin{bmatrix} -0.63 & 0 \\ 0 & -2.2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.63 & -1.3 \\ -1.3 & -2.2 \end{bmatrix}$
11		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2.5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$	0.11	0.011	1.8	$\begin{bmatrix} -0.18 \\ -0.8 \end{bmatrix}$	0.67	$\begin{bmatrix} -1.1 & 0.74 \\ 0.74 & -1.7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.00032 & 0.39 \\ 0.39 & -1.3 \end{bmatrix}$
12		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2.5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$	0.098	0.0096	1.9	$\begin{bmatrix} -0.022 \\ -0.055 \end{bmatrix}$	0.0036	$\begin{bmatrix} -1.8 & -0.65 \\ -0.65 & -0.86 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2.1 & -1.2 \\ -1.2 & -1.9 \end{bmatrix}$

#	$\Omega$	$\alpha$	$\gamma_{2,p}$	$(\beta_2^*)^2$	$\beta_{2,p \times p}$	$T_{n,r}$	$Q$	$K(X)$	$B(X)$	
13		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2.5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$	0.098	0.0096	1.9	$\begin{bmatrix} -0.044 \\ -0.16 \end{bmatrix}$	0.029	$\begin{bmatrix} -1.8 & 0.65 \\ 0.65 & -0.86 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1.6 & 0.088 \\ 0.088 & 0.17 \end{bmatrix}$
14		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2.5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$	0.098	0.0096	1.9	$\begin{bmatrix} -0.89 \\ -0.23 \end{bmatrix}$	0.84	$\begin{bmatrix} -1.8 & 0.65 \\ 0.65 & -0.86 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1.6 & 0.088 \\ 0.088 & 0.17 \end{bmatrix}$
15		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2.5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	0.068	0.0047	2.3	$\begin{bmatrix} -0.1 \\ -0.068 \end{bmatrix}$	0.015	$\begin{bmatrix} -1.7 & 0 \\ 0 & -0.32 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1.7 & -0.64 \\ -0.64 & -0.32 \end{bmatrix}$
16		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2.5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	0	0	3	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	0	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
17		$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2.5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 10 \end{bmatrix}$	0.11	0.012	1.7	$\begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.46 \end{bmatrix}$	0.62	$\begin{bmatrix} -0.99 & -1.8 \\ -1.8 & -1.8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2.9 & -2.2 \\ -2.2 & -3.5 \end{bmatrix}$
18		$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2.5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}$	0.11	0.012	1.9	$\begin{bmatrix} 0.075 \\ 0.52 \end{bmatrix}$	0.53	$\begin{bmatrix} -1.4 & -1.7 \\ -1.7 & -1.8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2.9 & -2.1 \\ -2.1 & -3.6 \end{bmatrix}$

#	$\Omega$	$\alpha$	$\gamma_{2,p}$	$(\beta_2^*)^2$	$\beta_{2,p \times p}$	$T_{n,r}$	$Q$	$K(X)$	$B(X)$	
19		$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2.5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$	0.11	0.011	2.2	$\begin{bmatrix} 0.38 \\ -0.57 \end{bmatrix}$	0.32	$\begin{bmatrix} -1.7 & -1.7 \\ -1.7 & -1.7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3.3 & -1.8 \\ -1.8 & -3.4 \end{bmatrix}$
20		$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2.5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$	0.088	0.0078	2	$\begin{bmatrix} 0.31 \\ 0.33 \end{bmatrix}$	0.55	$\begin{bmatrix} -1.1 & -2.9 \\ -2.9 & 0.22 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3.5 & -2.3 \\ -2.3 & -3.1 \end{bmatrix}$
21		$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2.5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$	0.1	0.01	2.1	$\begin{bmatrix} 0.43 \\ -0.21 \end{bmatrix}$	0.19	$\begin{bmatrix} -1.8 & -1.6 \\ -1.6 & -1.6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3.5 & -1.9 \\ -1.9 & -3.2 \end{bmatrix}$
22		$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2.5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$	0.1	0.01	2.1	$\begin{bmatrix} -0.59 \\ 0.3 \end{bmatrix}$	0.35	$\begin{bmatrix} -1.8 & -1.6 \\ -1.6 & -1.6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3.5 & -1.9 \\ -1.9 & -3.2 \end{bmatrix}$
23		$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2.5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	0.068	0.0047	2.2	$\begin{bmatrix} 0.24 \\ 0.12 \end{bmatrix}$	0.18	$\begin{bmatrix} -1.3 & -2.2 \\ -2.2 & -0.6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3.4 & -2.1 \\ -2.1 & -3 \end{bmatrix}$
24		$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2.5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	0	0	3	$\begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.3 \end{bmatrix}$	0.49	$\begin{bmatrix} 0.8 & -3.8 \\ -3.8 & 0.8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3 & -2.2 \\ -2.2 & -3 \end{bmatrix}$

#	$\Omega$	$\alpha$	$\gamma_{2,p}$	$(\beta_2^*)^2$	$\beta_{2,p \times p}$	$T_{n,r}$	$Q$	$K(X)$	$B(X)$	
25		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 10 \end{bmatrix}$	0.11	0.012	2.1	$\begin{bmatrix} -0.088 \\ -0.0057 \end{bmatrix}$	0.0077	$\begin{bmatrix} -0.69 & -0.3 \\ -0.3 & -2.2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1.4 & -1.4 \\ -1.4 & -2.1 \end{bmatrix}$
26		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}$	0.11	0.012	2.2	$\begin{bmatrix} -0.098 \\ -0.018 \end{bmatrix}$	0.0099	$\begin{bmatrix} -0.63 & 0 \\ 0 & -2.2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.63 & -1.3 \\ -1.3 & -2.2 \end{bmatrix}$
27		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$	0.11	0.011	1.8	$\begin{bmatrix} -0.18 \\ -0.8 \end{bmatrix}$	0.67	$\begin{bmatrix} -1.1 & 0.74 \\ 0.74 & -1.7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.00032 & 0.39 \\ 0.39 & -1.3 \end{bmatrix}$
28		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$	0.098	0.0096	1.9	$\begin{bmatrix} -0.022 \\ -0.055 \end{bmatrix}$	0.0036	$\begin{bmatrix} -1.8 & -0.65 \\ -0.65 & -0.86 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2.1 & -1.2 \\ -1.2 & -1.9 \end{bmatrix}$
29		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$	0.098	0.0096	1.9	$\begin{bmatrix} -0.044 \\ -0.16 \end{bmatrix}$	0.029	$\begin{bmatrix} -1.8 & 0.65 \\ 0.65 & -0.86 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1.6 & 0.088 \\ 0.088 & 0.17 \end{bmatrix}$
30		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$	0.098	0.0096	1.9	$\begin{bmatrix} -0.89 \\ -0.23 \end{bmatrix}$	0.84	$\begin{bmatrix} -1.8 & 0.65 \\ 0.65 & -0.86 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1.6 & 0.088 \\ 0.088 & 0.17 \end{bmatrix}$

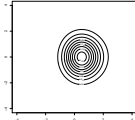
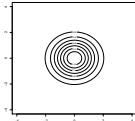
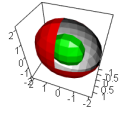
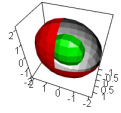
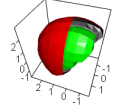
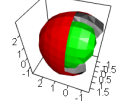
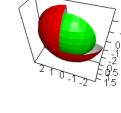
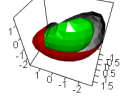
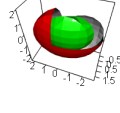
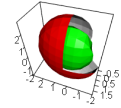
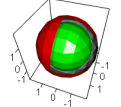
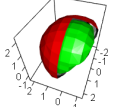
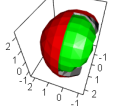
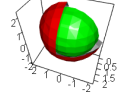
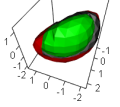
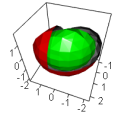
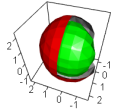
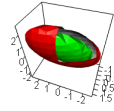
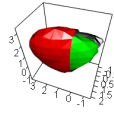
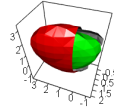
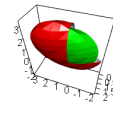
#	$\Omega$	$\alpha$	$\gamma_{2,p}$	$(\beta_2^*)^2$	$\beta_{2,p \times p}$	$T_{n,r}$	Q	$K(X)$	$B(X)$	
31		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	0.068	0.0047	2.3	$\begin{bmatrix} -0.1 \\ -0.068 \end{bmatrix}$	0.015	$\begin{bmatrix} -1.7 & 0 \\ 0 & -0.32 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1.7 & -0.64 \\ -0.64 & -0.32 \end{bmatrix}$
32		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	0	0	3	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	0	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Tabella 4.1: Indici di Curtosi scalari per la distribuzione Normale Asimmetrica Multidimensionale al variare di  $\Omega$  e  $\alpha$  ( $d = 2$ )

