Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI FISICA E ASTRONOMIA
"Galileo Galilei"

Tesi di laurea triennale

Perturbazioni cosmologiche non lineari in universi curvi

Candidato:
Claudia Caputo
Matricola 596929

Relatore:
Prof. Sabino Matarrese

Anno Accademico 2015-2016

Contents

Introduzione

Nella trattazione che segue si discuterà del fenomeno che è alla base della formazione delle strutture cosmiche su grande scala, ovvero l'instabilità gravitazionale, utilizzando un formalismo Newtoniano in un universo che segue il modello cosmologico *Friedman-Robertson-Walker* a curvatura spaziale generica. In particolare, utilizzando la dinamica di un fluido soggetto alla sola forza di auto-gravità, si discuterà dell'evoluzione lineare e non lineare di perturbazioni primordiali di grandezze cosmologiche di interesse, assumendo che siano adiabatiche e Gaussiane.
L'esposizione di tali argomenti si svilupperà in quattro capitoli organizzati secondo lo schema seguente:

> Nel capitolo 1 si introdurrà la teoria dell'instabilità gravitazionale accennando alle tappe storiche fondamentali del suo sviluppo; nello stesso capitolo si proseguirà con una descrizione analitica della dinamica lineare introducendo le equazioni fondamentali che descrivono il sistema; infine si passerà ad una formulazione statistica degli argomenti mettendone in evidenza le caratteristiche principali.
>
> Nel capitolo 2 si aggiungerà l'ipotesi di fluido non collisionale passando ad un formalismo Lagrangiano e successivamente Hamiltoniano. Quindi si analizzerà la dinamica della singola particella e in un secondo momento la dinamica globale del sistema, descritta tramite grandezze che rappresentano lo stesso macroscopicamente. Si introdurrà allora l'equazione di *Vlasov* dalla quale seguiranno le nuove equazioni del moto. Infine si riesprimeranno queste ultime, sotto determinate ipotesi, in termini dei potenziali dei campi cosmologici in gioco, operazione che renderà più semplice la trattazione non lineare dell'argomento.
>
> Nel capitolo 3 si passerà all'analisi non lineare dell'instabilità gravitazionale utilizzando un approccio perturbativo Euleriano; tale metodo consisterà nel formulare un *ansatz* sui potenziali dei campi cosmologici espandendoli intorno alle soluzioni di *background* e

ricavando successivamente le soluzioni al primo e secondo ordine perturbativo.

Nel capitolo 4, utilizzando i risultati del precedente, si potrà determinare il parametro di *skewness* gravitazionale dei campi cosmologici indotto dall'evoluzione non lineare delle fluttuazioni primordiali degli stessi. In particolare, tale parametro metterà in evidenza come tali fluttuazioni, con il tempo, perdano il loro iniziale carattere Gaussiano.

Chapter 1

Cenni sulla teoria dell'instabilità gravitazionale

Nel 1902 *Sir James Hopwood Jeans*, fisico, astronomo e matematico britannico, nel tentativo di fare luce sul meccanismo della formazione di stelle e pianeti pose le fondamenta della `teoria dell'instabilità gravitazionale`.
Egli dimostrò l'esistenza di un fenomeno di instabilità nell'evoluzione delle nubi di gas, in seguito definito come *instabilità gravitazionale di Jeans*, che è alla base degli attuali modelli cosmologici atti a spiegare la formazione delle galassie e delle strutture su grande scala.
Jeans dimostrò che descrivendo l'universo come un fluido mediamente *omogeneo* e *isotropo*, in un *background* statico, piccole fluttuazioni della densità, $\delta\rho$, e della velocità, δv, potevano evolvere nel tempo. In particolare, le prime potevano crescere nel tempo fino a portare al collasso gravitazionale e alla formazione di strutture cosmiche, cosa che si verifica nel momento in cui le forze di pressione in gioco non sono più in grado di controbilanciare la forza di auto-gravità.
Negli anni la teoria dell'istabilità gravitazionale si è andata evolvendo e alla luce dei nuovi modelli cosmologici dovuti a *Friedman*, si è dovuto tener conto di un universo non più statico ma in espansione, nel quale le fluttuazioni evolvono non più esponenzialmente ma con leggi di potenza, ovvero più lentamente.
Si cita inoltre *Lifshitz* che per primo studiò il problema dell'instabilità gravitazionale nell'ambito della relatività generale.
Altra importante tappa di tale teoria è la scoperta, negli anni '60, della *radiazione cosmica di fondo alle microonde* (CMB) che portò alla teorizzazione del modello dell'*hot Bing Bang*. Secondo tale modello la CMB, attualmente osservabile, implica che in un'era passata l'universo ap-

pariva come un plasma di materia e radiazione in equilibrio termico; in queste condizioni, un gran numero di processi dovuti alla viscosità e alla conduzione termica hanno potuto influenzare l'evoluzione delle perturbazioni cosmologiche. Di conseguenza, se l'instabilità gravitazionale è alla base della formazione delle strutture cosmiche, la CMB deve presentare delle fluttuazioni nella temperatura. Tale fatto è stato confermato dalle osservazioni.

1.1 Dinamica nell' universo in espansione

In un universo in espansione le posizioni delle particelle sono descritte dalla loro coordinata comovente, $\mathbf{x}$, legata alla coordinata fisica, $\mathbf{r}$, dalla relazione $\mathbf{r} = a(t)\mathbf{x}$, dove $a(t)$ è il *fattore di scala cosmico* della metrica di *Robertson-Walker*.
Le equazioni del moto che seguono saranno valide in un *background* isotropo ed omogeneo che evolve in accordo con le equazioni di *Friedman*:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_b - \frac{Kc^2}{a^2} \tag{1.1}$$

$$\left(\frac{\ddot{a}}{a}\right) = -\frac{4\pi G}{3}\rho_b, \quad p_b \ll \rho_b c^2 \tag{1.2}$$

dove $a \equiv a(t)$, $H \equiv \frac{\dot{a}}{a}$ è il parametro di *Hubble*, K il parametro di curvatura.
Si definiscono inoltre

- la velocità *propria* :
  $\mathbf{w} \equiv \dot{\mathbf{r}} = H\mathbf{r} + a\frac{d\mathbf{x}}{dt} = H\mathbf{r} + \mathbf{v}$
  dove $\mathbf{v} \equiv a\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ è la velocità *peculiare* del fluido
- la derivata convettiva di una generica funzione $f(\mathbf{r}, t)$:
  $\frac{Df(\mathbf{r},t)}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t}\big|_{\mathbf{r}} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial f}{\partial t}\big|_{\mathbf{r}} + H(\mathbf{r}\cdot\nabla_{\mathbf{r}})f + (\mathbf{v}\cdot\nabla_{\mathbf{r}})f$
  espressa nelle coordinate comoventi:
  $\frac{Df(\mathbf{x},t)}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t}\big|_{\mathbf{x}} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial f}{\partial t}\big|_{\mathbf{x}} + \frac{1}{a}(\mathbf{v}\cdot\nabla_{\mathbf{x}})f$
- le leggi di trasformazione degli operatori di derivazione nel passaggio da sistema a riposo a quello comovente:
  $\nabla_{\mathbf{r}} = \frac{1}{a}\nabla_{\mathbf{x}}$
  $\frac{\partial f}{\partial t}\big|_{\mathbf{x}} = \frac{\partial f}{\partial t}\big|_{\mathbf{r}} + H(\mathbf{r}\cdot\nabla_{\mathbf{r}})f$
  (l'ultima relazione segue dall'aver imposto l'uguaglianza $\frac{Df(\mathbf{r},t)}{Dt} = \frac{Df(\mathbf{x},t)}{Dt}$)

Si possono ora scrivere le equazioni che caratterizzano la dinamica del fluido Newtoniano autogravitante nel sistema di riferimento proprio:

$$\left.\frac{\partial\rho}{\partial t}\right|_{\mathbf{r}} + \nabla_{\mathbf{r}}(\rho\mathbf{w}) = 0 \tag{1.3a}$$

$$\left.\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial t}\right|_{\mathbf{r}} + (\mathbf{w}\cdot\nabla_{\mathbf{r}})\mathbf{w} = -\frac{1}{\rho}\nabla_{\mathbf{r}}p - \nabla_{\mathbf{r}}\Phi \tag{1.3b}$$

$$\nabla^2{}_{\mathbf{r}}\Phi = 4\pi G\rho \tag{1.3c}$$

Dove

- La $(1.3a)$ è l'*equazione di continuità* e rappresenta la legge di conservazione della massa
- La $(1.3b)$ è l'*equazione di Eulero* e rappresenta la legge di conservazione del momento
- La $(1.3c)$ è l'*equazione di Poisson* ed esprime il legame tra il campo gravitazionale e la sorgente che lo genera

Si nota che si è assunta tacitamente l'ipotesi di sistema adiabatico $\frac{\partial S}{\partial t} = 0$.

1.2 Equazioni linearizzate

Nella discussione che segue si assume, innanzitutto, che le fluttuazioni della densità siano piccole, ovvero $|\delta| \ll 1$, ipotesi base della teoria perturbativa lineare.
Per ottenere la linearizzazione del set di equazioni $(1.3a) - (1.3c)$ si effettuano i seguenti passaggi:

a) si inseriscono nelle $(1.3a)-(1.3c)$ le quantità $\mathbf{w} = H\mathbf{r}+\mathbf{v}$, $\Phi = \Phi_b+\phi$ e $\rho = \rho_b + \delta\rho$ al fine di eliminare i termini relativi al *background*;

b) si riesprimono le quantità in termini della coordinata comovente x, utilizzando le leggi di trasformazione soprascritte;

c) infine si attua la linearizzazione delle stesse e si passa allo spazio delle componenti di Fourier per poter risolvere il sistema.

Si ha quindi:

a)-b) Eliminazione del *background* e passaggio al sistema di riferimento comovente
Dopo alcuni passaggi algebrici si ottiene:

- Per la $(1.3a)$

$$\left.\frac{\partial\rho}{\partial t}\right|_{\mathbf{x}} + 3H\rho + \frac{1}{a}\nabla_{\mathbf{x}}(\rho\mathbf{v}) = 0$$

- Per la $(1.3c)$

$$\nabla^2{}_{\mathbf{r}}\Phi_b = 4\pi G\rho_b \quad \Rrightarrow \quad \Phi_b = \frac{2\pi G}{3}\rho_b\mathbf{r}^2, \quad \nabla_{\mathbf{r}}\Phi_b = \frac{4\pi G}{3}\rho_b\mathbf{r}$$
$$\nabla^2{}_{\mathbf{r}}\phi = 4\pi G\delta\rho \quad \Rrightarrow \quad \nabla^2{}_{\mathbf{x}}\phi = 4\pi G a^2\delta\rho$$

- Per la $(1.3b)$

$$\left.\frac{\partial(H\mathbf{r})}{\partial t}\right|_{\mathbf{r}} + (H\mathbf{r}\cdot\nabla_{\mathbf{r}})H\mathbf{r} = -\nabla_{\mathbf{r}}\Phi_b \quad \Rrightarrow \quad (\dot{H}+H^2)\mathbf{r} = -\frac{4\pi G}{3}\rho_b\mathbf{r}$$
$$\left.\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}\right|_{\mathbf{x}} + H\mathbf{v} + \frac{1}{a}(\mathbf{v}\cdot\nabla_{\mathbf{x}})\mathbf{v} = -\frac{1}{a\rho}\nabla_{\mathbf{x}}p - \frac{1}{a}\nabla_{\mathbf{x}}\phi$$

Nelle ultime relazioni, quella relativa al *background*, è verificata in quanto esso soddisfa le equazioni di Friedman.

