



UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
DI PADOVA

Università degli Studi di Padova

---

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA "TULLIO LEVI-CIVITA"

Corso di Laurea Triennale in Matematica

# L'interpretazione della logica intuizionista nella logica modale

Relatrice:  
Prof.ssa Maria Emilia Maietti

Laureanda:  
Giulia Tonolo

Matricola: 1150021

---

Anno Accademico 2022/2023

21 Aprile 2023



*Alle mie nonne,  
Bruna e Maria*



# Indice

<b>Abstract</b>	<b>v</b>
<b>Introduzione</b>	<b>vii</b>
<b>1 Nozioni basilari</b>	<b>1</b>
1.1 Linguaggio della logica dei predicati del primo ordine . . . . .	1
1.2 Calcolo dei sequenti alla Gentzen . . . . .	3
1.3 Algebra di Boole e Algebra di Heyting . . . . .	6
<b>2 Logica intuizionista e logica classica a confronto</b>	<b>9</b>
<b>3 La logica modale</b>	<b>13</b>
3.1 La logica modale <b>S4</b> . . . . .	13
<b>4 Interpretazione della logica intuizionista in S4</b>	<b>17</b>
<b>5 Cenni sulla semantica di S4</b>	<b>39</b>
5.1 Semantica di Kripke . . . . .	39
5.1.1 Semantica di Kripke . . . . .	39
5.1.2 Completezza di <b>S4p</b> . . . . .	42
5.1.3 Decidibilità di <b>S4p</b> . . . . .	45
5.2 Algebrizzazione della logica modale <b>S4p</b> . . . . .	49
5.2.1 Algebra modale . . . . .	49
5.2.2 Decidibilità di <b>S4p</b> . . . . .	53
5.2.3 Una visione algebrica della semantica di Kripke . . . . .	54
5.2.4 Interpretazione della logica intuizionista in <b>S4p</b> . . . . .	59
<b>Conclusioni</b>	<b>63</b>
<b>A Il sistema di Hilbert Hc</b>	<b>65</b>
<b>B Il sistema di Gentzen G1c</b>	<b>67</b>
<b>C Il sistema di Gentzen G3c</b>	<b>69</b>
<b>D Il sistema di Gentzen G3i</b>	<b>71</b>
<b>E Logica intuizionista proposizionale LIp</b>	<b>73</b>









# Abstract

In questa tesi si descrive l'interpretazione della logica intuizionista proposizionale nella logica modale proposizionale **S4** ad opera di Gödel, McKinsey e Tarski. Il vantaggio di tale interpretazione è quello di conservare le proprietà di disgiunzione e di esistenza che caratterizzano la logica intuizionista rispetto a quella classica. Tali proprietà non sono infatti conservate dall'interpretazione "identica" che segue dalla definizione della logica intuizionista predicativa come frammento della logica classica predicativa.

Inoltre, dopo aver introdotto sia la semantica di Kripke sia la semantica algebrica per la logica modale **S4**, si utilizza quest'ultima semantica per mostrare che l'interpretazione della logica intuizionista in **S4** composta con la traduzione della doppia negazione di Gödel-Gentzen non coincide con l'immersione della logica classica in **S4**.



# Introduzione

Tra gli ultimi decenni dell'Ottocento e la prima metà del Novecento ha luogo la cosiddetta "seconda rivoluzione" scientifica. In matematica e in molti altri campi della scienza avvengono una serie di trasformazioni radicali che cambiano non solo il linguaggio, ma anche i metodi e gli oggetti stessi d'indagine. Questi cambiamenti e scoperte coinvolgono anche i sistemi formali e le logiche, infatti nel ventesimo secolo viene meno la certezza che verità e logica coincidano e viene meno la fiducia fino a quel momento riposta in essa. [3]

Nel 1908, Luitzen Egbertus Jan Brouwer introduce con l'articolo *De onbetrouwbaarheid der logische principes* (L'inaffidabilità dei principi logici) la molteplicità delle logiche: la logica classica non è l'unica logica possibile. Le varie logiche si diversificano sia in base al concetto di proposizione, ovvero il tipo di informazione a cui si vuole dare rilievo per definire se una proposizione è valida, sia perchè in una stessa logica si possono variare i modi di concepire la validità, per esempio aggiungendo delle modalità. La pluralità delle logiche richiede un nuovo campo di indagine, quello delle interpretazioni dette anche traduzioni o *embedding*. [12]

È in questo contesto storico che rifiorisce l'interesse nelle logiche modali. La logica modale ha radici antiche, la sua introduzione si deve ad Aristotele: nell'Organon il filosofo presenta le modalità e studia le relazioni tra necessario, possibile, impossibile e contingente. I concetti di *necessità* e di *possibilità* sono oggetto di studio anche nel Medioevo; successivamente, però, si perde interesse nelle logiche modali, poichè prive di una semantica appropriata: le modalità smettono di essere di competenza della logica e passano nell'area della filosofia.

Seguendo [2], lo sviluppo della logica modale contemporanea può essere suddiviso in tre periodi principali: il primo, fase sintattica, coincide con la formalizzazione della logica modale classica ad opera di C. I. Lewis, il secondo, fase classica, è caratterizzato dalla semantica relazionale e il terzo, fase attuale, parte dall'interpretazione algebrica della teoria delle strutture o *frame*.

La nascita, o la rinascita, della logica modale contemporanea è associata al lavoro di Lewis. Nel 1918 il logico americano presenta il primo sistema modale e nel 1932 in *Symbolic Logic*, scritto insieme a C. H. Langford, definisce in forma definitiva i suoi sistemi **S1**, ..., **S5**, ognuno basato su differenti assiomi dell'implicazione stretta. Il lavoro parte da una critica nei confronti del linguaggio dei *Principia Mathematica* considerandolo inadeguato per esprimere le connessioni inferenziali. In particolare ne contesta il connettivo di implicazione materiale ritenendo che non rappresenti in maniera precisa la relazione di deducibilità. Lewis e Langford mettono in discussione il concetto stesso di verità classico, poichè troppo rigido. Si propongono di sviluppare un calcolo che sia libero dai paradossi dell'implicazione materiale: esempi di questi sono il fatto che una proposizione vera è implicata da qualunque proposizione  $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ , o il fatto che una proposizione falsa implica qualunque proposizione  $\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$ . Secondo Lewis  $q$  è deducibile da  $p$  non quando  $p \rightarrow q$  risulta vera, ma quando è *necessariamente* vera o è *impossibile* che sia falsa. Al posto dell'implicazione materiale propone un'implicazione stretta  $\rightarrow$  che si può definire in questo modo

$$p \rightarrow q = \neg \diamond (p \wedge \neg q) \text{ ossia } \Box (p \rightarrow q)$$

dove  $\diamond$  indica la modalità della *possibilità* e  $\square$  la modalità della *necessità*. La teoria dell'implicazione materiale si ricava come sottosistema del sistema dell'implicazione stretta. [6]

Da un punto di vista cronologico, la prima semantica introdotta per la logica modale è algebrica ed è basata sulla nozione di algebra di Boole topologica o sulla nozione duale di algebra di chiusura, ovvero una struttura che si ottiene da un'algebra di Boole aggiungendo un operatore unario avente rispettivamente le stesse proprietà dell'interno topologico o le stesse proprietà dell'operazione di chiusura topologica. Nel 1944 in *The algebra of topology* John C.C. McKinsey e Alfred Tarski propongono questa semantica per studiare le possibili connessioni tra algebra e topologia, due anni dopo trovano una connessione tra le algebre di chiusura e le algebre di Heyting. In letteratura si presenta principalmente un'altra semantica elaborata agli inizi degli anni sessanta del secolo scorso: la semantica relazionale o di Kripke o dei *frame*, dal nome dell'autore, S. Kripke, che ha contribuito maggiormente alla sua diffusione. Kripke presenta una semantica sia per la logica intuizionista sia per la logica modale. Per quanto riguarda la logica modale l'impatto è decisivo in quanto permette di risolvere i problemi relativi alla completezza di molti calcoli modali. La connessione tra queste due semantiche viene espressa nella teoria della dualità sviluppata da B. Jónsson e A. Tarski in cui i punti di un modello relazionale sono associati agli ultrafiltri di un'algebra modale, mentre la relazione R è associata a una topologia sugli elementi dell'algebra stessa. Resa pubblica nel 1952, questa teoria fu trascurata per vent'anni ed è solo all'inizio della fase attuale che il suo significato viene apprezzato. [1] [2]

La logica classica e la logica intuizionista sono le due logiche che si adattano meglio all'uso matematico. Queste due logiche utilizzano gli stessi simboli del linguaggio, ma differiscono nel loro significato. La logica classica si basa su tre punti cardine: la bivalenza, ovvero ogni enunciato può avere solo due valori di verità, vero o falso; il principio del terzo escluso, data una formula  $fr$  o è vera  $fr$  oppure la sua negazione,  $\neg fr$ , e il principio di non contraddizione, cioè se una formula  $fr$  è vera non può essere vera anche la sua negazione. La logica intuizionista, invece, si fonda sull'idea che in matematica sono da considerare realmente esistenti solo gli oggetti di cui è possibile fornire una costruzione mentale, quindi data una formula  $fr$  affinché essa sia valida bisogna poter esibire la costruzione di un oggetto che la soddisfi. Il principio del terzo escluso è, evidentemente, in contraddizione con il carattere costruttivo della logica intuizionista. [8]

Quest'ultima risulta caratterizzata da due proprietà: la proprietà di disgiunzione che afferma che, date due formule  $fr_1$  e  $fr_2$ , si ha una dimostrazione di  $fr_1 \vee fr_2$  se e solo se è possibile presentare una dimostrazione di  $fr_1$  o una dimostrazione di  $fr_2$ ; e la proprietà di esistenza per cui, data una formula  $fr$ , si ha una dimostrazione di  $\exists x fr(x)$  se e solo se esiste un termine  $t$  tale per cui è dimostrabile  $fr(t)$ . Per mettere in relazione due logiche si utilizza lo strumento matematico delle traduzioni e chiaramente, per costruzione, la logica intuizionista può essere vista come frammento della logica classica: la prima può essere definita in relazione alla seconda utilizzando il calcolo della deduzione naturale ottenuto a partire dalle regole della deduzione naturale classica eliminando la regola dell'ex-falso-quodlibet. [9]

Una tale mappa che permette di tradurre una formula e di associare a una sua derivazione in logica intuizionista una derivazione in logica classica nella stessa formula, è una traduzione, detta "identica", della logica intuizionista nella logica classica. Questa traduzione "identica" non conserva la proprietà di disgiunzione e quella di esistenza, ovvero la traduzione non è fedele.

Esiste, invece, una traduzione fedele della logica classica predicativa con uguaglianza in quella intuizionista ed è quella presentata nel 1933 da K. Gödel, in *Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie*, oggi nota come traduzione della doppia negazione di Gödel-Gentzen, in quanto lo stesso risultato fu trovato autonomamente da Gerhard Gentzen. Questa traduzione è definibile all'interno del linguaggio predicativo con uguaglianza in cui sono formulate le due logiche: non è necessario introdurre una modalità esterna.

*È possibile tradurre la logica intuizionista in un'estensione della logica classica mantenendo il*

*suo significato e quindi conservando le proprietà di disgiunzione e di esistenza?*

La risposta è affermativa ed è stata dimostrata da Gödel, McKinsey e Tarski per il caso proposizionale e da H. Rasiowa e R. Sikorski per il caso predicativo (senza uguaglianza). Tale estensione della logica classica è ottenuta aggiungendo una modalità esterna: la logica intuizionista può essere tradotta nella logica classica ampliando l'insieme di assiomi e le regole classiche con gli assiomi  $\Box A \rightarrow A$ ,  $\Box A \rightarrow \Box \Box A$ ,  $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow \Box A \rightarrow \Box B$  e la regola *se A è dimostrabile allora  $\Box A$  è dimostrabile*. Una logica classica ampliata in questo modo è il sistema modale **S4**.

Esistono varie interpretazioni della logica intuizionista **LI** nella logica modale **S4** e tra queste vi sono lievi differenze. La prima traduzione è presentata nel 1933 da Gödel che ne prova la validità e ne ipotizza la conservatività. La conservatività viene dimostrata da Tarski e McKinsey, nel 1948, con metodi semantici. Questa traduzione è definita sui frammenti proposizionali delle due logiche e segna l'inizio della logica della dimostrabilità, rendendo precisa la differenza tra il concetto di dimostrabilità in un sistema formale specifico e quello di dimostrabilità in un qualsiasi sistema corretto.  $\Box A$  va letto come "A è intuizionisticamente dimostrabile", dove "dimostrabile" non va inteso come "formalmente dimostrabile in uno specifico sistema ricorsivamente assiomatizzabile", ma come "dimostrabile mediante qualsiasi argomento intuizionisticamente accettabile". [13]

Lo scopo di questa tesi è studiare l'interpretazione della logica intuizionista nella logica modale **S4** sviluppando la traduzione da un punto di vista sintattico e mostrare che **S4** composto con la traduzione della doppia negazione non fornisce un sistema equivalente al frammento classico della logica modale.

Il capitolo 1 funge da introduzione teorica: vi si trovano le definizioni e i risultati utili per la comprensione del lavoro, un'esposizione del linguaggio logico e del suo calcolo, cioè la sintassi di base; sono, inoltre, riportate le basi teoriche per uno studio della semantica algebrica.

Nel capitolo 2 ci si concentra sul rapporto tra logica intuizionista e logica classica. Vengono messe in luce le proprietà caratterizzanti la logica intuizionista che non vengono conservate dalla traduzione "identica" che si ha definendola come frammento della logica classica.

Nel capitolo 3 si introduce il linguaggio della logica modale e i calcoli dei sequenti per la stessa, soffermandosi sul sistema modale **S4**.

Il capitolo 4 è dedicato all'interpretazione "sintattica" della logica intuizionista nella logica modale **S4**: in esso si utilizzano le due versioni della traduzione presentate in [13] e viene provata la validità e conservatività del frammento proposizionale.

L'ultimo capitolo tratta gli aspetti semantici. Viene presentata la semantica relazionale o di Kripke per la logica modale e per la logica intuizionista. Sono discusse la completezza e la decidibilità del frammento proposizionale di **S4** utilizzando, rispettivamente, i modelli canonici e le  $\Gamma$ -filtrazioni.

Nella sezione 5.2 viene introdotta la semantica algebrica che permette di mostrare che l'interpretazione della logica intuizionista in **S4** composta con la traduzione della doppia negazione di Gödel-Gentzen non coincide con l'immersione della logica classica in **S4**. Viene provata, inoltre, la decidibilità del frammento proposizionale di **S4**. Nella penultima sottosezione del capitolo si vuole esplicitare il rapporto esistente tra le due semantiche. Si termina presentando la traduzione di Gödel-McKinsey-Tarski della logica intuizionista nella logica modale **S4** e dimostrandone "algebricamente" la validità e conservatività.



# Capitolo 1

## Nozioni basilari

In questo capitolo vengono presentate le conoscenze preliminari fondamentali per la comprensione dello sviluppo della tesi. Le prime due sezioni fanno riferimento, in particolare, ai testi [9] e [13].

### 1.1 Linguaggio della logica dei predicati del primo ordine

Un linguaggio predicativo ha due classi di simboli: i *termini*, per indicare enti e i *predicati*, per indicare proprietà logiche degli enti. Con il termine *formula* si indica un predicato e questo può essere *atomico*, ovvero dato come primitivo o *composto*, ovvero costruito con connettivi proposizionali o con quantificazioni da predicati primitivi che sono chiusi sia su quantificazione universale che su quantificazione esistenziale. Si usano il simbolo  $\varphi$  oppure le lettere minuscole greche come meta-variabile per indicare una formula generica.

**Definizione 1.1.1** (Linguaggio predicativo del primo ordine). Un linguaggio *predicativo*  $\mathcal{L}$  è determinato dai seguenti simboli di base

- *variabili* per termini: una quantità almeno numerabile di variabili  $x_1, \dots, x_n$  indicate anche con  $x, w, y, z$ ;
- *costanti* per termini: una quantità, anche vuota, grande a piacere di costanti  $c_j$  per  $j \in J$  con  $J$  collezione di "indici";
- *funzioni  $n$ -arie* tra termini: una quantità grande a piacere, anche vuota, di funzioni  $f_k(x_1, \dots, x_n)$  dipendenti da  $n$ -variabili con  $n \geq 1$  per  $k \in K$  con  $K$  collezione di "indici";
- *predicati atomici*: una quantità grande a piacere, anche vuota, di predicati atomici  $P_k(x_1, \dots, x_m)$   $m$ -ari dipendenti da  $m$ -variabili con  $m \geq 0$  per  $k \in K'$  con  $K'$  collezione di "indici". In particolare, i predicati  $P_k$  che sono  $0$ -ari, ovvero che non dipendono da alcuna variabile, sono detti *proposizioni atomiche*.

Oltre a questi simboli di base  $\mathcal{L}$  contiene anche i simboli dei connettivi di *disgiunzione*  $\vee$ , di *congiunzione*  $\&$ , di *implicazione*  $\rightarrow$ , simboli di *costante falso*  $\perp$  e poi i simboli di *quantificazione universale*  $\forall$ , di *quantificazione esistenziale*  $\exists$  e i simboli di parentesi.

**Definizione 1.1.2.** Un *termine*  $t$  di un linguaggio predicativo  $\mathcal{L}$  può essere costruito in questo modo:

- una variabile  $x$  è un termine;

- una costante  $c$  è un termine;
- ogni funzione  $f_k(t_1, \dots, t_n)$  è un termine se è ottenuta sostituendo in un simbolo di funzione  $f_k(x_1, \dots, x_n)$  ciascuna variabile  $x_j$  con un termine  $t_j$  per  $j = 1, \dots, n$ .

**Definizione 1.1.3.** Una *formula*  $fr$  di un linguaggio predicativo  $\mathcal{L}$  è definita induttivamente in tal modo:

- sono *formule* i predicati atomici  $P_K(t_1, \dots, t_m)$  ottenuti dal predicato atomico  $P_K(x_1, \dots, x_m)$  sostituendo le variabili con termini  $t_i$  per  $i = 1, \dots, m$ ;
- $\forall x(fr)$  è una *formula* se  $fr$  lo è;
- $\exists x(fr)$  è una *formula* se  $fr$  lo è;
- la costante "falso"  $\perp$  è una *formula*;
- $(fr_1) \& (fr_2)$  è una *formula* se  $fr_1$  e  $fr_2$  lo sono;
- $(fr_1) \vee (fr_2)$  è una *formula* se  $fr_1$  e  $fr_2$  lo sono;
- $(fr_1) \rightarrow (fr_2)$  è una *formula* se  $fr_1$  e  $fr_2$  lo sono.

Nel caso di un linguaggio modale si ha un ulteriore caso

- $\Box fr$  è una *formula* se  $fr$  lo è.

Si indica con  $\leftrightarrow$  il connettivo equivalenza e lo si definisce nel modo seguente: date due formule  $fr_1$  e  $fr_2$  si ha

$$fr_1 \leftrightarrow fr_2 \equiv (fr_1 \rightarrow fr_2) \& (fr_2 \rightarrow fr_1).$$

Si definisce

$$\neg fr \equiv fr \rightarrow \perp \quad \top \equiv \perp \rightarrow \perp.$$

Nel testo, se  $\Gamma$  è una sequenza finita di formule

$$\Gamma \equiv fr_1, \dots, fr_n$$

allora si definisce  $\bigwedge \Gamma$  come la congiunzione iterata, ovvero

$$\bigwedge \Gamma \equiv (fr_1 \& fr_2) \& \dots \& fr_n$$

e  $\bigvee \Gamma$  la disgiunzione iterata, ovvero

$$\bigvee \Gamma \equiv (fr_1 \vee fr_2) \vee \dots \vee fr_n.$$

Se  $\Gamma$  è vuoto, si identifica  $\bigvee \Gamma$  con  $\perp$ , e  $\bigwedge \Gamma$  con  $\top$ .

**Definizione 1.1.4** (Sottoformula). Una formula  $fr$  è *sottoformula* di una formula  $\psi$  in un linguaggio predicativo

- se  $\psi \equiv fr$ ;
- se  $\psi \equiv fr_1 \rightarrow fr_2$ , oppure  $\psi \equiv fr_1 \& fr_2$ , oppure  $\psi \equiv fr_1 \vee fr_2$  allora  $fr$  è sottoformula di  $fr_1$  oppure di  $fr_2$ ;
- se  $\psi \equiv \forall x fr_1$ , oppure  $\psi \equiv fr_1$ , allora  $fr$  è sottoformula di  $fr_1$ .

Nel caso di un linguaggio modale si ha un ulteriore caso

- $\psi \equiv \Box fr_1$  allora  $fr$  sottoformula di  $fr_1$ .



## 1.2 Calcolo dei sequenti alla Gentzen

Nel 1935 Gentzen introdusse i suoi calcoli LK, LJ come formalismi più adatti da utilizzare metamatematicamente della deduzione naturale, per questi sistemi ha, infatti, sviluppato l'eliminazione della regola del taglio. Esistono diverse varianti dei sistemi di Gentzen, in questa tesi per la ricerca delle derivazioni si usano i calcoli **G1(ic)** che mantengono distinte le regole logiche e le regole strutturali, i calcoli **G3(ic)** in cui le regole strutturali sono assorbite in quelle logiche e **LI** dove  $\neg$  è un operatore di negazione e le regole di scambio. I calcoli dei sequenti alla Gentzen sono formulati a partire da sequenti del tipo

$$\Gamma \Rightarrow \Delta$$

dove  $\Gamma, \Delta$  indicano multiinsiemi o liste (anche vuote) di formule di un linguaggio formale predicativo fissato  $\mathcal{L}$ , i primi nel caso dei sistemi **G1** e **G3**, le seconde nel caso **LI**.

**Definizione 1.2.1** (I sistemi di Gentzen **G1c**, **G1i**). Le dimostrazioni o deduzioni sono etichettate come alberi finiti con una sola radice, con assiomi ai nodi superiori, e ciascun nodo-etichetta è connesso con i contrassegni dei nodi premessa secondo una regola. Le regole sono divise in regole *-sinistra* (-S) e *-destra* (-D). Per un operatore logico, sia  $\star$ ,  $\star -S$ ,  $\star -D$  indicano le regole in cui una formula con  $\star$  come operatore principale viene introdotta rispettivamente a sinistra e a destra. Il sistema di Gentzen **G1c** per la logica classica è:

*Assiomi*

$$\text{fr} \Rightarrow \text{fr} \quad \text{ax} - \text{id}$$

$$\perp \Rightarrow \quad \text{ax} - \perp$$

*Regole di indebolimento e di contrazione*

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\text{fr}, \Gamma \Rightarrow \Delta} \text{in}_{\text{sx}}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \text{fr}} \text{in}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\text{fr}, \text{fr}, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\text{fr}, \Gamma \Rightarrow \Delta} \text{cn}_{\text{sx}}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \text{fr}, \text{fr}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \text{fr}} \text{cn}_{\text{dx}}$$

*Regole per gli operatori logici*

$$\frac{\text{fr}_i, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\text{fr}_0 \& \text{fr}_i, \Gamma \Rightarrow \Delta} \& - S \quad (i = 0, 1)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \text{fr}_1 \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \text{fr}_2}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \text{fr}_1 \& \text{fr}_2} \& - D$$

$$\frac{\text{fr}_1, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad \text{fr}_2, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\text{fr}_1 \vee \text{fr}_2, \Gamma \Rightarrow \Delta} \vee - S$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \text{fr}_i}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \text{fr}_0 \vee \text{fr}_i} \vee - D \quad (i = 0, 1)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \text{fr}_1 \quad \text{fr}_2, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\text{fr}_1 \rightarrow \text{fr}_2, \Gamma \Rightarrow \Delta} \rightarrow - S$$

$$\frac{\text{fr}_1, \Gamma \Rightarrow \Delta, \text{fr}_2}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \text{fr}_1 \rightarrow \text{fr}_2} \rightarrow - D$$

$$\frac{\alpha[x/y], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x \alpha(x), \Gamma \Rightarrow \Delta} \forall - S$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha[x/y]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x \alpha(x)} \forall - D \quad (y \notin \text{VL}(\Gamma, \forall x \alpha(x), \Delta))$$

$$\frac{\alpha[x/y], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x \alpha(x), \Gamma \Rightarrow \Delta} \exists - S \quad (y \notin \text{VL}(\Gamma, \exists x \alpha(x), \Delta))$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha[x/t]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x \alpha(x)} \exists - D$$

Nelle regole  $\Gamma, \Delta$  sono dette *formule secondarie* o il *contesto*. Nella conclusione di ogni regola, la formula non nel contesto è detta formula *principale*. In un sequente,  $\Gamma \Rightarrow \Delta$ ,  $\Gamma$  è detto

l'*antecedente* e  $\Delta$  il *conseguente*. La/e formula/e nella/e premessa/e da cui deriva la formula principale (cioè le formule non appartenenti al contesto) sono le formule *attive*. Nell'assioma  $ax - id$ , entrambe le occorrenze di  $fr$  sono principali, in  $ax - \perp$  l'occorrenza di  $\perp$  è principale. Il sistema di Gentzen **G1i** per la logica intuizionista è il sottosistema di **G1c** ottenuto restringendo tutti gli assiomi e le regole a sequenti con al massimo una formula a destra e sostituendo  $\rightarrow -S$  con

$$\frac{\Gamma \Rightarrow fr_1 \quad fr_2, \Gamma \Rightarrow \Delta}{fr_1 \rightarrow fr_2, \Gamma \Rightarrow \Delta} \rightarrow -S$$

Si definiscono, ora, i sistemi di Gentzen **G3** in cui sia l'indebolimento che la contrazione sono assorbiti nelle regole e negli assiomi.

**Definizione 1.2.2** (I sistemi di Gentzen **G3c, G3i**). Il sistema **G3c** è formato dai seguenti assiomi e regole:

*Assiomi*

$$P, \Gamma \Rightarrow \Delta, P \quad ax - id \quad (P \text{ atomica})$$

$$\perp, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad ax - \perp$$

*Regole per gli operatori logici*

$$\frac{fr_1, fr_2, \Gamma \Rightarrow \Delta}{fr_1 \& fr_2, \Gamma \Rightarrow \Delta} \& - S$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, fr_1 \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, fr_2}{\Gamma \Rightarrow \Delta, fr_1 \& fr_2} \& - D$$

$$\frac{fr_1, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad fr_2, \Gamma \Rightarrow \Delta}{fr_1 \vee fr_2, \Gamma \Rightarrow \Delta} \vee - S$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, fr_1, fr_2}{\Gamma \Rightarrow \Delta, fr_1 \vee fr_2} \vee - D$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, fr_1 \quad fr_2, \Gamma \Rightarrow \Delta}{fr_1 \rightarrow fr_2, \Gamma \Rightarrow \Delta} \rightarrow - S$$

$$\frac{fr_1, \Gamma \Rightarrow \Delta, fr_2}{\Gamma \Rightarrow \Delta, fr_1 \rightarrow fr_2} \rightarrow - D$$

$$\frac{\forall x \alpha(x), \alpha[x/t], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x \alpha(x), \Gamma \Rightarrow \Delta} \forall - S$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha[x/y]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x \alpha(x)} \forall - D \quad (y \notin VL(\Gamma, \forall x \alpha(x), \Delta))$$

$$\frac{\alpha[x/y], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x \alpha(x), \Gamma \Rightarrow \Delta} \exists - S \quad (y \notin VL(\Gamma, \exists x \alpha(x), \Delta))$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha[x/t], \exists x \alpha(x)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x \alpha(x)} \exists - D$$

La versione intuizionista **G3i** di **G3c** ha la seguente forma:

*Assiomi*

$$P, \Gamma \Rightarrow P \quad ax - id \quad (P \text{ atomica})$$

$$\perp, \Gamma \Rightarrow fr \quad ax - \perp$$

*Regole per gli operatori logici*

$$\frac{fr_1, fr_2, \Gamma \Rightarrow \psi}{fr_1 \& fr_2, \Gamma \Rightarrow \psi} \& - S$$

$$\frac{\forall x \alpha(x), \alpha[x/t], \Gamma \Rightarrow \psi}{\forall x \alpha(x), \Gamma \Rightarrow \psi} \forall - S$$

$$\frac{fr_1, \Gamma \Rightarrow \psi \quad fr_2, \Gamma \Rightarrow \psi}{fr_1 \vee fr_2, \Gamma \Rightarrow \psi} \vee - S$$

$$\frac{\alpha[x/y], \Gamma \Rightarrow \psi}{\exists x \alpha(x), \Gamma \Rightarrow \psi} \exists - S \quad (y \notin VL(\Gamma, \exists x \alpha(x), \psi))$$

$$\frac{fr_1 \rightarrow fr_2, \Gamma \Rightarrow fr_1 \quad fr_2, \Gamma \Rightarrow \psi}{fr_1 \rightarrow fr_2, \Gamma \Rightarrow \psi} \rightarrow - S$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow fr_1 \quad \Gamma \Rightarrow fr_2}{\Gamma \Rightarrow fr_1 \& fr_2} \& - D$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \text{fr}_i}{\Gamma \Rightarrow \text{fr}_0 \vee \text{fr}_1} \vee -D \quad (i = 0, 1) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \alpha[x/y]}{\Gamma \Rightarrow \forall x\alpha(x)} \forall -D \quad (y \notin \text{VL}(\Gamma, \forall x\alpha(x)))$$

$$\frac{\text{fr}_1, \Gamma \Rightarrow \text{fr}_2}{\Gamma \Rightarrow \text{fr}_1 \rightarrow \text{fr}_2} \rightarrow -D \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \alpha[x/t]}{\Gamma \Rightarrow \exists x\alpha(x)} \exists -D$$

I concetti di occorrenza di una formula *principale* e *attiva* in un'inferenza sono gli stessi dei sistemi **G1**.

**Definizione 1.2.3** (Logica intuizionista predicativa). Si indica con **LI** il calcolo dei sequenti per la logica intuizionista predicativa. Si presenta di seguito il calcolo dei sequenti della logica intuizionista predicativa con meta-variabili per formule, ricordando che:

- i simboli  $\text{fr}, \text{fr}_1, \text{fr}_2, \psi$  sono meta-variabili che indicano formule complesse arbitrarie, mentre le lettere greche maiuscole  $\Gamma, \Delta, \dots$  sono meta-variabili che indicano liste arbitrarie di formule;
- la scrittura  $\text{fr}[x/t]$  indica la formula ottenuta sostituendo tutte le occorrenze libere della variabile  $x$  in  $\text{fr}$  con  $t$ ;
- il simbolo  $t$  è una meta-variabile che indica un termine qualsiasi del linguaggio che può essere una delle variabili  $x, y, z, \dots$  oppure una delle costanti  $a, b, c, \dots$ ;
- le regole di quantificazioni sotto si intendono chiuse sulla sostituzione delle variabili  $x, w$  con qualsiasi altra variabile purchè siano rispettate le condizioni indicate.

*Assiomi*

$$\frac{ax - id}{\Gamma, \text{fr}, \Gamma' \Rightarrow \text{fr}} \qquad \frac{ax - \perp}{\Gamma, \perp, \Gamma' \Rightarrow \text{fr}} \qquad \frac{ax - \text{tt}}{\Gamma \Rightarrow \text{tt}}$$

*Regole*

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \Rightarrow \text{fr}}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \Rightarrow \text{fr}} \text{sc}_{sx}$$

$$\frac{\Gamma, \text{fr}_1, \text{fr}_2 \Rightarrow \psi}{\Gamma, \text{fr}_1 \& \text{fr}_2 \Rightarrow \psi} \& - S \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \text{fr}_1 \quad \Gamma \Rightarrow \text{fr}_2}{\Gamma \Rightarrow \text{fr}_1 \& \text{fr}_2} \& - D$$

$$\frac{\Gamma, \text{fr}_1 \Rightarrow \psi \quad \Gamma, \text{fr}_2 \Rightarrow \psi}{\Gamma, \text{fr}_1 \vee \text{fr}_2 \Rightarrow \psi} \vee - S \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \text{fr}_1}{\Gamma \Rightarrow \text{fr}_1 \vee \text{fr}_2} \vee - D_1 \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \text{fr}_2}{\Gamma \Rightarrow \text{fr}_1 \vee \text{fr}_2} \vee - D$$

$$\frac{\Gamma, \neg \text{fr}_1 \Rightarrow \text{fr}_1}{\Gamma, \neg \text{fr}_1 \Rightarrow \text{fr}_2} \neg - S \qquad \frac{\Gamma, \text{fr} \Rightarrow \perp}{\Gamma \Rightarrow \neg \text{fr}} \neg - D$$

$$\frac{\Gamma, \text{fr}_1 \rightarrow \text{fr}_2 \Rightarrow \text{fr}_1 \quad \Gamma, \text{fr}_2 \Rightarrow \psi}{\Gamma, \text{fr}_1 \rightarrow \text{fr}_2 \Rightarrow \psi} \rightarrow - S \qquad \frac{\Gamma, \text{fr}_1 \Rightarrow \text{fr}_2}{\Gamma \Rightarrow \text{fr}_1 \rightarrow \text{fr}_2} \rightarrow - D$$

$$\frac{\Gamma, \forall x \text{fr}, \text{fr}[x/t] \Rightarrow \psi}{\Gamma, \forall x \text{fr} \Rightarrow \psi} \forall - S \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \text{fr}[x/w]}{\Gamma \Rightarrow \forall x \text{fr}} \forall - D \quad (w \notin \text{VL}(\Gamma, \forall x \text{fr}))$$

$$\frac{\Gamma, \text{fr}[x/w] \Rightarrow \psi}{\Gamma, \exists x \text{fr} \Rightarrow \psi} \exists - S \quad (w \notin \text{VL}(\Gamma, \exists x \text{fr}, \psi)) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \text{fr}[x/t]}{\Gamma \Rightarrow \exists x \text{fr}} \exists - D$$

Una presentazione alternativa del calcolo dei sequenti della logica intuizionista predicativa è il seguente, con chiusura su sostituzione

*Assiomi*

$$\frac{ax - id}{\Gamma, A, \Gamma' \Rightarrow A} \qquad \frac{ax - \perp}{\Gamma, \perp, \Gamma' \Rightarrow C} \qquad \frac{ax - \text{tt}}{\Gamma \Rightarrow \text{tt}}$$

Regole

$$\begin{array}{c}
\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \Rightarrow C}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \Rightarrow C} \text{sc}_{\text{sx}} \\
\\
\frac{\Gamma, A, B \Rightarrow C}{\Gamma, A \& B \Rightarrow C} \& - \text{S} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \& B} \& - \text{D} \\
\frac{\Gamma, A \Rightarrow C \quad \Gamma, B \Rightarrow C}{\Gamma, A \vee B \Rightarrow C} \vee - \text{S} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A}{\Gamma \Rightarrow A \vee B} \vee - \text{D}_1 \quad \frac{\Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \vee B} \vee - \text{D} \\
\frac{\Gamma, \neg A \Rightarrow A}{\Gamma, \neg A \Rightarrow B} \neg - \text{S} \qquad \frac{\Gamma, A \Rightarrow \perp}{\Gamma \Rightarrow \neg A} \neg - \text{D} \\
\frac{\Gamma, A \rightarrow B \Rightarrow A \quad \Gamma, B \Rightarrow C}{\Gamma, A \rightarrow B \Rightarrow C} \rightarrow - \text{S} \qquad \frac{\Gamma, A \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \rightarrow B} \rightarrow - \text{D} \\
\frac{\Gamma, \forall x A(x), A(t) \Rightarrow C}{\Gamma, \forall x A(x) \Rightarrow C} \forall - \text{S} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A(t)}{\Gamma \Rightarrow \forall x A(x)} \forall - \text{D} \quad (w \notin VL(\Gamma, \forall x A(x))) \\
\frac{\Gamma, A(w) \Rightarrow C}{\Gamma, \exists x A(x) \Rightarrow C} \exists - \text{S} \quad (w \notin VL(\Gamma, \exists x A(x), C)) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A(t)}{\Gamma \Rightarrow \exists x A(x)} \exists - \text{D}
\end{array}$$

Si dimostra che i due calcoli, quello con meta-variabili per formule e quello chiuso per sostituzione sono equivalenti. Infatti, nel secondo le regole agiscono su quantificatori e connettivi applicati rispettivamente a predicati atomici  $A(x)$  e variabili proposizionali  $A, B$ , ma il calcolo contiene anche le applicazioni delle regole ottenute sostituendo le variabili e i predicati con delle formule qualsiasi e al posto di  $w$  nelle regole  $\exists - \text{S}$  e  $\forall - \text{D}$  una qualsiasi altra variabile rispettando, però, le condizioni dettate dalle regole.

