

# Università degli studi di Padova

---

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

## Studio di un modello fenomenologico a cluster per il $^{13}\text{C}$ .

**Relatore:**

Prof. Lorenzo Fortunato

**Laureando:** Marco Vitti

**Matricola:** 1030036

---

Anno Accademico 2014/2015



*Ad Alessandro ed Alessandro*



# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Definizione del problema</b>	<b>5</b>
2.1	Semplificazione del problema . . . . .	5
2.1.1	Funzioni angolari adattate . . . . .	8
2.1.2	Equazione radiale . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Risultati e discussione</b>	<b>13</b>
3.1	Metodo e presentazione dei risultati . . . . .	13
3.1.1	Autofunzioni radiali . . . . .	14
3.2	Verifica del modello . . . . .	17
3.2.1	<i>r.m.s. matter radius</i> del $^{13}\text{C}$ . . . . .	17
3.2.2	Calcolo della probabilità di transizione $\gamma$ . . . . .	17
3.3	Discussione . . . . .	18
<b>4</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>21</b>
	Riferimenti bibliografici . . . . .	23



# Capitolo 1

## Introduzione

In questa tesi si studierà la struttura del nucleo di  $^{13}\text{C}$  attraverso un modello fenomenologico a clusters nell'ipotesi di ripartire i nucleoni costituenti in tre particelle  $\alpha$  ed un neutrone, che interagiscono attraverso un potenziale  $\alpha - \alpha$  ed uno  $\alpha$ -neutrone.

Quando si parla di clustering ci si riferisce ad un modello utilizzato in fisica nucleare, in cui si ipotizza che il nucleo atomico sia formato da aggregati (*clusters* in inglese) di protoni e neutroni, in particolare da sistemi stabili come le particelle  $\alpha$ <sup>1</sup>: si parla in tal caso di  $\alpha$ -clustering, e i nuclei aventi  $Z=N$  con  $Z$  e  $N$  pari vengono detti nuclei  $\alpha$ -coniugati.

Il modello a cluster è risultato nel tempo un utile approccio nello studio dei nuclei leggeri (fino ad  $A=40$  circa), complementare al ben noto modello a shell, riuscendo in alcuni casi a spiegare stati nucleari non previsti da quest'ultimo, ma che emergono dai risultati sperimentali. In particolare il modello a cluster si rivela utile per fare chiarezza sugli stati ad elevate energie di eccitazione, mentre lo stato fondamentale ed i primi stati eccitati sono spesso ben descritti dal modello a shell.

Il modello ad  $\alpha$ -clusters venne proposto inizialmente da Bethe e Bacher nel 1936 [1], e nel 1937 da von Weizsacker, Wheeler e Wefelmeier [2-4], dopo che Gamow [5] aveva introdotto l'ipotesi della *preformazione* delle particelle  $\alpha$  per spiegare il decadimento  $\alpha$  nei nuclei pesanti. Nel 1938 Hafstadt e Teller [6] svilupparono con successo una descrizione dei primi nuclei  $\alpha$ -coniugati ( $^8\text{Be}$ ,  $^{12}\text{C}$ ,  $^{16}\text{O}$ ); estesero inoltre il modello al caso in cui un nucleone aggiuntivo interagisce con i clusters (ad esempio  $^9\text{Be}$ ,  $^{13}\text{C}$ ,  $^{17}\text{O}$  nel caso di un neutrone), utilizzando tecniche proprie della fisica molecolare, in cui le  $\alpha$  e i nucleoni sono visti come gli analoghi dei singoli atomi e degli elettroni di valenza rispettivamente.

Negli anni seguenti gli studi sulla struttura nucleare si sono concentrati maggiormente sul modello a shell, ma negli anni Sessanta l'interesse verso i modelli a cluster si è riaperto e sono stati introdotti nuovi metodi di trat-

---

<sup>1</sup>Una particella  $\alpha$  è un nucleo di  $^4\text{He}$ .

tazione teorica come il Resonating Group Method (RGM) e successivamente l'Antisymmetrized Molecular Dynamics (AMD). Entrambi gli approcci sono completamente microscopici, tengono quindi conto esplicitamente del principio di Pauli per i clusters e della loro struttura interna. L'AMD ha inoltre la peculiarità di essere un modello indipendente dall'ipotesi dell'esistenza dei clusters. Nonostante ciò, a partire da calcoli microscopici che utilizzano l'interazione nucleone-nucleone l'aggregazione in clusters emerge naturalmente. Infine la tecnica utilizzata in fisica molecolare nota come Linear Combination of Atomic Orbitals (LCAO) è stata trasposta in ambito nucleare nella Linear Combination of Nuclear Orbitals (LCNO), riprendendo il lavoro di Hafstadt e Teller. La differenza sostanziale tra i due metodi consiste nel tipo di forze considerate: unicamente quella coulombiana nel caso atomico e quelle forte e coulombiana nel caso nucleare [7, 8].

Le caratteristiche proprie delle particelle  $\alpha$  le rendono i candidati ideali per la descrizione dei nuclei in un modello a cluster. In primo luogo sono sistemi molto stabili essendo nuclei doppiamente-magici ( $Z=N=2$ ): l'energia di legame per nucleone ( $7.08 \text{ MeV}$ ) è nettamente superiore rispetto ai nuclei vicini e il primo stato eccitato del nucleo di  ${}^4\text{He}$  si trova a circa  $20 \text{ MeV}$ . In secondo luogo l'interazione  $\alpha - \alpha$  è fortemente repulsiva a brevi distanze, per effetto del principio di Pauli [9]. Infatti il sistema  ${}^8\text{Be}$  non è legato, e ciò significa che il potenziale effettivo  $\alpha - \alpha$  non è sufficientemente profondo per consentire stati legati.

Le particelle  $\alpha$  mostrano quindi una tendenza spiccata a mantenere la propria identità quando interagiscono tra loro all'interno del nucleo [10]. Altre osservazioni a supporto dell'ipotesi dell' $\alpha$ -clustering sono l'aumento netto dell'energia di legame per i nuclei  $\alpha$ -coniugati e il fenomeno del decadimento- $\alpha$  nei nuclei pesanti.

Inoltre le reazioni che prevedono lo scambio di una particella  $\alpha$ , come  $(\alpha, \gamma)$ ,  $({}^6\text{Li}, d)$  e  $({}^7\text{Li}, t)$ , popolano selettivamente alcuni stati dello spettro energetico e non altri, suggerendo così che il clustering giochi un ruolo importante anche nei meccanismi di reazione.

Poichè le particelle  $\alpha$  interagiscono debolmente tra loro le configurazioni a cluster nei nuclei  $\alpha$ -coniugati saranno poco stabili e si riscontreranno a energie di eccitazione vicine alla soglia di decomposizione in clusters dei nuclei originari. La situazione è ben illustrata dai diagrammi (Figura 1.1) proposti da Ikeda nel 1968 [11]. Si può notare che al crescere del numero di massa vengono proposti nuovi clusters più pesanti che compaiono a basse energie di eccitazione, a volte formando strutture asimmetriche con clusters diversi. I diagrammi hanno solo una validità pittorica, servono a illustrare la possibile decomposizione di un certo numero di massa in partizioni via via più piccole all'aumentare dell'energia di eccitazione. La progressiva complessità nelle strutture dei diagrammi suggerisce che un modello ad  $\alpha$ -clusters possa essere vantaggioso per la descrizione dei nuclei  $\alpha$ -coniugati più leggeri, come il berillio ed il carbonio.