Il nuovo sistema di equazioni è dunque:

$$\left.\frac{\partial\rho}{\partial t}\right|_{\mathbf{x}} + 3H\rho + \frac{1}{a}\nabla_{\mathbf{x}}(\rho\mathbf{v}) = 0 \tag{1.4a}$$

$$\left.\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}\right|_{\mathbf{x}} + H\mathbf{v} + \frac{1}{a}(\mathbf{v}\cdot\nabla_{\mathbf{x}})\mathbf{v} = -\frac{1}{a\rho}\nabla_{\mathbf{x}}p - \frac{1}{a}\nabla_{\mathbf{x}}\phi \tag{1.4b}$$

$$\nabla^2{}_{\mathbf{x}}\phi = 4\pi G a^2\delta\rho \tag{1.4c}$$

dove "ϕ" è il potenziale gravitazionale *peculiare*

c) Linearizzazione e passaggio alle componenti di Fourier

Si pone:

$$\delta\rho = \rho_b\delta \qquad \text{con} \quad \delta \equiv \frac{\rho-\rho_b}{\rho_b} \quad \textit{contrasto di densità}$$

Si passa allo spazio di Fourier

$\delta(\mathbf{x},t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{k}\ \delta_{\mathbf{k}}(t)\ exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})$
$\mathbf{v}(\mathbf{x},t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{k}\ \mathbf{v}_{\mathbf{k}}(t)\ exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})$
$\phi(\mathbf{x},t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{k}\ \phi_{\mathbf{k}}(t)\ exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})$

Infine si ottiene il seguente sistema di equazioni:

$$\dot{\delta}_{\mathbf{k}} + \frac{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_{\mathbf{k}}}{a} = 0 \tag{1.5a}$$

$$\dot{\mathbf{v}}_{\mathbf{k}} + H\mathbf{v}_{\mathbf{k}} = -\frac{i\mathbf{k}}{a}(c_s^2\delta_{\mathbf{k}} + \phi_{\mathbf{k}}) \tag{1.5b}$$

$$k^2\phi_{\mathbf{k}} = -4\pi G a^2 \rho_b \delta_{\mathbf{k}} \tag{1.5c}$$

dove $c_s^2 \equiv \frac{\partial p}{\partial \rho}$

Grazie al *teorema della circuitazione di Kelvin*, la componente di $\mathbf{v}_{\mathbf{k}}$ ortogonale a $\mathbf{k}$, soddisfa l'equazione $\dot{\mathbf{v}}_\perp + H\mathbf{v}_\perp = 0$, quindi $\mathbf{v}_\perp \propto a^{-1}$, ciò significa che in regime lineare ogni moto vorticoso decade a causa dell'espansione dell'universo.
Si consideri quindi il sistema di equazioni in termini della componente della velocità peculiare parallela a $\mathbf{k}$ e si differenzi la prima delle (1.5)

$$\ddot{\delta}_{\mathbf{k}} + \frac{i\mathbf{k}}{a}\dot{\mathbf{v}}_\parallel - \frac{i\mathbf{k}}{a}H\mathbf{v}_\parallel = 0$$

utilizzando poi le altre due equazioni del set si ottiene la legge di evoluzione temporale del contrasto di densità:

$$\ddot{\delta}_{\mathbf{k}} + 2H\dot{\delta}_{\mathbf{k}} + \left(\frac{c_s^2 k^2}{a^2} - 4\pi G\rho_b\right)\delta_{\mathbf{k}} = 0 \tag{1.6}$$

Si definiscono allora il *numero d'onda comovente di Jeans* e, di conseguenza, la *lunghezza d'onda di Jeans*

$$\mathbf{k}_J \equiv a\frac{\sqrt{4\pi G\rho_b}}{c_s} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_J = \frac{2\pi a}{\mathbf{k}_J} = \sqrt{\frac{\pi {c_s}^2}{G\rho_b}}$$

Queste grandezze caratterizzano i processi di instabilità gravitazionale, si ha infatti che a tale lunghezza d'onda critica, le forze di pressione e quelle dovute alla gravità si eguagliano, quindi essa definisce la scala di tale fenomeno:

- per $\lambda \ll \lambda_J$ la perturbazione si propaga oscillando come un'onda sonora
- per $\lambda \gg \lambda_J$ il termine di pressione nell'equazione (1.6) diviene irrilevante allora vale l'equazione approssimata

$$\ddot{\delta}_{\mathbf{k}} + 2H\dot{\delta}_{\mathbf{k}} - 4\pi G\rho_b\delta_{\mathbf{k}} = 0 \tag{1.7}$$

La soluzione di questa equazione è del tipo:

$$\delta(\mathbf{x}, t) = D(t)^+ A(\mathbf{x}) + D(t)^- B(\mathbf{x})$$

con $D(t)^{\pm}$ linearmente indipendenti e $A(\mathbf{x})$, $B(\mathbf{x})$ due arbitrarie funzioni della posizione descriventi il campo di densità iniziale.
Si pone per semplicità $D \equiv D(t)^{+}$, che è definito *fattore di crescita lineare* e rappresenta il modo crescente della soluzione.
Se $\delta(\mathbf{x}, t) = DA(\mathbf{x})$ l'equazione di evoluzione del contrasto di densità in regime lineare (trascurando le forze di pressione) si può scrivere:

$$\ddot{D} + 2H\dot{D} - 4\pi G\rho_b D = 0 \tag{1.8}$$

Si riporta la soluzione dell'equazione per $\Omega_\Lambda \equiv \frac{\Lambda}{3H^2} = 0$ (dove Λ è la costante cosmologica) al variare del parametro di densità:

- $\Omega = 1$ (modello Einstein-de Setter)

$$D(t) = a(t) \propto t^{\frac{2}{3}}, \quad f(1) = 1 \tag{1.9}$$

- $\Omega < 1$ ($\tau = \frac{1}{\Omega} - 1$)

$$D(t) = 1 + \frac{3}{\tau} + 3\sqrt{\frac{1+\tau}{\tau^3}} ln(\sqrt{1+\tau} - \sqrt{\tau}) \tag{1.10}$$

- $\Omega > 1$ ($\tau = 1 - \frac{1}{\Omega}$),

$$D(t) = -1 + \frac{3}{\tau} - 3\sqrt{\frac{1-\tau}{\tau^3}} arctan\sqrt{\frac{\tau}{1-\tau}} \tag{1.11}$$

Infine il campo di velocità $\mathbf{v}$ è ottenuto utilizzando l'equazione di continuità:

$$\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v} = -a\frac{\partial\delta}{\partial t} = -aA(\mathbf{x})D\frac{\dot{D}}{D} = -a\delta Hf \tag{1.12}$$

$$\Rightarrow \qquad \mathbf{v}(\mathbf{x}) = a\frac{fH}{4\pi}\int d\mathbf{y}\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\delta_D(\mathbf{y}) \tag{1.13}$$

con

$$f(\Omega) \equiv \frac{dlnD}{dlna} = \frac{a}{\dot{a}}\frac{\dot{D}}{D} \tag{1.14}$$

Per ulteriori dettagli si consulti [2] o [3].

1.3 Fluttuazioni della densità primordiale: dalla dinamica alla statistica

Si è già discusso di come l' odierna spiegazione della formazione delle strutture cosmologiche su grande scala sia da attribuire alla crescita

di fluttuazioni primordiali del campo di densità $\delta(\mathbf{x})$ amplificate dal fenomeno dell'instabilità gravitazionale; i *test* delle teorie cosmologiche atte a descrivere queste fluttuazioni sono per loro natura statistici e uno dei motivi è che la scala di tempo cosmologica dell'evoluzione delle fluttuazioni è di gran lunga maggiore di quella sulla quale possono essere fatte osservazioni, questo implica che non è possibile seguire l'evoluzione dei singoli sistemi.
L'universo osservabile viene dunque modellizzato come una realizzazione stocastica di un *ensemble* di possibilità, l'obiettivo diviene quindi quello di fare predizioni statistiche, le quali a loro volta dipendono dalle proprietà delle perturbazioni primordiali che hanno condotto all'attuale stato delle strutture su grande scala.
La teoria più accreditata a questo proposito è quella dell'*inflazione* che attribuisce la struttura dell'universo odierno a fluttuazioni iniziali adiabatiche e Gaussiane, in questo caso il carattere stocastico di tale evoluzione proviene dalle fluttuazioni quantistiche di un campo scalare nell'universo primordiale.
In statistica, un campo *random* n-dimensionale (ovvero di n variabili random), ove siano $p(\delta_1, ...\delta_n)$ tutte le possibili funzioni di distribuzione della probabilità congiunta (o i loro *momenti*), è definito

- *statisticamente omogeneo* se le $p(\delta_1, ..\delta_n)$ sono invarianti sotto traslazione simultanea delle coordinate $x_1, ...x_n$ ($\delta_i = \delta(x_i)$) nello spazio, cioè dipendono solo dalle distanze relative;
- *statisticamente isotropo* se le $p(\delta_1, ..\delta_n)$ sono invarianti per rotazioni.

Assumiamo dunque che i campi cosmologici siano statisticamente omogenei e isotropi.
Si scriva il contrasto di densità nelle sue componenti di Fourier:

$$\delta(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k}\ \delta(\mathbf{k})\ exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$$

Si definisce *funzione di correlazione a due punti*:

$$\xi(\mathbf{r}) =< \delta(\mathbf{x})\delta(\mathbf{r}) >$$

il valore mediato del prodotto della funzione $\delta(\mathbf{x})$ in due punti diversi, x e $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{r}$, dove $\mathbf{r}$ è la distanza.
La quantità $\delta(\mathbf{k})$ è una variabile random complessa e dato che $\delta(\mathbf{x})$ è reale segue $\delta(\mathbf{k}) = \delta^*(-\mathbf{k})$.
Allora passando alle componenti di Fourier si avrà:

$$< \delta(\mathbf{k})\delta(\mathbf{k}') >= \int d\mathbf{x}d\mathbf{r}\ \xi(\mathbf{r})\ e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\mathbf{x}}e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}} = (2\pi)^3\delta_D(\mathbf{k}+\mathbf{k}') \int d\mathbf{r}\ \xi(\mathbf{r})\ exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$$

Dove $P(\mathbf{k}) \equiv \int d\mathbf{r}\ \xi(\mathbf{r})\ exp(i\mathbf{kr})$ è lo *spettro di potenza* della densità.
Si ottiene quindi l'importante relazione:

$$< \delta(\mathbf{k})\delta(\mathbf{k}') >= (2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{k}+\mathbf{k}')P(\mathbf{k}) \tag{1.15}$$

La trasformata inversa di $P(\mathbf{k})$ è $\xi(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k}\ P(\mathbf{k})\ exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})$, fatto noto come teorema di *Wiener-Khintchine*.
Infine si riporta un importante risultato, che sarà utilizzato nel seguito, noto come teorema di *Wick*: grazie all'omogeneità del campo lo spettro di potenza è una quantità ben definita, in particolare nel caso in cui il campo sia Gaussiano, il teorema appena citato assicura che vale:

$$< \delta(\mathbf{k}_1)...\delta(\mathbf{k}_{2p+1}) >= 0 \tag{1.16a}$$

$$< \delta(\mathbf{k}_1)...\delta(\mathbf{k}_{2p}) >= \sum \prod_{p(i,j)} < \delta(\mathbf{k}_i)\delta(\mathbf{k}_j) > \tag{1.16b}$$

dove la somma è su tutte le possibili associazioni delle coppie di modi $(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_j)$.

Chapter 2

Particelle autogravitanti non collisionali in universi curvi

Nel capitolo che segue si considererà il fenomeno dell'instabilità gravitazionale per un fluido non collisionale e irrotazionale con dispersione iniziale del campo di velocità trascurabile. Il fatto che le particelle del fluido non urtino tra di loro implica l'assenza di forze di pressione, cosa che si verifica per un fluido il cui regime sia prossimo a quello laminare.

