



**UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PADOVA**

**DIPARTIMENTO DI SCIENZE ECONOMICHE ED AZIENDALI  
"M. FANNO"**

**DIPARTIMENTO DI SCIENZE STATISTICHE**

**CORSO DI LAUREA IN ECONOMIA**

**PROVA FINALE**

**"MODELLI PER LA PREVISIONE DI SERIE STORICHE  
FINANZIARIE"**

**RELATORE:**

**CH.MA PROF. LUISA BISAGLIA**

**LAUREANDO: STEVE CAVALLIN**

**MATRICOLA N. 1088800**

**ANNO ACCADEMICO 2016 – 2017**

Steve Cavallin: *Modelli per la previsione di serie storiche finanziarie*, Prova Finale di laurea triennale, settembre 2017.

# Ringraziamenti

*Questo lavoro è stata una sfida molto stimolante per me, in cui ho potuto anche studiare ed analizzare temi che non ho avuto modo di vedere durante il percorso di studi. Per questo voglio ringraziare particolarmente la mia relatrice prof. Luisa Bisaglia per la disponibilità e sostegno dato durante la stesura.*

*Ringrazio inoltre calorosamente i miei genitori e la mia famiglia per permettermi ogni giorno di inseguire i miei sogni e obiettivi, spesso purtroppo dimentico per mia colpa quanto questo sia fondamentale e stia alla base di tutto il resto.*

*Ringrazio, infine, le persone che ho avuto accanto durante i miei anni universitari: sono cresciuto molto in questi anni e lo devo molto anche a voi.*

*Settembre 2017.*

Steve Cavallin



# Indice:

<b>CAPITOLO 1: CARATTERISTICHE DELLE SERIE FINANZIARIE</b>	<b>1</b>
<b>1.1 Fatti stilizzati dei rendimenti</b>	<b>1</b>
1.1.1 Assenza di autocorrelazione lineare	1
1.1.2 Distribuzione	2
1.1.3 Legge di scala	3
<b>1.2 Fatti stilizzati della volatilità</b>	<b>4</b>
1.2.1 <i>Volatility Clustering</i> e non-stazionarietà	4
1.2.2 Effetto leva	6
1.2.3 Correlazione Volume/Volatilità	6
<b>1.3 Memoria Lunga</b>	<b>6</b>
1.3.1 Volatilità	7
<b>CAPITOLO 2: TEORIE ECONOMICHE E PREVEDIBILITÀ DI VOLATILITÀ E RENDIMENTI</b>	<b>9</b>
<b>2.1 <i>Efficient market hypothesis</i> e <i>random walk</i></b>	<b>9</b>
<b>2.2 Evoluzione delle teorie e problema della volatilità</b>	<b>12</b>
<b>CAPITOLO 3: I MODELLI PER PREVEDERE LE SERIE FINANZIARIE.</b>	<b>15</b>
<b>3.1 Introduzione</b>	<b>15</b>
<b>3.2 Modelli ARMA</b>	<b>15</b>
<b>3.3 La classe di modelli ARCH</b>	<b>17</b>
3.3.1 I modelli GARCH	20
3.3.2 Il modello GARCH Integrato	22
3.3.3 Il modello <i>Exponential</i> GARCH	23
3.3.4 Il modello GARCH-M	24
3.3.5 ARCH e GARCH Frazionalmente Integrati	24
3.3.6 Modelli ARCH Multivariati (Cenni)	25
<b>3.4 Modelli a volatilità stocastica</b>	<b>26</b>
3.4.1 Modelli continui e formula di Black e Scholes	28
3.4.2 Volatilità stocastica a memoria lunga	29
<b>3.5 Cambiamenti strutturali nel processo (Cenni)</b>	<b>31</b>
<b>3.6 Modelli a soglia (Cenni)</b>	<b>31</b>
<b>CAPITOLO 4: LE APPLICAZIONI DEI MODELLI NELLE SERIE REALI</b>	<b>33</b>

<b>4.1 Valutazione dei modelli nella letteratura</b>	<b>33</b>
<b>4.2 Analisi serie finanziaria reale</b>	<b>34</b>
4.2.1 Parte 1: Analisi della serie	35
4.2.2 Parte 2: Specificazione dei modelli per la varianza condizionata	39
4.2.3 Parte 3: Previsione	46
<b>CONCLUSIONI</b>	<b>51</b>
<b>RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI</b>	<b>53</b>

# Capitolo 1

## Caratteristiche delle serie finanziarie

Per comprendere l'importanza, il significato e l'accuratezza dei modelli che saranno analizzati nei successivi capitoli riveste un'importanza chiave analizzare quali sono i principali *fatti stilizzati* delle serie storiche finanziarie, ovvero analizzare le evidenze empiriche che, anche attraverso diversi strumenti di analisi, mercati o archi temporali, hanno dimostrato di essere così importanti da essere accettate trasversalmente nella letteratura.

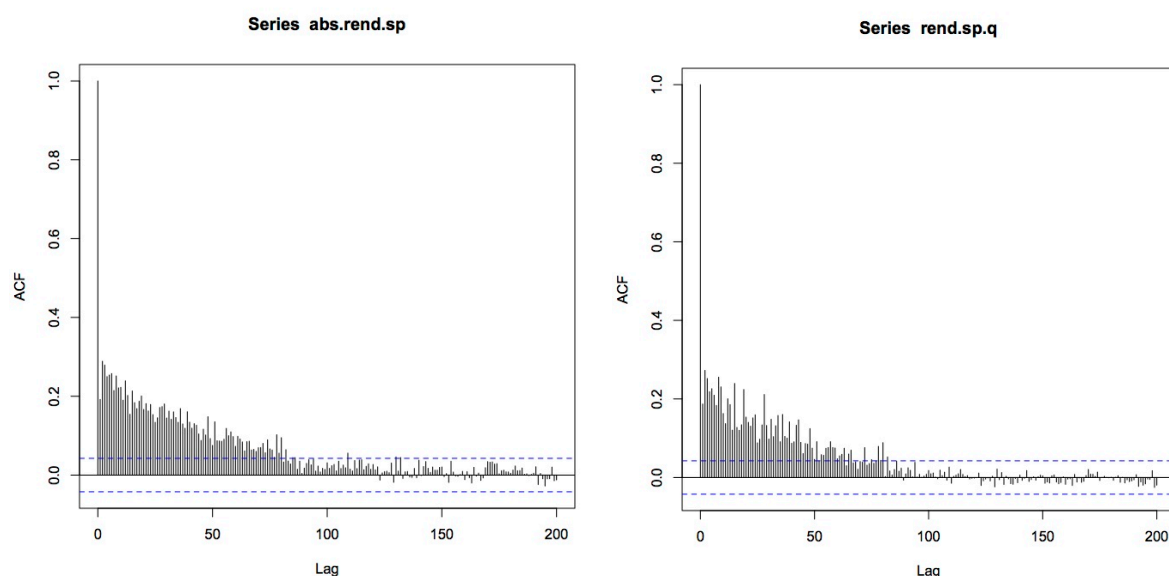
Da un punto di vista di analisi dei mercati, come descritto da Cont (2001), l'approccio tipico è spesso basato su annunci o eventi economico-politici e perciò, dato che diversi *asset* o indici sono condizionati da *set* di informazioni ed eventi diversi, si tende a pensare che serie di prezzi ottenute da diversi *asset* e diversi mercati dimostrino proprietà diverse. Da un punto di vista più strettamente statistico, d'altro canto, si è notato che quelle che possono sembrare variazioni casuali in realtà hanno in comune diverse proprietà statistiche, anche confrontando rendimenti provenienti da *asset* molto diversi tra loro. Queste proprietà largamente analizzate e comuni sono chiamate *fatti stilizzati* e saranno analizzate in questo capitolo.

### 1.1 Fatti stilizzati dei rendimenti

#### 1.1.1 Assenza di autocorrelazione lineare

Nell'analisi statistica delle serie finanziarie l'attenzione è quasi sempre rivolta alle variazioni dei prezzi e quindi ai rendimenti e non ai prezzi in sé, essendo questi ultimi non stazionari (lo si può notare osservando i grafici delle funzioni di autocorrelazione). Ad ogni modo numerosi studi nel tempo hanno provato a verificare la presenza di autocorrelazione nei rendimenti finanziari, come ampiamente descritto da Sewell (2011), arrivando in generale a definire l'autocorrelazione nei rendimenti come largamente non significativa; nonostante questo alcuni studi - quali ad esempio Zhou (1996) - hanno fatto notare che considerando intervalli temporali inferiori (e quindi aumentando la frequenza dei dati) le serie di rendimenti tendono a mostrare una significativa autocorrelazione negativa, in cui però è necessario considerare gli

effetti di microstruttura del mercato considerato, ovvero i modi in cui i normali processi sottostanti al mercato hanno effetti su prezzi, volume di scambio e il comportamento degli investitori.



**Figura 1:** Autocorrelazione rispettivamente dei rendimenti assoluti e rendimenti quadrati dall'indice S&P 500 dal 2009 al 2017. Valori storici da <http://finance.yahoo.it>

Questa assenza di autocorrelazione ha una spiegazione economica semplice che si ricollega a sostegno dell'ipotesi dei mercati efficienti: se cambiamenti di prezzo mostrassero una correlazione significativa questa potrebbe essere usata come base per una strategia a guadagni attesi positivi (strategia anche chiamata *arbitraggio statistico*).

In contrasto alla mancanza di dipendenza nei rendimenti è presente però l'autocorrelazione tra i valori assoluti e i quadrati dei rendimenti stessi, che risulta essere positiva e significativa. In particolare, l'autocorrelazione nei valori assoluti dei rendimenti risulta essere generalmente più alta della corrispondente autocorrelazione dei quadrati, come mostrato nella Figura 1.

### 1.1.2 Distribuzione

In uno dei primissimi studi sulle distribuzioni dei rendimenti finanziari, oggi sotto il nome del modello di Bachelier-Osborne, esse sono considerate come approssimativamente normali. Analisi successive, col tempo divenute sempre più numerose, hanno confermato solamente la generale simmetria di tali distribuzioni (sebbene nel tempo siano state trovate alcune eccezioni) arrivando a concludere la presenza di una elevata curtosi, crescente all'aumentare della frequenza della serie: ad esempio ogni stima calcolata da Taylor (2005) della curtosi



delle distribuzioni delle serie finanziarie supera notevolmente la curtosi di una distribuzione normale (pari a 3), facendo notare come a distanza dalla media di 4 volte lo scarto quadratico medio della distribuzione in una normale si trova una osservazione su 15800, mentre sui rendimenti di azioni statunitensi la frequenza sale a 1 su 293.

La presenza di una elevata curtosi, e quindi di distribuzioni più appuntite e con code più alte, mostra come la probabilità di rendimenti più distanti dalla media sia maggiore rispetto alla distribuzione normale, oltre che evidenziare la necessità di adottare modelli di distribuzione diversi dalla normale per spiegare le distribuzioni dei rendimenti finanziari. Cont (2001) descrive piuttosto tali distribuzioni come simili a leggi di potenza<sup>1</sup> o con code che tendono ad una distribuzione Paretoiana<sup>2</sup>, precisando che ad ogni modo è difficile determinare una forma precisa per l'andamento di tali distribuzioni, specialmente delle code. Considerando le caratteristiche distributive descritte precedentemente, Cont stesso fa notare che sarebbe necessario elaborare un modello parametrico di almeno quattro parametri: un parametro di locazione della distribuzione, un parametro di scala (volatilità), un parametro che descriva il decadimento delle code ed eventualmente un parametro di asimmetria che permetta alla distribuzione di avere comportamenti diversi nella coda destra o sinistra.

Ad ogni modo, nonostante si sia provata l'inconsistenza della normale per questo tipo di distribuzioni, è stata largamente accettata l'ipotesi di *gaussianità aggregazionale*, ovvero incrementando l'arco di tempo su cui i rendimenti sono calcolati essi tendono ad assumere una distribuzione sempre più simile alla normale, denotando inoltre che la forma della distribuzione non è esattamente la stessa per diversi tipi di scale temporali. Questa ultima caratteristica in particolare è stata oggetto di numerosi studi nel tempo, che saranno meglio analizzati nel paragrafo seguente.

