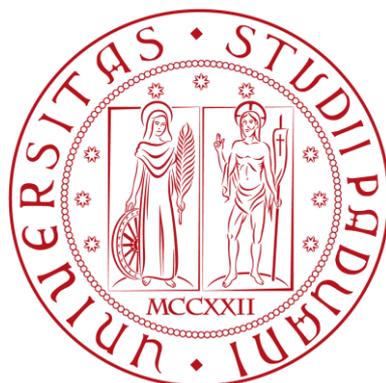


Università degli Studi di Padova

Dipartimento di Fisica e Astronomia

Corso di Laurea in Fisica



Elaborato di Laurea

MODELLI UNIFICATI DI MATERIA ED ENERGIA OSCURA

Relatore: Sabino Matarrese

Correlatore: Bartolo Nicola

Laureando: Lionetto Luca

ANNO ACCADEMICO 2013/2014

Alla mia famiglia

Indice

1	Introduzione	2
1.1	Materia Oscura ed Energia Oscura	2
1.2	Modello Λ CDM e suoi limiti	3
2	Modelli Unificati	4
2.1	Requisiti	4
2.1.1	Descrizione unificata di DE e DM	5
2.1.2	Stabilità	5
2.1.3	Bassa velocità del suono	5
2.2	Soluzioni di background	6
2.3	Modelli di k-essenza	6
3	Panoramica	9
3.1	Modelli puramente cinetici	9
3.1.1	Gas di Chaplygin	10
3.1.2	Modello di Scherrer e Modello di Scherrer Generalizzato	11
3.2	Modelli UDM da un campo scalare con un termine cinetico canonico	13
3.3	Modelli UDM da un campo scalare con un termine cinetico non canonico	14
3.3.1	Lagrangiane del tipo $L(\varphi, X) = g(X) - V(\varphi)$	14
3.3.2	Lagrangiane del tipo $L(\varphi, X) = f(\varphi)g(X)$	15
4	Approfondimenti	16
4.1	Stabilità dei modelli a fluido perfetto	16
4.1.1	Gas di Chaplygin	17
4.1.2	Un esempio di instabilità - Modello a due Fluidi	19
4.2	Aloni di campo scalare di materia oscura unificata	20
4.2.1	Soluzioni statiche in modelli UDM	20
5	Conclusioni	23

1 Introduzione

Uno dei risultati più rilevanti in campo cosmologico conseguiti nel secolo scorso è stata la scoperta dell'espansione dell'universo, la cui esistenza era stata inizialmente supposta a partire dall'applicazione delle equazioni di Einstein e dal principio cosmologico. Supporre infatti che l'Universo sia omogeneo e isotropo su grandi scale porta, in termini di relatività generale, ad una metrica detta di Robertson-Walker. Adottando una tale metrica, le equazioni di Einstein si semplificano, diventando quelle che vengono chiamate equazioni di Friedmann. Rilevante è il fatto che queste equazioni non presentano soluzioni statiche non banali, pertanto l'universo deve essere o in contrazione o in espansione. Questa conclusione fu all'inizio considerata con scetticismo dallo stesso Einstein, che introdusse nelle equazioni un termine ad hoc, detto costante cosmologica per controbilanciare l'attrazione gravitazionale e giungere a delle soluzioni che permettessero un universo statico. Si scoprì tuttavia in breve tempo che queste soluzioni erano instabili, e pertanto una minima perturbazione avrebbe comunque portato ad un universo in evoluzione. Solo qualche anno più tardi, le osservazioni di Hubble sul redshift delle galassie portarono alla conclusione che l'universo fosse in espansione. Un decennio più tardi, negli anni '60, la scoperta della radiazione cosmica di fondo diede conferma all'ipotesi che l'universo primordiale fosse più caldo di quello odierno. Fino ai primi anni '80 sembrava che la ricerca di informazioni sulla dinamica dell'Universo dovesse risolversi nell'uso di osservazioni astronomiche per stimare la quantità di massa presente nell'universo e calcolarne la curvatura, ma furono proprio quelle osservazioni a mostrare che il quadro teorico non era ancora completo.

1.1 Materia Oscura ed Energia Oscura

Uno dei metodi per calcolare il quantitativo di massa presente nell'universo consiste nella stima di un rapporto tra luminosità media per unità di volume di un insieme di corpi celesti e densità di materia all'interno dello stesso. Ovviamente un simile approccio è valido solo su scale molto grandi, almeno dell'ordine di una galassia. Sono stati quindi eseguiti studi sulle galassie a spirale mirati a misurare, tramite lo studio del redshift, la velocità di rotazione in funzione del raggio e dunque, tramite la terza legge di Keplero, la massa entro una determinata distanza dal centro. Lo studio dei dati raccolti ha tuttavia evidenziato come la velocità di rotazione, invece di diminuire in funzione del quadrato del raggio a grandi distanze dal centro della galassia, si mantenga invece pressoché costante, contrariamente alle previsioni. Questo suggerisce due opzioni: o la teoria della gravitazione necessita dell'introduzione di termini correttivi che abbiano un effetto rilevante solo a distanze dell'ordine del raggio galattico e superiori, oppure nell'alone galattico esiste un'ingente quantità di materia, circa dieci volte maggiore della massa stimata per l'intera galassia, che non interagisce in alcun modo con la radiazione elettromagnetica ma è solo soggetta all'attrazione gravitazionale. Pertanto, estendendo questo ragionamento, la materia ordinaria (o barionica) costituirebbe meno del 10% della materia dell'Universo. Teorie basate sulla prima ipotesi sono denominate "di gravità modificata", quelle basate sulla seconda sono dette "di materia oscura" (*Dark Matter*, o DM).

Inoltre, verso la fine degli anni '90, sono state eseguite molteplici osservazioni del red-shift di supernove di tipo Ia a diverse distanze dalla terra. L'intento era quello di determinare nel modo più preciso possibile l'andamento del redshift in funzione della distanza dall'osservatore per verificare eventuali dipendenze dal tempo della velocità di espansione dell'Universo e trarne indicazioni sulla sua dinamica futura. Un'analisi accurata dei dati ha però rivelato uno scenario inaspettato: invece della decelerazione dovuta all'attrazione gravitazionale prevista dalla teoria, si è riscontrata invece un'accelerazione positiva di origine sconosciuta [1, 2]. Questo ha reso necessaria una revisione della teoria. Il primo approccio intrapreso è stato quello di recuperare l'idea di una costante cosmologica introdotta da Einstein, ovvero di un termine di tipo geometrico che eserciti una pressione negativa costante capace di contrastare l'attrazione gravitazionale [3]. Successivamente, gli studi effettuati sulla radiazione cosmica di fondo hanno evidenziato come la curvatura dell'Universo sia quasi nulla, fatto questo che richiederebbe una densità di materia-energia circa tre volte maggiore di quella stimata (tenendo conto anche della DM) [4]. Per tener conto di questi due fenomeni apparentemente contraddittori al termine di costante cosmologica Λ è stato quindi associato un secondo componente oscuro, detto Energia Oscura (*Dark Energy* o DE), con densità di energia costante e pressione negativa direttamente proporzionale ad essa [5, 6].

1.2 Modello Λ CDM e suoi limiti

Tra i modelli cosmologici formulati negli ultimi decenni sulla base dei risultati sopra citati quello più largamente condiviso e che vanta le maggiori evidenze sperimentali e osservative è senza dubbio quello denominato Λ CDM. Esso integra le precedenti teorie sul Big Bang e sull'inflazione cosmica precedentemente esaminate nell'ambito di un Universo interamente barionico introducendo un componente di materia oscura formato da particelle poco interagenti (e definita quindi "fredda", *Cold Dark Matter*) ed un termine di costante cosmologica o di energia oscura di valore costante (chiamato Λ) all'interno di uno spazio-tempo piatto. Oltre a fornire un unico quadro di riferimento per i risultati ottenuti in cosmologia negli ultimi decenni e ad affrontare le problematiche sopra citate, il modello Λ CDM è stato anche in grado di fornire previsioni (sulla distribuzione della materia barionica, sulla polarizzazione della radiazione cosmica di fondo e sull'effetto lente gravitazionale) che sono poi state confermate dai dati sperimentali (si vedano ad es. [7, 8]), e rappresenta pertanto lo standard con il quale ogni teoria cosmologica deve confrontarsi.

Ciononostante, questo modello non è esente da problemi, soprattutto per quanto riguarda le due componenti oscure. Vediamone alcuni:

- Non è in grado di spiegare come mai, secondo i dati sperimentali, la materia oscura si troverebbe principalmente ai margini esterni delle galassie e non al centro, dove dovrebbe tendere a concentrarsi a causa dell'attrazione gravitazionale (problema della cuspid). Alcune delle soluzioni proposte prevedono possibili autointerazioni della materia oscura, deboli interazioni con la materia ordinaria o qualche tipo di interazione con l'energia oscura.
- Prevede che la presenza di materia oscura causi la formazione di un numero di galassie nane molto superiore a quello effettivamente riscontrato (problema dei satelliti mancanti).

