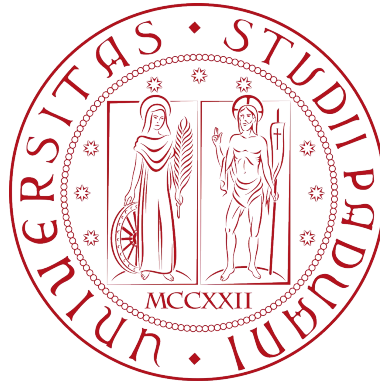


# UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Matematica "Tullio Levi-Civita"



Corso di laurea triennale in Matematica

## $(\beta, \gamma)$ -funzioni di Chebyshev e loro applicazione ai fenomeni di Gibbs e Runge

Relatore:

Ch.mo Prof. Stefano De Marchi

Laureando:

Jean Zacharie Mariethoz

Matricola: 1190491

Anno accademico 2021/2022

16 dicembre 2022

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b><math>(\beta, \gamma)</math>-funzioni di Chebyshev</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Il caso polinomiale delle <math>(\beta, \gamma)</math>-funzioni di Chebyshev</b>	<b>9</b>
3.1	Caso $\beta > 0, \gamma = 0$ . . . . .	9
3.2	Caso $\beta > 0, \gamma = \beta$ . . . . .	11
3.3	Caso generale . . . . .	13
<b>4</b>	<b>Costante di Lebesgue dei <math>(\beta, \gamma)</math>-nodi di CL</b>	<b>15</b>
<b>5</b>	<b><math>(\beta, \gamma)</math>-punti di Chebyshev come mappatura di punti equispaziati</b>	<b>24</b>
<b>6</b>	<b>Il <i>fake nodes approach</i> e il caso limite della mappa S-Gibbs</b>	<b>26</b>
6.1	Caso dispari . . . . .	28
6.2	Caso pari . . . . .	30
6.3	Discontinuità multiple . . . . .	31
<b>7</b>	<b>Il metodo <i>GRASPA</i></b>	<b>33</b>
<b>8</b>	<b>Esperimenti numerici</b>	<b>35</b>
8.1	Funzioni con 1 punto di discontinuità . . . . .	35
8.2	Funzioni con 2 punti di discontinuità . . . . .	41
<b>9</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>44</b>

## Abstract

In questo elaborato presentiamo le  $(\beta, \gamma)$ -funzioni di Chebyshev e i corrispondenti  $(\beta, \gamma)$ -punti di Chebyshev. Mostriamo che possono essere considerati come una generalizzazione dei polinomi di Chebyshev, analizzando le loro proprietà più importanti. In particolare, dimostriamo che sono una famiglia ortogonale rispetto ad una specifica funzione peso in un sottoinsieme di  $[-1, 1]$  e analizziamo i valori di  $\beta$  e di  $\gamma$  per i quali le  $(\beta, \gamma)$ -funzioni di Chebyshev risultano essere polinomi. Successivamente ci concentriamo sui  $(\beta, \gamma)$ -punti di Chebyshev-Lobatto, studiandone l'andamento della costante di Lebesgue per determinati valori dei parametri e dimostrando che possono essere definiti come un insieme di punti equispaziati trasformati dalla mappa Kosloff-Tal-Ezer (KTE). A partire da queste considerazioni introduciamo il metodo *Gibbs-Runge-Avoiding Stable Polynomial Approximation* (GRASPA) grazie al quale è possibile mitigare sia il fenomeno di Gibbs che quello di Runge. In conclusione, mostriamo diversi esperimenti numerici che confermano quanto discusso sul metodo GRASPA.

---

## 1 Introduzione

Nel 1854 Chebyshev pubblica "Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes", dove introduce una famiglia di polinomi che prenderanno in seguito il suo nome. A partire da allora i polinomi di Chebyshev e i loro zeri, i punti di Chebyshev, sono importante oggetto di studio scientifico e sono utilizzati in diversi ambiti. I polinomi, ad esempio vengono usati nell'ambito della crittografia [20], della cosmografia [5], del neural networks [19] e delle equazioni differenziali parziali [17]. I punti di Chebyshev, invece, sono molto usati nell'interpolazione [26], nella quadratura numerica e per la soluzione di equazioni differenziali [16]. In particolare, vengono utilizzate in quanto la costante di Lebesgue associata ai punti di Chebyshev presenta una crescita logaritmica e sono quindi una buona scelta di punti per affrontare il fenomeno di Runge e per mitigare il fenomeno di Gibbs. Anche al giorno d'oggi, i polinomi di Chebyshev sono un importante argomento di studio e sono state proposte diverse generalizzazioni di esse, ad esempio in [6, 7]. In questo documento andremo a presentare una di queste generalizzazioni proposta in [9].

Fissiamo adesso alcune notazioni.

Siano  $\Omega := [-1, 1]$  e  $n \in \mathbb{N}$ , i polinomi di Chebyshev (di prima specie)  $\{T_n\}_{n=0,1,\dots}$  sono definiti come

$$T_n(x) := \cos(n \arccos(x)) , \quad x \in \Omega .$$

In alternativa, per  $x \in \Omega$ , possono essere definiti tramite la seguente serie di ricorrenza:

$$T_0(x) = 1 \quad , \quad T_1(x) = x ,$$

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) ,$$

dove l'ultima espressione deriva dalle formule di addizione e sottrazione del coseno. Usando quest'ultima definizione risulta facile osservare che  $T_n$  sia effettivamente un polinomio di grado  $n$ . Un'importante proprietà dei polinomi di Chebyshev è la loro ortogonalità rispetto a  $w(x) = (1 + x^2)^{-1/2}$ , ovvero

$$\int_{\Omega} T_r(x)T_s(x)w(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{se } r \neq s, \\ \pi & \text{se } r = s = 0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } r = s \neq 0. \end{cases}$$

Sia  $\mathcal{X}_n := \{x_0, \dots, x_n\}$ , la funzione di Lebesgue è definita come:

$$\lambda(\mathcal{X}_n; x) := \sum_{i=0}^n |\ell_i(x)| , \quad x \in \Omega ,$$

dove  $\{\ell_0, \dots, \ell_n\}$  sono i polinomi di Lagrange

$$\ell_i(x) := \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} , \quad i = 0, \dots, n , \quad x \in \Omega .$$

Il massimo su  $\Omega$  della funzione di Lebesgue è un indice del condizionamento e della stabilità nell'interpolazione polinomiale. Esso viene chiamato costante di Lebesgue ed è indicato con la seguente notazione.

$$\Lambda(\mathcal{X}_n, \Omega) := \max_{x \in \Omega} \lambda(\mathcal{X}_n; x) .$$

È di grande importanza nell'interpolazione in quanto fornisce una stima superiore dell'errore compiuto. Infatti si ha

$$\|f - \Pi_n\|_{\infty} = (1 + \Lambda(\mathcal{X}_n, \Omega)) E_n(f) ,$$

dove  $\Pi_n$  è il polinomio interpolante in  $\mathcal{X}_n$  e  $E_n(f)$  è l'errore compiuto dal polinomio di migliore approssimazione di grado  $n$ .

Si nota che, fissato  $\Omega$ , la costante di Lebesgue dipende unicamente dalla scelta dei punti  $\mathcal{X}_n$  e, per questo motivo, si cercano insiemi di punti per i quali cresca lentamente con  $n$ .

Due insiemi di punti molto utilizzati sono i punti di Chebyshev di prima specie

$$\mathcal{T}_n := \left\{ \cos \left( \frac{(2j-1)\pi}{2n} \right) \right\}_{j=1, \dots, n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

e i punti di Chebyshev-Lobatto

$$\mathcal{U}_{n+1} := \left\{ \cos \left( \frac{j\pi}{n} \right) \right\}_{j=0, \dots, n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

in quanto, in entrambi i casi  $\Lambda(\mathcal{X}_n, \Omega) = \mathcal{O}(\log n)$ .

Sia i punti di Chebyshev che quelli di Chebyshev-Lobatto sono zeri di polinomi, rispettivamente il polinomio di Chebyshev e il polinomio

$$\bar{T}_{n+1}(x) := \frac{(1-x^2)}{n} \frac{d}{dx} T_n(x), \quad x \in \Omega.$$

Per una lettura più dettagliata sui polinomi di Chebyshev e sulla costante di Lebesgue riferirsi a [18, 22].

In questa tesi, studiamo una generalizzazione dei polinomi di Chebyshev introdotta in [9]: le  $(\beta, \gamma)$ -funzioni di Chebyshev.

La tesi utilizza le notazioni e i risultati presenti in [9, 10] ed utilizza i codici Python in [21] per la creazione dei grafici, sviluppati a partire da [13].

Riportiamo in seguito la struttura di questo elaborato e gli argomenti trattati.

- **Sezione 2**

Introduciamo le  $(\beta, \gamma)$ -funzioni di Chebyshev e i  $(\beta, \gamma)$ -punti di Chebyshev e Chebyshev-Lobatto (CL). Analizziamo in seguito alcune loro proprietà, in particolare proviamo una relazione di simmetria e la loro ortogonalità su un sottoinsieme di  $\Omega$ .

- **Sezione 3**

Analizziamo per specifici  $\beta$  e  $\gamma$  qualora siano dei polinomi e la loro relazione con la famiglia  $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

- **Sezione 4**

Studiamo l'andamento della costante di Lebesgue associata a questi punti al crescere di  $n$ . In particolare analizziamo per quali valori di  $\beta$  e  $\gamma$  mantiene una crescita logaritmica o lineare. Inoltre, attraverso esperimenti numerici, ipotizziamo l'andamento asintotico della costante di Lebesgue al variare di  $\beta$  nei casi  $\gamma = 0$  e  $\gamma = \beta$ .

- **Sezione 5**

Mostriamo che, usando la mappa Kosloff-Tal-Ezer (KTE), è possibile passare da un insieme di punti equispaziati ai  $(\beta, \gamma)$ -punti di Chebyshev e CL. Usando questo fatto ricaviamo una relazione tra i  $(\beta, \gamma)$ -punti di Chebyshev e i  $(\beta, \gamma)$ -punti CL.

- **Sezione 6**

Introduciamo brevemente il *fake nodes approach*, facendo notare che i nodi studiati nelle sezioni precedenti possono essere utilizzati con questo metodo. Mostriamo successivamente che la mappa *S-Gibbs* presenta una instabilità nel caso limite.

- **Sezione 7**

Presentiamo il metodo *Gibbs-Runge-Avoiding Stable Polynomial Approximation*, il quale, usando il *fake nodes approach* e i  $(\beta, \gamma)$ -punti di CL, fornisce un algoritmo stabile per l'interpolazione polinomiale minimizzando i fenomeni di Runge e di Gibbs.

- **Sezione 8**

Mostriamo con esperimenti numerici quanto discusso sul metodo GRASPA nel caso di funzioni con uno o due punti di discontinuità.

- **Sezione 9**

Traiamo le conclusioni su quanto discusso.

## 2 $(\beta, \gamma)$ -funzioni di Chebyshev

Siano  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\beta, \gamma \in [0, 2)$ ,  $\beta + \gamma < 2$ , definiamo le  $(\beta, \gamma)$ -funzioni di Chebyshev di prima specie come

$$T_n^{\beta, \gamma}(x) := \cos \left( \frac{2n}{2 - \beta - \gamma} \left( \arccos x - \frac{\gamma\pi}{2} \right) \right), \quad x \in \Omega.$$

e i  $(\beta, \gamma)$ -punti di Chebyshev come l'insieme degli zeri di  $T_n^{\beta, \gamma}$  in  $\Omega_{\beta, \gamma} := [-\cos(\beta\pi/2), \cos(\gamma\pi/2)] \subseteq \Omega$

$$\mathcal{T}_n^{\beta,\gamma} := \left\{ \cos \left( \frac{(2 - \beta - \gamma)(2j - 1)\pi}{4n} + \frac{\gamma\pi}{2} \right) \right\}_{j=1,\dots,n} .$$

Possiamo notare che per  $\beta = \gamma = 0$ , si ha  $T_n^{0,0} = T_n$  e  $\mathcal{T}_n^{0,0} = \mathcal{T}_n$ . Inoltre facciamo notare che in generale  $T_n^{\beta,\gamma}$  non è un polinomio. Analizzeremo nella sezione 3, i valori dei parametri per i quali sono dei polinomi.

Analogamente al caso classico, definiamo i  $(\beta, \gamma)$ -punti di Chebyshev-Lobatto (( $\beta, \gamma$ )-CL) come gli zeri della funzione

$$\bar{T}_{n+1}^{\beta,\gamma}(x) := \frac{2 - \beta - \gamma}{2n} (1 - x^2) \frac{d}{dx} T_n^{\beta,\gamma}(x) , \quad x \in \Omega ,$$

nell'intervallo  $\Omega_{\beta,\gamma}$ .

Essendo i punti notevoli di  $T_n^{\beta,\gamma}$

$$\left\{ \cos \left( \frac{(2 - \beta - \gamma)j\pi}{2n} + \frac{\gamma\pi}{2} \right) \right\}_{j=1,\dots,n-1} ,$$

i punti  $(\beta, \gamma)$ -CL sono

$$\mathcal{U}_{n+1}^{\beta,\gamma} := \left\{ \cos \left( \frac{(2 - \beta - \gamma)j\pi}{2n} + \frac{\gamma\pi}{2} \right) \right\}_{j=0,\dots,n} .$$

Notiamo che, anche in questo caso,  $\mathcal{U}_n^{0,0} = \mathcal{U}_n$ .

Nella Figura 1, mostriamo  $T_n^{\beta,\gamma}$  e  $\bar{T}_{n+1}^{\beta,\gamma}$  e i rispettivi zeri per qualche valore di  $n, \beta$  and  $\gamma$ .

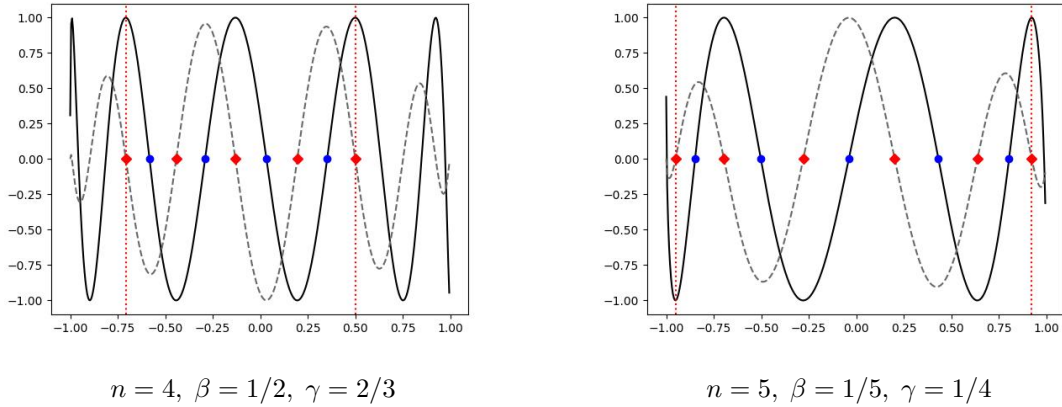


Figura 1: Le funzioni  $T_n^{\beta,\gamma}$  (linea continua) e  $\bar{T}_{n+1}^{\beta,\gamma}$  (linea tratteggiata) , i punti  $\mathcal{T}_n^{\beta,\gamma}$  (cherchi blu) e  $\mathcal{U}_{n+1}^{\beta,\gamma}$  (rombi rossi) e l'insieme  $\Omega_{\beta,\gamma}$ , delimitato dalle linee verticali punteggiate.

Mostriamo adesso alcune proprietà che hanno in comune con  $T_n$ .

**Proposizione 1.** *Le funzioni  $\{T_n^{\beta,\gamma}\}$  sono caratterizzate dalla seguente relazione di ricorrenza*

$$T_0^{\beta,\gamma}(x) = 1 \quad , \quad T_1^{\beta,\gamma}(x) = \cos\left(\frac{2}{2-\beta-\gamma}\left(\arccos x - \frac{\gamma\pi}{2}\right)\right) ,$$

$$T_{n+1}^{\beta,\gamma}(x) = 2T_1^{\beta,\gamma}(x)T_n^{\beta,\gamma}(x) - T_{n-1}^{\beta,\gamma}(x) ,$$

per  $x \in \Omega$ .