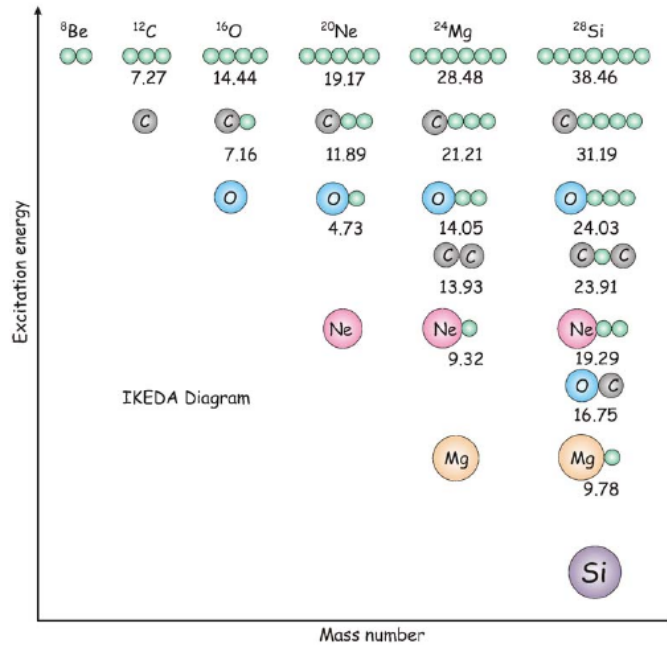


Figura 1.1: Diagrammi di Ikeda per i primi nuclei  $\alpha$ -coniugati. Nuovi clusters piú pesanti, come il nucleo di  ${}^{16}\text{O}$ , sono proposti all'aumentare del numero di massa.

## Il nucleo di ${}^{13}\text{C}$

L'ipotesi di una struttura a cluster per gli isotopi del carbonio è recentemente diventata motivo di interesse. Il clustering per gli isotopi del berillio sembra ormai comprovato (soprattutto nel caso del  ${}^9\text{Be}$ ) [12] e gli studi si sono concentrati sul secondo dei nuclei  $\alpha$ -coniugati, il carbonio appunto.

Due sono le configurazioni a cluster piú studiate negli isotopi del carbonio: la catena lineare e la struttura triangolare. Nella prima le tre  $\alpha$  sono disposte in fila lungo lo stesso asse, e gli eventuali neutroni aggiuntivi si posizionano tra un cluster e l'altro. Un esempio è lo stato  $0_2^+$  del  ${}^{12}\text{C}$ , conosciuto come *stato di Hoyle*, molto importante per spiegare l'abbondanza dell'isotopo nell'universo. Lo stato  $0_2^+$  è stato spesso descritto in passato come una catena lineare di tre  $\alpha$  disposte lungo lo stesso asse, mostrando le caratteristiche di un nucleo *iperdeformato*<sup>2</sup>. Tuttavia è stato dimostrato che questa disposizione per il  ${}^{12}\text{C}$  è instabile rispetto ad una piegatura (*bending modes*). A tutt'oggi sembra piú promettente un approccio in cui si studia buona parte dello spettro del nucleo sotto l'ipotesi di una configurazione triangolare alla quale sono aggiunte vibrazioni e rotazioni.

<sup>2</sup>Un nucleo di forma ellissoidale che presenta un rapporto degli assi di 3:1.

Nella configurazione triangolare le  $\alpha$  formano generalmente un triangolo equilatero e i neutroni aggiuntivi non giacciono sullo stesso piano dei clusters, ma sull'asse ortogonale al triangolo, in una struttura piramidale a base triangolare.

Una terza possibilità è una via di mezzo tra queste due configurazioni, e consiste in una catena lineare leggermente piegata in modo che la struttura base delle  $\alpha$  formi un triangolo isoscele.

Per il  $^{13}\text{C}$  ( $Z=6$ ,  $N=7$ ) sono ancora poche le evidenze sperimentali a sostegno di una struttura a cluster e una spettroscopia completa non è stata ancora ottenuta. Lo studio del nucleo di  $^{13}\text{C}$  è inoltre utile per comprendere reazioni di interesse in ambito astrofisico, come quelle del ciclo CNO nelle stelle. Pertanto è opportuno formulare modelli e ipotesi su cui basarsi per delle previsioni delle proprietà spettroscopiche. Milin e von Oertzen [13, 14] hanno evidenziato dei possibili stati a cluster in due bande rotazionali sopra i  $9.50\text{ MeV}$  di eccitazione, utilizzando un approccio di tipo LCNO. Un altro lavoro proposto da Dufour e Descouvemont [15] cerca di riprodurre le proprietà spettroscopiche del  $^{13}\text{C}$  utilizzando un modello microscopico multicluster simile al RGM, ovvero il Generator Coordinate Method (GCM).

La configurazione studiata in questa tesi è descritta al Capitolo 2, in cui viene presentato il modello. Nel Capitolo 3 vengono esposti e discussi i risultati, mentre le conclusioni sono esposte al Capitolo 4.

## Capitolo 2

# Definizione del problema

Iniziamo dunque descrivendo la configurazione che verrà studiata. Come anticipato nell'introduzione verrà usata una trattazione fenomenologica, non microscopica, pertanto la struttura interna delle particelle  $\alpha$  sarà trascurata: il sistema sarà composto dunque da un core formato da tre  $\alpha$  e da un neutrone. Si considera ciascuna  $\alpha$  ai vertici di un triangolo equilatero di lato  $R_{\alpha\alpha}$  che giace sul piano (x,y); il neutrone si trova ad interagire con questa struttura. L'hamiltoniana del sistema è

$$H = \sum_{i=1}^3 \frac{\vec{P}_{\alpha_i}^2}{2m_{\alpha}} + \frac{\vec{P}_n^2}{2m_n} + \sum_{i<j=1}^3 V_{\alpha_i\alpha_j}(|\vec{R}_{\alpha_i} - \vec{R}_{\alpha_j}|) + \sum_{i=1}^3 V_{\alpha_i n}(|\vec{r}_n - \vec{R}_{\alpha_i}|) \quad (2.1)$$

dove  $\vec{r}_n$  e  $\vec{R}_{\alpha_i}$  sono la distanza rispettivamente del neutrone e della i-esima  $\alpha$  dal centro del triangolo, che viene preso come origine del sistema (Figura 2.1). Evidentemente nel caso trattato  $|\vec{R}_{\alpha_i} - \vec{R}_{\alpha_j}| = R_{\alpha\alpha}$ .