- Non è in grado di spiegare né la natura della costante cosmologica né perché esista, né tanto meno il perché abbia un determinato valore. Il candidato ideale per ricoprire un simile ruolo, il vuoto quantistico (che ha pressione negativa e che aumenta all'aumentare delle dimensioni dello spazio, oltre ovviamente ad avere una propria densità di energia), porterebbe ad un valore della costante cosmologica di oltre 120 ordini di grandezza superiore a quello misurato. Si tratta di quella che è stata definita “la peggior previsione della storia della fisica”¹.
- Infine, uno dei punti più critici del modello Λ CDM è quello detto “della coincidenza”: i valori della densità di materia e densità di costante cosmologica sono ai giorni nostri entrambi dello stesso ordine di grandezza, dato questo che richiede un fine-tuning, ovvero un aggiustamento dei valori iniziali, entro margini talmente ristretti che risulta difficile trovarne giustificazione senza ricorrere al principio antropico. Per rispondere a questo problema sono stati formulati numerosi modelli di energia oscura, tra i quali quelli di quintessenza, che presentano dei termini variabili in grado di riprodurre un termine di costante cosmologica dinamico il cui valore converga a quello attuale [9].

2 Modelli Unificati

Un approccio radicale alla risoluzione di questi interrogativi è quello di teorizzare che materia oscura ed energia oscura, pur presentando caratteristiche assai differenti e ricoprendo un diverso ruolo nelle dinamiche cosmologiche, siano in realtà due aspetti di uno stesso fluido unificato il cui comportamento ricopra entrambi i ruoli in condizioni diverse. Il vantaggio presentato da questi modelli, detti di Materia Oscura Unificata (*Unified Dark Matter*, o UDM), è la possibilità di descrivere tramite un unico componente oscuro sia la formazione delle strutture cosmiche di larga scala (*Large Scale Structure*, o LSS) che l'espansione accelerata dell'universo. Queste teorie possono essere sommariamente divise in base a quella che viene considerata la natura dell'elemento oscuro unificato. Esistono ad esempio teorie di fluido, teorie tachioniche e teorie di campo scalare. Tuttavia molti di questi modelli possono essere espressi tramite il formalismo di campo scalare con certe condizioni iniziali fissate, ed è pertanto su questi ultimi che ci concentreremo.

2.1 Requisiti

Come ad ogni teoria alternativa ad uno standard consolidato come il modello Λ CDM, ai modelli di materia oscura unificata si pongono requisiti piuttosto stringenti. Essi devono essere in grado di riprodurre tutti i risultati del modello cosmologico standard che hanno superato la verifica sperimentale (o almeno di indicare dove ed in che modo osservazioni ulteriori possano evidenziare delle differenze) fornendo allo stesso tempo informazioni ulteriori sulla natura del componente oscuro, il tutto evitando di introdurre più parametri ed elementi di complessità di quelli del modello che ci si propone di sostituire. Di seguito delinearono alcuni dei requisiti fondamentali.

¹MP Hobson, GP Efstathiou e AN Lasenby *General Relativity: An introduction for physicists* (2007 ed.). Cambridge University Press. pag. 187

2.1.1 Descrizione unificata di DE e DM

La richiesta più ovvia che si pone ad un modello UDM, ma anche la più difficile da soddisfare appieno, è quella di fornire una spiegazione unica, coerente e internamente consistente di due enti in apparenza molto diversi come la DM e della DE, pertanto si richiede che ogni tale modello non solo sia in grado di riprodurre la dinamica delle due componenti oscure così come descritta dal modello Λ CDM (o comunque in maniera compatibile con i vincoli posti dalle osservazioni astronomiche), ma che riesca anche a risolvere le problematiche lasciate irrisolte da quest'ultimo, come il valore della densità di energia oscura e il problema del profilo a cuspidate nella distribuzione della materia oscura. Inoltre, la speranza è che un modello di questo tipo possa fornire indizi sulla natura del componente oscuro e su quali leggi fisiche ne siano all'origine e ne governino l'evoluzione.

2.1.2 Stabilità

Naturalmente, perché un modello UDM possa ritenersi valido, deve essere in grado di riprodurre, partendo da un dato set di condizioni iniziali (determinato dalle nostre conoscenze sulla natura dell'universo primordiale), l'evoluzione dell'universo fino ai nostri e poter formulare previsioni sul suo futuro. Uno dei principali problemi del modello Λ CDM è quello, derivante dalla presenza di un termine costante nel tempo, di avere richieste molto stringenti sulle condizioni iniziali dell'universo. E' auspicabile, per non dover ricorrere al principio antropico, che una teoria che descriva la dinamica evolutiva dell'universo abbia, nello spazio delle condizioni iniziali, un dominio il più largo possibile. In altre parole, vogliamo che la storia evolutiva del nostro universo rappresenti un attrattore nello spazio delle possibili evoluzioni cosmologiche, e che il suo bacino di attrazione sia sufficientemente ampio da fugare ogni problematica di "coincidenza cosmica".

2.1.3 Bassa velocità del suono

Uno dei tratti caratterizzanti dei modelli UDM è il duplice ruolo di materia ed energia oscura svolto dal fluido unificato, il quale impone ad esso dei vincoli maggiori di quelli posti ai modelli di sola energia oscura come quelli di quintessenza. In particolare, il fluido unificato deve essere in grado di clusterare, ovvero di formare delle disomogeneità che permettano la formazione delle strutture di grande scala e che siano il punto di partenza per la formazione di strutture di scala minore tramite attrazione gravitazionale. Uno dei principali fattori da tenere conto in questo senso è il valore della velocità del suono, ovvero la velocità di propagazione delle perturbazioni all'interno del fluido. E' stato dimostrato che ad una velocità del suono diversa da zero corrisponde la comparsa di una lunghezza di Jeans (o orizzonte sonoro) al di sotto della quale il fluido non clustera, impedendo quindi la creazione delle disomogeneità necessarie alla formazione di strutture. Sarà quindi necessario accertarsi che la velocità effettiva del suono propria di un determinato modello UDM sia, se non identicamente nulla, sufficientemente piccola da permettere la formazione delle strutture su larga scala che possiamo osservare oggi.

2.2 Soluzioni di background

Nonostante i requisiti richiesti, i possibili modelli da esaminare sono molti, ed un loro esame approfondito richiede l'applicazione di conoscenze di relatività generale, teoria quantistica dei campi in spazio-tempo curvo e fluidodinamica, con conti di complessità non indifferente e, soprattutto nel caso della fluidodinamica, di difficile soluzione analitica. Pertanto addentrarsi in un'analisi completa di ciascuno di questi modelli senza nessuna informazione di carattere generale può rivelarsi proibitivo. Esiste tuttavia un metodo più generale per analizzare gli elementi fondamentali di un determinato modello cosmologico: lo studio delle soluzioni di background. Il metodo consiste nell'applicazione del principio cosmologico: su scale sufficientemente grandi, l'universo può essere considerato omogeneo e isotropo, e quindi tale può essere considerata la sua componente oscura, che ne costituisce più del 90%. E' quindi legittimo, prima di scendere nel dettaglio, considerare il comportamento di questo "fondo". Sotto queste ipotesi le equazioni si semplificano notevolmente, e molte di esse sono risolvibili analiticamente con metodi di meccanica lagrangiana. Bisogna tuttavia tenere presente che simili assunzioni sono valide solo su scala cosmologica, e pertanto alle conclusioni raggiunte grazie ad esse deve essere attribuita validità a priori solo a quella scala. E' infatti possibile che un modello valido su tale scala, una volta sottoposto ad uno studio più accurato, su scale più piccole, dove vengano introdotti elementi aggiuntivi o decadano una o più delle assunzioni di partenza, riveli delle criticità incompatibili con i prerequisiti richiesti alla teoria. Tuttavia questo metodo ci permette di effettuare una prima analisi che, pur sommariamente, possa fornire importanti informazioni sul comportamento di un determinato modello (come ad esempio il valore della velocità del suono) e permettere di individuare subito i problemi più gravi.

In questa tesi ci dedicheremo prevalentemente all'esame delle soluzioni di background di modelli UDM dove il ruolo di componente oscuro è ricoperto dall'azione di un campo scalare. Più precisamente dei modelli in cui il campo scalare UDM è caratterizzato da una Lagrangiana con termine cinetico diverso da quello minimo. Questi modelli vengono detti di k-essenza.

2.3 Modelli di k-essenza

L'idea di utilizzare Lagrangiane con termini cinetici non canonici, ovvero termini che rappresentino funzioni arbitrarie del quadrato della derivata temporale del campo scalare, è stata inizialmente presa in considerazione nell'ambito degli studi sull'inflazione cosmica, con l'intento di descriverla come causata dall'energia cinetica [10, 11]. Questo approccio è stato successivamente applicato alla DE, estendendolo a Lagrangiane di tipo più generale [9, 12], prima di venire applicato ai modelli UDM. Illustriamo qui le basi di questo tipo di modelli nell'ambito delle soluzioni di background, per poterci poi dedicare nella sezione successiva all'esame di alcuni casi specifici.