### 1.1.3 Legge di scala

Le proprietà e le leggi di scala sono state oggetto di studi sin dai primi lavori di Mandelbrot (1963) sui prezzi del cotone. Nella sua analisi Mandelbrot ha scoperto che i rendimenti mostravano un'altra interessante proprietà chiamata *time scaling*, ovvero il fatto che le distribuzioni dei rendimenti per varie dimensioni di  $\Delta t$  possedevano simili forme funzionali, con  $\Delta t$  che spazia da 1 giorno fino ad un mese; per questa ragione non esisterebbe un intervallo di tempo privilegiato su cui analizzare i dati provenienti da serie finanziarie. In

---

<sup>1</sup> La distribuzione segue la formula  $f(x) = ax^k$  con a e k costanti

<sup>2</sup> La distribuzione segue la formula  $f(x) = ak^ax^{-(a+1)}$  con  $x \geq k$ , a e k costanti positive

particolare, le differenze tra le varie distribuzioni in base all'intervallo  $\Delta t$  considerato potrebbero essere espresse in termini di leggi di scala come la seguente, che mette in relazione  $\Delta t$  con la volatilità media, misurata come una potenza  $p$  dei rendimenti assoluti misurati:

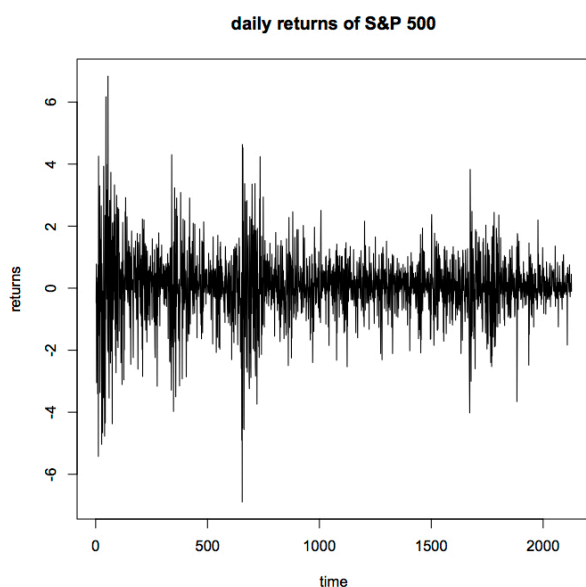
$$[E(|r|^p)]^{1/p} = c(p)\Delta t^{D(p)}$$

dove  $E$  è l'operatore valore atteso e  $c(p)$  e  $D(p)$  sono funzioni deterministiche di  $p$ , stimabili attraverso regressioni ai minimi quadrati ordinarie.

Questa legge di scala è stata trovata empiricamente su un ampio insieme di dati finanziari analizzati in diversi intervalli temporali (Sewell, 2011). Col tempo, a partire dallo studio di Mandelbrot (1963), sono state diverse le analisi sulle proprietà di scala delle serie finanziarie, potendo contare su serie temporali e basi di dati più ampie. In particolare Gopikrishnan et al. (2000), analizzando dati a diversi intervalli temporali dalle 3 principali borse statunitensi, trovarono che la distribuzione, sebbene non fosse completamente stabile, conservava la sua forma funzionale per intervalli temporali fino a 16 giorni per le azioni individuali e fino a 4 giorni per l'indice S&P500. Altri studi, elencati da Sewell (2011) confermano questa tesi: le proprietà di scala nelle serie temporali ci sono e non sono trascurabili, sebbene esistano dei limiti, differenti in base alle serie considerate. Per archi temporali più ampi, come notato precedentemente, tende a prevalere l'ipotesi di gaussianità aggregazionale e si ritiene che la distribuzione dei rendimenti tenda ad assumere la forma di una normale.

## 1.2 Fatti stilizzati della volatilità

### 1.2.1 Volatility Clustering e non-stazionarietà



Un altro fatto stilizzato chiave dei rendimenti finanziari è la loro non-stazionarietà. La stazionarietà in un processo statistico è garantita se le sue proprietà statistiche non cambiano nel tempo: nelle serie temporali finanziarie, sebbene la media dei rendimenti sia generalmente vicina allo zero, lo scarto quadratico subisce un fenomeno chiamato

**Figura 2:** Rendimenti giornalieri dell'indice S&P 500 (dati da <http://finance.yahoo.it>)

*volatility clustering*, ovvero il fatto che ampie variazioni di prezzo tendono ad essere seguite da altrettanto ampie variazioni e, analogamente, piccole variazioni tendono ad essere seguite da altrettanto piccole variazioni. Questo fenomeno (osservabile con l'esempio nella Figura 2) si ricollega all'autocorrelazione dei rendimenti assoluti e quadrati illustrata nel paragrafo 1.1.1: variazioni di prezzo in termini assoluti correlate tra loro implicano che ampie variazioni sono susseguite da ampie variazioni, portando al fenomeno del *volatility clustering* appena descritto.

La presenza di volatilità “raggruppata” di conseguenza lascia intendere che lo scarto quadratico medio dei rendimenti non sia costante nel tempo e di conseguenza le distribuzioni dei rendimenti finanziari non siano stazionarie, almeno in senso stretto; l'osservazione di questo fenomeno ha di fatto aperto la strada a nuovi modelli di analisi delle serie storiche finanziarie, quali ARCH (Engle, 1982) e GARCH (Bollerslev, 1986) che saranno analizzati nei capitoli successivi. Tendenzialmente, d'altro canto, nella letteratura finanziaria è comune considerare le serie temporali finanziarie come *debolmente* stazionarie, ovvero che la media dei rendimenti e la covarianza tra i rendimenti ad un tempo  $t$  e quelli ad un tempo  $t-1$  (con  $1$  scelto arbitrariamente) non variano nel tempo (Tsay, 2010).

L'assenza di stazionarietà può essere osservata inoltre anche attraverso i cosiddetti *effetti di calendario*, ovvero anomalie cicliche nei rendimenti in base alla loro posizione nel tempo in termini di calendario. Questi effetti sono ben sintetizzati da Sewell (2011) e si riflettono a più livelli: giornaliero, settimanale e mensile, tra cui rientrano i principali e più documentati effetti, quali il *weekend effect* e l'*effetto gennaio*.

Il *weekend effect*, anche conosciuto come *effetto lunedì*, si riferisce alla tendenza delle azioni a mostrare rendimenti più ampi durante i venerdì, rispetto ai lunedì. Per la prima volta questo effetto è stato documentato da Fields (1931), fino ad arrivare a studi più recenti che hanno mostrato come ora, rispetto alle prime documentazioni, l'effetto sia molto più attenuato, se non quasi sparito. L'*effetto gennaio* invece è probabilmente un'anomalia di calendario tra le più importanti, riguardante rendimenti più alti nel primo mese dell'anno rispetto agli altri mesi. Damodaran (2012) riporta un'analisi dei rendimenti di azioni di aziende statunitensi mostrando come dal 1927 al 2011 nel mese di gennaio i rendimenti medi superavano i rendimenti medi degli altri mesi di almeno 1,5%.

## **1.2.2 Effetto leva**

L'effetto leva, o *leverage effect*, è un fenomeno per cui i movimenti di prezzi sono negativamente correlati con la volatilità. Inizialmente è stato studiato da Black (1976), il quale notò come in risposta a “cattive notizie”, ovvero quando i rendimenti sono più bassi del loro valore atteso, la volatilità tende ad aumentare e viceversa in risposta a “buone notizie” la volatilità tende a diminuire. Black stesso provò a spiegare il fenomeno con la presenza di leva operativa e finanziaria sebbene ciò riesca a spiegare solo parzialmente l'effetto che tali cambiamenti di prezzo hanno sulla volatilità. Altre evidenze empiriche sono state trovate da Nelson (1991), Gallant et al. (1992) e Campbell e Kyle (1993). Bouchaud e Potters (2001) inoltre trovarono che questa correlazione è più moderata ma decade nell'arco di qualche mese per le azioni singole, mentre per quanto riguarda gli indici tale correlazione è molto più marcata ma decade più velocemente.

## **1.2.3 Correlazione Volume/Volatilità**

Studi effettuati a partire dal 1970 hanno indicato una forte correlazione positiva tra volume e volatilità, quali ad esempio Karpoff (1987), Zhao and Wang (2003), Yin (2010). In particolare Karpoff (1987) provò ad elaborare una teoria che collegasse direttamente i rendimenti col volume degli scambi portando ad una relazione asimmetrica tra i due elementi analizzati, trovando supporti empirici da studi subito successivi. Altre analisi hanno trovato comportamenti che rimandano a questa relazione tra volume e volatilità, trovando un andamento ad U della volatilità durante il giorno nel New York Stock Exchange, Borsa di Hong Kong, London Stock Exchange e Borsa di Tokyo (Brailsford, 1994), corrispondente ad un andamento simile del volume di transazioni durante la giornata. Queste conclusioni sono state confermate più recentemente da Lee e Rui (2002) e Gerlach et al. (2006).

## **1.3 Memoria Lunga**

L'analisi della presenza di memoria lunga nelle serie finanziarie rappresenta uno studio chiave nell'ambito dei modelli per la loro previsione e, col tempo, ha portato allo sviluppo di diversi processi alternativi in grado di considerarla. Formalmente un processo a memoria lunga si definisce come segue:

**Definizione:** Se  $\rho(k)$  è il coefficiente di correlazione al lag  $k$ , sia  $X_t$  un processo stazionario per cui è valido ciò che segue. Esiste un numero reale  $\alpha \in (0, 1)$  e una costante  $c_p > 0$  tale che:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\rho(k)}{c_p k^{-\alpha}} = 1$$

Allora  $X_t$  prende il nome di processo stazionario a memoria lunga, a dipendenza a lungo raggio o a forte dipendenza. (Sewell, 2011)

Sostanzialmente, la principale differenza tra processi a memoria corta e processi a memoria lunga sta nella loro funzione di autocorrelazione: processi a memoria corta sono rappresentati da funzioni di autocorrelazione con un decadimento esponenziale mentre, al contrario, processi a memoria lunga tendono ad avere un decadimento iperbolico.

### 1.3.1 Volatilità

Come già mostrato precedentemente, sebbene i rendimenti non mostrino in generale nessuna autocorrelazione, i rispettivi valori assoluti e valori quadrati hanno un comportamento molto diverso, mostrando una chiara ed evidente autocorrelazione tra loro. Essendo possibile usare tali valori come *proxy* per la volatilità, ovvero come variabili che fungono da indicatori del tasso di volatilità, è stato a lungo discusso se, oltre a notare una forte autocorrelazione, sia presente anche la caratteristica di memoria lunga, arrivando a conclusioni abbastanza uniformi.

Sia per i mercati delle valute (ad esempio Kirman e Teyssière, 2002) sia per i mercati azionari (ad esempio Granger et al., 2000) è stato trovato un certo riscontro di memoria lunga nella volatilità. In generale si ritiene ci sia una possibilità dell'80% di presenza di memoria lunga per la volatilità (Sewell, 2011), il che rende questo fenomeno molto considerevole. Modelli che usano processi a lunga memoria, hanno avuto particolare successo anche per questo, riuscendo a catturare questo fenomeno ormai considerato come fatto stilizzato.



# Capitolo 2

## Teorie economiche e prevedibilità di volatilità e rendimenti

### 2.1 *Efficient market hypothesis e random walk*

Assieme alla definizione di diversi fenomeni e fatti stilizzati tipici delle serie temporali finanziarie, nell'ambiente accademico hanno iniziato a definirsi diverse teorie economiche che potessero spiegare l'andamento dei rendimenti finanziari in relazione alla struttura del mercato e agli investitori presenti. Come già accennato nel capitolo 1, i primi studi riguardanti l'autocorrelazione dei rendimenti si sono confrontati con la *teoria dei mercati efficienti*, ovvero una teoria secondo la quale i prezzi rappresentano perfettamente le informazioni disponibili e, di conseguenza, si aggiustano istantaneamente appena nuove informazioni inaspettate diventano disponibili. La teoria dei mercati efficienti rappresenta l'idea secondo cui tutte le informazioni utili di un determinato titolo sono raccolte e sintetizzate nell'ultimo prezzo disponibile e, di conseguenza, non è possibile prevedere un determinato *trend* considerando prezzi e rendimenti passati. Proprio seguendo questa logica, un'informazione ottenuta all'istante  $(t-1)$  non è più rilevante all'istante  $t$  in quanto il prezzo  $P_t$  già racchiude a pieno tale informazione; di conseguenza, un eventuale rendimento ottenuto in  $(t-1)$  è completamente incorrelato a qualsiasi rendimento successivo (Peters, 1996).