### 2.1 Semplificazione del problema

Il modello prevede alcune approssimazioni che verranno ora introdotte. Come prima semplificazione i gradi di libertà per le tre  $\alpha$  sono congelati e i clusters vengono raggruppati in un singolo core la cui energia viene definita classicamente come la somma dei potenziali  $V_{\alpha\alpha}$

$$E_{\alpha} = 3V_{\alpha\alpha}(R_{\alpha\alpha})$$

dove per il potenziale  $V_{\alpha\alpha}$  si è usato il potenziale fenomenologico  $d_0$  in [16] (Figura 2.4 (a)):

$$V_{\alpha\alpha}(r) = V_r \exp(-\mu_r^2 r^2) - V_a \exp(-\mu_a^2 r^2) + V_{Coul}(r) \quad (2.2)$$

con  $V_r = 500 \text{ MeV}$ ,  $\mu_r = 0.7 \text{ fm}^{-1}$ ,  $V_a = 130 \text{ MeV}$ ,  $\mu_a = 0.475 \text{ fm}^{-1}$ . I termini con pedice  $r$  e  $a$  sono utilizzati rispettivamente per il potenziale di

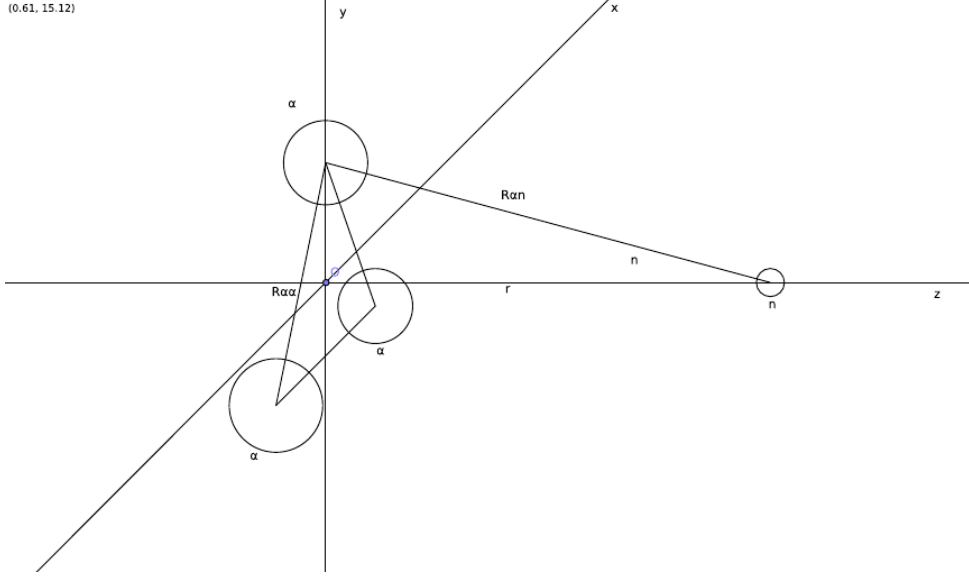


Figura 2.1: Schema della configurazione studiata.

scambio che è repulsivo e per il potenziale *diretto* attrattivo mentre per il termine coulombiano si considera l'espressione  $V_{Coul} = \frac{4e^2}{r}$ . Il potenziale presenta un minimo per  $R_{\alpha\alpha} = 2.85 \text{ fm}$ .

Se si definisce  $E_n$  l'energia legata al moto relativo del neutrone rispetto al core delle  $\alpha$ , l'energia totale per il nucleo di  $^{13}\text{C}$  risulta

$$E_{^{13}\text{C}} = E_{\alpha} + E_n. \quad (2.3)$$

Per ottenere  $E_n$  si deve risolvere l'equazione di Schroedinger per il moto relativo del neutrone, che scritta in coordinate sferiche è

$$\left[ \frac{P_n^2}{2\mu} + V(r, \theta, \phi) \right] \psi(r, \theta, \phi) = E_n \psi(r, \theta, \phi) \quad (2.4)$$

dove

$$\mu = \frac{m_n 3m_{\alpha}}{m_n + 3m_{\alpha}}$$

è la massa ridotta del sistema  $n + 3\alpha$  e  $V(r, \theta, \phi)$  è un potenziale che descrive l'interazione totale del neutrone con le particelle  $\alpha$

$$V(r, \theta, \phi) = \sum_{i=1}^3 V_{\alpha_i n}(|\vec{r}_n - \vec{R}_{\alpha_i}|).$$

È possibile estrarre le proprietà del potenziale  $V(r, \theta, \phi)$  dalla simmetria del problema. Infatti per la simmetria triangolare planare rispetto al piano

(x,y) il potenziale soddisferà alle condizioni

$$V(r, \theta, \phi) = V(r, \theta, \phi + \frac{2}{3}\pi k) \quad \text{con } k = 1, 2 \quad (2.5)$$

$$V(r, \theta, \phi) = V(r, \pi - \theta, \phi). \quad (2.6)$$

Analizzando invece l'energia cinetica  $\frac{P_n^2}{2\mu} = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2$ , nell'espressione per il laplaciano in coordinate sferiche

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\tan \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right)$$

si riconosce nel termine tra parentesi l'operatore  $-\frac{L^2}{\hbar^2}$  e si può riscrivere il termine cinetico dell'hamiltoniana come la somma di un termine radiale e uno angolare:

$$\left[ \frac{p_r^2}{2\mu} + \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r, \theta, \phi) \right] \psi(r, \theta, \phi) = E_n \psi(r, \theta, \phi). \quad (2.7)$$

A questo punto introduciamo un'ipotesi importante su  $V(r, \theta, \phi)$ : si assume che il potenziale sia la somma di un termine centrale e di uno non centrale

$$V(r, \theta, \phi) = V_c(r) + V_{nc}(r, \theta, \phi) \quad (2.8)$$

e si considera soltanto il termine centrale  $V_c(r)$  nell'equazione di Schroedinger per il moto relativo del neutrone. Il termine  $V_{nc}(r, \theta, \phi)$  può essere trattato in un secondo momento come un termine perturbativo, sebbene ciò non sarà fatto in questa tesi. L'approssimazione introdotta si può considerare valida a distanze molto grandi dal core delle tre  $\alpha$ , ma la zona di interesse per il modello è in effetti vicina al core. Per mantenere il modello semplice è tuttavia necessario imporre questa forzatura, di cui verrà tenuto conto nella discussione dei risultati.

In base all'assunzione precedente ci si può ricondurre alla trattazione quantistica della particella in un potenziale centrale

$$\left[ \frac{p_r^2}{2\mu} + \frac{L^2}{2\mu r^2} + V_c(r) \right] \psi(r, \theta, \phi) = E_n \psi(r, \theta, \phi). \quad (2.9)$$

È possibile quindi separare la funzione d'onda in una parte radiale  $\psi(r)$  ed una angolare  $f(\theta, \phi)$ , e quest'ultima dovrà avere proprietà analoghe alle armoniche sferiche  $Y_l^m(\theta, \phi)$ . Le funzioni angolari tuttavia saranno adattate alle proprietà di simmetria del potenziale, e verranno discusse brevemente di seguito.

### 2.1.1 Funzioni angolari adattate

Le proprietà di simmetria del potenziale  $V(r, \theta, \phi)$  comportano una modifica delle autofunzioni angolari rispetto al caso delle armoniche sferiche: la proprietà (2.6) e la (2.5) si traducono infatti nel passaggio

$$f(\theta, \phi) \rightarrow Y_l^m(\theta, 3\phi) \quad (2.10)$$

L'effetto sulla struttura delle autofunzioni è quello di una *tripartizione*, che si manifesta nel caso  $m \neq 0$  e  $l \neq 0$ ; in tal caso infatti viene resa esplicita la dipendenza dalla coordinata angolare  $\phi$ . Alcuni esempi per le prime funzioni angolari sono proposti in Figura 2.2. È importante notare che le autofunzioni angolari adattate sono ancora autofunzioni degli operatori  $L^2$  e  $L_z$ , pertanto  $l$  e  $m$  saranno ancora buoni numeri quantici per la trattazione del problema.

Si può scrivere infine il sistema di equazioni agli autovalori per la (2.9)

$$\begin{cases} H(r)\psi(r) = E_n\psi(r) \\ L^2 Y_l^m(\theta, 3\phi) = \hbar^2 l(l+1) Y_l^m(\theta, 3\phi) \\ L_z Y_l^m(\theta, 3\phi) = 3\hbar m Y_l^m(\theta, 3\phi) \end{cases} \quad (2.11)$$

dove occorre notare che, data la forma dell'operatore  $L_z$  in coordinate sferiche

$$L_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi}$$

il passaggio  $\phi \rightarrow 3\phi$  comporta  $m \rightarrow 3m$ .