2.1 Dinamica della singola particella

Per ogni particella di massa m del sistema, in regime Newtoniano, abbiamo: $\ddot{\mathrm{r}} = -\nabla_{\mathbf{r}}\Phi(\mathbf{x}, t)$, dove, come al solito, $\mathbf{r} = a\mathbf{x}$.
La Lagrangiana della particella sarà allora

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = \frac{1}{2}m(a\dot{\mathbf{x}} + \dot{a}\mathbf{x})^2 - m\Phi(\mathbf{x}, t)$$

in cui la quantità tra parentesi non è altro che w, scritta in termini della coordinata comovente.
Si effettua adesso la trasformazione canonica

$$\mathcal{L}' \to \mathcal{L} - \frac{d\psi}{dt}, \qquad \psi = \frac{1}{2}ma\dot{a}\mathbf{x}^2 \quad \Rrightarrow \quad \frac{d\psi}{dt} = ma\dot{a}\mathbf{x}\dot{\mathbf{x}} + \frac{1}{2}ma\ddot{a}\mathbf{x}^2 + \frac{1}{2}\dot{a}^2\mathbf{x}^2$$

$$\phi = \Phi + \frac{1}{2}a\ddot{a}\mathbf{x}^2 = \Phi - \Phi_b, \quad \Rrightarrow \quad \nabla^2_{\mathbf{x}}\phi = 4\pi Ga^2\rho + 3a\ddot{a}$$

le ultime due relazioni sono verificate ricordando che $\Phi_b = \frac{2\pi G}{3}\rho_b \mathbf{a}^2\mathbf{x}^2$, $\nabla^2_{\mathbf{x}}\Phi = 4\pi Ga^2\rho$ e utilizzando la (1.2).

Si ottiene dunque

$$\mathcal{L}'(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = \frac{1}{2} m a^2 \dot{\mathbf{x}}^2 - m\phi(\mathbf{x}, t) \tag{2.1}$$

$$\nabla^2_{\mathbf{x}}\phi = 4\pi G a^2 \rho_b \delta(\mathbf{x}, t) \tag{2.2}$$

Si effettua, a questo punto, il seguente cambio della coordinata temporale, $t \to D(t)$ (D parametro di crescita lineare), in quanto più adatta a descrivere modelli di universo con generico parametro di densità (Ω). Allora l'azione $S = \int dt \mathcal{L}'_t = \int dD \mathcal{L}'_D = \int dt \dot{D} \mathcal{L}'_D(t)$ deve rimanere invariata in quanto scalare, si ha così: $\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}'_D = \dot{D}^{-1}\mathcal{L}'_t$
La nuova Lagrangiana è

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', D) = \frac{1}{2} m a^2 \dot{D} \mathbf{x}'^2 - m\dot{D}^{-1}\phi(\mathbf{x}, t)$$

dove si utilizza il punto per indicare l'usuale derivata rispetto al tempo e l'apice (') per indicare la derivata rispetto a D ($\frac{d}{dD}$).
Si introducono adesso le due nuove quantità:

$$\varphi \equiv \frac{2D}{3e(\Omega)a^2\dot{D}^2}\phi, \quad \mu(D) \equiv \frac{a\dot{D}}{\sqrt{D/e(\Omega)}} m \quad \Rrightarrow$$

$$\Rrightarrow \quad \phi = \frac{3e(\Omega)a^2\dot{D}^2}{2D}, \quad m = \frac{\mu(D)}{a\dot{D}}\sqrt{\frac{D}{e(\Omega)}}$$

In cui $e(\Omega) \equiv \Omega/f(\Omega)^2$ con $f(\Omega)$ definita in (1.14).
Sostituendo m e ϕ nelle equazioni (3.3)- (2.2) e dopo opportune semplificazioni si ottiene:

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', D) = \frac{a\mu}{2\sqrt{D/e}}\left[\frac{D}{e}\mathbf{x}'^2 - 3\varphi(\mathbf{x}, D)\right] \tag{2.3}$$

$$D\nabla^2\varphi(\mathbf{x}, D) = \delta(\mathbf{x}, D) \tag{2.4}$$

Nelle quali, per semplicità di scrittura, si è posto $\mu \equiv \mu(D)$, $e \equiv e(\Omega)$, $f \equiv f(\Omega)$, $\nabla \equiv \nabla_{\mathbf{x}}$, convenzione che verrà utilizzata per il resto della trattazione.

Per ottenere la (2.4) si sono usati i seguenti fatti:

- Dall'equazione di Friedman (1.1)

$$1 = \frac{\rho_b}{3H^2/(8\pi G)} - \frac{Kc^2}{a^2H^2} \equiv \Omega - \frac{Kc^2}{a^2H^2} \quad \Rrightarrow \quad \Omega - 1 = \frac{Kc^2}{a^2H^2}$$

che sostituito nella (1.1) dà l'espressione di ρ_b in funzione di Ω e H:

$$\rho_b = \frac{3H^2\Omega}{8\pi G}, \qquad \frac{3}{2}H^2\Omega = 4\pi G\rho_b \tag{2.5}$$

- Dalla definizione della $f(\Omega)$ in (1.14)

$$e = \frac{\Omega}{f^2} = \Omega H^2 \frac{D^2}{\dot{D}^2} \tag{2.6}$$

Utilizzando queste uguaglianze in $D\nabla^2\varphi(\mathbf{x}, D) = \frac{2D^2}{3e\dot{D}^2} 4\pi G\rho_b\delta(\mathbf{x}, D)$, si ottiene la (2.4).

Le equazioni di *Euler-Lagrange* che ne discendono sono:

$$\frac{d}{dD}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}'} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{d}{dD}\left[a\mu\sqrt{\frac{D}{e}}\mathbf{x}'\right] + \frac{3}{2}a\mu\sqrt{\frac{e}{D}}\nabla\varphi(\mathbf{x}, D)$$

Si può adesso passare al formalismo Hamiltoniano attraverso la trasformazione di Legendre $(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \to (\mathbf{x}, \mathbf{p})$, con $\mathbf{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}'} = a\sqrt{\frac{D}{e}}\mu\mathbf{x}'$ (momento coniugato).
L'Hamiltoniana del sistema è quindi:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, D) &= \mathbf{p}\mathbf{x}' - \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', D)\Big|_{\mathbf{x}'(\mathbf{x},\mathbf{p},D)} = \\ &= \frac{\mathbf{p}^2}{2a\mu\sqrt{D/e}} + \frac{3}{2}\frac{a\mu}{\sqrt{D/e}}\varphi(\mathbf{x}, D)\end{aligned} \tag{2.7}$$

Le corrispondenti equazioni del moto, equivalenti alle equazioni di *Euler-Lagrange* sono:

$$\mathbf{x}' = \frac{\partial \mathcal{H}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, D)}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\mathbf{p}}{a\mu\sqrt{D/e}} \tag{2.8a}$$

$$\mathbf{p}' = -\frac{\partial \mathcal{H}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, D)}{\partial \mathbf{x}} = -\frac{3}{2}\frac{a\mu}{\sqrt{D/e}}\nabla\varphi(\mathbf{x}, D) \tag{2.8b}$$

2.2 Fluido irrotazionale e non collisionale: equazione di Vlasov

La descrizione di un sistema ad alto numero di gradi di libertà non può essere fatta seguendo la dinamica di ogni singola particella, dunque si rende necessario un approccio che studi la dinamica globale dello stesso. Si introduce a tal fine la *densità di probabilità* normalizzata (PDF[1]) delle particelle nello spazio delle fasi:

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, D)d\mathbf{x}d\mathbf{p}$$

[1]probability density function

essa rappresenta la probabilità che una particella abbia coordinate spaziali e momento negli intervalli infinitesimali $d\mathrm{x}$, $d\mathbf{p}$ al tempo $D(t)$.
Si definiscono quindi, attraverso i momenti della PDF $\left(\int d\mathbf{p}\mathbf{p}^k f(\mathbf{x},\mathbf{p},D)\right.$, con k ordine del momento$\left.\right)$, delle quantità che rappresentino il sistema macroscopicamente e che siano dunque osservabili:

- Momento di ordine zero: *densità di massa spaziale*

$$\varrho(\mathbf{x},D) \equiv \int d\mathbf{p} f(\mathbf{x},\mathbf{p},D) = \rho_0[1+\delta(\mathbf{x},D)] \tag{2.9}$$

- *flusso di velocità locale*: velocità media del campo di velocità intorno al punto x

$$u(\mathbf{x},D) \equiv \frac{1}{a\mu\sqrt{D/e}} \frac{\int d\mathbf{p}\mathbf{p} f(\mathbf{x},\mathbf{p},D)}{\int d\mathbf{p} f(\mathbf{x},\mathbf{p},D)} \tag{2.10}$$

- *tensore di dispersione del campo di velocità*

$$\pi_{\alpha\beta}(\mathbf{x},D) \equiv \frac{1}{a^2\mu^2 D/e} \frac{\int d\mathbf{p} p_\alpha p_\beta f(\mathbf{x},\mathbf{p},D)}{\int d\mathbf{p} f(\mathbf{x},\mathbf{p},D)} - u_\alpha(\mathbf{x},D) u_\beta(\mathbf{x},D) \tag{2.11}$$

L'equazione che descrive la dinamica del fluido è l'*equazione di Liouville*, ovvero l'equazione di continuità per la densità di particelle nello spazio delle fasi. Essa deriva dall'imporre nell'evoluzione temporale del sistema, le cui particelle interagiscano solo mediante la forza di gravità, la conservazione del numero totale di particelle in un qualsivoglia dato volume dello spazio delle fasi.
In assenza di collisioni, ovvero il nostro caso, l'equazione di Liouville prende il nome di *equazione di Vlasov*:

$$\frac{df}{dD} = \frac{\partial f}{\partial D} + \mathbf{x}' \cdot \nabla f + \mathbf{p}' \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f = 0$$

Sostituendo le espressioni di $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{p}'$ trovate nel precedente paragrafo

$$\frac{\partial f}{\partial D} + \frac{\mathbf{p}}{a\mu\sqrt{D/e}} \nabla f - \frac{3}{2} \frac{a\mu}{\sqrt{D/e}} \nabla\varphi \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0 \tag{2.12}$$

Da adesso in poi, per non appesantire la scrittura si intenderà, dove non specificato: $f \equiv f(\mathbf{x},\mathbf{p},D)$, $\varrho \equiv \varrho(\mathbf{x},D)$, $\varphi \equiv \varphi(\mathbf{x},D)$, $\mathbf{u} \equiv \mathbf{u}(\mathbf{x},D)$.
Le equazioni (2.12) e (2.4) descrivono in maniera completa il nostro sistema. In particolare, l'equazione di Vlasov, a causa della sua non linearità e dell'accoppiamento delle variabili in gioco, risulta molto difficile da risolvere; si considera quindi l'espressione per i primi due momenti della PDF ottenendo così l'equazione di continuità e quella di Eulero.