*Dimostrazione.* Usiamo il cambio di variabile  $\theta = \arccos x - \frac{\gamma\pi}{2}$ ,  $x \in \Omega$  e, per la formula di addizione e sottrazione del coseno, otteniamo

$$T_{n+1}^{\beta,\gamma}(x) = \cos\left(\frac{2n\theta}{2-\beta-\gamma}\right)\cos\left(\frac{2\theta}{2-\beta-\gamma}\right) - \sin\left(\frac{2n\theta}{2-\beta-\gamma}\right)\sin\left(\frac{2\theta}{2-\beta-\gamma}\right) ,$$

$$T_{n-1}^{\beta,\gamma}(x) = \cos\left(\frac{2n\theta}{2-\beta-\gamma}\right)\cos\left(\frac{2\theta}{2-\beta-\gamma}\right) + \sin\left(\frac{2n\theta}{2-\beta-\gamma}\right)\sin\left(\frac{2\theta}{2-\beta-\gamma}\right) .$$

Da cui si ottiene la tesi

$$T_{n+1}^{\beta,\gamma}(x) = 2T_1^{\beta,\gamma}(x)T_n^{\beta,\gamma}(x) - T_{n-1}^{\beta,\gamma}(x) .$$

□

Un'altra proprietà importante della famiglia  $\{T_n^{\beta,\gamma}\}_{n \in \mathbb{N}}$  è la loro ortogonalità rispetto alla funzione  $\omega^{\beta,\gamma}$ .

**Teorema 1.** *Le funzioni  $\{T_n^{\beta,\gamma}\}_{n \in \mathbb{N}}$  sono ortogonali su  $\Omega_{\beta,\gamma}$  rispetto alla funzione peso*

$$\omega^{\beta,\gamma}(x) = \frac{2}{(2-\beta-\gamma)\sqrt{1-x^2}} , \quad x \in \Omega_{\beta,\gamma} ,$$

ovvero

$$\int_{\Omega_{\beta,\gamma}} T_r^{\beta,\gamma}(x)T_s^{\beta,\gamma}(x)\omega(x)^{\beta,\gamma}dx = \begin{cases} 0 & \text{se } r \neq s, \\ \pi & \text{se } r = s = 0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } r = s \neq 0. \end{cases}$$



*Dimostrazione.* Utilizziamo il cambio di variabile  $x = \cos((2 - \beta - \gamma)\theta/2 + \gamma\pi/2)$ , ottenendo così

$$\int_{\Omega_{\beta,\gamma}} T_r^{\beta,\gamma}(x) T_s^{\beta,\gamma}(x) w(x)^{\beta,\gamma} dx = \int_0^\pi \cos(r\theta) \cos(s\theta) d\theta .$$

Concludiamo poichè

$$\int_0^\pi \cos(r\theta) \cos(s\theta) d\theta = \begin{cases} 0 & \text{se } r \neq s, \\ \pi & \text{se } r = s = 0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } r = s \neq 0. \end{cases}$$

è un risultato noto. □

Proviamo adesso una simmetria riguardante le  $(\beta, \gamma)$ -funzioni di Chebyshev.

**Proposizione 2.** *Sia  $n \in \mathbb{N}$  e  $v \in [0, 2[$ , allora, per  $x \in \Omega$  si ha*

$$T_n^{v,0}(x) = (-1)^n T_n^{0,v}(-x) ,$$

e

$$\bar{T}_{n+1}^{v,0}(x) = (-1)^{n+1} \bar{T}_{n+1}^{0,v}(-x) .$$

*Dimostrazione.* Usando l'uguaglianza  $\arccos(-x) = \pi - \arccos(x)$  e la formula di addizione del coseno, si ha

$$\begin{aligned} T_n^{0,v}(-x) &= \cos\left(\frac{2n}{2-v}\left(\pi - \arccos x - \frac{v\pi}{2}\right)\right) \\ &= \cos\left(n\pi - \frac{2n}{2-v}\arccos x\right) \\ &= \cos(n\pi) \cos\left(\frac{2n}{2-v}\arccos x\right) \\ &= (-1)^n T_n^{v,0}(x) . \end{aligned}$$

Per  $\bar{T}_{n+1}^{v,0}$ , utilizzando l'uguaglianza

$$\bar{T}_{n+1}^{\beta,\gamma}(x) = \frac{2 - \beta - \gamma}{2n} (1-x^2) \frac{d}{dx} T_n^{\beta,\gamma}(x) = \sqrt{1-x^2} \sin\left(\frac{2n}{2-\beta-\gamma}\left(\arccos x - \frac{\gamma\pi}{2}\right)\right) ,$$

e un procedimento analogo alla prima parte della dimostrazione,

$$\begin{aligned}
\overline{T}_{n+1}^{0,v}(-x) &= \sqrt{1-x^2} \sin\left(\frac{2n}{2-v}\left(\pi - \arccos x - \frac{v\pi}{2}\right)\right) \\
&= \sqrt{1-x^2} \sin\left(n\pi - \frac{2n}{2-v}\arccos x\right) \\
&= -\sqrt{1-x^2} \cos(n\pi) \sin\left(\frac{2n}{2-v}\arccos x\right) \\
&= (-1)^{n+1} \overline{T}_{n+1}^{v,0}(x) .
\end{aligned}$$

Ciò conclude la dimostrazione. □

In particolare, la proprietà di simmetria è valida anche per gli zeri delle funzioni.

**Corollario 1.** *Sia  $n \in \mathbb{N}$  e  $v \in [0, 2[$ , vale*

$$\begin{aligned}
x \in \mathcal{T}_n^{v,0} &\iff -x \in \mathcal{T}_n^{0,v} , \\
x \in \mathcal{U}_n^{v,0} &\iff -x \in \mathcal{U}_n^{0,v} .
\end{aligned}$$

*Dimostrazione.* È conseguenza diretta della Proposizione 1. □

Grazie a questo corollario risulta equivalente studiare i valori della costante di Lebesgue associati a  $\mathcal{T}_n^{v,0}$  e  $\mathcal{T}_n^{0,v}$  (o a  $\mathcal{U}_n^{v,0}$  e  $\mathcal{U}_n^{0,v}$ ). Infatti, si ha

$$|\ell_i(x)| = |\tilde{\ell}_i(-x)| ,$$

dove  $\ell_i$  e  $\tilde{\ell}_i$  sono gli  $i$ -esimi polinomi di Lagrange associati a  $\mathcal{T}_n^{v,0}$  e  $\mathcal{T}_n^{0,v}$  rispettivamente. Segue dunque che se la funzione di Lebesgue associata a  $\mathcal{T}_n^{v,0}$  ha massimo in  $x$ , allora la funzione di Lebesgue associata a  $\mathcal{T}_n^{0,v}$  avrà massimo in  $-x$  e valgono quindi le seguenti uguaglianze.

$$\begin{aligned}
\Lambda(\mathcal{T}_n^{v,0}, \Omega) &= \Lambda(\mathcal{T}_n^{0,v}, \Omega) , \\
\Lambda(\mathcal{U}_n^{v,0}, \Omega) &= \Lambda(\mathcal{U}_n^{0,v}, \Omega) .
\end{aligned}$$

Si può osservare nei seguenti grafici la proprietà di simmetria per  $n = 4$  e  $v = 1/3$ .

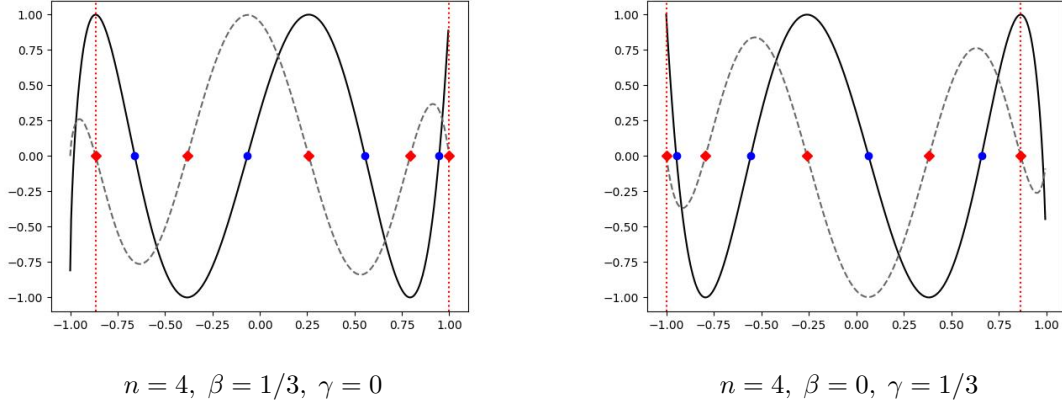


Figura 2: Le funzioni  $T_n^{\beta,\gamma}$  (linea continua) e  $\overline{T}_{n+1}^{\beta,\gamma}$  (linea tratteggiata), i punti  $\mathcal{T}_n^{\beta,\gamma}$  (cerchi blu) e  $\mathcal{U}_{n+1}^{\beta,\gamma}$  (rombi rossi) e l'insieme  $\Omega_{\beta,\gamma}$ , delimitato dalle linee verticali punteggiate.

### 3 Il caso polinomiale delle $(\beta,\gamma)$ -funzioni di Chebyshev

In questa sezione studiamo per quali valori di  $\beta$  e  $\gamma$  le funzioni  $T_n^{\beta,\gamma}$ , e di conseguenza  $\overline{T}_n^{\beta,\gamma}$ , siano dei polinomi.

Facciamo inoltre notare che, per quei valori dei parametri, le  $(\beta,\gamma)$ -funzioni di Chebyshev possono essere utilizzate nelle formule di quadratura Gaussiane o come in [11].

#### 3.1 Caso $\beta > 0, \gamma = 0$

Facciamo notare innanzitutto che, per la Proposizione 2,  $T_n^{\beta,0}$  è un polinomio se e solo se anche  $T_n^{0,\beta}$  lo è. Dunque i risultati che otterremo in questo paragrafo permettono di risolvere anche il caso  $\beta = 0, \gamma > 0$ .

Consideriamo  $\beta = p/q$ ,  $p, q \in \mathbb{N}_{>0}$  con  $p, q$  indipendenti da  $n$ .  $T_n^{\beta,\gamma}$  risulta essere un polinomio se

$$\frac{2}{2 - \frac{p}{q}} \in \mathbb{N}_{>0} \iff (2q - p)m = 2q$$

per una certa  $m \in \mathbb{N}_{>1}$ . Otteniamo dunque

$$p = \frac{2q(m-1)}{m} \implies \beta_m := \frac{2(m-1)}{m} = 2 - \frac{2}{m}, \quad (1)$$

e, per  $x \in \Omega$ , osserviamo l'uguaglianza

$$T_n^{\beta_m,0}(x) = \cos\left(\frac{2}{2-\beta_m} \arccos x\right) = \cos(mn \arccos x) = T_{nm}(x),$$

la quale implica

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_n^{\beta_m,0} &= \left\{ \cos\left(\frac{(2j-1)\pi}{2mn}\right) \right\}_{j=1,\dots,n}, \\ \mathcal{U}_{n+1}^{\beta_m,0} &= \left\{ \cos\left(\frac{j\pi}{mn}\right) \right\}_{j=0,\dots,n}. \end{aligned}$$

Osserviamo che la definizione di  $\beta_m$  è coerente in quanto  $\beta_m = 2 - \frac{2}{m} \in [1, 2[$  per ogni  $m \in \mathbb{N}_{>1}$ .

Inoltre, per il Teorema 1, mostriamo una nuova proprietà di ortogonalità per i polinomi di Chebishev (di prima specie) con grado multiplo di  $m \in \mathbb{N}_{>1}$ .

**Corollario 2.** *Sia  $m \in \mathbb{N}_{>1}$ , i polinomi  $\{T_{mn}\}_{n=0,1,\dots}$  sono ortogonali su  $\Omega_{\beta_m,0}$  rispetto alla funzione peso*

$$\omega^{\beta_m,0}(x) = \frac{m}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in \Omega_{\beta_m,0}.$$

*Dimostrazione.* La dimostrazione deriva dal Teorema 1, considerando l'uguaglianza  $\{T_{mn}\}_{n=0,1,\dots} = \{T_n^{\beta_m,0}\}_{n=0,1,\dots}$ . □

Assumiamo adesso che  $\beta$  dipendi linearmente da  $n$ . Analogamente al caso precedente,

$$\frac{2n}{2-\frac{p}{q}} \in \mathbb{N}_{>0} \iff (2q-p)m = 2qn, \quad m \in \mathbb{N}_{>1},$$

da cui,

$$p = \frac{2q(m-n)}{m} \implies \beta_{m,n} := \frac{2(m-n)}{m} = 2 - \frac{2n}{m}, \quad (2)$$

dove, affinché  $\beta_{m,n} \in ]0, 2[$ , dobbiamo porre  $n < m$ .

Dunque, fissato  $m \in \mathbb{N}_{>1}$ , si ha

$$T_n^{\beta_{m,n},0}(x) = \cos\left(\frac{2}{2-\beta_m} \arccos x\right) = \cos(m \arccos x) = T_m(x),$$

per  $n = 0, 1, \dots, m-1$ .

I rispettivi  $(\beta_{m,n}, 0)$ -punti di Chebyshev e di CL sono quindi

$$\mathcal{T}_n^{\beta_{m,n},0} = \left\{ \cos \left( \frac{(2j-1)\pi}{2m} \right) \right\}_{j=1,\dots,n},$$

$$\mathcal{U}_{n+1}^{\beta_{m,n},0} = \left\{ \cos \left( \frac{j\pi}{m} \right) \right\}_{j=0,\dots,n}.$$

Dunque nei casi  $(\beta = \beta_m, \gamma = 0)$  e  $(\beta = \beta_{m,n}, \gamma = 0)$  si ha che i  $(\beta, \gamma)$ -punti di Chebyshev e di CL sono sottoinsiemi dei punti classici.

### 3.2 Caso $\beta > 0, \gamma = \beta$

Per quanto appena visto, consideriamo

$$\beta = \gamma = \frac{\beta_m}{2}.$$

**Proposizione 3.** *Siano  $m, n \in \mathbb{N}_{>1}$  e  $x \in \Omega$ .*

1. *Se  $n \in 4\mathbb{N}_{>0} \Rightarrow T_n^{\frac{\beta_m}{2}, \frac{\beta_m}{2}}(x) = T_{mn}(x)$ .*

2. *Se  $n \in 2\mathbb{N}_{>0} \setminus 4\mathbb{N}_{>0}$ , allora*

$$T_n^{\frac{\beta_m}{2}, \frac{\beta_m}{2}}(x) = \begin{cases} T_{mn}(x) & \text{se } m \text{ è dispari,} \\ -T_{mn}(x) & \text{se } m \text{ è pari.} \end{cases}$$

3. *Se  $n$  è dispari, allora*

$$T_n^{\frac{\beta_m}{2}, \frac{\beta_m}{2}}(x) = \begin{cases} T_{mn}(x) & \text{se } (m-1) \in 4\mathbb{N}_{>0}, \\ -T_{mn}(x) & \text{se } (m-1) \in 2\mathbb{N}_{>0} \setminus 4\mathbb{N}_{>0}, \\ -\sin(mn \arccos x) & \text{se } (m-1)n + 1 \in 4\mathbb{N}_{>0}, \\ \sin(mn \arccos x) & \text{se } (m-1)n - 1 \in 4\mathbb{N}_{>0}. \end{cases}$$

*Dimostrazione.* Per  $x \in \Omega$  si ha

$$\begin{aligned} T_n^{\frac{\beta_m}{2}, \frac{\beta_m}{2}}(x) &= \cos \left( mn \left( \arccos x - \frac{\beta_m \pi}{4} \right) \right) \\ &= \cos \left( mn \arccos x - \frac{(m-1)n\pi}{2} \right) \\ &= \cos(mn \arccos x) \cos \left( \frac{(m-1)n\pi}{2} \right) + \\ &\quad + \sin(mn \arccos x) \sin \left( \frac{(m-1)n\pi}{2} \right). \end{aligned}$$

La tesi si ottiene studiando i valori di

$$\cos \left( \frac{(m-1)n\pi}{2} \right) \quad e \quad \sin \left( \frac{(m-1)n\pi}{2} \right),$$

al variare di  $m$  e  $n$ .