Questa teoria ha iniziato a diffondersi a partire dalla seconda metà del '900 ed è stata formalizzata da Fama (1965), in contemporanea con lo sviluppo degli studi statistici applicati alle serie finanziarie; proprio per questa ragione tale teoria è andata di pari passo alla definizione di primi fenomeni e fatti stilizzati di tali serie quali appunto l'assenza di autocorrelazione lineare tra i rendimenti. Alla base della teoria dei mercati efficienti c'è però un'altra teoria, più restrittiva, chiamata *random walk hypothesis*. Quest'ultima, sviluppata verso la fine dell'Ottocento, come il nome lascia intendere chiaramente ipotizza che i cambiamenti di prezzo seguano un andamento completamente casuale e, quindi, i prezzi siano completamente imprevedibili (Taylor, 2005). In termini statistici quindi, secondo questa ipotesi, i rendimenti sono indipendenti e identicamente distribuiti.

Come sottolineato da LeRoy (1989), la formalizzazione della *random walk hypothesis* e la conseguente presupposizione che i prezzi seguissero un andamento *patternless* lasciarono molte domande agli economisti, mettendo in discussione l'idea prevalente secondo cui i prezzi riflettessero il valore di determinati fondamentali, quali ad esempio il valore attuale di tutti i dividendi futuri per le azioni<sup>3</sup>. Infatti, ipotizzare che i rendimenti abbiano un andamento puramente casuale implica, almeno apparentemente, che non ci sia nulla che imponga ai prezzi, almeno nel lungo periodo, di seguire l'andamento dei rispettivi fondamentali. Più tecnicamente, il modello della *random walk* è definibile attraverso due formulazioni chiave; la prima e più classica versione assume semplicemente che, in ogni istante di tempo, il prezzo prenda una direzione casuale dalla sua ultima posizione e che in totale la media di questi *random step* sia pari a zero.

$$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim iid(0; \sigma_\varepsilon^2)$$

La seconda formulazione, invece, risulta più ampia della prima assumendo che sia possibile avere una variazione media della serie diversa da zero e che, di conseguenza, la serie segua un certo trend (magari dato dalla inflazione di lungo termine). Si avrà quindi:

$$X_t = X_{t-1} + \delta + \varepsilon_t$$

dove  $\delta$  è chiamato anche *drift* (deviazione). Da qui si può derivare che la miglior previsione dei prezzi futuri è il prezzo attuale più una certa somma  $\delta$ , indipendente dai prezzi passati (Nau, 2017).

Il modello della *random walk* quindi, sebbene sia utile, in generale assume una completa indipendenza probabilistica tra variazioni di prezzo consecutive, rimandando alle considerazioni appena fatte sul contrasto tra visione fondamentalista dei e modello della *random walk*.

Con la definizione della *efficient market hypothesis* (EMH), invece, si è associato l'andamento dei prezzi a una martingala, un modello meno restrittivo, ma comunque in grado di includere le argomentazioni chiave del modello della *random walk*. Un processo stocastico

---

<sup>3</sup> Secondo questa teoria, spesso anche chiamata visione *fondamentalista* dei prezzi, il prezzo di un determinato titolo è un indicatore di un determinato valore fondamentale di quel titolo e, di conseguenza, il prezzo può essere interpretato in funzione di questo valore fondamentale. L'esempio più classico di questa teoria è il dividend-discount model, ovvero un modello secondo cui il prezzo attuale  $P_0$  di un'azione di una certa impresa è dato dalla somma dei valori attuali di tutti i dividendi futuri di tale impresa. Quindi  $P_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Div_n}{(1+r)^n}$  dove si può notare che  $Div_n$  rappresenta il valore fondamentale dell'azione.



$X_t$  è una martingala rispetto a un insieme di informazioni  $\Phi_t$  se  $X_t$  rispetta la seguente proprietà:

$$E(X_{t+1}|\Phi_t) = X_t$$

Da cui si può intendere che se  $X_t$  è una martingala, la migliore previsione di  $X_{t+1}$  basata sull'insieme di informazioni  $\Phi_t$  è proprio  $x_t$ , per qualsiasi valore di  $\Phi_t$ .

Apparentemente, come già accennato, i due modelli dicono la stessa cosa: non è possibile prevedere i prezzi futuri osservando eventuali *trend* o andamenti passati. In realtà esiste una differenza sostanziale: come ben risaputo ed evidenziato nel capitolo 1, i prezzi incontrano periodi molto tranquilli e protratti nel tempo ma anche periodi più turbolenti, con elevata volatilità e per altrettanto lunghi periodi di tempo. Formalmente tale movimento può essere rappresentato da un modello in cui le varianze condizionate dei prezzi sono positivamente autocorrelate tra loro. Mentre ciò non è spiegabile con il modello della *random walk* questo fenomeno è plausibile se il processo  $X_t$  per i prezzi è una martingala (LeRoy, 1989). Infatti, supporre che i prezzi seguano una martingala non esclude l'ipotesi che i rendimenti futuri siano imprevedibili, ma d'altra parte si pone l'accento sul fatto che i rendimenti dipendano esclusivamente dai valori attuali, giustificando periodi di più alta o bassa volatilità e sottolineando che cambiamenti nell'insieme di informazioni  $\Phi_t$  implicano cambiamenti nei prezzi al tempo  $t$ .

Grazie agli studi di Samuelson (1973) l'elaborazione della EHM e del modello della martingala applicato alle serie finanziarie ha risolto le questioni e le contraddizioni tra *random walk* e previsioni basate sui fondamentali. Egli, infatti, arrivò alla conclusione che se è corretto vedere i prezzi come una rappresentazione di determinati valori fondamentali quali ad esempio il valore presente scontato dei dividendi futuri per le azioni, allora ne consegue che i rendimenti futuri sono imprevedibili, proprio come il modello della martingala postula. Samuelson (1973) non ha semplicemente ipotizzato che i prezzi oscillino attorno ai valori dei fondamentali, ma che essi siano effettivamente uguali ai fondamentali, in modo che non sia possibile ottenere profitto tra la differenza tra i due valori. Di fatto, quindi, il processo martingala non si pone come modello opposto alla visione fondamentalista, al contrario si pone come una versione più rigida di essa: viene assunto che la maggioranza degli investitori operi seguendo i valori fondamentali, in modo tale da non creare differenze tra essi e il prezzo e, quindi, in modo da annullare i conseguenti possibili profitti.

È necessario sottolineare, ad ogni modo, come non esista una singola *efficient market hypothesis* ma che lo stesso Fama (1970) abbia ipotizzato tre versioni di essa, rispettivamente:

- Versione “debole”, in cui si ritiene che  $\Phi_t$  comprenda solamente gli andamenti dei prezzi storici e che, di conseguenza, non sia possibile creare profitto analizzando i vecchi *trend* della serie analizzata. Questa versione rimanda direttamente ad un modello per i prezzi di tipo *random walk*.
- Versione “semi-forte”, in cui si ritiene che  $\Phi_t$  contenga anche tutte le informazioni disponibili al pubblico.
- Versione “forte”, in cui si ritiene che  $\Phi_t$  contenga anche informazioni nascoste e non disponibili pubblicamente e che, di conseguenza, i prezzi riflettano anche questo tipo di informazioni.

## 2.2 Evoluzione delle teorie e problema della volatilità

Nel corso degli anni, come già evidenziato nel capitolo precedente, sono stati numerosi gli studi sulle serie storiche finanziarie, volti a evidenziare eventuali fatti stilizzati, a smentirli o, comunque, rilevare casi in cui tali fenomeni non siano propriamente veri. Tali studi però, d'altra parte, hanno contribuito ad alimentare il dibattito sulla *efficient market hypothesis* e la *random walk hypothesis*, associando i risultati di queste ricerche ad argomentazioni a favore o contro le due ipotesi considerate.

Ad esempio, due studi si sono posti contrariamente all'idea che i prezzi siano imprevedibili, quali quello di Lo e MacKinlay (1999) o quello già visto di Zhou (1996), entrambi evidenziando una certa presenza di autocorrelazione dei rendimenti nel breve periodo. Altre principali critiche a queste teorie sono rilevate da studi che invece pongono il problema dell'effettiva presenza di trend o particolari ciclicità nelle serie di prezzi, soprattutto per quanto riguarda i trend giornalieri, mensili e stagionali, analizzati nel paragrafo 1.2.1. Inoltre, la presenza di memoria lunga nelle potenze e valori assoluti dei rendimenti, pone numerosi contrasti con la *efficient market hypothesis*: di fatto tale modello al massimo ammette una memoria corta, nella forma di una sub-martingala, aprendo all'esplorazione di possibili nuovi tipi di modelli (Peters, 1996).

Altre motivazioni in contrasto con la EMH sono quelle portate da Fama e French (1995) secondo cui esistono tre fattori principali che influenzano i prezzi azionari, quali la differenza tra il rendimento del portafoglio di mercato e il tasso di interesse privo di rischio, la differenza tra i rendimenti delle azioni di imprese più piccole e imprese più grandi e la differenza tra i rendimenti delle azioni con alto *price-to-book ratio* e azioni con basso *price-to-book ratio* (Brealey e Myers, 2005).

Queste argomentazioni, assumendo che il *Capital Asset Pricing Model* (CAPM)<sup>4</sup> sia corretto, sono molto importanti e possono portare a mettere in discussione le ipotesi della EMH e *random walk*.

Esistono tuttavia altri comportamenti delle serie finanziarie che inducono a sostenere la EMH, quali ad esempio la mancanza di autocorrelazione tra i rendimenti, specialmente nel medio-lungo periodo, di cui è stato già ampiamente discusso nel capitolo 1 ed è stato confermato anche da altri studi come quello di Brealey e Myers (2005). Altri studi a supporto in particolare della versione “semi-forte” della EMH sono quelli basati sull’andamento dei prezzi al momento del rilascio di determinate informazioni tra gli investitori. Uno tra questi, svolto da Shleifer (2000), evidenzia come determinati eventi hanno un effetto immediato nei prezzi, mostrando un picco elevato al momento del rilascio di nuove informazioni e una nuova stabilizzazione successiva.

In conclusione quindi, è evidente che negli ultimi anni la *efficient market hypothesis* abbia perso la rilevanza che aveva ottenuto nel mondo accademico a partire dagli anni in cui è stata formalizzata. D’altra parte non è possibile trovare alcuna conclusione sulla sua attendibilità in quanto gli studi effettuati portano a risultati spesso contraddittori. Sicuramente una grande variabile in questo tipo di analisi è il metodo con cui vengono estratti i dati (Dupernex, 2007); inoltre, le differenze che esistono tra i diversi tipi di mercati certamente hanno un certo impatto nei risultati finali. Le analisi sui dati reali però sono molto utili se si considera la EMH come un *benchmark* per misurare il livello di efficienza dei mercati di riferimento, in modo tale da avere un’idea se i prezzi considerati seguano un andamento più causale o invece tendano a seguire determinati trend, aumentando la loro prevedibilità.

---

<sup>4</sup> Modello chiave nella teoria della finanza e finanza aziendale sviluppato da Sharpe (1964). Definisce una relazione tra rischio e rendimento atteso di un portafoglio di titoli o azioni (Capital Asset pricing model, 2014).

Sebbene in questo lavoro lo scopo non sia esaminare i modelli economici che determinano l'andamento dei prezzi in diversi tipi di titoli, queste considerazioni non sono trascurabili. Infatti, in un mercato efficiente, non esiste strategia capace di generare rendimenti particolarmente elevati; se esistono modelli in grado di prevedere la volatilità in modo da poter essere usati per generare tali rendimenti l'ipotesi di avere un mercato efficiente può essere messa in discussione (Guo, 1999). Nel capitolo successivo quindi saranno analizzati diversi tipi di modelli base usati per spiegare e prevedere la volatilità nelle serie storiche finanziarie, per poi essere applicati a una serie reale. Ogni modello, grazie a caratteristiche diverse che saranno analizzate successivamente, riesce a considerare e spiegare diversi fatti stilizzati tra quelli considerati nel capitolo 1. I dibattiti su quali modelli e in che misura siano più accurati di altri quindi sono ancora aperti.