### 1.3 Algebra di Boole e Algebra di Heyting

In questa sezione vengono elencate alcune nozioni algebriche per definire le algebre di Boole e di Heyting che saranno poi utilizzate per l'"algebrizzazione" della logica modale. Le definizioni sono prese da [9] dove si possono trovare svolte le dimostrazioni degli enunciati qui solo citati.

**Definizione 1.3.1** (preordine, ordine). Una collezione *preordinata*  $(P, \leq)$  o *preordine* è una collezione  $P$  con una relazione  $\leq$  che soddisfa

- la proprietà riflessiva: per ogni  $a \in P$   $a \leq a$ ,
- la proprietà transitiva: presi  $a, b, c \in P$  se  $a \leq b$  e  $b \leq c$  allora  $a \leq c$ .

Una collezione *ordinata*  $(P, \leq)$  o *ordine* è una collezione preordinata che soddisfa

- la proprietà antisimmetrica: presi  $a, b \in P$  se  $a \leq b$  e  $b \leq a$  allora  $a = b$ .

**Definizione 1.3.2** (inf-semireticolato, sup-semireticolato). Una collezione ordinata  $(P, \leq)$  è un *inf-semireticolato* se  $P$  è chiuso sugli estremi inferiori binari, ovvero esiste un'operazione

$$(- \wedge -) : P \times P \rightarrow P$$

tale che dati  $a, b \in P$  si ha che  $a \wedge b \leq a$  e  $a \wedge b \leq b$  e per ogni  $c \in P$  tale che  $c \leq a$  e  $c \leq b$  allora  $c \leq a \wedge b$ .

Una collezione ordinata  $(P, \leq)$  è un *sup-semireticolato* se  $P$  è chiuso sugli estremi superiori binari, ovvero esiste un'operazione

$$(- \vee -) : P \times P \rightarrow P$$

tale che dati  $a, b \in P$  si ha che  $a \leq a \vee b$  e  $b \leq a \vee b$  e per ogni  $c \in P$  tale che  $a \leq c$  e  $b \leq c$  allora  $a \vee b \leq c$ .

**Definizione 1.3.3.** Una collezione ordinata  $(P, \leq)$  è un *reticolato distributivo* se è sia un inf-semireticolato che un sup-semireticolato e le operazioni di estremo inferiore ed estremo superiore sono legate dall'uguaglianza chiamata *distributività* dell'estremo superiore seguente: per ogni  $a, b, c \in P$  vale

$$(a \wedge b) \vee c = (a \vee c) \wedge (b \vee c) \quad \text{dis}_\vee$$

**Definizione 1.3.4.** Una collezione ordinata  $(P, \leq)$  è un *reticolato distributivo limitato* se ha un minimo  $0 \in P$  e un massimo  $1 \in P$ .

**Lemma 1.3.5.** In un reticolato distributivo  $(P, \leq)$  valgono le seguenti proprietà per  $a, b, c$  elementi qualsiasi di  $P$ :

1. se  $a \leq b$  allora  $a \wedge c \leq b \wedge c$   $a \vee c \leq b \vee c$ ,
2. (leggi assorbimento)  $(a \vee b) \wedge a = a$   $(a \wedge b) \vee a = a$ ,
3. distributività dell'estremo inferiore  $(a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$   $\text{dis}_\wedge$ .

**Definizione 1.3.6.** Una collezione ordinata  $(P, \leq)$  è un *reticolato distributivo complementato* se è un reticolato distributivo con la proprietà che per ogni elemento  $a \in P$  esiste un elemento  $a^c$ , detto *elemento complementare* o *complemento* di  $a$  tale che

$$a \vee a^c = 1 \quad a \wedge a^c = 0.$$

**Lemma 1.3.7.** In un reticolato distributivo complementato  $(P, \leq)$  l'elemento complemento di un elemento dato è unico.

**Definizione 1.3.8** (Algebra di Boole, Algebra di Boole completa). Un ordine  $(P, \leq)$  è un' *algebra di Boole* se è un reticolato distributivo complementato e limitato. Un ordine  $(\mathcal{B}, \leq)$  è un' *algebra di Boole completa* se è un'algebra di Boole chiusa su tutti gli estremi inferiori e gli estremi superiori di famiglie indiciate su insiemi  $a_i \in P$  per  $i \in I$

$$\bigwedge_{i \in I} a_i \in \mathcal{B} \quad \bigvee_{i \in I} a_i \in \mathcal{B}.$$

Un'algebra  $\mathbf{A} = \langle A, \vee, \wedge, \rightarrow, 0 \rangle$  è un' *algebra di Boole* se e solo se

1.  $\langle A, \vee, \wedge \rangle$  è un reticolato con 0 come minimo,
2.  $a \wedge b \leq c$  se e solo se  $a \leq b \rightarrow c$  per tutti gli  $a, b, c \in A$ ,
3. la legge della doppia negazione vale,  $\neg\neg a = a$  per tutti gli  $a \in A$ , dove  $\neg a$  è definito come  $a \rightarrow 0$ .

**Definizione 1.3.9** (Algebra di Heyting, Algebra di Heyting completa). Un ordine  $(P, \leq)$  è un' *algebra di Heyting* se è un reticolato con estremi inferiori e superiori binari, un massimo e un minimo, inoltre ha la proprietà di avere un pseudocomplemento relativo a due elementi, ovvero

per ogni  $a, b \in P$  esiste un pseudocomplemento relativo (o implicazione)  $b^a \in P$  ( $a \rightarrow b \in P$ ) tale che valga la seguente proprietà per ogni  $c \in P$

$$c \wedge a \leq b \text{ se e solo se } c \leq b^a.$$

Un ordine  $(\mathcal{H}, \leq)$  è un'algebra di Heyting completa se è un'algebra di Heyting chiusa su tutti gli estremi inferiori e gli estremi superiori di famiglie indiciate su insiemi  $a_i \in P$  per  $i \in I$

$$\bigwedge_{i \in I} a_i \in \mathcal{H} \quad \bigvee_{i \in I} a_i \in \mathcal{H}.$$

Un'algebra  $\mathbf{H} = \langle H, \vee, \wedge, \rightarrow, 0 \rangle$  è un'algebra di Heyting se e solo se

1.  $\langle H, \vee, \wedge \rangle$  è un reticolo con 0 come minimo,
2.  $a \wedge b \leq c$  se e solo se  $a \leq b \rightarrow c$  per tutti gli  $a, b, c \in H$ .

Risulta, quindi, che ogni algebra di Boole è anche un'algebra di Heyting.

Data un'algebra di Heyting  $\mathbf{H}$ , un filtro  $F$  è un sottoinsieme di  $H$ , non vuoto tale che se  $x, y \in F$  allora  $x \wedge y \in F$  ed è primo se  $F \neq H$  e per ogni  $x \vee y \in F$  si ha o  $x \in F$  o  $y \in F$ , nel capitolo 5.2 la definizione e le proprietà dei filtri sono date in maniera più precisa.

**Definizione 1.3.10** (Struttura duale, estensione canonica). Data un'algebra di Heyting  $\mathbf{H}$ , sia  $D(H)$  l'insieme di tutti i filtri primi di  $\mathbf{H}$ . Allora  $\mathcal{D}(\mathbf{H}) = \langle D(H), \subseteq \rangle$  è un preordine ed è detto la *struttura duale intuizionista* di un'algebra di Heyting. Si definisce l'*estensione canonica* di  $\mathbf{H}$  e si denota con  $\mathbf{H}^\delta$  l'algebra di Heyting  $\mathcal{U}(\mathcal{D}(\mathbf{H})) = \langle U(D(H)), \cup, \cap, \Rightarrow, \emptyset \rangle$  che comprende tutti i sottoinsiemi superiormente chiusi di  $\mathcal{D}(\mathcal{H})$ ,  $U(D(H))$  e dati  $D_1, D_2 \subseteq D(H)$

$$D_1 \Rightarrow D_2 = \{F_1 \in D(H) : \text{per ogni } F_2 \text{ tale che } F_1 \subseteq F_2, \text{ se } F_2 \in D_1 \text{ allora } F_1 \in D_2\}.$$

**Teorema 1.3.11** (Teorema della rappresentazione di Stone). *Ogni algebra di Heyting  $\mathbf{H}$  può essere incorporata nella sua estensione canonica  $\mathbf{H}^\delta$ .*

## Capitolo 2

# Logica intuizionista e logica classica a confronto

In questo capitolo vengono presentate le proprietà caratterizzanti la logica intuizionista rispetto alla logica classica. La logica intuizionista rifiuta alcune proprietà classiche come la legge della doppia negazione e la legge del terzo escluso (*tertium non datur*) e non vi è l'equivalenza nelle seguenti leggi di De Morgan  $\neg B \vee \neg C \Rightarrow \neg(B \& C)$  e  $\exists x \neg C \Rightarrow \neg(\forall x C)$  ed è, invece, caratterizzata dalla proprietà disgiuntiva e dalla proprietà di esistenza.

**Definizione 2.0.1** (proprietà disgiuntiva). Un calcolo L dei sequenti nel linguaggio predicativo o proposizionale soddisfa la *proprietà disgiuntiva* se vale

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \text{fr}_1 \vee \text{fr}_2 \text{ è derivabile in L} \\ &\text{sse} \\ &\Rightarrow \text{fr}_1 \text{ è derivabile in L} \quad \text{OPPURE} \quad \Rightarrow \text{fr}_2 \text{ è derivabile in L.} \end{aligned}$$

**Definizione 2.0.2** (proprietà di esistenza). Un calcolo L dei sequenti nel linguaggio predicativo o proposizionale soddisfa la *proprietà di esistenza* se vale

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \exists x \text{fr}(x) \text{ è derivabile in L} \\ &\text{sse} \\ &\text{esiste un termine } t \text{ tale che } \Rightarrow \text{fr}(t) \text{ è derivabile in L.} \end{aligned}$$

Queste due proprietà valgono entrambe in logica intuizionista **LI**, infatti nel caso della proprietà disgiuntiva si ha che ogni derivazione di una disgiunzione in **LI** deve terminare con la regola  $\vee - D$  e nel caso della proprietà di esistenza la derivazione deve avere come ultima regola  $\exists - D$ . In logica classica, invece, non valgono come dimostrato dalle seguenti proposizioni.

**Proposizione 2.0.3.** *La proprietà disgiuntiva non vale in G3c.*

*Dimostrazione.* Dato che il principio del terzo escluso vale in **G3c**, esiste una derivazione del sequente  $\Rightarrow \text{fr} \vee \neg \text{fr}$  ( $\neg \text{fr} \equiv \text{fr} \rightarrow \perp$ )

$$\frac{\frac{ax - id}{\text{fr} \Rightarrow \text{fr}, \perp} \rightarrow -D}{\Rightarrow \text{fr}, \text{fr} \rightarrow \perp} \vee -D}{\Rightarrow \text{fr} \vee (\text{fr} \rightarrow \perp)} \vee -D$$

Posto, ora,  $\text{fr} \equiv A$ , pur risultando  $\Rightarrow A \vee \neg A$  derivabile in **G3c**, non è vero che

$$\Rightarrow A$$

è derivabile in **G3c**, infatti, non si possono applicare regole al sequente  $\Rightarrow A$  per ottenere un albero di derivazione ed analogamente

$$\Rightarrow A \rightarrow \perp$$

non è derivabile in **G3c**, infatti preso il sequente  $\Rightarrow A \rightarrow \perp$  vi è una sola regola applicabile, quella di  $\rightarrow -D$ , e non si ottiene un albero di derivazione. Dunque, la proprietà disgiuntiva non vale in **G3c**. ■

**Proposizione 2.0.4.** *La proprietà di esistenza non vale G3c.*

*Dimostrazione.* Data una formula  $\text{fr}$ , è derivabile in **G3c**

$$\Rightarrow \exists x(((A(x) \rightarrow A(0)) \& \text{fr}) \vee ((A(x) \rightarrow A(1)) \& (\text{fr} \rightarrow \perp)))$$

. Sia  $R \equiv \exists x(((A(x) \rightarrow A(0)) \& \text{fr}) \vee ((A(x) \rightarrow A(1)) \& (\text{fr} \rightarrow \perp)))$ .

$$\begin{array}{c} ax - id \\ \frac{\frac{A(0) \Rightarrow A(0), (A(0) \rightarrow A(1)) \& (\text{fr} \rightarrow \perp), R}{\Rightarrow A(0) \rightarrow A(0), (A(0) \rightarrow A(1)) \& (\text{fr} \rightarrow \perp), R} \rightarrow -D \quad \mathcal{D}}{\Rightarrow ((A(0) \rightarrow A(0)) \& \text{fr}), (A(0) \rightarrow A(1)) \& (\text{fr} \rightarrow \perp), R} \& - D} \\ \frac{\Rightarrow ((A(0) \rightarrow A(0)) \& \text{fr}), (A(0) \rightarrow A(1)) \& (\text{fr} \rightarrow \perp), R}{\Rightarrow ((A(0) \rightarrow A(0)) \& \text{fr}) \vee ((A(0) \rightarrow A(1)) \& (\text{fr} \rightarrow \perp)), R} \vee - D} \\ \frac{\Rightarrow \exists x(((A(x) \rightarrow A(0)) \& \text{fr}) \vee ((A(x) \rightarrow A(1)) \& (\text{fr} \rightarrow \perp)))}{\Rightarrow \exists x(((A(x) \rightarrow A(0)) \& \text{fr}) \vee ((A(x) \rightarrow A(1)) \& (\text{fr} \rightarrow \perp)))} \exists - D \end{array}$$

dove  $\mathcal{D}$  è la derivazione

$$\begin{array}{c} ax - id \\ \frac{\frac{A(1) \Rightarrow \text{fr}, (A(0) \rightarrow A(1)) \& (\text{fr} \rightarrow \perp), (A(1) \rightarrow A(0)) \& \text{fr}, A(1), R}{\Rightarrow \text{fr}, (A(0) \rightarrow A(1)) \& (\text{fr} \rightarrow \perp), (A(1) \rightarrow A(0)) \& \text{fr}, A(1) \rightarrow A(1), R} \rightarrow -D \quad \mathcal{D}'}{\Rightarrow \text{fr}, (A(0) \rightarrow A(1)) \& (\text{fr} \rightarrow \perp), (A(1) \rightarrow A(0)) \& \text{fr}, (A(1) \rightarrow A(1)) \& (\text{fr} \rightarrow \perp), R} \& - D} \\ \frac{\Rightarrow \text{fr}, (A(0) \rightarrow A(1)) \& (\text{fr} \rightarrow \perp), ((A(1) \rightarrow A(0)) \& \text{fr}) \vee ((A(1) \rightarrow A(1)) \& (\text{fr} \rightarrow \perp)), R}{\Rightarrow \text{fr}, (A(0) \rightarrow A(1)) \& (\text{fr} \rightarrow \perp), \exists x(((A(x) \rightarrow A(0)) \& \text{fr}) \vee ((A(x) \rightarrow A(1)) \& (\text{fr} \rightarrow \perp)))} \vee - D} \\ \frac{\Rightarrow \text{fr}, (A(0) \rightarrow A(1)) \& (\text{fr} \rightarrow \perp), \exists x(((A(x) \rightarrow A(0)) \& \text{fr}) \vee ((A(x) \rightarrow A(1)) \& (\text{fr} \rightarrow \perp)))}{\Rightarrow \text{fr}, (A(0) \rightarrow A(1)) \& (\text{fr} \rightarrow \perp), \exists x(((A(x) \rightarrow A(0)) \& \text{fr}) \vee ((A(x) \rightarrow A(1)) \& (\text{fr} \rightarrow \perp)))} \exists - D \end{array}$$

dove  $\mathcal{D}'$  è la derivazione

$$\begin{array}{c} ax - id \\ \frac{\text{fr} \Rightarrow \text{fr}, (A(0) \rightarrow A(1)) \& (\text{fr} \rightarrow \perp), (A(1) \rightarrow A(0)) \& \text{fr}, \perp, R}{\Rightarrow \text{fr}, (A(0) \rightarrow A(1)) \& (\text{fr} \rightarrow \perp), (A(1) \rightarrow A(0)) \& \text{fr}, \text{fr} \rightarrow \perp, R} \rightarrow -D \end{array}$$

Mentre posto  $\text{fr} \equiv B$  dove  $B$  è un predicato atomico per nessun  $t$  si deriva in **G3c**

$$\Rightarrow ((A(t) \rightarrow A(0)) \& B) \vee ((A(t) \rightarrow A(1)) \& (B \rightarrow \perp))$$

infatti si trova

$$\begin{array}{c} \frac{\frac{A(t), A(t) \Rightarrow A(0), A(1)}{A(t) \Rightarrow A(0), A(t) \rightarrow A(1)} \rightarrow -D \quad \frac{A(t), B \Rightarrow A(0), \perp}{A(t) \Rightarrow A(0), B \rightarrow \perp} \rightarrow -D}{\frac{A(t) \Rightarrow A(0), (A(t) \rightarrow A(1)) \& (B \rightarrow \perp)}{\Rightarrow A(t) \rightarrow A(0), (A(t) \rightarrow A(1)) \& (B \rightarrow \perp)} \& - D} \\ \frac{\Rightarrow A(t) \rightarrow A(0), (A(t) \rightarrow A(1)) \& (B \rightarrow \perp)}{\Rightarrow (A(t) \rightarrow A(0)) \& B, (A(t) \rightarrow A(1)) \& (B \rightarrow \perp)} \rightarrow -D \quad \mathcal{D}'} \\ \frac{\Rightarrow (A(t) \rightarrow A(0)) \& B, (A(t) \rightarrow A(1)) \& (B \rightarrow \perp)}{\Rightarrow ((A(t) \rightarrow A(0)) \& B) \vee ((A(t) \rightarrow A(1)) \& (B \rightarrow \perp))} \& - D \quad \vee - D \end{array}$$



dove  $D$  è la seguente derivazione

$$\frac{\frac{A(t) \Rightarrow B, A(1)}{\Rightarrow B, A(t) \rightarrow A(1)} \rightarrow -D \quad \frac{ax - id}{B \Rightarrow B, \perp} \rightarrow -D}{\frac{\Rightarrow B, B \rightarrow \perp}{\Rightarrow B, (A(t) \rightarrow A(1)) \& (B \rightarrow \perp)} \& - D}$$

Vi è una sola radice-assioma, le altre tre non lo sono e non vi sono regole del calcolo applicabili. Se al posto di un termine  $t$  si considerassero i valori 0 o 1 l'albero non sarebbe, comunque, un albero di derivazione in quanto le radici  $A(t) \Rightarrow B, A(1)$  e  $A(t), B \Rightarrow A(0), \perp$  non corrisponderebbero ad un assioma per i valori 0 o 1 rispettivamente. ■

**Definizione 2.0.5.** Una funzione  $T$  dalle formule della logica  $\mathcal{L}_1$  alla formule della logica  $\mathcal{L}_2$  è una *traduzione* se ogni volta che  $\phi$  è deducibile in  $\mathcal{L}_1$ , allora  $T(\phi)$  è deducibile in  $\mathcal{L}_2$ .

**Definizione 2.0.6.** Una traduzione  $T$  dalla logica  $\mathcal{L}_1$  alla logica  $\mathcal{L}_2$  si dice *conservativa* se la traduzione conserva il concetto di derivabilità di  $\mathcal{L}_1$ , ovvero se  $T(\phi)$  è derivabile in  $\mathcal{L}_2$  allora  $\phi$  è derivabile in  $\mathcal{L}_1$ .

*Osservazione.* La mappa identità delle formule della logica intuizionista nelle formule della logica classica rispetto allo stesso linguaggio proposizionale è una traduzione, ma non è conservativa. Il terzo escluso  $A \vee \neg A$  per  $A$  variabile proposizionale, infatti, è derivabile in logica classica, ma non lo è in logica intuizionista.

Esistono diverse traduzioni della logica classica predicativa con uguaglianza in quella intuizionista predicativa con uguaglianza, si presenta quella di Gödel-Gentzen che permette di affermare che per ogni formula  $fr$  di un linguaggio predicativo  $\mathcal{L}$  si ha che  $fr$  è dimostrabile in logica classica se e solo se  $fr^g$  è dimostrabile intuizionisticamente.

**Definizione 2.0.7** (Traduzione della doppia negazione di Gödel-Gentzen). Dato un linguaggio predicativo  $\mathcal{L}$  la traduzione della doppia negazione di Gödel-Gentzen

$$(-)^g : Frm(\mathcal{L}) \rightarrow Frm(\mathcal{L})$$

è definita in tal modo:

1.  $P^g := \neg\neg P$  per  $P$  atomica;
2.  $\perp^g := \perp$ ;
3.  $(fr_1 \& fr_2)^g := fr_1^g \& fr_2^g$ ;
4.  $(fr_1 \rightarrow fr_2)^g := fr_1^g \rightarrow fr_2^g$ ;
5.  $(fr_1 \vee fr_2)^g := \neg(\neg fr_1^g \& \neg fr_2^g)$ ;
6.  $(\forall x fr)^g := \forall x fr^g$ ;
7.  $(\exists x fr)^g := \neg \forall x \neg fr^g$ .

Inoltre, si pone questa notazione: se  $\Gamma \equiv fr_1, \dots, fr_n$  allora  $\Gamma^g \equiv fr_1^g, \dots, fr_n^g$ .

Per tradurre la logica classica nella logica intuizionista non risulta necessario introdurre un operatore, una modalità, esterno al linguaggio intuizionista, procedimento, invece, necessario per la traduzione "inversa" come esposto nel capitolo 4.



## Capitolo 3

# La logica modale

Prima di procedere, è necessario dare una breve presentazione della logica modale, in particolare ci si soffermerà sul sistema **S4**, e riassumere alcune proprietà caratterizzanti.

Il linguaggio della logica modale è ottenuto aggiungendo al linguaggio del primo ordine della logica predicativa un operatore proposizionale unario  $\Box$ .  $\Box A$  può essere letto come "necessariamente  $A$ " o "box  $A$ ". Il duale di  $\Box$  è  $\Diamond$ ;  $\Diamond A$  si dice "possibilmente  $A$ " o "diamond  $A$ ";  $\Diamond A$  può essere definito in **S4** come  $\neg\Box\neg A$ . I concetti di *necessità* e di *possibilità* furono oggetto di interesse di filosofi, come Aristotele, in particolare furono successivamente studiati nel Medioevo. L'origine dell'analisi simbolica, contemporanea, della modalità viene generalmente individuata nel lavoro di C. I. Lewis agli inizi del ventesimo secolo. Tema centrale delle ricerche di Lewis è la nozione di implicazione stretta: Lewis definisce  $A$  implica strettamente  $B$  come  $I(A \wedge \neg B)$  dove  $I$  è un operatore di impossibilità, successivamente lo denota come  $\neg\Diamond(A \wedge \neg B)$ . Presenta, inoltre, una serie di sistemi, chiamati **S1**, ..., **S5**, basati su differenti assiomi relativi all'implicazione stretta. Si presenta di seguito il sistema **S4**.

### 3.1 La logica modale S4

**Definizione 3.1.1** (Il sistema di Hilbert **Hs** per la logica modale **S4**). Un sistema di Hilbert per **S4** è ottenuto aggiungendo allo schema degli assiomi e delle regole della logica classica proposizionale **Hc** (A) lo schema

$$\begin{aligned}\Box A &\rightarrow A && (\text{Assioma} - T) \\ \Box(A \rightarrow B) &\rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B) && (\text{Assioma} - K) \\ \Box A &\rightarrow \Box\Box A && (\text{Assioma} - 4)\end{aligned}$$

e la regola di necessitazione:

$$\Box I \quad \text{Se } \vdash A \text{ allora } \vdash \Box A.$$

La nozione di *deduzione da un insieme di assunzioni*  $\Gamma$  è definita come segue:  
La sequenza  $A_1, \dots, A_n$  è una deduzione di  $\Gamma \vdash A$  ( $A$  dalle assunzioni  $\Gamma$ ) se  $A \equiv A_n$ , e per tutti gli  $A_i$  vale una delle seguenti:

1.  $A_i \in \Gamma$ ,
2. ci sono  $j, k < i$  tali che  $A_k \equiv A_j \rightarrow A_i$ ,

3.  $A_i \equiv \forall x A_j, j < i$ ,  $x$  non libera in  $\Gamma$ ,

4.  $A_i \equiv \Box A_j, j < i$ , e c'è una sottosequenza di  $A_1, \dots, A_j$  che è una derivazione di  $\vdash A_j$ .

Alternativamente, una deduzione è un albero costruito partendo da  $(\Gamma, \Delta)$  insiemi di formule)

$$\Gamma \vdash A \quad (A \in \Gamma)$$

$$\vdash A \quad (A \text{ assioma})$$

e utilizzando delle regole:

*Regola di Indebolimento*

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, B \vdash A} \text{in}$$

*Regola di Necessitazione*

$$\frac{\vdash A}{\vdash \Box A} \Box I$$

*Modus Ponens*

$$\frac{\Gamma \vdash A \rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}$$

*Regola di Generalizzazione*

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \forall x A} x \notin \text{VL}(\Gamma)$$

**Lemma 3.1.2.** *Il teorema di deduzione*

$$\text{Se } \Gamma, A \vdash B \text{ allora } \Gamma \vdash A \rightarrow B$$

e la generalizzazione di  $\Box I$

$$\text{Se } \Box B_1, \dots, \Box B_n \vdash A \text{ allora } \Box B_1, \dots, \Box B_n \vdash \Box A$$

sono entrambe regole derivabili in **Hs**.

**Definizione 3.1.3** (*Il sistema di Gentzen **G1s***). Questo calcolo è basato sul linguaggio della logica predicativa del primo ordine con due operatori extra,  $\Box$  e  $\Diamond$ . Alle regole del calcolo dei sequenti di **G1c** (B) si aggiungono le seguenti:

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \Box A \Rightarrow \Delta} \Box - S$$

$$\frac{\Box \Gamma \Rightarrow B, \Diamond \Delta}{\Box \Gamma \Rightarrow \Box B, \Diamond \Delta} \Box - D$$

$$\frac{\Box \Gamma, A \Rightarrow \Diamond \Delta}{\Box \Gamma, \Diamond A \Rightarrow \Diamond \Delta} \Diamond - S$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Diamond A, \Delta} \Diamond - D$$

Attraverso queste regole si mostra facilmente che ciascun operatore può essere espresso nei termini dell'altro e dell'operatore di negazione, infatti vale  $\Diamond A \leftrightarrow \neg \Box \neg A$ :

$$\frac{\frac{\frac{ax - id \quad ax - \perp}{A \Rightarrow A} \quad \perp \Rightarrow}{A, \neg A \Rightarrow} \rightarrow - S}{\frac{A, \neg A \Rightarrow}{A, \Box \neg A \Rightarrow} \Box - S}{\frac{\Diamond A, \Box \neg A \Rightarrow}{\Diamond A, \Box \neg A \Rightarrow \perp} \Diamond - S} \text{in}_{dx} \rightarrow - D$$

$$\begin{array}{c}
ax - id \quad ax - \perp \\
\frac{A \Rightarrow A \quad \perp \Rightarrow}{\Rightarrow \neg A, A} \rightarrow -D \\
\frac{\quad}{\Rightarrow \neg A, \diamond A} \diamond - D \\
\frac{\quad}{\Rightarrow \square \neg A, \diamond A} \square - D \quad \frac{ax - \perp}{\perp \Rightarrow} \rightarrow -S \\
\hline
\neg \square \neg A \Rightarrow \diamond A
\end{array}$$

Risulta, quindi, sufficiente aggiungere solamente  $\square - S$ ,  $\square - D$  (con  $\Delta = \emptyset$  in  $\square - D$ ), oppure  $\diamond - S$ ,  $\diamond - D$  (con  $\Gamma = \emptyset$  in  $\diamond - S$ ).

**Definizione 3.1.4** (*Il sistema di Gentzen G3s*). Una versione di calcolo dei sequenti in cui le regole di indebolimento e di contrazione sono incorporate nelle altre regole è ottenuta estendendo **G3c** (C) con le seguenti regole:

$$\begin{array}{c}
\frac{\Gamma, A, \square A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \square A \Rightarrow \Delta} \square - S \\
\frac{\square \Gamma, A \Rightarrow \diamond \Delta}{\Gamma', \square \Gamma, \diamond A \Rightarrow \diamond \Delta, \Delta'} \diamond - S \\
\frac{\square \Gamma \Rightarrow A, \diamond \Delta}{\Gamma', \square \Gamma \Rightarrow \square A, \diamond \Delta, \Delta'} \square - D \\
\frac{\Gamma \Rightarrow A, \diamond A, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \diamond A, \Delta} \diamond - D
\end{array}$$

Al fine di conservare la simmetria entrambi  $\square$  e  $\diamond$  sono stati considerati come primitivi.

**Teorema 3.1.5.** *L'eliminazione della composizione generale vale per G3s e G1s.*

*Osservazione.* La mappa identità delle formule della logica classica nelle formule della logica modale **S4** rispetto allo stesso linguaggio proposizionale è una traduzione conservativa. Lo si dimostra per induzione sulla profondità della derivazione di un sequente  $\Gamma \Rightarrow \Delta$  con  $\Gamma$  e  $\Delta$  multiinsiemi costituiti solo da formule della logica classica con il calcolo **G3s**.



## Capitolo 4

# Interpretazione della logica intuizionista in $\mathbf{S4}$

Nel 1933 Gödel, in *Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalküls*, definisce una traduzione del linguaggio della logica proposizionale intuizionista nel linguaggio proposizionale di un sistema equivalente a quello della logica modale  $\mathbf{S4}$ , dimostra per induzione sulle derivazioni la validità della sua traduzione e ne ipotizza la conservatività. La conservatività è provata da McKinsey e Tarski con metodi semantici. Questo risultato, nel 1953, viene esteso alla parte predicativa da Helena Rasiowa e Roman Sikorski con la traduzione  $(\forall xfr)^\square \equiv \Box \forall x(fr)^\square$  e  $(\exists xfr)^\square \equiv \exists xfr^\square$ . [11]

In questo capitolo, seguendo la presentazione in [13], si prova la validità e la conservatività dell'interpretazione della logica intuizionista proposizionale nella logica modale proposizionale  $\mathbf{S4}$ . Si introducono due varianti di traduzioni,  $^\circ$  e  $^\square$ , di  $\mathbf{LI}$  in  $\mathbf{S4}$ : la traduzione  $^\circ$  è presa da quella di Girard per la logica intuizionista nella logica lineare classica, mentre la traduzione  $^\square$  è quella usata da Rasiowa e Sikorski, prendendo come primitivo  $\perp$ , invece di  $\neg$ . La dimostrazione "per via sintattica" della validità e della conservatività della traduzione è costruita come segue: si parte da due traduzioni di  $\mathbf{LI}$  in  $\mathbf{S4}$  e se ne dimostra l'equivalenza, perchè la prova della validità è quasi immediata utilizzando l'interpretazione  $^\square$ , mentre per la conservatività conviene adoperare l'interpretazione  $^\circ$ .