Si consideri la componente β dell'equazione :

$$\frac{\partial f}{\partial D} + \frac{p_\beta}{a\mu\sqrt{D/e}}\partial_\beta f - \frac{3}{2}\frac{a\mu}{\sqrt{D/e}}\partial_\beta\varphi\frac{\partial f}{\partial p_\beta} = 0$$

con $\partial_\beta \equiv \frac{\partial}{\partial x_\beta}$

Equazione di continutà

Si prenda il momento di ordine zero dell'equazione e si utilizzino le definizioni $(2.9) - (2.10)$

$$\frac{\partial}{\partial D}\Bigg(\underbrace{\int d\mathbf{p} f}_{A}\Bigg) + \partial_\beta\Bigg(\underbrace{\frac{1}{a\mu\sqrt{D/e}}\int d\mathbf{p} p_\beta f}_{B}\Bigg) - \frac{3}{2}\frac{a\mu}{\sqrt{D/e}}\partial_\beta\varphi\underbrace{\int d\mathbf{p}\frac{\partial f}{\partial p_\beta}}_{C} = 0$$

$$\begin{aligned} A &= \varrho \\ B &= \varrho u_\beta \\ C &= 0 \qquad \text{in quanto termine di superficie} \end{aligned}$$

Si ottiene

$$\frac{\partial \varrho}{\partial D} + \partial_\beta(\varrho u_\beta) = 0 \tag{2.13}$$

Equazione di Eulero

Si ottiene considerando l'equazione per il momento di ordine I e utilizzando nuovamente le definizioni $(2.9) - (2.11)$

$$\frac{\partial}{\partial D}\Bigg(\underbrace{\int d\mathbf{p} p_\alpha f}_{A}\Bigg) + \partial_\beta\Bigg(\underbrace{\frac{1}{a\mu\sqrt{D/e}}\int d\mathbf{p} p_\alpha p_\beta f}_{B}\Bigg) - \frac{3}{2}\frac{a\mu}{\sqrt{D/e}}\partial_\beta\varphi\underbrace{\int d\mathbf{p} p_\alpha\frac{\partial f}{\partial p_\beta}}_{C} = 0$$

$$\begin{aligned} A &= a\mu\sqrt{\frac{D}{e}}\varrho u_\alpha \\ B &= a\mu\sqrt{\frac{D}{e}}\Big[\varrho\pi_{\alpha\beta} + \varrho u_\alpha u_\beta\Big] \\ C &= \int d\mathbf{p}\Big[\frac{\partial(p_\alpha f)}{\partial p_\beta} - \delta^\alpha{}_\beta f\Big] = 0 - \delta^\alpha{}_\beta\varrho \end{aligned}$$

Sostituendo e svolgendo le operazioni di derivazione si ha

$$\frac{\partial\varrho}{\partial D}a\mu\sqrt{\frac{D}{e}}u_\alpha+\frac{\partial u_\alpha}{\partial D}a\mu\sqrt{\frac{D}{e}}\varrho+\frac{\dot{a}}{\dot{D}}\mu\sqrt{\frac{D}{e}}\varrho u_\alpha+\Big[\frac{\dot{a}}{a\dot{D}}+\frac{\ddot{D}}{\dot{D}^2}-\frac{1}{2D}\Big]a\mu\sqrt{\frac{D}{e}}\varrho u_\alpha+$$
$$\frac{1}{2D}a\mu\sqrt{\frac{D}{e}}u_\alpha\varrho+\partial_\beta\Big[\varrho\pi_{\alpha\beta}+\varrho u_\alpha u_\beta\Big]a\mu\sqrt{\frac{D}{e}}+\frac{3}{2}\frac{a\mu}{\sqrt{D/e}}\varrho\partial_\beta\varphi=0$$

Per giungere alla forma finale dell'equazione si moltiplica per il fattore $\frac{1}{a\mu\varrho}\sqrt{\frac{e}{D}}$ e si effettuano le eventuali semplificazioni; infine si sostituisce $\frac{\partial\varrho}{\partial D}$ utilizzando la (2.13):

$$\begin{aligned}&-u_\alpha\partial_\beta u_\beta-\frac{1}{\varrho}u_\beta u_\alpha\partial_\beta\varrho+\frac{\partial u_\alpha}{\partial D}+\Big[2\frac{\dot{a}}{a\dot{D}}+\frac{\ddot{D}}{\dot{D}^2}\Big]u_\alpha\\&+u_\alpha\partial_\beta u_\beta+\frac{1}{\varrho}u_\beta u_\alpha\partial_\beta\varrho+u_\beta\partial_\beta u_\alpha+\frac{1}{\varrho}\partial_\beta(\varrho\pi_{\alpha\beta})+\frac{3e}{2D}\partial_\beta\varphi=0\end{aligned}$$

Si trova quindi

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial D}+u_\beta\partial_\beta u_\alpha+\frac{3e}{2D}(u_\alpha+\partial_\beta\varphi)=-\frac{1}{\varrho}\partial_\beta(\varrho\pi_{\alpha\beta}) \tag{2.14}$$

Per ottenere la (2.14) si è tenuto conto che:

- la derivata di μ rispetto a D è:

$$\mu'=\frac{d}{dD}\left[a\dot{D}\sqrt{\frac{e}{D}}m\right]=\Big[\frac{\dot{a}}{a\dot{D}}+\frac{\ddot{D}}{\dot{D}^2}-\frac{1}{2D}\Big]\mu$$

- se si riscrive la (1.8) utilizzando le $(2.5)-(2.6)$:

$$\ddot{D}+2H\dot{D}-\frac{3}{2}H^2\Omega D=0\quad\Rrightarrow\quad\Big[2\frac{\dot{a}}{a\dot{D}}+\frac{\ddot{D}}{\dot{D}^2}\Big]=\frac{3}{2}\frac{e}{D}$$

Si riportano infine le due equazioni appena ricavate in forma vettoriale

$$\frac{\partial\varrho}{\partial D}+\nabla(\varrho\cdot\mathbf{u}) \tag{2.15}$$
$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial D}+(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}+\frac{3e}{2D}(\mathbf{u}+\nabla\varphi)=-\frac{1}{\varrho}\nabla(\varrho\cdot\boldsymbol{\pi}_{\alpha\beta}) \tag{2.16}$$

Esse accoppiano rispettivamente il momento di ordine zero a quello di ordine uno (equazione di continuità) e quest'ultimo con quello di ordine due (equazione di Eulero). Tale sistema è chiuso dall'equazione di Poisson (2.4).

2.3 Dinamica dei potenziali gravitazionale e del campo di velocità

Si assuma, come già accennato nell'introduzione del capitolo, che la materia contenuta nell'universo all'epoca dellla formazione delle strutture su grande scala, abbia, inizialmente, dispersione di velocità e vorticità trascurabili; si assuma inoltre che il sistema sia in regime laminare in cui le traiettorie delle particelle che lo costituiscono non si intersecano ma rimangono su correnti singole; quest'ultima assunzione comporta l'annullamento di $\boldsymbol{\pi}_{\alpha\beta}$, infatti esso caratterizza proprio la deviazione del moto delle particelle dal modello a *single-stream*. Essa perderà di validità man mano che ci si allontana dall'era primordiale dell'universo.

Si può quindi riscrivere la (2.16) come segue:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial D} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \frac{3e}{2D}(\mathbf{u} + \nabla\varphi) = 0 \tag{2.17}$$

Inoltre, grazie al teorema della circuitazione di Kelvin, che assicura, sotto le ipotesi sopraesposte, che l'irrotazionalità persista nel tempo (nelle regioni di moto a *single-stream*), si può definire il potenziale del campo di velocità $\Phi \quad \Rrightarrow \quad \mathbf{u} = \nabla\Phi$.
Dunque, valide le assunzioni appena fatte, si sostituisce il potenziale del campo di velocità nella (2.17) ottenendo l' *equazione di Bernouilli*:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial D} + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 + \frac{3e}{2D}(\Phi + \varphi) = 0 \tag{2.18}$$

Si consideri adesso l'uguaglianza $\varrho = \rho_0[1+\delta] = \rho_0[1+D\nabla^2\varphi]$, sostituendola nella (2.15) si ottiene

$$\nabla\left[\frac{\partial}{\partial D}(D\nabla\varphi) + (1 + D\nabla^2\varphi)\nabla\Phi\right] = 0 \tag{2.19}$$

Le equazioni $(2.19) - (2.18)$ rappresentano la dinamica del sistema in termini del potenziale del campo di velocità e di quello gravitazionale. La riformulazione del problema in questi termini semplificherà la trattazione non lineare, per la quale esso potrà essere risolto in maniera esatta.

Nell'ultima equazione, il termine tra parentesi quadre è una quantità a divergenza nulla, il che significa che può essere pensato come il rotore di una terza funzione:

$$\frac{\partial}{\partial D}(D\nabla\varphi) + (1 + D\nabla^2\varphi)\nabla\Phi = \nabla \times \mathbf{T} \tag{2.20}$$

Dato che si è interessati ai moti irrotazionali del sistema, ricorrendo al *teorema di Helmholtz*, possiamo eliminare il vettore solenoidale $\mathbf{T}$ dall'equazione; ponendo

$$(D\nabla^2\varphi)\nabla\Phi \equiv \nabla F + \nabla \times \mathbf{T} \tag{2.21}$$

`Teorema di Helmholtz`
Dato un campo vettoriale $\mathbf{C}$, che sia finito, uniforme, continuo e che si annulli all'infinito, esso può essere espresso come somma del gradiente di una funzione scalare φ', detta *potenziale scalare*, più un rotore di una funzione solenoidale $\mathbf{A}$, detto *potenziale scalare*:

$$\mathbf{C} = \nabla\varphi' + \nabla \times \mathbf{A}, \qquad \nabla\mathbf{A} = 0$$

si veda [4, p.53]

Sostituita l'ultima espressione nella (2.20) si può notare che il termine $\nabla \times \mathbf{T}$ viene effettivamente eliminato

$$\frac{\partial}{\partial D}(D\nabla\varphi) + \nabla\Phi + \nabla F = 0$$

Inoltre dalla definizione (2.21) si ha che la F deve soddisfare l'equazione

$$\nabla^2 F = D\nabla^2\varphi\nabla^2\Phi + D\nabla \cdot (\nabla^2\varphi)\nabla\Phi = \nabla(\delta \cdot \mathbf{u})$$

Tale potenziale ausiliario, è legato al flusso di materia trasportata dalla corrente di massa $\mathbf{j} = \delta\mathbf{u}$, la quale è generata dalle fluttuazioni di densità δ che si muovono con velocità peculiare $\mathbf{u}$. Solo la componente longitudinale di tale corrente, $\mathbf{j}_{||}$, determinerà la dinamica del sistema.
Riassumendo, l'insieme di equazioni che descrivono la dinamica del fluido, nelle ipotesi di iniziale irrotazionalità e dispersione del campo di velocità trascurabile, insieme con quella di moto laminare, sono:

$$\frac{\partial}{\partial D}\big[D\nabla\varphi(\mathbf{x}, D)\big] + \nabla\Phi(\mathbf{x}, D) + \nabla F(\mathbf{x}, D) = 0 \tag{2.22a}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial D}(\mathbf{x}, D) + \frac{1}{2}\big[\nabla\Phi(\mathbf{x}, D)\big]^2 + \frac{3e}{2D}\big[\Phi(\mathbf{x}, D) + \varphi(\mathbf{x}, D)\big] = 0 \tag{2.22b}$$

$$\nabla^2 F(\mathbf{x}, D) = D\nabla \cdot \big[\nabla^2\varphi(\mathbf{x}, D)\nabla\Phi(\mathbf{x}, D)\big] \tag{2.22c}$$

Chapter 3

Teoria perturbativa Euleriana non lineare

Il presente capitolo tratterà l'analisi non lineare delle perturbazioni cosmologiche, in un universo di Friedman con parametro di densità Ω generico, adottando un approccio Euleriano. Esso consisterà nell'espandere il contrasto di densità (δ) e la velocità peculiare ($\mathbf{u}$) intorno alla soluzione di *background* $\delta = 0$, $\mathbf{u} = 0$, risolvendo poi le equazioni differenziali che ne derivano.
Tale metodo rappresenta un'alternativa all'approccio perturbativo Lagrangiano, come la nota approssimazione di *Zel'dovich*, il cui schema consiste nel seguire le traiettorie delle particelle perturbando queste ultime intorno alla posizione Lagrangiana iniziale, q.
Le fondamentali differenze tra i due approcci sono:

- l'intrinseca *non separabilità* delle soluzioni, a partire dal secondo ordine, nelle variabili spaziali e temporali, che caratterizza il metodo Euleriano, al contrario di quello Lagrangiano;
- l'incapacità, per l'approccio perturbativo Euleriano, di descrivere il fenomeno dello *shell-crossing* e la conseguente generazione di moti vorticosi dovuti al regime *multi-streaming*, dunque di poter spiegare quali siano i processi che conducono alla formazione delle caustiche;

Se quest'ultima caratteristica della descrizione Euleriana rappresenti un limite è ancora oggetto di discussione. Per ulteriori dettagli si veda [1].

3.1 Ansatz

Si consideri il sistema di equazioni (2.22), per poter ottenere le soluzioni esatte ad un dato ordine perturbativo, n, si formula, sui potenziali che ne descrivono la dinamica, il seguente *ansatz*:

$$\varphi(\mathbf{x}, D) = \sum_{i=1}^{n} \varphi^{(i)}(\mathbf{x}, D) \equiv \sum_{i=1}^{n} D^{(i-1)} \varphi_i(\mathbf{x}, D) \tag{3.1a}$$

$$\Phi(\mathbf{x}, D) = \sum_{i=1}^{n} \Phi^{(i)}(\mathbf{x}, D) \equiv \sum_{i=1}^{n} D^{(i-1)} \Phi_i(\mathbf{x}, D) \tag{3.1b}$$

A questo punto, utilizzando le relazioni che legano i campi ai rispettivi potenziali

$$\delta(\mathbf{x}, D) = D\nabla^2 \varphi(\mathbf{x}, D) \tag{3.2a}$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, D) = \nabla \Phi(\mathbf{x}, D) \tag{3.2b}$$

si trovano le corrispondenti soluzioni per i primi.