# Capitolo 3

## I modelli per prevedere le serie finanziarie.

### 3.1 Introduzione

Nei capitoli precedenti sono stati analizzati, in preparazione a questo capitolo, i principali fatti stilizzati delle serie finanziarie conosciuti fino al giorno d'oggi e le principali teorie economiche sull'andamento dei prezzi di tali serie e come queste si confrontano con la teoria statistica. In questo capitolo, invece, ci concentreremo sulla teoria statistico/matematica relativa ai modelli utilizzati ed ancora in uso per prevedere le serie storiche finanziarie e in particolare la loro volatilità. Grazie all'analisi svolta in questo capitolo sarà possibile ottenere già delle prime conclusioni su questi modelli e i loro principali svantaggi e punti di debolezza, confrontandoli con i fatti stilizzati considerati nel capitolo 1. Inoltre, attraverso una analisi della letteratura sui risultati di questi modelli in serie finanziari reali svolta nel prossimo capitolo, sarà possibile arrivare ad un confronto con le principali teorie economiche descritte nel capitolo due.

I modelli che potrebbero rientrare nello scopo di questo capitolo sono numerosi, essendo state sviluppate negli anni diverse versioni alternative, specialmente per quanto riguarda la classe dei modelli di tipo ARCH. Non essendo il fine di questo lavoro entrare nel dettaglio di ogni singolo modello, ci si soffermerà principalmente sui modelli base, quali, in ordine, ARMA, ARCH, GARCH, IGARCH, EGARCH, ARCH-M, FIGARCH e modelli SV, dando, invece, dei cenni sugli altri tipi di modelli, alle loro caratteristiche, alla loro capacità di descrivere i fatti stilizzati delle serie finanziarie e al loro confronto coi rispettivi modelli base.

### 3.2 Modelli ARMA

I modelli ARMA(p,q) sono i primi modelli alla base dell'analisi delle serie finanziarie e sono stati negli ultimi cinquant'anni i modelli più comunemente usati nell'analisi delle serie temporali. Nascono dall'unione di altri due modelli, i modelli di tipo autoregressivo di ordine

p, denominati AR(p), e i modelli a media mobile di ordine q, denominati MA(q) (Satchell and Knight, 2011).

Il modello, AR(q), assume che il valore di una certa serie storica al tempo t, dipende linearmente dai p valori precedenti. Si avrà quindi, nel caso particolare di AR(1):

$$X_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1} + \varepsilon_t \quad (3.1)$$

Mentre generalizzando la formula per un qualsiasi ordine p:

$$X_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i} + \varepsilon_t \quad (3.2)$$

Dove  $\{\varepsilon_t\}$  si assume essere *White Noise* (ovvero un processo a componenti incorrelate), con media zero e varianza  $\sigma_a^2$  mentre  $\alpha_i$  sono costanti reali diverse da zero.

Il modello MA(q), invece, si può definire con la seguente formula:

$$X_t = c_0 + \sum_{i=1}^q \theta_i \varepsilon_{t-i} + \varepsilon_t \quad (3.4)$$

I processi a media mobile di ordine q, quindi, risultano essere semplicemente le somme ponderate dei valori del termine di errore  $\varepsilon_t$  presente e passati, fino ad un ordine q prestabilito. Tali termini di errore sono considerati come *White Noise* con media zero e varianza  $\sigma_\varepsilon^2$ .

Al contrario del modello AR, il modello MA è sempre debolmente stazionario, essendo una combinazione lineare finita di una sequenza *White Noise* in cui i primi due momenti sono tempo-invarianti. (Tsay, 2014).

Unendo le equazioni (3.2) e (3.4) si arriva quindi alla formulazione generale del modello *Autoregressive Moving Average*, ARMA(p,q):

$$X_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i} + \sum_{j=1}^q \beta_j \varepsilon_{t-j} \quad (3.5)$$

Si può notare che, partendo da questo modello, è possibile arrivare ai modelli AR(p) e MA(q), in quanto questi sono casi particolari del modello appena descritto ARMA(p,q). Infatti,

rispettivamente, il modello ARMA(p,0) corrisponde al modello AR(p), mentre ARMA(0,q) corrisponde a MA(q).

Nella letteratura sono molti i vantaggi e gli svantaggi discussi su questo modello. In particolare, questa classe di modelli ha il vantaggio di essere ben conosciuta ed approfondita, sia a livello teorico sia a livello computazionale, in quanto risulta essere molto semplice modellare i dati con una struttura ARMA anche grazie all'alto livello di pacchetti statistici disponibili per questo scopo. Inoltre, questa classe di modelli ha riscontrato un particolare successo nella letteratura finanziaria, essendo stata usata, ad esempio, per modellare la volatilità dei rendimenti di diversi indici quali l'S&P 500 (Poterba e Summers, 1986; French et al., 1987). Nonostante questo sono state notate diverse carenze del modello, specialmente con l'evolversi della letteratura nell'ambito dei fatti stilizzati delle serie finanziarie. Come già descritto nel capitolo 1, le serie finanziarie presentano fenomeni ormai molto noti quali ad esempio quello relativo alla *volatility clustering* che i processi di tipo ARMA non riescono a spiegare in quanto assumono una varianza costante, rendendo imprecisa una previsione di una serie storica che, come tipico per le serie finanziarie, soddisfa questa condizione solo per intervalli di tempo limitati. Inoltre, altri tipi di fenomeni quali la presenza di asimmetrie o code più grosse della normale, non sono rappresentabili da modelli Gaussiani Lineari come i modelli di tipo ARMA, con particolare riguardo alle serie finanziarie con una non-stazionarietà più evidente (Satchell and Knight, 2011).

Per queste ragioni, dopo l'ampio utilizzo di questa classe di modelli, negli anni '70, il proliferare di studi sulle caratteristiche delle serie finanziarie, i loro fatti stilizzati e la continua ricerca di modelli più accurati hanno portato all'utilizzo di modelli non lineari, specialmente la classe di modelli ARCH, capaci di descrivere i cambiamenti nella varianza tipici delle serie finanziarie.

### **3.3 La classe di modelli ARCH**

La volatilità, oltre ad essere una componente fondamentale nello studio delle serie finanziarie, rappresenta un fattore chiave per quanto riguarda il *trading* di opzioni, ovvero quei titoli derivati che permettono di avere il diritto di acquistare ad un prezzo fissato una certa quantità fissa del titolo a cui l'opzione sottostà entro o in una certa data (a seconda del tipo di opzione). In questi tipi di titoli la varianza condizionata della serie finanziaria di riferimento è particolarmente rilevante per la determinazione del prezzo dell'opzione ed è anche grazie a

questo che è dovuto il particolare successo e diffusione dei modelli di tipo ARCH (Tsay, 2005).

Il primo modello ARCH, ovvero *Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*, è stato elaborato da Engle (1982). Il presupposto fondamentale è stato quello di analizzare il fenomeno della *volatility clustering* come una forma di eteroschedasticità nei rendimenti finanziari e che, di conseguenza, la varianza dei termini di errore di un certo modello volto a descriverne l'andamento dipenda dai rendimenti stessi. Mentre in precedenza l'analisi delle serie finanziarie è stata limitata al momento primo condizionale, considerando invece i momenti successivi come semplici vincoli, l'analisi delle caratteristiche del rischio nell'investimento in titoli finanziari e quindi della loro volatilità ha aperto alla nascita di nuove tecniche di analisi, basate principalmente sui momenti condizionali successivi al primo (Palomba, 2004).

L'elaborazione dei modelli ARCH ha aperto ad una nuova classe di processi eventualmente non lineari né in media né in varianza in grado di spiegare il fenomeno della volatilità variabile nelle serie finanziarie e le diverse peculiarità connesse. Per modellare i cambiamenti nella volatilità, in particolare coi modelli di tipo ARCH, si è soliti considerare il termine di disturbo  $\varepsilon_t$  senza correlazione seriale ma con una certa dipendenza nota dalla seguente equazione:

$$\varepsilon_t = \sigma_t z_t \quad z_t \sim iid(0,1) \quad (3.6)$$

Dove  $z_t$  per semplicità spesso si considera distribuito come una normale con media 0 e varianza 1. Mentre i rendimenti  $r_t$  possono essere ad esempio pari a:

$$r_t = \mu + \varepsilon_t \quad (3.7)$$

Da questo presupposto, in base a come si considera  $\sigma_t$ , è possibile esplicitare sia i modelli di tipo ARCH sia i modelli di tipo SV (*Stochastic Volatility*). Concentrandosi sul modello ARCH(m), la varianza assume un andamento di questo tipo:

$$\sigma_t^2 = \alpha + \sum_{i=1}^m \beta_i \varepsilon_{t-i}^2 \quad (3.8)$$

con  $\alpha > 0$  e  $\beta_i \geq 0$ .



Da questo modello si può subito notare che se un certo shock  $\varepsilon_{t-i}^2$  è elevato questo implica che la varianza condizionata ad un istante successivo a (t-i) sarà elevata a sua volta, conseguendone che shock elevati tendono ad essere seguiti da altrettanto elevate variazioni di prezzo (in valore assoluto), descrivendo quel fenomeno già sottolineato dal nome di *volatility clustering*.

Consideriamo ora, per semplicità, il modello ARCH(1):

$$\varepsilon_t = \sigma_t z_t, \quad \sigma_t^2 = \alpha + \beta_1 \varepsilon_{t-1}^2.$$

È possibile capire meglio il funzionamento dei modelli ARCH analizzandone le loro proprietà. Innanzitutto, considerando un *set* informativo  $I_{t-1} = \{\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \varepsilon_{t-3}, \dots, \varepsilon_{t-m}\}$  la media non condizionata di  $\varepsilon_t$  rimane pari a zero, in quanto:

$$E(\varepsilon_t) = E[E(\varepsilon_t | I_{t-1})] = E[\sigma_t E(z_t)] = 0.$$

Mentre la varianza non condizionata di  $\varepsilon_t$  può essere ottenuta come:

$$Var(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^2) = E[E(\varepsilon_t^2 | I_{t-1})] = \alpha + \beta_1 E(\varepsilon_{t-1}^2).$$

Siccome  $\varepsilon_t$  è un processo stazionario a media zero si avrà che  $Var(\varepsilon_t) = Var(\varepsilon_{t-1}) = E(\varepsilon_{t-1}^2)$  e quindi che  $Var(\varepsilon_t) = \alpha / (1 - \beta_1)$ , da cui bisogna imporre  $0 \leq \beta_1 < 1$ , dato che la varianza deve essere positiva.

Andando ad analizzare il momento quarto di  $\varepsilon_t$  invece è possibile notare come i modelli ARCH spieghino anche la presenza di code grosse della distribuzione. Infatti, è possibile dimostrare che l'indice di curtosi del modello ARCH(1) è pari a  $3 \cdot \frac{1-\beta_1^2}{1-3\beta_1^2} > 3$ , ovvero un indice di curtosi maggiore dell'indice della distribuzione normale.

È possibile dimostrare che questo tipo di proprietà valgono per qualsiasi modello ARCH(m), solo con formule chiaramente più complesse dovendo considerare più parametri  $\beta_i$ .

Riassumendo le conclusioni trovate nelle righe precedenti, quindi, è possibile identificare diversi vantaggi e debolezze dei modelli ARCH, così come descritto da Tsay (2014).