Consideriamo l'azione

$$S = S_G + S_\varphi = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{R}{2} + L(\varphi, X) \right] \quad (1)$$

dove S_G è la componente dovuta alla gravità, mentre S_φ quella dipendente dal campo scalare in esame (trascuriamo qui la componente dovuta alla metrica). $L(\varphi, X)$ rappresenta la lagrangiana del campo stesso, con

$$X = -\frac{1}{2}\nabla_\mu\varphi\nabla^\mu\varphi \quad (2)$$

Dove ∇ denota la differenziazione covariante. Adottiamo le convenzioni $8\pi G = c^2 = 1$ e tensore metrico con segni $(-, +, +, +)$. Il tensore energia-momento del campo scalare φ è

$$T_{\mu\nu}^\varphi = -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_\varphi}{\delta X} = \frac{\partial L(\varphi, X)}{\partial X}\nabla_\mu\varphi\nabla_\nu\varphi + L(\varphi, X)g_{\mu\nu} \quad (3)$$

Se X è time-like, S_φ descrive un fluido perfetto con $T_{\mu\nu}^\varphi = (\rho_k + p_k)u_\mu u_\nu + p_k g_{\mu\nu}$, dove $L = p_k(\varphi, X)$ è la pressione,

$$\rho_k = \rho_k(X) = 2X\frac{\partial p_k(\varphi, X)}{\partial X} - p_k(\varphi, X) \quad (4)$$

è la densità di energia,

$$u_\mu = \frac{\nabla_\mu\varphi}{\sqrt{2X}} \quad (5)$$

è la quadrivelocità, e la sua equazione del moto si scrive

$$\nabla^\mu \left[\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\varphi)} \right] = \frac{\partial L}{\partial\varphi} \quad (6)$$

Come anticipato in precedenza, vogliamo cercare le soluzioni del background, e pertanto assumiamo che il campo scalare in esame sia omogeneo e isotropo spazialmente, ma variabile nel tempo. Pertanto la (2) si riduce a $X = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2$, dove il punto corrisponde ad una derivata rispetto al tempo cosmico t (ovvero ad un tempo misurato in un sistema di riferimento sincrono ai sistemi comoventi). Sempre in linea con con questo approccio, consideriamo per il background una metrica di Robertson-Walker a curvatura nulla

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2\delta_{ij}dx^i dx^j \quad (7)$$

dove $a(t)$ è il fattore di scala e δ_{ij} il tensore metrico. L'ipotesi di curvatura nulla, in particolare, oltre a semplificare i conti, è suggerita dai risultati delle missioni WMAP e Planck. Assumendo che la densità di energia della radiazione sia trascurabile nel periodo in esame e trascurando la materia barionica, possiamo identificare l'evoluzione del background dell'universo con quella del fluido (toglieremo dunque il pedice k dalle seguenti formule in quanto superfluo) e quindi applicare ad esso le equazioni di Friedmann

$$H = \frac{1}{3}\rho \quad (8)$$

e

$$\dot{H} = -\frac{1}{2}(p + \rho) \quad (9)$$

dove $H = \dot{a}/a$ è la costante di Hubble. Dato che per il background $X = \dot{\varphi}^2/2 = \varphi'^2/2a^2$ dove l'apostrofo indica la derivazione rispetto al tempo conforme η , l'equazione del moto (6) per il modo omogeneo $\varphi(t)$ diventa

$$\left(\frac{\partial p}{\partial X} + 2X \frac{\partial^2 p}{\partial X^2} \right) \ddot{\varphi} + \frac{\partial p}{\partial X} (3H\dot{\varphi}) + \frac{\partial^2 p}{\partial \varphi \partial X} \dot{\varphi}^2 - \frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0 \quad (10)$$

Tenendo conto della (4) il parametro di stato della k-essenza si scrive come

$$w \equiv p/\rho = \frac{p}{2X(\partial p/\partial X) - p} \quad (11)$$

mentre la velocità del suono, che è la quantità rilevante per la crescita delle perturbazioni, diventa [11]

$$c_s^2 \equiv \frac{\partial p/\partial X}{\partial \rho/\partial X} = \frac{\partial p/\partial X}{(\partial p/\partial X) + 2X(\partial^2 p/\partial X^2)} \quad (12)$$

Questa formula rappresenta forse il più importante criterio di selezione di modelli di k-essenza. Per quanto da sola non garantisca che la componente DM del fluido unificato si comporti come la sua controparte convenzionale la presenza di una velocità del suono sensibilmente diversa da zero è, come già detto, in diretta contraddizione con la formazione delle strutture su larga scala alla base dell'universo odierno.² Vogliamo ora però adottare un approccio leggermente diverso, in grado di fornire un colpo d'occhio sulle caratteristiche di diversi tipi di modelli di k-essenza. Assumiamo dunque che la Lagrangiana di campo scalare dipenda separatamente da X e da φ , ovvero che possa essere scritta nella forma

$$p(\varphi, X) = f(\varphi)g(X) \quad (13)$$

Allora l'eq (4) può essere scritta come

$$\rho = f(\varphi) \left[2X \frac{dg(X)}{dX} - g(X) \right] \equiv f(\varphi)\beta(X) \quad (14)$$

Se assumiamo $f(\varphi) > 0$ allora deve essere $2X(dg/dX) > g$ per avere una densità di energia maggiore di zero. Definiamo ora le variabili

$$\lambda = (1/f)df/dN, \quad \alpha = -d \ln \beta/dN \quad N = \ln a \quad (15)$$

Possiamo usarle per riscrivere l'equazione di continuità per l'energia come

$$\frac{d\beta}{dN} + \lambda\beta + 6X \frac{df}{dX} = 0 \quad (16)$$

²Questo in linea generale, in quanto si può assistere alla formazione di strutture anche grazie ad effetti del second'ordine o in presenza di un cambiamento repentino del valore di c_s^2 .

e la velocità del suono come

$$c_s^2 = -\frac{(w+1)}{2\alpha} \frac{d \ln X}{dN} = -\frac{\alpha - \lambda}{6\alpha} \frac{d \ln X}{dN} \quad (17)$$

Quest'ultima formulazione della velocità del suono assume un significato importante nel caso di modelli puramente cinetici. Infatti quando $\lambda = 0$ il fatto che $c_s^2 \geq 0$ implica che $d \ln X / dN \leq 0$ e quindi $dX/dt \leq 0$. Pertanto X può solo decrescere nel tempo fino al suo valor minimo, a cui in questo caso corrisponde un minimo della Lagrangiana del campo. Studieremo questo caso più in dettaglio nella sezione dedicata ai modelli puramente cinetici.

3 Panoramica

In questa sezione illustreremo alcuni modelli UDM, con particolare attenzione ai modelli di k-essenza, ne esamineremo le soluzioni di background e ne studieremo gli attrattori, esaminandone caratteristiche ed evidenziandone eventuali criticità. Inizieremo dal caso di modelli puramente cinetici, continueremo esaminando il caso di un modello di “quartessenza” con termine cinetico canonico e concluderemo con quella che sembra la categoria più promettente di questo tipo di modelli, quella con potenziale non costante e termine cinetico non canonico.

3.1 Modelli puramente cinetici

Concentriamoci innanzitutto sulle Lagrangiane che dipendono solo da X . L'espressione (14) per la densità di energia diventa, per $f(\varphi) = \text{cost}$.

$$\rho(g(X)) = 2X \frac{\partial g(X)}{\partial X} - g(X) \quad (18)$$

Mentre l'equazione (10) si può riscrivere come

$$\left(\frac{\partial g}{\partial X} + 2X \frac{\partial^2 g}{\partial X^2} \right) \frac{dX}{dN} + 3 \left(2X \frac{\partial g}{\partial X} \right) = 0 \quad (19)$$

dove $N = \ln a$. Questa equazione ha le due seguenti soluzioni

1.
$$X = \hat{X} = 0 \quad (20)$$

2.
$$\left. \frac{dg}{dX} \right|_{\hat{X}} = 0 \quad (21)$$

con \hat{X} costante. Utilizzando la (11) è facile vedere che entrambi i casi corrispondono a $w = -1$. Come abbiamo visto nell'equazione (17) X può solo diminuire nel tempo fino al suo valore minimo. Questo significa che quando $a \rightarrow \infty$ si avrà $w \rightarrow -1$. Inoltre l'integrale generale dell'equazione differenziale (16) nel limite $\lambda \rightarrow 0$ diventa

$$X \left(\frac{\partial g}{\partial X} \right)^2 = ke^{-6N} = ka^{-6} \quad (22)$$

con $k > 0$ costante. Quando $a \rightarrow \infty$ allora o X o dg/dX (oppure entrambi) tendono a zero, il che dimostra che, a seconda della forma della specifica funzione $g(X)$, ogni singola funzione particolare convergerà verso uno dei nodi di cui sopra. Si può quindi concludere che $w \rightarrow -1$ sia un attrattore per $a \rightarrow \infty$ e affermare che ciascuna delle soluzioni viste sopra costituirà un attrattore a seconda della particolare forma della funzione $g(X)$.