3.2 Approssimazione al I ordine

In questa sezione si considererà l'approssimazione lineare ($n = 1$), eliminando tutti i contributi di ordine superiore.
Si ottiene:

$$\frac{\partial}{\partial D}\left[D\varphi^{(1)}(\mathbf{x}, D)\right] + \Phi^{(1)}(\mathbf{x}, D) = 0 \qquad \Rrightarrow \qquad \varphi^{(1)}(\mathbf{x}, D) + \Phi^{(1)}(\mathbf{x}, D) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial D}\Phi^{(1)}(\mathbf{x}, D) + \frac{3e}{2D}\left[\Phi^{(1)}(\mathbf{x}, D) + \varphi^{(1)}(\mathbf{x}, D)\right] = 0 \quad \Uparrow \;\Rrightarrow \qquad \frac{\partial}{\partial D}\Phi^{(1)}(\mathbf{x}, D) = 0$$

Si nota che in tale regime non compare la $F(\mathbf{x}, D)$ in quanto è una quantità almeno al secondo ordine nei campi cosmologici.
Infine il sistema (2.22) diviene:

$$\varphi^{(1)}(\mathbf{x}, D) + \Phi^{(1)}(\mathbf{x}, D) = 0 \tag{3.4a}$$

$$\frac{\partial}{\partial D}\Phi^{(1)}(\mathbf{x}, D) = 0 \tag{3.4b}$$

Si trova, quindi, che al primo ordine perturbativo il sistema può essere descritto in termini di un solo potenziale, $\varphi^{(1)}(\mathbf{x}, D) = -\Phi^{(1)}(\mathbf{x}, D)$ e che esso non dipende da D:

$$\varphi^{(1)}(\mathbf{x}, D) = \varphi^{(1)}(\mathbf{x}) = -\Phi^{(1)}(\mathbf{x}) \tag{3.5}$$

I corrispondenti campi in regime lineare saranno:

$$\delta^{(1)}(\mathbf{x}, D) = D\nabla^2\varphi^{(1)}(\mathbf{x}) = D\nabla^2\varphi_1(\mathbf{x}) \tag{3.6a}$$

$$\mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x}, D) = \nabla\Phi^{(1)}(\mathbf{x}) = -\nabla\varphi_1(\mathbf{x}) \tag{3.6b}$$

Tali soluzioni sono chiaramente separabili nelle variabili x e D.

3.3 Approssimazione al II ordine

L'argomento di questo paragrafo è essenzialmente l'obiettivo principale di questo lavoro, ovvero il calcolo perturbativo non lineare al secondo ordine delle equazioni che descrivono l'evoluzione dei campi di densità e di velocità. Dalle (3.1) per $n = 2$ si ha

$$\varphi^{(2)}(\mathbf{x}, D) = D\varphi_2(\mathbf{x}, D), \qquad \Phi^{(2)}(\mathbf{x}, D) = D\Phi_2(\mathbf{x}, D)$$

Si sostituiscono queste quantità nel sistema (2.22) considerando tutti i termini fino al secondo ordine.

- Equazione $(2.22a)$

$$\frac{\partial}{\partial D}\big[D\varphi^{(2)}(\mathbf{x}, D)\big] + \Phi^{(2)}(\mathbf{x}, D) + F^{(2)}(\mathbf{x}, D) = 0 \quad \Rrightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial D}\big[D^2\varphi_2(\mathbf{x}, D)\big] + D\Phi_2(\mathbf{x}, D) + F_2(\mathbf{x}, D) =$$

$$= D^2\frac{\partial}{\partial D}\varphi_2(\mathbf{x}, D) + 2D\varphi_2(\mathbf{x}, D) + D\Phi_2(\mathbf{x}, D) + F_2(\mathbf{x}, D) = 0$$

dividendo per D e definendo la funzione scalata $F_2(\mathbf{x}) = D^{-1}F^{(2)}(\mathbf{x}, D)$:

$$D\frac{\partial}{\partial D}\varphi_2(\mathbf{x}, D) + 2\varphi_2(\mathbf{x}, D) + \Phi_2(\mathbf{x}, D) + F_2(\mathbf{x}) = 0$$

- Equazione $(2.22b)$

$$\frac{\partial}{\partial D}\Phi^{(2)}(\mathbf{x}, D) + \frac{1}{2}\big[\nabla\Phi^{(1)}(\mathbf{x})\big]^2 + \frac{3e}{2D}\big[\Phi^{(2)}(\mathbf{x}, D) + \varphi^{(2)}(\mathbf{x}, D)\big] = 0 \quad \Rrightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial D}\big[D\Phi_2(\mathbf{x}, D)\big] + \frac{1}{2}\big[\nabla\Phi_1(\mathbf{x})\big]^2 + \frac{3e}{2D}D\big[\Phi_2(\mathbf{x}, D) + \varphi_2(\mathbf{x}, D)\big] =$$

$$= D\frac{\partial}{\partial D}\Phi_2(\mathbf{x}, D) + \frac{1}{2}\big[\nabla\Phi_1(\mathbf{x})\big]^2 + \Big[1 + \frac{3e}{2}\Big]\Phi_2(\mathbf{x}, D) + \frac{3e}{2}\varphi_2(\mathbf{x}, D) = 0$$

- Equazione $(2.22c)$

$$\nabla^2 F^{(2)}(\mathbf{x},D) = D\nabla\cdot\left[\nabla^2\varphi^{(1)}(\mathbf{x})\nabla\Phi^{(1)}(\mathbf{x})\right] \quad \Rrightarrow$$
$$D\nabla^2 F_2(\mathbf{x}) = D\nabla\cdot\left[\nabla^2\varphi_1(\mathbf{x})\nabla\Phi_1(\mathbf{x})\right] \quad \Rrightarrow$$
$$\nabla^2 F_2(\mathbf{x}) = \nabla\cdot\left[\nabla^2\varphi_1(\mathbf{x})\nabla\Phi_1(\mathbf{x})\right]$$

  dove nel secondo passaggio si è di nuovo sostituita la $F(\mathbf{x})$ scalata e diviso per D

Il sistema di equazioni al secondo ordine perturbativo è quindi:

$$D\frac{\partial}{\partial D}\varphi_2(\mathbf{x},D) + 2\varphi_2(\mathbf{x},D) + \Phi_2(\mathbf{x},D) + F_2(\mathbf{x}) = 0 \tag{3.10a}$$

$$D\frac{\partial}{\partial D}\Phi_2(\mathbf{x},D) + \frac{1}{2}\left[\nabla\Phi_1(\mathbf{x})\right]^2 + \left[1+\frac{3e}{2}\right]\Phi_2(\mathbf{x},D) + \frac{3e}{2}\varphi_2(\mathbf{x},D) = 0 \tag{3.10b}$$

$$\nabla^2 F_2(\mathbf{x}) = \nabla\cdot\left[\nabla^2\varphi_1(\mathbf{x})\nabla\Phi_1(\mathbf{x})\right] \tag{3.10c}$$

L'ultima equazione del set, è immediatamente risolvibile passando allo spazio di Fourier; in questo spazio la non linearità delle quantità in gioco verrà codificata nel *kernel* dell'equazione, il quale metterà in evidenza l'accoppiamento dei modi dei campi per ogni coppia di vettori d'onda $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$ la cui somma sia $\mathbf{k}$.
Si riscriva la $(3.10c)$ come somma di due termini:

$$\nabla^2 F_2(\mathbf{x}) = \nabla^2\varphi_1(\mathbf{x})\nabla^2\Phi_1(\mathbf{x}) + \nabla\cdot(\nabla^2\varphi_1(\mathbf{x}))\nabla\Phi(\mathbf{x})$$

Passando alle componenti di Fourier:

$$\begin{aligned}-k^2\tilde{F}(\mathbf{k}) = \int d\mathbf{x}\Bigg[&\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{k}_1(-k_1^2)\cdot\tilde{\varphi}_1(\mathbf{k}_1)e^{i\mathbf{k}_1\mathbf{x}}\cdot\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{k}_2(-k_2^2)\cdot\tilde{\Phi}_1(\mathbf{k}_2)e^{i\mathbf{k}_2\mathbf{x}}\\ &+\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{k}_1(-k_1^2)(i\mathbf{k}_1)\cdot\tilde{\varphi}_1(\mathbf{k}_1)e^{i\mathbf{k}_1\mathbf{x}}\cdot\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{k}_2(i\mathbf{k}_2)\cdot\tilde{\Phi}_1(\mathbf{k}_2)e^{i\mathbf{k}_2\mathbf{x}}\Bigg]e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}}\\ = -&\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2\left[1+\frac{\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{k}_2}{k_2^2}\right]k_1^2\tilde{\varphi}_1(\mathbf{k}_1)k_2^2\tilde{\varphi}_1(\mathbf{k}_2)\cdot\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{x}e^{i(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2-\mathbf{k})\mathbf{x}}\end{aligned}$$

Infine si ottiene:

$$\tilde{F}(\mathbf{k}) = \frac{1}{k^2(2\pi)^3}\int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2\delta_D(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2-\mathbf{k})\left[1+\frac{\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{k}_2}{k_2^2}\right]k_1^2\tilde{\varphi}_1(\mathbf{k}_1)k_2^2\tilde{\varphi}_1(\mathbf{k}_2) \tag{3.12}$$

Il termine $\left[1 + \frac{\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2}{k_2^2}\right]$ è il *kernel* dell'equazione.

Nel precedente calcolo si sono utilizzati i seguenti fatti:

- dal primo paragrafo del capitolo $\varphi_1(\mathbf{x}) = -\Phi_1(\mathbf{x})$
- $\delta_D(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{x} \cdot exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$, delta di Dirac

---

Per poter risolvere le altre due equazioni, le quali sono accoppiate nei potenziali, si procede come segue:

- Dalla prima equazione delle (3.10) si ottiene:

$$\Phi_2(\mathbf{x}, D) = -D\frac{\partial}{\partial D}\varphi_2(\mathbf{x}, D) - 2\varphi_2(\mathbf{x}, D) - F_2(\mathbf{x})$$

- Si deriva la $(3.10a)$ rispetto a D per ottenere $\partial\phi_2(\mathbf{x}, D)/\partial D$ in funzione di $\varphi_2(\mathbf{x}, D)$ e delle sue derivate:

$$\frac{\partial}{\partial D}\varphi_2(\mathbf{x}, D) + D\frac{\partial^2}{\partial^2 D}\varphi_2(\mathbf{x}, D) + 2\frac{\partial}{\partial D}\varphi_2(\mathbf{x}, D) + \frac{\partial}{\partial D}\Phi_2(\mathbf{x}, D) = 0$$

$$\Rrightarrow \qquad \frac{\partial}{\partial D}\Phi_2(\mathbf{x}, D) = -3\frac{\partial}{\partial D}\varphi_2(\mathbf{x}, D) - D\frac{\partial^2}{\partial^2 D}\varphi_2(\mathbf{x}, D)$$

- Infine si sostituiscono le espressioni appena trovate nella $(3.10b)$ in modo da disaccoppiare le due equazioni. Si ottiene

$$D^2\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial^2 D} + \left[4 + \frac{3e}{2}\right]D\frac{\partial\varphi_2}{\partial D} + \left[2 + \frac{3e}{2}\right]\varphi_2 = \frac{1}{2}\left[\nabla\varphi_1\right]^2 - \left[1 + \frac{3e}{2}\right]F_2 \quad \textbf{(3.14)}$$

dove si sono omesse le dipendenze delle funzioni.
Si introduce a questo punto la funzione

$$\psi(\mathbf{x}, D) \equiv \varphi_2(\mathbf{x}, D) + F(\mathbf{x}) \qquad \textbf{(3.15)}$$

Essa è separabile nelle variabili spaziali e temporali, al contrario di $\varphi_2(\mathbf{x}, D)$, in questo modo si agevolerà la soluzione dell'equazione.