Per mostrare la conservatività della traduzione si utilizza un calcolo per  $\mathbf{S4}$  con eliminazione del taglio e si eliminano le modalità nella derivazione del sequente tradotto riducendosi, infine, a derivare sequenti con una sola formula nel conseguente, ovvero una derivazione intuizionista.

La validità è dimostrabile con la stessa tecnica sia per la parte proposizionale sia per la parte predicativa. Non è così semplice, invece, lo studio della conservatività: infatti non è immediata l'estensione alla parte predicativa "per via sintattica" e in accordo con la costruzione in [13] si presenta la dimostrazione di conservatività solo nel frammento proposizionale.

**Definizione 4.0.1** (*Interpretazione modale*). Esistono diverse varianti di interpretazioni. Si presentano le seguenti due:  $^\circ$  e  $^\square$ . La definizione è data per induzione sulla profondità della formula (dove  $P$  atomica,  $\perp$  costante "falso", per ogni formula  $fr_1$ ,  $fr_2$  e  $fr$ ):

$$\begin{array}{ll} P^\circ := P & P^\square := \Box P \\ \perp^\circ := \perp & \perp^\square := \perp \\ (fr_1 \& fr_2)^\circ := fr_1^\circ \& fr_2^\circ & (fr_1 \& fr_2)^\square := fr_1^\square \& fr_2^\square \\ (fr_1 \vee fr_2)^\circ := \Box fr_1^\circ \vee \Box fr_2^\circ & (fr_1 \vee fr_2)^\square := fr_1^\square \vee fr_2^\square \\ (fr_1 \rightarrow fr_2)^\circ := \Box fr_1^\circ \rightarrow fr_2^\circ & (fr_1 \rightarrow fr_2)^\square := \Box(fr_1^\square \rightarrow fr_2^\square) \end{array}$$

Infine, se  $\Gamma \equiv \text{fr}_1, \dots, \text{fr}_n$  si pone per la prima traduzione  $\Gamma^\circ \equiv \text{fr}_1^\circ, \dots, \text{fr}_n^\circ$  ed analogamente per la seconda che  $\Gamma^\square \equiv \text{fr}_1^\square, \dots, \text{fr}_n^\square$ .

*Osservazione.* Le traduzioni per la parte predicativa sono definite induttivamente sulla profondità della formula  $\text{fr}$  come segue:

$$\begin{aligned} (\exists x \text{fr})^\circ &:= \exists x \square \text{fr}^\circ & (\exists x \text{fr})^\square &:= \exists x \text{fr}^\square \\ (\forall x \text{fr})^\circ &:= \forall x \text{fr}^\circ & (\forall x \text{fr})^\square &:= \square \forall x \text{fr}^\square \end{aligned}$$

**Proposizione 4.0.2.** *Le due varianti di interpretazione modale sono equivalenti, ovvero vale che  $\mathbf{S4} \vdash \square \text{fr}^\circ \leftrightarrow \text{fr}^\square$  e quindi  $\mathbf{S4} \vdash \square \Gamma^\circ \Rightarrow \text{fr}^\circ$  se e solo se  $\mathbf{S4} \vdash \Gamma^\square \Rightarrow \text{fr}^\square$ .*

*Dimostrazione.* Per dimostrare che  $\square \text{fr}^\circ \leftrightarrow \text{fr}^\square$  si procede per induzione sulla definizione di  $\text{fr}$ .

1. caso  $\text{fr} \equiv \perp$ : ricordando che  $\perp^\circ \equiv \perp$  e che  $\perp^\square \equiv \perp$  la tesi segue da

$$\begin{aligned} & ax - \perp \\ & \frac{\square \perp, \perp \Rightarrow \perp}{\square \perp \Rightarrow \perp} \square - \text{S} \\ & \frac{\square \perp \Rightarrow \perp}{\Rightarrow \square \perp \rightarrow \perp} \rightarrow -\text{D} \\ & ax - \perp \\ & \frac{\perp \Rightarrow \square \perp}{\Rightarrow \perp \rightarrow \square \perp} \rightarrow -\text{D} \end{aligned}$$

2. caso  $\text{fr} \equiv A$  con  $A$  atomica: ricordando che per definizione  $A^\circ \equiv A$  e  $A^\square \equiv \square A$  si ha che

$$\begin{aligned} & ax - id \\ & \frac{\square A, A \Rightarrow A}{\square A \Rightarrow A} \square - \text{S} \\ & \frac{\square A \Rightarrow A}{\square A \Rightarrow \square A} \square - \text{D} \\ & \frac{\square A \Rightarrow \square A}{\Rightarrow \square A \rightarrow \square A} \rightarrow -\text{D} \end{aligned}$$

La derivazione dell'implicazione opposta è analoga.

3. caso  $\text{fr} \equiv \beta \& \gamma$  per ipotesi induttiva si ha che

$$\Rightarrow \square \beta^\circ \leftrightarrow \beta^\square \qquad \Rightarrow \square \gamma^\circ \leftrightarrow \gamma^\square$$

sono derivabili in  $\mathbf{S4}$  e poiché la congiunzione conserva gli equivalenti si ottiene che

$$\Rightarrow \beta^\square \& \gamma^\square \leftrightarrow \square \beta^\circ \& \square \gamma^\circ$$

è anch'esso derivabile in  $\mathbf{S4}$ . Ora valendo in  $\mathbf{S4}$  che

$$\Rightarrow \square B \& \square C \leftrightarrow \square (B \& C)$$

Infatti risulta che

$$\begin{aligned} & ax - id & ax - id \\ & \frac{B, C, \square (B \& C) \Rightarrow B}{B \& C, \square (B \& C) \Rightarrow B} \& - \text{S} & \frac{B, C, \square (B \& C) \Rightarrow C}{B \& C, \square (B \& C) \Rightarrow C} \& - \text{S} \\ & \frac{\square (B \& C) \Rightarrow B}{\square (B \& C) \Rightarrow \square B} \square - \text{D} & \frac{\square (B \& C) \Rightarrow C}{\square (B \& C) \Rightarrow \square C} \square - \text{D} \\ & \frac{\square (B \& C) \Rightarrow \square B \quad \square (B \& C) \Rightarrow \square C}{\square (B \& C) \Rightarrow \square B \& \square C} \& - \text{D} \\ & \frac{\square (B \& C) \Rightarrow \square B \& \square C}{\Rightarrow \square (B \& C) \rightarrow \square B \& \square C} \rightarrow -\text{D} \end{aligned}$$



$$\begin{array}{c}
\frac{ax - id}{B, \Box B \Rightarrow B} \Box - S \quad \frac{ax - id}{C, \Box C \Rightarrow C} \Box - S \\
\frac{\Box B \Rightarrow B}{\Box B, \Box C \Rightarrow B} \text{in}_{sx} \quad \frac{\Box C \Rightarrow C}{\Box B, \Box C \Rightarrow C} \text{in}_{sx} \\
\frac{\Box B, \Box C \Rightarrow B \quad \Box B, \Box C \Rightarrow C}{\Box B, \Box C \Rightarrow B \& C} \& - D \\
\frac{\Box B, \Box C \Rightarrow B \& C}{\Box B, \Box C \Rightarrow \Box(B \& C)} \Box - D \\
\frac{\Box B, \Box C \Rightarrow \Box(B \& C)}{\Box B \& \Box C \Rightarrow \Box(B \& C)} \& - S \\
\frac{\Box B \& \Box C \Rightarrow \Box(B \& C)}{\Rightarrow \Box B \& \Box C \rightarrow \Box(B \& C)} \rightarrow -D
\end{array}$$

Per la transitività delle equivalenze segue che

$$\Rightarrow \beta^\Box \& \gamma^\Box \leftrightarrow \Box(\beta^\circ \& \gamma^\circ)$$

è derivabile in **S4**. Dunque, ricordando che  $(\beta \& \gamma)^\circ \equiv \beta^\circ \& \gamma^\circ$  e che  $(\beta \& \gamma)^\Box \equiv \beta^\Box \& \gamma^\Box$  si ottiene la tesi, ovvero che

$$\Rightarrow \Box(\beta \& \gamma)^\circ \leftrightarrow (\beta \& \gamma)^\Box$$

è derivabile in **S4**.

4. caso  $\text{fr} \equiv \beta \rightarrow \gamma$  per ipotesi induttiva si ha che

$$\Rightarrow \Box \beta^\circ \leftrightarrow \beta^\Box \quad \Rightarrow \Box \gamma^\circ \leftrightarrow \gamma^\Box$$

sono derivabili in **S4** e grazie al fatto che l'implicazione conserva gli equivalenti, ne segue che

$$\Rightarrow (\Box \beta^\circ \rightarrow \Box \gamma^\circ) \leftrightarrow (\beta^\Box \rightarrow \gamma^\Box).$$

Dunque, per la regola di necessitazione vale che

$$\Rightarrow \Box(\Box \beta^\circ \rightarrow \Box \gamma^\circ) \leftrightarrow \Box(\beta^\Box \rightarrow \gamma^\Box).$$

e poichè è derivabile in **S4**

$$\Rightarrow \Box(\Box B \rightarrow C) \leftrightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)$$

infatti si ha

$$\begin{array}{c}
\frac{ax - id}{C, \Box(\Box B \rightarrow C), \Box B \Rightarrow C} \rightarrow -S \\
\frac{\Box B \rightarrow C, \Box(\Box B \rightarrow C), \Box B \Rightarrow C}{\Box(\Box B \rightarrow C), \Box B \Rightarrow C} \Box - S \\
\frac{\Box(\Box B \rightarrow C), \Box B \Rightarrow C}{\Box(\Box B \rightarrow C), \Box B \Rightarrow \Box C} \Box - D \\
\frac{\Box(\Box B \rightarrow C), \Box B \Rightarrow \Box C}{\Box(\Box B \rightarrow C) \Rightarrow \Box B \rightarrow \Box C} \rightarrow -D \\
\frac{\Box(\Box B \rightarrow C) \Rightarrow \Box B \rightarrow \Box C}{\Box(\Box B \rightarrow C) \Rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)} \Box - D \\
\frac{\Box(\Box B \rightarrow C) \Rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)}{\Rightarrow \Box(\Box B \rightarrow C) \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)} \rightarrow -D
\end{array}$$

dove  $\mathcal{D}$  è la seguente derivazione

$$\begin{array}{c}
\frac{ax - id}{\Box(\Box B \rightarrow C), B, \Box B \Rightarrow B} \Box - S \\
\frac{\Box(\Box B \rightarrow C), \Box B \Rightarrow B}{\Box(\Box B \rightarrow C), \Box B \Rightarrow \Box B, C} \Box - D
\end{array}$$

e l'altro verso si deriva come segue

$$\begin{array}{c}
ax - id \\
\frac{C, \Box C, \Box(\Box B \rightarrow \Box C), \Box B \Rightarrow C}{\Box C, \Box(\Box B \rightarrow \Box C), \Box B \Rightarrow C} \Box - S \\
\frac{\mathcal{D}'}{\Box B \rightarrow \Box C, \Box(\Box B \rightarrow \Box C), \Box B \Rightarrow C} \rightarrow -S \\
\frac{\Box(\Box B \rightarrow \Box C), \Box B \Rightarrow C}{\Box(\Box B \rightarrow \Box C) \Rightarrow \Box B \rightarrow C} \Box - S \\
\frac{\Box(\Box B \rightarrow \Box C) \Rightarrow \Box B \rightarrow C}{\Box(\Box B \rightarrow \Box C) \Rightarrow \Box(\Box B \rightarrow C)} \rightarrow -D \\
\frac{\Box(\Box B \rightarrow \Box C) \Rightarrow \Box(\Box B \rightarrow C)}{\Rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C) \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow C)} \Box - D \\
\Rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C) \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow C) \rightarrow -D
\end{array}$$

dove  $\mathcal{D}'$  è la seguente derivazione

$$\begin{array}{c}
ax - id \\
\frac{\Box(\Box B \rightarrow \Box C), B, \Box B \Rightarrow B}{\Box(\Box B \rightarrow \Box C), \Box B \Rightarrow B} \Box - S \\
\frac{\Box(\Box B \rightarrow \Box C), \Box B \Rightarrow B}{\Box(\Box B \rightarrow \Box C), \Box B \Rightarrow \Box B, C} \Box - D
\end{array}$$

si ottiene la tesi

$$\Rightarrow \Box(\Box \beta^\circ \rightarrow \gamma^\circ) \leftrightarrow \Box(\beta^\Box \rightarrow \gamma^\Box).$$

5. caso  $fr \equiv \beta \vee \gamma$  per l'ipotesi induttiva si ha che

$$\Rightarrow \Box \beta^\circ \leftrightarrow \beta^\Box \qquad \Rightarrow \Box \gamma^\circ \leftrightarrow \gamma^\Box$$

e poiché la disgiunzione conserva l'equivalenza risulta

$$\Rightarrow (\Box \beta^\circ \vee \Box \gamma^\circ) \leftrightarrow (\beta^\Box \vee \gamma^\Box).$$

Visto che risulta derivabile in **S4** che

$$\Rightarrow \Box(\Box B \vee \Box C) \leftrightarrow (\Box B \vee \Box C)$$

infatti si ha

$$\begin{array}{c}
ax - id \\
\frac{C, \Box C, \Box(\Box B \vee \Box C) \Rightarrow C}{\Box C, \Box(\Box B \vee \Box C) \Rightarrow C} \Box - S \\
\frac{\Box C, \Box(\Box B \vee \Box C) \Rightarrow C}{\Box C, \Box(\Box B \vee \Box C) \Rightarrow \Box B, \Box C} \Box - D \\
\frac{\mathcal{D}}{\Box C, \Box(\Box B \vee \Box C) \Rightarrow \Box B \vee \Box C} \vee -D \\
\frac{\Box B \vee \Box C, \Box(\Box B \vee \Box C) \Rightarrow \Box B \vee \Box C}{\Box(\Box B \vee \Box C) \Rightarrow (\Box B \vee \Box C)} \vee -S \\
\frac{\Box(\Box B \vee \Box C) \Rightarrow (\Box B \vee \Box C)}{\Rightarrow \Box(\Box B \vee \Box C) \rightarrow (\Box B \vee \Box C)} \Box - S \\
\Rightarrow \Box(\Box B \vee \Box C) \rightarrow (\Box B \vee \Box C) \rightarrow -D
\end{array}$$

dove  $\mathcal{D}$  è la seguente derivazione

$$\begin{array}{c}
ax - id \\
\frac{B, \Box B, \Box(\Box B \vee \Box C) \Rightarrow B}{\Box B, \Box(\Box B \vee \Box C) \Rightarrow B} \Box - S \\
\frac{\Box B, \Box(\Box B \vee \Box C) \Rightarrow B}{\Box B, \Box(\Box B \vee \Box C) \Rightarrow \Box B, \Box C} \Box - D \\
\frac{\Box B, \Box(\Box B \vee \Box C) \Rightarrow \Box B, \Box C}{\Box B, \Box(\Box B \vee \Box C) \Rightarrow \Box B \vee \Box C} \vee -D
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\frac{ax - id}{B, \Box B \Rightarrow B} \Box - S \\
\frac{\Box B \Rightarrow B}{\Box B \Rightarrow \Box B, \Box C} \Box - D \\
\frac{\Box B \Rightarrow \Box B, \Box C}{\Box B \Rightarrow \Box B \vee \Box C} \vee - D \\
\frac{\Box B \Rightarrow \Box B \vee \Box C}{\Box B \Rightarrow \Box(\Box B \vee \Box C)} \Box - D \\
\frac{\Box B \Rightarrow \Box(\Box B \vee \Box C)}{\Box B \vee \Box C \Rightarrow \Box(\Box B \vee \Box C)} \vee - S \\
\frac{\Box B \vee \Box C \Rightarrow \Box(\Box B \vee \Box C)}{\Rightarrow (\Box B \vee \Box C) \rightarrow \Box(\Box B \vee \Box C)} \rightarrow -D
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
\frac{ax - id}{C, \Box C \Rightarrow C} \Box - S \\
\frac{\Box C \Rightarrow C}{\Box C \Rightarrow \Box B, \Box C} \Box - D \\
\frac{\Box C \Rightarrow \Box B, \Box C}{\Box C \Rightarrow \Box B \vee \Box C} \vee - D \\
\frac{\Box C \Rightarrow \Box B \vee \Box C}{\Box C \Rightarrow \Box(\Box B \vee \Box C)} \Box - D \\
\frac{\Box C \Rightarrow \Box(\Box B \vee \Box C)}{\Box B \vee \Box C \Rightarrow \Box(\Box B \vee \Box C)} \vee - S \\
\frac{\Box B \vee \Box C \Rightarrow \Box(\Box B \vee \Box C)}{\Rightarrow (\Box B \vee \Box C) \rightarrow \Box(\Box B \vee \Box C)} \rightarrow -D
\end{array}$$

la tesi risulta verificata, ricordando che  $\Box(\beta \vee \gamma)^\circ \equiv \Box(\Box\beta^\circ \vee \Box\gamma^\circ)$  e  $(\beta \vee \gamma)^\square \equiv \beta^\square \vee \gamma^\square$ . ■

*Osservazione.* Si osservi che l'equivalenza delle traduzioni è conservata anche dalla parte predicativa.

- caso  $\text{fr} \equiv \forall x\alpha$  per ipotesi induttiva si ha che

$$\Rightarrow \Box\alpha^\circ \leftrightarrow \alpha^\square.$$

Grazie al fatto che la quantificazione universale conserva gli equivalenti, si ottiene che

$$\Rightarrow \forall x\Box\alpha^\circ \leftrightarrow \forall x\alpha^\square.$$

Ora, poiché in **S4** vale

$$\Rightarrow \forall x\Box B(x) \leftrightarrow \Box\forall xB(x)$$

infatti si ha

$$\begin{array}{c}
\frac{ax - id}{\forall x\Box B(x), \Box B(t), B(t) \Rightarrow B(t)} \Box - S \\
\frac{\forall x\Box B(x), \Box B(t) \Rightarrow B(t)}{\forall x\Box B(x) \Rightarrow B(t)} \forall - S \\
\frac{\forall x\Box B(x) \Rightarrow B(t)}{\forall x\Box B(x) \Rightarrow \forall xB(x)} \forall - D \\
\frac{\forall x\Box B(x) \Rightarrow \forall xB(x)}{\forall x\Box B(x) \Rightarrow \Box\forall xB(x)} \Box - D \\
\frac{\forall x\Box B(x) \Rightarrow \Box\forall xB(x)}{\Rightarrow \forall x\Box B(x) \rightarrow \Box\forall xB(x)} \rightarrow -D
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\frac{ax - id}{\Box\forall xB(x), \forall B(x), B(t) \Rightarrow B(t)} \Box - D \\
\frac{\Box\forall xB(x), \forall xB(x), B(t) \Rightarrow \Box B(t)}{\Box\forall xB(x), \forall xB(x) \Rightarrow \Box B(t)} \forall - S \\
\frac{\Box\forall xB(x), \forall xB(x) \Rightarrow \Box B(t)}{\Box\forall xB(x) \Rightarrow \Box B(t)} \Box - S \\
\frac{\Box\forall xB(x) \Rightarrow \Box B(t)}{\Box\forall xB(x) \Rightarrow \forall x\Box B(x)} \forall - D \\
\frac{\Box\forall xB(x) \Rightarrow \forall x\Box B(x)}{\Rightarrow \Box\forall xB(x) \rightarrow \forall x\Box B(x)} \rightarrow -D
\end{array}$$

e per la transitività delle equivalenze, risulta derivabile

$$\Rightarrow \Box\forall x\alpha^\circ \leftrightarrow \forall x\alpha^\square.$$

Infine, poiché in **S4** vale

$$\Rightarrow \forall xB(x) \leftrightarrow \Box\forall xB(x)$$

infatti si ha

$$\begin{array}{c}
ax - id \\
\frac{B(t) \Rightarrow B(t)}{\forall x B(x) \Rightarrow B(t)} \forall - S \\
\frac{\forall x B(x) \Rightarrow B(t)}{\forall x B(x) \Rightarrow \forall x B(x)} \forall - D \\
\frac{\forall x B(x) \Rightarrow \forall x B(x)}{\Rightarrow \forall x B(x) \rightarrow \Box \forall x B(x)} \Box - D \\
\hline
\Rightarrow \forall x B(x) \rightarrow \Box \forall x B(x) \rightarrow -D \\
\\
ax - id \\
\frac{\Box \forall x B(x), \forall x B(x) B(t) \Rightarrow B(t)}{\Box \forall x B(x), \forall x B(x) \Rightarrow B(t)} \forall - S \\
\frac{\Box \forall x B(x) \Rightarrow B(t)}{\Box \forall x B(x) \Rightarrow \forall x B(x)} \Box - S \\
\frac{\Box \forall x B(x) \Rightarrow \forall x B(x)}{\Rightarrow \Box \forall x B(x) \rightarrow \forall x B(x)} \forall - D \\
\hline
\Rightarrow \Box \forall x B(x) \rightarrow \forall x B(x) \rightarrow -D
\end{array}$$

e per la transitività delle equivalenze si ottiene la tesi

$$\Rightarrow \Box \forall x A^\circ \leftrightarrow \Box \forall x A^\square$$

ricordando che  $(\forall x A)^\circ \equiv \forall x A^\circ$  e  $(\forall x A)^\square \equiv \Box \forall x A^\square$ .

- caso fr  $\equiv \exists x \alpha$  per ipotesi induttiva si ha che

$$\Rightarrow \Box \alpha^\circ \leftrightarrow \alpha^\square.$$

Il quantificatore esistenziale conserva gli equivalenti si ha che

$$\Rightarrow \exists x \Box \alpha^\circ \leftrightarrow \exists x \alpha^\square$$

e dato che in **S4** vale

$$\Box \exists x \Box B \leftrightarrow \exists x \Box B$$

infatti

$$\begin{array}{c}
ax - id \\
\frac{B[x/y], \Box B[x/y], \Box \exists x \Box B \Rightarrow B[x/y]}{\Box B[x/y], \Box \exists x \Box B \Rightarrow B[x/y]} \Box - S \\
\frac{\Box B[x/y], \Box \exists x \Box B \Rightarrow B[x/y]}{\Box B[x/y], \Box \exists x \Box B \Rightarrow \Box B[x/y]} \Box - D \\
\frac{\Box B[x/y], \Box \exists x \Box B \Rightarrow \Box B[x/y]}{\Box B[x/y], \Box \exists x \Box B \Rightarrow \exists x \Box B} \exists - D \\
\frac{\Box B[x/y], \Box \exists x \Box B \Rightarrow \exists x \Box B}{\exists x \Box B, \Box \exists x \Box B \Rightarrow \exists x \Box B} \exists - S \\
\frac{\exists x \Box B, \Box \exists x \Box B \Rightarrow \exists x \Box B}{\Box \exists x \Box B \Rightarrow \exists x \Box B} \Box - S \\
\hline
\Rightarrow \Box \exists x \Box B \rightarrow \exists x \Box B \rightarrow -D
\end{array}$$

dove in  $\exists - S$  si ha ( $y \notin \text{VL}(\Box \exists x \Box B, \exists x \Box B, \exists x \Box B)$ ).

$$\begin{array}{c}
ax - id \\
\frac{B[x/y], \Box B[x/y] \Rightarrow B[x/y]}{\Box B[x/y] \Rightarrow B[x/y]} \Box - S \\
\frac{\Box B[x/y] \Rightarrow B[x/y]}{\Box B[x/y] \Rightarrow \Box B[x/y]} \Box - D \\
\frac{\Box B[x/y] \Rightarrow \Box B[x/y]}{\Box B[x/y] \Rightarrow \exists x \Box B} \exists - D \\
\frac{\Box B[x/y] \Rightarrow \exists x \Box B}{\Box B[x/y] \Rightarrow \Box \exists x \Box B} \Box - D \\
\frac{\Box B[x/y] \Rightarrow \Box \exists x \Box B}{\exists x \Box B \Rightarrow \Box \exists x \Box B} \exists - S \\
\hline
\Rightarrow \exists x \Box B \rightarrow \Box \exists x \Box B \rightarrow -D
\end{array}$$

dove in  $\exists - S$  si ha ( $y \notin \text{VL}(\Box\exists x\Box B, \exists x\Box B)$ ). Si ottiene la tesi, ricordando che  $\Box(\exists x\alpha)^\circ \equiv \Box\exists x\Box\alpha^\circ$  e  $(\exists x\alpha)^\square \equiv \exists x\alpha^\square$

$$\Rightarrow \Box\exists x\Box\alpha^\circ \leftrightarrow \exists x\alpha^\square.$$

**Teorema 4.0.3.** *Le interpretazioni  $\square$  e  $\circ$  sono valide, cioè preservano la deducibilità.*

*Dimostrazione.* Procedendo per induzione sulla profondità di una deduzione in **G3i** (D), è di verifica immediata che se **G3i**  $\vdash \Gamma \Rightarrow \text{fr}$ , allora **G3s**  $\vdash \Gamma^\square \Rightarrow \text{fr}^\square$ . Si supponga di avere una derivazione in **G3i** di  $\Gamma \Rightarrow \text{fr}$ , sia essa  $\pi$ , di profondità  $\mathbf{n}$ .

$$\frac{\pi}{\Gamma \Rightarrow \text{fr}}$$

Se  $\mathbf{n} = 0$  allora il sequente  $\Gamma \Rightarrow \text{fr}$  è o un assioma identità oppure un assioma di  $\perp$ . Se  $\Gamma \Rightarrow \text{fr}$  è un assioma identità allora

$$\Gamma \equiv \Gamma_1, \text{fr}, \Gamma_2$$

e dunque pure

$$\Gamma_1^\square, \text{fr}^\square, \Gamma_2^\square \Rightarrow \text{fr}^\square$$

è un assioma in **G3s**, ovvero il sequente  $\Gamma^\square \Rightarrow \text{fr}^\square$  è derivabile in **G3s**, come volevasi dimostrare. Se, invece,  $\Gamma \Rightarrow \text{fr}$  è un assioma di  $\perp$  allora

$$\Gamma \equiv \Gamma_1, \perp, \Gamma_2$$

e dunque ricordando che

$$\perp^\square \equiv \perp$$

segue per l'assioma di  $\perp$  in **G3s** che  $\Gamma_1^\square, \perp, \Gamma_2^\square \Rightarrow \text{fr}^\square$  è derivabile in **G3s**. Se, invece,  $\mathbf{n} \geq 1$  allora esiste una derivazione

$$\frac{\pi}{\Gamma \Rightarrow \text{fr}}$$

di profondità  $\mathbf{n}$  che termina con l'applicazione di una regola del calcolo avente delle premesse. Per dimostrare la tesi si vanno ad analizzare le varie possibilità con cui può concludersi la derivazione.

*Caso ultima regola  $\& - S$  ovvero la deduzione  $\pi$  è della forma*

$$\frac{\frac{\pi'}{\alpha, \beta, \Gamma \Rightarrow \psi}}{\alpha \& \beta, \Gamma \Rightarrow \psi} \& - S$$

con una derivazione  $\pi'$  in **G3i**. In tal caso si applica l'ipotesi induttiva alla derivazione  $\pi'$  e si trova una derivazione  $\pi''$  in **G3s**

$$\frac{\pi''}{\alpha^\square, \beta^\square, \Gamma^\square \Rightarrow \psi^\square}$$

Dato che  $(\alpha \& \beta)^\square \equiv \alpha^\square \& \beta^\square$ ,  $\pi''$  è la derivazione in **G3s** di

$$\frac{\frac{\pi''}{\alpha^\square, \beta^\square, \Gamma^\square \Rightarrow \psi^\square}}{\alpha^\square \& \beta^\square, \Gamma^\square \Rightarrow \psi^\square} \& - S$$

*Caso ultima regola  $\& - D$  ovvero la deduzione  $\pi$  è della forma*

$$\frac{\frac{\pi'_1}{\Gamma \Rightarrow \alpha} \quad \frac{\pi'_2}{\Gamma \Rightarrow \beta}}{\Gamma \Rightarrow \alpha \& \beta} \& - D$$

con  $\pi'_1$  e  $\pi'_2$  derivazioni in **G3i**. Si applica l'ipotesi induttiva alle derivazioni  $\pi'_1$  e  $\pi'_2$  e si trovano due derivazioni  $\pi''_1$   $\pi''_2$  in **G3s** tali che

$$\frac{\pi''_1}{\Gamma^\square \Rightarrow \alpha^\square} \quad \frac{\pi''_2}{\Gamma^\square \Rightarrow \beta^\square}$$

quindi si ottiene la tesi

$$\frac{\frac{\pi''_1}{\Gamma^\square \Rightarrow \alpha^\square} \quad \frac{\pi''_2}{\Gamma^\square \Rightarrow \beta^\square}}{\Gamma^\square \Rightarrow (\alpha^\square \& \beta^\square)} \& - D$$

*Caso ultima regola  $\vee - S$*  ovvero la deduzione  $\pi$  è della forma

$$\frac{\frac{\pi'_1}{\alpha, \Gamma \Rightarrow \psi} \quad \frac{\pi'_2}{\beta, \Gamma \Rightarrow \psi}}{\alpha \vee \beta, \Gamma \Rightarrow \psi} \vee - S$$

con  $\pi'_1$  e  $\pi'_2$  derivazioni in **G3i**. Si applica l'ipotesi induttiva alle derivazioni  $\pi'_1$  e  $\pi'_2$  e si trovano due derivazioni  $\pi''_1$   $\pi''_2$  in **G3s** tali che

$$\frac{\pi''_1}{\alpha^\square, \Gamma^\square \Rightarrow \psi^\square} \quad \frac{\pi''_2}{\beta^\square, \Gamma^\square \Rightarrow \psi^\square}$$

e ricordando che  $(\alpha \vee \beta)^\square \equiv \alpha^\square \vee \beta^\square$  si ottiene la tesi

$$\frac{\frac{\pi''_1}{\alpha^\square, \Gamma^\square \Rightarrow \psi^\square} \quad \frac{\pi''_2}{\beta^\square, \Gamma^\square \Rightarrow \psi^\square}}{\alpha^\square \vee \beta^\square, \Gamma^\square \Rightarrow \psi^\square} \vee - S$$

*Caso ultima regola  $\vee - D$*  ovvero la deduzione  $\pi$  è della forma

$$\frac{\frac{\pi'}{\Gamma \Rightarrow \alpha_i}}{\Gamma \Rightarrow \alpha_0 \vee \alpha_1} \vee - D \quad (i = 0, 1)$$

con  $\pi'$  derivazione in **G3i**. Supponiamo  $i = 1$ , l'altro caso analogo. Si applica l'ipotesi induttiva alla derivazione  $\pi'$  e si trova una derivazione  $\pi''$  in **G3s** tale che

$$\frac{\pi''}{\Gamma^\square \Rightarrow \alpha_1^\square}$$

si ha, dunque, la derivazione cercata in **G3s**

$$\frac{\frac{\pi''}{\Gamma^\square \Rightarrow \alpha_1^\square}}{\Gamma^\square \Rightarrow \alpha_0^\square, \alpha_1^\square} \text{in}_{sx} \quad \frac{\Gamma^\square \Rightarrow \alpha_0^\square, \alpha_1^\square}{\Gamma \Rightarrow \alpha_0^\square \vee \alpha_1^\square} \vee - D$$

dove il passaggio segnato dalla linea tratteggiata è giustificato dalla regola di indebolimento applicata a  $\Gamma^\square \Rightarrow \alpha_1^\square$ .

*Caso ultima regola  $\rightarrow - S$*  ovvero la deduzione  $\pi$  termina con

$$\frac{\Gamma, \alpha \rightarrow \beta \Rightarrow \alpha \quad \Gamma, \beta \Rightarrow \psi}{\Gamma, \alpha \rightarrow \beta \Rightarrow \psi} \rightarrow - S$$

che viene trasformata in

$$\frac{\frac{\Gamma^\square, \square(\alpha^\square \rightarrow \beta^\square) \Rightarrow \alpha^\square \quad \frac{\Gamma^\square, \beta^\square \Rightarrow \psi^\square}{\Gamma^\square, \square(\alpha^\square \rightarrow \beta^\square), \beta^\square \Rightarrow \psi^\square} \text{in}_{\text{sx}}}{\Gamma^\square, \square(\alpha^\square \rightarrow \beta^\square), \alpha^\square \rightarrow \beta^\square \Rightarrow \psi^\square} \rightarrow -\text{S}}{\Gamma^\square, \square(\alpha^\square \rightarrow \beta^\square) \Rightarrow \psi^\square} \square - \text{S}$$

Il passaggio segnato dalla linea tratteggiata è giustificato dalla trasformazione di indebolimento applicata alla dimostrazione di  $\Gamma^\square, \beta^\square \Rightarrow \psi^\square$ .