I vantaggi sono stati appena descritti elencando le proprietà dei modelli, ovvero la possibilità di riprodurre il fenomeno della *volatility clustering* e la presenza di code grosse nella distribuzione di  $\varepsilon_t$ . È però necessario fare alcune considerazioni sulle debolezze di questa

classe di modelli. Innanzitutto, il modello assume che shock positivi o negativi abbiano lo stesso effetto sulla volatilità in quanto essa dipende dal quadrato degli shock precedenti; in pratica invece è risaputo nella letteratura finanziaria che questo non è sempre vero e molto spesso è presente una risposta diversa rispetto a shock positivi o negativi, soprattutto nei mercati azionari; questo fenomeno è già stato introdotto nel capitolo 1 sotto il nome di *leverage effect*. Inoltre questo modello risulta essere piuttosto restrittivo: nel caso di ARCH(1) - secondo calcoli qui non riportati ma illustrati chiaramente da Tsay (2014) – perché esista un momento quarto finito  $\beta_1$  deve essere incluso nell'intervallo  $[0, 1/3]$  con limitazioni più ampie per modelli di ordine superiore. Infine, altre critiche sollevate al modello includono il fatto che questo non produce alcun suggerimento per capire le fonti delle variazioni nelle serie finanziarie, bensì presenta una semplice descrizione del comportamento delle varianze condizionate; altre critiche includono la presenza di una risposta lenta ad ampi e isolati shock sui prezzi, con la possibilità di sovrastimare la volatilità.

Gli utilizzi di questi modelli su serie finanziarie reali saranno discussi nel capitolo successivo, dopo aver analizzato tutti i principali modelli per prevedere le serie finanziarie. In ogni caso è necessario notare subito come lo sviluppo di questo modello abbia costituito un grande passo in avanti nella descrizione e previsione della volatilità nelle serie finanziarie, aprendo allo sviluppo di modelli derivati quali GARCH, I-GARCH, E-GARCH, ecc. in grado di ridurre notevolmente le limitazioni del modello base ARCH e aumentare l'efficacia nella previsione.

### 3.3.1 I modelli GARCH

Sebbene il modello ARCH si sia dimostrato essere abbastanza semplice, nelle sue applicazioni pratiche spesso è necessario considerare molti parametri per descrivere al meglio la serie storica presa in considerazione e, di conseguenza, considerare modelli ARCH di ordine abbastanza alto: Tsay (2014), ad esempio, fa notare come un modello ARCH(11) sia necessario per descrivere la volatilità dei rendimenti giornalieri del tasso di cambio Euro/Dollaro.

Bollerslev (1986), cercando modelli più semplici alternativi a questo, propose il cosiddetto modello GARCH, ovvero *Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*. Il modello generale GARCH(m, s) è rappresentato così:

$$\varepsilon_t = \sigma_t z_t, \quad \sigma_t^2 = \alpha + \sum_{i=1}^m \beta_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^s \gamma_j \sigma_{t-j}^2, \quad (3.9)$$

dove, nuovamente,  $\{z_t\}$  è una successione di variabili casuali iid con media zero e varianza 1,  $\alpha > 0$ ,  $\beta_i \geq 0$ ,  $\gamma_j \geq 0$  e  $\sum_{i=1}^{\max(m,s)} (\beta_i + \gamma_i) < 1$ , in modo da ottenere una varianza non condizionata di  $\varepsilon_t$  finita, in quanto essa risulta essere pari a:

$$\sigma^2 = \frac{\alpha}{1 - \sum_{i=1}^{\max(m,s)} (\beta_i + \gamma_i)} \quad (3.10)$$

È possibile notare subito come il caso particolare GARCH(m,0) sia esattamente uguale al modello ARCH(m).

Concentrandosi sul modello più semplice, GARCH(1,1), è possibile invece analizzare i vantaggi e i punti di debolezza di questa classe di modelli.

$$\varepsilon_t = \sigma_t z_t, \quad \sigma_t^2 = \alpha + \beta_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma_1 \sigma_{t-1}^2 \quad (3.11)$$

Similmente al modello ARCH, si può notare come alti valori di  $\varepsilon_{t-1}^2$  o di  $\sigma_{t-1}^2$  portino ad avere elevati valori per la varianza condizionata al tempo t, portando alle stesse conclusioni ottenute in precedenza, ovvero che ampi shock  $\varepsilon_{t-1}^2$  tendono ad essere seguiti da altrettanto ampi  $\varepsilon_t^2$ , creando l'ormai noto fenomeno del *volatility clustering*. Inoltre, analizzando come fatto precedentemente il momento quarto di  $\varepsilon_t^2$ , è possibile trarre le stesse considerazioni già svolte per quanto riguarda la curtosi dei modelli ARCH anche per i modelli GARCH. Sostanziali differenze invece si notano, come già osservato, sul numero di parametri che normalmente vengono utilizzati nelle applicazioni pratiche dei modelli GARCH: infatti, i modelli GARCH più utilizzati sono GARCH(1,1), GARCH(1,2) o GARCH(2,1) con una netta prevalenza del modello GARCH(1,1), sufficiente in molte applicazioni di serie storiche finanziarie.

Una particolarità di questo modello è l'andamento del quadrato dei residui dei rendimenti  $\varepsilon_t^2$ . Infatti, definendo  $v_t = \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2$  e sostituendo  $\sigma_t^2 = \varepsilon_t^2 - v_t$  nella equazione (3.11) si ottiene:

$$\varepsilon_t^2 = \alpha + (\beta_1 + \gamma_1) \varepsilon_{t-1}^2 + v_t - \beta_1 v_{t-1} \quad (3.12)$$

Si può notare come  $\varepsilon_t^2$  segua un processo ARMA (1,1) con parametro autoregressivo  $(\beta_1 + \gamma_1)$ . Se questo parametro è vicino ad 1 il processo autoregressivo presente nell'espressione (3.12) si estingue lentamente (Poon, 2005).

Questo modello purtroppo, seppur in grado di semplificare la classe di modelli ARCH analizzata precedentemente, ne mantiene gli stessi punti di debolezza, quali ad esempio la

eguale risposta a shock positivi o negativi sui prezzi. Inoltre, studi recenti su serie finanziarie ad alta frequenza hanno mostrato come il comportamento delle code di questo modello rimane ridotto rispetto all'evidenza empirica (Tsay, 2014).

### 3.3.2 Il modello GARCH Integrato

Il modello IGARCH (*Integrated Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedastic*), introdotto da Engle e Bollerslev (1986) parte dalla rappresentazione del modello GARCH come espresso nell'equazione (3.12) e considera il coefficiente della componente autoregressiva come pari a 1. Di fatto quindi, il modello IGARCH si presenta come una condizione particolare del modello GARCH, in quanto  $\sum_{i=1}^m \beta_i + \sum_{j=1}^s \gamma_j = 1$ ; si avrà quindi che il modello IGARCH(1,1) è esattamente pari a:

$$\varepsilon_t = \sigma_t z_t, \quad \sigma_t^2 = \alpha + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + (1 - \beta_1) \varepsilon_{t-1}^2, \quad (3.13)$$

Con  $\beta_1$  incluso strettamente tra 0 e 1.

Una conseguenza diretta di imporre la somma tra i due coefficienti pari a uno è la perdita della proprietà di stazionarietà debole del modello, in quanto costituiva condizione necessaria per avere varianza non condizionata finita il fatto che tale somma fosse strettamente inferiore a 1. Tutto ciò significa che nel modello IGARCH le informazioni correnti rimangono importanti per previsioni di qualsiasi orizzonte temporale: si crea perciò una differenza sostanziale dal modello GARCH dato che in quest'ultimo uno shock sulla varianza condizionata ad un certo istante (t) tende ad avere un impatto sempre inferiore sulle previsioni all'aumentare dell'orizzonte temporale considerato (Satchell e Knight, 2011).

La presenza di questa particolare proprietà può tornare molto utile quando si analizzano serie finanziarie a elevata frequenza, in quanto queste mostrano spesso un'alta persistenza. In generale, più una serie finanziaria mostra persistenza elevata nella volatilità più un modello di tipo IGARCH può risultare accurato a descriverla.

Si può notare come, a partire dall'equazione base del modello IGARCH, sia possibile arrivare ad un'espressione simile al modello di *random walk* con *drift* visto nel capitolo precedente, raggiungendo infatti un'espressione di questo tipo per la previsione ad un orizzonte temporale (t+s) (Palomba, 2004):

$$E[h_{t+s}|I_t) = \sigma_t^2 + k \cdot w$$

Sono presenti però sostanziali differenze dal modello *random walk* con *drift*. Il processo IGARCH infatti è considerabile sotto certe condizioni un processo fortemente stazionario per  $\sigma_t^2$  sebbene, per le ragioni descritte precedentemente, non possa essere considerato debolmente stazionario vista la mancanza dei primi due momenti (Tsay, 2014). Il modello *random walk*, al contrario, non risulta essere un processo stazionario in senso stretto per la varianza condizionata al tempo  $t$ .

### 3.3.3 Il modello *Exponential GARCH*

L'incapacità dei modelli ARCH e GARCH di considerare impatti diversi sulle serie storiche per cambiamenti di prezzi positivi o negativi e, quindi, di considerare la presenza del *leverage effect* nei mercati azionari ha portato a diverse critiche al modello, ma anche ad alternative che potessero risolvere la questione. Una di queste è stata introdotta da Nelson (1991) e prende il nome di *Exponential Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity* (EGARCH). Il modello assume, a differenza dei precedenti, che sia il logaritmo naturale di  $\sigma_t^2$  ad essere espresso in funzione dei passati valori di  $z_t$ :

$$\ln \sigma_t^2 = \alpha + \sum_{i=1}^m \beta_i \ln (\sigma_{t-i}^2) + \sum_{j=1}^s \gamma_j g(z_{t-j}) \quad (3.14)$$

$$g(z_t) = w z_t + \lambda [|z_t| - E|z_t|] \quad (3.15)$$

dove  $w$  e  $\lambda$  sono numeri reali e i parametri  $\alpha$ ,  $\beta_i$  e  $\gamma_i$  non devono essere necessariamente positivi.

Con riguardo al problema del *leverage effect*, si può notare subito come  $g(z_t)$  ha inclinazioni diverse a seconda della positività o meno della variabile  $z_t$ , in quanto con  $z_t$  positivo si avrà una inclinazione pari a  $(w + \lambda)$  mentre nel caso opposto un'inclinazione di  $(w - \lambda)$ . Essendo il segno di  $\varepsilon_t$  determinato esclusivamente dalla sua componente  $z_t$ , questo sta a significare che il modello presenterà effetti diversi a seconda del segno del parametro  $\varepsilon_t$ .

In aggiunta a quanto già sottolineato, questo modello, utilizzando il logaritmo, rimuove eventuali vincoli necessari ad assicurare la positività della varianza condizionale, risultando essere un modello più flessibile rispetto ai modelli precedenti ARCH e GARCH.

La presenza di risposte diverse a shock di segno diverso con questo modello lo porta chiaramente ad essere un modello non-lineare, ponendo ovviamente  $w$  diverso da zero (anche

se non è una caratteristica esclusiva, vista la non-linearità dei modelli ARCH e GARCH già citata). Nella equazione (3.15)  $w$  rappresenta un parametro reale ma, dato che ci si aspetta di notare che shock negativi abbiano un impatto maggiore sulla volatilità, è probabile che questo risulti essere negativo.

### 3.3.4 Il modello GARCH-M

Nella letteratura finanziaria è stato spesso notato come i rendimenti di un certo titolo o portafoglio e la rispettiva volatilità siano correlati, si veda ad esempio il già citato CAPM. Nei modelli GARCH analizzati fino ad ora si è sempre assunto che la media dei rendimenti (momento primo condizionale) sia sempre costante e uguale a zero, mentre solo il momento secondo condizionale è variabile nel tempo (Palomba, 2004). Per tenere conto di questa possibilità è stato elaborato da Engle, Lilien e Robins (1987) il modello GARCH-M, abbreviazione di GARCH-in media. Un semplice modello GARCH(1,1)-M può essere esplicitato così:

$$\begin{aligned} r_t &= \mu + c\sigma_t^2 + \varepsilon_t, & \varepsilon_t &= \sigma_t z_t, \\ \sigma_t^2 &= \alpha + \beta_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma_1 \sigma_{t-1}^2 \end{aligned} \quad (3.16)$$

Dove  $\mu$  e  $c$  sono costanti. Il parametro  $c$  è anche chiamato *premio per il rischio*; un parametro  $c$  positivo indica che c'è correlazione positiva tra rendimenti e volatilità. (Tsay, 2014). Alternative a questo modello possono esprimere la varianza anche come  $\sqrt{\sigma_t^2}$  oppure come  $\ln(\sigma_t^2)$ . Dalla formulazione del modello GARCH-M nell'equazione (3.11), inoltre, si può notare che ci sono delle correlazioni seriali nella serie dei rendimenti  $r_t$ , introdotte dal processo della volatilità  $\{\sigma_t^2\}$ .