□

Analogamente, per (2), analizziamo il caso

$$\beta = \gamma = \frac{\beta_{m,n}}{2}.$$

**Proposizione 4.** *Siano  $m, n \in \mathbb{N}_{>1}$ , con  $n < m$  e  $x \in \Omega$ .*

1. Se  $(m-n) \in 4\mathbb{N}_{>0} \quad \Rightarrow \quad T_n^{\frac{\beta_{m,n}}{2}, \frac{\beta_{m,n}}{2}}(x) = T_m(x).$
2. Se  $(m-n) \in 2\mathbb{N}_{>0} \setminus 4\mathbb{N}_{>0} \quad \Rightarrow \quad T_n^{\frac{\beta_{m,n}}{2}, \frac{\beta_{m,n}}{2}}(x) = -T_m(x).$
3. Se  $(m-n+1) \in 4\mathbb{N}_{>0} \quad \Rightarrow \quad T_n^{\frac{\beta_{m,n}}{2}, \frac{\beta_{m,n}}{2}}(x) = -\sin(m \arccos x).$
4. Se  $(m-n-1) \in 4\mathbb{N}_{>0} \quad \Rightarrow \quad T_n^{\frac{\beta_{m,n}}{2}, \frac{\beta_{m,n}}{2}}(x) = \sin(m \arccos x).$

*Dimostrazione.* La dimostrazione segue dallo stesso procedimento utilizzato nella Proposizione 3.

□

Possiamo notare che gli zeri di  $T_n^{\frac{\beta_m}{2}, \frac{\beta_m}{2}}$  in  $\Omega$  sono i  $mn+1$  punti di Chebyshev-Lobatto se  $n$  è dispari o  $(m-1)n \pm 1 \in 4\mathbb{N}_{>0}$ , e in caso contrario, sono i  $mn$  punti di Chebyshev.

Analogamente, in  $\Omega$ , gli zeri di  $T_n^{\frac{\beta_{m,n}}{2}, \frac{\beta_{m,n}}{2}}$  sono i  $m + 1$  punti di Chebyshev-Lobatto se  $(m - n)$  è dispari, altrimenti sono i  $m$  punti di Chebyshev

Dunque, in entrambi i casi i  $(\beta, \gamma)$ -punti di Chebyshev sono sottoinsiemi dei punti classici o di CL, a seconda dei valori di  $m$  e  $n$ .

### 3.3 Caso generale

Siano  $p_1, p_2 \in \mathbb{N}$ ,  $q_1, q_2 \in \mathbb{N}_{>0}$ , poniamo  $\beta = 1 - p_1/q_1$  e  $\gamma = 1 - p_2/q_2$ . Si ha che  $T_n^{\beta, \gamma}$  è un polinomio se

$$\frac{2n}{\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2}} \in \mathbb{N}_{>0} .$$

Utilizzando lo stesso procedimento utilizzato negli altri casi, otteniamo che deve valere la seguente equazione

$$(p_1 q_2 + p_2 q_1) m = 2 n q_1 q_2$$

per  $m \in \mathbb{N}_{>0}$ .

Mostriamo adesso una scelta di  $\beta$  e  $\gamma$  per i quali i  $(\beta, \gamma)$ -punti di Chebyshev e di CL risultano essere sottoinsiemi di punti di Chebyshev e di CL rispettivamente.

**Teorema 2.** *Siano  $\mathcal{T}_n = \{t_j\}_{j=1, \dots, n}$  e  $\mathcal{U}_{n+1} = \{u_j\}_{j=0, \dots, n}$  gli insiemi dei punti di Chebyshev e di Chebyshev-Lobatto. Siano poi  $\kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{N}$ ,  $\boldsymbol{\kappa} := (\kappa_1, \kappa_2)$  e*

$$\beta_{\boldsymbol{\kappa}} = \frac{2\kappa_1}{n + \kappa_1 + \kappa_2} \quad \gamma_{\boldsymbol{\kappa}} = \frac{2\kappa_2}{n + \kappa_1 + \kappa_2} .$$

Allora,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_n^{\beta_{\boldsymbol{\kappa}}, \gamma_{\boldsymbol{\kappa}}} &= \mathcal{T}_{n+\kappa_1+\kappa_2} \setminus \{t_1, \dots, t_{\kappa_2}, t_{n+\kappa_2+1}, \dots, t_{n+\kappa_1+\kappa_2}\} , \\ \mathcal{U}_{n+1}^{\beta_{\boldsymbol{\kappa}}, \gamma_{\boldsymbol{\kappa}}} &= \mathcal{U}_{n+\kappa_1+\kappa_2+1} \setminus \{u_0, \dots, u_{\kappa_2-1}, u_{n+\kappa_2+1}, \dots, u_{n+\kappa_1+\kappa_2}\} . \end{aligned}$$

*Dimostrazione.* Si ha

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_n^{\beta_\kappa, \gamma_\kappa} &= \cos \left( \frac{(2 - \beta_\kappa - \gamma_\kappa)}{4n} (2j - 1)\pi + \frac{\gamma_\kappa \pi}{2} \right), \quad j = 1, \dots, n, \\
&= \cos \left( \frac{2n}{n + \kappa_1 + \kappa_2} (2j - 1)\pi + \frac{\kappa_2 \pi}{n + \kappa_1 + \kappa_2} \right), \\
&= \cos \left( \frac{(2j + 2\kappa_2 - 1)\pi}{2(n + \kappa_1 + \kappa_2)} \right), \\
&= \cos \left( \frac{(2l - 1)\pi}{2(n + \kappa_1 + \kappa_2)} \right), \quad l = \kappa_2 + 1, \dots, n + \kappa_2.
\end{aligned}$$

Analogamente, si dimostra che

$$\mathcal{U}_{n+1}^{\beta_\kappa, \gamma_\kappa} = \cos \left( \frac{l\pi}{(n + \kappa_1 + \kappa_2)} \right), \quad l = \kappa_2, \dots, n + \kappa_2.$$

□

Mostriamo adesso un esempio per  $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$ :

Ricordando (2),

$$\beta = \gamma = \frac{2}{n + 2} = 1 - \frac{n}{n + 2} = \frac{\beta_{n+2, n}}{2}.$$

Per quanto analizzato nella sezione 3.2, sappiamo che  $\mathcal{T}_n^{\frac{\beta_{n+2, n}}{2}, \frac{\beta_{n+2, n}}{2}}$  è un sottoinsieme di  $\mathcal{T}_{n+2}$ . Grazie al Teorema 2, sappiamo essere

$$\mathcal{T}_n^{\frac{\beta_{n+2, n}}{2}, \frac{\beta_{n+2, n}}{2}} = \mathcal{T}_{n+2} \setminus \{t_1, t_{n+2}\}.$$

Inoltre, si ha

$$\mathcal{U}_{n+1}^{\frac{\beta_{n+2, n}}{2}, \frac{\beta_{n+2, n}}{2}} = \mathcal{U}_{n+3} \setminus \{\pm 1\}.$$

Sappiamo che la costante di Lebesgue associata a  $\mathcal{U}_{n+1}^{\frac{\beta_{n+2, n}}{2}, \frac{\beta_{n+2, n}}{2}}$  ha crescita lineare da [3, 18, 24]

Mostriamo adesso un grafico che mostri la veridicità del Teorema 2, per  $n = 4, \kappa_1 = 2, \kappa_2 = 3$ :



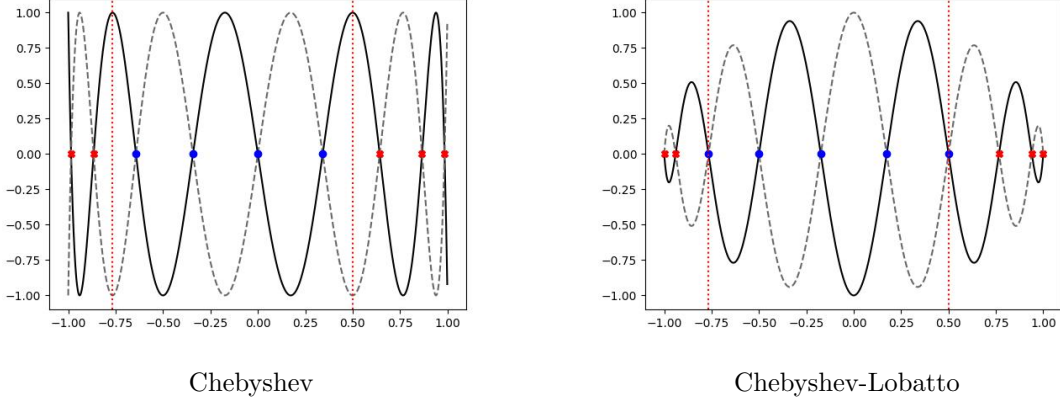


Figura 3: Le funzioni  $T_n^{\beta, \gamma_\kappa}$  (risp.  $\bar{T}_{n+1}^{\beta, \gamma_\kappa}$ ) (linea continua) e le funzioni  $T_{n+\kappa_1+\kappa_2}$  (risp.  $\bar{T}_{n+\kappa_1+\kappa_2+1}$ ) (linea tratteggiata), i punti  $\mathcal{T}_n^{\beta, \gamma_\kappa}$  (risp.  $\mathcal{U}_{n+1}^{\beta, \gamma_\kappa}$ ) (cerchi blu) e  $\{t_1, \dots, t_{\kappa_2}, t_{n+\kappa_2+1}, \dots, t_{n+\kappa_1+\kappa_2}\}$  (risp.  $\{u_0, \dots, u_{\kappa_2-1}, u_{n+\kappa_2+1}, \dots, u_{n+\kappa_1+\kappa_2}\}$ ) (Croci rosse) e l'insieme  $\Omega_{\beta, \gamma_\kappa}$ , delimitato dalle linee verticali punteggiate.

#### 4 Costante di Lebesgue dei $(\beta, \gamma)$ -nodi di CL

In questa sezione studiamo l'andamento asintotico della costante di Lebesgue associata ai  $(\beta, \gamma)$ -nodi di CL, al variare di  $\beta$  e  $\gamma$ .

Mostriamo innanzitutto che, per valori dei parametri "sufficientemente piccoli", vale il seguente Teorema.

**Teorema 3.** *Siano  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\beta, \gamma \in [0, 2[$ ,  $\beta + \gamma < 2$  e  $\delta := \max\{\beta, \gamma\}$ . Se*

$$\delta < \frac{2}{n^2(\pi + 2 \log(n + 1))},$$

*allora la costante di Lebesgue dei  $(\beta, \gamma)$ -punti di CL cresce logicamente, ovvero*

$$\Lambda(\mathcal{U}_{n+1}^{\beta, \gamma}, \Omega) = O(\log n).$$

*Dimostrazione.* È stato dimostrato in [23], che  $\mathcal{U}_{n+1}$  mantiene una crescita logica della costante di Lebesgue per una perturbazione  $\varepsilon$ , tale che

$$\varepsilon < \frac{\pi}{n^2(\pi + 2 \log(n + 1))}. \quad (3)$$

Consideriamo  $\varepsilon_j := |\tilde{u}_j - u_j|$ ,  $j = 0, \dots, n$ , la perturbazione  $j$ -esima, dove  $\tilde{u}_j \in \mathcal{U}_{n+1}^{\beta, \gamma}$  e  $u_j \in \mathcal{U}_{n+1}$ . Si ha

$$\begin{aligned}\varepsilon_j &= \left| \cos \left( \frac{(2 - \beta - \gamma)j\pi}{2n} + \frac{\gamma\pi}{2} \right) - \cos \left( \frac{j\pi}{n} \right) \right| \leq \\ &\leq \left| \frac{\beta + \gamma}{2n} j\pi - \frac{\gamma\pi}{2} \right| \leq \frac{\delta\pi}{2} .\end{aligned}$$

Quindi, grazie a (3), la costante di Lebesgue cresce logaritmicamente se

$$\frac{\delta\pi}{2} < \frac{\pi}{n^2(\pi + 2 \log(n + 1))} ,$$

da cui si ottiene la tesi.  $\square$

In questo Teorema, abbiamo usato il fatto che i  $(\beta, \gamma)$ -punti di CL possono essere considerati come una perturbazione dei punti di CL per  $\beta$  e  $\gamma$  "sufficientemente piccoli". Inoltre, facciamo notare che il risultato è vero su tutto  $\Omega$ , nonostante i punti siano definiti su  $\Omega_{\beta, \gamma}$ .

Consideriamo adesso  $\bar{\beta}_n = 2/n$  e  $\gamma = 0$ . Si ha

$$\mathcal{U}_n^{\bar{\beta}_n, 0} = \left\{ \cos \left( \frac{j\pi}{n} \right) \right\}_{j=0, \dots, n-1} = \mathcal{U}_{n+1} \setminus \{-1\} . \quad (4)$$

Per dimostrare i prossimi teoremi, useremo il peso baricentrico relativo all'interpolante di Lagrange dei nodi di CL. Ovvero, sia  $\mathcal{U}_{n+1} = \{u_i\}_{i=0, \dots, n}$ , vale la seguente uguaglianza:

$$\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{u_i - u_j} = (-1)^i \frac{2^{n-1}}{n} \sigma_i , \quad (5)$$

$$\text{dove } \sigma_i = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } i = 0 \text{ o } i = n , \\ 1 & \text{se } 1 < i < n . \end{cases}$$

Utilizzando questa uguaglianza, viene definita l'*interpolazione baricentrica nei punti di Chebyshev*, la quale risulta numericamente stabile e dalla rapida esecuzione, come studiato in [2, 25].

**Teorema 4.** *Siano  $\bar{\beta}_n = 2/n, n \in \mathbb{N}_{>0}$ . Allora*

$$\lambda(\mathcal{U}_n^{\bar{\beta}_n, 0}; -1) = 2n - 1 .$$

*Dimostrazione.* Consideriamo  $\mathcal{U}_{n+1} = \{u_i\}_{i=0,\dots,n}$  e, per (4), poniamo  $\mathcal{U}_n^{\bar{\beta}_n,0} = \{u_i\}_{i=0,\dots,n-1}$ . Per  $i = 0, \dots, n-1$  e  $x \in \Omega$ , utilizzando (5) vale

$$\begin{aligned} \ell_i(x) &= \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n-1} (x - u_j) \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n-1} \frac{1}{u_i - u_j} \\ &= \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n-1} (x - u_j) \cdot (u_i - u_n) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{u_i - u_j} \\ &= \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n-1} (x - u_j) \cdot (1 + u_i) (-1)^i \frac{2^{n-1}}{n} \sigma_i, \end{aligned}$$

con  $\sigma_i = 1$  se  $1 < i < n$ ,  $1/2$  altrimenti. Calcoliamo dunque il suo valore in  $-1$ :

$$\begin{aligned} \ell_i(-1) &= \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n-1} (-1 - u_j) \cdot (1 + u_i) (-1)^i \frac{2^{n-1}}{n} \sigma_i \\ &= \prod_{j=0}^{n-1} (-1 - u_j) \cdot \frac{(1 + u_i)}{(-1 - u_i)} (-1)^i \frac{2^{n-1}}{n} \sigma_i \\ &= \prod_{j=0}^{n-1} (-1 - u_j) \cdot (-1)^{i+1} \frac{2^{n-1}}{n} \sigma_i \end{aligned}$$

Notiamo poi l'uguaglianza

$$\prod_{j=0}^{n-1} (-1 - u_j) = \prod_{j=0}^{n-1} (u_n - u_j)$$

e, grazie a (5), si ha

$$\prod_{j=0}^{n-1} (-1 - u_j) = \frac{n}{2^{n-2}} (-1)^n.$$

Dunque, si ottiene

$$|\ell_i(-1)| = \left| \frac{n}{2^{n-2}} (-1)^n \cdot (-1)^{i+1} \frac{2^{n-1}}{n} \sigma_i \right| = 2\sigma_i.$$

Per concludere,

$$\lambda(\mathcal{U}_n^{\bar{\beta}_n, 0}; -1) = \sum_{i=0}^{n-1} |\ell_i(-1)| = \sum_{i=0}^{n-1} 2\sigma_i = 2n - 1 .$$

□

Inoltre, mostriamo che  $-1$  è punto di massimo assoluto della funzione di Lebesgue relativa ai punti  $\mathcal{U}_n^{\bar{\beta}_n, 0}$ , per  $x \in \Omega$ . Di conseguenza la costante di Lebesgue ha un'andamento asintotico lineare.