Tra i vari modelli di puramente cinetici ne considereremo due: il gas di Chaplygin generalizzato e la k-essenza puramente cinetica considerata da Scherrer.

3.1.1 Gas di Chaplygin³

Al nodo (20) corrisponde uno dei primi modelli teorici di materia ed energia oscura unificata: il gas di Chaplygin. Formulato in principio per risolvere problemi di aerodinamica come quello del flusso dell'aria sotto le ali di un aeroplano in volo, è stato recentemente recuperato in ambito cosmologico [14, 13]. Un gas di Chaplygin ha un'equazione di stato del tipo:

$$p_{GC} = -\rho_* \left(\frac{\rho_{GC}}{-p_*} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad (23)$$

con un parametro γ e con ρ_* e p_* costanti appropriate.

Attraverso l'equazione $\rho = 2X \frac{\partial g(X)}{\partial X} - g(X)$ e l'equazione di continuità possiamo scrivere p_{GC} e ρ_{GC} come funzioni di X o di a . Considerandole in funzione di X otteniamo:

$$p_{GC} = - \left(\frac{-p_*}{\rho_*^\gamma} \right)^{1/(1-\gamma)} \left[1 - \mu X^{\frac{1-\gamma}{2}} \right]^{\frac{1}{1-\gamma}} \quad (24)$$

$$\rho_{GC} = - \left(\frac{-p_*}{\rho_*^\gamma} \right)^{1/(1-\gamma)} \left[1 - \mu X^{\frac{1-\gamma}{2}} \right]^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \quad (25)$$

con μ costante. Per avere una velocità del suono positiva è necessario che $\gamma < 0$. Il caso con $\gamma = -1$ corrisponde al gas di Chaplygin standard mentre valori diversi corrispondono al modello generalizzato.

L'equazione (23) è oggetto di particolare interesse per i suoi legami con la teoria delle stringhe e quella delle brane, oltre al fatto di essere l'unico tipo di fluido analizzato finora ad ammettere una generalizzazione supersimmetrica. Inoltre, pur essendo un modello di fluido, esso può essere identificato con uno dei più semplici modelli di campo tachionico, ovvero quello con potenziale di campo costante. Tuttavia modelli di questo tipo (e corrispettivi equivalenti in altre rappresentazioni come quella tachionica) sono afflitti da molteplici problemi: a seconda del valore dei parametri

³Il gas di Chaplygin è un modello a fluido perfetto le cui soluzioni possono essere riprodotte da più di una tipologia di modelli di campo scalare. Lo inseriamo in questa sezione considerando in particolare un modello con Lagrangiana del tipo $L = \sqrt{1 - 2X}$, quindi puramente cinetica [15]. Vedremo più avanti nella sezione 4.1 un esempio di Gas di Chaplygin con Lagrangiana differente.

e dei vincoli posti i numerosi modelli a Gas di Chaplygin esaminati nella letteratura non clusterano, presentano instabilità rispetto a perturbazioni o portano ad una velocità del suono divergente.

3.1.2 Modello di Scherrer e Modello di Scherrer Generalizzato

L'idea di applicare la k-essenza allo studio dei modelli UDM si deve a R. J. Scherrer [16], che esamina in particolare il caso (21), studiando la funzione g intorno ad un $X = \hat{X} \neq 0$. In questo caso possiamo approssimare g come una parabola con $\left. \frac{dg}{dX} \right|_{\hat{X}} = 0$

$$g = g_0 + g_2 (X - \hat{X})^2 \quad (26)$$

con g_0 e g_2 costanti appropriate. Sostituendo la (26) nella (18) otteniamo per la densità di energia:

$$\rho = 2X \left(\frac{dp}{dX} \right) - p = 4\hat{X}g_2 (X - \hat{X}) + 3g_2 (X - \hat{X})^2 - g_0$$

Se imponiamo che ai giorni nostri X sia abbastanza vicina a \hat{X} che $\epsilon = (X - \hat{X})/\hat{X} = \left(\frac{a}{a_1} \right)^{-3} \ll 1$ otteniamo

$$\rho = -g_0 + 4g_2\hat{X}^2 \left(\frac{a}{a_1} \right)^{-3} \quad (27)$$

Affinché la densità sia positiva per $t \gg 0$ dobbiamo imporre $g_0 < 0$. Sostituendo nella (12) i valori di p e ρ appena ricavati otteniamo per questo modello la seguente velocità del suono:

$$c_s^2 = \frac{(X - \hat{X})}{(3X - \hat{X})} = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{a_1} \right)^{-3} \quad (28)$$

L'equazione (27) ci dice che l'evoluzione del background può essere scritta come la somma di due termini di tipo diverso: il primo è costante e, dato che $g_0 < 0$, ha pressione negativa, mentre il secondo è proporzionale ad a^{-3} e la sua pressione tende a zero. Possiamo quindi riscrivere la densità di energia come $\rho = \rho_\Lambda + \rho_{DM}$ dove ρ_Λ si comporta come una componente di energia oscura, mentre ρ_{DM} come una componente di materia oscura (\hat{X} deve essere diverso da zero affinché il termine di materia sia presente). Inoltre, per $(a/a_1)^{-3} \ll 1$ abbiamo $c_s^2 \ll 1$, ovvero la velocità del suono è molto piccola, come richiesto. Abbiamo quindi riscontrato che, almeno al livello delle soluzioni di background, la k-essenza puramente cinetica proposta da Scherrer si comporta come un fluido unificato di materia oscura ed energia oscura con l'unica differenza che la componente di DE ha velocità del suono molto minore di 1. Tuttavia questo modello presenta un difetto: nell'universo primordiale infatti, quando $X \gg \hat{X}$, la k-essenza si comporta come radiazione. Dato che la quantità di radiazione presente nell'universo è già stata definita e motivata con una certa precisione, questo pone dei vincoli molto stretti al modello, che porterebbero di fatto a quel fine-tuning che si era intenzionati ad evitare [17].

Per tentare di trovare una soluzione, possiamo generalizzare la definizione di g estendendo il modello nella maniera seguente

$$\rho = g = g_0 + g_n (X - \hat{X})^n \quad (29)$$

con $n \geq 2$ e g_0 e g_n costanti appropriate. In questo caso otteniamo per la densità di energia

$$\rho = 2Xng_n(X - \hat{X})^{n-1} - g_0 - g_n(X - \hat{X})^n = (2n-1)g_n(X - \hat{X})^n + 2\hat{X}ng_n(X - \hat{X})^{n-1} - g_0 \quad (30)$$

Se, come prima, $\epsilon^n = [(X - \hat{X})/\hat{X}]^n \ll 1$ l'equazione differenziale (22) si riduce a

$$X - \hat{X} = \left(\frac{a}{a_{n-1}} \right)^{-3/(n-1)} \quad (31)$$

dove $a_{n-1} \ll a$ e possiamo pertanto riscrivere la densità come

$$\rho = -g_0 + 2n\hat{X}^n g_n \left(\frac{a}{a_{n-1}} \right)^{-3} \quad (32)$$

dove abbiamo posto $(1/a_{n-1})^{-3} = [1/(ng_n)](k/\hat{X}^{2n-1})^{1/2}$ per $\epsilon^n \ll 1$.

Otteniamo così, come nel modello di Scherrer "semplice", ancora due termini: uno di materia ed uno di costante cosmologica. Se ora scriviamo per questo modello le espressioni per w e c_s^2 troviamo

$$w = - \left[1 + \left(\frac{g_n}{g_0} \right) (X - \hat{X})^n \right] \times \left[1 - 2n\hat{X} \left(\frac{g_n}{g_0} \right) (X - \hat{X})^{n-1} - (2n-1) \left(\frac{g_n}{g_0} \right) (X - \hat{X})^n \right]^{-1} \quad (33)$$

$$c_s^2 = \frac{(X - \hat{X})}{2(n-1)\hat{X} + (2n-1)(X - \hat{X})} \quad (34)$$

Per $\epsilon \ll 1$ otteniamo un risultato simile al precedente, come richiesto

$$w \simeq -1 + 2n \left(\frac{g_n}{|g_0|} \right) \left(\frac{a}{a_{n-1}} \right)^{-3} \quad (35)$$

$$c_s^2 \simeq \frac{1}{2(n-1)} \epsilon \quad (36)$$

Tuttavia quando $X \gg \hat{X}$ otteniamo invece un risultato diverso

$$w \simeq c_s^2 \simeq \frac{1}{2(n-1)} \quad (37)$$

In questo caso possiamo imporre un vincolo su n in modo tale che nei primi tempi e/o ad alte densità la k-essenza si evolva come materia oscura. In altre parole, quando $n \gg 1$, al contrario del caso semplice, questo modello si comporta bene anche a densità elevate.