#		$\Omega$	$\alpha$	$\gamma_{2,p}$	$(\beta_2^*)^2$	$\beta_{2,p \times p}$	$T_{n,r}$	Q	$K(X)$	$B(X)$
1		$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2.5 & 0 \\ 0 & 0 & 2.5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	0	0	3	$\begin{bmatrix} 1.1e-16 \\ 1.1e-16 \\ 1.1e-16 \end{bmatrix}$	$3.7e-32$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
2		$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2.5 & 0 \\ 0 & 0 & 2.5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}$	0.11	0.012	2.1	$\begin{bmatrix} -0.055 \\ 0.12 \\ 0.12 \end{bmatrix}$	0.033	$\begin{bmatrix} -0.68 & -0.22 & -0.22 \\ -0.22 & -1.7 & -1.1 \\ -0.22 & -1.1 & -1.7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2 & -1.3 & -1.3 \\ -1.3 & -2.6 & -1.1 \\ -1.3 & -1.1 & -2.6 \end{bmatrix}$
3		$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2.5 & 0 \\ 0 & 0 & 2.5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$	0.11	0.011	2	$\begin{bmatrix} 0.006 \\ 0.085 \\ 0.085 \end{bmatrix}$	0.014	$\begin{bmatrix} -1 & -0.6 & -0.6 \\ -0.6 & -1.5 & -0.9 \\ -0.6 & -0.9 & -1.5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2.8 & -1.1 & -1.1 \\ -1.1 & -2.7 & -0.96 \\ -1.1 & -0.96 & -2.7 \end{bmatrix}$
4		$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2.5 & 0 \\ 0 & 0 & 2.5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	0.11	0.012	2.5	$\begin{bmatrix} 0.21 \\ -0.045 \\ -0.045 \end{bmatrix}$	0.047	$\begin{bmatrix} -2.8 & 0 & 0 \\ 0 & -0.63 & 0 \\ 0 & 0 & -0.63 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2.8 & -1.3 & -1.3 \\ -1.3 & -0.63 & 0 \\ -1.3 & 0 & -0.63 \end{bmatrix}$
5		$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2.5 & 0 \\ 0 & 0 & 2.5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix}$	0.11	0.011	2	$\begin{bmatrix} -0.065 \\ -0.13 \\ -0.13 \end{bmatrix}$	0.038	$\begin{bmatrix} -1 & 0.6 & 0.6 \\ 0.6 & -1.5 & -0.9 \\ 0.6 & -0.9 & -1.5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.38 & -0.13 & -0.13 \\ -0.13 & -1.9 & -1.5 \\ -0.13 & -1.5 & -1.9 \end{bmatrix}$
6		$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2.5 & 0 \\ 0 & 0 & 2.5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$	0.1	0.01	2.2	$\begin{bmatrix} 0.1 \\ -0.05 \\ -0.05 \end{bmatrix}$	0.016	$\begin{bmatrix} -2 & 0.72 & 0.72 \\ 0.72 & -0.91 & -0.36 \\ 0.72 & -0.36 & -0.91 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1.1 & 0.55 & 0.55 \\ 0.55 & -0.27 & -0.27 \\ 0.55 & -0.27 & -0.27 \end{bmatrix}$

#	$\Omega$	$\alpha$	$\gamma_{2,p}$	$(\beta_2^*)^2$	$\beta_{2,p \times p}$	$T_{n,r}$	Q	$K(X)$	$B(X)$	
7		$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2.5 & 0 \\ 0 & 0 & 2.5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	0.1	0.01	2.2	$\begin{bmatrix} 0.12 \\ -0.0032 \\ -0.0032 \end{bmatrix}$	0.014	$\begin{bmatrix} -2 & -0.72 & -0.72 \\ -0.72 & -0.91 & -0.36 \\ -0.72 & -0.36 & -0.91 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2.5 & -1.3 & -1.3 \\ -1.3 & -2.5 & -1 \\ -1.3 & -1 & -2.5 \end{bmatrix}$
8		$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	0	0	3	$\begin{bmatrix} 1.1e-16 \\ 1.1e-16 \\ 1.1e-16 \end{bmatrix}$	$3.7e-32$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
9		$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}$	0.11	0.012	2.1	$\begin{bmatrix} -0.055 \\ 0.12 \\ 0.12 \end{bmatrix}$	0.033	$\begin{bmatrix} -0.68 & -0.22 & -0.22 \\ -0.22 & -1.7 & -1.1 \\ -0.22 & -1.1 & -1.7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2 & -1.3 & -1.3 \\ -1.3 & -2.6 & -1.1 \\ -1.3 & -1.1 & -2.6 \end{bmatrix}$
10		$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$	0.11	0.011	2	$\begin{bmatrix} 0.006 \\ 0.085 \\ 0.085 \end{bmatrix}$	0.014	$\begin{bmatrix} -1 & -0.6 & -0.6 \\ -0.6 & -1.5 & -0.9 \\ -0.6 & -0.9 & -1.5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2.8 & -1.1 & -1.1 \\ -1.1 & -2.7 & -0.96 \\ -1.1 & -0.96 & -2.7 \end{bmatrix}$
11		$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	0.11	0.012	2.5	$\begin{bmatrix} 0.21 \\ -0.045 \\ -0.045 \end{bmatrix}$	0.047	$\begin{bmatrix} -2.8 & 0 & 0 \\ 0 & -0.63 & 0 \\ 0 & 0 & -0.63 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2.8 & -1.3 & -1.3 \\ -1.3 & -0.63 & 0 \\ -1.3 & 0 & -0.63 \end{bmatrix}$
12		$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix}$	0.11	0.011	2	$\begin{bmatrix} -0.065 \\ -0.13 \\ -0.13 \end{bmatrix}$	0.038	$\begin{bmatrix} -1 & 0.6 & 0.6 \\ 0.6 & -1.5 & -0.9 \\ 0.6 & -0.9 & -1.5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.38 & -0.13 & -0.13 \\ -0.13 & -1.9 & -1.5 \\ -0.13 & -1.5 & -1.9 \end{bmatrix}$



#	$\Omega$	$\alpha$	$\gamma_{2,p}$	$(\beta_2^*)^2$	$\beta_{2,p \times p}$	$T_{n,r}$	Q	$K(X)$	$B(X)$	
13		$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$	0.1	0.01	2.2	$\begin{bmatrix} 0.1 \\ -0.05 \\ -0.05 \end{bmatrix}$	0.016	$\begin{bmatrix} -2 & 0.72 & 0.72 \\ 0.72 & -0.91 & -0.36 \\ 0.72 & -0.36 & -0.91 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1.1 & 0.55 & 0.55 \\ 0.55 & -0.27 & -0.27 \\ 0.55 & -0.27 & -0.27 \end{bmatrix}$
14		$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	0.1	0.01	2.2	$\begin{bmatrix} 0.12 \\ -0.0032 \\ -0.0032 \end{bmatrix}$	0.014	$\begin{bmatrix} -2 & -0.72 & -0.72 \\ -0.72 & -0.91 & -0.36 \\ -0.72 & -0.36 & -0.91 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2.5 & -1.3 & -1.3 \\ -1.3 & -2.5 & -1 \\ -1.3 & -1 & -2.5 \end{bmatrix}$
15		$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2.5 & 1 \\ 1 & 1 & 2.5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	0	0	3	$\begin{bmatrix} 0.27 \\ 0.19 \\ 0.19 \end{bmatrix}$	0.076	$\begin{bmatrix} 1.6 & 4.9 & 4.9 \\ 4.9 & 1.1 & 3.6 \\ 4.9 & 3.6 & 1.1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 12 & 11 & 11 \\ 11 & 9.6 & 8.8 \\ 11 & 8.8 & 9.6 \end{bmatrix}$
16		$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2.5 & 1 \\ 1 & 1 & 2.5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}$	0.11	0.012	2.4	$\begin{bmatrix} -0.097 \\ -0.022 \\ -0.022 \end{bmatrix}$	0.015	$\begin{bmatrix} -1.8 & 2.2 & 2.2 \\ 2.2 & -1.9 & 1.4 \\ 2.2 & 1.4 & -1.9 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2.5 & 4.1 & 4.1 \\ 4.1 & 1.8 & 3.3 \\ 4.1 & 3.3 & 1.8 \end{bmatrix}$
17		$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2.5 & 1 \\ 1 & 1 & 2.5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$	0.11	0.012	2.5	$\begin{bmatrix} -0.069 \\ -0.042 \\ -0.042 \end{bmatrix}$	0.0047	$\begin{bmatrix} -1.8 & 2.2 & 2.2 \\ 2.2 & -1.9 & 1.4 \\ 2.2 & 1.4 & -1.9 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2.6 & 4.2 & 4.2 \\ 4.2 & 1.7 & 3.3 \\ 4.2 & 3.3 & 1.7 \end{bmatrix}$
18		$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2.5 & 1 \\ 1 & 1 & 2.5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	0.11	0.012	2.3	$\begin{bmatrix} 0.0025 \\ -0.13 \\ -0.13 \end{bmatrix}$	0.058	$\begin{bmatrix} -2 & 2.2 & 2.2 \\ 2.2 & -1.6 & 1.6 \\ 2.2 & 1.6 & -1.6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2.7 & 3.9 & 3.9 \\ 3.9 & 1.9 & 3.1 \\ 3.9 & 3.1 & 1.9 \end{bmatrix}$