**Teorema 5.** *Siano  $\bar{\beta}_n = 2/n, n \in \mathbb{N}_{>0}$ . La costante di Lebesgue associata a  $\mathcal{U}_n^{\bar{\beta}_n, 0}$  è  $2n - 1$ , ovvero*

$$\Lambda(\mathcal{U}_n^{\bar{\beta}_n, 0}, \Omega) = \lambda(\mathcal{U}_n^{\bar{\beta}_n, 0}; -1) = 2n - 1 .$$

*Dimostrazione.* Siano  $\mathcal{U}_n^{\bar{\beta}_n, 0} = \{u_i\}_{i=0, \dots, n-1}$  con  $u_{i+1} < u_i \quad \forall i = 0, \dots, n-2$ . Per il Teorema 4, sappiamo che

$$\lambda(\mathcal{U}_n^{\bar{\beta}_n, 0}; -1) = 2n - 1 .$$

Consideriamo  $x, y \in [-1, u_{n-1}]$  tali che  $x < y$ , allora si ha

$$|x - u_k| = u_k - x > u_k - y = |y - u_k| ,$$

per ogni  $k = 0, \dots, n-1$ , da cui risulta

$$|\ell_i(x)| = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n-1} |x - u_j| (1 + u_i) \frac{2^{n-1}}{n} > \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n-1} |y - u_j| (1 + u_i) \frac{2^{n-1}}{n} = |\ell_i(y)| .$$

per  $i = 0, \dots, n-1$ .

Di conseguenza, la funzione di Lebesgue è strettamente decrescente nell'intervallo  $[-1, u_{n-1}]$ ,

$$\lambda(\mathcal{U}_n^{\bar{\beta}_n, 0}; x) = \sum_{i=0}^{n-1} |\ell_i(x)| > \sum_{i=0}^{n-1} |\ell_i(y)| = \lambda(\mathcal{U}_n^{\bar{\beta}_n, 0}; y) ,$$

e assume quindi massimo in  $-1$ .

Consideriamo adesso l'intervallo  $]u_{n-1}, 1]$ . La funzione di Lebesgue risulta essere

$$\lambda(\mathcal{U}_n^{\bar{\beta}_n, 0}; x) = \frac{2^{n-1}}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left( \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n-1} |x - u_j| (1 + u_i) \delta_i \right) .$$

Sappiamo che  $\mathcal{U}_n^{\bar{\beta}_n,0} = \mathcal{U}_{n+1} \setminus \{-1\}$  e  $\mathcal{U}_{n+1}$  ha costante di Lebesgue dell'ordine di  $\log(n+1)$ , in particolare per  $n > 1$  si ha  $\lambda(\mathcal{U}_{n+1}; x) < n$ .

Usiamo dunque

$$\begin{aligned} \lambda(\mathcal{U}_{n+1}; x) &= \frac{2^{n-1}}{n} \sum_{i=0}^n \left( \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n |x - u_j| \delta_i \right) \\ &= \frac{2^{n-1}}{n} \left[ \sum_{i=0}^{n-1} \left( \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n-1} |x - u_j| (1+x) \delta_i \right) + \frac{1}{2} \prod_{j=0}^{n-1} |x - u_j| \right], \end{aligned}$$

per maggiore  $\lambda(\mathcal{U}_n^{\bar{\beta}_n,0}; x)$ .

$$\begin{aligned} \lambda(\mathcal{U}_n^{\bar{\beta}_n,0}; x) &= \lambda(\mathcal{U}_n^{\bar{\beta}_n,0}; x) - \lambda(\mathcal{U}_{n+1}; x) + \lambda(\mathcal{U}_{n+1}; x) \\ &= \lambda(\mathcal{U}_{n+1}; x) + \frac{2^{n-1}}{n} \left[ \sum_{i=0}^{n-1} \left( \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n-1} |x - u_j| (1 + u_i - 1 - x) \delta_i \right) - \frac{1}{2} \prod_{j=0}^{n-1} |x - u_j| \right]. \end{aligned}$$

Consideriamo gli elementi dentro la sommatoria:

- Se  $u_i \leq x$ , allora l'elemento  $i$ -esimo è negativo o nullo.
- Se  $u_i > x$ , l'elemento  $i$ -esimo è positivo e  $(u_i - x) = |x - u_i|$ .
- Se  $i = 0 \Rightarrow 1 = u_0 \geq x$  e l'elemento 0-esimo è uguale a  $\left( \frac{1}{2} \prod_{j=0}^{n-1} |x - u_j| \right)$

Grazie a queste osservazioni possiamo porre

$$\begin{aligned}
\lambda(\mathcal{U}_n^{\bar{\beta}_n, 0}; x) &= \lambda(\mathcal{U}_{n+1}, x) + \frac{2^{n-1}}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \left( \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n-1} |x - u_j| (u_i - x) \delta_i \right) \\
&\leq \lambda(\mathcal{U}_{n+1}, x) + \frac{2^{n-1}}{n} \sum_{\substack{i=1 \\ u_i > x}}^{n-1} \left( \prod_{j=0}^{n-1} |x - u_j| \right) \\
&\leq \lambda(\mathcal{U}_{n+1}, x) + (n-2) \left( \frac{2^{n-1}}{n} \cdot \prod_{j=0}^{n-1} |x - u_j| \right),
\end{aligned}$$

dove l'ultima disuguaglianza è data dal fatto che gli elementi della sommatoria sono uguali e, essendo  $u_{n-1} < x$ , sono al più  $(n-2)$  elementi.

Se dimostriamo che  $\left( \frac{2^{n-1}}{n} \cdot \prod_{j=0}^{n-1} |x - u_j| \right) \leq 1$  per  $x \in ]u_{n-1}, 1]$ , allora la dimostrazione è conclusa. Infatti, si avrebbe

$$\lambda(\mathcal{U}_{n+1}, x) + (n-2) \left( \frac{2^{n-1}}{n} \cdot \prod_{j=0}^{n-1} |x - u_j| \right) \leq n + n - 2,$$

e, di conseguenza, si ha

$$\max_{x \in ]u_{n-1}, 1]} \lambda(\mathcal{U}_n^{\bar{\beta}_n, 0}; x) \leq 2n - 2 < 2n - 1 = \lambda(\mathcal{U}_n^{\bar{\beta}_n, 0}; -1).$$

Consideriamo adesso l'insieme di punti  $\mathcal{U}_{n+1}$  e i corrispondenti polinomi di Lagrange

$$\tilde{\ell}_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{(x - u_j)}{(u_i - u_j)} = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x - u_j) \cdot \frac{2^{n-1}}{n} (-1)^i \delta_i$$

Facciamo notare la seguente uguaglianza:

$$\left( \frac{2^{n-1}}{n} \cdot \prod_{j=0}^{n-1} |x - u_j| \right) = 2 |\tilde{\ell}_n(x)|$$

Da [3], usando la sostituzione  $x = \cos(\theta)$  e  $u_i = \cos(\theta_i)$ , allora vale

$$\tilde{\ell}_i(\cos(\theta)) = \frac{(-1)^i}{2n} \sin(n\theta) \left( \cot\left(\frac{\theta + \theta_i}{2}\right) + \cot\left(\frac{\theta - \theta_i}{2}\right) \right) \delta_i$$

Nel caso  $i = n$  si ha  $\theta_n = \pi$  e

$$\begin{aligned} \left( \cot \left( \frac{\theta + \theta_n}{2} \right) + \cot \left( \frac{\theta - \theta_n}{2} \right) \right) &= \left( \frac{\cos(\frac{\theta+\pi}{2})}{\sin(\frac{\theta+\pi}{2})} + \frac{\cos(\frac{\theta-\pi}{2})}{\sin(\frac{\theta-\pi}{2})} \right) = - \left( \frac{\sin(\frac{\theta}{2})}{\cos(\frac{\theta}{2})} + \frac{\sin(\frac{\theta}{2})}{\cos(\frac{\theta}{2})} \right) \\ &= -2 \tan \left( \frac{\theta}{2} \right) . \end{aligned}$$

Dunque, si ha

$$\tilde{\ell}_n(\cos(\theta)) = \frac{(-1)^{n+1}}{2n} \sin(n\theta) \tan \left( \frac{\theta}{2} \right) .$$

Valutiamo adesso  $2|\tilde{\ell}_n(x)|$  per  $x \in ]u_{n-1}, 1]$ , ovvero per  $\theta \in [0, \frac{(n-1)\pi}{n}[$  :

$$2|\tilde{\ell}_n(\cos(\theta))| = \frac{|\sin(n\theta)|}{n} \tan \left( \frac{\theta}{2} \right) \leq \frac{\tan \left( \frac{\theta}{2} \right)}{n} .$$

$\tan \left( \frac{\theta}{2} \right)$  è non negativa e strettamente crescente per  $\theta \in [0, \frac{(n-1)\pi}{n}[$ , dunque:

$$2|\tilde{\ell}_n(\cos(\theta))| \leq \frac{\tan \left( \frac{(n-1)\pi}{2n} \right)}{n} = \frac{\cos \left( \frac{\pi}{2n} \right)}{n \sin \left( \frac{\pi}{2n} \right)} \leq \frac{1}{n \sin \left( \frac{\pi}{2n} \right)} .$$

Dimostriamo adesso che la funzione  $g(y) := \frac{1}{y \sin(\frac{\pi}{2y})}$  è decrescente per  $y \geq 1$ .

$$g'(y) = \frac{\frac{\pi}{2y} \cos \left( \frac{\pi}{2y} \right) - \sin \left( \frac{\pi}{2y} \right)}{y^2 \sin^2 \left( \frac{\pi}{2y} \right)} .$$

Analogamente valutiamo  $h(y) := \frac{\pi}{2y} \cos \left( \frac{\pi}{2y} \right) - \sin \left( \frac{\pi}{2y} \right)$  :

$$h'(y) = \frac{\pi^2}{4y^3} \sin \left( \frac{\pi}{2y} \right) > 0 \quad \text{per } y \geq 1 .$$

Osserviamo che  $h(1) = -1$  e  $\lim_{y \rightarrow \infty} h(y) = 0$ , dunque  $h(y)$  è non positiva per  $y \geq 1$ . Di conseguenza,  $g(y)$  è decrescente per  $y \geq 1$  e, essendo  $g(1) = 1$  si ha:

$$g(y) \leq g(1) = 1 .$$

In particolare, ciò è vero per i numeri naturali e possiamo dunque concludere:

$$2|\tilde{\ell}_n(\cos(\theta))| \leq \frac{1}{n \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = g(n) \leq 1, \quad \theta \in \left[0, \frac{(n-1)\pi}{n}\right[.$$

Possiamo dunque concludere che la funzione di Lebesgue assume massimo in  $-1$ , ovvero:

$$\Lambda(\mathcal{U}_n^{\bar{\beta}_n, 0}, \Omega) = \lambda(\mathcal{U}_n^{\bar{\beta}_n, 0}; -1) = 2n - 1.$$

□

Attraverso esperimenti numerici, analizziamo adesso l'andamento della costante di Lebesgue per  $\beta \in [0, 2[$  e  $\gamma = 0$ .

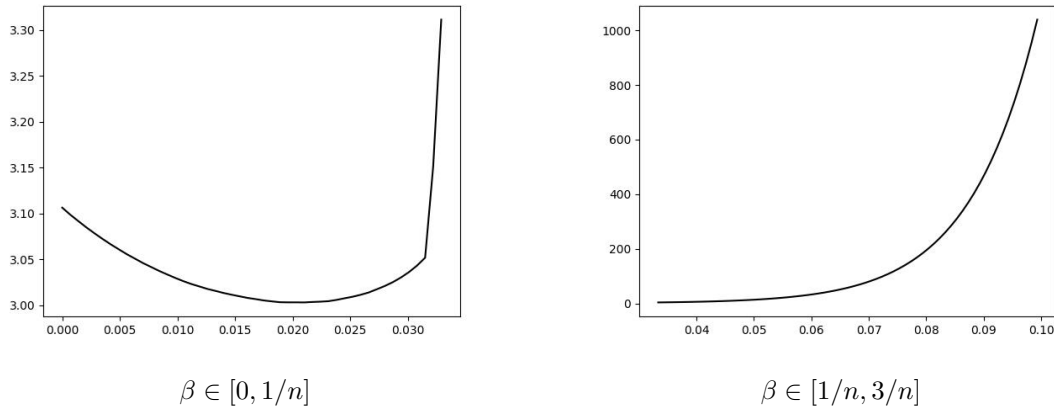


Figura 4: Per  $n = 30$  fissato. La costante di Lebesgue associata a  $\mathcal{U}_n^{\beta, 0}$ , al variare di  $\beta \in [0, 1/n]$  e  $\beta \in [1/n, 3/n]$  rispettivamente.

A partire da questi risultati, presentiamo la seguente congettura:

**Congettura 1.** *Sia  $n \in \mathbb{N}$  fissato. Supponiamo che esista  $\beta_n^* \in [0, 1/n[$ , tale che  $\forall \beta \in [0, 2[$ ,  $\beta \neq \beta_n^*$ , vale*

$$\Lambda(\mathcal{U}_n^{\beta_n^*, 0}, \Omega) < \Lambda(\mathcal{U}_n^{\beta, 0}, \Omega).$$

*Inoltre,  $\Lambda(\mathcal{U}_n^{\beta, 0}, \Omega)$  decresce monotonamente per  $\beta \in [0, \beta_n^*[$ , mentre è crescente per  $\beta \in ]\beta_n^*, 2[$ . In particolare esistono dei valori di  $\beta$  per cui la costante di Lebesgue cresce più lentamente rispetto a quella associata ai punti di CL classici.*

Studiamo adesso il valore della costante di Lebesgue associata a  $\mathcal{U}_n^{\beta, \gamma}$ , con  $\beta = \gamma = \bar{\delta}_n = 2/(n+1)$ .



Notiamo che, per il Teorema 2, si ha

$$\mathcal{U}_n^{\bar{\delta}_n, \bar{\delta}_n} = \mathcal{U}_{n+2} \setminus \{\pm 1\} .$$

Da [3, 18] sappiamo che la costante di Lebesgue risulta essere

$$\Lambda(\mathcal{U}_n^{\bar{\delta}_n, \bar{\delta}_n}, \Omega) = n .$$

Analogamente al caso precedente studiamo numericamente i valori di  $\Lambda(\mathcal{U}_n^{\delta, \delta}, \Omega)$ , per  $\delta \in [0, 1[$ .

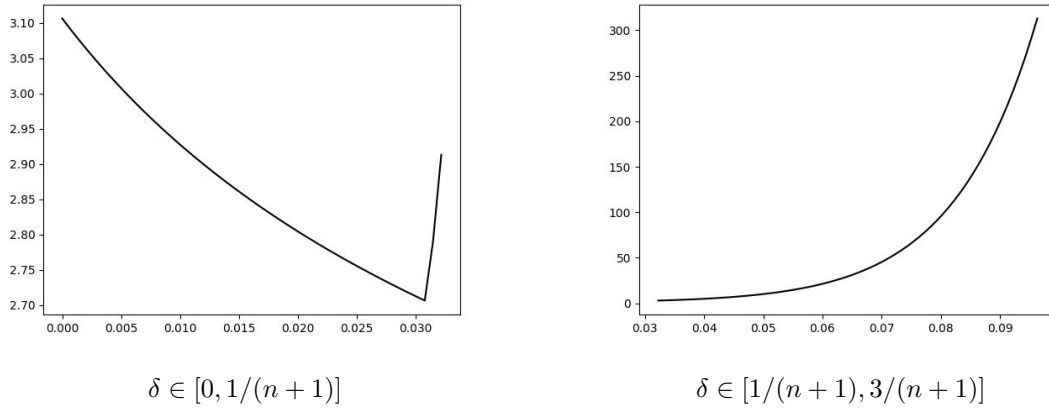


Figura 5: Per  $n = 30$  fissato. La costante di Lebesgue associata a  $\mathcal{U}_n^{\delta, \delta}$ , al variare di  $\delta \in [0, 1/(n+1)]$  e  $\beta \in [1/(n+1), 3/(n+1)]$  rispettivamente.

**Congettura 2.** *Sia  $n \in \mathbb{N}$  fissato. Supponiamo che esista  $\delta_n^* \in [0, 1/(n+1)[$ , tale che  $\forall \delta \in [0, 1[$ ,  $\delta \neq \delta_n^*$ , vale*

$$\Lambda(\mathcal{U}_n^{\delta_n^*, \delta_n^*}, \Omega) < \Lambda(\mathcal{U}_n^{\delta, \delta}, \Omega) .$$

*Inoltre,  $\Lambda(\mathcal{U}_n^{\delta, \delta}, \Omega)$  decresce monotonamente per  $\delta \in [0, \delta_n^*[$ , mentre è crescente per  $\delta \in ]\delta_n^*, 2[$ . In particolare, anche in questo caso, esistono dei valori di  $\delta$  per cui la costante di Lebesgue cresce più lentamente rispetto a quella associata ai punti di CL classici.*

## 5 $(\beta, \gamma)$ -punti di Chebyshev come mappatura di punti equispaziati

I punti di Chebyshev e i punti di CL possono essere ottenuti a partire da un insieme di punti equispaziati trasformati dalla mappa

$$M_\alpha(x) := \frac{\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}, \alpha \in ]0, 1], x \in \Omega, \quad (6)$$

chiamata Kosloff Tal-Ezer (KTE).