### 3.3.5 ARCH e GARCH Frazionalmente Integrati

Dopo un'analisi svolta da Ding, Granger ed Engle (1993) è stato notato come la volatilità tenda a cambiare abbastanza lentamente, mostrando che determinati shock impiegano un arco di tempo considerevole per far decadere i loro effetti. I modelli già analizzati quali GARCH(p,q) ed IGARCH(p,q) fanno decrescere i quadrati dei residui in maniera più rapida rispetto a quanto evidenziato nel loro studio, aprendo quindi la necessità di sviluppare un modello alternativo. Questo tema si ricollega alla proprietà di memoria lunga nella volatilità analizzata nel capitolo 1, proprietà non descritta da alcun modello tra quelli già analizzati.

Baillie, Bollerslev e Mikkelsen (1996) elaborarono il modello FIGARCH, ovvero un modello ARCH generalizzato e frazionalmente integrato. Il modello ARCH frazionalmente integrato, nella sua forma più semplice, può essere espresso così:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \{1 - (1 - L)\} \varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \alpha(L) \varepsilon_{t-1}^2$$

dove  $\alpha(L)$  è un polinomio in  $L^5$  che decresce iperbolicamente anziché esponenzialmente. La generalizzazione offerta da Baillie, Bollerslev e Mikkelsen (1996) invece rappresenta una trasformazione del modello ARMA integrato frazionalmente (ARFIMA) in modelli a memoria lunga della varianza (Satchell, Knight, 2011).

### 3.3.6 Modelli ARCH Multivariati (Cenni)

Fino ad ora sono stati presi in considerazione i modelli di tipo ARCH e sue estensioni in versione univariata. Lo studio dei mercati e dei diversi titoli, soprattutto azionari, ha evidenziato tuttavia la presenza di fenomeni quali appunto la correlazione tra i prezzi di diversi *asset* e similitudini tra l'andamento delle loro volatilità.

Lo sviluppo di modelli multivariati ha consentito di poter lavorare considerando più titoli contemporaneamente, apportando modifiche sostanziali ai modelli già analizzati in precedenza e potendo descrivere con maggiore precisione realtà caratterizzate da molti più valori variabili nel tempo.

Nei modelli ARCH multivariati viene considerata una matrice di covarianza  $\Omega_t$  contenente  $n$  componenti ciascuno dei quali associabile ad un titolo nel mercato considerato. I residui  $\varepsilon_t$  sono rappresentati come:

$$\varepsilon_t = z_t \sqrt{\Omega_t}$$

$z_t$  iid con  $E(z_t) = 0$  e  $\text{var}(z_t) = I$ .

Alcune applicazioni di modelli multivariati includono il modellamento di rendimenti e volatilità in relazione ai mercati di capitali domestici e internazionali (Giovanni e Jorion, 1989), collegamenti tra i diversi mercati azionari internazionali (King, Sentana e Wadhwani, 1990) e gli effetti della volatilità in diversi mercati (studi riassunti da Satchell e Knight,

---

<sup>5</sup> “L” rappresenta l’operatore *lag*, ovvero quell’operatore tale che  $L^k X_t = X_{t-k}$ . A volte viene usato alternativamente il simbolo B (*backshift*).

2011). Sebbene un certo tipo di dipendenza tra diversi titoli sia ormai un dato certo, ad esempio nel mercato delle valute, Satchell e Knight (2011) sottolineano come i miglioramenti che questi modelli hanno apportato nelle previsioni sono presenti ma ridotti: il motivo è sicuramente da cercare innanzitutto nella complessità di questi modelli e nelle conseguenti difficoltà computazionali che presentano in diverse applicazioni reali. Futuri sviluppi di questi modelli quindi potrebbero cercare di portare soluzioni più parsimoniose e capaci di includere relazioni non lineari tra i diversi parametri presi in considerazione; un approccio di questo tipo potrebbe facilitare l'uso di questi modelli in previsioni di lungo periodo, in quanto le difficoltà appena descritte hanno limitato molte applicazioni a previsioni a breve termine (Poon, 2005).

### 3.4 Modelli a volatilità stocastica

Finora sono stati analizzati i principali modelli di tipo ARCH e GARCH i quali assumono che nell'equazione  $\varepsilon_t = \sigma_t z_t$  la volatilità sia modellata basandosi su osservazioni passate e utilizzando appunto modelli autoregressivi a eteroschedasticità condizionata. Partendo sempre dalla stessa semplice equazione per descrivere i residui, i modelli a volatilità stocastica assumono che  $\sigma_t$  segua un processo stocastico, in modo da poter superare alcuni dei limiti descritti in precedenza dei modelli ARCH e GARCH. La specificazione del modello quindi è:

$$\varepsilon_t = \sigma_t z_t, \quad \sigma_t^2 = \exp(h_t) \quad (3.17)$$

dove  $h_t$  può essere ad esempio un processo AR(1):

$$h_t = \alpha + \beta h_{t-1} + \eta_t \quad (3.18)$$

dove  $\eta_t$  si distribuisce come una normale indipendentemente distribuita (NID) con media zero e varianza  $\sigma_\eta^2$  ed è non necessariamente indipendente da  $z_t$  (Satchell e Knight, 2011), anche se per semplicità sarà assunta come tale.

Similmente al modello EGARCH, si può notare che anche qui nella specificazione del modello viene utilizzato il logaritmo della varianza invece che la varianza stessa, dato che  $h_t = \ln(\sigma_t^2)$ ; questo permette, allo stesso modo del modello EGARCH, di avere la sicurezza della positività della varianza condizionata ed evitare eventuali restrizioni eccessive.

L'aggiunta di un nuovo elemento quale è  $\eta_t$  permette invece al modello di essere più flessibile nel descrivere l'evoluzione di  $\sigma_t^2$  nel tempo, non essendo più questa determinata



esclusivamente dalle informazioni fino al tempo (t-1). D'altra parte, come sottolineato da Tsay (2014), questo rende anche la stima dei parametri più complicata, in quanto risultano essere presenti due parametri di “innovazione”,  $\eta_t$  e  $z_t$ .

A livello di proprietà del modello considerato, se il parametro  $\beta$  è minore di 1 in valore assoluto,  $h_t$  risulta essere strettamente stazionario e  $\varepsilon_t$ , essendo il prodotto di due processi strettamente stazionari, lo è anch'esso.  $\varepsilon_t$ , inoltre, è un processo *White Noise* grazie all'indipendenza assunta in precedenza tra  $\eta_t$  e  $z_t$ .

Essendo la componente  $\eta_t$  Gaussiana,  $h_t$  risulta avere le seguenti espressioni di media e varianza:

$$\mu_h = E(h_t) = \frac{\alpha}{1 - \beta}; \quad (3.19)$$

$$\sigma_h^2 = Var(h_t) = \frac{\sigma_\eta^2}{1 - \beta^2} \quad (3.20)$$

Sempre grazie alla normalità di  $\eta_t$  è possibile mostrare che, considerando  $z_t$  con una varianza finita  $\sigma_z^2$ , la varianza di  $\varepsilon_t$  può essere calcolata come:

$$Var(\varepsilon_t) = \sigma_z^2 \exp(\mu_h + \sigma_h^2/2) \quad (3.21)$$

Similmente ai modelli già analizzati, anche i modelli a volatilità stocastica (SV) presentano un indice di curtosi più elevato di quello della distribuzione normale. Ponendo l'esistenza di un momento quarto finito, infatti, la curtosi di  $\varepsilon_t$  risulta essere pari a  $K \cdot \exp(\sigma_h^2)$ , indicando con  $K$  l'indice di curtosi di  $z_t$ . Se  $z_t$  è distribuito normalmente, come supposto in precedenza, l'indice di curtosi in questo caso risulta essere pari a  $3 \cdot \exp(\sigma_h^2)$  e di conseguenza risulta essere maggiore di 3.

Questo modello, similmente al modello EGARCH, riesce a rispondere efficacemente al comportamento asimmetrico della volatilità nei confronti di shock di prezzo positivi o negativi nei mercati azionari. Per fare ciò è necessario rimuovere l'assunzione fatta precedentemente secondo cui c'è indipendenza tra  $\eta_t$  e  $z_t$  e, di conseguenza, bisogna assumere che  $Cov(z_t, \eta_t) \neq 0$ . Questa covarianza, dato che empiricamente shock negativi hanno un maggiore impatto sulla volatilità, risulterà essere strettamente negativa.

Per quanto riguarda il tema della stima dei parametri, è necessario notare che la presenza di  $\eta_t$  e  $z_t$  impedisce che la stima dei parametri del modello avvenga tramite il classico metodo della

massima verosimiglianza, ovvero tramite un metodo che permetta di massimizzare la probabilità di osservare effettivamente i valori di tali parametri. Come sottolineato da Poon e Granger (2003), le alternative a questo sono varie: una possibilità è rappresentata dal metodo della quasi-massima verosimiglianza, sviluppato da Harvey, Ruiz e Stephard (1994), il quale però risulta essere inefficiente se le *proxy* della volatilità non sono Gaussiane. Altre alternative sono esposte sempre da Poon e Granger (2003, p.485).

### 3.4.1 Modelli continui e formula di Black e Scholes

All'inizio del capitolo 3.3 è stato sottolineato come la volatilità delle serie finanziarie rivesta una particolare importanza soprattutto per quanto riguarda il mondo delle opzioni e il modo attraverso cui viene determinato il loro prezzo. Discutendo ora dei modelli SV è quindi necessario anche sottolineare come una delle più importanti formule in questo ambito, la formula di Black-Scholes (1973), abbia uno stretto collegamento con i modelli SV appena visti.

Considerando le opzioni in stile “Europeo”, ovvero quel tipo di opzioni in cui si ha il diritto – ma non l’obbligo – di acquistare o vendere un certo *asset* sottostante ad un prezzo fissato esclusivamente a una certa data di scadenza, la formula di Black-Scholes riesce a determinare il prezzo teorico di tali opzioni. Essa, oltre ad aver portato al premio Nobel i propri autori, ha dimostrato di avere risultati molto simili ai prezzi realmente osservati nel mercato.

Considerando il termine  $\varepsilon_t$  dell’equazione (3.17) come la componente stocastica del processo dei rendimenti  $Y_t$  con media  $\mu$  e considerando come  $P_t$  il prezzo della serie si può scrivere quanto segue (Satchell e Knight, 2011):

$$Y_t = \log (S_t/S_{t-1}) = \mu + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = \log (S_t/S_{t-1}) - \mu \quad (3.22)$$

Da cui è possibile generalizzare in modo da avere una formula tempo-continua analoga al processo appena visto:

$$dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma_t S_t dW_t \quad (3.23)$$

Dove  $W_t$  è un moto Browniano standard<sup>6</sup>.

Quando si pone  $\mu_t = \mu$  e  $\sigma_t = \sigma$ , entrambi costanti per qualsiasi istante  $t$ , si può ottenere la famosa formula di Black e Scholes; tale formula, infatti, assume che il prezzo delle opzioni può essere derivato utilizzando un ambiente di valutazione neutrale al rischio, in cui il rendimento medio e la varianza condizionata possono essere considerati costanti nel tempo.

Dopo aver analizzato numerosi modelli alla cui base è presente il concetto che la varianza di una serie finanziaria è considerata non-costante nel tempo, certamente una assunzione opposta come in questo caso risulta molto forte e certamente difficile da riscontrare in applicazioni reali. Questo problema ha portato allo sviluppo del modello di Hull e White (1987), simile alla equazione di Black e Scholes ma con una volatilità variabile nel tempo e governata da un processo stocastico:

$$\frac{dS_t}{S_t} = r_t dt + \sigma_t dW_t \quad (3.24)$$

dove sia  $\sigma_t$  sia  $W_t$  sono processi Markoviani<sup>7</sup>.