3.2 Modelli UDM da un campo scalare con un termine cinetico canonico

Un secondo tipo di approccio è quello di descrivere il sistema tramite una Lagrangiana con termine cinetico canonico [18, 19]. Questo tipo di modelli, detti “di quartessenza” sono sostanzialmente delle estensioni UDM dei modelli di quintessenza formulati per descrivere un componente di energia oscura dinamico che tendesse al valore misurato ai nostri giorni. Per determinarne la dinamica dobbiamo risolvere due equazioni differenziali

$$L(\varphi, X) = X - V(\varphi) = p(\varphi, X) \quad (38)$$

$$X + V(\varphi) = \rho(\varphi, X) \quad (39)$$

Possiamo procedere nel seguente modo: partendo dalle equazioni $\dot{\rho} = -3H(p + \rho) = -\sqrt{3}\rho(p + \rho)$ e $2X = (p + \rho) = (d\varphi/d\rho)^2 \dot{\rho}^2$ si può ottenere

$$\phi = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho'/\sqrt{\rho'}}{(p(\rho') + \rho')^{1/2}} \quad (40)$$

a meno di una costante additiva che può essere omessa senza perdita di generalità.

Invertendo questa equazione, ovvero scrivendo $\rho = \rho(\phi)$ possiamo ottenere $V(\phi) = [\rho(\phi) - p(\rho(\phi))] / 2$. Se imponiamo che il fluido UDM abbia un termine di pressione costante $p = -\Lambda$ e cerchiamo un modello di campo scalare con termine cinetico canonico, arriviamo ad una soluzione esatta con potenziale $V(\phi) = (\Lambda/2)[\cosh^2(\sqrt{3}\phi/2) + 1]$.

Si può verificare che la traiettoria sopra descritta corrisponde ad un nodo stabile anche in presenza di un fluido extra (come la radiazione) con equazione di stato $w \equiv p/\rho > 0$. Utilizzando le espressioni per la pressione e per la densità di energia troviamo che lungo suddetta traiettoria il campo scalare si comporta esattamente come la somma di un termine di materia e uno di costante cosmologica.

$$\rho = \Lambda + \Lambda \sinh^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \varphi \right) \quad (41)$$

$$\Lambda = \text{cost}, \quad \rho_m = \Lambda \sinh^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \varphi \right) \propto a^{-3} \quad (42)$$

dove $\rho_m = \rho - \Lambda$ è la densità di materia.

Il problema di questo modello di quartessenza è lo stesso di tutti i modelli con termine cinetico canonico, ovvero che prevede una velocità del suono identicamente pari a 1, la quale non essendo un problema quando si tratta di descrivere un fluido di sola energia oscura, lo diventa in ambito UDM, in quanto un componente di materia con una simile velocità del suono impedisce la

crescita di disomogeneità. Sostanzialmente quindi la quartessenza si comporta esattamente come una combinazione di materia oscura ed energia oscura lungo l'attrattore, ma la sua componente di materia non riesce a clusterare su scale sub-orizzonte (almeno per quanto riguarda perturbazioni lineari).

3.3 Modelli UDM da un campo scalare con un termine cinetico non canonico

Sostanzialmente, possiamo dire che un modello puramente cinetico di k-essenza non descrive esattamente un fluido di materia oscura e costante cosmologica, mentre modelli di campo scalare con termine cinetico canonico, pur fornendo una tale descrizione, conducono a $c_s^2 = 1$, il che è in conflitto con la formazione delle strutture cosmologiche. Conviene quindi considerare Lagrangiane di campo scalare di tipo più generale [18, 19]. Vediamone due esempi.

3.3.1 Lagrangiane del tipo $L(\varphi, X) = g(X) - V(\varphi)$

La densità di energia è

$$\rho(g(X)) = 2X \frac{\partial g(X)}{\partial X} - g(X) + V(\varphi) \quad (43)$$

L'equazione del moto per il modo omogeneo è la seguente

$$\left(\frac{\partial g}{\partial X} + 2X \frac{\partial^2 g}{\partial X^2} \right) \frac{dX}{dN} + 3 \left(2X \frac{\partial g}{\partial X} \right) = - \frac{dV}{dN} \quad (44)$$

Si trova

$$p + \rho = 2X \frac{dg(X)}{dX} = F(X) \quad (45)$$

Possiamo riscrivere l'equazione del moto nella forma

$$\left(2X \frac{\partial F}{\partial X} - F \right) \frac{dX}{dN} + X \left(6F + \frac{\partial V}{\partial N} \right) = 0 \quad (46)$$

L'equazione ammette gli stessi due nodi del caso puramente cinetico: $dg/dX|_{\hat{X}} = 0$ e $\hat{X} = 0$. In entrambi i casi V dovrebbe tendere ad una costante per $N \rightarrow \infty$, mentre il termine cinetico può essere scritto intorno all'attrattore nella forma:

$$g(X) = M^4 \left(\frac{X - \hat{X}}{M^4} \right)^n \quad (47)$$

con M una costante di scala di massa appropriata, \hat{X} una costante e $n \geq 2$.

Questo ci permette di definire $\varphi = \varphi(\rho_m)$ come una soluzione dell'equazione differenziale

$$\rho_m = 2X \frac{dg(X)}{dX} \left[\frac{3}{2} (\rho_m + \Lambda) \rho_m^2 \left(\frac{d\varphi}{d\rho_m} \right)^2 \right] \quad (48)$$

Come trovato nel caso della k-essenza, risulta interessante il comportamento nel limite di grandi n e $\hat{X} = 0$ nell'equazione precedente a questa, per la quale otteniamo

$$\rho_m \approx \Lambda \sinh^{-2} \left[\left(\frac{3\Lambda}{8M^4} \right)^{1/2} \varphi \right] \quad (49)$$

che porta a $V(\varphi) \approx \rho_m - \Lambda$ e $c_s^2 = 1/(2n - 1) \approx 0$.

3.3.2 Lagrangiane del tipo $L(\varphi, X) = f(\varphi)g(X)$

Richiediamo l'esistenza di un termine di costante cosmologica imponendo il vincolo $p = -\Lambda$. Otteniamo $f(\varphi) = -\Lambda/g(X)$, che inserita nella (4) porta a

$$\rho = -\frac{2\Lambda X}{g(X)} \frac{dg(X)}{dX} - \Lambda \quad (50)$$

escludendo la costante cosmologica e considerando solo il termine di materia otteniamo

$$X \frac{d \ln |g|}{dX} = -\frac{\rho_m}{2\Lambda} \quad (51)$$

Consideriamo una soluzione esplicita. Assumendo che il termine cinetico sia del tipo Born-Infeld⁴

$$g(X) = -\sqrt{1 - 2X/M^4} \quad (52)$$

con M una scala di massa adatta, che implica $\rho = f(\varphi)/\sqrt{1 - 2X/M^4}$, otteniamo

$$X(a) = \frac{M^4 \bar{k} a^{-3}}{2(1 + \bar{k} a^{-3})} \quad (53)$$

dove $\bar{k} = \rho_m(a_*)a_*^3/\Lambda$ e a_* è il fattore di scala ad un generico tempo t_* .

Per ottenere un'espressione per $\varphi(a)$ imponiamo che l'universo sia dominato dal fluido UDM, ovvero che $H^2 = \rho/3$. Otteniamo quindi

$$\varphi(a) = \frac{2M^2}{\sqrt{3\Lambda}} \left\{ \arctan [\bar{k} a^{-3}]^{-1/2} - \frac{\pi}{2} \right\} \quad (54)$$

che, sostituito nella nostra condizione iniziale $p = -\Lambda$ ci permette di ottenere l'espressione

$$f(\varphi) = \frac{\Lambda}{\left| \cos \left[\left(\frac{3\Lambda}{4M^4} \right)^{1/2} \varphi \right] \right|} \quad (55)$$

Se si espande $f(\varphi)$ intorno a $\varphi = 0$ e $X/M^4 \ll 1$ si ottiene la Lagrangiana approssimata

⁴Questo tipo di termine cinetico può essere visto come la generalizzazione alla teoria dei campi della Lagrangiana di una particella relativistica e presenta numerosi collegamenti con la teoria delle stringhe. E' stato teorizzato che possa avere un ruolo rilevante in cosmologia.

$$L \approx \frac{\Lambda}{2M^4} \dot{\varphi}^2 - \Lambda \left[1 + \frac{3\Lambda}{8M^4} \varphi^2 \right] \quad (56)$$

Si può notare che la Lagrangiana dipende solo dalla combinazione φ/M^2 , e che pertanto si è liberi di riassorbire una variazione della scala di massa nella definizione della variabile. Senza perdita di generalità possiamo quindi porre $M = \Lambda^{1/4}$, in modo che il termine cinetico assuma la forma canonica nel limite $X \ll 1$. Possiamo quindi riscrivere la Lagrangiana come

$$L = \frac{-\Lambda \sqrt{1 - 2X/\Lambda}}{\left| \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\varphi\right) \right|} \quad (57)$$

Questo modello implica che per valori di $\sqrt{3}\varphi \approx -\pi$ e $2X/\Lambda \approx 1$

$$\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\varphi\right) \propto a^{3/2}, \quad \sqrt{1 - 2X/\Lambda} \propto a^{-3/2} \quad (58)$$

il campo scalare si comporta come un fluido di materia oscura. In questo regime la velocità del suono effettiva è $c_s^2 = 1 - 2X/\Lambda \approx 0$, come richiesto.