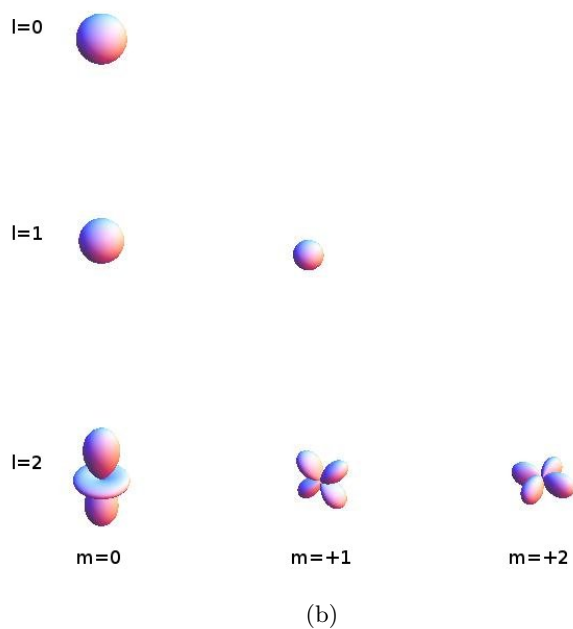
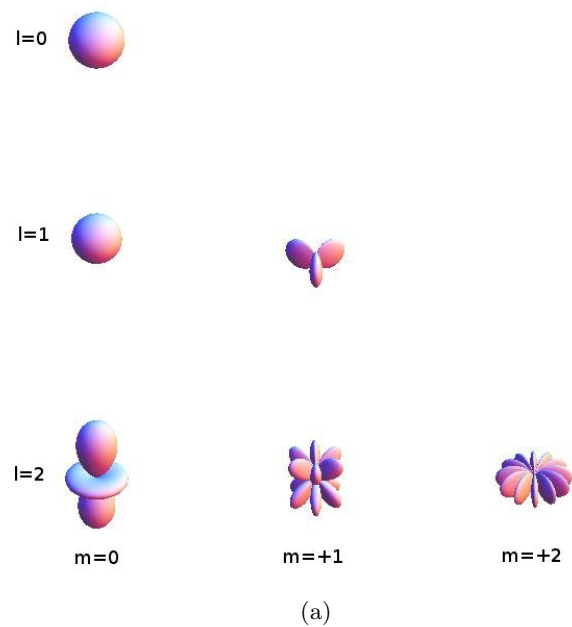


Figura 2.2: Autofunzioni angolari  $Y_l^m(\theta, 3\phi)$  nella forma reale (a) a confronto con le armoniche sferiche standard  $Y_l^m(\theta, \phi)$  (b). Per  $l \neq 0$  e  $m \neq 0$  si nota l'effetto di tripartizione.

### 2.1.2 Equazione radiale

Tornando all'equazione radiale, esplicitando gli operatori  $p_r^2$  e  $L^2$  e ridefinendo  $\psi(r) := \frac{R(r)}{r}$  la prima delle (2.11) diventa

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} + V_c(r) \right] R(r) = E_n R(r) \quad (2.12)$$

dove  $R(r)$  è la funzione d'onda radiale ridotta. Per l'approssimazione (2.8) si ha che

$$V_c(r) = \sum_{i=1}^3 V_{\alpha_i n}(r).$$

Il potenziale  $V_{\alpha n}$  è quello utilizzato in [17] (Figura 2.4(b)):

$$V_{\alpha n}(R) = \frac{V_0}{1 + \exp\left(\frac{R-R_{\alpha n}}{a_{\alpha n}}\right)} + r_0^2 V_{ls} \frac{\mathbf{l} \cdot \mathbf{s}}{R} \frac{d}{dR} \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{R-R_{\alpha n}}{a_{\alpha n}}\right)} \quad (2.13)$$

dove  $R$  è la distanza  $\alpha - n$  e  $V_0 = -42.6 \text{ MeV}$ ,  $V_{ls} = 8.5 \text{ MeV}$ ,  $r_0 = 1.2 \text{ fm}$ ,  $R_{\alpha n} = r_0 A^{\frac{1}{3}}$ ,  $a_{\alpha n} = 0.9 \text{ fm}$ . Seguendo la notazione utilizzata in precedenza risulta

$$R = \sqrt{r^2 + \frac{R_{\alpha\alpha}^2}{3}}$$

si rende così esplicita una dipendenza dal parametro  $R_{\alpha\alpha}$ , il lato del triangolo formato dalle  $\alpha$ . La distanza del neutrone dal core influenzerà anche la struttura del core stesso. Il potenziale definito correttamente sarà dunque

$$V_c(r; R_{\alpha\alpha}) = \sum_{i=1}^3 V_{\alpha_i n}(r; R_{\alpha\alpha})$$

Moltiplicando la (2.12) per  $\frac{2\mu}{\hbar^2}$  si ottiene infine

$$\left[ -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} (V_c(r; R_{\alpha\alpha}) - E_n) \right] R(r) = 0. \quad (2.14)$$

In questa tesi verrà risolta l'equazione radiale per il neutrone (2.14) tenendo  $R_{\alpha\alpha}$  come parametro da adattare allo scopo di riprodurre le energie sperimentali degli stati legati del  $^{13}\text{C}$ , che sono indicati in Tabella 2.1 e in Figura 2.3.

Dalle autofunzioni radiali ottenute si possono ricavare le informazioni sulla posizione del neutrone rispetto al core delle  $\alpha$ , in particolare il valore di  $r$  per cui è massima la densità di probabilità di trovare il neutrone e il *r.m.s. radius* per il moto relativo del neutrone.



Tabella 2.1: Dati sperimentali relativi ai livelli investigati per il modello. L'energia del *ground state* è l'energia  $S_n$  di separazione del neutrone per il  $^{13}\text{C}$  [18].

Energia (MeV)	$J^\pi$
-4.946 (g.s.)	$\frac{1}{2}^-$
-1.857	$\frac{1}{2}^+$
-1.262	$\frac{3}{2}^-$
-1.093	$\frac{5}{2}^+$