Da qui si possono notare alcune analogie col modello di volatilità stocastica visto in precedenza. Il termine  $dW_t$  infatti, comparato con il termine  $z_t$  dell'equazione (3.17), è un termine analogo considerato però in un ambiente tempo-continuo invece che discreto.  $\varepsilon_t$  invece è il termine analogo a  $\sigma_t dW_t$ , sempre analizzato in un ambiente tempo-discreto. L'equazione (3.24) quindi rappresenta la stessa equazione (3.22) nella sua versione continua nel tempo.

### 3.4.2 Volatilità stocastica a memoria lunga

Come già osservato nel capitolo 1, spesso la volatilità nelle serie finanziarie presenta la proprietà di memoria lunga, con funzioni di autocorrelazione che decrescono verso zero ad un tasso iperbolico. Il modello SV, in una sua formulazione alternativa, ha permesso di tenere conto di questa proprietà, analogamente al modello FIGARCH visto in precedenza.

---

<sup>6</sup> Processo stocastico gaussiano in tempo continuo con incrementi indipendenti. Ha la proprietà di essere una martingala.

<sup>7</sup> Processo aleatorio in cui la probabilità di eventi futuri è determinata esclusivamente dai valori passati più recenti

Un modello semplice di volatilità stocastica a memoria lunga (LMSV) può essere rappresentato come quanto segue:

$$h_t = \eta_t / (1 - L)^d, \quad \eta_t \sim NID(0, \sigma_\eta^2) \quad (3.25)$$

con  $0 \leq d \leq 1$ , parametro di memoria lunga.

Sono presenti tre casi particolari: se  $d$  è pari a 1 si assiste ad un processo di *random walk*, se  $d$  è pari a 0 si assiste ad un processo *white noise*, mentre se  $d \leq 0,5$  si ottiene la stazionarietà in covarianza.

L'elemento che assicura la memoria lunga del processo, similmente al processo FIGARCH, è la componente  $(1 - L)^d$ , la quale implica che la funzione di autocorrelazione di  $h_t$  decresce iperbolicamente, anziché esponenzialmente, all'aumentare del ritardo (*lag*) nel tempo. Altri modelli, come ad esempio il modello GARCH, hanno un decrescimento di tipo geometrico e di conseguenza si caratterizzano come processi a memoria corta.

Nel modello suggerito da Breidt, Crato e deLima (1993). infatti, la volatilità del processo deriva dalla seguente formulazione:

$$\sigma_t = \sigma \cdot \exp(h_t/2), \quad \varepsilon_t = \sigma_t z_t$$

da cui si può notare che:

$$\begin{aligned} \ln(\varepsilon_t^2) &= \ln(\sigma^2) + h_t + \ln(z_t^2) \\ &= [\ln(\sigma^2) + E(\ln z_t^2)] + h_t + [\ln(z_t^2) - E(\ln z_t^2)] \\ &= \mu + h_t + s_t \end{aligned}$$

Dove  $\{s_t\}$  è iid con media zero e varianza  $\sigma_s^2$ . Per questo motivo la serie  $\ln(\varepsilon_t^2)$  risulta essere pari alla somma tra un processo a memoria lunga  $h_t$  e un processo *white noise*  $s_t$ .

La stima dei modelli LMSV, analogamente ai modelli SV, è tutt'altro che semplice nelle applicazioni reali; tuttavia, il parametro  $d$  risulta essere stimabile o attraverso il metodo della quasi-massima verosimiglianza citato precedentemente o con un metodo regressivo (Tsay, 2014).

### 3.5 Cambiamenti strutturali nel processo (Cenni)

Sia come la storia economica insegna sia osservando i grafici di prezzi e rendimenti in particolari fasi storiche, le serie finanziarie possono subire cambiamenti improvvisi dovuti a eventi particolarmente significativi dal punto di vista politico o economico. Hamilton (1988) per primo propose il modello di cambiamento di regime di Markov per catturare questo fenomeno, insieme a Tyssedal e Tjostheim (1988), i quali confermarono l'evidenza empirica di quanto descritto e la necessità di implementare questa non-omogeneità dovuta a fatti economici nei modelli di previsione delle serie per migliorarne le previsioni. Questo modello utilizza un processo Markoviano per modellare tale fenomeno; questa assunzione implica che i diversi stati della serie si ripetano diverse volte, rendendo la stima più efficiente, dato che diverse sezioni di dati possono essere combinate per ottenere la stima del valore di un certo parametro.

### 3.6 Modelli a soglia (Cenni)

L'idea alla base dei modelli che considerano cambiamenti strutturali nel processo è che i dati che mostrano tali cambiamenti si ripeteranno in futuro, e che, quindi, possiamo prevedere gli stati futuri attraverso le stime dei parametri dalle osservazioni passate. L'unica informazione necessaria per svolgere tali previsioni è lo stato corrente della serie. Nei modelli a soglia invece, i cambiamenti tra i vari stati della serie sono modellati esplicitamente in base alla serie considerata e, quindi, data una certa serie  $\{X_t\}$  con  $t = 1, \dots, T$ , il passaggio tra uno stato e l'altro dipendono da  $X_T$  o qualche altra osservazione passata  $X_{T-d}$ .

L'idea alla base di questi modelli è che un sistema stocastico complesso possa essere diviso in sottosistemi più semplici. Nei modelli basati sui processi Markoviani visti in precedenza i passaggi tra uno stato e l'altro sono determinati da eventi esterni; in questi modelli invece, è presente un meccanismo di *feedback* tra le osservazioni passate e i parametri.



# Capitolo 4

## Le applicazioni dei modelli nelle serie reali.

### 4.1 Valutazione dei modelli nella letteratura

Prima di procedere ad un'analisi diretta di una serie reale e al confronto dei risultati delle previsioni dei modelli appena descritti sulla serie stessa, è utile fare una breve sintesi di alcuni studi empirici svolti utilizzando gli stessi modelli, per sintetizzare le diverse posizioni attuali nella letteratura e giungere infine a delle conclusioni considerando anche quanto già espresso nei capitoli precedenti. I risultati degli studi qui presi in considerazione sono per la maggior parte riportati da Poon e Granger (2003) e Satchell e Knight (2011).

I primi a verificare la capacità di previsione dei modelli ARCH e GARCH sono stati Akigray (1989) e Taylor (1986), confrontandoli con alcuni metodi applicati precedentemente alle serie temporali, quali ad esempio EWMA (*Exponentially Weighted Moving Average*) o HIS (modello storico per la volatilità). In particolare, Akigray trovò risultati previsionali migliori del modello GARCH rispetto a questi ultimi due, per diversi intervalli di tempo e frequenza.

Studi successivi, principalmente focalizzati su tassi di cambio e indici azionari, hanno analizzato le prestazioni delle varie estensioni dei modelli GARCH. Pagan e Schwert (1990), ad esempio, arrivano alla conclusione che il modello EGARCH ottiene i risultati migliori, specialmente rispetto a modelli non parametrici; conclusioni simili sono state trovate da Cumby, Figlewski e Hasbrouck (1993). Heynen e Kat (1994) evidenziano come sia preferibile il modello EGARCH per prevedere dei tassi di cambio. Per quanto riguarda il modello GARCH frazionalmente integrato, Vilasuso (2002) ha studiato cinque tassi di cambio e ha trovato che tale modello dà risultati migliori per previsioni da 1 a 10 giorni rispetto ai modelli HIS.

Altri studi, d'altra parte, non hanno trovato risultati così chiari, ad esempio quelli svolti da West e Cho (1995), Brooks (1998) e McMillan et al. (2000). Questi hanno trovato evidenze diverse a seconda della statistica usata per misurare l'errore della previsione, del periodo

temporale e del titolo considerato. Zumbach (2002), similmente a Vilasuso (2002), ma con una netta differenza nei risultati, ha considerato diversi tassi di cambio senza trovare alcuna sostanziale differenza nella capacità previsionale dei diversi modelli per previsioni ad un giorno.

In generale, i modelli che permettono una certa asimmetria nella volatilità tendono ad avere risultati di previsione migliori, grazie al fenomeno dell'effetto leva già descritto (Poon e Granger, 2003).

Per quando riguarda i modelli a volatilità stocastica, Heynen (1995) riporta che le previsioni di questo modello risultano essere migliori per un vasto numero di indici azionari in diversi continenti. Lo stesso studio già riportato di Heynes e Kat (1994) sottolinea come le previsioni del modello SV tendano ad essere migliori per quanto riguarda gli indici azionari, sebbene i modelli GARCH ed EGARCH siano preferibili per i tassi di cambio; infatti, gli errori di previsione del modello SV sono risultati essere circa dieci volte più ampi rispetto agli errori dei modelli GARCH ed EGARCH nei tassi di cambio. Dunis, Laws e Chauvin (2000) hanno confrontato le previsioni del modello SV e del modello GARCH, trovando che la soluzione ottimale siano delle previsioni combinate tra i diversi modelli.

Analizziamo ora direttamente una serie finanziaria reale utilizzando i principali modelli tra quelli descritti, per poi arrivare a delle conclusioni considerando sia quanto già analizzato, sia questi studi.

## **4.2 Analisi di una serie finanziaria reale**

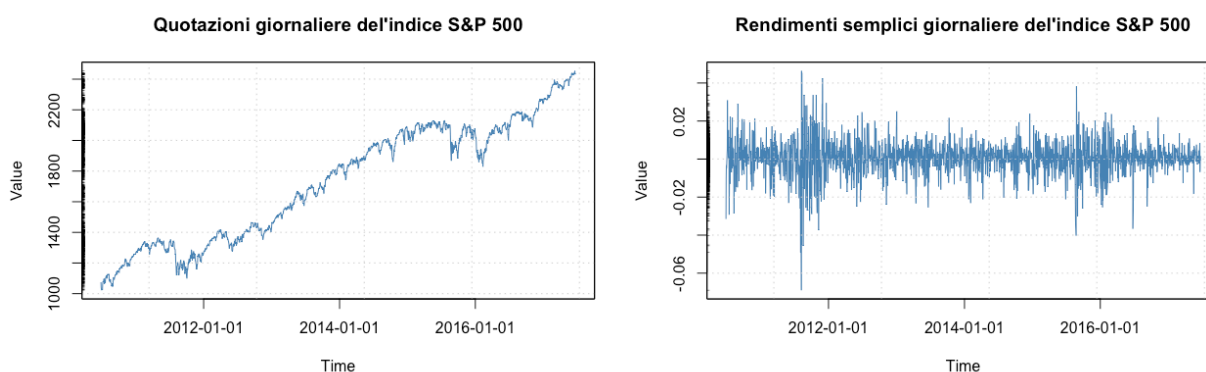
Lo scopo di questo capitolo è di presentare una semplice analisi attraverso il software statistico R di come può avvenire la specificazione di un modello, la stima dei coefficienti e la previsione di valori futuri, applicando quanto visto nel capitolo 3. La serie finanziaria usata è quella relativa ai rendimenti giornalieri dell'indice S&P 500 negli ultimi 7 anni, da fine giugno 2010 a fine giugno 2017, mentre per l'analisi della previsione effettueremo un confronto dei valori previsti dai modelli fino al 25 luglio 2017 con i valori effettivamente osservati.

Non volendo questa essere un'analisi approfondita e dettagliata del comportamento dei modelli di previsione delle serie storiche finanziarie, in questo capitolo ci soffermeremo principalmente sull'analisi di tre modelli per la varianza condizionata (ARCH, GARCH ed EGARCH) ed un modello per la media condizionata (ARMA).



Questa sezione sarà divisa in tre parti fondamentali: nella prima parte ci concentreremo sull'analisi della serie scelta, la verifica della presenza dei fatti stilizzati già accennati e l'analisi della funzione di autocorrelazione per trovare un modello per la media condizionata adeguato. Nella seconda parte ci concentreremo invece sulla specificazione dei modelli e l'analisi dell'adeguatezza di essi e dei rispettivi residui. Infine, utilizzeremo i modelli stimati per ottenere previsioni e verificheremo quale modello riesce, in questa serie, ad effettuare previsioni migliori, sia per quanto riguarda la media condizionata, sia per la varianza condizionata. Il metodo di valutazione sarà molto semplice: andremo a verificare la differenza tra valori previsti e valori reali e a confrontare le varianze di tali differenze tra i diversi modelli, ricercando il valore inferiore.