4 Approfondimenti

Nella sezione 3 abbiamo esaminato diversi modelli UDM di campo scalare e verificato che è possibile ottenere importanti informazioni sul loro comportamento a scale cosmologiche tramite l'analisi delle soluzioni di background e lo studio dei rispettivi attrattori, metodo questo che, come si è potuto riscontrare, ha carattere generale, e non dipende quindi dal modello esaminato. In questa sezione vogliamo invece concentrarci su quelli che potrebbero essere definiti due problemi “di equivalenza”. Nella sezione 4.1 indagheremo sotto quali condizioni è effettivamente possibile affermare che ad ogni modello di fluido perfetto corrisponde un modello di campo scalare con una particolare lagrangiana, mentre nella sezione 4.2 esploreremo il comportamento di un alone galattico composto da un ipotetico fluido UDM e le relazioni che legano quest'ultimo ad un modello CDM convenzionale con identica curva di rotazione.

4.1 Stabilità dei modelli a fluido perfetto

Come già illustrato nelle sezioni precedenti, i modelli di materia oscura unificata possono essere considerati sotto molteplici rappresentazioni. In particolare, si possono rappresentare come modelli a fluido perfetto dei modelli a campo scalare soggetti a determinate condizioni. I vantaggi di tale rappresentazione sono numerosi: tra di essi figurano un numero ridotto di termini da considerare e la relativa semplicità di una trattazione generale. E' tuttavia necessario prestare molta attenzione ai limiti di questo approccio. Modelli di campo scalare e di fluido perfetto possono definirsi equivalenti solo nel senso che i primi, sotto particolari condizioni iniziali, portano a soluzioni identiche a quelle dei secondi. Questa relazione non è però biunivoca: mentre ad ogni traiettoria

di fluido perfetto è associata una traiettoria di campo scalare, il viceversa non è sempre valido. Al variare di queste condizioni quindi, un modello di campo scalare può assumere un comportamento ben diverso da quello del fluido perfetto corrispondente. Diventa quindi rilevante studiare in quali casi le traiettorie corrispondenti ad un fluido perfetto sono stabili quando considerate come un sottoinsieme delle soluzioni del modello di campo scalare corrispondente e in caso affermativo quale sia il rateo di convergenza verso di esse.

A tal scopo è opportuno introdurre un parametro di deviazione (che chiameremo x) che misuri lo scostamento di una traiettoria di un modello di campo scalare da quella del fluido perfetto corrispondente, e studiarne la derivata rispetto al tempo (fino al prim'ordine) nei pressi della traiettoria di fluido perfetto stessa [20]. Consideriamo ora alcuni casi particolari: vedremo che, nonostante l'idea di fondo sia sempre la stessa, le condizioni da verificare ed i risultati variano a seconda sia del modello di fluido perfetto preso in esame, che del modello di campo scalare utilizzato per riprodurne le soluzioni.

4.1.1 Gas di Chaplygin

A titolo di esempio, consideriamo ancora una volta il gas di Chaplygin. Il primo caso è quello di un campo scalare puramente cinetico con Lagrangiana

$$L = \sqrt{A(1 - 2X)} \quad (59)$$

con $A = \text{cost.}$ già preso in considerazione in 3.1. In questo caso il problema della stabilità non si pone, in quanto è stato dimostrato che tutte le soluzioni di questo modello corrispondono a traiettorie di fluido perfetto.

Tuttavia questo non è l'unico modello in grado di descrivere il Gas di Chaplygin. Prendiamo in considerazione una Lagrangiana diversa, di quartessenza, con termine cinetico canonico e potenziale

$$U(\varphi) = \frac{1}{2}\sqrt{A} \left(\cosh 3\varphi + \frac{1}{\cosh 3\varphi} \right) \quad (60)$$

Anche questo modello è in grado, sotto particolari condizioni iniziali, di descrivere le stesse traiettorie, ma, in linea di principio, non gode della stessa biunivocità del modello precedente. pertanto x non è identicamente nullo, ed è quindi necessario calcolarlo.

Sappiamo che il gas di Chaplygin obbedisce all'equazione di stato

$$p = -\frac{A}{\rho} \quad (61)$$

ne ricaviamo dunque che il parametro che corrisponde alla deviazione da questo comportamento è

$$x \equiv \rho p + A \quad (62)$$

Mentre le equazioni di Friedmann associate a questo modello sono

$$h^2 = \rho = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} + U(\varphi) \quad (63)$$

$$p = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} - U(\varphi) \quad (64)$$

Sostituendo le precedenti espressioni nella definizione di x otteniamo

$$x = \frac{\dot{\varphi}^4}{4} - U^2(\varphi) + A \quad (65)$$

Oggetto del nostro studio sono i casi in cui le traiettorie proprie dei modelli a fluido sono stabili rispetto a deviazioni. Questo vuol dire che la derivata di x deve avere segno opposto rispetto allo scostamento da $x = 0$. Concentriamoci dunque su di essa

$$\dot{x} = \ddot{\varphi}\dot{\varphi}^3 - 2UU'\dot{\varphi} \quad (66)$$

dove l'apostrofo indica la derivazione rispetto a φ . Usando le equazioni di Friedmann e di Klein-Gordon, si trova

$$\ddot{\varphi} = -3\sqrt{\frac{\dot{\varphi}^2}{2} + U}\dot{\varphi} - U' \quad (67)$$

e sostituendo quest'ultima equazione nella precedente otteniamo

$$\dot{x} = -3\dot{\varphi}^4\sqrt{\frac{\dot{\varphi}^2}{2} + U} - \dot{\varphi}^3U' - 2UU'\dot{\varphi} \quad (68)$$

ora, utilizzando l'eq (65), possiamo scrivere la derivata di del campo scalare rispetto al tempo come

$$\dot{\varphi} = -\sqrt{2}(U^2 - A + x)^{1/4} = -\sqrt{2}\left(\frac{A}{4}\tanh^2 3\varphi + x\right)^{1/4} \quad (69)$$

Sostituendo questa espressione per $\dot{\varphi}$ assieme alla forma esplicita del potenziale nell'espressione (66) di \dot{x} , possiamo osservare la dipendenza di quest'ultima dal campo e dal parametro di deviazione

$$\begin{aligned} \dot{x} = & -3(A \tanh^2 3\varphi + 4x) \left[\frac{1}{2}\sqrt{A} \left(\cosh 3\varphi + \frac{1}{\cosh 3\varphi} \right) + \left(\frac{A}{4} \tanh^2 3\varphi + x \right)^{1/2} \right]^{1/2} + \\ & -3\sqrt{2A} \frac{\sinh^3 3\varphi}{\cosh^2 3\varphi} \left(\frac{A}{4} \tanh^2 3\varphi + x \right)^{3/4} + \\ & + \frac{3\sqrt{2A}}{2} \frac{\sinh^3 3\varphi}{\cosh^2 3\varphi} \left(\cosh 3\varphi + \frac{1}{\cosh 3\varphi} \right) \left(\frac{A}{4} \tanh^2 3\varphi + x \right)^{1/4} \end{aligned} \quad (70)$$

Approssimando al primo ordine in x otteniamo

$$\dot{x} = -\frac{3A^{1/4}(5 \sinh^2 3\varphi + 6)}{2(\cosh 3\varphi)^{3/2}}x + \sigma(x) \quad (71)$$

Notiamo che il segno della derivata è negativo, pertanto le traiettorie del gas di Chaplygin, quando considerate come sottoinsieme di quelle del modello illustrato sopra, sono stabili.

Occupiamoci ora della stabilità globale delle traiettorie di questo modello di fluido perfetto. Vogliamo conoscere con quanta rapidità un universo con campo scalare descritto dalla lagrangiana esaminata converga verso una delle traiettorie di fluido perfetto. per il gas di Chaplygin descritto sopra il valore del parametro di Hubble è

$$h = A^{1/4}(\cosh 3\varphi)^{1/2} \quad (72)$$

Ponendo il primo termine dello sviluppo di Taylor di \dot{x} intorno a $x = 0$ uguale a γ otteniamo l'equazione

$$\frac{\gamma}{h} = \frac{3}{2} \left(5 + \frac{1}{\cosh^2 3\varphi} \right) \quad (73)$$

e quindi

$$7,5 \leq \frac{\gamma}{h} \leq 9 \quad (74)$$

Pertanto, il comportamento da fluido perfetto è raggiunto rapidamente una volta che $|x| \lesssim A$. Come abbiamo visto in precedenza, trattandosi questo di un modello di quartessenza, non clustera su scale sub-orizzonte. Tuttavia esso può essere utilizzato per descrivere un fluido di sola DE.