*Caso ultima regola*  $\rightarrow -\text{D}$  Viene utilizzato come lemma che  $\square\alpha^\square \leftrightarrow \alpha^\square$  per ogni  $\alpha$  (4). La deduzione  $\pi$  termina con

$$\frac{\Gamma, \alpha \Rightarrow \beta}{\Gamma \Rightarrow \alpha \rightarrow \beta} \rightarrow -\text{D}$$

che viene trasformata in

$$\frac{\frac{\frac{\Gamma^\square, \alpha^\square \Rightarrow \beta^\square}{\Gamma^\square \Rightarrow \alpha^\square \rightarrow \beta^\square} \rightarrow -\text{D}}{\square\Gamma^\square \Rightarrow \alpha^\square \rightarrow \beta^\square} \text{Cuts}}{\square\Gamma^\square \Rightarrow \square(\alpha^\square \rightarrow \beta^\square)} \square - \text{D}}{\Gamma^\square \Rightarrow \square(\alpha^\square \rightarrow \beta^\square)} \text{Cuts}$$

dove i *Cuts* sono tagli con deduzioni di  $\square\text{fr}^\square \Rightarrow \text{fr}^\square, \text{fr}^\square \Rightarrow \square\text{fr}^\square$  ( $\text{fr} \in \Gamma$ ). ■

*Osservazione.* Si fa notare che il teorema di validità può essere esteso allo stesso modo alla parte predicativa. *Caso ultima regola*  $\forall - \text{S}$  ovvero la deduzione  $\pi$  è della forma

$$\frac{\frac{\pi'}{\forall x\alpha(x), \alpha[x/t], \Gamma \Rightarrow \psi} \forall - \text{S}}{\forall x\alpha(x), \Gamma \Rightarrow \psi}$$

con  $\pi'$  derivazione in **G3i**. Applicando l'ipotesi induttiva alla derivazione  $\pi'$  esiste una derivazione  $\pi''$  in **G3s** tale che

$$\frac{\pi''}{(\forall x\alpha(x))^\square, \alpha^\square[x/t], \Gamma^\square \Rightarrow \psi^\square}$$

Si ha la tesi, ricordando che  $(\forall x\alpha(x))^\square \equiv \square\forall x\alpha^\square(x)$

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\pi''}{\alpha^\square[x/t], \square\forall x\alpha^\square(x), \Gamma^\square \Rightarrow \psi^\square} \text{in}_{\text{sx}}}{\forall x\alpha^\square(x), \alpha^\square[x/t], \square\forall x\alpha^\square(x), \Gamma^\square \Rightarrow \psi^\square} \forall - \text{S}}{\square\forall x\alpha^\square(x), \square\forall x\alpha^\square(x), \Gamma^\square \Rightarrow \psi^\square} \text{Cuts}}{\square\forall x\alpha^\square(x), \Gamma^\square \Rightarrow \psi^\square} \text{cn}_{\text{sx}}$$

*Caso ultima regola*  $\forall - \text{D}$  ovvero la deduzione  $\pi$  è della forma

$$\frac{\frac{\pi'}{\Gamma \Rightarrow \alpha[x/y]} \forall - \text{D}}{\Gamma \Rightarrow \forall x\alpha(x)} \quad (y \notin \text{VL}(\Gamma, \forall x\alpha(x)))$$

con  $\pi'$  derivazione in **G3i**. Applicando l'ipotesi induttiva a  $\pi'$ , vi è una derivazione  $\pi''$  in **G3s** tale che

$$\frac{\pi''}{\Gamma^\square \Rightarrow \alpha^\square[x/y]}$$

Si trova, quindi, la derivazione cercata

$$\frac{\frac{\frac{\pi''}{\Gamma^\square \Rightarrow \alpha^\square[x/y]}{\Gamma^\square \Rightarrow \forall x \alpha^\square(x)} \forall - D \quad (y \notin \text{VL}(\Gamma, \forall x \alpha(x)))}{\square \Gamma^\square \Rightarrow \forall x \alpha^\square(x)} \text{Cuts}}{\frac{\square \Gamma^\square \Rightarrow \forall x \alpha^\square(x)}{\square \Gamma^\square \Rightarrow \square \forall x \alpha^\square(x)} \square - D} \text{Cuts}$$

dove i *Cuts* sono tagli con deduzioni di  $\square \text{fr}^\square \Rightarrow \text{fr}^\square, \text{fr}^\square \Rightarrow \square \text{fr}^\square$  ( $\text{fr} \in \Gamma$ ).

*Caso ultima regola*  $\exists - S$  ovvero la deduzione  $\pi$  è della forma

$$\frac{\frac{\pi'}{\alpha[x/y], \Gamma \Rightarrow \psi}}{\exists x \alpha(x), \Gamma \Rightarrow \psi} \exists - S \quad (y \notin \text{VL}(\Gamma, \exists x \alpha(x), \psi))$$

con  $\pi'$  derivazione in **G3i**. Applicando l'ipotesi induttiva a  $\pi'$ , vi è una derivazione  $\pi''$  in **G3s** tale che

$$\frac{\pi''}{\alpha^\square[x/y], \Gamma^\square \Rightarrow \psi^\square}$$

Dato che  $(\exists x \alpha(x))^\square \equiv \exists x \alpha^\square(x)$ ,  $\pi''$  è la derivazione in **G3s** di

$$\frac{\frac{\pi''}{\alpha^\square[x/y], \Gamma^\square \Rightarrow \psi^\square}}{\exists x \alpha^\square(x), \Gamma^\square \Rightarrow \psi^\square} \exists - S \quad (y \notin \text{VL}(\Gamma, \exists x \alpha(x), \psi))$$

*Caso ultima regola*  $\exists - D$  ovvero la deduzione  $\pi$  è della forma

$$\frac{\frac{\pi'}{\Gamma \Rightarrow \alpha[x/t], \exists x \alpha(x)}}{\Gamma \Rightarrow \exists x \alpha(x)} \exists - D$$

con  $\pi'$  derivazione in **G3i**. Applicando l'ipotesi induttiva a  $\pi'$ , vi è una derivazione  $\pi''$  in **G3s** tale che

$$\frac{\pi''}{\Gamma^\square \Rightarrow \alpha^\square[x/t], \exists x \alpha^\square(x)}$$

e  $\pi''$  è la derivazione cercata, in quanto

$$\frac{\frac{\pi''}{\Gamma^\square \Rightarrow \alpha^\square[x/t], \exists x \alpha^\square(x)}}{\Gamma^\square \Rightarrow \exists x \alpha^\square(x)} \exists - D$$

**Lemma 4.0.4.** *Per ogni formula fr si ha che  $\square \text{fr}^\square \leftrightarrow \text{fr}^\square$  è derivabile in **G3s**.*

*Dimostrazione.* Si procede per induzione sulla formazione della formula fr.

1. caso  $\text{fr} \equiv \perp$ , ricordando che  $\perp^\square \equiv \perp$  la tesi segue banalmente dall'Assioma-T ( $\square \text{fr} \rightarrow \text{fr}$ ) e dall'assioma di  $\perp$ .



2. caso  $fr \equiv A$  con  $A$  atomica, dato che  $A^\square \equiv \Box A$  si ottiene la tesi per l'Assioma-4 ( $\Box A \rightarrow \Box\Box A$ ) e l'Assioma-T, infatti

$$\begin{array}{c}
 ax - id \\
 \frac{A, \Box A \Rightarrow A}{\Box A \Rightarrow A} \Box - S \\
 \frac{\Box A \Rightarrow A}{\Box A \Rightarrow \Box A} \Box - D \\
 \frac{\Box A \Rightarrow \Box A}{\Box A \Rightarrow \Box\Box A} \Box - D \\
 \frac{\Box A \Rightarrow \Box\Box A}{\Rightarrow \Box A \rightarrow \Box\Box A} \rightarrow -D
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 ax - id \\
 \frac{A, \Box A, \Box\Box A \Rightarrow A}{\Box A, \Box\Box A \Rightarrow A} \Box - S \\
 \frac{\Box A, \Box\Box A \Rightarrow A}{\Box A, \Box\Box A \Rightarrow \Box A} \Box - D \\
 \frac{\Box A, \Box\Box A \Rightarrow \Box A}{\Box\Box A \Rightarrow \Box A} \Box - S \\
 \frac{\Box\Box A \Rightarrow \Box A}{\Rightarrow \Box\Box A \rightarrow \Box A} \rightarrow -D
 \end{array}$$

3. caso  $fr \equiv \beta \& \gamma$ , dal fatto che  $(\beta \& \gamma)^\square \equiv \beta^\square \& \gamma^\square$  e che per ipotesi induttiva si ha  $\Box\beta^\square \leftrightarrow \beta^\square$  e  $\Box\gamma^\square \leftrightarrow \gamma^\square$ , si ottiene, grazie al fatto che la congiunzione conserva gli equivalenti, che  $\Box\beta^\square \& \Box\gamma^\square \leftrightarrow \beta^\square \& \gamma^\square$ . Dato che vale  $\Box\beta^\square \& \Box\gamma^\square \leftrightarrow \Box(\beta^\square \& \gamma^\square)$ , si ottiene la tesi,  $\Box(\beta^\square \& \gamma^\square) \leftrightarrow \beta^\square \& \gamma^\square$ . Infatti, è derivabile in **G3s**

$$\begin{array}{c}
 ax - id \\
 \frac{B, \Box B, \Box C \Rightarrow B}{\Box B, \Box C \Rightarrow B} \Box - S \quad \frac{ax - id}{\frac{C, \Box C \Rightarrow C}{\Box C \Rightarrow C} \Box - S} \text{in}_{sx} \\
 \frac{\Box B, \Box C \Rightarrow B \& C}{\Box B, \Box C \Rightarrow \Box(B \& C)} \& - D \\
 \frac{\Box B, \Box C \Rightarrow \Box(B \& C)}{(\Box B \& \Box C) \Rightarrow \Box(B \& C)} \& - S \\
 \frac{(\Box B \& \Box C) \Rightarrow \Box(B \& C)}{\Rightarrow (\Box B \& \Box C) \rightarrow \Box(B \& C)} \rightarrow -D
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 ax - id \\
 \frac{B, C, \Box(B \& C) \Rightarrow B}{B \& C, \Box(B \& C) \Rightarrow B} \& - S \\
 \frac{B \& C, \Box(B \& C) \Rightarrow B}{\Box(B \& C) \Rightarrow B} \Box - S \\
 \frac{\Box(B \& C) \Rightarrow B}{\Box(B \& C) \Rightarrow \Box B} \Box - D \\
 \frac{ax - id}{\frac{B, C, \Box(B \& C) \Rightarrow C}{B \& C, \Box(B \& C) \Rightarrow C} \& - S} \Box - S \\
 \frac{B \& C, \Box(B \& C) \Rightarrow C}{\Box(B \& C) \Rightarrow C} \Box - S \\
 \frac{\Box(B \& C) \Rightarrow C}{\Box(B \& C) \Rightarrow \Box C} \Box - D \\
 \frac{\Box(B \& C) \Rightarrow \Box B \quad \Box(B \& C) \Rightarrow \Box C}{\Box(B \& C) \Rightarrow (\Box B \& \Box C)} \& - D \\
 \frac{\Box(B \& C) \Rightarrow (\Box B \& \Box C)}{\Rightarrow \Box(B \& C) \rightarrow (\Box B \& \Box C)} \rightarrow -D
 \end{array}$$

4. caso  $fr \equiv \beta \vee \gamma$ , dal fatto che  $(\beta \vee \gamma)^\square \equiv \beta^\square \vee \gamma^\square$  e che per ipotesi induttiva si ha  $\Box\beta^\square \leftrightarrow \beta^\square$  e  $\Box\gamma^\square \leftrightarrow \gamma^\square$ , si ottiene, grazie al fatto che la disgiunzione conserva gli equivalenti, che  $\Box\beta^\square \vee \Box\gamma^\square \leftrightarrow \beta^\square \vee \gamma^\square$ . Si ottiene la tesi, ovvero che  $\Box(\beta^\square \vee \gamma^\square) \leftrightarrow \beta^\square \vee \gamma^\square$ , dato che vale

$$\Box(B \vee C) \leftrightarrow \Box B \vee \Box C$$

$$\begin{array}{c}
ax - id \\
\frac{C, \Box C, \Box(B \vee C) \Rightarrow C}{\Box C, \Box(B \vee C) \Rightarrow C} \Box - S \\
\frac{\Box C, \Box(B \vee C) \Rightarrow \Box B, \Box C}{\Box C, \Box(B \vee C) \Rightarrow \Box B \vee \Box C} \Box - D \\
\frac{\mathcal{D}}{\Box C, \Box(B \vee C) \Rightarrow \Box B \vee \Box C} \vee -D \\
\frac{\Box B \vee \Box C, \Box(B \vee C) \Rightarrow \Box B \vee \Box C}{B \vee C, \Box(B \vee C) \Rightarrow \Box B \vee \Box C} \vee -S \\
\frac{\hspace{10em} Cuts}{\Box(B \vee C) \Rightarrow (\Box B \vee \Box C)} \Box - S \\
\frac{\hspace{10em} \Box(B \vee C) \Rightarrow (\Box B \vee \Box C)}{\Rightarrow \Box(B \vee C) \rightarrow (\Box B \vee \Box C)} \rightarrow -D
\end{array}$$

dove il *Cuts* è il taglio con la derivazione di  $B \vee C \Rightarrow \Box B \vee \Box C$  che esiste per ipotesi induttiva e conservazione delle equivalenze e  $\mathcal{D}$  è la seguente derivazione

$$\begin{array}{c}
ax - id \\
\frac{B, \Box B, \Box(B \vee C) \Rightarrow B}{\Box B, \Box(B \vee C) \Rightarrow B} \Box - S \\
\frac{\Box B, \Box(B \vee C) \Rightarrow \Box B, \Box C}{\Box B, \Box(B \vee C) \Rightarrow \Box B \vee \Box C} \Box - D \\
\vee -D
\end{array}$$

Viceversa,

$$\begin{array}{c}
ax - id \qquad ax - id \\
\frac{B, \Box B \Rightarrow B, C}{B, \Box B \Rightarrow B \vee C} \vee -D \qquad \frac{C, \Box C \Rightarrow B, C}{C, \Box C \Rightarrow B \vee C} \vee -D \\
\frac{\Box B \Rightarrow B \vee C}{\Box B \Rightarrow \Box(B \vee C)} \Box - S \qquad \frac{\Box C \Rightarrow B \vee C}{\Box C \Rightarrow \Box(B \vee C)} \Box - S \\
\frac{\hspace{10em} \Box - D}{\Box B \vee \Box C \Rightarrow \Box(B \vee C)} \vee -S \\
\frac{\hspace{10em} \Rightarrow (\Box B \vee \Box C) \rightarrow \Box(B \vee C)}{\Rightarrow (\Box B \vee \Box C) \rightarrow \Box(B \vee C)} \rightarrow -D
\end{array}$$

5. caso  $\text{fr} \equiv \beta \rightarrow \gamma$ , si ricorda che  $(\beta \rightarrow \gamma)^\Box \equiv \Box(\beta^\Box \rightarrow \gamma^\Box)$ , e dal fatto che è derivabile in **G3s**  $\Rightarrow \Box\Box(B \rightarrow C) \leftrightarrow \Box(B \rightarrow C)$ .

$$\begin{array}{c}
ax - id \qquad ax - id \\
\frac{\psi, \phi, B \Rightarrow B, C \quad C, \psi, \phi, B \Rightarrow C}{B \rightarrow C, \Box(B \rightarrow C), \Box\Box(B \rightarrow C), B \Rightarrow C} \rightarrow -S \\
\frac{(B \rightarrow C), \Box(B \rightarrow C), \Box\Box(B \rightarrow C) \Rightarrow B \rightarrow C}{\Box(B \rightarrow C), \Box\Box(B \rightarrow C) \Rightarrow B \rightarrow C} \rightarrow -D \\
\frac{\hspace{10em} \Box - S}{\Box\Box(B \rightarrow C) \Rightarrow B \rightarrow C} \Box - S \\
\frac{\hspace{10em} \Box - S}{\Box\Box(B \rightarrow C) \Rightarrow \Box(B \rightarrow C)} \Box - D \\
\frac{\hspace{10em} \Box - D}{\Rightarrow \Box\Box(B \rightarrow C) \rightarrow \Box(B \rightarrow C)} \rightarrow -D
\end{array}$$

dove sulle foglie  $\psi \equiv \Box(B \rightarrow C)$  e  $\phi \equiv, \Box\Box(B \rightarrow C)$ .

$$\begin{array}{c}
ax - id \qquad ax - id \\
\frac{\Box(B \rightarrow C), B \Rightarrow B, C \quad C, \Box(B \rightarrow C), B \Rightarrow C}{B \rightarrow C, \Box(B \rightarrow C), B \Rightarrow C} \rightarrow -S \\
\frac{B \rightarrow C, \Box(B \rightarrow C), B \Rightarrow C}{B \rightarrow C, \Box(B \rightarrow C) \Rightarrow B \rightarrow C} \rightarrow -D \\
\frac{B \rightarrow C, \Box(B \rightarrow C) \Rightarrow B \rightarrow C}{\Box(B \rightarrow C) \Rightarrow B \rightarrow C} \Box - S \\
\frac{\Box(B \rightarrow C) \Rightarrow B \rightarrow C}{\Box(B \rightarrow C) \Rightarrow \Box(B \rightarrow C)} \Box - D \\
\frac{\Box(B \rightarrow C) \Rightarrow \Box(B \rightarrow C)}{\Box(B \rightarrow C) \Rightarrow \Box\Box(B \rightarrow C)} \Box - D \\
\frac{\Box(B \rightarrow C) \Rightarrow \Box\Box(B \rightarrow C)}{\Rightarrow \Box(B \rightarrow C) \rightarrow \Box\Box(B \rightarrow C)} \rightarrow -D
\end{array}$$

si conclude che  $\Box(\beta \rightarrow \gamma)^\Box \leftrightarrow (\beta \rightarrow \gamma)^\Box$ .

■

*Osservazione.* Estensione del lemma precedente alla parte predicativa.

1. caso  $fr \equiv \forall x\alpha(x)$ , ricordando che  $(\forall x\alpha(x))^\Box \equiv \Box\forall x\alpha^\Box(x)$  ed essendo per ipotesi induttiva che  $\Box\alpha^\Box \leftrightarrow \alpha^\Box$ , la tesi segue facilmente dalla derivabilità di  $\Box\Box\forall xB(x) \leftrightarrow \Box\forall xB(x)$

$$\begin{array}{c}
ax - id \\
\frac{\forall xB(x), B(y), \Box\forall xB(x), \Box\Box\forall xB(x) \Rightarrow B(y)}{\forall xB(x), \Box\forall xB(x), \Box\Box\forall xB(x) \Rightarrow B(y)} \forall - S \\
\frac{\forall xB(x), \Box\forall xB(x), \Box\Box\forall xB(x) \Rightarrow B(y)}{\forall xB(x), \Box\forall xB(x), \Box\Box\forall xB(x) \Rightarrow \forall xB(x)} \forall - D \\
\frac{\forall xB(x), \Box\forall xB(x), \Box\Box\forall xB(x) \Rightarrow \forall xB(x)}{\Box\forall xB(x), \Box\Box\forall xB(x) \Rightarrow \forall xB(x)} \Box - S \\
\frac{\Box\forall xB(x), \Box\Box\forall xB(x) \Rightarrow \forall xB(x)}{\Box\Box\forall xB(x) \Rightarrow \forall xB(x)} \Box - D \\
\frac{\Box\Box\forall xB(x) \Rightarrow \forall xB(x)}{\Rightarrow \Box\Box\forall xB(x) \rightarrow \Box\forall xB(x)} \rightarrow -D
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
ax - id \\
\frac{\forall xB(x), B(y), \Box\forall xB(x) \Rightarrow B(y)}{\forall xB(x), \Box\forall xB(x) \Rightarrow B(y)} \forall - S \\
\frac{\forall xB(x), \Box\forall xB(x) \Rightarrow B(y)}{\Box\forall xB(x) \Rightarrow B(y)} \Box - S \\
\frac{\Box\forall xB(x) \Rightarrow B(y)}{\Box\forall xB(x) \Rightarrow \forall xB(x)} \forall - D \\
\frac{\Box\forall xB(x) \Rightarrow \forall xB(x)}{\Box\forall xB(x) \Rightarrow \Box\forall xB(x)} \Box - D \\
\frac{\Box\forall xB(x) \Rightarrow \Box\forall xB(x)}{\Rightarrow \Box\forall xB(x) \rightarrow \Box\Box\forall xB(x)} \rightarrow -D
\end{array}$$

dove nell'applicazione della regola del  $\forall - D$  si considera nella prima derivazione che  $(y \notin VL(\forall xB(x), \Box\forall xB(x), \Box\Box\forall xB(x)))$ , nella seconda che  $(y \notin VL(\forall xB(x), \Box\forall xB(x)))$ .

2. caso  $A \equiv \exists x\alpha(x)$ , ricordando che  $(\exists x\alpha(x))^\Box \equiv \exists x\alpha^\Box(x)$  ed essendo per ipotesi induttiva che  $\Box\alpha^\Box \leftrightarrow \alpha^\Box$  si ottiene la tesi  $\Box(\exists x\alpha(x))^\Box \leftrightarrow (\exists x\alpha(x))^\Box$ , infatti risulta derivabile in **G3s**  $\Box\exists xB(x) \leftrightarrow \exists xB(x)$

$$\begin{array}{c}
ax - id \\
\frac{B(y), \Box\exists xB(x) \Rightarrow B(y), \exists xB(x)}{B(y), \Box\exists xB(x) \Rightarrow \exists xB(x)} \exists - D \\
\frac{B(y), \Box\exists xB(x) \Rightarrow \exists xB(x)}{\exists xB(x), \Box\exists xB(x) \Rightarrow \exists xB(x)} \exists - S \\
\frac{\exists xB(x), \Box\exists xB(x) \Rightarrow \exists xB(x)}{\Box\exists xB(x) \Rightarrow \exists xB(x)} \Box - S \\
\frac{\Box\exists xB(x) \Rightarrow \exists xB(x)}{\Rightarrow \Box\exists xB(x) \rightarrow \exists xB(x)} \rightarrow -D
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
ax - id \\
\frac{B(y), \Box B(y) \Rightarrow B(y), \exists x B(x)}{\Box B(y) \Rightarrow B(y), \exists x B(x)} \Box - S \\
\frac{\Box B(y) \Rightarrow B(y), \exists x B(x)}{\Box B(y) \Rightarrow \exists x B(x)} \exists - D \\
\frac{\Box B(y) \Rightarrow \exists x B(x)}{\Box B(y) \Rightarrow \Box \exists x B(x)} \Box - D \\
\frac{\Box B(y) \Rightarrow \Box \exists x B(x)}{B(y) \Rightarrow \Box \exists x B(x)} Cuts \\
\frac{B(y) \Rightarrow \Box \exists x B(x)}{\exists x B(x) \Rightarrow \Box \exists x B(x)} \exists - S \\
\frac{\exists x B(x) \Rightarrow \Box \exists x B(x)}{\Rightarrow \exists x B(x) \rightarrow \Box \exists x B(x)} \rightarrow - D
\end{array}$$

dove il *Cuts* è il taglio con la derivazione di  $B(y) \Rightarrow \Box B(y)$  che esiste per ipotesi induttiva e conservazione delle equivalenze e nell'applicazione della regola del  $\exists - S$  si considera nella prima derivazione che ( $y \notin VL(\exists x B(x), \exists x B(x), \Box \exists x B(x))$ ), mentre nella seconda derivazione che ( $y \notin VL(\exists x B(x), \Box \exists x B(x))$ ).

Si presentano, ora, una serie di lemmi per dimostrare la conservatività delle traduzioni, in particolare quella di  $\circ$ .

**Definizione 4.0.5.** Sia  $\mathcal{F}$  il frammento di **S4** basato su  $\&, \vee, \rightarrow, \perp, \Box, \forall$ . Si assegna ad ogni deduzione  $\mathcal{D}$  in  $\mathcal{F}$  di **G3s** un *grado*  $\rho(\mathcal{D})$  che conta le applicazioni delle regole in  $\mathcal{D}$  a parte  $\rightarrow -D, \& - D, \forall - D$ . Più precisamente, l'assegnamento è indicato dai seguenti schemi, dove  $\rho$  e  $\rho'$  sono i gradi assegnati alle premesse e l'espressione alla sinistra delle conclusioni dà il grado della conclusione, espresso in termini dei gradi delle premesse.

$$\begin{array}{c}
\rho(\mathcal{D}) = 0 \text{ per un assioma } \mathcal{D} \\
\frac{\rho : \Gamma \Rightarrow \Delta}{\rho + 1 : \Gamma' \Rightarrow \Delta'} \text{ per } \& - S, \vee - D, \Box - S, \Box - D, \forall - S \\
\frac{\rho : \Gamma, \alpha \Rightarrow \Delta \quad \rho' : \Gamma, \beta \Rightarrow \Delta}{\rho + \rho' + 1 : \Gamma, \alpha \vee \beta \Rightarrow \Delta} \quad \frac{\rho : \Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \quad \rho' : \Gamma, \beta \Rightarrow \Delta}{\rho + \rho' + 1 : \Gamma, \alpha \rightarrow \beta \Rightarrow \Delta} \\
\frac{\rho : \Gamma \alpha \Rightarrow \beta, \Delta}{\rho : \Gamma \Rightarrow \alpha \rightarrow \beta, \Delta} \quad \frac{\rho : \Gamma \Rightarrow \alpha[x/y], \forall x \alpha, \Delta}{\rho : \Gamma \Rightarrow \forall x \alpha, \Delta} \\
\frac{\rho : \Gamma \Rightarrow \alpha, \Delta \quad \rho' : \Gamma \Rightarrow \beta, \Delta}{\rho + \rho' : \Gamma \Rightarrow \alpha \& \beta, \Delta}
\end{array}$$

**Lemma 4.0.6** (*Lemma di inversione*). Si indichi con  $\vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta$  il fatto che esista una derivazione  $\mathcal{D}$  in **G3s** di  $\Gamma \Rightarrow \Delta$  con  $\rho(\mathcal{D}) \leq n$ , dove gli assiomi hanno solo formule principali atomiche. Allora

- i.  $\vdash_n \Gamma \Rightarrow \alpha \rightarrow \beta, \Delta$  se e solo se  $\vdash_n \Gamma, \alpha \Rightarrow \beta, \Delta$ ;
- ii.  $\vdash_n \Gamma \Rightarrow \alpha \& \beta, \Delta$  se e solo se  $\vdash_n \Gamma \Rightarrow \alpha, \Delta$  e  $\vdash_n \Gamma \Rightarrow \beta, \Delta$ ;
- iii.  $\vdash_n \Gamma \Rightarrow \forall x \alpha(x), \Delta$  se e solo se  $\vdash_n \Gamma \Rightarrow \alpha[x/y], \Delta$  ( $y$  non libera in  $\Gamma, \Delta, \forall x \alpha(x)$ ).

Da questo segue che una derivazione senza taglio  $\mathcal{D}$  di  $\Gamma \Rightarrow \Delta$  nel frammento  $\mathcal{F}$  si può assumere che consista di derivazioni di alcuni sequenti  $\Gamma_i \Rightarrow \Delta_i$  con tutte le formule in  $\Delta_i$  atomiche, disgiunzioni, quantificatori esistenziali o operatore modale, seguite solamente da applicazioni di  $\& - D, \rightarrow - D, \forall - D$ .

*Dimostrazione.* i. La dimostrazione procede per induzione su  $\rho(\mathcal{D})$ . Si supponga che esista una derivazione  $\mathcal{D}$  di  $\Gamma \Rightarrow \alpha \rightarrow \beta, \Delta$  tale che  $\rho(\mathcal{D}) = 0$ , ovvero per definizione di grado le uniche regole applicabili sono  $\& - D, \forall - D$  e  $\rightarrow - D$ . Se  $\mathcal{D}$  è un assioma, allora  $\alpha \rightarrow \beta$  non

è principale e  $\Gamma, \alpha \Rightarrow \beta, \Delta$  è un assioma. Se  $\mathcal{D}$  non è un assioma e  $\alpha \rightarrow \beta$  non è principale, allora la formula principale è del tipo o  $\text{fr}_1 \& \text{fr}_2$  o  $\forall x \text{fr}(x)$  o  $\text{fr}_1 \rightarrow \text{fr}_2$  in  $\Delta$  e  $\& - D, \forall - D$  e  $\rightarrow - D$ , sono le uniche regole applicabili quindi  $\mathcal{D}$  è una derivazione di  $\Gamma, \alpha \Rightarrow \beta, \Delta$ . Se, invece,  $\alpha \rightarrow \beta$  è principale, allora la derivazione  $\mathcal{D}$  termina con

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \mathcal{D}' \\ \vdots \\ \frac{\Gamma, \alpha \Rightarrow \beta, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \alpha \rightarrow \beta, \Delta} \rightarrow -D \end{array}$$

e la derivazione cercata è  $\mathcal{D}'$ . Si supponga vero per  $\rho(\mathcal{D}) \leq n$  e sia  $\mathcal{D}$  una derivazione di  $\Gamma \Rightarrow \alpha \rightarrow \beta, \Delta$  tale che  $\rho(\mathcal{D}) \leq n + 1$ . Procedendo come sopra, se  $\mathcal{D}$  è un assioma, allora  $\alpha \rightarrow \beta$  non è principale e  $\Gamma, \alpha \Rightarrow \beta, \Delta$  è un assioma. Se  $\mathcal{D}$  non è un assioma e  $\alpha \rightarrow \beta$  non è principale, se l'ultima regola applicata in  $\mathcal{D}$  è diversa da  $\rightarrow - D, \& - D, \forall - D$  applicando l'ipotesi induttiva alla premessa si ottiene una derivazione di  $\Gamma, \alpha \Rightarrow \beta, \Delta$ , altrimenti si applica lo stesso procedimento fino ad una regola diversa da  $\rightarrow - D, \& - D, \forall - D$  e si conclude per l'ipotesi induttiva. Se, invece,  $\alpha \rightarrow \beta$  è principale, allora la derivazione  $\mathcal{D}$  termina con

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \mathcal{D}' \\ \vdots \\ \frac{\Gamma, \alpha \Rightarrow \beta, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \alpha \rightarrow \beta, \Delta} \rightarrow -D \end{array}$$

e per concludere basta considerare la sotto-derivazione  $\mathcal{D}'$  della premessa. Viceversa, si supponga che esista una derivazione di  $\Gamma, \alpha \Rightarrow \beta, \Delta$  con  $\rho(\mathcal{D}) \leq n$ , allora vi è una derivazione  $\mathcal{D}'$  di  $\Gamma \Rightarrow \alpha \rightarrow \beta, \Delta$  che termina in questo modo

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \mathcal{D} \\ \vdots \\ \frac{\Gamma, \alpha \Rightarrow \beta, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \alpha \rightarrow \beta, \Delta} \rightarrow -D \end{array}$$

con  $\rho(\mathcal{D}') \leq n$  come richiesto.

- ii. La dimostrazione procede per induzione su  $\rho(\mathcal{D})$ . Si supponga che esista una derivazione  $\mathcal{D}$  di  $\Gamma \Rightarrow \alpha \& \beta, \Delta$  tale che  $\rho(\mathcal{D}) = 0$ , ovvero per definizione di grado le uniche regole applicabili sono  $\& - D, \forall - D$  e  $\rightarrow - D$ . Se  $\mathcal{D}$  è un assioma, allora  $\alpha \& \beta$  non è principale e  $\Gamma \Rightarrow \alpha, \Delta, \Gamma \Rightarrow \beta, \Delta$  sono assiomi. Se  $\mathcal{D}$  non è un assioma e  $\alpha \& \beta$  non è principale, allora la formula principale è del tipo o  $\text{fr}_1 \& \text{fr}_2$  o  $\forall x \text{fr}(x)$  o  $\text{fr}_1 \rightarrow \text{fr}_2$  in  $\Delta$  e  $\& - D, \forall - D$  e  $\rightarrow - D$ , sono le uniche regole applicabili quindi  $\mathcal{D}$  è una derivazione di  $\Gamma \Rightarrow \alpha, \Delta$  e di  $\Gamma \Rightarrow \beta, \Delta$ . Se, invece,  $\alpha \& \beta$  è principale, allora la derivazione  $\mathcal{D}$  termina con

$$\begin{array}{c} \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ \mathcal{D}' \quad \quad \quad \mathcal{D}'' \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ \frac{\Gamma \Rightarrow \alpha, \Delta \quad \Gamma \Rightarrow \beta, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \alpha \& \beta, \Delta} \& - D \end{array}$$

e per concludere basta considerare le sotto-derivazioni  $\mathcal{D}'$  e  $\mathcal{D}''$  delle premesse. Si supponga vero per  $\rho(\mathcal{D}) \leq n$  e sia  $\mathcal{D}$  una derivazione di  $\Gamma \Rightarrow \alpha \& \beta, \Delta$  tale che  $\rho(\mathcal{D}) \leq n+1$ . Procedendo come sopra, se  $\mathcal{D}$  è un assioma, allora  $\alpha \& \beta$  non è principale e  $\Gamma \Rightarrow \alpha, \Delta, \Gamma \Rightarrow \beta, \Delta$  sono assiomi. Se  $\mathcal{D}$  non è un assioma e  $\alpha \& \beta$  non è principale, se l'ultima regola applicata in  $\mathcal{D}$  è diversa da  $\rightarrow -D, \& - D, \forall - D$  applicando l'ipotesi induttiva alla premessa si ottengono due derivazioni di  $\Gamma \Rightarrow \alpha, \Delta, \Gamma \Rightarrow \beta, \Delta$ , altrimenti si applica lo stesso procedimento fino ad una regola diversa da  $\rightarrow -D, \& - D, \forall - D$  e si conclude per l'ipotesi induttiva. Se, invece,  $\alpha \& \beta$  è principale, allora la derivazione  $\mathcal{D}$  termina con

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \mathcal{D}' \\ \vdots \\ \frac{\Gamma \Rightarrow \alpha, \Delta \quad \Gamma \Rightarrow \beta, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \alpha \& \beta, \Delta} \& - D \end{array}$$

e per concludere basta considerare le sotto-derivazioni  $\mathcal{D}', \mathcal{D}''$  delle premesse. Viceversa, si supponga che esistano due derivazioni di  $\Gamma \Rightarrow \alpha, \Delta, \Gamma \Rightarrow \beta, \Delta$  con  $\rho(\mathcal{D}') \leq n, \rho(\mathcal{D}'') \leq n$ , allora vi è una derivazione  $\mathcal{D}$  di  $\Gamma \Rightarrow \alpha \& \beta, \Delta$  che termina in questo modo

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \mathcal{D}' \\ \vdots \\ \frac{\Gamma \Rightarrow \alpha, \Delta \quad \Gamma \Rightarrow \beta, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \alpha \& \beta, \Delta} \& - D \end{array}$$

con  $\rho(\mathcal{D}) \leq n$  come richiesto.