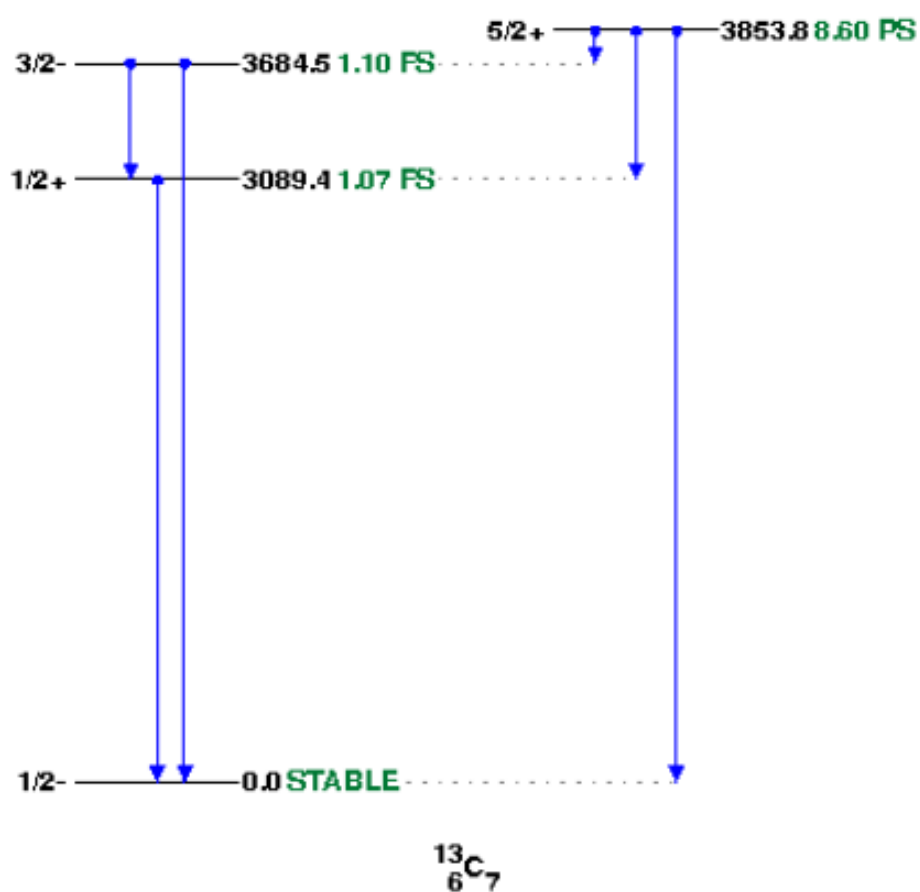
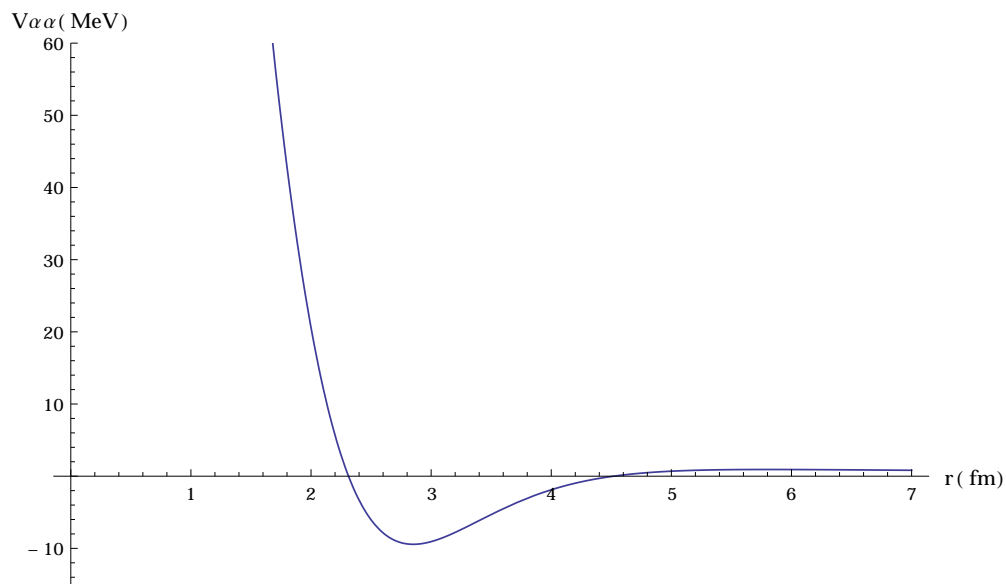
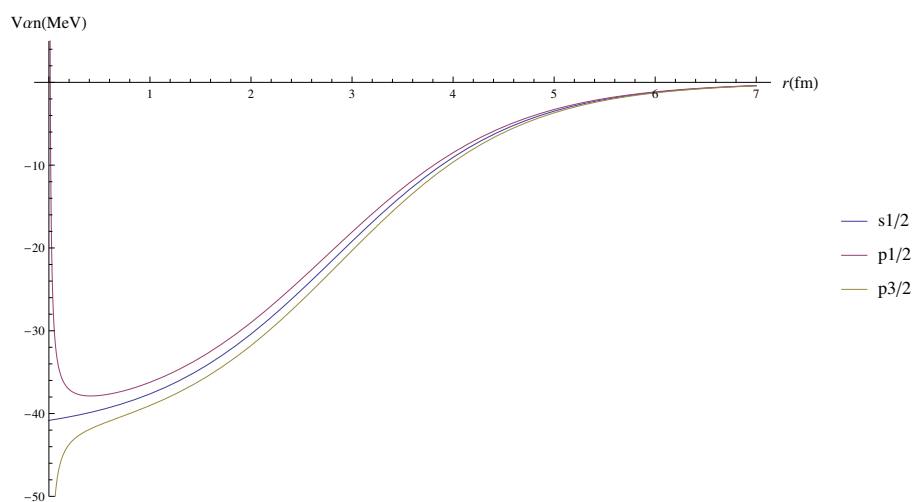


Figura 2.3: Schema dei primi quattro livelli energetici del  $^{13}\text{C}$ . Per ognuno di essi sono indicati il valore di  $J^\pi$ , il  $\Delta E$  rispetto allo stato fondamentale espresso in keV e il tempo di vita media in fs o ps [18].



(a)



(b)

Figura 2.4: Il potenziale  $\alpha - \alpha$  (a) e il potenziale  $\alpha - n$  (b). Per quest'ultimo sono mostrati i casi  $(l = 0, j = \frac{1}{2})$  (blu) e  $(l = 1, j = \frac{3}{2}$  e  $j = \frac{1}{2})$  (verde e viola rispettivamente). In (b) si può apprezzare l'importanza del termine di spin-orbita del potenziale  $V_{\alpha n}$ , che abbassa il caso  $p_{\frac{3}{2}}$  e alza il  $p_{\frac{1}{2}}$ .

## Capitolo 3

# Risultati e discussione

### 3.1 Metodo e presentazione dei risultati

Per risolvere l'equazione radiale (2.14) è stato utilizzato un programma per la risoluzione di equazioni differenziali parametriche. Le condizioni al contorno da imporre riguardano il comportamento asintotico in zero della funzione radiale

$$R(r) \xrightarrow[r \rightarrow 0]{} r^{l+1} \quad R'(r) \xrightarrow[r \rightarrow 0]{} (l+1)r^l. \quad (3.1)$$

L'algoritmo di risoluzione fornisce una funzione  $R(r; E_n, R_{\alpha\alpha})$  che ha come parametri l'energia  $E_n$  e la distanza  $R_{\alpha\alpha}$ . Per fissarli si impone che la funzione d'onda si annulli a distanze molto grandi dalla regione di interesse, con un metodo del tipo *diagonalization in a box*

$$R(r) \xrightarrow[r \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Si sceglie quindi un punto  $r_\infty$  molto distante dal core di tre  $\alpha$  ( $r_\infty \geq 9$  fm è sufficiente) e si impone che

$$R(r_\infty; E_n, R_{\alpha\alpha}) = 0.$$

Si cercano le autoenergie  $E_n$  negative, che rappresentano gli stati legati del sistema, che soddisfino a questa condizione, e per la (2.3) si trova infine il valore di  $R_{\alpha\alpha}$  tale per cui  $E_{13C}$  riproduce i valori sperimentali degli stati in Tabella 2.1. In seguito si controlla che aumentando  $r_\infty$  il risultato rimanga stabile, per garantire la convergenza del metodo.