Infatti, definiamo

$$\mathcal{S}_n := \left\{ 1 - \frac{2j-1}{n} \right\}_{j=1, \dots, n},$$

e

$$\mathcal{E}_n := \left\{ 1 - \frac{2j}{n-1} \right\}_{j=0, \dots, n-1}.$$

Sono insiemi di punti equispaziati e valgono le seguenti uguaglianze:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_n &= M_1(\mathcal{S}_n) := \{M_1(s_j) | s_j \in \mathcal{S}_n\}_{j=1, \dots, n}, \\ \mathcal{U}_n &= M_1(\mathcal{E}_n) := \{M_1(e_j) | e_j \in \mathcal{E}_n\}_{j=0, \dots, n-1}. \end{aligned}$$

Similmente, mostriamo che i  $(\beta, \gamma)$ -punti di Chebyshev e di CL possono essere ottenuti da punti equispaziati trasformati dalla mappa Kosloff Tal-Ezer con  $\alpha = 1$ .

**Proposizione 5.** *Siano  $\beta, \gamma \in [0, 2[$ ,  $\beta + \gamma < 2$  e siano*

$$\mathcal{S}_n^{\beta, \gamma} := \left\{ 1 - \gamma - \frac{(2 - \beta - \gamma)(2j - 1)}{2n} \right\}_{j=1, \dots, n},$$

e

$$\mathcal{E}_n^{\beta, \gamma} := \left\{ 1 - \gamma - \frac{(2 - \beta - \gamma)j}{n - 1} \right\}_{j=0, \dots, n-1}.$$

Allora,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_n^{\beta, \gamma} &= M_1(\mathcal{S}_n^{\beta, \gamma}), \\ \mathcal{U}_n^{\beta, \gamma} &= M_1(\mathcal{E}_n^{\beta, \gamma}). \end{aligned}$$

*Dimostrazione.* Osserviamo che valgono le seguenti uguaglianze:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\left(1 - \gamma - \frac{(2 - \beta - \gamma)(2j - 1)}{2n}\right)\right) = \cos\left(\frac{(2 - \beta - \gamma)(2j - 1)\pi}{4n} + \frac{\gamma\pi}{2}\right),$$

e

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\left(1 - \gamma - \frac{(2 - \beta - \gamma)j}{n - 1}\right)\right) = \cos\left(\frac{(2 - \beta - \gamma)j\pi}{2(n - 1)} + \frac{\gamma\pi}{2}\right).$$

La tesi segue facilmente, dalla definizione della mappa KTE. □

Facciamo notare che  $\mathcal{S}_n^{\beta,\gamma}$  e  $\mathcal{E}_n^{\beta,\gamma}$  sono definiti su  $\bar{\Omega}_{\beta,\gamma} := [-1 + \beta, 1 - \gamma] \subseteq \Omega$ .

I  $(\beta, \gamma)$ -punti di Chebyshev e di Chebyshev-Lobatto sono collegati dalla seguente relazione.

**Proposizione 6.** *Siano  $\beta, \gamma \in [0, 2]$ ,  $\beta + \gamma < 2$ . Si ha*

$$\mathcal{T}_n^{\beta,\gamma} = \mathcal{U}_n^{\beta + \frac{2-\beta-\gamma}{2n}, \gamma + \frac{2-\beta-\gamma}{2n}}.$$

*Dimostrazione.* Utilizzando la Proposizione 5, è sufficiente verificare la seguente identità

$$\mathcal{S}_n^{\beta,\gamma} = \mathcal{E}_n^{\beta + \frac{2-\beta-\gamma}{2n}, \gamma + \frac{2-\beta-\gamma}{2n}}.$$

Poniamo  $\rho = 2 - \beta - \gamma$ , allora

$$\mathcal{E}_n^{\beta + \frac{2-\beta-\gamma}{2n}, \gamma + \frac{2-\beta-\gamma}{2n}} = \left\{ 1 - \gamma - \frac{\rho}{2n} - \left(\rho - \frac{\rho}{n}\right) \frac{j-1}{n-1} \right\}_{j=1, \dots, n},$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_n^{\beta,\gamma} &= \left\{ 1 - \gamma - \frac{\rho(2j-1)}{2n} \right\} = \left\{ 1 - \gamma - \frac{\rho}{2n} - \frac{\rho(2j-2)}{2n} \right\} \\ &= \left\{ 1 - \gamma - \frac{\rho}{2n} - \rho \left(\frac{n-1}{n}\right) \frac{j-1}{n-1} \right\} \\ &= \left\{ 1 - \gamma - \frac{\rho}{2n} - \left(\rho - \frac{\rho}{n}\right) \frac{j-1}{n-1} \right\} = \mathcal{E}_n^{\beta + \frac{2-\beta-\gamma}{2n}, \gamma + \frac{2-\beta-\gamma}{2n}}, \end{aligned}$$

per ogni  $j = 1, \dots, n$ . □

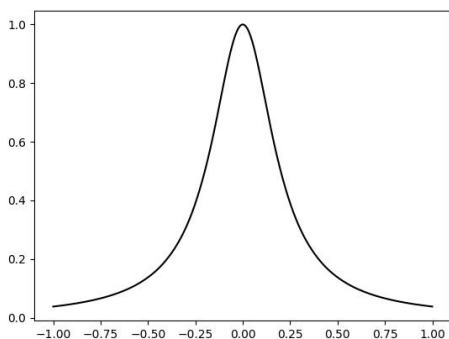
In particolare, osserviamo che vale

$$\mathcal{T}_n = \mathcal{U}_n^{\frac{1}{n}, \frac{1}{n}}.$$

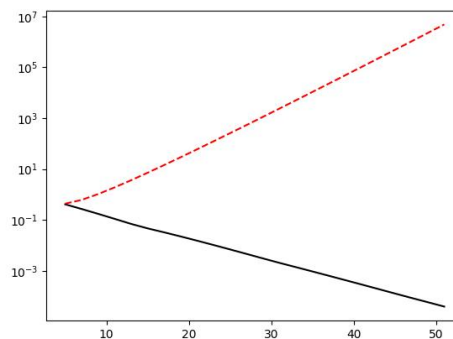
La proposizione 6 implica dunque che è sufficiente studiare i  $(\beta, \gamma)$ -punti di CL. In quanto comprendono anche i  $(\beta, \gamma)$ -punti di Chebyshev.

## 6 Il *fake nodes approach* e il caso limite della mappa S-Gibbs

Abbiamo osservato, attraverso esperimenti numerici, che esistono valori di  $\beta$  e  $\gamma$  per i quali i punti  $\mathcal{U}_n^{\beta, \gamma}$  presentano una crescita logaritmica della costante di Lebesgue e, in alcuni casi è anche più lenta rispetto a quella associata a  $\mathcal{U}_n$ . È dunque possibile utilizzare i  $(\beta, \gamma)$ -punti di CL per risolvere problemi solitamente risolti attraverso l'uso di  $\mathcal{U}_n$ . Ad esempio, mostriamo tramite i successivi grafici essere una buona scelta di punti per affrontare il fenomeno di Runge.



Interpolazione della funzione di Runge in  $\mathcal{U}_n^{\beta, \gamma}$ .



Errori assoluti in scala logaritmica.

Figura 6: Nella prima figura si ha il polinomio interpolante la funzione di Runge nei punti  $\mathcal{U}_n^{\beta, \gamma}$ , con  $n = 40$  e  $\beta = \gamma = \frac{1}{n+1}$ . Nella seconda figura sono riportati gli errori assoluti relativi ai punti equispaziati (linea rossa tratteggiata) e a  $\mathcal{U}_n^{\beta, \gamma}$  (linea nera continua) per  $n$  variante con passo 2 e  $\beta = \gamma = \frac{1}{n+1}$ .

Tuttavia, nell'interpolazione si dispone di un insieme di punti (usualmente equispaziati) e dei relativi valori della funzione campionati su di essi e non è sempre possibile ricampionare la funzione in punti specifici come i  $(\beta, \gamma)$ -punti di CL. In questo caso è possibile fare uso del *fake nodes approach*, introdotto in [14]. Grazie ad esso, è possibile mappare i punti di partenza in un altro insieme di punti "ben condizionato"

e calcolare l'interpolante in questo nuovo insieme, senza dover ricampionare la funzione. È possibile quindi prevenire il fenomeno di Runge, poichè i punti equispaziati  $\mathcal{E}_{n+1}^{0,0}$  in  $[-1, 1]$  sono mappati in  $\mathcal{U}_{n+1}$  tramite la mappa KTE.

In questo documento trattiamo il caso univariato. Il caso multivariato è stato recentemente studiato in [8, 15].

Presentiamo brevemente la costruzione del *fake nodes approach*.

Consideriamo adesso  $\Omega = [a, b] \subset \mathbb{R}$ , con  $a < b$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ . Siano  $\mathcal{X}_{n+1} = \{x_i\}_{i=0, \dots, n} \subset \Omega$  un insieme di punti distinti,  $\mathcal{F}_{n+1} = \{f_i = f(x_i)\}_{i=0, \dots, n}$  il campionamento sui nodi della funzione  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  e  $S : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una mappa iniettiva. Possiamo calcolare il polinomio  $P_{n,g} : S(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  interpolante gli  $\mathcal{F}_{n+1}$  nei *fake nodes*  $S(\mathcal{X}_{n+1}) = \{S(x_i) = \tilde{x}_i\}_{i=0, \dots, n}$  tramite la seguente uguaglianza; Sia  $\tilde{x} \in S(\Omega)$ ,

$$P_{n,g}(\tilde{x}) = \sum_{i=0}^n c_i \tilde{x}^i ,$$

per una funzione  $g : S(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  appartenente a  $C^k(S(\Omega))$ ,  $k \geq 0$  tale che

$$g|_{S(\mathcal{X}_{n+1})} = f|_{\mathcal{X}_{n+1}} .$$

Siamo interessati a definire

$$R_{n,f}^S(x) := P_{n,g}(S(x)) = \sum_{i=0}^n c_i^S S(x)^i , \quad x \in \Omega ,$$

dove  $\mathbf{c}^S = (c_0^S, \dots, c_n^S)^t$  è ottenuto risolvendo il sistema lineare  $V^S \mathbf{c}^S = \mathbf{f}$ , con  $V^S = V(S(x_0), \dots, S(x_n))$ , matrice di Vandermonde.

La costante di Lebesgue costruita sulla base di Lagrange mappata  $\{\ell_0^S, \dots, \ell_n^S\}$ , con

$$\ell_i^S(x) := \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{S(x) - S(x_j)}{S(x_i) - S(x_j)} , \quad i = 0, \dots, n , \quad x \in \Omega ,$$

è definita come  $\Lambda^S(\mathcal{X}_{n+1}, \Omega) = \max_{x \in \Omega} \lambda(\mathcal{X}_{n+1}; x)$ . Inoltre vale l'uguaglianza

$$\Lambda^S(\mathcal{X}_{n+1}, \Omega) = \Lambda(S(\mathcal{X}_{n+1}), S(\Omega)) .$$

Due delle proprietà più importanti del *fake nodes approach* sono l'arbitrarietà di  $\mathcal{X}_{n+1}$  e la stabilità dell'interpolante. Vale infatti

$$\left\| R_{n,f}^S - R_{n,\tilde{f}}^S \right\|_{\infty, \Omega} \leq \Lambda^S(\mathcal{X}_{n+1}, \Omega) \cdot \left\| f - \tilde{f} \right\|_{\infty, \mathcal{X}_{n+1}} ,$$

dove  $\tilde{f}$  è una perturbazione dei valori di  $f$ .

Oltre al fenomeno di Runge, il *fake nodes approach* è stato utilizzato in altre applicazioni, ad esempio in [11, 12]. In [14] viene invece discusso un metodo per mitigare il fenomeno di Gibbs.

Siano  $\xi$ , il punto di discontinuità,  $\Omega^1 = [a, \xi]$ ,  $\Omega^2 = ]\xi, b]$  e  $k \in \mathbb{R}, k > 0$ . Nelle applicazioni, è possibile individuare le discontinuità attraverso algoritmi stabili, ad esempio [1, 4].

L'idea di fondo consiste nell'aumentare la distanza tra il nodo precedente e quello successivo a  $\xi$ , riducendo dunque il fenomeno di Gibbs. Per fare ciò, usiamo la mappa S-Gibbs, definita come

$$S_\kappa(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in \Omega^1, \\ x + \kappa & \text{se } x \in \Omega^2, \end{cases} \quad (7)$$

scegliendo  $\kappa$  "sufficientemente grande".

Vogliamo adesso analizzare l'andamento della costante di Lebesgue relativa alla mappa S-Gibbs nel caso limite, ovvero per  $\kappa \rightarrow \infty$ .

Sia  $\xi \in \mathring{\Omega}$  tale che

$$\mathcal{X}^1 := \{x_i \in \mathcal{X}_{n+1} \mid x_i \leq \xi\}, \quad \mathcal{X}^2 := \{x_i \in \mathcal{X}_{n+1} \mid x_i > \xi\},$$

soddisfi

$$|\mathcal{X}^1| - |\mathcal{X}^2| \in \{-1, 0, 1\}.$$

Ricordando la mappa (7), vogliamo studiare

$$\Lambda^\infty(\mathcal{X}_{n+1}, \Omega) := \lim_{\kappa \rightarrow \infty} \Lambda^{S_\kappa}(\mathcal{X}_{n+1}, \Omega).$$

## 6.1 Caso dispari

Se  $n$  è dispari, allora dobbiamo studiare il caso  $|\mathcal{X}^1| = |\mathcal{X}^2|$ .

Posto  $\eta = \frac{n-1}{2}$ , osserviamo che  $x_i \in \Omega^1$  per  $i \leq \eta$  e  $x_i \in \Omega^2$  per  $i > \eta$ .

Se  $i \leq \eta$ , allora

$$\ell_i^{S_\kappa}(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{\eta} \frac{S_\kappa(x) - x_j}{x_i - x_j} \cdot \prod_{j=\eta+1}^n \frac{S_\kappa(x) - x_j - \kappa}{x_i - x_j - \kappa}. \quad (8)$$

Poniamo

$$A_i(x) := \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{\eta} \frac{S_\kappa(x) - x_j}{x_i - x_j}, \quad B_i(x) := \prod_{j=\eta+1}^n \frac{S_\kappa(x) - x_j - \kappa}{x_i - x_j - \kappa},$$

e osserviamo che valgono le seguenti uguaglianze:

$$\begin{aligned} A_i(x)|_{\Omega^1} &= \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{\eta} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, & B_i(x)|_{\Omega^1} &= \prod_{j=\eta+1}^n \frac{x - x_j - \kappa}{x_i - x_j - \kappa}, \\ A_i(x)|_{\Omega^2} &= \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{\eta} \frac{x + \kappa - x_j}{x_i - x_j}, & B_i(x)|_{\Omega^2} &= \prod_{j=\eta+1}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j - \kappa}. \end{aligned} \tag{9}$$

Per  $\kappa \rightarrow \infty$ , abbiamo che  $A_i(x) \cdot B_i(x)|_{\Omega^2} \rightarrow 0$  come  $1/\kappa$  e  $B_i(x)|_{\Omega^1} \rightarrow 1$ . Quindi otteniamo

$$\ell_i^\infty(x) := \lim_{\kappa \rightarrow \infty} \ell_i^{S_\kappa}(x) = \begin{cases} A_i(x)|_{\Omega^1} = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{\eta} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} & \text{se } x \in \Omega^1, \\ 0 & \text{se } x \in \Omega^2. \end{cases}$$

Il caso  $i > \eta$  è analogo e risulta

$$\ell_i^\infty(x) := \lim_{\kappa \rightarrow \infty} \ell_i^{S_\kappa}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \Omega^1, \\ \prod_{\substack{j=\eta+1 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} & \text{se } x \in \Omega^2. \end{cases}$$

In conclusione, risulta

$$\lambda^\infty(\mathcal{X}_{n+1}; x) := \lim_{\kappa \rightarrow \infty} \lambda^{S_\kappa}(\mathcal{X}_{n+1}; x) = \begin{cases} \lambda(\mathcal{X}^1; x) & \text{se } x \in \Omega^1, \\ \lambda(\mathcal{X}^2; x) & \text{se } x \in \Omega^2, \end{cases}$$

e

$$\Lambda^\infty(\mathcal{X}_{n+1}, \Omega) = \max \{ \Lambda(\mathcal{X}^1, \Omega^1), \Lambda(\mathcal{X}^2, \Omega^2) \}.$$

## 6.2 Caso pari

Se  $n$  è pari, allora siamo nel caso  $|\mathcal{X}^1| = |\mathcal{X}^2| \pm 1$ . Scambiando il ruolo di  $\mathcal{X}^1$  e  $\mathcal{X}^2$  le due possibilità portano a risultati analoghi.