- iii. La dimostrazione procede per induzione su  $\rho(\mathcal{D})$ . Si supponga che esista una derivazione  $\mathcal{D}$  di  $\Gamma \Rightarrow \forall x \alpha(x), \Delta$  tale che  $\rho(\mathcal{D}) = 0$ , ovvero per definizione di grado le uniche regole applicabili sono  $\& - D, \forall - D$  e  $\rightarrow - D$ . Se  $\mathcal{D}$  è un assioma, allora  $\forall x \alpha(x)$  non è principale e  $\Gamma \Rightarrow \alpha[x/y], \Delta$  con  $y \notin VL(\Gamma, \Delta, \forall x \alpha(x))$  è un assioma. Se  $\mathcal{D}$  non è un assioma e  $\forall x \alpha(x)$  non è principale, allora la formula principale è del tipo o  $\text{fr}_1 \& \text{fr}_2$  o  $\forall x \text{fr}(x)$  o  $\text{fr}_1 \rightarrow \text{fr}_2$  in  $\Delta$  e  $\& - D, \forall - D$  e  $\rightarrow - D$ , sono le uniche regole applicabili quindi  $\mathcal{D}$  è una derivazione di  $\Gamma \Rightarrow \alpha[x/y], \Delta$  con  $y \notin VL(\Gamma, \Delta, \forall x \alpha(x))$ . Se, invece,  $\forall x \alpha(x)$  è principale, allora la derivazione  $\mathcal{D}$  termina con

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \mathcal{D}' \\ \vdots \\ \frac{\Gamma \Rightarrow \alpha[x/y], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \forall x \alpha(x), \Delta} \forall - D \quad y \notin VL(\Gamma, \Delta, \forall x \alpha(x)) \end{array}$$

e la derivazione cercata è  $\mathcal{D}'$ . Si supponga vero per  $\rho(\mathcal{D}) \leq n$  e sia  $\mathcal{D}$  una derivazione di  $\Gamma \Rightarrow \forall x \alpha(x), \Delta$  tale che  $\rho(\mathcal{D}) \leq n+1$ . Procedendo come sopra, se  $\mathcal{D}$  è un assioma, allora  $\forall x \alpha(x)$  non è principale e  $\Gamma \Rightarrow \alpha[x/y], \Delta$  è un assioma. Se  $\mathcal{D}$  non è un assioma e  $\forall x \alpha(x)$  non è principale, se l'ultima regola applicata in  $\mathcal{D}$  è diversa da  $\rightarrow -D, \& - D, \forall - D$  applicando l'ipotesi induttiva alla premessa si ottiene una derivazione di  $\Gamma \Rightarrow \alpha[x/y], \Delta$ , altrimenti si applica lo stesso procedimento fino ad una regola diversa da  $\rightarrow -D, \& - D, \forall - D$  e si

conclude per l'ipotesi induttiva. Se, invece,  $\forall x\alpha(x)$  è principale, allora la derivazione  $\mathcal{D}$  termina con

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \mathcal{D}' \\ \vdots \\ \frac{\Gamma \Rightarrow \alpha[x/y], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \forall x\alpha(x), \Delta} \forall - D \quad y \notin VL(\Gamma, \Delta, \forall x\alpha(x)) \end{array}$$

e per concludere basta considerare la sotto-derivazione  $\mathcal{D}'$  della premessa. Viceversa, si supponga che esista una derivazione di  $\Gamma \Rightarrow \alpha[x/y], \Delta$  con  $\rho(\mathcal{D}) \leq n$ , allora vi è una derivazione  $\mathcal{D}'$  di  $\Gamma \Rightarrow \forall x\alpha(x), \Delta$  che termina in questo modo

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \mathcal{D} \\ \vdots \\ \frac{\Gamma \Rightarrow \alpha[x/y], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \forall x\alpha(x), \Delta} \forall - D \quad y \notin VL(\Gamma, \Delta, \forall x\alpha(x)) \end{array}$$

con  $\rho(\mathcal{D}') \leq n$  come richiesto. ■

**Definizione 4.0.7.** Una formula  $fr$  si dice *primitiva* se  $fr$  è atomica o una disgiunzione o inizia con un quantificatore esistenziale.

**Lemma 4.0.8.** Sia  $\circ$  l'interpretazione descritta in (4.0.1). Si supponga di avere la derivazione di uno dei seguenti:

- a)  $\Box\Gamma^\circ, \Delta^\circ \Rightarrow \Box\Lambda^\circ$
- b)  $\Box\Gamma^\circ, \Delta^\circ \Rightarrow \Box\Lambda^\circ, \beta^\circ$  ( $\beta^\circ$  primitiva)

Allora esistono delle derivazioni in **G3s** di questi sequenti in cui qualsiasi sequente con più di una formula nel conseguente ha una delle due sequenti forme:

- i).  $\Box\Sigma^\circ, \Delta^\circ \Rightarrow \Box\Theta^\circ, \alpha^\circ$  con  $|\Theta| \geq 1$ ,  $\alpha^\circ$  primitiva
- ii).  $\Box\Sigma^\circ, \Delta^\circ \Rightarrow \Box\Theta^\circ$ , con  $|\Theta| \geq 2$

*Dimostrazione.* La dimostrazione procede per induzione sul grado  $\rho(\mathcal{D})$ . Se  $\rho(\mathcal{D}) = 0$ ,  $\mathcal{D}$  è necessariamente un assioma e il risultato è banale. Si supponga  $\rho(\mathcal{D}) > 0$ . Se un sequente del tipo a) è la conseguenza di una regola a destra, la regola deve essere  $\Box - D$ ; in questo caso  $\Delta = \emptyset$ ,  $|\Lambda| = 1$ , quindi la derivazione si conclude con

$$\frac{\Box\Gamma^\circ \Rightarrow \alpha^\circ}{\Box\Gamma^\circ \Rightarrow \Box\alpha^\circ} \Box - D$$

La premessa è ottenuta applicando  $\& - D$ ,  $\rightarrow - D$  e  $\forall - D$  dalle deduzioni  $\mathcal{D}_i$  di  $\Box\Gamma_i^\circ \Rightarrow \alpha_i^\circ$ ,  $\alpha_i^\circ$  primitiva e applicando, ora, l'ipotesi induttiva a  $\mathcal{D}_i$ . Se un sequente del tipo b) è la conclusione di una regola a destra, la regola deve essere  $\vee - D$  o  $\exists - D$ . Si consideri il caso in cui la regola è  $\vee - D$ . Allora l'ultima regola applicata è

$$\frac{\Box\Gamma^\circ \Rightarrow \Box\Lambda^\circ, \Box\beta_0^\circ, \Box\beta_1^\circ}{\Box\Gamma^\circ \Rightarrow \Box\Lambda^\circ, \Box\beta_0^\circ \vee \Box\beta_1^\circ} \vee - D$$

Adesso si può concludere applicando l'ipotesi induttiva alla premessa. Il ragionamento è analogo se l'ultima regola applicata è  $\exists - D$ . Ora si assuma che un sequente del tipo a) o b) sia ottenuto da una regola a sinistra, sia essa  $\rightarrow -S$ , allora si ha

$$\frac{\Delta^\circ, \Box\Gamma^\circ \Rightarrow \Box\alpha^\circ, \Box\Lambda^\circ \quad \Delta^\circ, \Box\Gamma^\circ, \beta^\circ \Rightarrow \Box\Lambda^\circ}{\Delta^\circ, \Box\Gamma^\circ, \Box\alpha^\circ \rightarrow \beta^\circ \Rightarrow \Box\Lambda^\circ} \rightarrow -S$$

Si conclude applicando l'ipotesi induttiva.

Il ragionamento è analogo se un sequente del tipo a) o b) è ottenuto da  $\& - S$ , infatti si ha

$$\frac{\alpha^\circ, \beta^\circ, \Delta^\circ, \Box\Gamma^\circ \Rightarrow \Box\Lambda^\circ}{\alpha^\circ \& \beta^\circ, \Delta^\circ, \Box\Gamma^\circ \Rightarrow \Box\Lambda^\circ} \& - S$$

e si applica l'ipotesi induttiva. Nel caso in cui un sequente del tipo a) o b) è ottenuto da  $\vee - S$ , si ha

$$\frac{\Delta^\circ, \Box\Gamma^\circ, \Box\alpha^\circ \Rightarrow \Box\Lambda^\circ \quad \Delta^\circ, \Box\Gamma^\circ, \Box\beta^\circ \Rightarrow \Box\Lambda^\circ}{\Delta^\circ, \Box\Gamma^\circ, \Box\alpha^\circ \vee \Box\beta^\circ \Rightarrow \Box\Lambda^\circ} \vee - S$$

e nuovamente si conclude applicando l'ipotesi induttiva. Se il sequente del tipo a) o b) è ottenuto da  $\Box - S$ , si ha

$$\frac{\Delta^\circ, \alpha^\circ, \Box\alpha^\circ \Rightarrow \Box\Lambda^\circ}{\Delta^\circ, \Box\alpha^\circ \Rightarrow \Box\Lambda^\circ} \Box - S$$

e si applica l'ipotesi induttiva. Se il sequente del tipo a) o b) è ottenuto da  $\forall - S$ , si ha

$$\frac{\forall x \alpha^\circ(x), \alpha^\circ(t), \Delta^\circ, \Box\Gamma^\circ \Rightarrow \Box\Lambda^\circ}{\forall x \alpha^\circ(x), \Delta^\circ, \Box\Gamma^\circ \Rightarrow \Box\Lambda^\circ} \forall - S$$

e si termina per ipotesi induttiva. Infine, se il sequente del tipo a) o b) è ottenuto da  $\exists - S$ , si ha

$$\frac{\Delta^\circ, \Box\Gamma^\circ, \Box\alpha^\circ(y) \Rightarrow \Box\Lambda^\circ}{\Delta^\circ, \Box\Gamma^\circ, \exists x \Box\alpha^\circ(x) \Rightarrow \Box\Lambda^\circ} \exists - S$$

dove ( $y \notin \text{VL}(\Delta^\circ, \Box\Gamma^\circ, \exists x \Box\alpha^\circ(x), \Box\Lambda^\circ)$ ) e si conclude con l'ipotesi induttiva. ■

**Definizione 4.0.9.** Siano a), b), *i*), *ii*) come nel lemma precedente. Si dicono derivazioni *standard* le derivazioni senza taglio che terminano con sequenti del tipo a) o b) e ogni sequente che ha più di una formula nel conseguente è del tipo *i*) o *ii*).

**Lemma 4.0.10.** Se  $\mathbf{G3s} \vdash \Box\Gamma^\circ \Rightarrow \text{fr}^\circ$ , allora esiste una derivazione senza taglio tale che tutte le sue applicazioni di  $\rightarrow -D, \forall - D$  hanno al massimo una formula nel conseguente.

*Dimostrazione.* Per il lemma di inversione,  $\Box\Gamma^\circ \Rightarrow \text{fr}^\circ$  può essere ottenuto da delle deduzioni  $\mathcal{D}_i$  di  $\Box\Gamma_i^\circ \Rightarrow \text{fr}_i^\circ$  con  $\text{fr}_i^\circ$  primitiva, usando solo  $\rightarrow -D, \& - D, \forall - D$  e per il lemma precedente le  $\mathcal{D}_i$  si possono assumere standard. Dunque, se vi è un'applicazione di  $\rightarrow -D$  o  $\forall - D$  con più di una formula nel conseguente della conclusione, per quanto affermato dal lemma precedente, la conclusione deve avere una di queste forme *i*), *ii*), cosa che è ovviamente impossibile. ■

**Teorema 4.0.11** (Conservatività dell'interpretazione modale).

$$\mathbf{G3s} \vdash \Box\Gamma^\circ \Rightarrow \text{fr}^\circ \text{ se e solo se } \mathbf{G3s} \vdash \Gamma^\square \Rightarrow \text{fr}^\square \text{ se e solo se } \mathbf{LI}_p \vdash \bigwedge \Gamma \rightarrow \text{fr}.$$



*Dimostrazione.* La prima equivalenza è già stata verificata, quindi è sufficiente mostrare che se  $\Box\Gamma^\circ \Rightarrow \text{fr}^\circ$  allora  $\mathbf{LI}_p \vdash \bigwedge \Gamma \rightarrow \text{fr}$  (si indica con  $\mathbf{LI}_p$  la logica intuizionista proposizionale, (E)). Infatti, eliminate tutte le modalità in una derivazione standard di  $\Box\Gamma^\circ \Rightarrow \text{fr}^\circ$ , si trova una derivazione in un calcolo dei sequenti classico nel quale tutte le applicazioni di  $\rightarrow -D$  e  $\forall - D$  hanno una formula nel conseguente, è facile vedere che allora tutti i sequenti derivabili sono intuizionisticamente validi, verificando che, ogni volta che  $\Gamma \Rightarrow \Delta$  si presenta in tale deduzione, allora  $\Gamma \Rightarrow \bigvee \Delta$  è dimostrabile in  $\mathbf{LI}_p$ . Considerando le seguenti tautologie intuizioniste:

$$(A \vee B) \vee C \Rightarrow A \vee (B \vee C)$$

$$A \vee (B \vee C) \Rightarrow (A \vee B) \vee C$$

$$A \vee B \Rightarrow B \vee A$$

è possibile trascurare le parentesi e l'ordine delle formule in  $\Gamma \Rightarrow \bigvee \Delta$ . La dimostrazione procede per induzione sulla profondità delle deduzioni in  $\mathbf{G3s}$  di  $\Gamma \Rightarrow \Delta$ . Sia  $\pi$  una tale derivazione di profondità  $n$ . Se  $n = 0$ , allora il sequente  $\Gamma \Rightarrow \Delta$  è un assioma identità oppure un assioma del  $\perp$ . Se  $\Gamma \Rightarrow \Delta$  è un assioma identità allora  $\Gamma \equiv \Gamma_1, \text{fr}, \Gamma_2$  e  $\Delta \equiv \Delta_1, \text{fr}, \Delta_2$  e quindi si ottiene il sequente

$$\Gamma_1, \text{fr}, \Gamma_2 \Rightarrow \bigvee \Delta_1 \vee \text{fr} \vee \bigvee \Delta_2$$

che risulta derivabile in  $\mathbf{LI}_p$ . Se  $\Gamma \Rightarrow \Delta$  è, invece, un assioma del  $\perp$  allora  $\Gamma \equiv \perp, \Gamma_1$  e dunque pure il sequente

$$\perp, \Gamma_1 \Rightarrow \bigvee \Delta$$

è un assioma del  $\perp$ . Se, invece,  $n \geq 1$ , allora esiste una derivazione

$$\frac{\pi}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$$

di profondità  $n$  che termina con l'applicazione di una regola del calcolo avente delle premesse. Per dimostrare la tesi si andranno ad analizzare le varie possibilità con cui la derivazione può concludersi.

*Caso ultima regola  $\& - D$*  la derivazione termina con

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \beta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \& \beta} \& - D$$

$D$  indichi  $\bigvee \Delta$ . Per ipotesi induttiva, si ha che  $\mathbf{LI}_p \vdash \Gamma \Rightarrow D \vee \alpha$  e  $\mathbf{LI}_p \vdash \Gamma \Rightarrow D \vee \beta$ . Dunque, risulta che  $\mathbf{LI}_p \vdash \Gamma \Rightarrow (D \vee \alpha) \& (D \vee \beta)$ . Dato che  $\mathbf{LI}_p \vdash (D \vee \alpha) \& (D \vee \beta) \Rightarrow D \vee (\alpha \& \beta)$  e si conclude con la regola di composizione. Infatti, si ha questa derivazione,  $\mathcal{D}$ ,

$$\frac{\frac{\mathcal{D}'}{D \vee \alpha, D \Rightarrow D \vee (\alpha \& \beta)} \quad \frac{\mathcal{D}''}{D \vee \alpha, \beta \Rightarrow D \vee (\alpha \& \beta)}}{D \vee \alpha, D \vee \beta \Rightarrow D \vee (\alpha \& \beta)} \vee -S}{(D \vee \alpha) \& (D \vee \beta) \Rightarrow D \vee (\alpha \& \beta)} \& - S$$

dove  $\mathcal{D}'$  è la seguente derivazione

$$\frac{\frac{ax - id}{D, D \Rightarrow D} \vee -D_1 \quad \frac{ax - id}{D, \alpha \Rightarrow D} \vee -D_1}{D, D \vee \alpha \Rightarrow D \vee (\alpha \& \beta)} \vee -S}{D \vee \alpha, D \Rightarrow D \vee (\alpha \& \beta)} \text{sc}_{sx}$$

e  $\mathcal{D}''$  è la seguente derivazione

$$\frac{\frac{\frac{ax - id}{\beta, D \Rightarrow D} \vee -D_1 \quad \frac{\frac{ax - id}{\beta, \alpha \Rightarrow \alpha} \quad \frac{ax - id}{\beta, \alpha \Rightarrow \beta} \& - D}{\beta, \alpha \Rightarrow \alpha \& \beta} \vee -D_2}{\beta, D \vee \alpha \Rightarrow D \vee (\alpha \& \beta)} \vee -S}{D \vee \alpha, \beta \Rightarrow D \vee (\alpha \& \beta)} \text{sc}_{sx}$$

Si conclude, dunque, grazie alla seguente

$$\frac{\frac{ii}{\Gamma \Rightarrow (D \vee \alpha) \& (D \vee \beta)} \quad \frac{\mathcal{D}}{(D \vee \alpha) \& (D \vee \beta) \Rightarrow D \vee (\alpha \& \beta)}}{\Gamma \Rightarrow D \vee (\alpha \& \beta)} \text{Cuts}$$

*Caso ultima regola & - S* la derivazione termina con

$$\frac{\alpha, \beta, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\alpha \& \beta, \Gamma \Rightarrow \Delta} \& - S$$

e quindi poichè per ipotesi induttiva si ha che  $\mathbf{LI}_p \vdash \alpha, \beta, \Gamma \Rightarrow \vee \Delta$  si ottiene la tesi, ovvero che  $\mathbf{LI}_p \vdash \alpha \& \beta, \Gamma \Rightarrow \vee \Delta$ , applicando la regola & - S.

*Caso ultima regola \vee - D* la derivazione termina con

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha, \beta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \vee \beta} \vee -D$$

Si ha per ipotesi induttiva che  $\mathbf{LI}_p \vdash \vee \Delta \vee (\alpha \vee \beta)$  da cui si conclude immediatamente.

*Caso ultima regola \vee - S* la derivazione finisce con

$$\frac{\alpha, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad \beta, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\alpha \vee \beta, \Gamma \Rightarrow \Delta} \vee -S$$

e, come nel caso di & - S, si termina immediatamente grazie alle ipotesi induttive, infatti si ha per ipotesi induttiva che  $\mathbf{LI}_p \vdash \alpha, \Gamma \Rightarrow \vee \Delta$  e che  $\mathbf{LI}_p \vdash \beta, \Gamma \Rightarrow \vee \Delta$  e quindi  $\mathbf{LI}_p \vdash \alpha \vee \beta, \Gamma \Rightarrow \vee \Delta$ .

*Caso ultima regola \rightarrow -D* la derivazione termina con

$$\frac{\alpha, \Gamma \Rightarrow \beta}{\Gamma \Rightarrow \alpha \rightarrow \beta} \rightarrow -D$$

si ricorda che per ipotesi il conseguente della conclusione contiene una sola formula e dunque per ipotesi induttiva si ha che  $\mathbf{LI}_p \vdash \alpha, \Gamma \Rightarrow \beta$  da cui si conclude facilmente che  $\mathbf{LI}_p \vdash \Gamma \Rightarrow \alpha \rightarrow \beta$ .

*Caso ultima regola \rightarrow -S*

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \quad \beta, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\alpha \rightarrow \beta, \Gamma \Rightarrow \Delta} \rightarrow -S$$

Per ipotesi induttiva si ha una derivazione  $D'$  di  $\Gamma \Rightarrow D \vee \alpha$  e una derivazione  $D''$  di  $\Gamma, \beta \Rightarrow D$ . Si ottiene la tesi richiesta con la seguente derivazione:

$$\frac{\frac{\frac{D'}{\Gamma \Rightarrow D \vee \alpha} \quad \frac{ax - id}{\alpha \rightarrow \beta, \Gamma, D \Rightarrow D}}{\alpha \rightarrow \beta, \Gamma, D \vee \alpha \rightarrow D} \vee -S \quad \frac{\frac{\frac{ax - id}{\alpha, \Gamma, \alpha \rightarrow \beta \Rightarrow \alpha} \quad \frac{\mathcal{D}''}{\Gamma, \beta \Rightarrow D}}{\alpha, \Gamma, \beta \Rightarrow D} \text{in}_{sx}}{\alpha, \Gamma, \alpha \rightarrow \beta \Rightarrow D} \rightarrow -S}{\alpha \rightarrow \beta, \Gamma, \alpha \Rightarrow D} \text{sc}_{sx}}{\alpha \rightarrow \beta, \Gamma, D \vee \alpha \rightarrow D} \vee -S \quad \frac{\frac{\alpha \rightarrow \beta, \Gamma, D \vee \alpha \rightarrow D}{\alpha \rightarrow \beta, D \vee \alpha, \Gamma \rightarrow D} \text{sc}_{sx}}{\alpha \rightarrow \beta, \Gamma, \Gamma \Rightarrow D} \text{Cuts}}{\alpha \rightarrow \beta, \Gamma \Rightarrow D} \text{cn}_{sx}$$





## Capitolo 5

# Cenni sulla semantica di S4

Si introducono sia la semantica di Kripke sia la semantica algebrica per la logica modale **S4**, al fine di mostrare che l'interpretazione della logica intuizionista in **S4** composta con la traduzione della doppia negazione di Gödel-Gentzen non coincide con l'immersione della logica classica in **S4**.

### 5.1 Semantica di Kripke

Per lo sviluppo di questa sezione ci si è basati, in particolare, sui seguenti testi [4], [5], [7], [10].

#### 5.1.1 Semantica di Kripke

La semantica di Kripke o semantica relazionale fu presentata da Saul Kripke alla fine degli anni '50 per la logica modale **S5** e successivamente estesa alle altre logiche modali e alla logica intuizionista. Questa semantica si basa sulle strutture di Kripke e su di un'interpretazione in esse delle formule.

**Definizione 5.1.1.** Una *struttura di Kripke* è una coppia  $\langle W, R \rangle$  dove  $W$  è un insieme non vuoto e  $R$  è una relazione binaria su  $W$ , in simboli  $R \subseteq W \times W$ .  $W$  è definito come l'*insieme dei mondi possibili* e  $R$  è la *relazione di accessibilità* tra i mondi.

L'idea alla base è che una proposizione è necessaria se e solo se è vera in ogni mondo possibile. Un modello di Kripke è una struttura con una valutazione  $\nu$  che definisce la validità delle formule date. Una valutazione  $\nu$  mappa dall'insieme delle variabili proposizionali a  $\mathcal{P}(W)$ . Ogni valutazione  $\nu$  determina univocamente una relazione binaria  $\Vdash$ , detta relazione di soddisfazione o forcing, che è definita induttivamente come segue:

- $w \Vdash p$  se e solo se  $w \in \nu(p)$  per ogni variabile proposizionale  $p$ ;
- $w \Vdash \alpha \vee \beta$  se e solo se  $w \Vdash \alpha$  o  $w \Vdash \beta$ ;
- $w \Vdash \alpha \wedge \beta$  se e solo se  $w \Vdash \alpha$  e  $w \Vdash \beta$ ;
- $w \Vdash \alpha \rightarrow \beta$  se e solo se da  $w \Vdash \alpha$  segue  $w \Vdash \beta$ ;
- $w \not\Vdash \perp$ .

Una formula  $\alpha$  si dice vera nel mondo  $w$  se si ha  $w \Vdash \alpha$ . Se  $w \not\Vdash \alpha$  allora  $w \Vdash \neg\alpha$ . Per ogni formula  $\phi$ , sia  $\nu(\phi) = \{w \in W : w \Vdash \phi\}$ .

**Definizione 5.1.2.** Un *modello di Kripke* è una terna  $\langle W, R, \nu \rangle$  tale che  $\langle W, R \rangle$  è una struttura di Kripke e  $\nu$  una valutazione in essa.

Una formula  $\phi$  è vera in  $\langle W, R, \nu \rangle$  se  $w \Vdash \phi$  per ogni  $w \in W$ ; quindi  $\phi$  è vera in  $\langle W, R, \nu \rangle$  se e solo se  $\nu(\phi) = W$ . Data una struttura di Kripke si dice che una formula  $\phi$  è valida in  $W$  se per ogni valutazione  $w \Vdash \phi$  per ogni mondo  $w$  in  $W$ .

L'idea centrale della semantica di Kripke per la logica modale è che una formula del tipo  $\Box\alpha$  è vera nel mondo  $w$  se  $\alpha$  è vera in tutti i mondi accessibili da  $w$  attraverso la relazione  $R$ .

Allo schema induttivo precedente si aggiunge:

- $w \Vdash \Box\alpha$  se e solo se  $u \Vdash \alpha$  per ogni  $u$  tale che  $wRu$ .

A seconda delle proprietà soddisfatte dalla relazione di accessibilità risultano valide certe formule, per esempio affinché siano validi gli assiomi caratterizzanti la logica modale **S4** è necessario assumere  $R$  riflessiva e transitiva, sia indicata con  $\preceq$  una tale  $R$ .

L'assioma-K,  $\Box(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\Box\alpha \rightarrow \Box\beta)$  è valido in ogni struttura. Sia, infatti,  $w$  un mondo fissato tale che  $w \Vdash \Box(\alpha \rightarrow \beta)$ , allora per ogni  $u$  tale che  $w \preceq u$  vale  $u \Vdash \alpha \rightarrow \beta$ . Supposto che  $w \Vdash \Box\alpha$ , allora per ogni  $u$  tale che  $w \preceq u$   $u \Vdash \alpha$ , quindi  $u \Vdash \beta$ , dunque  $w \Vdash \Box\beta$ .

La proprietà riflessiva in  $\preceq$  permette di avere l'assioma-T, ovvero  $w \Vdash \Box\alpha \rightarrow \alpha$  per ogni mondo  $w$ . Supposto, infatti, che  $w \Vdash \Box\alpha$ , allora  $u \Vdash \alpha$  per ogni mondo  $u$  accessibile da  $w$  e per la proprietà riflessiva  $w \Vdash \alpha$ . Dunque,  $w \Vdash \Box\alpha \rightarrow \alpha$ . D'altra parte, se in una struttura risulta valido  $\Box\alpha \rightarrow \alpha$  allora la relazione deve essere riflessiva. Sia  $w$  un mondo in questa struttura e supponiamo che non valga  $w \preceq w$ . Allora con la valutazione  $\nu(\alpha) = \{u \in W : w \preceq u\}$  si ha che  $w \Vdash \Box\alpha$ , ma  $w \not\Vdash \alpha$ .

Analogamente, la proprietà transitiva permette che valga l'assioma-4,  $\Box\alpha \rightarrow \Box\Box\alpha$ , e se risulta valido in una struttura allora la relazione dev'essere transitiva. Sia  $w \Vdash \Box\alpha$ . Fissato  $v$  tale che  $w \preceq v$ , per ogni  $u$  tale che  $v \preceq u$  si ha per la transitività che  $w \preceq u$  e quindi  $u \Vdash \alpha$ . Allora per ogni  $v$  tale che  $w \preceq v$   $v \Vdash \Box\alpha$  e si ottiene che  $w \Vdash \Box\Box\alpha$ . Viceversa, si supponga che l'assioma-4 valga, fissato  $w \in W$ , sia  $\alpha$  soddisfatto in  $u$  se e solo se  $w \preceq u$ , allora  $w \Vdash \Box\alpha$  e quindi per ipotesi  $w \Vdash \Box\Box\alpha$ . Allora, visto che  $w \preceq u$ ,  $u \Vdash \Box\alpha$  e si conclude, dato che per ogni  $v$  tale che  $u \preceq v$   $v \Vdash \alpha$ , quindi  $w \preceq v$ , ovvero  $\preceq$  è transitiva.

Per quanto riguarda il caso predicativo, ad ogni mondo  $w$  si associa una struttura di dominio  $D_w$ , non vuoto, in cui interpretare le costanti, le funzioni ed i predicati del linguaggio. I domini sono crescenti, ovvero se  $w \preceq u$  allora  $D_w \subseteq D_u$ .

Si aggiungono allo schema induttivo le seguenti:

- $w \Vdash \exists x\phi(x)$  se e solo se esiste un  $a \in D_w$  tale che  $w \Vdash \phi(a)$ ;
- $w \Vdash \forall x\phi(x)$  se e solo se per ogni  $w \preceq u$  e per ogni  $a \in D_u$   $u \Vdash \phi(a)$ .

Un modello di Kripke per la logica intuizionista è una terna  $\langle W, \leq, \nu \rangle$  dove  $\langle W, \leq \rangle$  è una struttura di Kripke, un insieme parzialmente ordinato. La valutazione  $\nu$  per una data struttura di Kripke deve essere una mappa, ma nel caso della logica intuizionista  $\nu(p)$  deve essere un sistema chiuso superiormente per ogni variabile proposizionale  $p$ . Ogni valutazione  $\nu$  determina una relazione binaria  $\Vdash$  tra l'insieme dei mondi e l'insieme delle formule ed è definita in questo modo:

- $w \not\Vdash \perp$ ;
- $w \Vdash p$  se e solo se per ogni  $u$  tale che  $w \leq u$   $u \Vdash p$ ;

- $w \Vdash \alpha \vee \beta$  se e solo se  $w \Vdash \alpha$  o  $w \Vdash \beta$ ;
- $w \Vdash \alpha \wedge \beta$  se e solo se  $w \Vdash \alpha$  e  $w \Vdash \beta$ ;
- $w \Vdash \alpha \rightarrow \beta$  se e solo se per ogni  $u$  tale che  $w \leq u$  se  $u \Vdash \alpha$  allora  $u \Vdash \beta$ .

Per la logica predicativa si aggiunge per ogni mondo  $w \in W$  un dominio  $D_w$ , non vuoto, tale che se  $w \leq u$  allora  $D_w \subseteq D_u$  e le seguenti due condizioni:

- $w \Vdash \exists x\phi(x)$  se e solo se esiste un  $a \in D_w$  tale che  $w \Vdash \phi(a)$ ;
- $w \Vdash \forall x\phi(x)$  se e solo se per ogni  $u \geq w$  e per ogni  $a \in D_u$   $u \Vdash \phi(a)$ .

Infine valgono queste proprietà:

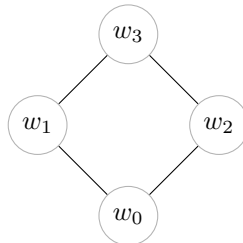
1.  $w \Vdash \neg\phi \iff$  per ogni  $u \geq w$   $u \not\Vdash \phi$ ;
2.  $w \Vdash \neg\neg\phi \iff$  per ogni  $u \geq w$  esiste  $v \geq u$  tale che  $v \Vdash \phi$ ;
3.  $w \leq u, w \Vdash \phi \Rightarrow u \Vdash \phi$  Monotonia di  $\Vdash$ .

*Dimostrazione.* Per provarlo si procede per induzione sulla definizione della formula  $\phi$ .

- caso  $\phi$  atomica allora se  $w \Vdash \phi$  e  $w \leq u$  si ha  $u \Vdash \phi$  per definizione;
- caso  $\phi \equiv (\alpha \wedge \beta)$ , sia  $w \Vdash \alpha \wedge \beta$  e  $w \leq u$ , allora  $w \Vdash \alpha \wedge \beta$  se e solo se  $w \Vdash \alpha$  e  $w \Vdash \beta$ , dunque per ipotesi induttiva  $u \Vdash \alpha$  e  $u \Vdash \beta$  se e solo se  $u \Vdash \alpha \wedge \beta$ ;
- caso  $\phi \equiv (\alpha \vee \beta)$ , sia  $w \Vdash \alpha \vee \beta$  e  $w \leq u$ , allora  $w \Vdash \alpha \vee \beta$  se e solo se  $w \Vdash \alpha$  o  $w \Vdash \beta$ , dunque per ipotesi induttiva  $u \Vdash \alpha$  o  $u \Vdash \beta$  se e solo se  $u \Vdash \alpha \vee \beta$ ;
- caso  $\phi \equiv (\alpha \rightarrow \beta)$ ,  $w \Vdash \alpha \rightarrow \beta$  e  $w \leq u$ . Sia  $u \leq v$  e  $v \Vdash \alpha$ , allora dato che  $w \leq v$ ,  $v \Vdash \beta$ . Quindi,  $u \Vdash \alpha \rightarrow \beta$ ;
- caso  $\phi \equiv \exists x\psi(x)$ , sia  $w \Vdash \exists x\psi(x)$  e  $w \leq u$ , allora esiste un  $a \in D_w$  tale che  $w \Vdash \psi(a)$ , essendo i domini crescenti  $a \in D_u$ , per ipotesi induttiva  $u \Vdash \psi(a)$ , quindi  $u \Vdash \exists x\psi(x)$  e si conclude;
- $\phi \equiv \forall x\psi(x)$ , sia  $w \Vdash \forall x\psi(x)$  e  $w \leq u$ . Supposto che  $u \leq v$  e  $a \in D_v$ , allora, dato che  $w \leq v$ ,  $v \Vdash \psi(a)$ . Quindi,  $u \Vdash \forall x\psi(x)$ .

■

Il teorema di validità e completezza per la semantica di Kripke è presentato e dimostrato in [5]. Graficamente le relazioni tra i nodi o mondi possono essere rappresentate con un albero, si mostra un esempio grafico dove risulta non soddisfatta una formula vera classicamente.