Per trovare l'autofunzione che rappresenta correttamente un determinato stato si interpretano gli stati del  $^{13}\text{C}$  come stati di particella singola: se  $l$  è il numero quantico di momento angolare relativo tra il neutrone ed il core delle  $\alpha$ ,  $N$  è il numero che identifica la shell associata al neutrone e  $n$  è il numero di nodi della funzione d'onda relativa al determinato stato allora vale la relazione

$$N = 2n + l.$$

Tabella 3.1: Valori dei numeri quantici  $l$ ,  $N$ ,  $n$  previsti per ciascuno stato del  $^{13}\text{C}$ .

Energia (MeV)	$J^\pi$	$l$	$N$	$n$
-4.946	$\frac{1}{2}^-$	1	1	0
-1.857	$\frac{1}{2}^+$	0	2	1
-1.262	$\frac{3}{2}^-$	1	1	0
-1.093	$\frac{5}{2}^+$	2	2	0

Tabella 3.2: Risultati del modello. Per ogni livello sono proposti la distanza  $\alpha - \alpha$  ( $R_{\alpha\alpha}$ ), il valore più probabile della distanza neutrone-core ( $r_{max}$ ) e il *r.m.s radius* ( $\sqrt{\langle r^2 \rangle}$ ).

Energia (MeV)	$J^\pi$	$R_{\alpha\alpha}(fm)$	$r_{max}(fm)$	$\sqrt{\langle r^2 \rangle}(fm)$
-4.946	$\frac{1}{2}^-$	2.09	1.94	2.24
-1.857	$\frac{1}{2}^+$	2.16	2.92	2.91
-1.262	$\frac{3}{2}^-$	2.05	1.92	2.20
-1.093	$\frac{5}{2}^+$	2.15	2.42	2.73

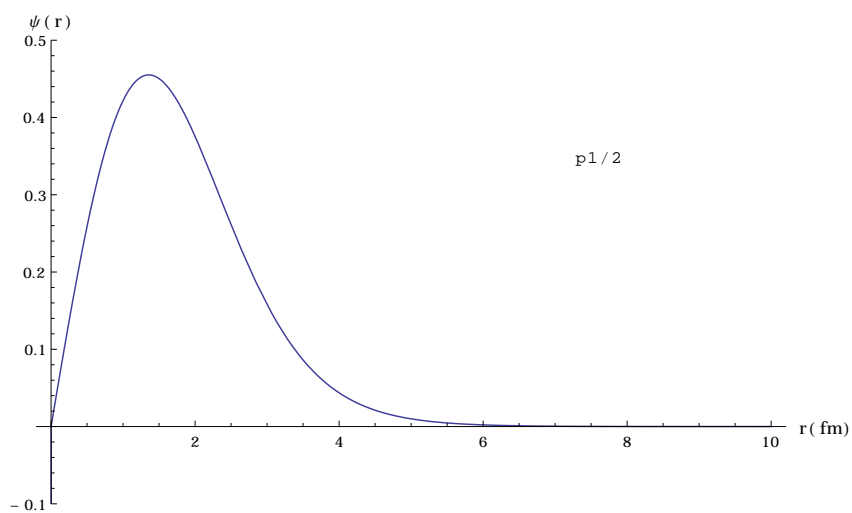
In questo modo è possibile determinare l'autofunzione corrispondente ad uno stato di cui si conoscano  $N$  e  $l$  verificando che essa presenti il giusto numero di nodi. In particolare nel caso dei primi quattro stati del  $^{13}\text{C}$  i valori previsti di  $l$ ,  $N$  e  $n$  (tutti numeri interi) sono raccolti in Tabella 3.1 e le autofunzioni radiali sono rappresentate in Figg. 3.1, 3.2 nella forma  $\psi(r) = \frac{R(r)}{r}$  al paragrafo seguente.

In Tabella 3.2 sono riassunti i risultati del modello: oltre a  $R_{\alpha\alpha}$  si sono calcolati il valore di massima probabilità per la posizione del neutrone  $r_{max}$  e il *r.m.s radius*  $\sqrt{\langle r^2 \rangle}$ , dei quali viene riportata l'espressione

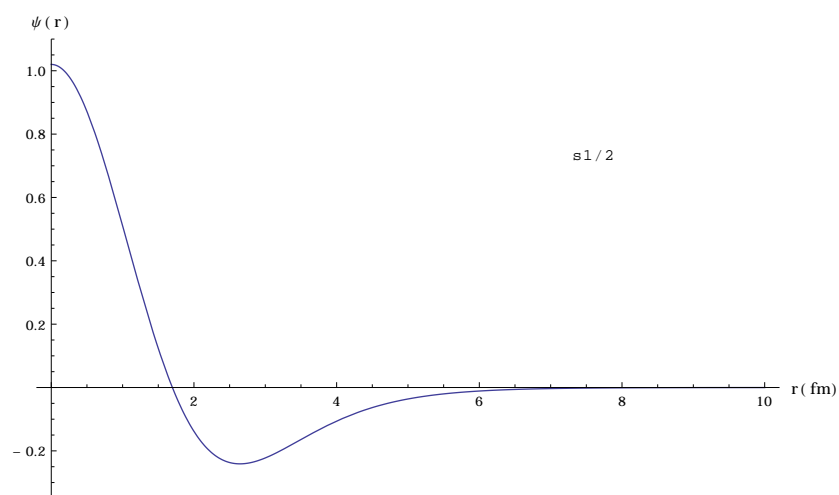
$$r_{max} \left/ \frac{dR^2(r_{max})}{dr} \right. = 0 \quad \langle r^2 \rangle = \int_0^{+\infty} r^2 |R(r)|^2 dr.$$

### 3.1.1 Autofunzioni radiali

I grafici di seguito rappresentano le autofunzioni radiali  $\psi(r)$  per la (2.14). Il numero di nodi  $n$  per ciascuna di esse è in accordo con la Tabella 3.1.

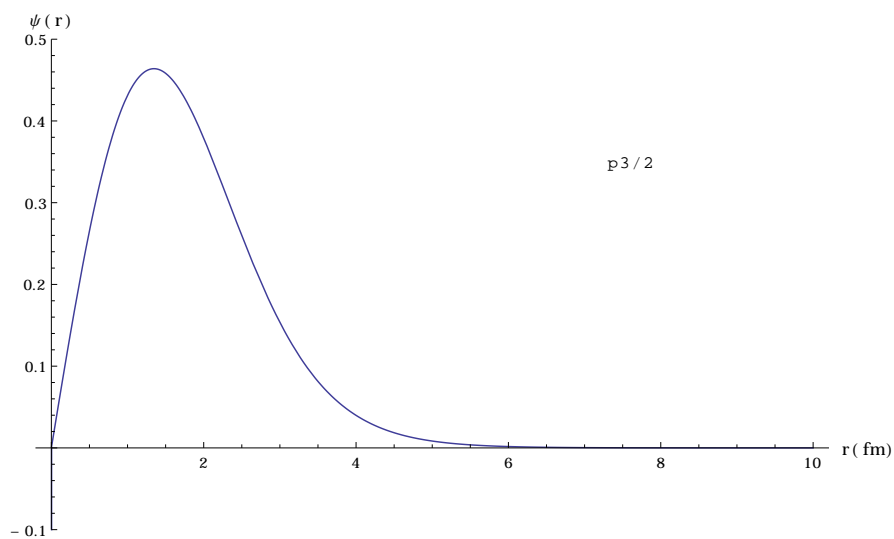


(a)