Assumiamo che valga  $|\mathcal{X}^1| = |\mathcal{X}^2| + 1$ .

Sia  $\eta = n/2$  e poniamo  $i \leq \eta$ . I ragionamenti fatti in (8) e (9) valgono ancora e studiamo gli andamenti per  $\kappa \rightarrow \infty$ . Anche in questo caso si ha  $B_i(x)|_{\Omega^1} \rightarrow 1$ . Invece

$$A_i(x) \cdot B_i(x)|_{\Omega^2} = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{\eta} \frac{x + \kappa - x_j}{x_i - x_j} \cdot \prod_{j=\eta+1}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j - \kappa} \rightarrow (-1)^{n/2} r_i(x),$$

dove

$$r_i(x) := \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{\eta} \frac{1}{x_i - x_j} \cdot \prod_{j=\eta+1}^n (x - x_j).$$

Si ha dunque

$$\ell_i^\infty(x) = \begin{cases} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{\eta} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} & \text{se } x \in \Omega^1, \\ (-1)^{n/2} r_i(x) & \text{se } x \in \Omega^2. \end{cases}$$

Il caso  $i > \eta$  è simile al caso dispari con la differenza che

$$\prod_{j=0}^{\eta} \frac{x - x_j}{x_i + \kappa - x_j} \cdot \prod_{\substack{j=\eta+1 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j - \kappa}{x_i - x_j} \rightarrow 0,$$

come  $1/\kappa^2$  per  $\kappa \rightarrow \infty$ ,  $x \in \Omega^1$ .

Dunque si ha

$$\ell_i^\infty(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \Omega^1, \\ \prod_{\substack{j=\eta+1 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} & \text{se } x \in \Omega^2. \end{cases}$$

In conclusione, otteniamo



$$\lambda^\infty(\mathcal{X}_{n+1}; x) = \begin{cases} \lambda(\mathcal{X}^1; x) & \text{se } x \in \Omega^1, \\ \lambda(\mathcal{X}^2; x) + \sum_{i=0}^{\eta} |r_i(x)| & \text{se } x \in \Omega^2, \end{cases}$$

e

$$\Lambda^\infty(\mathcal{X}_{n+1}, \Omega) = \max \{ \Lambda(\mathcal{X}^1, \Omega^1), R(\mathcal{X}^2, \Omega^2) \},$$

con

$$R(\mathcal{X}^2, \Omega^2) := \max_{x \in \Omega^2} \left( \lambda(\mathcal{X}^2; x) + \sum_{i=0}^{\eta} |r_i(x)| \right).$$

### 6.3 Discontinuità multiple

Vogliamo generalizzare i risultati ottenuti precedentemente nel caso ci siano diverse discontinuità in  $\Omega$ .

**Teorema 6.** *Sia  $\Omega = [a, b]$ , con  $a, b \in \mathbb{R}$  e sia  $\mathcal{X}_{n+1} = \{x_i\}_{i=0, \dots, n} \subset \Omega$ ,  $n \in \mathbb{N}$  un insieme di punti ordinati crescentemente. Siano  $\xi_1 < \dots < \xi_d$  i punti di discontinuità, con  $\xi_i \in \Omega$ ,  $d \in \mathbb{N}$ ,  $d \geq 2$ . Poniamo  $\mathcal{D} = \{\Omega^1, \dots, \Omega^{d+1}\}$ , con  $\Omega^1 = [a, \xi_1]$ ,  $\Omega^{d+1} = ]\xi_d, b]$ ,  $\Omega^i = ]\xi_{i-1}, \xi_i]$ ,  $i = 2, \dots, d$  e  $\mathcal{X}^\nu = \mathcal{X}_{n+1}|_{\Omega^\nu}$ ,  $\nu = 1, \dots, d+1$ . Assumiamo*

$$|\mathcal{X}^\nu| - |\mathcal{X}^\tau| \in \{-1, 0, 1\},$$

per  $\nu, \tau = 1, \dots, d+1$ . Consideriamo la mappa

$$S_\kappa(x)|_{\Omega^\tau} := x + (\tau - 1)\kappa, \quad \tau = 1, \dots, d+1.$$

Denotiamo con  $\ell_{i,\mu}^\infty$  l' $i$ -esimo polinomio di Lagrange, con  $\mu$  tale che  $x_i \in \Omega^\mu$ . Allora,

$$|\ell_{i,\mu}^\infty(x)|_{\Omega^\tau} = \begin{cases} \prod_{\substack{j \in \mathcal{X}^\mu \\ j \neq i}} \left| \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right| & \text{se } \tau = \mu, \\ 0 & \text{se } \tau \neq \mu \text{ e } |\mathcal{X}^\tau| = |\mathcal{X}^\mu| \text{ oppure } |\mathcal{X}^\tau| = |\mathcal{X}^\mu| + 1, \\ |r_{i,\mu,\tau}(x)| C_{\mu,\tau} & \text{se } \tau \neq \mu \text{ e } |\mathcal{X}^\tau| = |\mathcal{X}^\mu| - 1, \end{cases}$$

dove

$$C_{\mu,\tau} := \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \mu, \tau}}^{d+1} \left| \frac{\tau - \nu}{\mu - \nu} \right|^{|\mathcal{X}^\nu|},$$

e

$$r_{i,\mu,\tau}(x) := \prod_{x_j \in \mathcal{X}^\tau} (x - x_j) \cdot \prod_{\substack{x_j \in \mathcal{X}^\mu \\ j \neq i}} \frac{1}{x_i - x_j} .$$

Inoltre si ha che  $\lim_{\kappa \rightarrow \infty} |\ell_{i,\mu}^\kappa(x)|_{\Omega^\tau}$  va a 0 con la stessa rapidità di  $1/\kappa$  se  $\tau \neq \mu$  e  $|\mathcal{X}^\tau| = |\mathcal{X}^\mu|$  o di  $1/\kappa^2$  nel caso  $|\mathcal{X}^\tau| = |\mathcal{X}^\mu| + 1$ .

*Dimostrazione.* Si ha

$$\ell_{i,\mu}^\kappa(x)|_{\Omega^\tau} = p_1(x)p_2(x) ,$$

con

$$p_1(x) := \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \mu, \tau}}^{d+1} \prod_{x_j \in \mathcal{X}^\nu} \frac{x - x_j + (\tau - \nu)\kappa}{x_i - x_j + (\mu - \nu)\kappa} ,$$

$$p_2(x) := \prod_{\substack{x_j \in \mathcal{X}^\mu \\ j \neq i}} \frac{x - x_j + (\tau - \mu)\kappa}{x_i - x_j} \prod_{x_j \in \mathcal{X}^\tau} \frac{x - x_j}{x_i - x_j + (\mu - \tau)\kappa} .$$

Se  $\tau = \mu$ , allora per  $\kappa \rightarrow \infty$ , si ottiene

$$\lim_{\kappa \rightarrow \infty} |p_1(x)| = 1 , \quad \lim_{\kappa \rightarrow \infty} |p_2(x)| = \prod_{\substack{x_j \in \mathcal{X}^\mu \\ j \neq i}} \left| \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right| .$$

Si ha dunque

$$|\ell_{i,\mu}^\infty(x)|_{\Omega^\mu} = \prod_{\substack{x_j \in \mathcal{X}^\mu \\ j \neq i}} \left| \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right| .$$

Se  $\tau \neq \mu$ , si ha

$$\lim_{\kappa \rightarrow \infty} |p_1(x)| = \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \mu, \tau}}^{d+1} \left| \frac{\tau - \nu}{\mu - \nu} \right|^{|\mathcal{X}^\nu|} = C_{\mu,\tau} ,$$

e

$$\lim_{\kappa \rightarrow \infty} |p_2(x)| = \begin{cases} 0 & \text{se } |\mathcal{X}^\tau| = |\mathcal{X}^\mu| \text{ o } |\mathcal{X}^\tau| = |\mathcal{X}^\mu| + 1 , \\ |r_{i,\mu,\tau}(x)| & \text{se } |\mathcal{X}^\tau| = |\mathcal{X}^\mu| - 1 , \end{cases}$$

con  $\lim_{\kappa \rightarrow \infty} |p_2(x)| = 1/\kappa = 0$  se  $|\mathcal{X}^\tau| = |\mathcal{X}^\mu|$  e  $\lim_{\kappa \rightarrow \infty} |p_2(x)| = 1/\kappa^2 = 0$  se  $|\mathcal{X}^\tau| = |\mathcal{X}^\mu| + 1$ .

La tesi segue computando  $|p_1(x)| \cdot |p_2(x)|$ .

□

È facile osservare che per 2 o più discontinuità  $C_{\mu,\tau}$ , può crescere esponenzialmente rispetto a  $n$ . Infatti, sia  $d = 2$ , allora

$$C_{1,2} = 2^{-|\mathcal{X}^3|}, C_{3,2} = 2^{-|\mathcal{X}^1|}, C_{2,1} = 2^{|\mathcal{X}^3|}, C_{2,3} = 2^{|\mathcal{X}^1|}, C_{1,3} = C_{3,1} = 1. \quad (10)$$

Un metodo per aggirare questo problema consiste nel scegliere i nodi in modo tale che  $|\mathcal{X}^\nu| = |\mathcal{X}^\tau|$ , per ogni  $\nu, \tau$ . In questo caso vale il seguente corollario.

**Corollario 3.** *Sotto le ipotesi del Teorema 6, assumiamo che valga*

$$|\mathcal{X}^\nu| = |\mathcal{X}^\tau|,$$

per  $\nu, \tau = 1, \dots, d + 1$ . Allora

$$\Lambda^\infty(\mathcal{X}_{n+1}, \Omega) = \max \{ \Lambda(\mathcal{X}^1, \Omega^1), \dots, \Lambda(\mathcal{X}^{d+1}, \Omega^{d+1}) \}.$$

*Dimostrazione.* La tesi segue da un'applicazione diretta del Teorema 6. □

Anche sotto le ipotesi del Corollario 3, la costante di Lebesgue associata al la costante di Lebesgue associata al *S-Gibbs fakes nodes approach* può crescere velocemente, a seconda della scelta dei nodi iniziale. Ciò implica una possibile instabilità dell'algoritmo, come è possibile osservare nel caso oltre al fenomeno di Gibbs, sia presente anche quello di Runge. Nella prossima sezione andiamo quindi a presentare un metodo stabile introdotto in [10].

## 7 Il metodo *GRASPA*

In questa sezione ci limitiamo al caso in cui i nodi sono equispaziati, ovvero

$$\mathcal{X}_{n+1} = \left\{ a + \frac{(b-a)j}{n} \right\}_{j=0, \dots, n}. \quad (11)$$

**Osservazione 1.** *Facciamo notare che, nel caso di un insieme di nodi generale, è possibile mappare i punti in modo da ricondursi al caso equispaziato.*

Siano  $d \geq 1$ ,  $\xi_1 < \dots < \xi_d$  i punti di discontinuità, con  $\xi_i \in \mathring{\Omega}$ , e poniamo  $\xi_0 = a$  e  $\xi_{d+1} = b$ . Definiamo  $\mathcal{D} = \{\Omega^1, \dots, \Omega^{d+1}\}$  e  $\mathcal{X}^1, \dots, \mathcal{X}^{d+1}$  come nel Teorema 6.

Consideriamo la mappa  $F_i : \Omega^i \rightarrow I$  che mappa  $\mathcal{X}^i$  in  $I = [-1, 1]$ , definita come

$$F_i(x) := \frac{2(x - \xi_{i-1})}{\xi_i - \xi_{i-1}} - 1, \quad i = 1, \dots, d + 1.$$

Facciamo notare che  $F_i(\mathcal{X}^i)$  sono punti equispaziati in  $[-1 + \beta_i, 1 - \gamma_i]$ , per dei parametri  $\beta_i, \gamma_i \in \mathbb{R}$ ,  $\beta_i + \gamma_i < 2$ . Si ha dunque

$$F_i(\mathcal{X}^i) = \mathcal{E}_{|\mathcal{X}^i|}^{\beta_i, \gamma_i}, \quad i = 1, \dots, d+1,$$

e, di conseguenza,

$$(M_1 \circ F_i)(\mathcal{X}^i) = \mathcal{U}_{|\mathcal{X}^i|}^{\beta_i, \gamma_i}, \quad i = 1, \dots, d+1.$$

Definiamo la mappa *multiple KTE* (KTE) su  $\Omega$  rispetto all'insieme  $\mathcal{D}$ , come

$$M_\alpha^{\Omega, \mathcal{D}}(x) := \sum_{i=1}^{d+1} (G_i \circ M_\alpha \circ F_i)(x) \cdot \mathbb{1}_i(x), \quad \alpha \in ]0, 1], x \in \Omega, \quad (12)$$

dove  $\mathbb{1}_i$  è la funzione indicatrice rispetto all'insieme  $\Omega^i$  e  $G_i$  è la funzione inversa di  $F_i$ ;

$$G_i := \frac{(\xi_i - \xi_{i-1})(x+1)}{2} + \xi^{i-1}, \quad i = 1, \dots, d+1.$$

La MKTE è una funzione continua e monotona crescente. È dunque possibile utilizzarla nel *fake nodes approach*.

In particolare, per  $\alpha = 1$ , si possono studiare i valori della costante di Lebesgue associata a  $\mathcal{X}^i$  nel sottoinsieme  $\Omega^i$ , analizzando la configurazione creata dai  $(\beta, \gamma)$ -punti di Chebyshev-Lobatto. Infatti,

$$\Lambda(M_1^{\Omega, \mathcal{D}}(\mathcal{X}_{n+1}) \cap \Omega^i, \Omega^i) = \Lambda(\mathcal{U}_{|\mathcal{X}^i|}^{\beta_i, \gamma_i}, I), \quad i = 1, \dots, d+1.$$

Per  $\beta_i, \gamma_i$  "sufficientemente piccoli" la mappa  $M_1^{\Omega, \mathcal{D}}$  permette l'interpolazione su  $\mathcal{X}_{n+1}$ , senza doversi preoccupare di eventuali fenomeni di Runge.

Definiamo adesso la mappa

$$Q_\kappa^{\Omega, \mathcal{D}} := (S_\kappa \circ M_1^{\Omega, \mathcal{D}}), \quad (13)$$

e la corrispondente base mappata

$$Q_{\kappa, n}^{\Omega, \mathcal{D}} = \{1, Q_\kappa^{\Omega, \mathcal{D}}, \dots, (Q_\kappa^{\Omega, \mathcal{D}})^n\}. \quad (14)$$

Il caso limite viene chiamato metodo *Gibbs-Runge-Avoiding Stable Polynomial Approximation* (GRASPA).  $Q_\infty^{\Omega, \mathcal{D}}$  e  $Q_{\infty, n}^{\Omega, \mathcal{D}}$  vengono invece chiamati mappa e base GRASPA, rispettivamente.

In caso di discontinuità con salto, il metodo GRASPA consente una buona interpolazione, riducendo il fenomeno di Gibbs. Inoltre, così come  $M_1^{\Omega, \mathcal{D}}$ , mitiga eventuali fenomeni di Runge, a patto che  $\beta_i, \gamma_i$  siano "sufficientemente piccoli".

Dal Teorema 3 e il Corollario 3, risulta il seguente risultato.

**Proposizione 7.** *Sia  $\Omega = [a, b]$  un intervallo di  $\mathbb{R}$  e  $\mathcal{X}_{n+1}$  definito come in (11). Siano  $d \in \mathbb{N}, d \geq 2$  e  $\xi_1 < \dots < \xi_d$  i punti di discontinuità, con  $\xi_i \in \overset{\circ}{\Omega}$ . Poniamo*

$$\mathcal{D} = \{\Omega^1, \dots, \Omega^{d+1}\} ,$$

dove  $\Omega^1 = [a, \xi_1]$ ,  $\Omega^{d+1} = ]\xi_d, b]$ ,  $\Omega^i = ]\xi_{i-1}, \xi_i]$ ,  $i = 2, \dots, d$ . Siano poi  $\mathcal{X}^\nu = \mathcal{X}_{n+1}|_{\Omega^\nu}$ ,  $\nu = 1, \dots, d+1$  tali che

$$|\mathcal{X}^\nu| = |\mathcal{X}^\tau| ,$$

per ogni  $\nu, \tau = 1, \dots, d+1$ .