Non si conoscono atomi del nodo inferiore,  $w_0$ , il nodo  $w_1 \Vdash \phi$ , il nodo  $w_2 \Vdash \phi, \psi$  ed il nodo  $w_3 \Vdash \phi, \psi$ . Si vede che  $w_0$  soddisfa  $\psi \rightarrow \phi$ , infatti per ogni  $w_i$  tale che  $w_0 \leq w_i$  si ha che se  $w_i \Vdash \psi$  allora  $w_i \Vdash \phi$ . Non risulta, invece,  $w_0 \Vdash \neg\psi \vee \phi$ , infatti, per definizione si avrebbe  $w_0 \Vdash \neg\psi$  o  $w_0 \Vdash \phi$ , se  $w_0 \Vdash \neg\psi$  allora in particolare per ogni nodo  $w_i$  tale che  $w_0 \leq w_i$   $w_i \not\Vdash \psi$ , ma per esempio si ha che  $w_2 \Vdash \psi$ , quindi dev'essere  $w_0 \Vdash \phi$ , nuovamente per definizione per ogni nodo  $w_0 \leq w_i$   $w_i \Vdash \phi$ , ma la relazione  $\leq$  è un preordine e quindi è riflessiva e  $w_0 \not\Vdash \phi$ . In conclusione, non è soddisfatta la seguente tautologia classica  $(\psi \rightarrow \phi) \rightarrow (\neg\psi \vee \phi)$ .

### 5.1.2 Completezza di S4p

Per provare la completezza di **S4p**, il frammento proposizionale di **S4**, si può utilizzare il modello canonico, ovvero un modello in cui  $\alpha$ , fbf, è valida in esso se e solo se **S4p**  $\vdash \alpha$ . Questo procedimento è sufficiente per dare la completezza, ma non necessario. Si consideri  $\mathcal{C}$  una classe di strutture. **S4p** è completa rispetto a  $\mathcal{C}$  se ogni fbf  $\alpha$   $\mathcal{C}$ -valida è un teorema di **S4p**, dove una fbf  $\mathcal{C}$ -valida è una fbf valida in ogni struttura di  $\mathcal{C}$ . La connessione tra modello canonico e completezza si può spiegare come segue: si supponga di avere una classe  $\mathcal{C}$  di strutture e di voler mostrare che una fbf  $\alpha$  del sistema **S** è  $\mathcal{C}$ -valida se e solo se **S**  $\vdash \alpha$ . Bisogna, allora, mostrare che ogni teorema di **S** è  $\mathcal{C}$ -valido e questo segue dimostrando che gli assiomi sono  $\mathcal{C}$ -validi. Se si stabilisce che la struttura del modello canonico di **S** è in  $\mathcal{C}$ , allora se  $\alpha$  è  $\mathcal{C}$ -valida allora  $\alpha$  sarà valida nella struttura del modello canonico per **S** e quindi valida anche nel modello canonico stesso, ovvero **S**  $\vdash \alpha$ . Dunque, se  $\alpha$  è  $\mathcal{C}$ -valida allora **S**  $\vdash \alpha$ , ovvero **S** è completo rispetto a  $\mathcal{C}$ . Prima di presentare la definizione di modello canonico vengono dati alcuni risultati alla base della sua costruzione. La trattazione segue quella presentata in [4].

**Definizione 5.1.3.** Sia  $\Lambda$  un insieme di fbf di un sistema modale **S**,  $\Lambda$  si dice **S-inconsistente** se e solo se esistono  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \Lambda$  tali che

$$\mathbf{S} \vdash \neg(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n)$$

$\Lambda$  si dice **S-consistente** se non è **S-inconsistente**.

**Definizione 5.1.4.** Un insieme  $\Gamma$  di fbf si dice *massimale* se e solo se per ogni fbf  $\alpha$  o  $\neg\alpha$  appartengono a  $\Gamma$ .

**Definizione 5.1.5.** Un insieme  $\Gamma$  si dice *consistente massimale* rispetto a un sistema **S** se e solo se è sia massimale sia **S-consistente**.

**Lemma 5.1.6.** Sia  $\Gamma$  un insieme consistente massimale di fbf rispetto a **S**. Allora

1. per ogni fbf  $\alpha$  esattamente un elemento di  $\{\alpha, \neg\alpha\}$  è in  $\Gamma$ ;
2.  $\alpha \vee \beta \in \Gamma$  se e solo se o  $\alpha \in \Gamma$  o  $\beta \in \Gamma$ ;
3.  $\alpha \wedge \beta \in \Gamma$  se e solo se  $\alpha \in \Gamma$  e  $\beta \in \Gamma$ ;
4.  $\alpha \in \Gamma$  e  $\alpha \rightarrow \beta \in \Gamma$  allora  $\beta \in \Gamma$ .

*Dimostrazione.* 1. segue dal fatto che  $\Gamma$  sia consistente e massimale.

2. Si supponga che  $\alpha \vee \beta \in \Gamma$ , ma che nè  $\alpha$  nè  $\beta$  lo siano, allora per il punto precedente sia  $\neg\alpha$  sia  $\neg\beta$  sono in  $\Gamma$  e quindi  $\{\neg\alpha, \neg\beta, \alpha \vee \beta\}$  è un sottoinsieme di  $\Gamma$ , ma allora  $\Gamma$  è **S-inconsistente**, poichè si ha

$$\mathbf{S} \vdash \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta \wedge (\alpha \vee \beta)).$$



Si supponga ora che una tra  $\alpha$  e  $\beta$  sia in  $\Gamma$ , sia essa  $\alpha$ , ma che  $\alpha \vee \beta \notin \Gamma$ . Allora  $\{\alpha, \neg(\alpha \vee \beta)\}$  è un sottoinsieme di  $\Gamma$  e dunque  $\Gamma$  risulta essere **S**-inconsistente in quanto

$$\mathbf{S} \vdash \neg(\alpha \wedge \neg(\alpha \vee \beta)).$$

3. La dimostrazione è analoga al punto precedente considerando  $\alpha \wedge \beta \equiv \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$ .

4. Vale, poiché se  $\alpha \in \Gamma$  e  $\alpha \rightarrow \beta \in \Gamma$ , ma  $\beta \notin \Gamma$ , allora  $\{\alpha, \alpha \rightarrow \beta, \neg\beta\}$  è un sottoinsieme di  $\Gamma$  che rende  $\Gamma$  **S**-inconsistente, in quanto

$$\mathbf{S} \vdash \neg(\alpha \wedge (\alpha \rightarrow \beta) \wedge \neg\beta).$$

■

**Lemma 5.1.7.** *Sia  $\Gamma$  un insieme consistente massimale di fbf rispetto a un sistema **S**. Allora*

- se  $\mathbf{S} \vdash \alpha$  allora  $\alpha \in \Gamma$ ;
- se  $\alpha \in \Gamma$  e  $\mathbf{S} \vdash \alpha \rightarrow \beta$  allora  $\beta \in \Gamma$ .

*Dimostrazione.* Per il primo punto se  $\mathbf{S} \vdash \alpha$ , allora  $\{\neg\alpha\}$  è **S**-inconsistente, allora  $\neg\alpha \notin \Gamma$  e  $\alpha \in \Gamma$ . Il secondo punto segue direttamente dal primo punto e dall'ultimo del lemma 5.1.6. ■

Il modello canonico di **S4p** è costruito in modo tale che i mondi del modello siano insiemi consistenti massimali di fbf di **S4p**. Il lemma 5.1.7 garantisce che se per un sistema **S** si ha  $\mathbf{S} \vdash \alpha$  allora  $\alpha$  è in ogni insieme consistente massimale di fbf. Il modello canonico è, però, caratterizzato dal *se e solo se*, ovvero se  $\alpha$  non è un teorema di **S** allora dovrebbe esserci un insieme  $\Gamma$  consistente massimale tale che  $\alpha \notin \Gamma$ . Il seguente teorema garantisce che ogni insieme  $\Lambda$  **S**-consistente può essere esteso ad un insieme  $\Gamma$  consistente massimale, per la dimostrazione si rimanda a [4]. Quindi, se  $\{\neg\alpha\}$  è **S**-consistente esiste un insieme  $\Gamma$  consistente massimale tale che  $\neg\alpha \in \Gamma$  e, per il primo punto del lemma 5.1.6,  $\alpha \notin \Gamma$ .

**Teorema 5.1.8.** *Sia  $\Lambda$  un insieme **S**-consistente di fbf rispetto ad un sistema **S**, allora esiste un insieme  $\Gamma$  consistente massimale di fbf tale che  $\Lambda \subseteq \Gamma$ .*

Se il sistema **S** è un sistema modale è necessario considerare anche le proprietà modali, in particolare bisogna specificare quando in un modello, i cui mondi sono insiemi consistenti massimali di fbf, un mondo è accessibile da un altro. Si definisce  $\Gamma R \Delta$  se e solo se per ogni fbf  $\beta$ , se  $\Box\beta \in \Gamma$ , allora  $\beta \in \Delta$ . Sia  $\Lambda$  un insieme di fbf di una logica modale, si introduce la seguente notazione

$$\Box^-(\Lambda) = \{\beta : \Box\beta \in \Lambda\}$$

dunque si scrive  $\Gamma R \Delta$  se e solo se  $\Box^-(\Gamma) \subseteq \Delta$ .

**Lemma 5.1.9.** *Sia **S** un sistema normale di una logica modale proposizionale (ovvero vale l'assioma-K) e sia  $\Lambda$  un insieme **S**-consistente di fbf contenente  $\neg\Box\alpha$ . Allora  $\Box^-(\Lambda) \cup \{\neg\alpha\}$  è **S**-consistente.*

*Dimostrazione.* La dimostrazione procede mostrando che se  $\Box^-(\Lambda) \cup \{\neg\alpha\}$  è non consistente, allora nemmeno  $\Lambda$  lo è. Si supponga, quindi, che  $\Box^-(\Lambda) \cup \{\neg\alpha\}$  sia non **S**-consistente, allora esiste un sottoinsieme finito  $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$  di  $\Box^-(\Lambda)$  tale che

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &\vdash \neg(\beta_1 \wedge \dots \wedge \beta_n \wedge \neg\alpha) \\ \mathbf{S} &\vdash (\beta_1 \wedge \dots \wedge \beta_n) \rightarrow \alpha \\ \mathbf{S} &\vdash \Box(\beta_1 \wedge \dots \wedge \beta_n) \rightarrow \Box\alpha \\ \mathbf{S} &\vdash \Box\beta_1 \wedge \dots \wedge \Box\beta_n \rightarrow \Box\alpha \\ \mathbf{S} &\vdash \neg(\Box\beta_1 \wedge \dots \wedge \Box\beta_n \wedge \neg\Box\alpha) \end{aligned}$$

ovvero  $\{\Box\beta_1, \dots, \Box\beta_n, \neg\Box\alpha\}$  è non  $\mathbf{S}$ -consistente, quindi, dato che è un sottoinsieme di  $\Lambda$ ,  $\Lambda$  è non  $\mathbf{S}$ -consistente. Se  $\Lambda$  non dovesse contenere fbf del tipo  $\Box\beta$  allora  $\Box^-(\Lambda)$  sarebbe vuoto e dunque se  $\Box^-(\Lambda) \cup \{\neg\alpha\}$  è non consistente, allora  $\mathbf{S} \vdash \alpha$  e per la regola di necessitazione  $\mathbf{S} \vdash \Box\alpha$  e  $\Lambda$  sarebbe inconsistente anche in questo caso. ■

Esiste, quindi,  $\Gamma$  insieme consistente massimale tale che  $\Box^-(\Lambda) \subseteq \Gamma$  e  $\neg\alpha \in \Gamma$ , ovvero per ogni fbf  $\beta$  se  $\Box\beta \in \Lambda$  allora  $\beta \in \Gamma$ , quindi se  $\Lambda$  è consistente massimale allora  $\Lambda R \Gamma$ .

**Definizione 5.1.10** (Modello canonico). Il *modello canonico* è una terna  $\langle W, R, \nu \rangle$  dove  $W$  è l'insieme di tutti gli insiemi consistenti massimali di fbf, cioè  $w \in W$  se e solo se  $w$  è il consistente massimale rispetto al sistema. Siano  $w, w' \in W$ , si definisce  $wRw'$  se e solo se per ogni fbf  $\beta$  se  $\Box\beta \in w$  allora  $\beta \in w'$ ,  $\nu$  la valutazione per cui una variabile è vera in un mondo nel modello canonico se e solo se è un elemento del mondo.

Grazie al teorema fondamentale per i modelli canonici si mostra che ogni fbf è vera in un mondo del modello canonico se e solo se è un elemento del mondo. Da questo seguirà che  $\mathbf{S} \vdash \alpha$  se e solo se  $\alpha$  è valida nel modello canonico e per quanto visto  $\alpha$  è un teorema di  $\mathbf{S}$  se e solo se è un elemento di ogni insieme consistente massimale. Si ha che  $\alpha$  sarà un teorema di  $\mathbf{S}$  se e solo se è un elemento di ogni mondo nel modello canonico di  $\mathbf{S}$ . Se essere un elemento di  $w$  è equivalente ad essere vero in  $w$  allora  $\alpha$  è un teorema di  $\mathbf{S}$  se e solo se è valida nel suo modello canonico. La valutazione  $\nu$  del modello canonico risulta definita, quindi, per le variabili proposizionali: una variabile è vera in un mondo se e solo se è un elemento del mondo.

**Teorema 5.1.11** (Teorema fondamentale per i modelli canonici). Sia  $\langle W, R, \nu \rangle$  il modello canonico per un sistema modale normale proposizionale  $\mathbf{S}$ . Allora per ogni fbf  $\alpha$  e per ogni  $w \in W$   $w \Vdash \alpha$  se e solo se  $\alpha \in w$ .

*Dimostrazione.* Per definizione il risultato vale nel caso in cui  $\alpha$  sia una formula atomica. Bisogna mostrare le seguenti tre condizioni

1. Se vale per  $\alpha$ , allora vale per  $\neg\alpha$ ;
2. Se vale per  $\alpha$  e  $\beta$  allora vale per  $\alpha \vee \beta$ ;
3. Se vale per  $\alpha$ , allora vale per  $\Box\alpha$ .

La dimostrazione è per induzione sulla definizione di  $\alpha$ .

1. Si considerino una fbf  $\neg\alpha$  e  $w \in W$ , allora  $w \Vdash \neg\alpha$  se e solo se  $w \not\Vdash \alpha$ . Per ipotesi induttiva si ha  $w \not\Vdash \alpha$  se e solo se  $\alpha \notin w$ . Per il primo punto del lemma 5.1.6 si ha  $\alpha \notin w$  se e solo se  $\neg\alpha \in w$ . Quindi  $w \Vdash \neg\alpha$  se e solo se  $\neg\alpha \in w$  come richiesto.
2.  $w \Vdash \alpha \vee \beta$  se e solo se  $w \Vdash \alpha$  o  $w \Vdash \beta$ . Per ipotesi induttiva si ha  $w \Vdash \alpha \vee \beta$  se e solo se  $\alpha \in w$  o  $\beta \in w$ , quindi per il secondo punto del lemma 5.1.6 si ha  $w \Vdash \alpha \vee \beta$  se e solo se  $\alpha \vee \beta \in w$  come richiesto.
3. Se  $\Box\alpha \in w$ , allora dalla definizione di  $R$  si ha che  $\alpha \in w'$  per ogni  $w'$  tale che  $wRw'$ . Per ipotesi induttiva  $w' \Vdash \alpha$  per ogni  $w'$  tale che  $wRw'$ , quindi  $w' \Vdash \Box\alpha$ . Se, invece,  $\Box\alpha \notin w$ , allora, per il primo punto del lemma 5.1.6,  $\neg\Box\alpha \in w$ . Si ha, quindi, che  $\Box^-(w) \cup \{\neg\alpha\}$  è  $\mathbf{S}$ -consistente. Esiste  $w' \in W$  tale che  $\Box^-(w) \cup \{\neg\alpha\} \subseteq w'$  e dunque valgono le seguenti

- i)  $\Box^-(w) \subseteq w'$ ;
- ii)  $\neg\alpha \in w'$ .

Per *i*) e per la definizione di  $R$  si conclude che  $wRw'$ , per *ii*) e per il primo punto del lemma 5.1.6 si ha  $\alpha \notin w'$ . Si conclude, per ipotesi induttiva, che  $w' \not\models \alpha$ . ■

**Corollario 5.1.12.** *Ogni fbf  $\alpha$  è valida nel modello canonico di  $\mathbf{S}$  se e solo se  $\mathbf{S} \vdash \alpha$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $\langle W, R, \nu \rangle$  il modello canonico di  $\mathbf{S}$ .

$\Leftarrow$  Sia  $\mathbf{S} \vdash \alpha$ , allora, per il lemma 5.1.7,  $\alpha$  è in ogni insieme consistente massimale di fbf, cioè  $\alpha$  è in ogni  $w \in W$  e per il teorema precedente vale che  $w \models \alpha$  per ogni  $w \in W$ , ovvero  $\alpha$  è valida nel modello canonico.

$\Rightarrow$  Si supponga che  $\mathbf{S} \not\vdash \alpha$ , allora  $\alpha$  non è valida nel modello canonico. Infatti,  $\{\neg\alpha\}$  è in questo caso  $\mathbf{S}$ -consistente e, per quanto visto, esiste un  $w \in W$  tale che  $\neg\alpha \in w$  e quindi  $\alpha \notin w$ , ovvero  $w \not\models \alpha$ . ■

Dunque, se la struttura del modello canonico è in  $\mathcal{C}$  allora ogni fbf  $\mathcal{C}$ -valida è valida nella struttura e, perciò, nel modello canonico stesso e, per il corollario sopra, un teorema del sistema. Per provare la completezza di  $\mathbf{S4p}$  con il metodo del modello canonico basta provare che il modello canonico è basato su una struttura riflessiva e transitiva in  $\mathcal{C}$ .

**Teorema 5.1.13.**  *$\mathbf{S4p}$  è completo rispetto alla classe delle strutture riflessive e transitive.*

*Dimostrazione.* Si prova che il modello canonico è basato su una tale struttura:

**Riflessiva** Bisogna mostrare che  $R$  è riflessiva, cioè per ogni  $w \in W$   $wRw$ . Ovvero per la definizione di  $R$  nel modello canonico questo vuol dire provare che per ogni fbf  $\alpha$  se  $\Box\alpha \in w$  allora  $\alpha \in w$ . Per l'assioma-T e per il lemma si conclude  $\alpha \in w$ .

**Transitiva** Sia  $wRw'$  e  $w'Rw''$ . Per mostrare che  $wRw''$  bisogna far vedere che per ogni  $\alpha$  fbf se  $\Box\alpha \in w$  allora  $\alpha \in w''$ .  $\mathbf{S4p} \vdash \Box\alpha \rightarrow \Box\Box\alpha$  e per il lemma, se  $\Box\alpha \in w$  allora  $\Box\Box\alpha \in w$  e quindi  $wRw'$ , per la definizione di  $R$ ,  $\Box\alpha \in w'$ , allora  $w'Rw''$  e per definizione di  $R$   $\alpha \in w''$ . ■

### 5.1.3 Decidibilità di $\mathbf{S4p}$

Ora, si mostrerà che  $\mathbf{S4p}$  ha la proprietà del modello finito e risulterà, quindi, decidibile. Questo risultato verrà presentato nella prossima sezione in modo "algebrico". Una logica finitamente assiomatizzabile e in cui vale la proprietà del modello finito è decidibile. Uno dei metodi per dimostrare la validità della proprietà del modello finito in varie logiche modali è utilizzare le cosiddette *filtrazioni*. Si presentano alcuni risultati utili per la dimostrazione, mentre per una lettura più approfondita si rimanda a [7].

Fissati un modello  $\mathcal{M} = \langle W, R, \nu \rangle$  e un insieme  $\Gamma$  di formule, chiuso rispetto alle sottoformule, cioè

$$\text{se } \psi \in \Gamma \text{ allora } \text{Sf}(\psi) \in \Gamma$$

dove con  $\text{Sf}$  si indica l'insieme delle sottoformule. Per ogni nodo  $w \in W$  si definisce il seguente insieme

$$\Gamma_w = \{\psi \in \Gamma : w \models \psi\}$$

e la relazione di equivalenza  $w \sim_\Gamma u$  se e solo se  $\Gamma_w = \Gamma_u$ , dunque vale che

$$w \sim_\Gamma u \text{ se e solo se per ogni } \psi \in \Gamma, w \Vdash \psi \text{ se e solo se } u \Vdash \psi.$$

Sia  $[w] = \{u \in W : w \sim_\Gamma u\}$  la classe di equivalenza di  $w$  rispetto a  $\sim_\Gamma$  e  $S_\Gamma = \{[w] : w \in W\}$  l'insieme delle classi di equivalenza. Si può dimostrare che se  $\Gamma$  ha cardinalità finita, sia  $n$  il numero di elementi, allora anche  $S_\Gamma$  è finito e ha al massimo  $2^n$  elementi, infatti si è posto che

$$[w] = [u] \text{ se e solo se } w \sim_\Gamma u \text{ se e solo se } \Gamma_w = \Gamma_u.$$

Si consideri una funzione che mandi la classe di equivalenza di un mondo  $w$  nell'insieme  $\Gamma_w$  delle formule in esso soddisfatte, cioè

$$f([w]) = \Gamma_w.$$

La funzione  $f$  è ben definita e iniettiva, mappa  $S_\Gamma$  nell'insieme dei sottoinsiemi di  $\Gamma$ .  $S_\Gamma$  non può, quindi, avere un numero di elementi maggiore del numero di sottoinsiemi di  $\Gamma$ : se  $\Gamma$  ha  $n$  elementi, allora ha  $2^n$  sottoinsiemi. Si ottiene quanto richiesto.

Sia  $\Phi_\Gamma$  l'insieme delle formule atomiche contenuto in  $\Gamma$  e  $\nu_\Gamma$  la seguente mappa

$$\nu_\Gamma : \Phi_\Gamma \longrightarrow 2^{S_\Gamma}$$

imponendo  $[w] \in \nu_\Gamma(p)$  se e solo se  $w \in \nu(p)$  per  $p \in \Phi_\Gamma$ .

**Definizione 5.1.14** ( $\Gamma$ -filtrazione). Una relazione binaria  $R'$  di  $S_\Gamma$  è detta una  $\Gamma$ -filtrazione di  $R$  se soddisfa

1. se  $wRu$  allora  $[w]R'[u]$ ;
2. se  $[w]R'[u]$  allora per ogni  $\psi$ , se  $\Box\psi \in \Gamma$  e  $w \Vdash \Box\psi$  allora  $u \Vdash \psi$ .

Ogni modello  $\mathcal{M}' = \langle S_\Gamma, R', \nu_\Gamma \rangle$  nel quale  $R'$  soddisfa le due proprietà della definizione 5.1.14 è detto una  $\Gamma$ -filtrazione del modello  $\mathcal{M}$ .

**Lemma 5.1.15** (Lemma della filtrazione). Se  $\phi \in \Gamma$ , allora per ogni  $w \in W$ ,  $w \Vdash \phi$  se e solo se  $[w] \Vdash \phi$ .

*Dimostrazione.* La dimostrazione procede per induzione sulla formazione della formula  $\phi$ . Si osservi che per applicare l'ipotesi induttiva è necessaria la chiusura di  $\Gamma$  rispetto alle sottoformule.

- caso  $\phi$  atomica,  $w \Vdash \phi$  se e solo se  $w \in \nu(\phi)$  se e solo se (per definizione)  $[w] \in \nu_\Gamma(\phi)$  se e solo se  $[w] \Vdash \phi$ ;
- caso  $\phi \equiv \alpha \wedge \beta$ ,  $w \Vdash \alpha \wedge \beta$  se e solo se  $w \Vdash \alpha$  e  $w \Vdash \beta$  se e solo se per ipotesi induttiva  $[w] \Vdash \alpha$  e  $[w] \Vdash \beta$  se e solo se  $[w] \Vdash \alpha \wedge \beta$ ;
- $\phi \equiv \alpha \vee \beta$ , come il caso sopra scambiando il quantificatore di congiunzione con quello di disgiunzione;
- $\phi \equiv \alpha \rightarrow \beta$ ,  $w \Vdash \alpha \rightarrow \beta$  se e solo se da  $w \Vdash \alpha$  segue che  $w \Vdash \beta$  e per ipotesi induttiva se e solo se da  $[w] \Vdash \alpha$  segue che  $[w] \Vdash \beta$  se e solo se  $[w] \Vdash \alpha \rightarrow \beta$ ;
- $\phi \equiv \Box\alpha$ , si ha che  $w \Vdash \Box\alpha$  se e solo se  $u \Vdash \alpha$  per ogni  $u$  tale che  $wRu$  e per la prima proprietà della definizione 5.1.14, vale  $[w]R'[u]$ , per ipotesi induttiva risulta  $[u] \Vdash \alpha$  se e solo se  $[w] \Vdash \alpha$ . Viceversa,  $[w] \Vdash \Box\alpha$  se e solo se  $[u] \Vdash \alpha$  per ogni  $u$  tale che  $[w]R'[u]$ , per la seconda proprietà, dato che  $\Box\alpha \in \Gamma$  e  $w \Vdash \Box\alpha$  allora  $u \Vdash \alpha$ , mentre se  $u \Vdash \alpha$  per ogni  $u$  tale che  $wRu$ , allora  $w \Vdash \Box\alpha$ .

■

Una logica  $\mathcal{L}$  ha la proprietà del modello finito se qualsiasi suo non-teorema è falsificato da qualche modello finito di  $\mathcal{L}$ , in modo equivalente si dice che ha la proprietà del modello finito se per ogni formula  $\phi$  di  $\mathcal{L}$ ,  $\phi$  è un teorema in  $\mathcal{L}$  se e solo se  $\phi$  è un teorema della teoria dei modelli finiti di  $\mathcal{L}$ .

**Definizione 5.1.16** (Proprietà del modello finito). Sia  $\mathcal{L}$  una logica, allora

se  $\mathcal{L} \not\vdash \phi$ , allora esiste un modello finito  $\mathcal{M}$  di  $\mathcal{L}$  tale che  $\mathcal{M} \not\models \phi$ .

**Teorema 5.1.17.** **S4p** ha la proprietà del modello finito.

*Dimostrazione.* Sia  $\phi$  un non-teorema di **S4p**, **S4p**  $\not\vdash \phi$  e  $\mathcal{M}$  un suo modello, allora esiste un nodo  $w \in W$  tale che  $w \not\models \phi$ . Sia  $\Gamma$  il più piccolo insieme contenente  $\phi$  che è chiuso rispetto alle sottoformule e a  $\Box$ .  $\Gamma$  è un insieme finito, sia  $\mathcal{M}' = \langle W', R', \nu' \rangle$  una  $\Gamma$ -filtrazione del modello  $\mathcal{M}$ .  $\mathcal{M}'$  è finita, riflessiva e transitiva e si ha in  $\mathcal{M}'$  che  $[w] \not\models \phi$ . ■

**Corollario 5.1.18.** *L'insieme dei teoremi di **LIp** è decidibile.*

*Dimostrazione.* La dimostrazione è immediata, segue dal fatto che **LIp**  $\vdash \phi \leftrightarrow$  **S4p**  $\vdash \phi$  e dalla decidibilità di **S4p**. ■

Si può, in particolare, trovare un algoritmo di decisione per la logica intuizionista proposizionale. Si ricorda che in **LIp** le regole non invertibili sono  $\& - D$ ,  $\vee - D_1$ ,  $\vee - D_2$ ,  $\neg - S$ ,  $\rightarrow - S$ . Per decidere se un sequente è derivabile è necessario esplorare tutti i casi di derivazione delle regole non-invertibili. La procedura di decisione è finita in quanto le regole proposizionali applicabili in **LIp** per derivare un sequente sono, a meno di scambi, un numero finito con eventuali ripetizioni di cui si riesce a derivare la non derivabilità. Sia **LIp** (E) il frammento proposizionale con chiusura per sostituzione delle variabili con formule arbitrarie.

**Definizione 5.1.19** (Albero di proof-search). Dato un sequente  $\Gamma \Rightarrow C$  in un linguaggio  $\mathcal{L}$  per la logica intuizionista proposizionale, si definisce un *albero di proof-search* per  $\Gamma \Rightarrow C$  come un albero in cui ogni nodo è formato da una lista finita di sequenti

$$\Gamma_1 \Rightarrow C_1, \Gamma_2 \Rightarrow C_2, \dots, \Gamma_n \Rightarrow C_n$$

in tal modo

- la radice dell'albero è dato dal sequente  $\Gamma \Rightarrow C$ ,
- un predecessore di un nodo  $\Phi \equiv \Phi_1, \Gamma \Rightarrow C, \Phi_2$ , dove  $\Phi_1, \Phi_2$  sono liste -anche vuote- di sequenti, può essere formato da una lista  $\Phi_1, \Gamma \Rightarrow C, \Phi_2$  dove

$$\frac{\Gamma' \Rightarrow C'}{\Gamma \Rightarrow C}$$

è un'istanza di una regola di **LIp**;

- un predecessore di un nodo può essere formato da una lista  $\Phi_1, \Gamma' \Rightarrow C', \Gamma'' \Rightarrow C'', \Phi_2$ , con  $\Phi_1, \Phi_2$  come sopra, dove

$$\frac{\Gamma' \Rightarrow C' \quad \Gamma'' \Rightarrow C''}{\Gamma \Rightarrow C}$$

è un'istanza di una regola di **LIp**.

In un albero di proof-search una formula all'interno di un sequente  $\Gamma \Rightarrow C$  che compare in un nodo  $\Phi$  si dice usata se nell'albero c'è un nodo predecessore ottenuto applicando una sua regola. La procedura di decisione che si presenta è tratta da [9].

$\Gamma \Rightarrow C$  è derivabile in **LIP**?

1. Se  $\Gamma \Rightarrow C$  è un assioma si finisce, in caso contrario si va al punto 12 usando  $\Phi \equiv \Gamma \Rightarrow C$ .
2. Nel nodo  $\Phi$  di sequenti c'è un sequente, sia  $\Gamma \Rightarrow C$ , con una proposizione composta, sia  $fr_1 \star fr_2$  che ha una regola invertibile applicabile, a meno di uno scambio?

$$\begin{cases} \text{sì, si va in 3, operando su } fr_1 \star fr_2 \text{ in } \Gamma \Rightarrow C \text{ di } \Phi \\ \text{no, si va in 6} \end{cases}$$

3. La proposizione composta  $fr_1 \star fr_2$  è principale (a destra se  $fr_1 \star fr_2$  sta a destra di  $\Rightarrow$ , a sinistra se  $fr_1 \star fr_2$  sta a sinistra di  $\Rightarrow$ )?

$$\begin{cases} \text{sì, si va in 5 operando su } fr_1 \star fr_2 \\ \text{no, si va in 4 operando su } fr_1 \star fr_2 \end{cases}$$

4. Se si opera su  $fr_1 \star fr_2$  in  $\Gamma \Rightarrow C$  all'interno del nodo  $\Phi \equiv \Phi_1, \dots, \Gamma \Rightarrow C, \Phi_2$  va esteso  $\Phi$  operando uno scambio solo su  $\Gamma \Rightarrow C$  in modo da ottenere un sequente  $\Gamma' \Rightarrow C'$  in cui poter applicare la regola relativa a  $fr_1 \star fr_2$  e si va in 5 operando su  $fr_1 \star fr_2$  nel sequente  $\Gamma' \Rightarrow C'$  nel nuovo nodo  $\Phi' \equiv \Phi_1, \Gamma' \Rightarrow C', \Phi_2$ .
5. Nel nodo  $\Phi$  di sequenti, c'è un sequente, sia  $\Gamma \Rightarrow C$ , con una proposizione composta, sia  $fr_1 \star fr_2$ , principale. Si estenda  $\Phi$  con un nuovo nodo  $\Phi'$  in cui il sequente  $\Gamma \Rightarrow C$  è stato sostituito con le premesse, o premessa, della regola relativa a  $fr_1 \star fr_2$ . Ora si va in 10 se la regola applicata era invertibile, altrimenti si dichiara  $fr_1 \star fr_2$  usata in  $\Phi$  e si va in 6 operando su  $\Phi$ .

6. Nel nodo  $\Phi$  di sequenti, c'è un sequente, sia  $\Gamma \Rightarrow C$ , con una proposizione composta, sia  $fr_1 \star fr_2$  non usata che, a meno di uno scambio, ha una regola invertibile di **LIP** applicabile?

$$\begin{cases} \text{sì, si va in 7 operando su } fr_1 \star fr_2 \text{ in } \Gamma \Rightarrow C \text{ di } \Phi \\ \text{no, si va in 10} \end{cases}$$

7. Nel nodo  $\Phi$  di sequenti, c'è un sequente, sia  $\Gamma \Rightarrow C$ , con una proposizione composta, sia  $fr_1 \star fr_2$  non usata che, a meno di uno scambio, ha una regola invertibile di **LIP** applicabile, la proposizione composta è una disgiunzione  $fr_1 \star fr_2 \equiv fr_1 \vee fr_2$ ?

$$\begin{cases} \text{sì, si va in 8 operando su } fr_1 \vee fr_2 \text{ in } \Gamma \Rightarrow C \text{ di } \Phi \\ \text{no, si va in 3 operando su } fr_1 \star fr_2 \text{ in } \Gamma \Rightarrow C \text{ di } \Phi \end{cases}$$

8. Nel nodo  $\Phi \equiv \Phi_1, \dots, \Gamma \Rightarrow C, \Phi_2$  si ha  $C \equiv fr_1 \vee fr_2$ . Sia  $fr_1 \vee fr_2$  detta usata in  $\Phi$  e si estenda  $\Phi$  con due nuovi nodi  $\Phi', \Phi''$ , dove  $\Phi' \equiv \Phi_1, \Gamma \Rightarrow fr_1, \Phi_2$  e  $\Phi'' \equiv \Phi_1, \Gamma \Rightarrow fr_2, \Phi_2$ . Se  $\Phi'$  o  $\Phi''$  è un nodo di soli assiomi si finisce, altrimenti si va in 6 operando su  $\Phi$ .