Sostituendo nella (3.14) le quantità $\varphi_2(\mathbf{x}, D) = \psi(\mathbf{x}, D) - F(\mathbf{x})$, $\frac{\partial}{\partial D}\varphi_2(\mathbf{x}, D) = \frac{\partial}{\partial D}\psi(\mathbf{x}, D)$ e $\frac{\partial^2}{\partial^2 D}\varphi_2(\mathbf{x}, D) = \frac{\partial^2}{\partial^2 D}\psi(\mathbf{x}, D)$, l'equazione diviene:

$$D^2\frac{\partial^2}{\partial^2 D}\psi(\mathbf{x},D)+\Big[4+\frac{3e}{2}\Big]D\frac{\partial}{\partial D}\psi(\mathbf{x},D)+\Big[2+\frac{3e}{2}\Big]\psi(\mathbf{x},D)=\frac{1}{2}\big[\nabla\varphi_1(\mathbf{x})\big]^2+F_2(\mathbf{x})$$

Si ponga adesso:

- $$C(\mathbf{x})\equiv\frac{1}{2}\big[\nabla\varphi_1\big]^2+F_2(\mathbf{x})\quad\Rrightarrow \tag{3.16a}$$

  $$D^2\frac{\partial^2}{\partial^2 D}\psi(\mathbf{x},D)+\Big[4+\frac{3e}{2}\Big]D\frac{\partial}{\partial D}\psi(\mathbf{x},D)+\Big[2+\frac{3e}{2}\Big]\psi(\mathbf{x},D)=C(\mathbf{x}) \tag{3.16b}$$

- $$A(\Omega)\equiv 2+\frac{3e(\Omega)}{2}=A(D)\quad\Rrightarrow \tag{3.17a}$$

  $$D^2\frac{\partial^2}{\partial^2 D}\psi(\mathbf{x},D)+\Big[2+A(D)\Big]D\frac{\partial}{\partial D}\psi(\mathbf{x},D)+A(D)\psi(\mathbf{x},D)=C(\mathbf{x}) \tag{3.17b}$$

Riassumendo, il sistema formato dalle equazioni $(3.10a)-(3.10b)$ può essere riscritto equivalentemente come:

$$\left\{D^2\frac{\partial^2}{\partial^2 D}+\Big[2+A(D)\Big]D\frac{\partial}{\partial D}+A(D)\right\}\psi(\mathbf{x},D)=C(\mathbf{x}) \tag{3.18a}$$

$$\Phi_2(\mathbf{x},D)=-D\frac{\partial}{\partial D}\varphi_2(\mathbf{x},D)-2\varphi_2(\mathbf{x},D)-F_2(\mathbf{x}) \tag{3.18b}$$

$$\varphi_2(\mathbf{x},D)=\psi(\mathbf{x},D)-F(\mathbf{x}) \tag{3.18c}$$

Esso, una volta definita la $F(\mathbf{x})$ dalle condizioni iniziali e risolta la $(3.18a)$, fornisce una soluzione esatta dei potenziali al secondo ordine perturbativo.
A tal fine, considerando che la $\psi(\mathbf{x},D)$ è separabile nelle variabili x e D, che la quantià a destra della prima equazione non dipende da D e che conseguentemente anche il lato sinistro della stessa non può dipendere dalla variabile temporale, si cerca una soluzione del tipo:

$$\psi(\mathbf{x},D)=B(D)C(\mathbf{x}) \tag{3.19}$$

I potenziali al secondo ordine saranno allora:

$$\varphi_2(\mathbf{x}, D) = B(D)C(\mathbf{x}) - F_2(\mathbf{x})$$

$$\Phi_2(\mathbf{x}, D) = D\frac{\partial B(D)}{\partial D}C(\mathbf{x}) - 2B(D)C(\mathbf{x}) - F_2(\mathbf{x})$$

$$\Downarrow$$

$$\varphi_2(\mathbf{x}, D) = -\big[1 - B(D)\big]F_2(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}B(D)\big[\nabla\varphi_1(\mathbf{x})\big]^2 \tag{3.21a}$$

$$\Phi_2(\mathbf{x}, D) = \big[1 - 2B(D) - DB'(D)\big]F_2(\mathbf{x}) - \frac{1}{2}\big[2B(D) + DB'(D)\big]\big[\nabla\varphi_1(\mathbf{x})\big]^2 \tag{3.21b}$$

---

dove si ricorda che $B'(D) \equiv \frac{\partial B(D)}{\partial D}$

Infine, utilizzando le (3.2) e le (3.1), si possono trovare le espressioni dei campi δ, $\mathbf{u}$ e $\nabla\mathbf{u}$ al secondo ordine perturbativo

$$\delta^{(2)}(\mathbf{x}, D) = D\nabla^2\varphi^{(2)}(\mathbf{x}, D) = D^2\nabla^2\varphi_2(\mathbf{x}, D) \tag{3.22a}$$

$$\mathbf{u}^{(2)}(\mathbf{x}, D) = \nabla\Phi^{(2)}(\mathbf{x}, D) = D\nabla\Phi_2(\mathbf{x}, D) \quad \Rrightarrow \nabla\mathbf{u}^{(2)}(\mathbf{x}, D) = D\nabla^2\Phi_2(\mathbf{x}, D) \tag{3.22b}$$

Si sostituiscono quindi nelle (3.22) le espressioni trovate per i potenziali e si utilizzano le uguaglianze $(3.10c)$ e (3.5) al fine di ottenere le quantità finali in funzione dei campi lineari $\delta^{(1)}(\mathbf{x}, D)$, $\mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x})$.

• Calcolo del campo di densità: $\delta^{(2)}(\mathbf{x}, D)$:

$$\begin{aligned}
\delta^{(2)}(\mathbf{x}, D) &= -\,D^2[1 - B(D)]\nabla\cdot\big[\nabla^2\varphi_1\nabla\Phi_1\big] + \frac{1}{2}B(D)D^2\nabla^2\big[\nabla\varphi_1\big]^2 \\
&= -\,[1 - B(D)]\big[D\nabla(D\nabla^2\varphi_1)(\nabla\Phi_1) - (D\nabla^2\varphi_1)^2\big] \\
&\quad + B(D)\big[D\nabla(D\nabla^2\varphi_1)\cdot\nabla\varphi_1 + D^2(\nabla^2\Phi_1)^2\big] \\
&= -\,[1 - B(D)]\big[D\nabla\delta^{(1)}\cdot\mathbf{u}^{(1)} - (\delta^{(1)})^2\big] \\
&\quad + B(D)\Big[D\nabla\delta^{(1)}(-\mathbf{u}^{(1)}) + D^2\sum_{\alpha\beta}(\partial_\alpha u_\beta^{(1)})^2\Big]
\end{aligned}$$

Infine si ottiene:

$$\delta^{(2)}(\mathbf{x},D) = [1-B(D)]\delta^{(1)}(\mathbf{x},D)^2 - D(\mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x})\cdot\nabla)\delta^{(1)}(\mathbf{x},D) + D^2B(D)\sum_{\alpha\beta}(\partial_\alpha u_\beta^{(1)}(\mathbf{x}))^2$$

• Calcolo del campo di velocità $\mathbf{u}^{(2)}(\mathbf{x},D)$

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^{(2)}(\mathbf{x},D) =& \nabla\big\{D\big[1-2B(D)-DB'(D)\big]F_2(\mathbf{x}) - \frac{1}{2}D\big[2B(D)+DB'(D)\big]\big[\nabla\varphi_1\big]^2\big\}\\ =& \nabla\big\{\big[1-2B(D)-DB'(D)\big]F^{(2)}(\mathbf{x},D) - \frac{1}{2}D\big[2B(D)+DB'(D)\big]\mathbf{u}^{(1)2}(\mathbf{x})\big\}\end{aligned}$$

Tale quantità è manifestamente irrotazionale nello spazio delle x, in quanto gradiente di una funzione scalare.

• Calcolo della divergenza del campo di velocità $\nabla\mathbf{u}^{(2)}(\mathbf{x})$

$$\begin{aligned}\nabla\mathbf{u}^{(2)}(\mathbf{x},D) =& D[1-2B(D)-DB'(D)]\nabla\cdot\big[\nabla^2\varphi_1\nabla\Phi_1\big]\\ &- \frac{1}{2}\big[2B(D)+DB'(D)\big]D\nabla^2\big[\nabla\varphi_1\big]^2\\ =& \frac{1}{D}\Bigg\{[1-2B(D)-DB'(D)]\big[D\nabla(D\nabla^2\varphi_1)(\nabla\Phi_1) - (D\nabla^2\varphi_1)^2\big]\\ &+ \big[2B(D)+DB'(D)\big]\big[D\nabla(D\nabla^2\varphi_1)\cdot\nabla\varphi_1 + D^2(\nabla^2\Phi_1)^2\big]\Bigg\}\\ =& \frac{1}{D}\Bigg\{[1-2B(D)-DB'(D)]\big[D\nabla\delta^{(1)}\cdot\mathbf{u}^{(1)} - (\delta^{(1)})^2\big] -\\ &- \big[2B(D)+DB'(D)\big]\Bigg[D\nabla\delta^{(1)}(-\mathbf{u}^{(1)}) + D^2\sum_{\alpha\beta}(\partial_\alpha u_\beta^{(1)})^2\Bigg]\Bigg\}\end{aligned}$$

Moltiplicando per “$-D$”, si ha infine

$$\begin{aligned}-D\nabla\mathbf{u}^{(2)}(\mathbf{x},D) =&[1-2B(D)-DB'(D)]\delta^{(1)}(\mathbf{x},D)^2\\ &-D(\mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x})\cdot\nabla)\delta^{(1)}(\mathbf{x},D)\\ &+D^2\big[2B(D)+DB'(D)\big]\sum_{\alpha\beta}(\partial_\alpha u^{(1)}_\beta(\mathbf{x}))^2\end{aligned}$$

Riassumendo, il campo di densità e la divergenza del campo di velocità al secondo ordine perturbativo sono:

$$\delta^{(2)}(\mathbf{x},D) = [1-B(D)]\delta^{(1)2} - D(\mathbf{u}^{(1)}\cdot\nabla)\delta^{(1)} + D^2B(D)\sum_{\alpha\beta}(\partial_\alpha u^{(1)}_\beta)^2 \tag{3.28a}$$

$$-D\nabla\mathbf{u}^{(2)}(\mathbf{x},D) = [1-G(D)]\delta^{(1)2} - D(\mathbf{u}^{(1)}\cdot\nabla)\delta^{(1)} + D^2G(D)\sum_{\alpha\beta}(\partial_\alpha u^{(1)}_\beta)^2 \tag{3.28b}$$

dove si è posto $G(D)\equiv 2B(D)+DB'(D)$ e si sono omesse le dipendenze $\delta^{(1)}\equiv\delta^{(1)}(\mathbf{x},D)$, $\mathbf{u}^{(1)}\equiv\mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x})$.

Da queste espressioni si può derivare la relazione che quantifica la deviazione della divergenza del campo di velocità da quello di densità:

$$-D\nabla\mathbf{u}^{(2)}(\mathbf{x},D) = \delta^{(2)}(\mathbf{x},D) - D^2\big[DB(D)\big]'\Big[(\nabla\mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x}))^2 - \sum_{\alpha\beta}(\partial_\alpha u^{(1)}_\beta)(\mathbf{x})^2\Big] \tag{3.29}$$

La quantità

$$\mu^{(2)}(\mathbf{u}_1)\equiv\frac{1}{2}\Big[(\nabla\mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x}))^2 - \sum_{\alpha\beta}(\partial_\alpha u^{(1)}_\beta(\mathbf{x}))^2\Big] = (\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3)$$

è l'invariante al secondo ordine del tensore di deformazione iniziale $\partial_\alpha\partial_\beta\Phi(\mathbf{x})$, mentre le $\lambda_{1,2,3}$ sono gli autovalori di $\partial_\alpha u^{(1)}_\beta$.
Si ricorda inoltre che la corrispondente relazione tra le due quantità δ e $\nabla\mathbf{u}$ in regime lineare era stata derivata nel primo capitolo [equazione (1.12)].