Allora, se l'insieme di punti  $\mathcal{U}_{|\mathcal{X}^i|}^{\beta_i, \gamma_i}$ , ottenuti dalla trasformazione  $(M_1 \circ F_i)$ , è tale che  $\delta := \max_{i,j} \{\beta_i, \gamma_j\}$  è maggiorato da

$$\delta < \frac{2}{N^2(\pi + 2 \log(N+1))} ,$$

dove  $N = |\mathcal{X}^\nu|$ , allora

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Lambda^\kappa(\mathcal{X}_{n+1}, \Omega) = \mathcal{O}(\log N) .$$

## 8 Esperimenti numerici

Fissiamo  $\kappa = 10000$  e l'insieme di punti equispaziati  $\mathcal{X}_{n+1}$  in  $\Omega = [a, b]$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ .

In questa sezione, mostriamo tramite esperimenti numerici il mitigamento dei fenomeni di Runge e di Gibbs, utilizzando il metodo GRASPA. Inoltre confrontiamo i risultati ottenuti tramite l'interpolazione classica, l'uso della mappa *S-Gibbs* e il metodo GRASPA. I codici Python sono stati sviluppati a partire da quelli presenti in [13].

### 8.1 Funzioni con 1 punto di discontinuità

Fissato  $n$  dispari, consideriamo l'insieme  $\Omega = [0, 4]$  e la funzione  $f$ , definita come

$$f(x) = \begin{cases} \sin(2x)(x-1) & \text{se } x < 2 , \\ \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} & \text{se } x \geq 2 , \end{cases} \quad x \in \Omega .$$

Si ha un punto di discontinuità in  $\xi = 2$  e si ha dunque  $\Omega^1 = [0, 2[$  e  $\Omega^2 = [2, 4]$ . Osserviamo i risultati dei tre algoritmi applicati per  $n = 31$ .

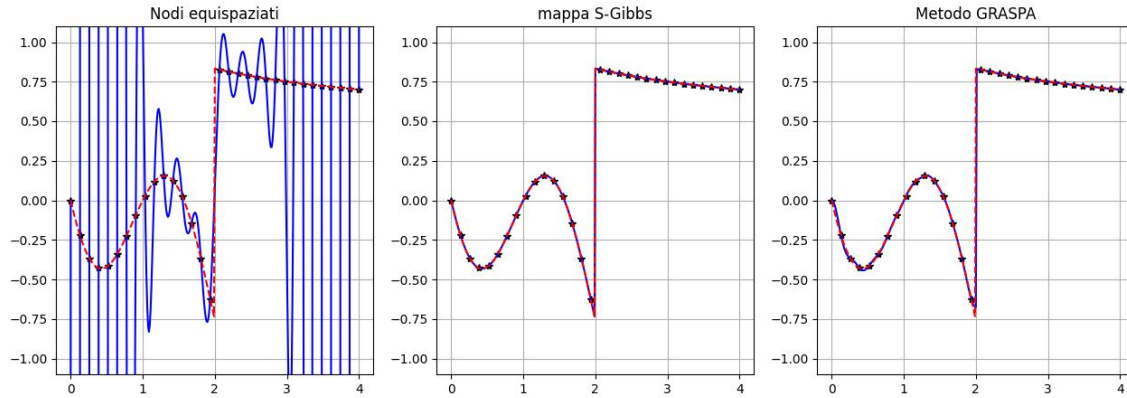


Figura 7: La funzione  $f$  tratteggiata in rosso, l'interpolante in blu e i punti segnati in nero.

Possiamo osservare che sia il metodo *GRASPA* che la mappa *S-Gibbs* mitigano il fenomeno di Gibbs. Dalla Figura 8, risulta essere preferibile utilizzare il secondo algoritmo, in quanto presenta un errore minore. Tuttavia, notiamo che per i punti equispaziati, la costante di Lebesgue relativa alla mappa *S-Gibbs* cresce velocemente e l'algoritmo può dunque risultare instabile, a differenza del metodo *GRASPA*.

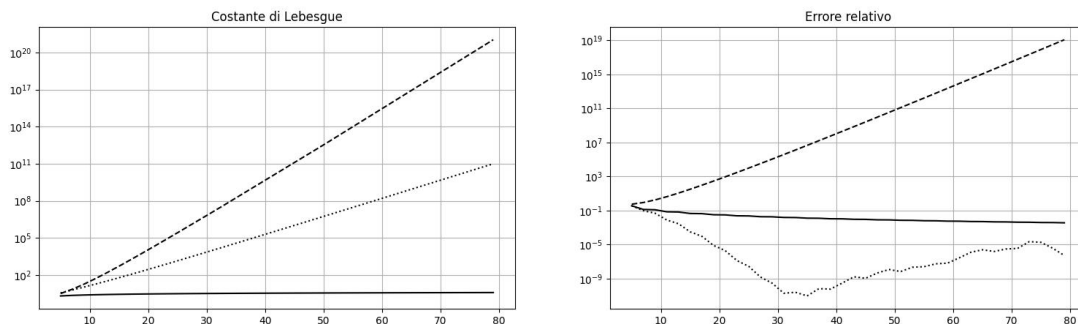


Figura 8: Costante di Lebesgue (sinistra) e Errore relativo (destra) al variare di  $n$  dispari. Interpolazione classica come linea tratteggiata, mappa *S-Gibbs* come linea punteggiata e metodo *GRASPA* come linea continua.

Mostriamo adesso un esempio in cui sono presenti sia il fenomeno di Runge che quello di Gibbs.

Consideriamo la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) \sin(x) & \text{se } x < 2, \\ \frac{1}{25(x-3)^2 + 1} & \text{se } x \geq 2, \end{cases} \quad x \in \Omega.$$

Anche in questo caso si ha un punto di discontinuità in  $\xi = 2$  e si ha dunque  $\Omega^1 = [0, 2[$  e  $\Omega^2 = [2, 4]$ .

Consideriamo inanzitutto il caso con  $n$  dispari.

In questo caso,  $|\mathcal{X}^1| = |\mathcal{X}^2| = (n+1)/2$  e si può dimostrare che  $M_1^{\Omega, \mathcal{D}}(\mathcal{X}^1)$  e  $M_1^{\Omega, \mathcal{D}}(\mathcal{X}^2)$  sono distribuiti in  $\Omega^1$  e  $\Omega^2$  come  $\mathcal{U}_{(n+1)/2}^{0, \gamma}$  e  $\mathcal{U}_{(n+1)/2}^{\beta, 0}$  rispettivamente, con  $\beta = \gamma = 2/(n+1)$ . Abbiamo già visto attraverso esperimenti numerici che le costanti di Lebesgue associate a questi due insiemi di punti cresce logaritmicamente. Ci aspettiamo quindi una crescita logaritmica anche di  $\Lambda^{\mathcal{Q}_\kappa^{\Omega, \mathcal{D}}}(\mathcal{X}_{n+1}, \Omega)$ . Possiamo infatti osservare nelle seguenti Figure la veridicità di quanto appena discusso.

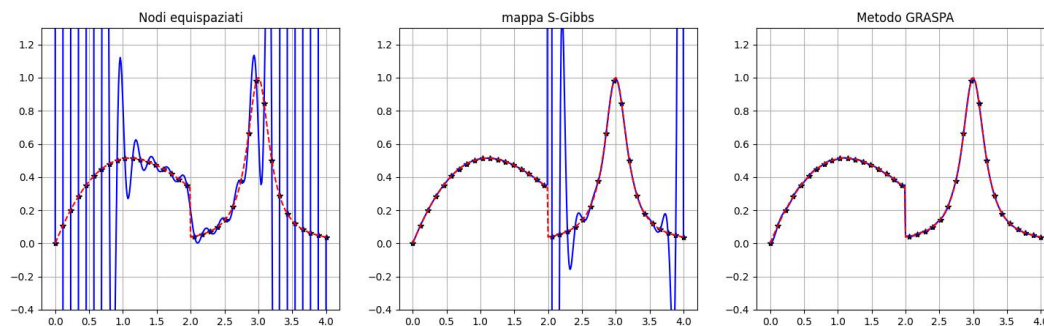


Figura 9: La funzione  $f$  tratteggiata in rosso, l'interpolante in blu e i punti segnati in nero, con  $n = 35$ .

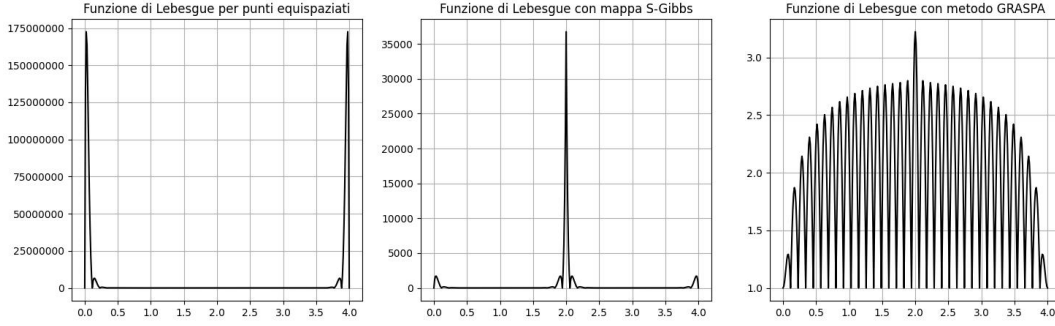


Figura 10: Funzioni di Lebesgue per i 3 algoritmi con  $n = 35$ .

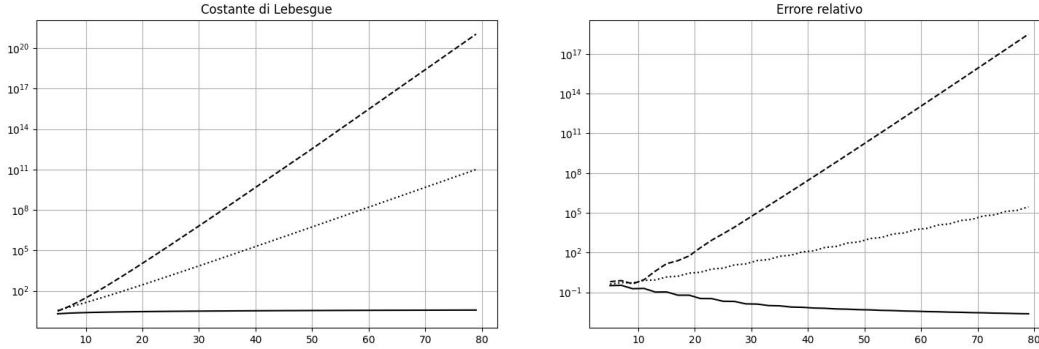


Figura 11: Interpolazione classica come linea tratteggiata, mappa *S-Gibbs* come linea punteggiata e metodo *GRASPA* come linea continua al variare di  $n$  dispari.

Consideriamo adesso il caso con  $n$  pari.

In questo caso,  $|\mathcal{X}^1| = n/2$ ,  $|\mathcal{X}^2| = n/2 + 1$  e  $M_1^{\Omega, \mathcal{D}}(\mathcal{X}^1)$  e  $M_1^{\Omega, \mathcal{D}}(\mathcal{X}^2)$  sono distribuiti in  $\Omega^1$  e  $\Omega^2$  come  $\mathcal{U}_{n/2}^{0, \gamma}$  e  $\mathcal{U}_{n/2+1}^{0, 0}$  rispettivamente, con  $\gamma = 4/n$ . Si ha che  $\Lambda(\mathcal{U}_{n/2+1}^{0, 0}, [-1, 1])$  cresce logicamente e  $\Lambda(\mathcal{U}_{n/2}^{0, \gamma}, [-1, 1])$  cresce linearmente. Ci aspettiamo dunque una crescita lineare di  $\Lambda^{\Omega, \mathcal{D}}(\mathcal{X}_{n+1}, \Omega)$ , come possiamo osservare nella Figura 12.



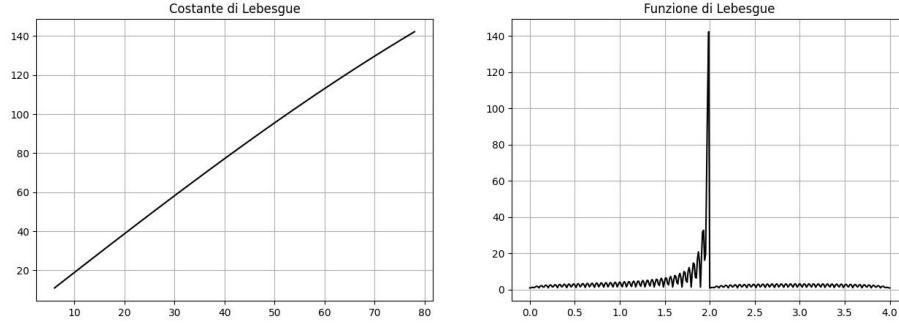


Figura 12: Costante di Lebesgue e funzione di Lebesgue relative al metodo GRASPA per  $n$  pari e  $n = 78$  rispettivamente.

Per risolvere questa instabilità, definiamo la mappa continua  $V_n : \Omega \rightarrow \Omega$ , come

$$V_n(x) := \begin{cases} \frac{nx}{n-1} & \text{se } 0 \leq x < 2 - \frac{4}{n}, \\ \frac{nx}{2(n-1)} + 2 & \text{se } 2 - \frac{4}{n} \leq x < 2, \\ x & \text{se } 2 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

Lo scopo dell'applicazione di  $V_n$  è quella di avvicinare i punti  $\mathcal{X}^1$  al punto di discontinuità  $\xi$ . Infatti si dimostra che  $(M_1^{\Omega, \mathcal{D}} \circ V_n)(\mathcal{X}^1)$  è distribuito in  $\Omega^1$  come  $\mathcal{U}_{n/2}^{0, \gamma}$ , con  $\gamma = 2/n$ . Possiamo quindi dedurre che  $\Lambda_k^{\Omega, \mathcal{D}} \circ V_n(\mathcal{X}_{n+1}, \Omega)$  abbia crescita logaritmica, come si può osservare nelle seguenti figure.

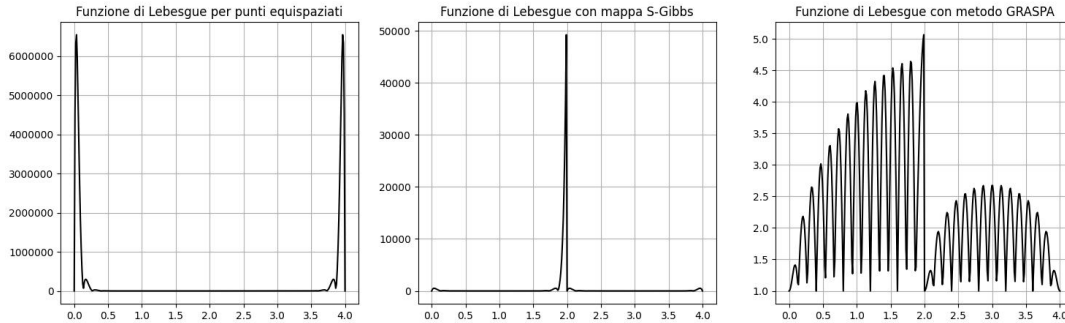


Figura 13: Funzioni di Lebesgue per i 3 algoritmi con  $n = 30$ . Il metodo GRASPA viene eseguito dopo l'uso della mappa  $V_n$ .

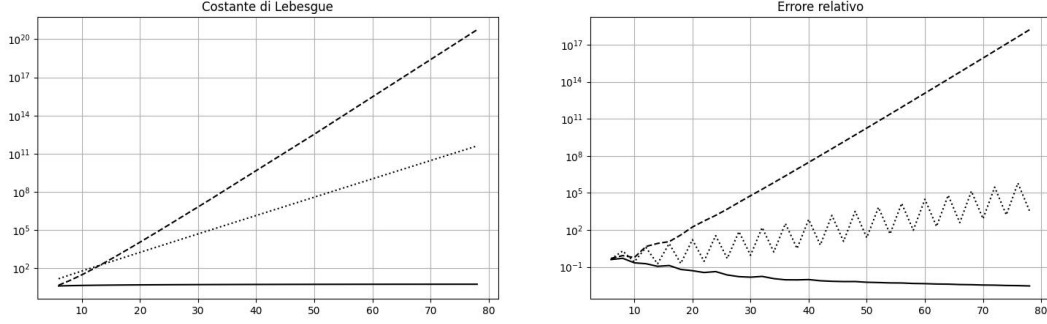


Figura 14: Costante di Lebesgue (sinistra) e Errore relativo (destra) al variare di  $n$  pari. Interpolazione classica come linea tratteggiata, mappa  $S$ -Gibbs come linea punteggiata e metodo  $GRASPA$  con la mappa  $V_n$  come linea continua.