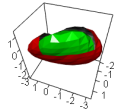
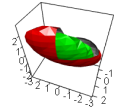
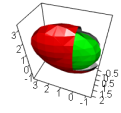
#	$\Omega$	$\alpha$	$\gamma_{2,p}$	$(\beta_2^*)^2$	$\beta_{2,p \times p}$	$T_{n,r}$	Q	$K(X)$	$B(X)$	
19		$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2.5 & 1 \\ 1 & 1 & 2.5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix}$	0.11	0.011	2.2	$\begin{bmatrix} -0.3 \\ -0.4 \\ -0.4 \end{bmatrix}$	0.24	$\begin{bmatrix} -0.7 & 2.6 & 2.6 \\ 2.6 & -1.7 & 1.3 \\ 2.6 & 1.3 & -1.7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4.8 & 4.6 & 4.6 \\ 4.6 & 2.1 & 2.8 \\ 4.6 & 2.8 & 2.1 \end{bmatrix}$
20		$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2.5 & 1 \\ 1 & 1 & 2.5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$	0.082	0.0066	2.5	$\begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.15 \\ 0.15 \end{bmatrix}$	0.061	$\begin{bmatrix} 0.8 & 4.8 & 4.8 \\ 4.8 & 1 & 3.6 \\ 4.8 & 3.6 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 10 & 11 & 11 \\ 11 & 9.6 & 8.9 \\ 11 & 8.9 & 9.6 \end{bmatrix}$
21		$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2.5 & 1 \\ 1 & 1 & 2.5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	0.1	0.011	2.4	$\begin{bmatrix} -0.04 \\ -0.084 \\ -0.084 \end{bmatrix}$	0.013	$\begin{bmatrix} -1.9 & 2.2 & 2.2 \\ 2.2 & -1.8 & 1.4 \\ 2.2 & 1.4 & -1.8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2.7 & 4.1 & 4.1 \\ 4.1 & 1.6 & 3 \\ 4.1 & 3 & 1.6 \end{bmatrix}$

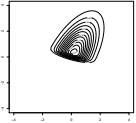
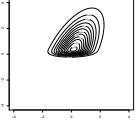
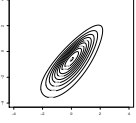
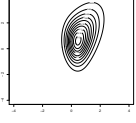
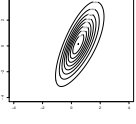
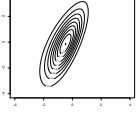
Tabella 4.2: Indici di Curtosi scalari per la distribuzione Normale Asimmetrica Multidimensionale al variare di  $\Omega$  e  $\alpha$  ( $d = 3$ )

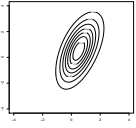
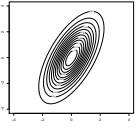
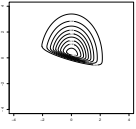
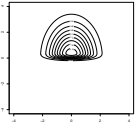
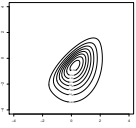
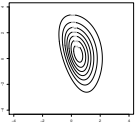
## 4.1 Performance delle misure di Curtosi

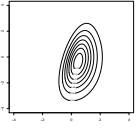
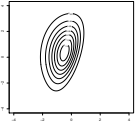
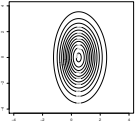
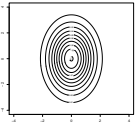
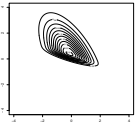
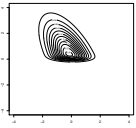
Vista l'impossibilità di confrontare gli indici descritti fino ad ora in modo diretto per ottenere delle misure nella stessa scala, e quindi confrontabili tra di loro, viene utilizzata la versione campionaria dell'indice come statistica test per saggiare un'ipotesi nulla di Normalità distributiva contro un'alternativa di distribuzione Normale Asimmetrica. In questo modo le statistiche ottenute verificano tutte lo stesso insieme di ipotesi, sono quindi calcolati il  $p$ -value e la potenza dei vari test; in questo modo è possibile quantificare la capacità di ogni indice di cogliere l'allontanamento dalla normalità distributiva.

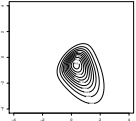
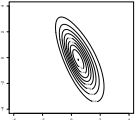
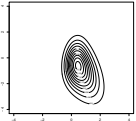
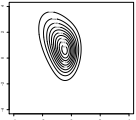
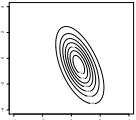
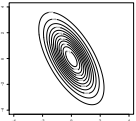
Prima di procedere è necessario quindi introdurre le versioni campionarie di questi indici. Per ottenere il valore campionario dell'indice è stato scelto di calcolare  $\hat{\Omega}, \hat{\xi}$  e  $\hat{\alpha}$  utilizzando il metodo della massima verosimiglianza sotto l'ipotesi di distribuzione Normale Asimmetrica.

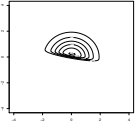
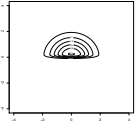
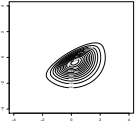
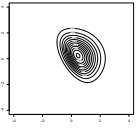
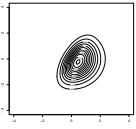
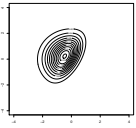
Per poter ottenere delle statistiche test per gli indici di Kollo, di Mori-Rohatgi-Székeley e per l'indice direzionale si è proceduto in modi differenti in quanto vengono definite in letteratura delle rappresentazioni scalari di questi. Per l'indice direzionale infatti, come già definito, è possibile calcolare il valore  $Q = T^T \Sigma^{-1} T$  introdotto per l'appunto per comodità di utilizzo dell'indice come statistica test. Si è deciso comunque di utilizzare anche  $\sum_{i=1}^p |T_{n,i}|$  e  $\max_{i=1}^p |T_{n,i}|$  in modo da poter confrontare le performance delle varie formulazioni. Per quanto riguarda l'indice di Mori-Rohatgi-Székeley è invece possibile calcolare la traccia della matrice  $tr(K(X)) = tr(E [XX^T XX^T] - (p+2)I_p)$  come misura scalare di curtosi. Sebbene sia possibile procedere in modo simile per l'indice di Kollo, la quantità proposta in questo caso è la norma della matrice calcolata come  $\|B(X)\| = \sqrt{tr [B^T(X)B(X)]}$  in quanto coincidente con la misura scalare di curtosi proposta da Koziol.

#		$\gamma_{2,p}$	$(\beta_2^*)^2$	$\beta_{2,p \times p}$	$T_{sup}$	$T_{sum}$	Q	$K(X)$	$B(X)$	
1		$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2.5 \\ 2 \\ 10 \end{bmatrix}$	p-value : 0.99 power : 0.47	0.99 0.47	0.38 0.5	0.43 0.5	0.39 0.51	0.41 0.51	0 0.45	0.001 0.5
2		$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2.5 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}$	p-value : 0.99 power : 0.48	0.99 0.48	0.14 0.52	0.48 0.51	0.42 0.51	0.46 0.51	0.007 0.42	0.001 0.5
3		$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2.5 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$	p-value : 0.8 power : 0.5	0.8 0.5	0.31 0.5	0.53 0.43	0.27 0.41	0.54 0.45	0.99 0.66	0.99 0.67
4		$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2.5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$	p-value : 0.91 power : 0.48	0.91 0.48	0.62 0.49	0.37 0.56	0.38 0.54	0.38 0.53	0 0.38	0.006 0.5
5		$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2.5 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$	p-value : 0.41 power : 0.46	0.41 0.46	0.26 0.44	0.016 0.12	0.014 0.12	0.014 0.08	0.91 0.58	0.94 0.58
6		$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2.5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$	p-value : 0.41 power : 0.47	0.41 0.47	0.25 0.45	0.56 0.48	0.54 0.48	0.58 0.48	0.92 0.58	0.94 0.59

#		$\gamma_{2,p}$	$(\beta_2^*)^2$	$\beta_{2,p \times p}$	$T_{sup}$	$T_{sum}$	Q	$K(X)$	$B(X)$
7	 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2.5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	p-value : 0.068 power : 0.36	0.068	0.91	0.18	0.19	0.18	0.68	0.59
8	 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2.5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	p-value : 0 power : 0	0	1	0.34	0.39	0.38	1	1
9	 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2.5 \\ 2 \\ 10 \end{bmatrix}$	p-value : 0.99 power : 0.43	0.99	0.65	0.13	0.046	0.072	0.39	0.81
10	 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2.5 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}$	p-value : 0.99 power : 0.43	0.99	0.89	0.16	0.078	0.1	0.4	0.72
11	 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2.5 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$	p-value : 0.95 power : 0.49	0.95	0.043	0.65	0.65	0.63	0.48	0.15
12	 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2.5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$	p-value : 0.75 power : 0.44	0.75	0.26	0.032	0.027	0.028	0.54	0.81