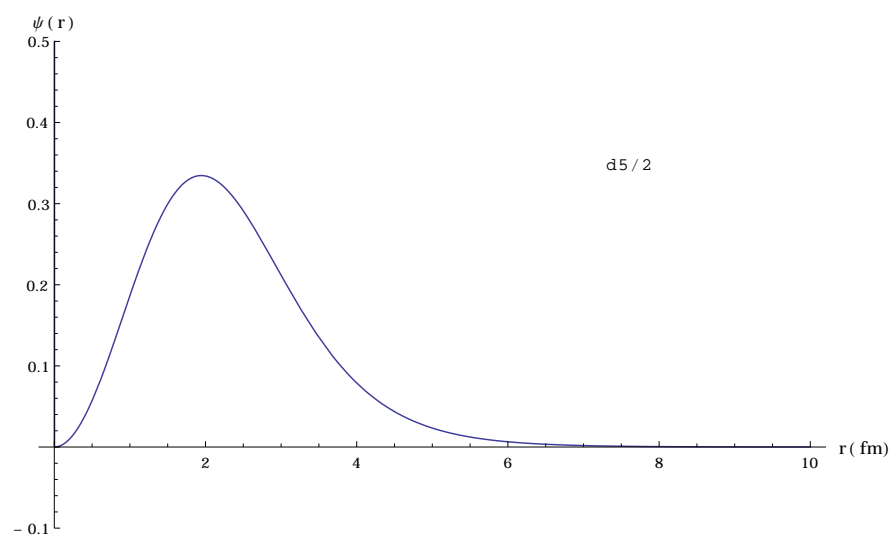


(b)

Figura 3.1: Autofunzioni radiali nella forma  $\psi(r) = \frac{R(r)}{r}$  per gli stati  $\frac{1}{2}^-$  (a) e  $\frac{1}{2}^+$  (b).



(a)



(b)

Figura 3.2: Autofunzioni radiali nella forma  $\psi(r) = \frac{R(r)}{r}$  per gli stati  $\frac{3}{2}^-$  (a) e  $\frac{5}{2}^+$  (b).

## 3.2 Verifica del modello

### 3.2.1 *r.m.s. matter radius* del $^{13}\text{C}$

Come prima verifica si calcola il *r.m.s. matter radius* del  $^{13}\text{C}$  nello stato fondamentale e lo si confronta con il valore sperimentale. Per semplicità si è utilizzata la formula per un nucleo avente  $A$  nucleoni che si ipotizza composto da due clusters con numeri di massa  $A_1$  e  $A_2$  tali che  $A_1 + A_2 = A$

$$\langle r^2 \rangle_{A_1+A_2} = \frac{A_1}{A} \langle r^2 \rangle_{A_1} + \frac{A_2}{A} \langle r^2 \rangle_{A_2} + \frac{A_1 A_2}{A^2} \langle R^2 \rangle \quad (3.2)$$

dove  $R$  è la distanza tra i clusters. Nel nostro caso si scompone il  $^{13}\text{C}$  in  $^{12}\text{C}+n$ , dunque  $A_1 = 12$ ,  $A_2 = 1$ . Il *r.m.s. matter radius* per il  $^{12}\text{C}$  è  $\sqrt{\langle r^2 \rangle} = 2.43 \text{ fm}$  [19]. Il contributo dovuto a  $\langle r^2 \rangle_n$  è molto piccolo e non conoscendone il valore esatto è stato trascurato. Utilizzando il valore di  $\sqrt{\langle r^2 \rangle}$  in Tabella 3.2 per il livello  $\frac{1}{2}^-$  si ottiene

$$\langle r^2 \rangle_{^{13}\text{C}} = 2.41 \text{ fm}$$

in discreto accordo con il valore sperimentale  $(2.35 \pm 0.03) \text{ fm}$  [20].

### 3.2.2 Calcolo della probabilità di transizione $\gamma$

Per testare ancora la validità del modello si sono studiate le transizioni  $\gamma$  di tipo elettrico dagli stati eccitati allo stato fondamentale del  $^{13}\text{C}$ . In particolare si sono confrontati i tempi di decadimento degli stati  $\frac{1}{2}^+$ ,  $\frac{3}{2}^-$  e  $\frac{5}{2}^+$  con quelli sperimentali [18]. Definita come  $L$  la multipolarità di una generica transizione di tipo elettrico, in cui la parità cambia come  $(-1)^L$ , il tasso di emissione  $\gamma$  è [21]

$$T(EL) = 8\pi c \frac{e^2}{\hbar c} \frac{L+1}{L[(2L+1)!!]^2} k^{2L+1} B(EL)$$

dove si è introdotto con

$$k = \frac{\Delta E_\gamma}{\hbar c},$$

il modulo del vettore d'onda corrispondente alla transizione e con

$$B(EL) = \frac{(2j_f + 1)(2l_f + 1)(2l_i + 1)(2L + 1)}{4\pi} \begin{pmatrix} l_f & L & l_i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \left\{ \begin{matrix} l_f & j_f & \frac{1}{2} \\ j_i & l_i & L \end{matrix} \right\}^2 \langle r^L \rangle^2 \quad (3.3)$$

la probabilità di transizione ridotta, in cui compaiono i simboli  $3j$  e  $6j$ . L'integrale

$$\langle r^L \rangle = \int_0^{+\infty} R_f(r) r^L R_i(r) dr \quad (3.4)$$

Tabella 3.3: Tempi di vita media previsti dal modello  $\tau_{teor}$  a confronto con i valori sperimentali  $\tau_{sper}$  per ciascuno stato eccitato del  $^{13}\text{C}$  [18]. Lo stato finale per ciascuna transizione è lo stato fondamentale  $\frac{1}{2}^-$ . Si riportano anche l'energia del fotone  $\Delta E_\gamma$ , il tipo di transizione  $EL$  e le stime di particella singola  $\tau_{s.p.}$ .

Livello iniziale	$EL$	$\Delta E(\text{MeV})$	$\tau_{teor}$	$\tau_{sper}$	$\tau_{s.p.}$
$\frac{1}{2}^+$	E1	3.089	0.08 fs	$1.07 \pm 0.10$ fs	0.04 fs
$\frac{3}{2}^-$	E2	3.685	431 fs	$1.10 \pm 0.09$ fs	457 fs
$\frac{5}{2}^+$	E3	3.854	4384 ps	$8.60 \pm 0.14$ ps	9555 ps

è l'elemento di matrice relativo alla transizione, in cui compaiono le funzioni d'onda radiali degli stati coinvolti. Ad esempio nel caso specifico della transizione  $\frac{1}{2}^+ \rightarrow \frac{1}{2}^-$  si trova

$$\Delta E_\gamma = 3.089 \text{ MeV}$$

$$B(E1) = \frac{18}{4\pi} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \left\{ \begin{matrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{matrix} \right\}^2 \langle r \rangle^2 = 0.18 \text{ fm}^2 \quad (3.5)$$

Ottenendo  $T(E1) = 8.35 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}$ , da cui la vita media dello stato vale

$$\tau = \frac{\ln(2)}{T(E1)} = 0.08 \text{ fs}.$$

In Tabella 3.3 sono raccolti i valori previsti del tempo di vita media per i tre stati eccitati investigati, e sono confrontati con i rispettivi valori sperimentali. Nei casi  $\frac{3}{2}^- \rightarrow \frac{1}{2}^-$  e  $\frac{5}{2}^+ \rightarrow \frac{1}{2}^-$  si sono considerate le transizioni  $E2$  ed  $E3$  come transizioni pure. Nonostante le previsioni non siano in accordo con i valori sperimentali, il modello fornisce comunque risultati migliori rispetto alle stime di particella singola.