Abbiamo dunque visto che il metodo  $GRASPA$  (più l'eventuale uso aggiuntivo di una mappa) è un algoritmo stabile grazie alla crescita logaritmica della Costante di Lebesgue associata. Inoltre garantisce una mitigazione ai fenomeni di Runge e di Gibbs, anche nel caso siano presenti entrambi. Invece abbiamo osservato che l'algoritmo utilizzando solamente la mappa  $S$ -Gibbs non è adatto ad interpolare funzioni con discontinuità, in presenza del fenomeno di Runge.

È inoltre possibile generalizzare la mappa  $V_n$  da utilizzare nel caso  $\Omega = [a, b]$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $\xi = (a + b)/2$ . Per farlo definiamo le seguenti funzioni:

$$\tilde{F}(x) := \frac{2(x - \xi)}{b - a}, \quad x \in \Omega,$$

che mappa  $\Omega$  in  $[-1, 1]$ , e la sua inversa

$$\tilde{G}(x) := \frac{b - a}{2}x + \xi, \quad x \in [-1, 1].$$

Poniamo quindi

$$V_n(x) := \left( \tilde{G} \circ \bar{V}_n \circ \tilde{F} \right)(x), \quad x \in \Omega,$$

con

$$\bar{V}_n(x) := \begin{cases} \frac{nx}{n-1} + \frac{1}{n-1} & \text{se } -1 \leq x < -\frac{2}{n}, \\ \frac{nx}{2(n-1)} & \text{se } -\frac{2}{n} \leq x < 0, \\ x & \text{se } 0 \leq x \leq 1, \end{cases} \quad x \in [-1, 1],$$

se la funzione da interpolare è continua in  $\xi$  da destra,

$$\bar{V}_n(x) := \begin{cases} x & \text{se } -1 \leq x < 0, \\ \frac{nx}{2(n-1)} & \text{se } 0 \leq x < \frac{2}{n}, \\ \frac{nx}{n-1} - \frac{1}{n-1} & \text{se } \frac{2}{n} \leq x \leq 1, \end{cases} \quad x \in [-1, 1],$$

nel caso opposto.

## 8.2 Funzioni con 2 punti di discontinuità

Sia  $\Omega = [0, 3]$ , consideriamo la funzione

$$f(x) := \begin{cases} \sin(x^2) \cos(3x) & \text{se } x < 1, \\ \frac{1}{25(x - \frac{3}{2})^2 + \frac{3}{2}} & \text{se } 1 \leq x < 2, \\ |x - \frac{5}{2}| & \text{se } x \geq 2, \end{cases} \quad x \in \Omega.$$

La funzione ha delle disuguaglianze in  $\xi_1 = 1$  e  $\xi_2 = 2$ . Per evitare di dover mappare ulteriormente i punti, consideriamo il caso  $n = 3j + 1$ ,  $j \in \mathbb{N}$ . In questa casistica la costante di Lebesgue associata al metodo GRASPA ha crescita logaritmica e non necessita dunque di mappe aggiuntive. Osserviamo nelle seguenti Figure i risultati ottenuti.

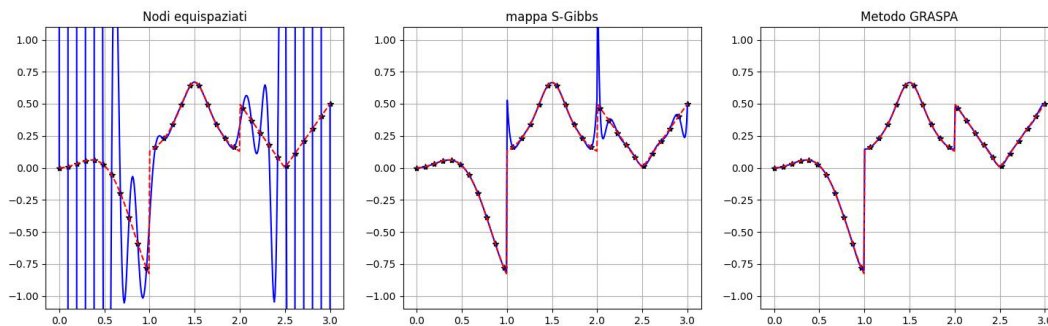


Figura 15: La funzione  $f$  tratteggiata in rosso, l'interpolante in blu e i punti segnati in nero, con  $n = 31$ .

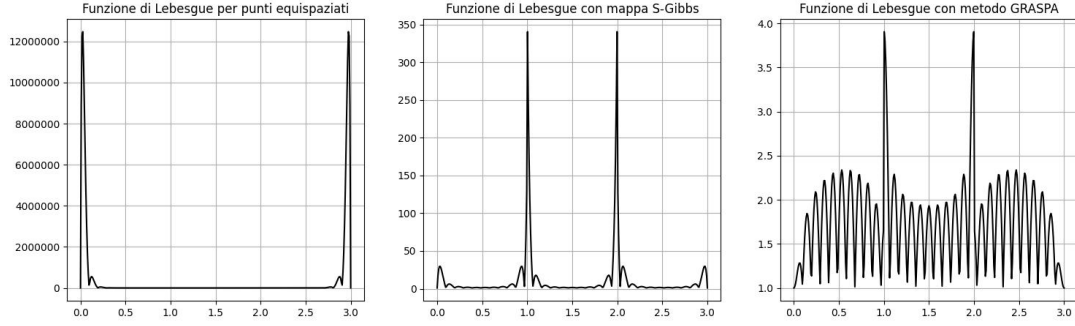


Figura 16: Funzioni di Lebesgue associate ai diversi algoritmi per  $n = 31$ .

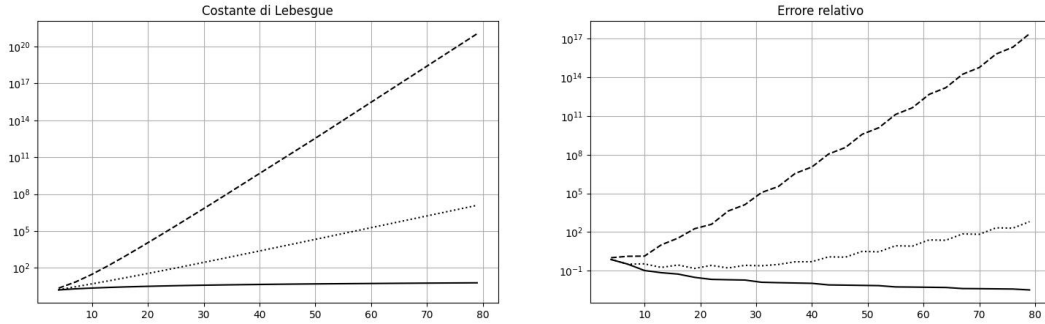


Figura 17: Interpolazione classica come linea tratteggiata, mappa *S-Gibbs* come linea punteggiata e metodo *GRASPA* come linea continua al variare di  $n = 3j + 1$ ,  $j \in \mathbb{N}$ .

In quest'ultimo esempio i punti sono suddivisi in modo tale che  $|\mathcal{X}^1| = |\mathcal{X}^3| = (n + 2)/3$  e  $|\mathcal{X}^2| = (n - 1)/3$ . Dal Teorema 6 e da (10), si ha dunque

$$|\ell_{i,\mu}^\infty(x)|_{\Omega^\tau} = \begin{cases} \prod_{\substack{x_j \in \mathcal{X}^\mu \\ j \neq i}} \left| \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right| & \text{se } \tau = \mu, \\ 0 & \text{se } \tau \neq \mu \text{ e } |\mathcal{X}^\tau| = |\mathcal{X}^\mu| \text{ oppure } |\mathcal{X}^\tau| = |\mathcal{X}^\mu| + 1, \\ |r_{i,\mu,\tau}(x)| C_{\mu,\tau} & \text{se } \tau \neq \mu \text{ e } |\mathcal{X}^\tau| = |\mathcal{X}^\mu| - 1, \end{cases}$$

con  $C_{1,2} = 2^{-|\mathcal{X}^3|}$  e  $C_{3,2} = 2^{-|\mathcal{X}^1|}$ . La crescita logaritmica dei  $(\beta, \gamma)$ -punti di CL garantisce quindi una crescita logaritmica della costante di Lebesgue associata al metodo *GRASPA* nel caso limite  $\kappa \rightarrow \infty$ . Tuttavia nel nostro caso  $\kappa = 10000$  è

fissata, ed essendo  $C_{2,1} = 2^{|\mathcal{X}^3|}$  e  $C_{2,3} = 2^{|\mathcal{X}^1|}$ , si ha che  $|p_2(x)|C_{2,1}$  e  $|p_2(x)|C_{2,3}$  influiscono sulla costante di Lebesgue per  $n$  sufficientemente grande. Nella figura 18 possiamo infatti osservare l'andamento della costante di Lebesgue e di  $|p_2(x)|C_{2,1}$  nel caso  $i = (n + 5)/3$ .

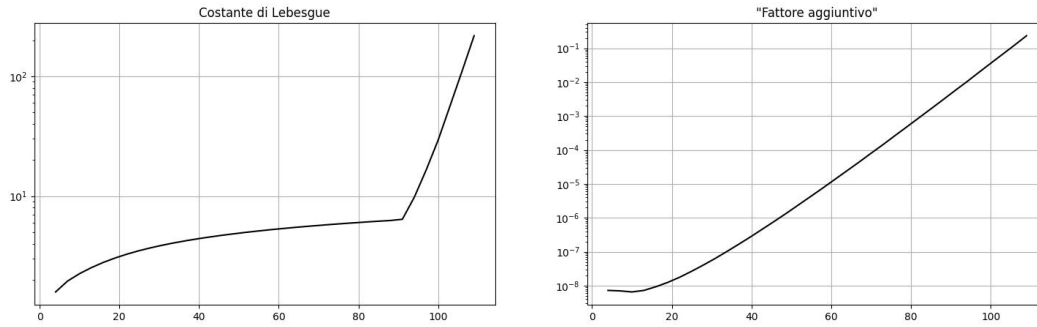


Figura 18: Costante di Lebesgue associata al metodo GRASPA e valore di  $|p_2(x)| \cdot C_{2,1}$  per  $i = (n + 5)/3$  e  $n = 3j + 1$ ,  $j \in \mathbb{N}$ .

## 9 Conclusioni

In questa tesi, abbiamo presentato le  $(\beta, \gamma)$ -funzioni di Chebyshev e relativi punti, mostrando le loro proprietà più significative. In particolare abbiamo mostrato la loro ortogonalità in  $\Omega_{\beta, \gamma}$  rispetto ad una specifica funzione peso e la crescita logaritmica della costante di Lebesgue associata ai  $(\beta, \gamma)$ -punti di Chebyshev-Lobatto, per determinati valori dei parametri. Queste due proprietà permettono il loro uso nell'ambito delle formule di quadratura e nell'interpolazione polinomiale. Inoltre, abbiamo dimostrato che i  $(\beta, \gamma)$ -punti di Chebyshev possono essere ottenuti a partire da un insieme di punti equispaziati tramite la mappa KTE.

Partendo da questo fatto abbiamo presentato un nuovo algoritmo che combina il caso limite del *S-Gibbs fake nodes approach* e i  $(\beta, \gamma)$ -punti di CL. Questo metodo, denominato *GRASPA*, permette di mitigare sia il fenomeno di Gibbs che quello di Runge, garantendo una interpolazione stabile per funzioni con discontinuità.

Questi argomenti sono ancora un interessante argomento di studio. Ad esempio, mentre in [8, 15] sono state presentate le estensioni a spazi di dimensioni maggiore del *fake nodes approach* e della mappa *S-Gibbs*, il metodo *GRASPA* non è stato ancora esteso al caso multivariato.

## Riferimenti bibliografici

- [1] R. Archibald, A. Gelb, and J. Yoon. Polynomial fitting for edge detection in irregularly sampled signals and images. *SIAM J. Numerical Analysis*, 43:259–279, 01 2005.
- [2] J.-P. Berrut and L. N. Trefethen. Barycentric lagrange interpolation. *SIAM review*, 46(3):501–517, 2004.
- [3] L. Brutman. On the lebesgue function for polynomial interpolation. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 15:694–704, 1978.
- [4] J. Canny. A computational approach to edge detection. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-8(6):679–698, 1986.
- [5] S. Capozziello, R. D’Agostino, and O. Luongo. Cosmographic analysis with Chebyshev polynomials. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 476(3):3924–3938, 02 2018.
- [6] C. Cesarano. Generalized chebyshev polynomials. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 43(5):731 – 740, 2014.
- [7] Y. Chen and N. Lawrence. A generalization of the chebyshev polynomials. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 35(22):4651, may 2002.
- [8] S. De Marchi, G. Elefante, E. Francomano, and F. Marchetti. Polynomial mapped bases: theory and applications. *Communications in Applied and Industrial Mathematics*, 13(1):1–9, 2022.
- [9] S. De Marchi, G. Elefante, and F. Marchetti. On  $(\beta, \gamma)$ -chebyshev functions and points of the interval. *Journal of Approximation Theory*, 271:105634, nov 2021.
- [10] S. De Marchi, G. Elefante, and F. Marchetti. Stable discontinuous mapped bases: the gibbs–runge-avoiding stable polynomial approximation (GRASPA) method. *Computational and Applied Mathematics*, 40(8), nov 2021.
- [11] S. De Marchi, G. Elefante, E. Perracchione, and D. Poggiali. Quadrature at fake nodes, 2021.
- [12] S. De Marchi, W. Erb, E. Francomano, F. Marchetti, E. Perracchione, and D. Poggiali. Fake nodes approximation for magnetic particle imaging. In *2020 IEEE 20th Mediterranean Electrotechnical Conference ( MELECON)*, pages 434–438, 2020.

- [13] S. De Marchi, F. Marchetti, E. Perracchione, and D. Poggiali. Fake nodes interpolation repository. <https://github.com/pog87/FakeNodes/>.
- [14] S. De Marchi, F. Marchetti, E. Perracchione, and D. Poggiali. Polynomial interpolation via mapped bases without resampling. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2020.
- [15] S. De Marchi, F. Marchetti, E. Perracchione, and D. Poggiali. Multivariate approximation at fake nodes. *Applied Mathematics and Computation*, 391:125628, 2021.
- [16] W. S. Don and D. Gottlieb. The chebyshev–legendre method: Implementing legendre methods on chebyshev points. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 31(6):1519–1534, 1994.
- [17] D. B. Haidvogel and T. Zang. The accurate solution of poisson’s equation by expansion in chebyshev polynomials. *Journal of Computational Physics*, 30(2):167–180, 1979.
- [18] B. Ibrahimoglu. Lebesgue functions and lebesgue constants in polynomial interpolation. *Journal of Inequalities and Applications*, 2016, 03 2016.
- [19] T.-T. Lee and J.-T. Jeng. The chebyshev-polynomials-based unified model neural networks for function approximation. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, 28(6):925–935, 1998.
- [20] N. Louzzani, A. Boukabou, H. Bahi, and A. Boussayoud. A novel chaos based generating function of the chebyshev polynomials and its applications in image encryption. *Chaos, Solitons & Fractals*, 151:111315, 2021.
- [21] J. Z. Mariethoz. Codici python. <https://github.com/Zacmar2000/GraficiTesi>.
- [22] J. C. Mason and D. C. Handscomb. *Chebyshev polynomials*. Chapman and Hall/CRC, 2002.
- [23] F. Piazzon and M. Vianello. Stability inequalities for lebesgue constants via markov-like inequalities. *Dolomites Research Notes on Approximation*, 11:1–9, 01 2018.
- [24] G. Szegő. *Orthogonal Polynomials*. American Math. Soc: Colloquium publ. American Mathematical Society, 1939.
- [25] L. N. Trefethen. *Approximation Theory and Approximation Practice, Extended Edition*. SIAM, 2019.



- [26] Y. Xu. Lagrange interpolation on chebyshev points of two variables. *Journal of Approximation Theory*, 87(2):220–238, 1996.