4.1.2 Un esempio di instabilità - Modello a due Fluidi

Diventa ora importante sapere se l'oggetto della nostra analisi, ovvero la stabilità locale delle traiettorie di fluido perfetto, non sia un problema triviale che si risolva sempre in una risposta affermativa. Per dimostrare il contrario, riportiamo qui di seguito un esempio di modello instabile. Consideriamo un modello a due fluidi. Uno di essi è semplicemente una costante cosmologica $p = -\rho = -\Lambda$, mentre il secondo è un fluido barotropico con $p = k\rho$, con $-1 < k < 1$. L'evoluzione cosmologica del modello è descritta dalla formula

$$a(t) = a_0 \left(\sinh \frac{3\sqrt{\Lambda}(1+k)t}{2} \right)^{2/[3(1+k)]} \quad (75)$$

e può essere riprodotta dal modello di campo scalare con termine cinetico standard e potenziale

$$U(\varphi) = \Lambda \left(1 + \frac{1-k}{2} \sinh^2 \frac{3\varphi(1+k)^{1/2}}{2} \right) \quad (76)$$

Il parametro di deviazione dal modello a due fluidi è il seguente

$$x \equiv \frac{p + \Lambda}{\rho - \Lambda} - k \quad (77)$$

Con calcoli simili a quelli effettuati nel caso precedente si arriva a trovare

$$\dot{x} = -3 \frac{\sqrt{\Lambda}(1-k)}{2 \cosh 3\sqrt{1+k}\varphi} \left[\cosh^2 \frac{3\sqrt{1+k}\varphi}{2} - \frac{1+k}{1-k} \right] x + \sigma(x)$$

Se $k < 0$, il coefficiente di x è negativo, tuttavia, se $k > 0$, la traiettoria considerata è stabile solo se

$$\varphi > \frac{2}{3\sqrt{1+k}} \operatorname{arc} \cosh \sqrt{\frac{1+k}{1-k}} \quad (78)$$

la traiettoria diventa quindi instabile vicino al punto di de Sitter $\varphi = 0$, $\dot{\varphi} = 0$, $\dot{a}/a = \sqrt{\Lambda}$. La condizione per la stabilità può anche essere scritta come

$$\Omega_\Lambda < \frac{1-k}{1+k} \quad (79)$$

dove Ω_Λ indica il rapporto tra la densità di costante cosmologica e la densità di energia totale.

4.2 Aloni di campo scalare di materia oscura unificata

Nell'analisi dei modelli UDM oltre allo studio delle soluzioni del background cosmologico è di pari importanza e per certi versi complementare lo studio delle soluzioni statiche delle equazioni di Einstein, il cui comportamento può fornire informazioni ulteriori sui vari modelli e restringere il campo di ricerca di una Lagrangiana appropriata. Tra le soluzioni più semplici da affrontare e fisicamente più significative ci sono quelle statiche a simmetria sferica, che corrispondono ad una semplificazione del caso di un alone di materia oscura che ruota assieme alla galassia di appartenenza. In particolare, consideriamo modelli dove la velocità di rotazione diventa (almeno) costante a grandi raggi. In questi modelli la pressione del campo scalare non è trascurabile rispetto alla densità di massa-energia, e le equazioni del moto di Einstein non si riducono alle leggi della gravità Newtoniana. L'obiettivo di questa analisi è duplice: per prima cosa individuare Lagrangiane che permettano sia avere una curva di rotazione piatta sia di descrivere un modello unificato di materia ed energia oscura su scale cosmologiche. In secondo luogo, trovare Lagrangiane che riproducano le stesse curve di rotazione ottenute partendo da un determinato profilo di densità all'interno del modello CDM standard.

4.2.1 Soluzioni statiche in modelli UDM

Consideriamo dunque una situazione per certi versi opposta a quella esaminata finora: il caso di un campo scalare statico (ovvero indipendente dal tempo), ma spazialmente disomogeneo, ovvero il caso in cui $X < 0$. In questa situazione il tensore energia momento non è più descritto da un fluido perfetto mentre quello stress-energy si scrive come

$$T_{\mu\nu}^{\varphi} = (p_{||} + \rho)n_{\mu}n_{\nu} - \rho g_{\mu\nu} \quad (80)$$

dove

$$\rho = -p_{\perp} = -L, \quad n_{\mu} = \nabla_{\mu}\varphi/\sqrt{-2X}, \quad p_{||} = -(\rho + 2X\partial\rho/\partial X) \quad (81)$$

In particolare $p_{||}$ è la pressione nella direzione parallela a n_{μ} , mentre p_{\perp} quella ortogonale.

Consideriamo ora la metrica generale statica a simmetria sferica

$$ds^2 = -e^{(2\alpha(r))}dt^2 + e^{(2\beta(r))}dr^2 + r^2d\Omega^2 \quad (82)$$

con α, β due funzioni che dipendono solo da r .

Si può verificare che il termine non diagonale T^{rt} si annulla [21]. Pertanto φ può essere o strettamente statico e indipendente dal raggio, o dipendente esclusivamente dal tempo. Come indicato in precedenza, studiamo qui le soluzioni statiche.

In linea con l'idea di base di questo approccio (modellizzare un'approssimazione di un alone galattico), consideriamo il caso in cui la componente di materia barionica nell'alone non è trascurabile. Assumeremo comunque che la maggior parte dei barioni, di massa complessiva M_* siano concentrati all'interno di un raggio r_b . Per $r > r_b$, questo ci permette di considerare M_* come concentrata al centro dell'alone.

Esaminando quindi l'alone per $r > r_b$ partendo dalle equazioni di Einstein e dalla conservazione covariante della stress-energy si possono ottenere

$$\frac{1}{r^2} \{1 - [r \exp(-2\beta)]'\} = \rho \quad \iff \quad \frac{dM}{dr} = 4\pi\rho r^2 \quad (83)$$

$$\frac{1}{r^2} \{ \exp[-2\alpha - 2\beta] [r \exp(2\alpha)]' - 1 \} = p_{||} \quad \iff \quad \alpha' = \frac{\frac{M+M_*}{8\pi} + \frac{p_{||}r^3}{2}}{r^2 \left[1 - \frac{M+M_*}{4\pi r}\right]} \quad (84)$$

$$\frac{\exp[-\alpha + 2\beta]}{r} \left\{ [r \exp \alpha]' \beta' - [r(\exp \alpha)']' \right\} = \rho \quad (85)$$

$$\frac{dp_{||}}{dR} = -(p_{||} + \rho) \quad (86)$$

(il segno ' indica la differenziazione rispetto al raggio r) dove

$$\exp(-2\beta(r)) = 1 - (M + M_*)/(4\pi r), \quad R = \ln [r^2 \exp(\alpha(r))] \quad (87)$$

Si può vedere dalla (85) che nel caso in cui $\beta' = 0$ e $[r(\exp \alpha)']' > 0$ abbiamo $\rho < 0$. Dobbiamo escludere questi casi nella ricerca di una curva di rotazione.

Determiniamo il valore della velocità di rotazione v_c assumendo che a $\theta = \pi/2$ si trovi un corpo massivo di prova che invii un segnale luminoso ad un osservatore considerato stazionario e molto distante dall'alone. In questo caso può essere appropriato considerare questo corpo una stella. La traiettoria di tale stella nell'alone è descritta da una curva $x^{\mu} = (t, r, \theta, \phi)$ parametrizzata da un

qualche parametro affine, useremo qui il suo tempo proprio τ in modo da scrivere la sua quadrivelocità semplicemente come $dx^\mu/d\tau$. Grazie alla simmetria sferica, possiamo anche supporre senza perdita di generalità che il piano dell'ellittica della sfera sia quello con $\theta = \pi/2$. Dato che la stella è un corpo massivo la norma della sua quadrivelocità è $u_\mu u^\mu = -1$, il che porta al vincolo

$$e^{2\alpha} \dot{t}^2 - e^{2\beta} r^2 \dot{\phi}^2 = 1 \quad (88)$$

dove un punto denota una derivata rispetto al tempo proprio τ . Dato che la metrica impiegata non dipende esplicitamente ne da θ ne da t abbiamo le due quantità conservate

$$l = r^2 \dot{\phi}, \quad E = e^{2\alpha} \dot{t} \quad (89)$$

che inserite nella (88) forniscono un integrale primo per il moto della stella

$$\frac{1}{2} r^2 \dot{r}^2 + V(r) = 0 \quad (90)$$

dove $V(r) = \frac{1}{2} \exp(-2\beta) \left(1 + \frac{l^2}{r^2}\right) - \frac{1}{2} E^2 \exp[-2(\alpha + \beta)]$. Notiamo che il potenziale dipende esplicitamente dall'energia. Esistono orbite stazionarie di raggio r se V e dV/dr si annullano a quel raggio. Questo ci fornisce le due condizioni

$$1 + \frac{l^2}{r^2} = E^2 \exp[-2\alpha(r)] \quad (91)$$

$$-\beta' \left(1 + \frac{l^2}{r^2}\right) - \frac{l^2}{r^3} + E^2(\alpha' + \beta') \exp[-2\alpha(r)] = 0 \quad (92)$$

Sostituendo (91) in (92) e usando (83), (84) e (6), otteniamo la seguente equazione

$$\frac{l^2/r^2}{1 + l^2/r^2} = \frac{(M + M_*)(r)}{8\pi r} + r^2 \frac{p_{||}(r)}{2} \quad (93)$$

Che collega direttamente il momento angolare l con il profilo di densità dell'alone.