9. L'albero di proof-search ha una foglia composta di sequenti che sono tutti assiomi?

$$\begin{cases} \text{sì, si finisce} \\ \text{no, si va in 11} \end{cases}$$

10. Siano dichiarate loop tutte le foglie dell'albero di proof-search con sequenti uguali a meno di scambi e contrazioni di formule ad un nodo successore dell'albero. Si va in 11.
11. Nell'albero di proof-search ottenuto c'è una foglia  $\Phi$  che non è un loop e che non è fatta di soli assiomi e che ha un sequente  $\Gamma \Rightarrow C$  con almeno una proposizione composta non usata?

$$\begin{cases} \text{sì, si va in 2 operando sulla foglia } \Phi \\ \text{no, si finisce} \end{cases}$$

Se nell'albero ottenuto c'è una foglia fatta di soli sequenti assiomi, allora il sequente  $\Gamma \Rightarrow C$  è derivabile in **LIp**, altrimenti non è derivabile in **LIp**.

## 5.2 Algebrizzazione della logica modale **S4p**

Nella letteratura con studio semantico della logica modale si fa riferimento principalmente alla semantica di Kripke, ma esiste anche una semantica algebrica. Lo scopo principale di una tale semantica è ottenere una comprensione migliore della logica trattandola in termini di proprietà algebriche. Data una logica è possibile trovare una corrispondenza tra classe di algebre e teorie della logica corrispondente. La logica modale proposizionale **S4p** può essere interpretata in algebre con un operatore di chiusura che includono l'algebra delle parti di un insieme con associata una topologia, detta semantica topologica. Nella semantica topologica alle formule si assegnano sottoinsiemi di uno spazio topologico fissato e la modalità  $\Box$  è interpretata come l'*interno* topologico. In questa sezione si presenta l'approccio algebrico alla logica modale e il legame tra semantica algebrica e semantica di Kripke. Utilizzando come riferimento [10] si va a mostrare che la logica modale **S4p** ha la proprietà del modello finito, una logica  $\mathcal{L}$  che è finitamente assiomatizzabile e ha la proprietà del modello finito è decidibile. Nell'ultima sottosezione della sezione si mostra l'interpretazione di **LIp** in **S4p** in chiave "algebrica".

### 5.2.1 Algebra modale

Si definisce algebra modale un'algebra di Boole con un operatore unario  $\Box$  che interpreta l'operatore modale.

**Definizione 5.2.1** (Algebra modale). Un'algebra  $\mathbf{A} = \langle A, \vee, \wedge, \rightarrow, \Box, 0 \rangle$  è un'algebra modale se e solo se

1.  $\langle A, \vee, \wedge, \rightarrow, 0 \rangle$  è un'algebra di Boole,
2.  $\Box$  è un operatore unario in  $\mathbf{A}$  tale che:
  - (a)  $\Box 1 = 1$ ;
  - (b)  $\Box(a \wedge b) = \Box a \wedge \Box b$  per ogni  $a, b \in A$ .

In algebra modale vale, quindi, la seguente proprietà di monotonia:

$$\text{per ogni } a, b \text{ se } a \leq b \text{ allora } \Box a \leq \Box b,$$

infatti per la proprietà (b) si ha  $\Box a \wedge \Box b = \Box(a \wedge b) = \Box a$  e dunque  $\Box a \leq \Box b$ . L'uguaglianza in (b) può essere sostituita dalla seguente disuguaglianza:

$$\text{per ogni } a, b \text{ si ha } \Box(a \rightarrow b) \leq \Box a \rightarrow \Box b.$$

Se  $\Box(a \wedge b) = \Box a \wedge \Box b$  per ogni  $a, b \in A$ , dato che  $a \rightarrow b \equiv \neg a \vee b$ , si ha per la proprietà distributiva che

$$(a \rightarrow b) \wedge a = (\neg a \vee b) \wedge a = (\neg a \wedge a) \vee (b \wedge a) = (b \wedge a) \leq b$$

dunque

$$\Box((a \rightarrow b) \wedge a) = \Box(a \rightarrow b) \wedge \Box a \leq \Box b$$

e poichè per ogni  $x, y, z \in A$  si ha che  $x \wedge y \leq z$  se e solo se  $x \leq y \rightarrow z$  si conclude

$$\Box(a \rightarrow b) \leq \Box a \rightarrow \Box b.$$

Viceversa, se  $\Box(a \rightarrow b) \leq \Box a \rightarrow \Box b$ , allora dalla definizione di inf-semireticolato si ha che per ogni  $a, b \in A$

$$a \wedge b \leq a \quad a \wedge b \leq b$$

dunque

$$\Box(a \wedge b) \leq \Box a \wedge \Box b.$$

Ora, visto che  $a \wedge b \leq a \wedge b$  se e solo se  $a \leq b \rightarrow (a \wedge b)$ , per la proprietà di monotonia e per ipotesi si ottiene  $\Box a \leq \Box(b \rightarrow (a \wedge b)) \leq \Box b \rightarrow \Box(a \wedge b)$ , ovvero

$$\Box a \wedge \Box b \leq \Box(a \wedge b).$$

Quindi,

$$\Box(a \wedge b) = \Box a \wedge \Box b.$$

L'uguaglianza (a) nella seconda condizione della definizione 5.2.1 è un'espressione algebrica della regola di necessitazione (se  $\vdash \alpha$  allora  $\vdash \Box \alpha$ ), allo stesso modo, come visto, la condizione (b) è equivalente all'assioma-K ( $\Box(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\Box \alpha \rightarrow \Box \beta)$ ). Quest'ultima può essere espressa anche nella forma duale  $\Diamond$ : per ogni  $a, b$  si ha  $\Diamond(a \vee b) = \Diamond a \vee \Diamond b$ . Per quanto riguarda gli assiomi T e 4 di **S4p** si possono esprimere in forma algebrica attraverso le seguenti disuguaglianze

$$\Box a \leq a$$

$$\Box a \leq \Box \Box a$$

**Definizione 5.2.2.** Un'algebra modale **A** si definisce *algebra modale-S4p* se ogni formula dimostrabile in **S4p** è valida in **A**.

Un'algebra modale-**S4p** è un'algebra modale in cui valgono le due relazioni  $\Box a \leq a$  e  $\Box a \leq \Box \Box a$ .

**Definizione 5.2.3** (Algebra di Lindenbaum per **S4p**). Per ogni linguaggio proposizionale  $\mathcal{L}$  l'insieme

$$\mathcal{A}(\mathcal{L}) \equiv \{[\text{fr}] \text{ tale che } \text{fr} \in \text{PROP}(\mathcal{L})\}$$

dove

$$[\text{fr}] \equiv \{\alpha \in \text{PROPO}(\mathcal{L}) \text{ tale che } \Rightarrow \text{fr} \leftrightarrow \alpha \text{ è derivabile in } \mathbf{S4p}\}$$

con la relazione

$$[\text{fr}_1] \leq [\text{fr}_2] \equiv \text{fr}_1 \Rightarrow \text{fr}_2 \text{ è derivabile in } \mathbf{S4p}$$

è detto *algebra di Lindenbaum della logica modale S4 proposizionale*.



**Definizione 5.2.4** (Valutazione). Dato un linguaggio proposizionale  $\mathcal{L}$  con una classe  $V_{prop}$  di variabili proposizionali si definisce una *valutazione* in questo modo

$$\nu : PROP(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathbf{A}$$

dove  $\mathbf{A}$  è un'algebra modale e sono verificate le seguenti condizioni:

$$\begin{aligned} \nu(\perp) &= 0 \\ \nu(\top) &= 1 \\ \nu(\text{fr}_1 \&\text{fr}_2) &= \nu(\text{fr}_1) \wedge \nu(\text{fr}_2) \\ \nu(\text{fr}_1 \vee \text{fr}_2) &= \nu(\text{fr}_1) \vee \nu(\text{fr}_2) \\ \nu(\text{fr}_1 \rightarrow \text{fr}_2) &= \nu(\text{fr}_1)^c \vee \nu(\text{fr}_2) \\ \nu(\Box(\text{fr})) &= \Box \nu(\text{fr}) \end{aligned}$$

È possibile adesso dimostrare il risultato di completezza algebrica.

**Teorema 5.2.5.** *Una formula proposizionale  $\text{fr}$  è derivabile in  $\mathbf{S4}$  se e solo se è valutata a 1 su ogni algebra modale con ogni valutazione.*

*Dimostrazione.* La dimostrazione segue in modo immediato considerando un'algebra di Lindenbaum-Tarski per  $\mathbf{S4}$ . Una formula è derivabile in  $\mathbf{S4}$  se e solo se le formule derivabili in  $\mathbf{S4}$  sono valutate 1 nell'algebra di Lindenbaum-Tarski. ■

**Proposizione 5.2.6.** *Sia  $\mathbf{X} = (X, \tau)$  uno spazio topologico, dove  $X$  è un insieme non vuoto e  $\tau$  una topologia su  $X$ , ovvero una famiglia non vuota  $\tau$  di sottoinsiemi di  $X$ , detti insiemi aperti, tali che soddisfino le seguenti condizioni  $\emptyset$  e  $X$  sono insiemi aperti, unione arbitraria di aperti è aperta, intersezione di due aperti è aperta. Allora  $\mathcal{P}(\mathbf{X}) = \langle \mathcal{P}(X), \cup, \cap, \rightarrow, \emptyset \rangle$  è un'algebra di Boole. L'operatore  $I$  è definito per ogni sottoinsieme  $A$  di  $X$   $I(A) = \bigcup \{U : U \text{ è un sottoinsieme aperto di } A\}$ , ovvero  $I(A)$  è il più grande sottoinsieme aperto di  $A$ . Un esempio di algebra modale- $\mathbf{S4p}$  è dato da  $\mathcal{P}(\mathbf{X})$  con l'operatore  $I$ .  $\mathcal{P}(\mathbf{X})$  è un'algebra di Boole con la relazione  $A \leq B \equiv A \subseteq B$  con  $A, B \subseteq X$ .*

*Dimostrazione.* Presi due sottoinsiemi  $A, B$ , infatti, si ha che

$$\begin{aligned} 1 &\equiv X \\ 0 &\equiv \emptyset \\ A \wedge B &\equiv A \cap B \\ A \vee B &\equiv A \cup B \\ A^c &\equiv X \setminus A \\ \bigwedge_{i \in I} A_i &\equiv \bigcap_{i \in I} A_i \\ \bigvee_{i \in I} A_i &\equiv \bigcup_{i \in I} A_i \end{aligned}$$

$\mathcal{P}(\mathbf{X})$  con  $I$  è un'algebra modale- $\mathbf{S4p}$  risultano verificate sia la condizione (a) della definizione 5.2.1

$$I(X) = \bigcup \{U : U \text{ aperto}, U \subseteq X\} = X$$

sia la condizione (b) per ogni  $A, B \subseteq X$  si ha

$$\begin{aligned} I(A \cap B) &= \bigcup \{V \subseteq A \cap B \text{ con } V \text{ aperto}\} \\ &= \bigcup (\{U \subseteq A \text{ con } U \text{ aperto}\} \cap \{W \subseteq B \text{ con } W \text{ aperto}\}) \\ &= \bigcup \{U \subseteq A \text{ con } U \text{ aperto}\} \cap \bigcup \{W \subseteq B \text{ con } W \text{ aperto}\} \\ &= I(A) \cap I(B). \end{aligned}$$

Risultano, infine, validi gli assiomi caratterizzanti la logica modale **S4p**, l'assioma-T e l'assioma-4. Per ogni  $A \subseteq X$  vale che

$$I(A) = \bigcup \{U \subseteq A \text{ con } U \text{ aperto}\} \subseteq A$$

e sia  $C = I(A) = \bigcup \{U \subseteq A \text{ con } U \text{ aperto}\}$ ,  $C$  è aperto, allora

$$I(C) = I(I(A)) = \bigcup \{V \subseteq C \text{ con } V \text{ aperto}\} = C$$

dunque  $I(A) \subseteq I(I(A))$  come richiesto. ■

**Esempio 5.2.7.** Con questo esempio si vuole mostrare come la composizione della traduzione modale della logica intuizionista con la traduzione della doppia negazione non coincida con la traduzione identica della logica classica in **S4** rispetto allo stesso linguaggio proposizionale, ovvero in simboli

$$(\Box \circ^g) \neq i$$

dove con  $i$  si indica la traduzione identica e con  $\circ$  la composizione.

$$\begin{array}{ccc} & \mathbf{LIp} & \\ g \nearrow & & \searrow \Box \\ \mathbf{LCp} & \xrightarrow{i} & \mathbf{S4p} \\ & & \neq \end{array}$$

Sia  $P$  una formula di **S4p** senza  $\Box$ , ovvero una formula nel linguaggio della logica classica proposizionale. Si consideri la formula  $((P)^g)^\Box$  dove  $g$  è la traduzione 2.0.7 e  $^\Box$  è la traduzione 4.0.1, quindi  $((P)^g)^\Box \equiv \Box(\Box(\Box P \rightarrow \perp) \rightarrow \perp)$ . In **S4p** non è vero che

$$P \leftrightarrow \Box(\Box(\Box P \rightarrow \perp) \rightarrow \perp).$$

Si consideri l'algebra modale-**S4p** data da  $\mathcal{P}(\mathbf{X})$  e l'operatore  $I$  dove  $\mathbf{X} = (X, \tau)$  con  $X = \mathbb{R}$  e  $\tau$  è la topologia dei reali. Sia  $P = [0, 1]$ , allora

$$\begin{array}{ll} \Box P & \equiv (0, 1) \\ \Box P \rightarrow \perp & \equiv \mathbb{R} \setminus (0, 1) \\ \Box(\Box P \rightarrow \perp) & \equiv \mathbb{R} \setminus [0, 1] \\ \Box(\Box P \rightarrow \perp) \rightarrow \perp & \equiv [0, 1] \\ \Box(\Box(\Box P \rightarrow \perp) \rightarrow \perp) & \equiv (0, 1) \end{array}$$

e  $[0, 1] \not\subseteq (0, 1)$ , dunque **S4p**  $\not\models P \rightarrow \Box(\Box(\Box P \rightarrow \perp) \rightarrow \perp)$ .

Sia  $P = \mathbb{R}^*$ , allora

$$\begin{array}{ll} \Box P & \equiv \mathbb{R}^* \\ \Box P \rightarrow \perp & \equiv \{0\} \\ \Box(\Box P \rightarrow \perp) & \equiv \emptyset \\ \Box(\Box P \rightarrow \perp) \rightarrow \perp & \equiv \mathbb{R} \\ \Box(\Box(\Box P \rightarrow \perp) \rightarrow \perp) & \equiv \mathbb{R} \end{array}$$

e  $\mathbb{R} \not\subseteq \mathbb{R}^*$ , dunque **S4p**  $\not\models \Box(\Box(\Box P \rightarrow \perp) \rightarrow \perp) \rightarrow P$ .

**Esempio 5.2.8.** In **LIp** non vale la legge del terzo escluso,

$$\mathbf{LIp} \not\models P \vee \neg P$$

allora, applicando la traduzione 4.0.1,

$$\mathbf{S4p} \not\models \Box P \vee \Box(\Box P \rightarrow \perp),$$

cioè non è derivabile in **S4p**  $\Rightarrow \Box P \vee \Box(\Box P \rightarrow \perp)$ , dove l'antecedente vuoto si considera come  $\top$ . Se si prende un'algebra modale-**S4p** come nell'esempio 5.2.7 e si pone  $P = [0, 1)$  si ha

$$\begin{aligned} \Box P &\equiv (0, 1) \\ \Box P \rightarrow \perp &\equiv \mathbb{R} \setminus (0, 1) \\ \Box(\Box P \rightarrow \perp) &\equiv \mathbb{R} \setminus [0, 1] \end{aligned}$$

quindi, essendo  $(0, 1) \cup \mathbb{R} \setminus [0, 1] = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ , si ha

$$\mathbb{R} \not\subseteq \mathbb{R} \setminus \{0, 1\},$$

ovvero  $\mathbf{S4p} \not\models \Box P \vee \Box(\Box P \rightarrow \perp)$ .

## 5.2.2 Decidibilità di **S4p**

Per provare che **S4p** ha la proprietà del modello finito, si introducono le seguenti definizioni.

**Definizione 5.2.9** (algebra parziale). Un'algebra parziale  $\mathbf{B}$  è un insieme  $B$  con operazioni parziali. Quindi, quando  $f$  è un'operazione parziale  $n$ -aria,  $f(b_1, \dots, b_m)$  può non essere definita per qualche  $b_1, \dots, b_m \in B$ . Un'algebra parziale  $\mathbf{B}$  è una sottoalgebra parziale di un'algebra  $\mathbf{A}$ , quando l'insieme  $B$  di  $\mathbf{B}$  è un sottoinsieme dell'insieme  $A$  di  $\mathbf{A}$  e per ogni operazione  $f$  se  $f^{\mathbf{B}}(b_1, \dots, b_m)$  è definito per  $b_1, \dots, b_m \in B$  allora  $f^{\mathbf{B}}(b_1, \dots, b_m) = f^{\mathbf{A}}(b_1, \dots, b_m)$ .

**Definizione 5.2.10.** Una classe  $\mathcal{K}$  di algebre di uno stesso tipo hanno la *proprietà dell'integrabilità finita* (Finite embeddability property, FEP) quando per ogni sottoalgebra parziale finita  $\mathbf{B}$  di un'algebra  $\mathbf{A}$  in  $\mathcal{K}$ , esiste un'algebra finita  $\mathbf{D}$  in  $\mathcal{K}$  nella quale  $\mathbf{B}$  è incorporata.

Si dimostra, ora, che la classe delle algebre modali-**S4** soddisfa la FEP, la prova, in accordo a [10], si basa su quella presentata da McKinsey. La proprietà del modello finito valida per **S4p** è conseguenza di questo fatto.

**Teorema 5.2.11.** La classe di tutte le algebre modali-**S4p** ha la FEP.

*Dimostrazione.* Sia  $\mathbf{B}$  un'algebra modale-**S4p** parziale finita di  $\mathbf{A} = \langle A, \vee, \wedge, \rightarrow, \Box, 0 \rangle$ , algebra modale-**S4p**. Sia  $E$  un sottoinsieme finito di  $A$ ,  $E := \{0, 1\} \cup B$  e  $\mathbf{D}$  la sottoalgebra di Boole della riduzione booleana di  $\mathbf{A}$  generata da  $E$ . L'algebra  $\mathbf{D}$  è finita. Si osservi che per qualche  $d \in D$ ,  $\Box d$  può non appartenere a  $D$ . Si definisce, dunque, un nuovo operatore  $\square$  in  $D$  in questo modo

$$\square d = \bigvee \{z \in D : \Box z = z \text{ e } z \leq d\}.$$

Chiaramente, l'insieme  $\{z \in D : \Box z = z \text{ e } z \leq d\}$  è diverso dall'insieme vuoto, in quanto contiene 0 e si ha per definizione che  $\square d \leq d$  per ogni  $d \in D$ . Si mostra che  $\square d = \Box d$  fintanto che  $\Box d \in D$ . Infatti, per ogni  $z \in D$ , se  $\Box z = z$  e  $z \leq d$  allora  $z = \Box z \leq \Box d$  e quindi  $\square d \leq \Box d$ . D'altra parte,  $\Box d$  appartiene all'insieme  $\{z \in D : \Box z = z \text{ e } z \leq d\}$  se  $\Box d \in D$ . Dato che  $\Box$  è un operatore modale di **S4p** soddisfa gli assiomi T e 4, quindi valgono  $\Box \Box d = \Box d$  e  $\Box d \leq d$ . Dunque,  $\Box d \leq \square d$

e quindi  $\Box d = \Box d$ . Per mostrare che  $\langle D, \vee, \wedge, \rightarrow, \Box, 0 \rangle$  è un'algebra modale, bisogna far vedere che

$$\Box(d \wedge e) = \Box d \wedge \Box e$$

per ogni  $d, e \in D$ . Dato che per definizione  $\Box$  è un operatore monotono, allora si ha che  $\Box(d \wedge e) \leq \Box d \wedge \Box e$ . Viceversa,

$$\begin{aligned} \Box d \wedge \Box e &= \bigvee \{z \wedge w \in D : \Box z = z, \Box w = w, z \leq d \text{ e } w \leq e\} \\ &\leq \bigvee \{u \in D : \Box u = u \text{ e } u \leq d \wedge e\} \end{aligned}$$

visto che  $\Box(z \wedge w) = z \wedge w$  e  $z \wedge w \leq d \wedge e$ . La parte a destra della disuguaglianza è  $\Box(d \wedge e)$ , dunque si ha  $\Box d \wedge \Box e \leq \Box(d \wedge e)$ . Si è già dimostrato che  $\Box d \leq d$ , rimane da provare che vale  $\Box d \leq \Box \Box d$  per ogni  $d \in D$ , da cui si può concludere che  $\Box$  soddisfa le condizioni di un operatore modale per **S4**. Supposto che  $\Box z = z$  e  $z \leq d$  per  $z \in D$ . Allora per definizione di  $\Box$  si ottiene che  $z \leq \Box d$ . Dunque, l'insieme  $\{z \in D : \Box z = z \text{ e } z \leq d\}$  è contenuto nell'insieme  $\{z \in D : \Box z = z \text{ e } z \leq \Box d\}$ . Quindi,

$$\Box d = \bigvee \{z \in D : \Box z = z \text{ e } z \leq d\} \leq \bigvee \{z \in D : \Box z = z \text{ e } z \leq \Box d\} = \Box \Box d.$$

■

**Corollario 5.2.12.** *La logica modale **S4p** ha la proprietà del modello finito.*

### 5.2.3 Una visione algebrica della semantica di Kripke

Fino all'inizio degli anni '60, lo studio semantico delle logiche non classiche era basato su quello algebrico. Grazie ai contributi decisivi di Saul Kripke, la semantica relazionale, ovvero la semantica di Kripke, è diventata la principale semantica per le logiche non classiche. La connessione tra semantica di Kripke e semantica algebrica è esplicitata, nel caso delle logiche modali, dal teorema di Jónsson-Tarski sulle estensioni canoniche delle algebre modali, mentre nel caso della logica intuizionista, dal teorema di Stone per le estensioni canoniche delle algebre di Heyting, richiamato nel capitolo 1. Data un'algebra modale, la validità di una formula in una struttura di Kripke per la logica modale può essere espressa in termini della validità della formula nell'algebra modale duale. Infatti, l'insieme delle formule valide in una struttura di Kripke corrisponde all'insieme delle formule valide nell'algebra modale duale. L'insieme delle formule valide in una struttura duale, invece, è solo contenuto nell'insieme delle formule valide in un'algebra modale. Si introducono alcune definizioni e risultati, seguendo la trattazione di ([10], pp. 108-110).

**Definizione 5.2.13** (Filtri). Sia  $\mathbf{A}$  un'algebra di Heyting  $\langle A, \vee, \wedge, \rightarrow, 0 \rangle$ . Un sottoinsieme  $F$  di  $A$  è un *filtro* di  $\mathbf{A}$  se

1.  $F \neq \emptyset$ ;
2. se  $x, y \in F$  allora  $x \wedge y \in F$ ;
3. se  $x \in F$  e  $x \leq y$  allora  $y \in F$ .

Si osservi che lo stesso insieme  $A$  è un filtro.

**Definizione 5.2.14.** - Un filtro  $F$  di  $\mathbf{A}$  si dice *proprio* se  $F \neq A$ .

- Un filtro  $F$  di  $\mathbf{A}$  è detto *primo* se è proprio e soddisfa che per ogni  $x \vee y \in F$  allora o  $x \in F$  o  $y \in F$ .

- Un filtro proprio  $F$  di  $\mathbf{A}$  è *massimale* se  $F \subseteq G$  implica  $G = F$  per ogni filtro proprio  $G$ .
- Un filtro proprio  $F$  di  $\mathbf{A}$  è un *ultrafiltro* se o  $x \in F$  o  $\neg x \in F$  per ogni  $x \in A$ .

**Definizione 5.2.15** (Filtri generati). Si definisce, per ogni elemento  $a \in A$ , il *filtro principale generato da  $a$*  l'insieme  $F_a = \{x \in A : a \leq x\}$ .  $F_a$  è il più piccolo filtro contenente  $a$ . Sia  $U \subset A$  e  $U \neq \emptyset$ , l'insieme  $G = \{x \in A : a_1 \wedge \dots \wedge a_m \leq x \text{ per qualche } a_1, \dots, a_m \in U\}$  si dice il *filtro generato da  $U$*  ed è il filtro più piccolo contenente  $U$ . Se l'insieme  $U$  ha un numero finito di elementi,  $U = \{b_1, \dots, b_n\}$ , allora il filtro generato da  $U$  corrisponde al filtro principale generato dall'elemento  $b_1 \wedge \dots \wedge b_n$ .

In un'algebra di Boole essere un filtro primo è equivalente ad essere un filtro massimale, infatti sono validi i seguenti risultati:

**Lemma 5.2.16.** *Sia  $\mathbf{A}$  un'algebra di Heyting. Allora le condizioni che seguono sono valide per ogni filtro  $F$  di  $\mathbf{A}$ :*

1.  $F$  è massimale se e solo se  $F$  è un ultrafiltro;
2. se  $F$  è massimale, allora  $F$  è primo.

*Dimostrazione.* 1. Per provare la condizione sufficiente, si supponga  $F$  massimale e  $a \notin F$ . Per definizione di filtro massimale, vale che il filtro generato da  $F \cup \{a\}$  è uguale ad  $A$ ; esiste, quindi, un elemento  $c \in F$  tale che  $a \wedge c \leq 0$ , dunque  $c \leq \neg a$  e quindi  $\neg a \in F$ , ovvero  $F$  è un ultrafiltro. Viceversa per la condizione necessaria, si supponga  $F$  un ultrafiltro. Sia  $G$  un filtro tale che risulti  $F \subset G$  e  $b \in G \setminus F$ . Allora  $b \notin F$ , ma per definizione di ultrafiltro deve essere  $\neg b \in F$ , inoltre vale allora  $\neg b \in G$ .  $G$  è tale da contenere sia  $b$  che  $\neg b$ , ovvero  $0 = b \wedge \neg b$  è un elemento di  $G$ , dunque  $G = A$  e  $F$  è un filtro massimale.

2. Si suppongano  $F$  massimale,  $a \vee b \in F$  e  $b \notin F$  per  $a, b \in A$ . Per quanto si è appena dimostrato  $F$  è un ultrafiltro,  $\neg b \in F$  e quindi  $a \vee \neg b \in F$ . Dato che  $a \vee b$  e  $a \vee \neg b$  sono entrambi elementi di  $F$  vale  $a = a \vee 0 = a \vee (b \wedge \neg b) = (a \vee b) \wedge (a \vee \neg b) \in F$ , dunque  $F$  è primo. ■

Essendo ogni algebra di Boole un'algebra di Heyting, si ottiene quanto voluto grazie a questo corollario:

**Corollario 5.2.17.** *Per ogni algebra di Boole  $\mathbf{A}$ , TFAE*

- $F$  è un filtro massimale;
- $F$  è un filtro primo;
- $F$  è un ultrafiltro.

*Dimostrazione.* Rimane un unico verso da dimostrare. Sia  $F$  un filtro primo si mostra che è un ultrafiltro.  $a \vee \neg a = 1 \in F$  per ogni  $a$  in  $A$ . Se  $F$  è primo, allora o  $a \in F$  o  $\neg a \in F$  per ogni  $a \in A$ . ■

Si enuncia, infine, il teorema del filtro primo.

**Teorema 5.2.18** (Teorema del filtro primo). *Sia  $F$  un filtro di un'algebra di Heyting  $\mathbf{A}$  tale che  $a \notin F$  per ogni elemento  $a \in A$ . Allora esiste un filtro primo  $G$  di  $\mathbf{A}$  tale che  $a \notin G$  e  $F \subseteq G$ .*

Questo risultato permette di dimostrare il seguente Corollario.

**Corollario 5.2.19.** *Sia  $F$  un filtro di  $\mathbf{A}$  tale che  $a \rightarrow b \notin F$ . Allora esiste un filtro primo  $G$  tale che  $F \subseteq G$  e  $a \in G$ , ma  $b \notin G$ .*

**Definizione 5.2.20** (Algebra modale duale). Sia  $\mathbf{F} = \langle W, R \rangle$  una struttura modale, dove  $W$  è un insieme non vuoto e  $R$  è una relazione binaria su  $W$ . L'algebra modale costruita a partire da  $\mathbf{F}$  tale che  $\mathcal{P}(\mathbf{F}) = \langle \mathcal{P}(W), \cup, \cap, \rightarrow, \emptyset \rangle$  sia l'algebra di Boole e come operatore modale per ogni  $U \subseteq W$  abbia  $\Box U = \{x \in W : \text{per ogni } y \text{ tale che } xRy \text{ allora } y \in U\}$ , è detta *algebra modale duale* e si denota con  $\mathbf{F}^+$ .

In un'algebra modale duale per **S4p** valgono queste condizioni:

1.  $R$  è riflessiva se e solo se l'assioma-T vale in  $\mathbf{F}^+$ , ovvero  $R$  riflessiva se e solo se  $\Box U \subseteq U$ .

( $\implies$ ) Sia  $R$  riflessiva e  $U \in \mathcal{P}(W)$ ,  $\Box U = \{x \in W : \text{per ogni } y \text{ tale che } xRy \text{ allora } y \in U\}$ , se  $x \in \Box U$ , allora  $y \in U$  per ogni  $xRy$ , in particolare, essendo  $R$  riflessiva  $x \in U$ , ovvero  $\Box U \subseteq U$ .

( $\impliedby$ ) Sia  $\Box U \subseteq U$  per  $U \in \mathcal{P}(W)$  e sia  $x \in W$ . Si definisca con  $x^\rightarrow$  il complementare dell'insieme  $\{x\}$  allora per ipotesi si ha che

$$\Box(x^\rightarrow) \subseteq x^\rightarrow$$

in particolare  $x \notin \Box(x^\rightarrow)$ , ovvero non è vero che per ogni  $y$  tale che  $xRy$  si ha  $y \in x^\rightarrow$ , quindi  $xRx$ , cioè  $R$  è riflessiva.

2.  $R$  transitiva se e solo se l'assioma-4 vale in  $\mathbf{F}^+$ , ovvero  $R$  è transitiva se e solo se  $\Box U \subseteq \Box \Box U$ ,

$$\Box U = \{x \in W : \forall y xRy \rightarrow y \in U\}$$

$$\Box \Box U = \{x' \in W : \forall y' x'Ry' \rightarrow y' \in \Box U\}.$$

( $\implies$ ) Sia  $R$  transitiva e si supponga  $\Box U \not\subseteq \Box \Box U$ , allora esiste  $x \in \Box U$  tale che  $x \notin \Box \Box U$ , in particolare  $\exists y$  tale che  $xRy$  e  $y \notin \Box U$ , quindi  $\exists z$  tale che  $yRz$  e  $z \notin U$ , ma  $R$  transitiva e quindi  $xRz$  e  $z \in U$ , impossibile. Allora  $\Box U \subseteq \Box \Box U$ .

( $\impliedby$ ) Sia  $\Box U \subseteq \Box \Box U$ , si supponga  $R$  non transitiva, ovvero  $xRy$ ,  $yRz$ , ma  $x \not R z$ , allora  $y \notin \Box(z^\rightarrow)$  e  $x \in \Box(z^\rightarrow)$ .  $x \notin \Box(\Box z^\rightarrow)$  perchè  $xRy$  e  $y \notin \Box(z^\rightarrow)$ , quindi  $\Box(z^\rightarrow) \not\subseteq \Box(\Box z^\rightarrow)$ , impossibile. Allora  $R$  transitiva.

Sia data un'algebra modale  $\mathbf{A}$  e sia  $D(A)$  l'insieme dei filtri massimali di  $\mathbf{A}$ , dato che la parte non modale dell'algebra è un'algebra di Boole tutti i filtri primi sono massimali, per quanto dimostrato nel Lemma 5.2.16 e nel Corollario 5.2.17.

**Definizione 5.2.21** (Struttura modale duale). Si definisce una relazione binaria  $\sim_A$  su  $D(A)$  nel seguente modo:

$$F \sim_A G \text{ se e solo se per ogni } x \in A, \Box x \in F \text{ implica } x \in G$$

La struttura  $\langle D(A), \sim_A \rangle$  è detta *struttura modale duale* dell'algebra modale  $\mathbf{A}$ , si denota con  $\mathbf{A}_+$

**Definizione 5.2.22** (Estensione canonica). Si chiama *estensione canonica* di un'algebra modale  $\mathbf{A}$ , si denota con  $\mathbf{A}^\delta$  l'algebra modale duale di una struttura duale di  $\mathbf{A}$ , in simboli  $(\mathbf{A}_+)^+$ .

**Teorema 5.2.23** (Teorema di Jónsson-Tarski). *Ogni algebra modale  $\mathbf{A}$  può essere immersa nella sua estensione canonica  $\mathbf{A}^\delta$ .*

*Dimostrazione.* Si consideri la mappa  $\sigma$  da  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{A}^\delta$  definita in questo modo

$$\sigma(a) = \{F \in D(A) : a \in F\}$$

per ogni  $a \in A$ . L'insieme  $\{F \in D(A) : a \in F\}$  è un sottoinsieme chiuso superiormente di  $D(A)$ , siano  $F, G$  due filtri massimali di  $\mathbf{A}$ , sono anche primi. Ora, se  $a \in F$  e  $F \subseteq G$  allora  $a \in G$ . Si mostra che una tale  $\sigma$  è un'immersione da  $\mathbf{A}$  in  $\mathbf{A}^\delta$ .