Infine si consideri il fattore $B(D)$ della soluzione imposta (3.19), esso caratterizza la crescita al secondo ordine perturbativo dei potenziali dei campi, utilizzando la $(3.18a)$ si trova che tale fattore è soluzione dell'equazione:

$$\Big\{D^2\frac{d^2}{d^2D}+\big[2+A(D)\big]D\frac{d}{dD}+A(D)\Big\}B(D)=1 \tag{3.30}$$

Considerando la (3.17) si vede che al tempo iniziale $D = 0$, in cui l'universo è prossimo al modello di Einstein-de Sitter, si ha $B(0) = 2/7$ dato che $A(0) \sim 7/2$.
La soluzione di $B(D)$ si può trovare più agevolmente sostituendo la variabile temporale D con la nuova variabile τ.
Si distinguerà tra i due casi:

- $\Omega < 1, \quad \tau \equiv \frac{1}{\Omega} - 1, \quad 0 \leq \tau < \infty$
- $\Omega > 1, \quad \tau \equiv 1 - \frac{1}{\Omega}, \quad 0 \leq \tau < 1$

dove $\tau = 0$ corrisponde al ***Big Bang***.
Si definisce quindi la quantità:

$$J(\tau) \equiv \frac{D(\tau)}{D'(\tau)} = \frac{\tau}{f(\tau)} \tag{3.31}$$

si ha quindi

$$\begin{aligned} J'(\tau) = 1 - \frac{D(\tau)D''(\tau)}{D'^2(\tau)} \quad &\Rightarrow \quad \frac{D(\tau)D''(\tau)}{D'^2(\tau)} = 1 - J'(\tau) \\ D\frac{d}{dD} = \frac{1}{D'(\tau)}\frac{d}{d\tau}, \qquad &D^2\frac{d^2}{d^2D} = \frac{D^2(\tau)}{D'(\tau)}\left[\frac{1}{D'(\tau)}\frac{d^2}{d^2\tau} - \frac{D''(\tau)}{D'^2(\tau)}\right] \end{aligned}$$

dove da adesso in poi l'apice indicherà la derivata rispetto alla variabile τ $\left(D'(\tau) \equiv \frac{d}{d\tau}, D''(\tau) \equiv \frac{d^2}{d^2\tau}\right)$
Si effettua a questo punto il cambio della variabile temporale nell'equazione (3.30) ottenendo la seguente espressione

$$\left\{J(\tau)^2\frac{d^2}{d^2\tau} + \left[1 + J'(\tau) + A(\tau)\right]J(\tau)\frac{d}{d\tau} + A(\tau)\right\}B(\tau) = 1 \tag{3.33}$$

Si riassumono nella tabella sottostante le grandezze rilevanti ai fini del nostro problema in funzione della nuova variabile τ, distinguendo tra i due casi sopraelencati:

$\Omega < 1$	$\Omega > 1$
$L(\tau) \equiv ln(\sqrt{1+\tau} - \sqrt{\tau})$	$M(\tau) \equiv arctan(\sqrt{\tau/(1-\tau)}$
$D(\tau) = 1 + \frac{3}{\tau} + \frac{3\sqrt{1+\tau}}{\tau^{3/2}} L(\tau)$	$D(\tau) = -1 + \frac{3}{\tau} - \frac{3\sqrt{1-\tau}}{\tau^{3/2}} M(\tau)$
$A(\tau) = 2 + \frac{3}{2}\left[(1+\tau)f(\tau)^2\right]^{-1}$	$A(\tau) = 2 + \frac{3}{2}\left[(1-\tau)f(\tau)^2\right]^{-1}$
$f(\tau) = -\frac{3}{2}\left[\frac{3\sqrt{\tau(\tau+1)}+(3+2\tau)L(\tau)}{(3+\tau)\sqrt{\tau(\tau+1)}+(3+3\tau)L(\tau)}\right]$	$f(\tau) = -\frac{3}{2}\left[\frac{3\sqrt{\tau(1-\tau)}-(3-2\tau)M(\tau)}{(3-\tau)\sqrt{\tau(1-\tau)}-(3-3\tau)M(\tau)}\right]$

Nel limite $\tau \to 0$ si ha $J(\tau) \to \tau$, $L(\tau), M(\tau) \to 2\tau/5$ e $f(\tau) \to 1$.
Infine le soluzioni analitiche dell'equazione (3.33), con condizioni iniziali $B(0) = 0$ e $\tau B'(\tau)|_{\tau=0} = 0$, nei casi $\Omega < 1$ e $\Omega > 1$ sono rispettivamente:

$$B(\tau) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4D^2(\tau)} - \frac{9}{4\tau D^2(\tau)}\left\{1 + \sqrt{\frac{1+\tau}{\tau}}L(\tau) + \frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{1+\tau}{\tau}} + \frac{L(\tau)}{\tau}\right]^2\right\} \quad \text{(3.34a)}$$

$$B(\tau) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4D^2(\tau)} + \frac{9}{4\tau D^2(\tau)}\left\{1 - \sqrt{\frac{1-\tau}{\tau}}M(\tau) - \frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{1-\tau}{\tau}} - \frac{M(\tau)}{\tau}\right]^2\right\} \quad \text{(3.34b)}$$

Tale risultato mostra l'equivalenza della teoria perturbativa Euleriana e Lagrangiana; per ulteriori dettagli si consulti [1].

Chapter 4

Applicazioni

Nel primo capitolo si era discusso della necessità di trattare le fluttuazioni delle grandezze cosmologiche con modelli statistici basati sulle proprietà delle perturbazioni primordiali. In questa trattazione si assume che il potenziale primordiale del campo di densità, $\varphi^{(1)}(\mathbf{x})$, sia distribuito Gaussianamente.
La natura non lineare dell'instabilità gravitazionale fa sì che, tali fluttuazioni, evolvendo, perdano il loro iniziale carattere Gaussiano; questi effetti statisticamente sono quantificati dai momenti della *PDF* che descrive la distribuzione statistica dei campi cosmologici.
In particolare in questo capitolo, utilizzando i risultati del precedente, si calcolerà il parametro di *skewness*, definito a partire dal terzo momento della *PDF*, relativo ai campi cosmologici $\delta(\mathbf{x}, D)$ e $-D\nabla\mathbf{u}(\mathbf{x}, D)$.
Tale parametro è usato in statistica per quantificare l'asimmetria delle distribuzioni.
Sia C un campo statistico, allora il suo parametro di *skewness* è definito come segue:

$$S_{3C} = \frac{\langle C^3 \rangle}{\langle C^2 \rangle^2} \tag{4.1}$$

In questo capitolo si ometteranno le dipendenze dei campi per semplificare la scrittura delle formule, evidenziando solo quelle rilevanti ai fini dei calcoli.

4.1 *Skewness* gravitazionale del campo di densità

Per determinare il parametro $S_{3\delta}$ è necessario preliminarmente calcolare i momenti del terzo e del secondo ordine del campo di densità.

Si avrà:

$$\langle\delta^3\rangle = \Big\langle\Big(\sum_{i=1}^{n}\delta^{(i)}\Big)^3\Big\rangle = \langle\delta^{(1)3}\rangle + 3\langle\delta^{(1)2}\delta^{(2)}\rangle + \mathcal{O}\langle\delta^{(1)5}\rangle$$

grazie alle condizioni iniziali Gaussiane si ha che $\langle\delta^{(1)3}\rangle = 0$, segue

$$\langle\delta^3\rangle = 3\langle\delta^{(1)2}\delta^{(2)}\rangle + \mathcal{O}(\delta^{(1)5}) \tag{4.2}$$

$$\langle\delta^2\rangle = \Big\langle\Big(\sum_{i=1}^{n}\delta^{(i)}\Big)^2\Big\rangle = \langle\delta^{(1)2}\rangle + \mathcal{O}\langle\delta^{(1)3}\rangle \tag{4.3}$$

Per poter effettuare tale calcolo si passa allo spazio delle componenti di Fourier, nel quale risulteranno evidenti i modi di accoppiamento dei campi; si riscrivono quindi le quantità $\delta^{(1)2}$ e $\delta^{(2)}$

• quadrato del contrasto di densità lineare

$$\delta^{(1)2}(\mathbf{k}, D) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2\ \delta_D(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k})\tilde{\delta}^{(1)}(\mathbf{k}_1)\tilde{\delta}^{(1)}(\mathbf{k}_2) \tag{4.4}$$

• contrasto di densità al secondo ordine perturbativo [$(3.28)a$)]

$$\delta^{(2)}(\mathbf{k}, D) = \int d\mathbf{x}\Bigg\{\frac{1}{(2\pi)^6}\int d\mathbf{k}_3 d\mathbf{k}_4\Bigg[(1 - B(D))\tilde{\delta}^{(1)}(\mathbf{k}_3)\tilde{\delta}^{(1)}(\mathbf{k}_4) - D\frac{(-\tilde{\delta}^{(1)}(\mathbf{k}_3))}{i\mathbf{k}_3 D}(i\mathbf{k}_4)\tilde{\delta}^{(1)}(\mathbf{k}_4)$$
$$+ D^2 B(D)\Big(\frac{-\tilde{\delta}^{(1)}(\mathbf{k}_3)}{D}\Big)\Big(\frac{-\tilde{\delta}^{(1)}(\mathbf{k}_4)}{D}\Big)\Big(\frac{\mathbf{k}_3\cdot\mathbf{k}_4}{k_3 k_4}\Big)^2\Bigg]e^{i(\mathbf{k}_3+\mathbf{k}_4)\mathbf{x}}\Bigg\}e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}}$$

Infine si ottiene:

$$\delta^{(2)}(\mathbf{k}, D) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{k}_3 d\mathbf{k}_4\ \delta_D(\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4 - \mathbf{k})\mathbf{J}^{(2)}(\mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4, D)\tilde{\delta}^{(1)}(\mathbf{k}_3)\tilde{\delta}^{(1)}(\mathbf{k}_4) \tag{4.6a}$$

$$\mathbf{J}^{(2)}(\mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4, D) \equiv [1 - B(D)] + \frac{1}{2}\Big(\frac{k_3}{k_4} + \frac{k_4}{k_3}\Big)\Big(\frac{\mathbf{k}_3\cdot\mathbf{k}_4}{k_3 k_4}\Big) + B(D)\Big(\frac{\mathbf{k}_3\cdot\mathbf{k}_4}{k_3 k_4}\Big)^2 \tag{4.6b}$$

dove la quantità $\mathbf{J}^{(2)}(\mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4, D)$ è il kernel della $\delta^{(2)}$

Nel precedente calcolo si è tenuto conto che:

- $\mathbf{u}^{(1)} = -\nabla\varphi^{(1)}$, $\nabla\mathbf{u}^{(1)} = -\nabla^2\varphi^{(1)}$, $\delta^{(1)} = D\nabla^2\varphi^{(1)} \Rrightarrow \quad \nabla\mathbf{u}^{(1)} = -\frac{\delta^{(1)}}{D}$
  Passando allo spazio di Fourier si possono così esprimere la velocità peculiare e il suo gradiente in funzione della $\delta^{(1)}_{\mathbf{k}}$
  $\nabla\mathbf{u}^{(1)}_{\mathbf{k}} = -\frac{\delta^{(1)}_{\mathbf{k}}}{D}$ e $\nabla\mathbf{u}^{(1)}_{\mathbf{k}} = i\mathbf{k}\mathbf{u}^{(1)}_{\mathbf{k}} \Rrightarrow \quad \mathbf{u}^{(1)}_{\mathbf{k}} = -\frac{\delta^{(1)}_{\mathbf{k}}}{i\mathbf{k}D}$
- per rendere il *kernel* simmetrico si è utilizzata l'espressione $\frac{1}{2}\left(\frac{k_3}{k_4}+\frac{k_4}{k_3}\right)$ in luogo del fattore $\frac{k_4}{k_3}$