#		$\gamma_{2,p}$	$(\beta_2^*)^2$	$\beta_{2,p \times p}$	$T_{sup}$	$T_{sum}$	Q	$K(X)$	$B(X)$	
13		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2.5 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$	p-value : 0.77 power : 0.46	0.77 0.46	0.26 0.064	0.34 0.51	0.26 0.51	0.31 0.51	0.53 0.49	0.18 0.35
14		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2.5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$	p-value : 0.76 power : 0.46	0.76 0.46	0.25 0.061	0.71 0.5	0.69 0.5	0.7 0.5	0.56 0.49	0.2 0.36
15		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2.5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	p-value : 0.1 power : 0.35	0.1 0.35	0.95 0.83	0.18 0.4	0.19 0.36	0.18 0.35	0.92 0.74	0.32 0.5
16		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2.5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	p-value : 0 power : 0	0 0	1 1	0 0	0 0	0 0	1 1	0 0
17		$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2.5 \\ 2 \\ 10 \end{bmatrix}$	p-value : 0.99 power : 0.43	0.99 0.43	0.005 0.51	0.58 0.5	0.65 0.5	0.76 0.5	0.27 0.49	0.36 0.5
18		$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2.5 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}$	p-value : 1 power : 0.44	1 0.44	0.14 0.5	0.7 0.49	0.47 0.51	0.68 0.5	0.004 0.43	0.27 0.49

#		$\gamma_{2,p}$	$(\beta_2^*)^2$	$\beta_{2,p \times p}$	$T_{sup}$	$T_{sum}$	Q	$K(X)$	$B(X)$
19	 $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2.5 \end{bmatrix}$	p-value : 0.98 power : 0.47	0.98 0.47	0.73 0.52	0.79 0.49	0.95 0.48	0.5 0.48	0 0.48	0.24 0.49
20	 $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2.5 \end{bmatrix}$	p-value : 0.42 power : 0.46	0.42 0.46	0.26 0.45	0.31 0.38	0.59 0.49	0.73 0.45	0.92 0.61	0.42 0.39
21	 $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2.5 \end{bmatrix}$	p-value : 0.89 power : 0.46	0.89 0.46	0.61 0.49	0.51 0.5	0.57 0.51	0.27 0.47	0 0.36	0.2 0.5
22	 $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2.5 \end{bmatrix}$	p-value : 0.87 power : 0.46	0.87 0.46	0.62 0.48	0.8 0.51	0.9 0.51	0.51 0.51	0 0.39	0.19 0.52
23	 $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2.5 \end{bmatrix}$	p-value : 0.074 power : 0.36	0.074 0.36	0.88 0.57	0.11 0.51	0.075 0.36	0.26 0.57	0.66 0.49	0.18 0.52
24	 $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2.5 \end{bmatrix}$	p-value : 0 power : 0	0 0	1 1	0.25 0.84	0.51 0.99	0.69 0.99	1 1	0.13 0.026

#		$\gamma_{2,p}$	$(\beta_2^*)^2$	$\beta_{2,p \times p}$	$T_{sup}$	$T_{sum}$	Q	$K(X)$	$B(X)$	
25		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & \\ 10 & \end{bmatrix}$	p-value : 0.99 power : 0.41	0.99 0.41	0.68 1	0.13 0.55	0.05 0.55	0.087 0.55	0.42 0.46	0.79 0.45
26		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & \\ 10 & \end{bmatrix}$	p-value : 0.99 power : 0.42	0.99 0.42	0.86 1	0.16 0.51	0.082 0.51	0.11 0.51	0.37 0.81	0.72 0.49
27		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & \\ -3 & \end{bmatrix}$	p-value : 0.95 power : 0.47	0.95 0.47	0.043 0	0.68 0.5	0.67 0.49	0.66 0.5	0.43 0.48	0.15 0.29
28		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & \\ 1 & \end{bmatrix}$	p-value : 0.76 power : 0.47	0.76 0.47	0.26 0.085	0.033 0.53	0.033 0.51	0.03 0.51	0.56 0.47	0.83 0.47
29		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & \\ -1 & \end{bmatrix}$	p-value : 0.76 power : 0.45	0.76 0.45	0.27 0.085	0.32 0.53	0.23 0.54	0.29 0.52	0.56 0.47	0.22 0.37
30		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -2 & \\ 1 & \end{bmatrix}$	p-value : 0.75 power : 0.47	0.75 0.47	0.23 0.054	0.72 0.5	0.7 0.5	0.7 0.51	0.57 0.48	0.21 0.38



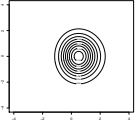
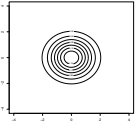
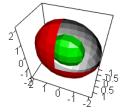
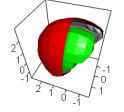
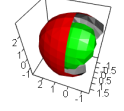
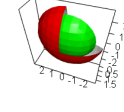
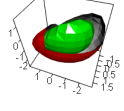
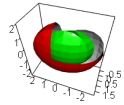
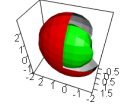
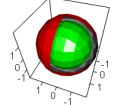
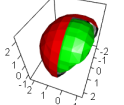
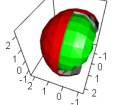
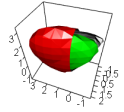
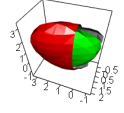
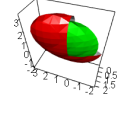
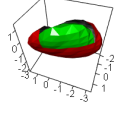
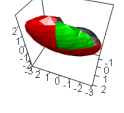
#		$\gamma_{2,p}$	$(\beta_2^*)^2$	$\beta_{2,p \times p}$	$T_{sup}$	$T_{sum}$	Q	$K(X)$	$B(X)$
31	 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	p-value : 0.085 power : 0.37	0.085 0.37	0.95 0.82	0.14 0.4	0.15 0.36	0.14 0.35	0.94 0.72	0.35 0.49
32	 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	p-value : 0 power : 0	0 0	1 1	0 0	0 0	0 0	1 1	0 0

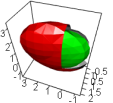
Tabella 4.3: P-value e potenza del test al variare di  $\Omega$  e  $\alpha$  ( $d = 2$ )

#		$\gamma_{2,p}$	$(\beta_2^*)^2$	$\beta_{2,p \times p}$	$T_{sup}$	$T_{sum}$	Q	$K(X)$	$B(X)$
1		$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2.5 & 0 \\ 0 & 0 & 2.5 \end{bmatrix}$	p-value : 0 power : 0	0 0	1 1	0 0	0 0	1 1	0 0
		$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$							
2		$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2.5 & 0 \\ 0 & 0 & 2.5 \end{bmatrix}$	p-value : 0.98 power : 0.87	0.98 0.87	0 0.063	0.35 0.25	0.4 0.29	0.88 0.68	0.57 0.19
		$\begin{bmatrix} 2 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}$							
3		$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2.5 & 0 \\ 0 & 0 & 2.5 \end{bmatrix}$	p-value : 0.86 power : 0.79	0.86 0.79	0 0.011	0.2 0.13	0.24 0.15	0.9 0.75	0.66 0.13
		$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$							
4		$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2.5 & 0 \\ 0 & 0 & 2.5 \end{bmatrix}$	p-value : 0.95 power : 0.91	0.95 0.91	0.97 1	0.59 0.74	0.5 0.55	0.91 0.91	0.32 0.24
		$\begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$							
5		$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2.5 & 0 \\ 0 & 0 & 2.5 \end{bmatrix}$	p-value : 0.88 power : 0.79	0.88 0.79	0 0.012	0.4 0.3	0.48 0.44	0.9 0.73	0.25 0.17
		$\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix}$							

#		$\gamma_{2,p}$	$(\beta_2^*)^2$	$\beta_{2,p \times p}$	$T_{sup}$	$T_{sum}$	Q	$K(X)$	$B(X)$	
6		$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2.5 & 0 \\ 0 & 0 & 2.5 \end{bmatrix}$	p-value : 0.63 power : 0.61	0.63 0.61	0.009 0.078	0.29 0.42	0.33 0.45	0.26 0.34	0.94 0.86	0.016 0.004
		$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$								
7		$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2.5 & 0 \\ 0 & 0 & 2.5 \end{bmatrix}$	p-value : 0.64 power : 0.61	0.64 0.61	0.014 0.089	0.35 0.25	0.13 0.099	0.26 0.17	0.92 0.85	0.59 0.16
		$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$								
8		$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	p-value : 0 power : 0	0 0	1 1	0 0	0 0	0 0	1 1	0 0
		$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$								
9		$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	p-value : 0.97 power : 0.66	0.97 0.66	0.004 0.16	0.26 0.15	0.41 0.4	0.32 0.23	0.81 0.66	0.64 0.23
		$\begin{bmatrix} 2 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}$								
10		$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	p-value : 0.86 power : 0.63	0.86 0.63	0 0.035	0.15 0.098	0.21 0.15	0.19 0.16	0.84 0.69	0.72 0.18
		$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$								