In questo caso, tramite la definizione del momento angolare l della stella e l'equazione (93), il valore di $v_c \equiv l/r$ può essere scritto come

$$v_c^2 = \frac{p_{||} r^2/2 + (M + M_*)/(8\pi r)}{1 - [p_{||} r^2/2 + (M + M_*)/(8\pi r)]} \quad (94)$$

ma quando consideriamo la condizione di campo debole $(M + M_*)/(8\pi r) \ll 1$ e l'assunzione che $v_c \ll 1$ data dal fatto che le velocità di rotazione dell'alone di una galassia a spirale sono generalmente non relativistiche, l'equazione (94) si riduce a [21]

$$v_c^2 \approx \frac{M + M_*}{8\pi} + r^2 \frac{p_{||}(r)}{2} \quad (95)$$

Infine, possiamo vedere che la relazione (95) è invariante per la seguente trasformazione

$$\rho \longrightarrow \tilde{\rho} = \rho + \sigma(r), \quad p_{||} \longrightarrow \tilde{p}_{||} = p_{||} + q(r) \quad (96)$$

se

$$3q(r) + rq(r)' = -\sigma(r) \quad (97)$$

a meno di alcune costanti di integrazione. Grazie a questa trasformazione possiamo considerare un ensemble di soluzioni che hanno la stessa curva di rotazione.

Sostanzialmente abbiamo trovato due modi per ottenere curve di rotazione ragionevoli:

1. Il primo approccio consiste semplicemente nello scegliere una Lagrangiana che restituisca un modello UDM valido ed analizzare quali sono le condizioni in cui può fornire una soluzione statica con una curva di rotazione piatta a grandi raggi. Questo è forse il metodo più convenzionale e rappresenta una naturale estensione dello studio delle soluzioni di background.
2. Un secondo approccio consiste nello sfruttare la proprietà di invarianza dell'equazione (95) rispetto alla trasformazione (96) (quando la condizione (97) è soddisfatta). Di solito ci si riduce al limite di gravità Newtoniana usando un profilo di densità CDM. Il procedimento consiste nell'assumere che in (95) $p_{||} \ll M/(4\pi r^3)$ in modo da poter utilizzare la proprietà sopra indicata per ottenere profili di pressione $p_{||}(r)$ e di densità di energia $\rho(r)$ che riproducano le stesse curve di rotazione di un modello con pressione non trascurabile. Successivamente si trova un'equazione di stato $p_{||} = p_{||}(\rho)$ tale da permetterci di ricostruire, attraverso le equazioni (81), l'espressione per la Lagrangiana L . Una simile procedura stabilisce una mappa tra soluzioni UDM e CDM che prevedono la stessa curva di rotazione per l'alone. Questo secondo metodo permette di avvalersi dell'estesa gamma di modelli CDM presenti in letteratura ed è facilmente adattabile ai risultati di nuove osservazioni.

5 Conclusioni

Il modello cosmologico standard Λ CDM, nonostante la grande consistenza interna e l'ampio supporto derivante dai dati osservativi, non è tuttavia esente da criticità e limiti, in particolare nella descrizione della natura e del comportamento delle due componenti oscure. La gamma di modelli teorici proposta per colmare queste lacune è vasta ed estremamente diversificata, ma sottoposta a requisiti molto stringenti dai dati sperimentali. In questo elaborato si è esaminata in maniera particolare l'ipotesi che il comportamento attribuito a due componenti separate di DM e DE possa venire descritto da un singolo campo scalare. Abbiamo visto come questo approccio abbia il pregio di offrire una soluzione elegante a quelle che ad un primo esame sembrano due problematiche molto differenti tra loro, e come il problema possa venire esaminato, almeno limitatamente a scale cosmologiche, con calcoli di complessità ridotta tramite lo studio delle soluzioni di background. Si è tuttavia riscontrato come ottenere un modello UDM che si comporti bene sia su scale cosmologiche che su scale minori (e che quindi abbandoni le ipotesi semplificative adottate nelle soluzioni di background e rispetti i vincoli posti dai risultati osservativi) sia assai arduo, e tutt'ora un problema

irrisolto. Tuttavia, i metodi impiegati per studiare la dinamica dei vari modelli (studio delle soluzioni di background, applicazione delle equazioni di friedmann, calcolo della velocità del suono, studio degli attrattori e della stabilità delle traiettorie) hanno carattere generale, e posso essere applicati, con i dovuti accorgimenti, anche a modelli non strettamente UDM. In particolare tramite l'identificazione tra il formalismo di campo scalare e quello di gravità modificata la gamma di modelli che possono essere esaminati con i criteri qui visti è molto ampia. Conseguentemente, in tempi recenti, la ricerca in quest'ambito ha spostato l'enfasi dalla ricerca di un particolare modello cosmologico da sottoporre poi a verifica, alla formulazione di un modello dal carattere più generale possibile, da modificare in un secondo tempo sulla base di nuovi risultati sperimentali o della formulazione di una nuova teoria.

Riferimenti bibliografici

- [1] **Supernova Cosmology Project** Collaboration, S. Perlmutter *et al.*, *Measurements of Omega and Lambda from 42 High-Redshift Supernovae*, *Astrophys. J.* **517** (1999) 565–586, [astro-ph/9812133]
- [2] **Supernova Search Team** Collaboration, A. G. Riess *et al.*, *Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant*, *Astron. J.* **116** (1998) 1009–1038, [astro-ph/9805201].
- [3] V. Sahni and A.A. Starobinsky, *The case for a Positive Cosmological Λ -term*, *Int. J. Mod. Phys.* **D9**, 373 (2000).
- [4] P.J.E. Peebles and B. Ratra, *The Cosmological Constant and Dark Energy*, *Rev. Mod. Phys.* **75**, 559 (2003).
- [5] S. Tsujikawa, *Dark energy: investigation and modeling*, arXiv:1004.1493.
- [6] E. J. Copeland, M. Sami, and S. Tsujikawa, *Dynamics of dark energy*, *Int. J. Mod. Phys.* **D15** (2006) 1753–1936, [hep-th/0603057].
- [7] **WMAP** Collaboration, D. Larson *et. al.*, *Nine Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Parameter Results* (2012), [arXiv:1212.5226].
- [8] **Planck** Collaboration, *Planck 2013 results. XVI. Cosmological Parameters* (2013), [arXiv:1212.5226].
- [9] C. Armendariz-Picòn, V. Mukhanov and P. J. Steinhardt, *A Dynamical Solution to the Problem of a Small Cosmological Constant and Late-time Cosmic Acceleration*, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 4438 (2000).
- [10] C. Armendariz-Picon, T. Damour, and V. Mukhanov, *k-Inflation*, *Phys. Lett.* **B458**, 209 (1999).
- [11] J. Garriga and V.F. Mukhanov, *Perturbations in k-Inflation*, *Phys. Lett.* **B458**, 219 (1999).
- [12] C. Armendariz-Picòn, V. Mukhanov and P. J. Steinhardt, *Essentials of k-essence*, *Phys. Rev.* **D63**, 103510 (2001).
- [13] V. Gorini, A. Kamenshchik, U. Moschella, V. Pasquier, *The Chaplygin Gas as a Model for Dark Energy* (2004) [arXiv:gr-qc/0403062v2]
- [14] A. Y. Kamenshchik, U. Moschella and V. Pasquier, *An alternative to quintessence*, *Phys. Lett.* **B511**, 265 (2001).
- [15] L. P. Chimento and A. Feinstein, *Power-law expansion in k-essence cosmology*, *Mod. Phys. Lett.* **A19** (2004) 761–768, [astro-ph/0305007].
- [16] R. J. Scherrer, *Purely kinetic k-essence as unified dark matter*, *Phys. Rev. Lett.* **93** (2004) 011301, [astro-ph/0402316].

- [17] D. Giannakis and W. Hu, *Challenges for Kinetic Unified Dark Matter*, *Phys. Rev.* **D72**, 063502 (2005).
- [18] D. Bertacca, S. Matarrese, and M. Pietroni, *Unified dark matter in scalar field cosmologies*, *Mod. Phys. Lett.* **A22** (2007) 2893–2907, [astro-ph/0703259].
- [19] D. Bertacca, S. Matarrese, and N. Bartolo, *Unified Dark Matter Scalar Field Models*, *Advances in Astronomy* **904379** (2010)
- [20] V. Gorini, A. Kamenshchik, U. Moschella, V. Pasquier, and A. Starobinsky, *Stability properties of some perfect fluid cosmological models*, *Phys. Rev.* **D72** (2005) 103518, [astro-ph/0504576].
- [21] C. Armendariz-Picon and E. A. Lim, *Haloes of k -Essence*, *JCAP* **0508** (2005) 007, [astro-ph/0505207].
- [22] V. Gorini, A. Kamenshchik, U. Moschella and V. Pasquier, *Phys. Rev.* **D69**, 123512 (2004).
- [23] N. Bilic, G.B. Tupper, and R.D. Viollier, *Dark Matter, Dark Energy and the Chaplygin Gas*, astro-ph/0207423.
- [24] F. Lucchin, *Introduzione alla Cosmologia* (1998) Zanichelli