### 3.3 Discussione

Dai risultati del modello si possono trarre le seguenti considerazioni sul comportamento dei clusters al variare degli stati nucleari:

1. In generale il neutrone sembra conferire stabilità al nucleo: data infatti la forma del potenziale  $V_{\alpha\alpha}$  i valori di  $R_{\alpha\alpha}$  trovati per ogni stato non permetterebbero la formazione di un sistema stabile in presenza delle sole  $\alpha$ . Il neutrone aggiuntivo tuttavia, proprio come un elettrone di valenza nel caso atomico, contrasta la repulsione tra i clusters e ha l'effetto di legare il sistema.



2. Si può notare che quando le  $\alpha$  sono molto vicine anche il neutrone si trova più prossimo al core, ma poichè la parte repulsiva di  $V_{\alpha\alpha}$  è molto ripida, un leggero distanziamento delle  $\alpha$  come quello tra lo stato  $\frac{1}{2}^-$  e  $\frac{1}{2}^+$  comporta una forte diminuzione della repulsione; ne consegue che il neutrone si troverà a una distanza sensibilmente maggiore nello stato  $\frac{1}{2}^+$ , in una posizione più *rilassata*. Lo stesso effetto si può notare per gli stati  $\frac{3}{2}^-$  e  $\frac{5}{2}^+$ .
3. Dalle verifiche effettuate il modello prevede il *r.m.s. matter radius* del  $^{13}\text{C}$  con un buon accordo sperimentale.
4. La previsione per il tempo di decadimento dello stato  $\frac{1}{2}^+$  risulta sottostimata di un ordine di grandezza, mentre per le altre due transizioni i valori teorici si discostano fortemente da quelli sperimentali. La spiegazione di questo fatto può essere in parte attribuita all'approssimazione (2.8). Infatti il contributo del termine non centrale  $V_{nc}(r)$  influisce sulla struttura delle autofunzioni degli stati, rispetto al quale la quantità  $B(EL)$  è molto sensibile.

Inoltre avendo trattato il core classicamente non si è tenuto conto del contributo delle tre  $\alpha$  al calcolo della  $B(EL)$ . Infatti la funzione d'onda globale del sistema andrebbe fattorizzata come

$$|\psi_{tot}\rangle = |\psi_{3\alpha}(R_{\alpha\alpha})\rangle |\psi_n(r)\rangle$$

e nel calcolare l'elemento di matrice relativo alla transizione bisogna tenere conto che a stati diversi corrispondono valori di  $R_{\alpha\alpha}$  diversi. Così la  $|\psi_{3\alpha}\rangle$  non modifica il calcolo dell'integrale (3.4) poichè non dipende da  $r$ , ma fornisce un contributo al calcolo della  $B(EL)$  che è un integrale di sovrapposizione

$$B(EL) \propto \langle r^L \rangle^2 | \langle \psi_{3\alpha}(R_{f\alpha\alpha}) | \psi_{3\alpha}(R_{i\alpha\alpha}) \rangle |^2$$

in cui compaiono le funzioni d'onda per le tre  $\alpha$  relative agli stati iniziale e finale. Dato che il contributo di sovrapposizione è sempre minore dell'unità esso avrà l'effetto di diminuire il valore del tasso di transizione  $T(EL)$ , aumentando di conseguenza il tempo di decadimento  $\tau$ . In particolare questo effetto potrebbe spiegare la discrepanza tra il  $\tau_{teor}$  e il  $\tau_{sper}$  per la transizione  $\frac{1}{2}^+ \rightarrow \frac{1}{2}^-$ .

I valori previsti dal modello risultano comunque migliori rispetto alle stime di particella singola, per cui si può ipotizzare che l'ipotesi del clustering resti ancora un approccio promettente.



## Capitolo 4

# Conclusioni

In questa tesi si è cercato di riprodurre alcune proprietà del nucleo di  $^{13}\text{C}$  con un modello fenomenologico che prevede l'interazione di un neutrone con un core formato da tre particelle  $\alpha$  disposte a formare un triangolo equilatero.

Dopo aver separato il problema per le  $\alpha$  da quello per il moto relativo del neutrone (2.3), l'attenzione si è concentrata su quest'ultimo (2.4). Introducendo l'approssimazione (2.8) sul potenziale  $V(r, \theta, \phi)$  è stato possibile ridursi alla trattazione quantistica di una particella in un potenziale centrale. L'equazione radiale (2.14) è stata poi risolta computazionalmente ed i risultati teorici sono stati confrontati con quelli sperimentali.

In conclusione il modello proposto riesce a riprodurre correttamente le proprietà statiche del nucleo di  $^{13}\text{C}$  (il *r.m.s. matter radius* nel *ground state*), sebbene le previsioni per le proprietà dinamiche relative alle transizioni dagli stati eccitati siano insoddisfacenti. Per cercare di migliorare il modello si può prima di tutto lavorare sull'approssimazione (2.8), investigandone gli effetti o formulando un nuovo metodo di trattazione per il potenziale  $V(r, \theta, \phi)$  nell'equazione per il moto relativo del neutrone.

Anche la scelta dei potenziali  $V_{\alpha\alpha}$  e  $V_{\alpha n}$  può essere approfondita: i valori di  $R_{\alpha\alpha}$  trovati sono in una zona delicata del potenziale utilizzato, per cui lievi differenze possono portare a importanti cambiamenti.



# Bibliografia

- [1] H.A. Bethe e R.F. Bacher, *Rev. Mod. Phys.* **8** (1936), p. 82.
- [2] C.F. von Weiszacker, *Naturwiss.* **26** (1937), p. 209.
- [3] J.A. Wheeler, *Phys. Rev.* **52** (1937), p. 1107.
- [4] W. Wefelmeier, *Zeit. f. Phys.* **107** (1937), p. 332.
- [5] G. Gamow, *Proc. Roy. Soc. A* **126** (1930), p. 632.
- [6] L. R. Hafstad e E. Teller, *Phys. Rev.* **54** (1938), p. 681.
- [7] W. von Oertzen, M. Freer e Y. Kanada-En'yo, *Phys. Rep.* **432**, 2 (2006), p. 43.
- [8] D. M. Brink, *Journal of Physics: Conference Series* **111**, 012001 (2008).
- [9] H. Tanaka R. Tamagaki, *Prog. Theor. Phys.* (1965), p. 191.
- [10] Y. Fujiwara et al., *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **68**,68 (1980), p. 29.
- [11] K. Ikeda, N. Takigawa e H. Horiuchi, *Prog. Theor. Phys. extra* (1968), p. 464.
- [12] W. von Oertzen, *Z. Physik A* **357** (1997), p. 355.
- [13] M. Milin e W. von Oertzen, *Fizika B* **12** (2003), p. 61.
- [14] M. Milin e W. von Oertzen, *Eur. Phys. Journ. A* **14** (2002), p. 295.
- [15] M. Dufour e P. Descouvemont, *Nucl. Phys. A* **605**, 2 (1996), p. 160.
- [16] S. Ali e A.R. Bodmer, *Nucl. Phys.* **80** (1966), p. 99.
- [17] L Fortunato et al., *Phys. Rev. C* **90**, 064301 (2014).
- [18] National Nuclear Data Center (NNDC), Brookhaven National Laboratory. URL: <http://www.nndc.bnl.gov/>.
- [19] H Hamagaki et al., **55**, 24 (1985), p. 2676.
- [20] R.R. Johnson et al., *Phys. Rev. Lett.* **43**, 12 (1979), p. 844.
- [21] de Shalit A. e Talmi I. *Nuclear Shell Theory*. Academic Press, New York, 1963.