#		$\gamma_{2,p}$	$(\beta_2^*)^2$	$\beta_{2,p \times p}$	$T_{sup}$	$T_{sum}$	Q	$K(X)$	$B(X)$	
16		$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2.5 & 1 \\ 1 & 1 & 2.5 \end{bmatrix}$	p-value : 1 power : 0.99	1 0.99	0.73 0.45	0.44 0.59	0.3 0.28	0.45 0.62	0 0.071	0.16 0.68
		$\begin{bmatrix} 2 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}$								
17		$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2.5 & 1 \\ 1 & 1 & 2.5 \end{bmatrix}$	p-value : 0.98 power : 0.9	0.98 0.9	0.92 0.94	0.25 0.18	0.33 0.28	0.16 0.089	0 0.084	0.13 0.71
		$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$								
18		$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2.5 & 1 \\ 1 & 1 & 2.5 \end{bmatrix}$	p-value : 0.99 power : 0.97	0.99 0.97	0.18 0.17	0.6 0.69	0.6 0.69	0.76 0.92	0 0.14	0.13 0.52
		$\begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$								
19		$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2.5 & 1 \\ 1 & 1 & 2.5 \end{bmatrix}$	p-value : 0.95 power : 0.87	0.95 0.87	0.033 0.069	0.85 0.66	0.87 0.71	0.87 0.71	0.19 0.4	0.21 0.57
		$\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix}$								
20		$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2.5 & 1 \\ 1 & 1 & 2.5 \end{bmatrix}$	p-value : 0.2 power : 0.28	0.2 0.28	0.94 0.92	0.79 0.78	0.81 0.8	0.77 0.73	1 0.99	0.99 0.98
		$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$								

#		$\gamma_{2,p}$	$(\beta_2^*)^2$	$\beta_{2,p \times p}$	$T_{sup}$	$T_{sum}$	Q	$K(X)$	$B(X)$	
21	 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2.5 & 1 \\ 1 & 1 & 2.5 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	p-value :	0.94	0.94	0.86	0.34	0.45	0.4	0	0.11
		power :	0.72	0.72	0.73	0.26	0.48	0.42	0.07	0.63

# Capitolo 5

## Conclusioni

Considerando ora i risultati ottenuti nel capitolo precedente è possibile discutere della capacità dei vari indici di descrivere la forma della distribuzione in modo complessivo e la sua caratterizzazione specifica nelle varie direzioni. Come già visto sembra che gli indici di Mardia e Malkovich Afifi, sebbene confermino i risultati teorici ottenuti, siano meno adatti a descrivere la curtosi di una distribuzione in più di 2 dimensioni. Questo perchè, come si può notare, per una distribuzione multidimensionale l'indice di Mardia è calcolato come

$$\beta_2 = 2(\pi - 3) \frac{\mu^\top \bar{\Omega} \mu}{1 + \mu^\top \bar{\Omega} \mu}$$

Nell'ipotesi in cui  $\mu^\top \bar{\Omega} \mu \rightarrow \infty$  il valore dell'indice sarebbe  $\beta_2 = 2(\pi - 3)$ , ed è noto che una distribuzione Normale Asimmetrica Multidimensionale è sempre leptocurtica o al più normocurtica, di conseguenza l'indice dovrebbe variare al più in  $[0, 2(\pi - 3)]$ . Un campo di variazione così ristretto quindi porta a valori molto simili dell'indice per distribuzioni anche molto diverse tra di loro. Gli indici di Mori Rohatgi e Székeley, di Kollo e l'indice direzionale invece permettono una descrizione più accurata del fenomeno. Si può notare infatti che il loro valore, a differenza degli indici di Mardia, Malkovich-Afifi e di Srivastava, risulta non nullo anche solo per la presenza di covarianza nella matrice di varianza quando il parametro di asimmetria è nullo. Questo permette quindi una descrizione più dettagliata della forma della distribuzione andando ad identificare con più precisione l'asimmetria presente o la presenza

di rotazioni. Risulta inoltre interessante osservare come i valori degli indici di Mori Rohatgi e Székeley e di Kollo non sono influenzati dall'inversione di segno dell'intero parametro di asimmetria, portando ad ottenere lo stesso risultato. Sarebbe a questo punto interessante indagare in che modo i valori di questi indici direzionali siano legati all'asimmetria e alla correlazione. Valutando invece le performance di questi si può constatare come l'assenza di asimmetria presenti problemi per il calcolo di sensibilità e specificità, questo è probabilmente dovuto ad una stima non corretta di  $\Omega$  e  $\alpha$ . È comunque interessante notare come, nonostante il campo di variazione molto ristretto per gli indici di Mardia e Malkovich-Affifi, questi risultino complessivamente avere sensibilità e specificità più elevate. Per quanto riguarda l'indice direzionale  $T$  e la sua forma scalare  $Q$  è possibile osservare come risultino molto simili i valori di specificità e sensibilità ottenuti per i vari test, risulta quindi quasi indifferente la scelta della formulazione.



# Appendice A

## Operatori Matematici

Di seguito vengono descritte alcune funzioni matematiche ed algebriche utilizzate per il calcolo degli indici.

### A.1 Operatore *vec*

Questo operatore viene definito da Neudecker (1969) ed è sempre associato ad una matrice  $A$ .

**Definizione** (Graham, 1981). se  $A$  è una matrice di ordine  $m \times n$ , allora

$$vec(A) = \begin{bmatrix} A_{.1} \\ \vdots \\ A_{.n} \end{bmatrix}$$

Si ottiene quindi a partire da una matrice  $A$  un vettore  $mn \times 1$  che contiene tutti gli elementi delle colonne di  $A$ .

### A.2 Il prodotto di Kronecker

Il prodotto di Kronecker, conosciuto anche come "prodotto diretto" o "prodotto tensoriale", è un concetto nato nell'ambito della fisica applicata ma ha avuto un forte successo in molti ambiti della teoria delle matrici ed è ad oggi largamente utilizzato.

**Definizione** (Graham, 1981). Sia  $A = [a_{ij}]$  una matrice di ordine  $m \times n$  e  $B = [b_{ij}]$  una matrice di ordine  $r \times s$ . Si dice prodotto di Kronecker di  $A$  e  $B$  e si scrive  $A \otimes B$  la matrice:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \dots & a_{mn}B \end{bmatrix}$$

La matrice risultante sarà una matrice di dimensione  $mr \times ns$  a blocchi e ogni blocco  $(i, j)$  è composto dalla matrice  $a_{ij}B$  di ordine  $r \times s$ . Il prodotto di Kronecker è definito a prescindere dalla dimensione delle matrici coinvolte.

### A.3 Il prodotto *star*

Introdotta da MacRae nel 1974 il prodotto *star* nasce nell'ambito della differenziazione di matrici per facilitare tale procedimento.

**Definizione** (MacRae, 1974). Sia  $A$  una matrice  $m \times n$  e  $B$  una matrice  $mr \times ns$  suddivisa in sottomatrici  $B_{ij}$  con  $i = 1, \dots, m$  e  $j = 1, \dots, n$  di dimensioni  $r \times s$ , allora il prodotto *star*  $A \star B$  applicato alle matrici  $A$  e  $B$  è pari alla matrice  $r \times s$ :

$$A \star B = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} B_{ij}$$

con  $a_{ij}$  elemento generico della matrice  $A$ .

### A.4 Teorema per il calcolo dei momenti misti

Questo teorema è utile per il calcolo dei momenti misti per distribuzioni inserite in uno spazio sferico.

**Definizione** (Fang, Kolz e Ng, 1990). Sia  $u^{(n)}$  distribuita uniformemente su una sfera con superficie in  $\mathfrak{R}^n$  per qualsiasi intero  $m_1, \dots, m_n$  con

$$m = \sum_{i=1}^n m_i$$

i momenti misti di  $u_{(n)}$  possono essere espressi come

$$E \left( \prod_{i=1}^n u_i^{m_i} \right) = \begin{cases} \frac{1}{(n/2)^{[l]}} \prod_{i=1}^n \frac{(2l_i)!}{4^{l-i} (l_i)!} & \text{se } m_i = 2l_i \text{ è pari} \\ 0 & \text{se anche uno degli } m_i \text{ è dispari} \end{cases}$$

con  $x^{[l]} = x(x+1) \dots (x+l-1)$ .

## A.5 La matrice di permutazione

Per poter definire le matrici di permutazione è necessario introdurre il concetto di matrice elementare.

**Definizione.** si definisce matrice elementare  $E_{ij}$  una matrice di ordine  $m \times n$  che ha valore 1 in posizione  $(i, j)$  e 0 in tutte le altre posizioni.