A questo punto si può calcolare la (4.2)

$$\begin{aligned}
3\langle\delta^{(1)2}\delta^{(2)}\rangle =& \frac{3}{(2\pi)^{12}}\int d\mathbf{k}_1\ldots\int d\mathbf{k}_4\ \left\langle\tilde{\delta}^{(1)}(\mathbf{k}_1)\tilde{\delta}^{(1)}(\mathbf{k}_2)\tilde{\delta}^{(1)}(\mathbf{k}_3)\tilde{\delta}^{(1)}(\mathbf{k}_4)\right\rangle\mathbf{J}^{(2)}(\mathbf{k}_3,\mathbf{k}_4,D)e^{i(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3+\mathbf{k}_4)\mathbf{x}}\\
=&\frac{3}{(2\pi)^{12}}\int d\mathbf{k}_1\ldots\int d\mathbf{k}_4\Big[\left\langle\tilde{\delta}^{(1)}(\mathbf{k}_1)\tilde{\delta}^{(1)}(\mathbf{k}_2)\right\rangle\left\langle\tilde{\delta}^{(1)}(\mathbf{k}_3)\tilde{\delta}^{(1)}(\mathbf{k}_4)\right\rangle+\\
&\left\langle\tilde{\delta}^{(1)}(\mathbf{k}_1)\tilde{\delta}^{(1)}(\mathbf{k}_3)\right\rangle\left\langle\tilde{\delta}^{(1)}(\mathbf{k}_2)\tilde{\delta}^{(1)}(\mathbf{k}_4)\right\rangle+\\
&\left\langle\tilde{\delta}(\mathbf{k}_1)\tilde{\delta}^{(1)}(\mathbf{k}_4)\right\rangle\left\langle\tilde{\delta}^{(1)}(\mathbf{k}_2)\tilde{\delta}^{(1)}(\mathbf{k}_3)\right\rangle\Big]\mathbf{J}^{(2)}(\mathbf{k}_3,\mathbf{k}_4,D)e^{i(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3+\mathbf{k}_4)\mathbf{x}}\\
=&\frac{3}{(2\pi)^{12}}\int d\mathbf{k}_1\ldots\int d\mathbf{k}_4(2\pi)^6\Big[\delta_D(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2)P(\mathbf{k}_1)\delta_D(\mathbf{k}_3+\mathbf{k}_4)P(\mathbf{k}_3)+\\
&\delta_D(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_3)P(\mathbf{k}_1)\delta_D(\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_4)P(\mathbf{k}_4)+\\
&\delta_D(\mathbf{k}_+\mathbf{k}_4)P(\mathbf{k}_1)\delta_D(\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3)P(\mathbf{k}_2)\Big]\mathbf{J}^{(2)}(\mathbf{k}_3,\mathbf{k}_4,D)e^{i(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3+\mathbf{k}_4)\mathbf{x}}\\
=&\frac{3}{(2\pi)^6}\left[\int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_3 P(\mathbf{k}_1)P(\mathbf{k}_3)J^{(2)}(\mathbf{k}_3,-\mathbf{k}_3,D)+2\int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 P(\mathbf{k}_1)P(\mathbf{k}_2)J^{(2)}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,D)\right]
\end{aligned}$$

Infine si ottiene

$$\langle\delta^3\rangle = \frac{6}{(2\pi)^6}\int d\mathbf{k}d\mathbf{k}'P(\mathbf{k})P(\mathbf{k}')\mathbf{J}^{(2)}(\mathbf{k},\mathbf{k}',D) \tag{4.8}$$

Nel calcolo soprastante si sono usati in successione i seguenti fatti:

- il teorema di *Wick* per un campo Gaussiano [si veda $(1.16b)$];
- la relazione (1.15) che lega lo spettro di potenza alla funzione di correlazione a due punti;
- dal calcolo diretto di $\mathbf{J}^{(2)}(\mathbf{k},-\mathbf{k},D)$ [formula $(4.15)b$] si trova che tale quantità dà un contributo nullo;

Con un conto analogo si trova

$$\langle\delta^{(1)2}\rangle = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{k}\; P(\mathbf{k}) \tag{4.9}$$

segue

$$\langle\delta^2\rangle^2 = \frac{1}{(2\pi)^6}\int d\mathbf{k}d\mathbf{k}'\; P(\mathbf{k})P(\mathbf{k}') \tag{4.10}$$

Infine si calcola lo *skewness* gravitazionale

$$S_{3\delta}(D) = \frac{3\langle\delta^{(1)2}\delta^{(2)}\rangle}{\langle\delta^{(1)2}\rangle^2} = \frac{\frac{6}{(2\pi)^6}\int d\mathbf{k}d\mathbf{k}'P(\mathbf{k})P(\mathbf{k}')J^{(2)}(\mathbf{k},\mathbf{k}',D)}{\frac{1}{(2\pi)^6}\int d\mathbf{k}d\mathbf{k}'\; P(\mathbf{k})P(\mathbf{k}')} = 6 - 4B(D) \tag{4.11}$$

Per calcolare la $S_{3\delta}(D)$ si è integrato sul volume sferico di raggio k considerando che $\left(\frac{\mathbf{k}_3\cdot\mathbf{k}_4}{k_3k_4}\right) = cos\theta$, con θ angolo zenitale, si ha quindi che i termini del kernel proporzionali al coseno di tale angolo e al suo quadrato danno contributi rispettivamente nullo e di un fattore $2/3$.

4.2 *Skewness* gravitazionale della divergenza del campo di velocità

Per il calcolo della *skewness* gravitazionale della divergenza del campo di velocità si ripercorrerano tutti i passaggi del precedente paragrafo, dunque non si riportano nuovamente i conti analoghi a quelli precedenti.

Posto

$$\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}, D) \equiv -D\nabla\mathbf{u}(\mathbf{x}, D)$$

Si ha

$$\langle\boldsymbol{\eta}\rangle = 3\langle\boldsymbol{\eta}^{(1)2}\boldsymbol{\eta}^{(2)}\rangle + \mathcal{O}(\boldsymbol{\eta}^{(1)5}) \tag{4.12}$$

$$\langle\boldsymbol{\eta}^2\rangle = \langle\boldsymbol{\eta}^{(1)2}\rangle + \mathcal{O}\langle\boldsymbol{\eta}^{(1)3}\rangle \tag{4.13}$$

Riscrivendo le quantità rilevanti in componenti di Fourier

• quadrato della divergenza del campo di velocità lineare

$$\boldsymbol{\eta}^{(1)2}(\mathbf{k},D)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2\ \delta_D(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2-\mathbf{k})\tilde{\delta}^{(1)}(\mathbf{k}_1)\tilde{\delta}^{(1)}(\mathbf{k}_2) \tag{4.14}$$

in quanto si era visto che: $\mathbf{u}^{(1)}=-\nabla\varphi^{(1)}$ e $\delta^{(1)}=D\nabla^2\varphi^{(1)}\Rrightarrow\eta^{(1)}=\delta^{(1)}$

• $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x},D)$ al secondo ordine perturbativo [$(3.28)b$]

$$\boldsymbol{\eta}^{(2)}(\mathbf{k},D)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{k}_3 d\mathbf{k}_4\ \delta_D(\mathbf{k}_3+\mathbf{k}_4-\mathbf{k})\mathbf{K}^{(2)}(\mathbf{k}_3,\mathbf{k}_4,D)\tilde{\delta}^{(1)}(\mathbf{k}_3)\tilde{\delta}^{(1)}(\mathbf{k}_4) \tag{4.15a}$$

$$\mathbf{K}^{(2)}(\mathbf{k}_3,\mathbf{k}_4,D)\equiv[1-G(D)]+\frac{1}{2}\Big(\frac{k_3}{k_4}+\frac{k_4}{k_3}\Big)\Big(\frac{\mathbf{k}_3\cdot\mathbf{k}_4}{k_3k_4}\Big)+G(D)\Big(\frac{\mathbf{k}_3\cdot\mathbf{k}_4}{k_3k_4}\Big)^2 \tag{4.15b}$$

dove si ricorda, nel capitolo precedente, si era posto $G(D)\equiv 2B(D)+DB'(D)$

Infine, con un conto del tutto simile a quello per il momento del terzo ordine del contrasto di densità, si trova che le espressioni (4.12) e (4.13) possono essere scritte come segue:

$$\langle\boldsymbol{\eta}^3\rangle=\frac{6}{(2\pi)^6}\int d\mathbf{k}d\mathbf{k}'P(\mathbf{k})P(\mathbf{k}')\mathbf{K}^{(2)}(\mathbf{k},\mathbf{k}',D) \tag{4.16}$$

$$\langle\boldsymbol{\eta}^2\rangle^2=\frac{1}{(2\pi)^6}\int d\mathbf{k}d\mathbf{k}'\ P(\mathbf{k})P(\mathbf{k}') \tag{4.17}$$

La *skewness* gravitazionale per il gradiente del campo di velocità è:

$$S_{3\boldsymbol{\eta}}(D)=\frac{3\langle\boldsymbol{\eta}^{(1)2}\boldsymbol{\eta}^{(2)}\rangle}{\langle\boldsymbol{\eta}^{(1)2}\rangle^2}=\frac{\frac{6}{(2\pi)^6}\int d\mathbf{k}d\mathbf{k}'P(\mathbf{k})P(\mathbf{k}')\mathbf{K}^{(2)}(\mathbf{k},\mathbf{k}',D)}{\frac{1}{(2\pi)^6}\int d\mathbf{k}d\mathbf{k}'\ P(\mathbf{k})P(\mathbf{k}')}=6-4G(D) \tag{4.18}$$

Conclusioni

In questo lavoro si è affrontato il problema della teoria dell'instabilità gravitazionale esponendone brevemente le principali caratteristiche.
Si è discusso di come le perturbazioni primordiali dei campi stocastici di densità e di velocità, assunte in tale trattazione Gaussiane e adiabatiche, si siano evolute nel tempo portando alla formazione delle strutture cosmiche che costituiscono l'universo attuale.
In particolare, si è considerato, in un primo momento, l'analisi di tale fenomeno per fluttuazioni di densità $|\delta| \ll 1$, per le quali è sufficiente una trattazione lineare dell'argomento; in seguito, dopo aver riespresso le equazioni del moto in termini dei potenziali dei campi cosmologici, valide sotto determinate ipotesi, si è passati alla descrizione non lineare dell'instabilità gravitazionale utilizzando un approccio perturbativo Euleriano. Si riassumono schematicamente i risultati ottenuti:

i) determinazione delle soluzioni al secondo ordine perturbativo dei campi di densità, velocità e divergenza del campo di velocità [*eq.* (3.28)], dalle quali risulta evidente la non separabilità rispetto alla coordinata spaziale e quella temporale. Inoltre da tali espressioni è stata derivata la relazione che esprime la deviazione di $\nabla\mathbf{u}^{(2)}(\mathbf{x}, D)$ da $\delta^{(2)}(\mathbf{x}, D)$;

ii) calcolo del parametro di *skewness* del campo di densità e della divergenza del campo di velocità, il quale quantifica la deformazione asimmetrica dei campi Gaussiani primordiali indotta dalla gravità durante il periodo di evoluzione non lineare [*eq.* (4.11)-(4.18)].

Bibliography

[1] P. Catelan, F. Lucchin, S. Matarrese, and L. Moscardini. 1995, MNRAS, 276, 39.

[2] F. Bernardeau, S. Colombi, E. Gaztañaga, and R. Scoccimarro. 2002, Physics Reports, 367, 1.

[3] P.J.E. Peebles. *Principles of Physical Cosmology*. Princeton University Press, New Jersey, 1993.

[4] P. M. Morse and H. Feshbach. *Methods of Theoretical Physics- Volume 1*. Mc Graw-Hill Book Company, INC, 1953.

[5] P. Coles and F. Lucchin. *Cosmology: The Origin and Evolution of Cosmic Structure*. Wiley, 2002.

[6] A. Ferrari. *Stelle, Galassie e Universo- Fondamenti di Astrofisica*. Springer, 2011.