- $\sigma(0) = \emptyset$  dato che  $0 \notin F$  per ogni filtro primo;
- $\sigma(a \wedge b) = \sigma(a) \cap \sigma(b)$  per ogni  $a, b \in F$

$$\begin{aligned} \sigma(a \wedge b) &= \{F \in D(A) : a \wedge b \in F\} \\ &= \{F \in D(A) : a \in F \text{ e } b \in F\} \\ &= \{F \in D(A) : a \in F\} \cap \{F \in D(A) : b \in F\} \\ &= \sigma(a) \cap \sigma(b) \end{aligned}$$

per definizione di filtro se  $x, y \in F$  allora  $x \wedge y \in F$  e si ottiene anche che se  $a \wedge b \in F$  e  $a \wedge b \leq a$  allora  $a \in F$ ,  $a \wedge b \leq b$  allora  $b \in F$ ;

- $\sigma(a \vee b) = \sigma(a) \cup \sigma(b)$  per ogni  $a, b \in F$

$$\begin{aligned} \sigma(a \vee b) &= \{F \in D(A) : a \vee b \in F\} \\ &= \{F \in D(A) : a \in F \text{ o } b \in F\} \\ &= \{F \in D(A) : a \in F\} \cup \{F \in D(A) : b \in F\} \\ &= \sigma(a) \cup \sigma(b) \end{aligned}$$

infatti  $F$  è un filtro primo, quindi per definizione se  $x \vee y \in F$  allora o  $x \in F$  o  $y \in F$ , mentre, come sopra, dalla definizione di filtro si ottiene l'implicazione inversa:  $x \in F$  o  $y \in F$ , si assuma  $x \in F$  si ha che  $x \leq x \vee y$ , dunque  $x \vee y \in F$ , analogo il caso per  $y \in F$ ;

- $\sigma(a \rightarrow b) = \sigma(a) \Rightarrow \sigma(b)$ , dove  $\Rightarrow$  è definito nel modo seguente

$$F_1 \Rightarrow F_2 = \{a \in D(A) : \text{per ogni } c \text{ tale che } a \leq c, \text{ se } c \in F_1 \text{ allora } c \in F_2\}$$

Bisogna mostrare che  $a \rightarrow b \in F$  se e solo se per ogni filtro massimale (primo)  $G \supseteq F$ ,  $a \in G$  implica  $b \in G$ .

( $\implies$ ) Sia  $a \rightarrow b \in F$  e  $G$  un filtro primo tale che  $F \subseteq G$  e  $a \in G$ , allora  $a \rightarrow b \in G$ . In un'algebra di Boole  $a \rightarrow b \equiv a^c \vee b$  e  $G$  è primo. Siccome  $a^c \vee b \in G$ , allora o  $a^c \in G$  o  $b \in G$ . Se  $a^c \in G$ , allora  $0 = a \wedge a^c \in G$ , non può essere. Quindi,  $b \in G$ .

( $\impliedby$ ) Sia per ogni filtro massimale (primo) tale che  $G \supseteq F$ ,  $a \in G$  implica  $b \in G$ , si mostra che allora  $a \rightarrow b \in F$ . Infatti, se  $a \rightarrow b \notin F$ , allora esiste un filtro primo  $G$  tale che  $G \supseteq F$  e  $a \in G$ , ma  $b \notin G$ , impossibile per le nostre ipotesi, quindi  $a \rightarrow b \in F$ ;

- $\Box\sigma(a) = \sigma(\Box a)$ ,

( $\supseteq$ ) Sia  $F \in \sigma(\Box a)$ , ovvero  $\Box a \in F$ . Se  $F \sim_A G$  allora  $a \in G$  e quindi  $G \in \sigma(a)$  per ogni  $G \in D(A)$ . Perciò,  $F \in \Box\sigma(a)$ .

( $\subseteq$ ) Sia  $F \in \square\sigma(a)$ , sia  $U = \{x \in A : \square x \in F\}$ .  $U$  non è vuoto, in quanto  $1 \in U$ . Sia  $H$  il filtro generato da  $U$ , ovviamente  $F \sim_A H$  vale. Per le ipotesi fatte  $a \in H$ , quindi esistono elementi  $b_1, \dots, b_n \in U$  tali che  $b_1 \wedge \dots \wedge b_n \leq a$ . Perciò  $\square b_1 \wedge \dots \wedge \square b_n \leq \square a$ . Dato che  $\square b_1, \dots, \square b_n \in F$ ,  $\square a$  deve essere in  $F$ . Quindi,  $F \in \sigma(\square a)$ .

Perciò,  $\sigma$  è un omomorfismo, infine

- $\sigma$  è iniettiva, sia  $a \neq b$ , senza perdere di generalità si può assumere che  $b \not\leq a$ . Si consideri il filtro principale  $F_b$  generato da  $b$ . Allora per le ipotesi  $a \notin F_b$ . Per il teorema sui filtri primi (5.2.18), esiste un filtro primo  $G$  di  $\mathbf{A}$  tale che  $a \notin G$  e  $F_b \subseteq G$ . Dato che  $a \notin G$ , il filtro  $G$  non appartiene a  $\sigma(a)$ , mentre  $G \in \sigma(b)$  dato che  $b \in F_b \subseteq G$ . Perciò,  $\sigma(a) \neq \sigma(b)$ . ■

**Lemma 5.2.24.** *Ogni algebra modale finita  $\mathbf{A}$  è isomorfa alla sua estensione canonica.*

*Dimostrazione.* (Accenno) Si mostra che l'immersione  $\sigma$  da  $\mathbf{A}$  in  $\mathbf{A}^\delta$  è suriettiva quando  $\mathbf{A}$  è finita. Sia  $U$  un qualsiasi sottoinsieme chiuso superiormente di filtri massimali di  $\mathbf{A}$  ordinato da  $\sim_A$ , si prova che per ogni insieme  $U$  esiste sempre un elemento  $a \in A$  tale che si abbia per ogni filtro massimale  $F$ ,  $F \in U$  se e solo se  $a \in F$ . ■

Si esplicitano ora le connessioni tra la semantica di Kripke e la semantica algebrica. Sia  $L^*(\mathbf{F})$  l'insieme delle formule che sono valide in una struttura di Kripke  $\mathbf{F}$  e data un'algebra  $\mathbf{A}$  si indica con  $L(\mathbf{A})$  l'insieme di tutte le formule valide ( $\alpha$  è valida in  $\mathbf{A}$  se e solo se  $f(\alpha) = 1$  per un assegnamento  $f$  su  $\mathbf{A}$ ). La validità di una formula  $\phi$  in una struttura di Kripke per la logica modale può essere espressa in termini della validità della formula  $\phi$  nell'algebra modale duale.

**Lemma 5.2.25.** *L'uguaglianza  $L^*(\mathbf{F}) = L(\mathbf{F}^+)$  vale per ogni struttura  $\mathbf{F}$  di Kripke per la logica modale.*

*Dimostrazione.* Sia  $\mathbf{F} = \langle W, R \rangle$  una struttura di Kripke. Sia  $\nu$  una qualsiasi valutazione su  $\mathbf{F}$ , ovvero mappa dall'insieme delle variabili proposizionali in  $\mathcal{P}(W)$ , quindi  $\nu(P) \in \mathcal{P}(W)$  per ogni variabile proposizionale  $P$ . Per ogni assegnamento  $f$  nell'algebra modale  $\mathbf{F}^+$   $f(P)$  è un elemento di  $\mathcal{P}(W)$  per ogni variabile proposizionale  $P$ . Si supponga che  $f(P) = \nu(P)$  per ogni variabile proposizionale  $P$ , si dimostra per induzione sulla lunghezza della formula che  $f(\phi) = \nu(\phi)$  per ogni formula  $\phi$ . Per esempio, sia  $\phi \equiv \square\psi$ . Un elemento  $x$  appartiene a  $f(\square\psi)$ , ovvero  $\square f(\psi)$  se e solo se  $y \in f(\psi)$  per ogni  $y$  tale che  $xRy$ , se e solo se  $y \in \nu(\psi)$  per ogni  $y$  tale che  $xRy$  per ipotesi induttiva, se e solo se  $y \Vdash \psi$  per ogni  $y$  tale che  $wRy$ , per la definizione di  $\nu$ , se e solo se  $x \Vdash \square\psi$ , ovvero  $x \in \nu(\square\psi)$ . Per completare la dimostrazione si suppone prima che  $\alpha$  sia valida nell'algebra modale  $\mathbf{F}^+$ . Sia  $\nu$  una valutazione sulla struttura di Kripke  $\mathbf{F}$ . Si definisce un assegnamento  $f$  su  $\mathbf{F}^+$  ponendo  $f(P) = \nu(P)$  per ogni variabile proposizionale  $P$  e si mostra che l'uguaglianza vale per ogni formula  $\phi$ . Dato che  $\alpha$  è valida in  $\mathbf{F}^+$  si ha  $\nu(\alpha) = f(\alpha) = W$ , ovvero  $w \Vdash \alpha$  per ogni  $w \in W$ . Quindi,  $\alpha$  è vera in un modello di Kripke  $\langle W, R, \nu \rangle$  dove  $\nu$  è una qualsiasi valutazione. Perciò  $\alpha$  è valida nella struttura di Kripke  $\mathbf{F}$ . Sia, invece,  $\alpha$  valida in  $\mathbf{F}$ . Sia  $g$  un qualsiasi assegnamento di  $\mathbf{F}^+$ , sia  $\nu'$  una valutazione su  $\mathbf{F}$  tale che  $\nu'(P) = g(P)$  per ogni variabile proposizionale  $P$ , si trova che  $g(\alpha) = W$  per ogni assegnamento  $g$ .  $W$  è il più grande elemento di  $\mathbf{F}^+$ , dunque  $\alpha$  è valida. ■

L'uguaglianza  $L^*(\mathbf{A}_+) = L(\mathbf{A})$ , invece, non vale sempre, si ha solo una delle due inclusioni, come provato dal seguente lemma, per una dimostrazione si rimanda a [10].

**Lemma 5.2.26.** *La relazione di inclusione  $L^*(\mathbf{A}_+) \subseteq L(\mathbf{A})$  vale per ogni algebra modale  $\mathbf{A}$  e la sua struttura duale  $\mathbf{A}_+$ . Perciò vale  $L(\mathbf{A}^\delta) \subseteq L(\mathbf{A})$ . Quando  $\mathbf{A}$  è un'algebra modale finita vale l'uguaglianza  $L(\mathbf{A}^\delta) = L(\mathbf{A})$ .*



**Definizione 5.2.27.** Una logica modale  $\mathbf{L}$  si dice *Kripke completa rispetto ad una classe  $\mathcal{C}$  di strutture di Kripke*, quando una formula  $\phi$  è dimostrabile in  $\mathbf{L}$  se e solo se è valida in ogni struttura di Kripke  $\mathcal{C}$ . Una logica modale  $\mathbf{L}$  è *Kripke completa* se è Kripke completa rispetto ad una classe  $\mathcal{C}$  di strutture di Kripke.

Per i lemmi 5.2.24 e 5.2.26 si conclude che

**Corollario 5.2.28.** *Se una logica modale ha la proprietà del modello finito allora è Kripke completa.*

Si possono dimostrare risultati analoghi per la semantica algebrica e la semantica di Kripke nel caso intuizionista.

#### 5.2.4 Interpretazione della logica intuizionista in $\mathbf{S4p}$

Come si è provato in questa tesi, vi è una relazione tra le formule che sono derivabili in logica intuizionista e le formule derivabili in  $\mathbf{S4}$ , nella sottosezione precedente sono state evidenziate, inoltre, delle correlazioni tra l'algebra di Heyting e l'algebra modale. Si definisce, di seguito, la traduzione di  $\mathbf{LIp}$  in  $\mathbf{S4p}$  di Gödel-McKinsey-Tarski e si darà una dimostrazione algebrica della sua validità e conservatività.

**Definizione 5.2.29** (Traduzione di Gödel). La *traduzione di Gödel  $T$*  si definisce induttivamente sulla definizione della formula in questo modo (dove  $P$  è atomica,  $\perp$  costante falso,  $\text{fr}_1, \text{fr}_2$  formule):

- $T(P) = \Box P$ ;
- $T(0) = \Box 0$ ;
- $T(\text{fr}_1 \vee \text{fr}_2) = T(\text{fr}_1) \vee T(\text{fr}_2)$ ;
- $T(\text{fr}_1 \wedge \text{fr}_2) = T(\text{fr}_1) \wedge T(\text{fr}_2)$ ;
- $T(\text{fr}_1 \rightarrow \text{fr}_2) = \Box(\neg T(\text{fr}_1) \vee T(\text{fr}_2))$ .

Lo scopo è dimostrare da un punto di vista algebrico che una formula  $\text{fr}$  è dimostrabile in  $\mathbf{LIp}$  se e solo se  $T(\text{fr})$  è dimostrabile in  $\mathbf{S4p}$ , ovvero che  $\text{fr}$  è valida in tutte le algebre di Heyting se e solo se  $T(\text{fr})$  è valida in tutte le algebre- $\mathbf{S4p}$ . Sia  $\mathbf{A} = \langle A, \vee, \wedge, \rightarrow, \Box, 0 \rangle$  un'algebra- $\mathbf{S4p}$ , si definisce allora  $a \in A$  aperto se e solo se  $\Box a = a$ . Sia  $H$  l'insieme di tutti gli elementi aperti di  $A$ . Si ha che se  $a, b \in H$  allora  $a \vee b, a \wedge b \in H$ . Infatti, siano  $a, b \in H$  allora per l'assioma-T vale  $\Box(a \vee b) \leq a \vee b$  e per la monotonia di  $\Box$ ,  $\Box(a \vee b) \geq \Box a \vee \Box b = a \vee b$ . Siano  $a, b \in H$ , per definizione di algebra modale vale la prima uguaglianza ed essendo aperti  $a, b$  si conclude; che  $\Box(a \wedge b) = \Box a \wedge \Box b = a \wedge b$ . Siano  $a, b \in H$ , si definisce

$$a \Box \rightarrow b = \Box(\neg a \vee b).$$

**Lemma 5.2.30.** *Data un'algebra- $\mathbf{S4p}$ ,  $\mathbf{A} = \langle A, \vee, \wedge, \rightarrow, \Box, 0 \rangle$ , si definisce  $\mathbf{H} = \langle H, \vee, \wedge, \Box \rightarrow, 0 \rangle$  dove  $H$  è l'insieme di tutti gli elementi aperti di  $A$  e  $\Box \rightarrow$  è definito come  $a \Box \rightarrow b = \Box(\neg a \vee b)$ . Allora,  $\mathbf{H}$  è un'algebra di Heyting. Inoltre, se  $h$  e  $g$  sono assegnamenti in  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{A}$ , rispettivamente, e soddisfano  $h(P) = g(T(p))$  per ogni formula atomica  $P$ , allora  $h(\phi) = g(T(\phi))$  vale per ogni formula intuizionistica  $\phi$ .*

*Dimostrazione.* Per provare che  $\mathbf{H}$  è un'algebra di Heyting è sufficiente mostrare che per ogni  $a, b, c \in H$ ,  $a \wedge c \leq b$  se e solo se  $c \leq a \multimap b$ . Se  $c \leq a \multimap b$ , allora

$$\begin{aligned} a \wedge c \leq a \wedge (a \multimap b) &= \Box a \wedge \Box(\neg a \vee b) \\ &= \Box(a \wedge (\neg a \vee b)) \\ &= \Box(a \wedge b) \\ &\leq \Box b = b \end{aligned}$$

Viceversa, se  $a \wedge c \leq b$ , poiché vale  $\neg a \wedge c \leq \neg a$ , si ha

$$\begin{aligned} c &= (\neg a \wedge c) \vee (a \wedge c) \\ &\leq \neg a \vee b \end{aligned}$$

Quindi,

$$c = \Box c \leq \Box(\neg a \vee b) = a \multimap b$$

Si supponga per ogni formula atomica  $P$  che valga  $h(P) = g(T(P))$ . Si dimostra per induzione sulla definizione della formula che per ogni formula intuizionista  $\phi$  vale  $h(\phi) = g(T(\phi))$ .

- caso  $\phi \equiv \text{fr}_1 \vee \text{fr}_2$ , si ha per la definizione di  $T$  che

$$\begin{aligned} h(\text{fr}_1 \vee \text{fr}_2) &= h(\text{fr}_1) \vee h(\text{fr}_2) \\ &= g(T(\text{fr}_1)) \vee g(T(\text{fr}_2)) \\ &= g(T(\text{fr}_1 \vee \text{fr}_2)); \end{aligned}$$

- caso  $\phi \equiv \text{fr}_1 \wedge \text{fr}_2$ , si ha per la definizione di  $T$  che

$$\begin{aligned} h(\text{fr}_1 \wedge \text{fr}_2) &= h(\text{fr}_1) \wedge h(\text{fr}_2) \\ &= g(T(\text{fr}_1)) \wedge g(T(\text{fr}_2)) \\ &= g(T(\text{fr}_1 \wedge \text{fr}_2)); \end{aligned}$$

- caso  $\phi \equiv \text{fr}_1 \rightarrow \text{fr}_2$ ,

$$\begin{aligned} h(\text{fr}_1 \rightarrow \text{fr}_2) &= h(\text{fr}_1) \multimap h(\text{fr}_2) \\ &= g(T(\text{fr}_1)) \multimap g(T(\text{fr}_2)) \\ &= \Box(\neg g(T(\text{fr}_1)) \vee g(T(\text{fr}_2))) \\ &= g(\Box(\neg T(\text{fr}_1) \vee T(\text{fr}_2))) \\ &= g(T(\text{fr}_1 \rightarrow \text{fr}_2)). \end{aligned}$$

■

**Corollario 5.2.31.** *Sia  $\phi$  una formula intuizionista, se  $\phi$  è valida in ogni algebra di Heyting, allora  $T(\phi)$  è valida in ogni algebra-**S4p**.*

*Dimostrazione.* Si supponga che  $T(\phi)$  non sia valida in un'algebra-**S4p** e si prenda un assegnamento  $g$  su  $\mathbf{A}$  tale che  $g(T(\phi)) < 1$ . Sia, allora,  $h(P) = g(T(P))$  con  $P$  formula atomica un assegnamento su  $\mathbf{H}$ , per il lemma precedente risulta che  $h(\phi) = g(T(\phi)) < 1$ , perciò  $\phi$  non è valida in  $\mathbf{H}$ . ■

Per dimostrare l'implicazione opposta è necessario utilizzare il seguente lemma,

**Lemma 5.2.32.** *Per ogni algebra di Heyting  $\mathbf{H}$  esiste un'algebra-**S4p**,  $\mathbf{S}$ , tale che  $\mathbf{H}$  sia incorporata in un'algebra di Heyting  $\mathbf{H}_\mathbf{S}$ , quella composta da tutti gli elementi aperti di  $\mathbf{S}$ .*

*Dimostrazione.* Grazie al teorema della rappresentazione di Stone si ha il risultato che ogni algebra di Heyting può essere incorporata in un'estensione canonica  $\mathbf{H}^\delta$  equivalente a  $\mathcal{U}(\mathcal{D}(\mathbf{H}))$ . Si prendono, ora,  $\mathcal{D}(\mathbf{H}) = \langle D(H), \subseteq \rangle$  come l'insieme di tutti i filtri primi di  $\mathbf{H}$ , ordinati dall'inclusione, e  $\mathcal{U}(\mathcal{D}(\mathbf{H}))$  è formato da tutti i sottoinsiemi superiormente chiusi di  $\mathcal{D}(\mathbf{H})$ . La struttura  $\langle D(H), \subseteq \rangle$  può essere vista anche come una struttura modale e la relazione  $\subseteq$  è sia riflessiva che transitiva. Dunque,  $\mathcal{D}(\mathbf{H})$  determina un'algebra modale: l'algebra di Boole dell'insieme delle parti  $\mathcal{P}(\mathcal{D}(\mathbf{H}))$  con un operatore modale  $\Box$  tale che soddisfi per ogni sottoinsieme  $V \in D(H)$   $\Box V = \{F \in D(H) : G \in V \text{ per ogni } G \text{ tale che } F \subseteq G\}$ . Dato che la relazione è sia riflessiva che transitiva si ha che  $\Box$  è un operatore modale per **S4p** su  $\mathcal{P}(\mathcal{D}(\mathbf{H}))$ , ovvero valgono gli assiomi T e 4. Si può mostrare che un sottoinsieme  $V$  di  $D(H)$  è un elemento aperto se e solo se  $V \in \mathcal{U}(\mathcal{D}(\mathbf{H}))$ . L'implicazione di un'algebra di Heyting  $\mathcal{U}(\mathcal{D}(\mathbf{H}))$  è definita come

$$V \Rightarrow W = \{F \in D(H) : \text{per ogni } G \text{ tale che } F \subseteq G, \text{ se } G \in V \text{ allora } G \in W\}$$

corrisponde a

$$\Box(\neg V \cup W) = V \Box \rightarrow W.$$

Perciò,  $\mathbf{H}^\delta$ , definito da  $\mathcal{U}(\mathcal{D}(\mathbf{H}))$ , è equivalente all'algebra di Heyting composta da tutti gli elementi aperti dell'algebra di Boole  $\mathcal{P}(\mathcal{D}(\mathbf{H}))$ , il lemma è soddisfatto prendendo come  $\mathbf{S} \equiv \mathcal{P}(\mathcal{D}(\mathbf{H}))$ . ■

**Corollario 5.2.33.** *Sia  $\phi$  una formula intuizionista, se  $T(\phi)$  è valida in ogni algebra-**S4p**, allora  $\phi$  è valida in ogni algebra di Heyting.*

*Dimostrazione.* Si supponga che  $\phi$  non sia valida in un'algebra di Heyting  $\mathbf{H}$ , allora per il lemma precedente esiste un'algebra di Heyting  $\mathbf{H}_{\mathbf{S}}$  composta da tutti gli elementi aperti di  $\mathbf{S}$ , algebra-**S4p**, nella quale  $\phi$  non è valida. Sia  $h$  un assegnamento su  $\mathbf{H}_{\mathbf{S}}$  tale che  $h(\phi) < 1$ . Sia, allora,  $g$  un assegnamento su  $\mathbf{S}$  tale che  $g(P) = h(P)$  per ogni formula atomica  $P$ . Dato che  $h(P)$  è un elemento aperto di  $\mathbf{S}$

$$g(T(P)) = g(\Box P) = \Box g(P) = \Box h(P) = h(P)$$

e per il lemma 5.2.30  $g(T(\phi)) = h(\phi) < 1$ , dunque  $T(\phi)$  non è valida in  $\mathbf{S}$ . ■

*Osservazione.* Si osservi che la dimostrazione della conservatività dell'interpretazione utilizza il teorema di rappresentazione di Stone, in particolare il lemma di Zorn, dunque non risulta costruttiva.



# Conclusioni

In questo elaborato si sono descritte due interpretazioni conservative, tra loro equivalenti, della logica intuizionista proposizionale nel frammento proposizionale della logica modale **S4**.

La rilevanza di tali interpretazioni in un'estensione della logica classica come **S4** risiede nel fatto che esse conservano le proprietà di disgiunzione e di esistenza che caratterizzano la logica intuizionista rispetto a quella classica, proprietà non conservate, invece, dalla usuale immersione della logica intuizionista in quella classica.

Sono state, inoltre, introdotte sia la semantica di Kripke sia la semantica algebrica per la logica modale **S4**, al fine di mostrare che l'interpretazione della logica intuizionista in **S4** composta con la traduzione della doppia negazione di Gödel-Gentzen non coincide con l'immersione della logica classica in **S4**.



# Appendice A

## Il sistema di Hilbert Hc

Assiomi

$A \rightarrow (B \rightarrow A), (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C));$   
 $A \rightarrow A \vee B, B \rightarrow A \vee B;$   
 $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C));$   
 $A \& B \rightarrow A, A \& B \rightarrow B, A \rightarrow (B \rightarrow (A \& B));$   
 $\forall x A \rightarrow A[x/t], A[x/t] \rightarrow \exists x A;$   
 $\forall x (B \rightarrow A) \rightarrow (B \rightarrow \forall y A[x/y]) \quad (x \notin VL(B), y \equiv x \text{ o } y \notin VL(A));$   
 $\forall x (A \rightarrow B) \rightarrow (\exists y A[x/y] \rightarrow B) \quad (x \notin VL(B), y \equiv x \text{ o } y \notin VL(A));$   
 $\perp \rightarrow A;$   
 $\neg\neg A \rightarrow A \quad \text{Legge della doppia negazione}$

Regole per le deduzioni da un insieme di assunzioni  $\Gamma$ :

*Regola di Assunzione*

Se  $A \in \Gamma$ , allora  $\Gamma \vdash A$ ;

*Modus Ponens*

Se  $\Gamma \vdash A \rightarrow B, \Gamma \vdash A$ , allora  $\Gamma \vdash B$ ;

*Regola di Generalizzazione*

Se  $\Gamma \vdash A$ , allora  $\Gamma \vdash \forall y A[x/y], (x \notin VL(\Gamma), y \equiv x \text{ o } y \notin VL(A))$ .





## Appendice B

# Il sistema di Gentzen G1c

Assiomi

$$A \Rightarrow A \quad \text{ax - id}$$

$$\perp \Rightarrow \quad \text{ax - } \perp$$

Regole di indebolimento e di contrazione

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta} \text{in}_{sx}$$

$$\frac{A, A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta} \text{cn}_{sx}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A} \text{in}_{dx}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A} \text{cn}_{dx}$$

Regole per gli operatori logici

$$\frac{A_i, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A_0 \& A_1, \Gamma \Rightarrow \Delta} \& - S \quad (i = 0, 1)$$

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow \Delta} \vee - S$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \rightarrow B, \Gamma \Rightarrow \Delta} \rightarrow - S$$

$$\frac{A[x/y], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x A, \Gamma \Rightarrow \Delta} \forall - S$$

$$\frac{A[x/y], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x A, \Gamma \Rightarrow \Delta} \exists - S \quad (y \notin \text{VL}(\Gamma, \exists x A, \Delta))$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \& B} \& - D$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A_i}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A_0 \vee A_1} \vee - D \quad (i = 0, 1)$$

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \rightarrow B} \rightarrow - D$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A[x/y]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x A} \forall - D \quad (y \notin \text{VL}(\Gamma, \forall x A, \Delta))$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A[x/t]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x A} \exists - D$$



# Appendice C

## Il sistema di Gentzen G3c

Assiomi

$$P, \Gamma \Rightarrow \Delta, P \quad \text{ax - id (P atomica)}$$

$$\perp, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad \text{ax - } \perp$$

Regole per gli operatori logici

$$\begin{array}{l} \frac{A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \& B, \Gamma \Rightarrow \Delta} \& - S \\ \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow \Delta} \vee - S \\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \rightarrow B, \Gamma \Rightarrow \Delta} \rightarrow - S \\ \frac{\forall x A, A[x/t], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x A, \Gamma \Rightarrow \Delta} \forall - S \\ \frac{A[x/y], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x A, \Gamma \Rightarrow \Delta} \exists - S \quad (y \notin \text{VL}(\Gamma, \exists x A, \Delta)) \end{array}$$
$$\begin{array}{l} \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \& B} \& - D \\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B} \vee - D \\ \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \rightarrow B} \rightarrow - D \\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A[x/y]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x A} \forall - D \quad (y \notin \text{VL}(\Gamma, \forall x A, \Delta)) \\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A[x/t], \exists x A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x A} \exists - D \end{array}$$



## Appendice D

# Il sistema di Gentzen G3i

Assiomi

$$P, \Gamma \Rightarrow P \quad \text{ax - id} \quad (P \text{ atomica})$$

$$\perp, \Gamma \Rightarrow A \quad \text{ax - } \perp$$

Regole per gli operatori logici

$$\begin{array}{l} \frac{A, B, \Gamma \Rightarrow C}{A \& B, \Gamma \Rightarrow C} \& - S \\ \frac{A, \Gamma \Rightarrow C \quad B, \Gamma \Rightarrow C}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow C} \vee - S \\ \frac{A \rightarrow B, \Gamma \Rightarrow A \quad B, \Gamma \Rightarrow C}{A \rightarrow B, \Gamma \Rightarrow C} \rightarrow - S \\ \frac{\forall x A, A[x/t], \Gamma \Rightarrow C}{\forall x A, \Gamma \Rightarrow C} \forall - S \\ \frac{A[x/y], \Gamma \Rightarrow C}{\exists x A, \Gamma \Rightarrow C} \exists - S \quad (y \notin \text{VL}(\Gamma, \exists x A, C)) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \& B} \& - D \\ \frac{\Gamma \Rightarrow A_i}{\Gamma \Rightarrow A_0 \vee A_1} \vee - D \quad (i = 0, 1) \\ \frac{A, \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \rightarrow B} \rightarrow - D \\ \frac{\Gamma \Rightarrow A[x/y]}{\Gamma \Rightarrow \forall x A} \forall - D \quad (y \notin \text{VL}(\Gamma, \forall x A)) \\ \frac{\Gamma \Rightarrow A[x/t]}{\Gamma \Rightarrow \exists x A} \exists - D \end{array}$$



## Appendice E

# Logica intuizionista proposizionale LIp

Assiomi

$$\frac{ax - id}{\Gamma, A, \Gamma' \Rightarrow A}$$

$$\frac{ax - \perp}{\Gamma, \perp, \Gamma' \Rightarrow C}$$

$$\frac{ax - tt}{\Gamma \Rightarrow tt}$$

Regole

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \Rightarrow C}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \Rightarrow C}^{scsx}$$

$$\frac{\frac{\Gamma, A, B \Rightarrow C}{\Gamma, A \& B \Rightarrow C} \& - S}{\Gamma, A \Rightarrow C \quad \Gamma, B \Rightarrow C}{\Gamma, A \vee B \Rightarrow C} \vee - S \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \& B} \& - D$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A}{\Gamma \Rightarrow A \vee B} \vee - D_1 \quad \frac{\Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \vee B} \vee - D_2$$

$$\frac{\Gamma, \neg A \Rightarrow A}{\Gamma, \neg A \Rightarrow B} \neg - S \quad \frac{\Gamma, A \Rightarrow \perp}{\Gamma \Rightarrow \neg A} \neg - D$$

$$\frac{\Gamma, A \rightarrow B \Rightarrow A \quad \Gamma, B \Rightarrow C}{\Gamma, A \rightarrow B \Rightarrow C} \rightarrow - S \quad \frac{\Gamma, A \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \rightarrow B} \rightarrow - D$$





# Bibliografia

- [1] Fabio Bellissima e Paolo Pagli. *La seconda rivoluzione scientifica: matematica e logica. Le logiche modali*. [https://www.treccani.it/enciclopedia/la-seconda-rivoluzione-scientifica-matematica-e-logica-le-logiche-modali\\_%28Storia-della-Scienza%29/](https://www.treccani.it/enciclopedia/la-seconda-rivoluzione-scientifica-matematica-e-logica-le-logiche-modali_%28Storia-della-Scienza%29/). 2004. (Visitato il 01/04/2023).
- [2] Patrick Blackburn, Maarten de Rijke e Yde Venema. *Modal Logic*. Cambridge University Press, giu. 2001. DOI: [10.1017/cbo9781107050884](https://doi.org/10.1017/cbo9781107050884). URL: <https://doi.org/10.1017/cbo9781107050884>.
- [3] Umberto Bottazzini. *La seconda rivoluzione scientifica: introduzione. Filosofia e pratica matematica in "Storia della Scienza"*. [https://www.treccani.it/enciclopedia/la-seconda-rivoluzione-scientifica-introduzione-filosofia-e-pratica-matematica\\_%28Storia-della-Scienza%29/](https://www.treccani.it/enciclopedia/la-seconda-rivoluzione-scientifica-introduzione-filosofia-e-pratica-matematica_%28Storia-della-Scienza%29/). 2004. (Visitato il 05/04/2023).
- [4] M.J. Cresswell e G.E. Hughes. *A New Introduction to Modal Logic*. Routledge, ago. 1996, pp. 111–121. DOI: [10.4324/9780203028100](https://doi.org/10.4324/9780203028100). URL: <https://doi.org/10.4324/9780203028100>.
- [5] Dirk van Dalen. *Logic and Structure*. Springer London, 2013, pp. 162–173. DOI: [10.1007/978-1-4471-4558-5](https://doi.org/10.1007/978-1-4471-4558-5). URL: <https://doi.org/10.1007/978-1-4471-4558-5>.
- [6] Ludovico Geymonat. *Storia del pensiero filosofico e scientifico*. Vol. 8. Garzanti Milano, 1973, pp. 193–266.
- [7] Robert Goldblatt. *Logics of time and computation*. en. Center for the Study of Language e Information Publications, giu. 1992, pp. 31–36.
- [8] *Logica intuizionista*. [https://www.treccani.it/enciclopedia/logica-intuizionista\\_%28Enciclopedia-della-Matematica%29/](https://www.treccani.it/enciclopedia/logica-intuizionista_%28Enciclopedia-della-Matematica%29/). 2013. (Visitato il 05/04/2023).
- [9] Maria Emilia Maietti. *NOTE di Logica Matematica -2021/22*. Dispense. Università degli Studi di Padova.
- [10] Hiroakira Ono. *Proof Theory and Algebra in Logic*. Springer Singapore, 2019, pp. 139–149. DOI: [10.1007/978-981-13-7997-0](https://doi.org/10.1007/978-981-13-7997-0). URL: <https://doi.org/10.1007/978-981-13-7997-0>.
- [11] Helena Rasiowa e Roman Sikorski. *The Mathematics of Metamathematics*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1963, pp. 469–488.
- [12] G. Sambin. «Logica intuizionistica e logica classica a confronto». In: *Un mondo di idee*. Springer Milan, 2011, pp. 87–106. DOI: [10.1007/978-88-470-1744-3\\_7](https://doi.org/10.1007/978-88-470-1744-3_7). URL: [https://doi.org/10.1007/978-88-470-1744-3\\_7](https://doi.org/10.1007/978-88-470-1744-3_7).
- [13] A. S. Troelstra e H. Schwichtenberg. *Basic Proof Theory*. Cambridge University Press, lug. 2000, pp. 284–291. DOI: [10.1017/cbo9781139168717](https://doi.org/10.1017/cbo9781139168717). URL: <https://doi.org/10.1017/cbo9781139168717>.