Adesso è possibile definire la matrice di permutazione  $U_{n,n}$  come

**Definizione.** data una matrice elementare  $E_{ij}$  di ordine  $m \times n$  si dice matrice di permutazione la matrice  $U$  di ordine  $mn \times nm$  definita come:

$$U_{mn,nm} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n E_{ij} \otimes E_{ij}^\top$$



# Appendice B

## Codice R

Di seguito è riportato il codice R utilizzato per la generazione delle tabelle

```
1 # SETUP ENV
2
3 print('SETUP ENV')
4 rm(list=ls())
5 reqpackages <- c(
6   "sn",
7   "xtable",
8   "ggplot2",
9   "msnk",
10  "mvtnorm"
11 )
12 new.packages <- reqpackages[!(reqpackages %in% installed.
13   packages()[,"Package"])]
14 if(length(new.packages)) install.packages(new.packages)
15 res<-lapply(reqpackages, require, character.only = TRUE)
16 if(any(unlist(res)==F))
17   print(paste(reqpackages[!unlist(res)],"not loaded"))
18 devtools::install_github("krlmlr/here")
19 library(here)
20 rm(list=ls())
21 setwd(here())
22
23 # FUNCTIONS
24 print('SETUP FUNCTIONS')
```

```

25 f <- function(x,y,z) {
26   n<-length(x)
27   out<-NULL
28   for (ls in 1:n)
29     out[ls]<-dmsn(c(x[ls],y[ls],z[ls]),Omega=00,alpha=aa)
30   out
31 }
32 pr<-function(x){
33   return(paste('$',print(x, floating=F, tabular.environment="
      bmatrix",
34                               hline.after=NULL, include.rownames=
      FALSE, include.colnames=FALSE,
      comment=F),'$'))
35 }
36 med<-function(Omega,alpha){
37   omega <- sqrt(diag(diag(Omega)))
38   Omegabar<-cov2cor(Omega)
39   delta <- as.numeric(1/sqrt(1+t(alpha) %*% Omegabar %*%
      alpha)) * Omegabar %*%alpha
40   media<- sqrt(2/pi)*omega %*% delta
41   media
42 }
43 plot=T
44
45
46
47 # SETUP FOLDERS
48
49 print('SETUP FOLDERS')
50 dir.create(here('plots'), showWarnings = F)
51 dir.create(here('plots','contour'), showWarnings = F)
52 dir.create(here('plots','contour','2d'), showWarnings = F)
53 dir.create(here('plots','contour','3d'), showWarnings = F)
54
55 # 2D DATA
56
57 print('2D DATA')
58 setwd(here('plots','contour','2d'))
59

```

```

60 0 <- list(
61   matrix(c(1,1,1,2.5),nrow = 2 ),
62   matrix(c(1,0,0,2.5),nrow = 2 ),
63   matrix(c(1,-1,-1,2.5),nrow = 2 ),
64   matrix(c(1,0,0,1),nrow = 2 )
65 )
66 alfa <- list(
67   c(2,10),
68   c(0,10),
69   c(2,-3),
70   c(2,1),
71   c(2,-1),
72   c(-2,1),
73   c(1,0),
74   c(0,0)
75 )
76
77 xgrid <- seq(-4,4,0.04)
78 grr <- matrix(rep(1,length(xgrid)^2),length(xgrid),length(
      xgrid))
79 results <- list()
80 k<-1
81
82
83 for(i in 1:length(0)){
84   for(j in 1:length(alfa)){
85     cat(paste("IT: ",k,"/",length(0)*length(alfa),"\n"))
86     if(plot){
87       for(m in 1:length(xgrid)){
88         for(h in 1:length(xgrid)){
89           grr[m,h]=dmsn(c(xgrid[m],xgrid[h]),Omega=0[[i]],alpha
              =alfa[[j]])
90         }
91       }
92       pdf(paste0(k,'.pdf'))
93       contour(xgrid,xgrid,grr)
94     }
95     media<-med(0[[i]],alfa[[j]])
96     mard<-mardia(Omega = 0[[i]],alpha = alfa[[j]])

```

```

97   malk<-malkaf(Omega = 0[[i]],alpha = alfa[[j]])
98   kol<-kollo(Omega = 0[[i]],alpha = alfa[[j]])
99   dd<-directional(Omega = 0[[i]],alpha = alfa[[j]])
100  sriv<-srivastava(Omega = 0[[i]],alpha = alfa[[j]])
101  mor<-mori.rohatgi.szekeley(Omega = 0[[i]],alpha = alfa[[j
    ]])
102  results[[k]]<-list(Omega=0[[i]],alpha=alfa[[j]],mardia=
    mard,malkovich=malk,kollo=kol,direction=dd,srivastava=
    sriv,mori=mor)
103  k<-k+1
104  if(plot){
105  dev.off()
106  }
107 }
108 }
109
110 # 3D DATA
111
112 print('3D DATA')
113 library(misc3d)
114 setwd(here('plots','contour','3d'))
115
116 O2 <- list(
117   matrix(c(1,0,0,0,2.5,0,0,0,2.5),nrow = 3 ),
118   matrix(c(1,0,0,0,1,0,0,0,1),nrow = 3 ),
119   matrix(c(1,1,1,1,2.5,1,1,1,2.5),nrow = 3 )
120 )
121
122 alfa2 <- list(
123   c(0,0,0),
124   c(2,10,10),
125   c(2,3,3),
126   c(10,0,0),
127   c(2,-3,-3),
128   c(2,-1,-1),
129   c(2,1,1)
130 )
131 x<-seq(-5,5,len=20)
132 results2 <- list()

```



```

133 lev1<-0.03
134 lev2<-0.05
135 k<-1
136
137 for(i in 1:length(O2)){
138   for(j in 1:length(alfa2)){
139     O0<-O2[[i]]
140     aa<-alfa2[[j]]
141     mard<-mardia(Omega = O2[[i]],alpha = alfa2[[j]])
142     malk<-malkaf(Omega = O2[[i]],alpha = alfa2[[j]])
143     kol<-kollo(Omega = O2[[i]],alpha = alfa2[[j]])
144     dd<-directional(Omega = O2[[i]],alpha = alfa2[[j]])
145     sriv<-srivastava(Omega = O2[[i]],alpha = alfa2[[j]])
146     mor<-mori.rohatgi.szekeley(Omega = O2[[i]],alpha = alfa2
      [[j]])
147     results2[[k]]<-list(Omega=O2[[i]],alpha=alfa2[[j]],mardia
      =mard,malkovich=malk,kollo=kol,direction=dd,srivastava
      =sriv,mori=mor)
148     media<-med(O2[[i]],alfa2[[j]])
149     if(plot){
150       contour3d(f,0.01,x,x,x, mask = function(x,y,z) x < 0.1 |
        y < -0.1 | z > -0.1,
151         engine="rgl", screen = list(x = 290, y = -20),
152         color = "red", color2 = "white")
153       contour3d(f,level=0.019,x,x,x, add=T, color="green")
154       axes3d()
155       rgl.viewpoint(110,45)
156       rgl.snapshot(paste(k,".png",sep=""))
157     }
158     k<-k+1
159   }
160 }
161
162 setwd(here())
163
164 # LISTS TO LATEX
165
166 print('LISTS TO LATEX')
167

```

```

168 # 2D
169
170 print('2D DATA')
171 row<-" "
172 i<-1
173 for(i in 1:length(results)){
174   attach(results[[i]])
175   img<-paste0("\\raisebox{-.5\\height}{\\includegraphics[
       width=20mm,scale=0.5]{",here('plots','contour','2d',
       paste(i,'pdf',sep='.')),'}}')
176   Om<-xtable(formatC(Omega,format='g',digits=2),align=rep("",
       ncol(Omega)+1))
177   A<-xtable(formatC(matrix(alpha,ncol=1),format='g',digits=2)
       ,align=rep("",2))
178   MAR<-paste0("$",formatC(mardia,format='g',digits=2),"")
179   MAL<-paste0("$",formatC(malkovich,format='g',digits=2),"")
180   SR<-paste0("$",formatC(srivastava,format='g',digits=2),"")
181   T<-xtable(formatC(matrix(direction$T,ncol=1),format='g',
       digits=2),align=rep("",2))
182   Q<-paste0("$",formatC(direction$Q,format='g',digits=2),"")
183   M0<-xtable(formatC(mori$K,format='g',digits=2),align=rep("",
       ,ncol(mori$K)+1))
184   K0<-xtable(formatC(kollo$K,format='g',digits=2),align=rep("
       ",ncol(kollo$K)+1))
185   row<-paste(row, paste(img,pr(Om),pr(A),MAR,MAL,SR,pr(T),Q,
       pr(M0),pr(K0),sep = '&'),"\\\\\\")
186   detach(results[[i]])
187 }
188 row<-paste0(' & $\\Omega$ & $\\alpha$ & $\\gamma_{2,p}$ & $
       (\\beta_2^*)^2$ & $\\beta_{2,p}\\times p$ & $T_{n,r}$ & Q
       & $K(X)$ & $B(X)$ \\\\
189         \\midrule\\endhead',row,')
190 \\midrule[\\heavyrulewidth]\\caption{Indici di Curtosi
       scalari per la distribuzione Normale Asimmetrica
       Multidimensionale al variare di $\\Omega$ e $\\alpha$ ($d
       =2$)}')
191 a<-file('./tab1.tex')
192 writeLines(row,a)
193 close(a)

```

```

194
195 # 3D
196 print('\t 3D DATA')
197 row2<-"
198 for(i in 1:length(results2)){
199   attach(results2[[i]])
200   img<-paste0("\\raisebox{-.5\\height}{\\includegraphics[
      width=20mm,scale=0.5]{",here('plots','contour','3d',
      paste(i,'png',sep='.')),'}}')
201   Om<-xtable(formatC(Omega,format='g',digits=2),align=rep("",
      ncol(Omega)+1))
202   A<-xtable(formatC(matrix(alpha,ncol=1),format='g',digits=2)
      ,align=rep("",2))
203   MAR<-paste0("$",formatC(mardia,format='g',digits=2),"")
204   MAL<-paste0("$",formatC(malkovich,format='g',digits=2),"")
205   SR<-paste0("$",formatC(srivastava,format='g',digits=2),"")
206   T<-xtable(formatC(matrix(direction$T,ncol=1),format='g',
      digits=2),align=rep("",2))
207   Q<-paste0("$",formatC(direction$Q,format='g',digits=2),"")
208   M0<-xtable(formatC(mori$K,format='g',digits=2),align=rep("",
      ncol(mori$K)+1))
209   K0<-xtable(formatC(kollo$K,format='g',digits=2),align=rep("
      ",ncol(kollo$K)+1))
210   row2<-paste(row2, paste(img,pr(Om),pr(A),MAR,MAL,SR,pr(T),Q
      ,pr(M0),pr(K0),sep = '&'),"\\\\\\")
211   detach(results2[[i]])
212 }
213 row2<-paste0(' & $\\Omega$ & $\\alpha$ & $\\gamma_{2,p}$ & $
      (\\beta_2^*)^2$ & $\\beta_{2,p}\\times p$ & $T_{n,r}$ & Q
      & $K(X)$ & $B(X)$ \\\\\\
214         \\midrule\\endhead',row2,'
215         \\midrule[\\heavyrulewidth]\\caption{Indici di
      Curtosi scalari per la distribuzione Normale
      Asimmetrica Multidimensionale al variare di $
      \\Omega$ e $\\alpha$ ($d=3$)}')
216 a<-file('./tab2.tex')
217 writeLines(row2,a)
218 close(a)
219

```

```

220 # TEST
221 print('P-VALUE AND POWER')
222
223 # 2D
224
225 print('\t 2D DATA')
226 library(mvtnorm)
227 set.seed(111)
228 valorep<-matrix(0,length(results),10)
229
230 for(i in 1:length(results)){
231   attach(results[[i]])
232   pb = txtProgressBar(min = 0, max = 1000, initial = 0)
233
234   for(j in 1:1000){
235     X<-rmvnorm(100,sigma = Omega)
236     xx<-msn.mle(y=X,opt.method='BFGS')
237     mard2<-mardia(xx$dp$Omega,alpha=xx$dp$alpha)
238     malk2<-malkaf(xx$dp$Omega,alpha=xx$dp$alpha)
239     kol2<-kollo(xx$dp$Omega,alpha=xx$dp$alpha)
240     dd2<-directional(xx$dp$Omega,alpha=xx$dp$alpha)
241     sriv2<-srivastava(xx$dp$Omega,alpha=xx$dp$alpha)
242     mor2<-mori.rohatgi.szkeley(xx$dp$Omega,alpha=xx$dp$alpha
      )
243     valorep[i,1]<-valorep[i,1]+(mard2<mardia)
244     valorep[i,2]<-valorep[i,2]+(malk2<malkovich)
245     valorep[i,3]<-valorep[i,3]+(kol2$scalar<kollo$scalar)
246     valorep[i,5]<-valorep[i,5]+(dd2$Q<direction$Q)
247     valorep[i,6]<-valorep[i,6]+(sum(abs(dd2$T))<sum(abs(
      direction$T)))
248     valorep[i,7]<-valorep[i,7]+(max(abs(dd2$T))<max(abs(
      direction$T)))
249     valorep[i,8]<-valorep[i,8]+(sriv2<srivastava)
250     valorep[i,9]<-valorep[i,9]+(mor2$scalar<mori$scalar)
251     setTxtProgressBar(pb,j)
252   }
253   print(paste(i,length(results),sep='/'))
254   detach(results[[i]])
255 }

```

```

256 valorep<-valorep/1000
257 set.seed(1234)
258 potenza<-matrix(0,length(results),10)
259 for(i in 1:length(results)){
260   attach(results[[i]])
261   pb = txtProgressBar(min = 0, max = 1000, initial = 0)
262
263   for(j in 1:1000){
264     X<-rmsn(1000,0mega = 0mega ,alpha=alpha)
265     xx<-msn.mle(y=X,opt.method='BFGS')
266     mard2<-mardia(xx$dp$0mega ,alpha=xx$dp$alpha)
267     malk2<-malkaf(xx$dp$0mega ,alpha=xx$dp$alpha)
268     kol2<-kollo(xx$dp$0mega ,alpha=xx$dp$alpha)
269     dd2<-directional(xx$dp$0mega ,alpha=xx$dp$alpha)
270     sriv2<-srivastava(xx$dp$0mega ,alpha=xx$dp$alpha)
271     mor2<-mori.rohatgi.szekeley(xx$dp$0mega ,alpha=xx$dp$
      alpha)
272     potenza[i,1]<-potenza[i,1]+(mard2<mardia)
273     potenza[i,2]<-potenza[i,2]+(malk2<malkovich)
274     potenza[i,3]<-potenza[i,3]+(kol2$scalar<kollo$scalar)
275     potenza[i,5]<-potenza[i,5]+(dd2$Q<direction$Q)
276     potenza[i,6]<-potenza[i,6]+(sum(abs(dd2$T))<sum(abs(
      direction$T)))
277     potenza[i,7]<-potenza[i,7]+(max(abs(dd2$T))<max(abs(
      direction$T)))
278     potenza[i,8]<-potenza[i,8]+(sriv2<srivastava)
279     potenza[i,9]<-potenza[i,9]+(mor2$scalar<mori$scalar)
280     setTxtProgressBar(pb,j)
281
282   }
283   print(paste(i,length(results),sep='/'))
284   detach(results[[i]])
285 }
286 potenza<-potenza/1000
287
288 row3<-""
289 i<-1
290 for(i in 1:length(results)){
291   attach(results[[i]])

```

```

292 img<-paste0("\\raisebox{-.5\\height}{\\includegraphics[
      width=20mm,scale=0.5]{",here('plots','contour','2d',
      paste(i,'pdf',sep='.')),'}}')
293 Om<-xtable(formatC(Omega,format='g',digits=2),align=rep("",
      ncol(Omega)+1))
294 A<-xtable(formatC(matrix(alpha,ncol=1),format='g',digits=2)
      ,align=rep("",2))
295 MAR<-paste0("$",formatC(valorep[i,1],format='g',digits=2),"
      $\\newline$",formatC(potenza[i,1],format='g',digits=2),"
      $")
296 MAL<-paste0("$",formatC(valorep[i,2],format='g',digits=2),"
      $\\newline$",formatC(potenza[i,2],format='g',digits=2),"
      $")
297 SR<-paste0("$",formatC(valorep[i,8],format='g',digits=2),"$
      \\newline$",formatC(potenza[i,8],format='g',digits=2),"$
      ")
298 maxT<-paste0("$",formatC(valorep[i,7],format='g',digits=2),
      "$\\newline$",formatC(potenza[i,7],format='g',digits=2),
      "$")
299 sumT<-paste0("$",formatC(valorep[i,6],format='g',digits=2),
      "$\\newline$",formatC(potenza[i,6],format='g',digits=2),
      "$")
300 Q<-paste0("$",formatC(valorep[i,5],format='g',digits=2),"$
      \\newline$",formatC(potenza[i,5],format='g',digits=2),"$
      ")
301 sumM0<-paste0("$",formatC(valorep[i,9],format='g',digits=2)
      ,"$\\newline$",formatC(potenza[i,9],format='g',digits=2)
      ,"$")
302 sumK0<-paste0("$",formatC(valorep[i,3],format='g',digits=2)
      ,"$\\newline$",formatC(potenza[i,3],format='g',digits=2)
      ,"$")
303 row3<-paste(row3, paste(img,paste(pr(Om),pr(A),sep='\\
      newline'),"p-value : \\newline power :",MAR,MAL,SR,maxT,
      sumT,Q,sumM0,sumK0,sep = '&'),"\\\\")
304 detach(results[[i]])
305 }
306 row3<-paste0(' & & & $\\gamma_{2,p}$ & $(\\beta_2^*)^2$ & $
      \\beta_{2,p}\\times p)$ & $T_{sup}$ & $T_{sum}$ & Q & $K(X)
      $ & $B(X)$ \\\\

```

```

307         \\midrule\\endhead',row3,'
308         \\midrule[\\heavyrulewidth]\\caption{P-value e
           potenza del test al variare di  $\\Omega$  e  $\\alpha$ 
           ( $d=2$ )}
```

309 a<-file('./tab3.tex')

310 writeLines(row3,a)

311 close(a)

312

313 # 3D

314 print('\\t 3D DATA')

315 set.seed(12354)

316 valorep2<-matrix(0,length(results2),10)

317 for(i in 1:length(results2)){

318 attach(results2[[i]])

319 pb = txtProgressBar(min = 0, max = 1000, initial = 0)

320

321 for(j in 1:1000){

322 X<-rmvnorm(100,sigma = Omega)

323 xx<-msn.mle(y=X,opt.method='BFGS')

324 mard2<-mardia(xx\$dp\$Omega,alpha=xx\$dp\$alpha)

325 malk2<-malkaf(xx\$dp\$Omega,alpha=xx\$dp\$alpha)

326 kol2<-kollo(xx\$dp\$Omega,alpha=xx\$dp\$alpha)

327 dd2<-directional(xx\$dp\$Omega,alpha=xx\$dp\$alpha)

328 sriv2<-srivastava(xx\$dp\$Omega,alpha=xx\$dp\$alpha)

329 mor2<-mori.rohatgi.szokeley(xx\$dp\$Omega,alpha=xx\$dp\$

330 alpha)

331 valorep2[i,1]<-valorep2[i,1]+(mard2<mardia)

332 valorep2[i,2]<-valorep2[i,2]+(malk2<malkovich)

333 valorep2[i,3]<-valorep2[i,3]+(kol2\$scalar<kollo\$scalar)

334 valorep2[i,5]<-valorep2[i,5]+(dd2\$Q<direction\$Q)

335 valorep2[i,8]<-valorep2[i,8]+(sriv2<srivastava)

336 valorep2[i,6]<-valorep2[i,6]+(sum(abs(dd2\$T))<sum(abs(

337 direction\$T)))

338 valorep2[i,7]<-valorep2[i,7]+(max(abs(dd2\$T))<max(abs(

339 direction\$T)))

340 valorep2[i,9]<-valorep2[i,9]+(mor2\$scalar<mori\$scalar)

341 setTxtProgressBar(pb,j)

342 }

```

341 print(paste(i, length(results2), sep= '/ '))
342 detach(results2[[i]])
343 }
344 valorep2<-valorep2/1000
345 set.seed(111)
346 potenza2<-matrix(0, length(results2), 10)
347 for(i in 1:length(results2)){
348   attach(results2[[i]])
349   pb = txtProgressBar(min = 0, max = 1000, initial = 0)
350
351   for(j in 1:1000){
352     X<-rmsn(100, Omega = Omega, alpha=alpha)
353     xx<-msn.mle(y=X, opt.method='BFGS')
354     mard2<-mardia(xx$dp$Omega, alpha=xx$dp$alpha)
355     malk2<-malkaf(xx$dp$Omega, alpha=xx$dp$alpha)
356     kol2<-kollo(xx$dp$Omega, alpha=xx$dp$alpha)
357     dd2<-directional(xx$dp$Omega, alpha=xx$dp$alpha)
358     sriv2<-srivastava(xx$dp$Omega, alpha=xx$dp$alpha)
359     mor2<-mori.rohatgi.szekeley(xx$dp$Omega, alpha=xx$dp$
      alpha)
360     potenza2[i,1]<-potenza2[i,1]+(mard2<mardia)
361     potenza2[i,2]<-potenza2[i,2]+(malk2<malkovich)
362     potenza2[i,3]<-potenza2[i,3]+(kol2$scalar<kollo$scalar)
363     potenza2[i,5]<-potenza2[i,5]+(dd2$Q<direction$Q)
364     potenza2[i,8]<-potenza2[i,8]+(sriv2<srivastava)
365     potenza2[i,6]<-potenza2[i,6]+(sum(abs(dd2$T))<sum(abs(
      direction$T)))
366     potenza2[i,7]<-potenza2[i,7]+(max(abs(dd2$T))<max(abs(
      direction$T)))
367     potenza2[i,9]<-potenza2[i,9]+(mor2$scalar<mori$scalar)
368     setTxtProgressBar(pb, j)
369
370   }
371   print(paste(i, length(results2), sep= '/ '))
372   detach(results2[[i]])
373 }
374 potenza2<-potenza2/1000
375
376 row4<-""

```



```

377 i<-1
378 for(i in 1:length(results2)){
379   attach(results2[[i]])
380   img<-paste0("\\raisebox{-.5\\height}{\\includegraphics[
      width=20mm,scale=0.5]{",here('plots','contour','3d',
      paste(i,'png',sep='.')),'}}')
381   Om<-xtable(formatC(Omega,format='g',digits=2),align=rep("",
      ncol(Omega)+1))
382   A<-xtable(formatC(matrix(alpha,ncol=1),format='g',digits=2)
      ,align=rep("",2))
383   MAR<-paste0("$",formatC(valorep2[i,1],format='g',digits=2),
      "$\\newline$",formatC(potenza2[i,1],format='g',digits=2)
      ,"$")
384   MAL<-paste0("$",formatC(valorep2[i,2],format='g',digits=2),
      "$\\newline$",formatC(potenza2[i,2],format='g',digits=2)
      ,"$")
385   SR<-paste0("$",formatC(valorep2[i,8],format='g',digits=2),"
      $\\newline$",formatC(potenza2[i,8],format='g',digits=2),
      "$")
386   maxT<-paste0("$",formatC(valorep2[i,7],format='g',digits=2)
      ,"$\\newline$",formatC(potenza2[i,7],format='g',digits
      =2),"$")
387   sumT<-paste0("$",formatC(valorep2[i,6],format='g',digits=2)
      ,"$\\newline$",formatC(potenza2[i,6],format='g',digits
      =2),"$")
388   Q<-paste0("$",formatC(valorep2[i,5],format='g',digits=2),"$
      \\newline$",formatC(potenza2[i,5],format='g',digits=2),"
      $")
389   sumM0<-paste0("$",formatC(valorep2[i,9],format='g',digits
      =2),"$\\newline$",formatC(potenza2[i,9],format='g',
      digits=2),"$")
390   sumK0<-paste0("$",formatC(valorep2[i,3],format='g',digits
      =2),"$\\newline$",formatC(potenza2[i,3],format='g',
      digits=2),"$")
391   row4<-paste(row4, paste(img,paste(pr(Om),pr(A),sep='\\
      newline'),"p-value : \\newline power :",MAR,MAL,SR,maxT,
      sumT,Q,sumM0,sumK0,sep = '&'),"\\")
392   detach(results2[[i]])
393 }

```

```

394 row4<-paste0(' & & & $\gamma_{2,p}$ & $(\beta_2^*)^2$ & $
    \beta_{2,p}\times p$ & $T_{sup}$ & $T_{sum}$ & Q & $K(X)
    $ & $B(X)$ \\\
395         \midrule\endhead',row4,'
396         \midrule[\heavyrulewidth] % use "thick" \
            midrule instead of \bottomrule\caption{P-
            value e potenza del test al variare di $\
            \Omega$ e $\alpha$ ($d=3$)}')
397 a<-file('./tab4.tex')
398 writeLines(row4,a)
399 close(a)

```

# Bibliografia

- [1] A. D. V. A. Azzalini, “The multivariate skew-normal distribution,” *Biometrika* 83, 1996.
- [2] A. Azzalini, “A class of distributions which includes the normal ones,” *Scandinavian Journal of Statistics* 12, 1985.
- [3] B. S. N. Balakrishnan, “Multivariate measures of skewness for the skew-normal distribution,” *Journal of Multivariate Analysis* 104, 2012.
- [4] L. Zanotto, “Indici di curtosi per la distribuzione normale asimmetrica multivariata,” *Tesi di laurea magistrale, dipartimento di Scienze Statistiche, Università di Padova*, 2012.
- [5] G. J. S. T. F. Mori, V. K. Rohatgi, “On multivariate skewness and kurtosis,” *Teor. Veroyatnost. i Primenen.*, Volume 38, Issue 3, 1993.
- [6] T. Kollo, “Multivariate skewness and kurtosis measures with an application in ica,” *Journal of Multivariate Analysis* 99, 2008.
- [7] M. S. Srivastava, “A measure of skewness and kurtosis and a graphical method for assessin multivariate normality,” *Statistics and Probability Letters* 2, 1984.
- [8] A. C. A. Azzalini, “Statistical applications of the multivariate skew-normal distribution,” *Journal of the Royal Statistical Society* 61, 1999.