### 4.2.1 Parte 1: Analisi della serie



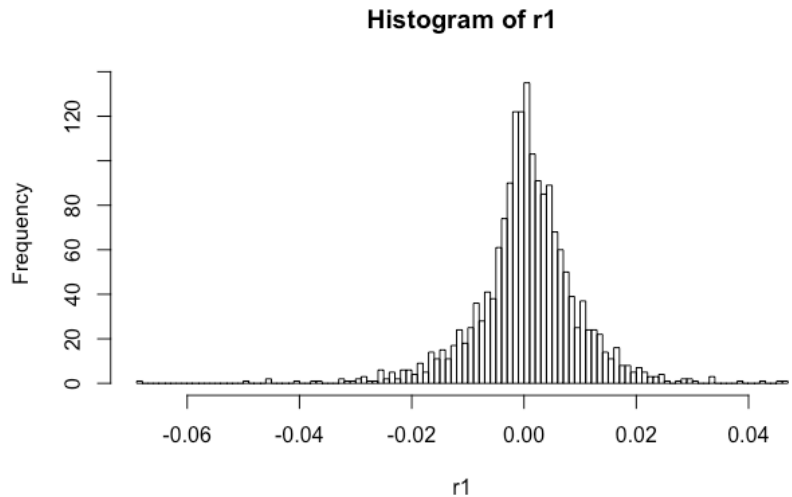
**Figura 3:** Grafico di prezzi e rendimenti del titolo S&P500 dal 28/06/2010 al 26/06/2017

Dopo aver caricato i dati attraverso la funzione `get.hist.quote()` direttamente dal database di *Yahoo Finance*, è già possibile fare una prima analisi grafica dei valori ottenuti. Focalizzandoci sul grafico dei rendimenti è possibile notare i cambiamenti nel livello della volatilità nel tempo e il fenomeno del *volatility clustering*, con particolari picchi appena prima del 2012 e all'inizio del 2016. Attraverso la funzione `basicStats(r1)` possiamo invece notare particolari caratteristiche distributive: la media, ad esempio, ha un valore molto vicino alla mediana, leggermente positivo ma comunque significativo per  $\alpha=0.05$ . L'indice di curtosi risulta essere ben superiore a 3 (valore per una distribuzione normale), mentre possiamo notare che, sebbene la distribuzione possa considerarsi approssimativamente simmetrica, l'indice di asimmetria è negativo e quasi pari a -0,5: si ha quindi una certa – ma limitata – asimmetria della distribuzione.

```
>basicStats(r1)
```

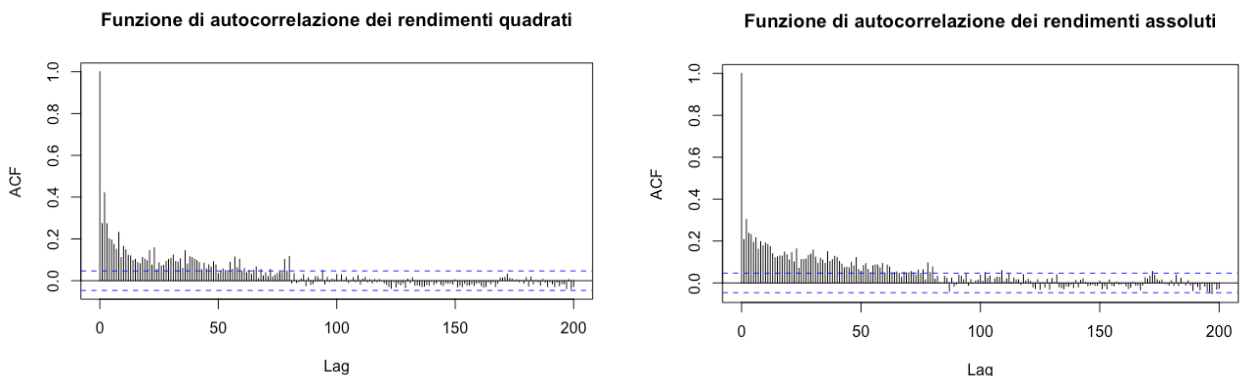
V1

```
nobs      1760.000000
NAs       0.000000
Minimum   -0.068958
Maximum    0.046317
1. Quartile -0.003401
3. Quartile  0.005079
Mean      0.000466
Median    0.000444
Sum       0.819381
SE Mean   0.000222
LCL Mean  0.000031
UCL Mean  0.000900
Variance  0.000086
Stdev     0.009295
Skewness  -0.475825
Kurtosis  4.819626
```



**Figura 4:** Istogramma dei rendimenti.

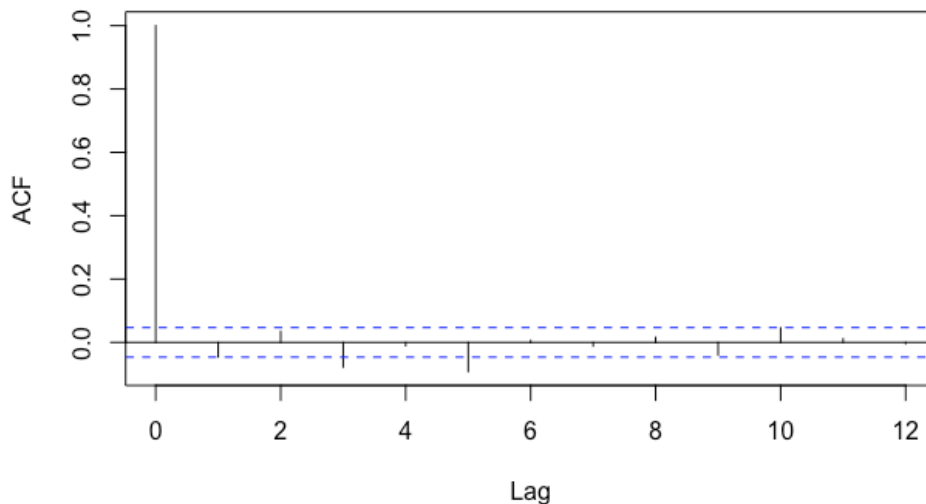
Come già notato nel capitolo 1, anche in questa serie è presente una particolare ed evidente autocorrelazione nei rendimenti quadrati e assoluti, come mostrato nelle seguenti figure:



**Figura 5:** Funzione di autocorrelazione dei rendimenti (a) quadrati e (b) assoluti.

Per definire un processo adeguato in grado di descrivere l'andamento della media condizionata di questa serie è necessario analizzare anche la funzione di autocorrelazione dei rendimenti stessi, in quanto potrebbero essere presenti componenti autoregressive o a media mobile rilevanti che vale la pena considerare. Tracciando il grafico della funzione di autocorrelazione si ha quanto segue:

### Autocorrelazione dei rendimenti



**Figura 6:**  
Funzione di autocorrelazione dei rendimenti semplici.

Sebbene la presenza di autocorrelazione sia molto poco evidente rispetto ai rendimenti quadrati e assoluti, possiamo notare che ai *lag* 3, 5 e leggermente al *lag* 1 il valore della ACF è significativamente diverso da zero. Per verificare l'assenza di autocorrelazione nei rendimenti è quindi necessario ricorrere ad un test statistico introdotto da Box e Pierce (1970) e poi rivisto da Ljung e Box (1978). Dato un certo intervallo di tempo (*lag*), l'ipotesi nulla è rappresentata dalla assenza di autocorrelazione (quindi la nullità congiunta di tutti i coefficienti di autocorrelazione).

```
> Box.test(r1, lag=12, type='Ljung')
Box-Ljung test
data:  r1
X-squared = 39.513, df = 12, p-value = 8.658e-05
```

Dai risultati possiamo notare un p-value molto ridotto che porta necessariamente a rigettare l'ipotesi nulla di assenza di autocorrelazione. Come già accennato nel capitolo 1, il motivo dietro questa evidenza potrebbe risiedere nella frequenza della serie considerata: serie finanziarie a frequenza più elevata tendono a mostrare una leggera, ma significativa, autocorrelazione nei rendimenti semplici, al contrario di altre serie a frequenza più bassa quali, ad esempio, i rendimenti mensili. Infatti, eseguendo le stesse operazioni per lo stesso titolo ma con rendimenti mensili, il test di Ljung e Box porta ad accettare ampiamente l'ipotesi nulla:

```
> Box.test(rMonth, lag=12, type='Ljung')
Box-Ljung test
data:  rMonth
X-squared = 11.049, df = 12, p-value = 0.5247
```

Per tenere in considerazione questo fenomeno è necessario spiegare l'andamento della media condizionata con un modello ARMA, il quale potrebbe eventualmente coincidere un con modello AR o MA.

```
> #Trova il modello per la media dei rendimenti
> arima=auto.arima(r1)
> arima
Series: r1
ARIMA(3,0,1) with non-zero mean

Coefficients:
      ar1      ar2      ar3      ma1  mean
    0.6625  0.0611 -0.0939 -0.7120 5e-04
s.e.  0.1277  0.0292  0.0253  0.1271 2e-04

sigma^2 estimated as 8.544e-05:  log likelihood=5748.71
AIC=-11485.43  AICc=-11485.38  BIC=-11452.59

> #Test residui
> x = Box.test(arima$residuals, lag=12, type='Ljung')
> 1-pchisq(x$statistic, 12-3-1)
X-squared
0.08036162
```

Attraverso la funzione `auto.arima(r1)` è possibile trovare il modello ARIMA più adeguato a descrivere il processo di media condizionata confrontando modelli con variabili diverse e il rispettivo valore di AIC e BIC<sup>8</sup>.

Come possiamo osservare la funzione ha restituito come risultato il modello ARMA(3,1). Applicando questo modello possiamo quindi procedere ad una ulteriore verifica sui rispettivi residui con il test di Ljung-Box, in modo da verificare che l'implementazione di questo modello abbia effettivamente rimosso l'autocorrelazione. Per un modello ARMA(p,q), la statistica  $Q(m)$  del test di Ljung-Box segue asintoticamente una distribuzione chi-quadro con  $m-p-q$  gradi di libertà, con  $m$  pari al lag temporale inserito. Dal codice inserito possiamo notare come si ottenga un p-value circa pari a  $0.080 > 0.05$ , portando ad accettare l'ipotesi nulla di assenza di autocorrelazione nei residui del modello.

---

<sup>8</sup> La sigla AIC indica *Akaike Information Criterion* (Akaike, 1973) e rappresenta una misura della qualità relativa di un certo modello a rappresentare un certo insieme di dati. Un'alternativa a questo criterio è il BIC (*Bayesian information criterion*), il quale ad esempio, nel caso dei modelli AR, tende a scegliere un modello di ordine inferiore quando la dimensione è moderata o ampia.

## 4.2.2 Parte 2: Specificazione dei modelli per la varianza condizionata

Prima di procedere con la specificazione dei modelli per la varianza condizionata e il calcolo dei rispettivi parametri è buona prassi verificare, attraverso degli opportuni test, la presenza di effetti ARCH sui residui del processo per la media condizionata che abbiamo scelto di utilizzare precedentemente, ovvero la effettiva presenza di eteroschedasticità condizionata. Tale verifica è possibile eseguirla attraverso due test: il primo è il classico test già visto di Box-Ljung svolto sui residui al quadrato del modello ARMA specificato precedentemente, mentre il secondo è il test dei moltiplicatori Lagrange di Engle (1982), equivalente alla statistica F per testare che  $\beta_i = 0$  (con  $i = 1, \dots, m$ ) nella seguente regressione:

$$\varepsilon_t^2 = \alpha + \sum_{i=1}^m \beta_i \varepsilon_{t-i}^2 + e_t, \quad t = m + 1, \dots, T,$$

dove  $e_t$  denota il termine di errore,  $m$  è un intero positivo specificato e  $T$  la dimensione del campione.

Eseguendo entrambi i test sulla serie considerata si ha quanto segue:

```
> Box.test(arima$residuals^2, lag=12, type='Ljung')
```

```
Box-Ljung test
```

```
data: arima$residuals^2
```

```
X-squared = 893.5, df = 12, p-value < 2.2e-16
```

```
> ArchTest(arima$residuals)
```

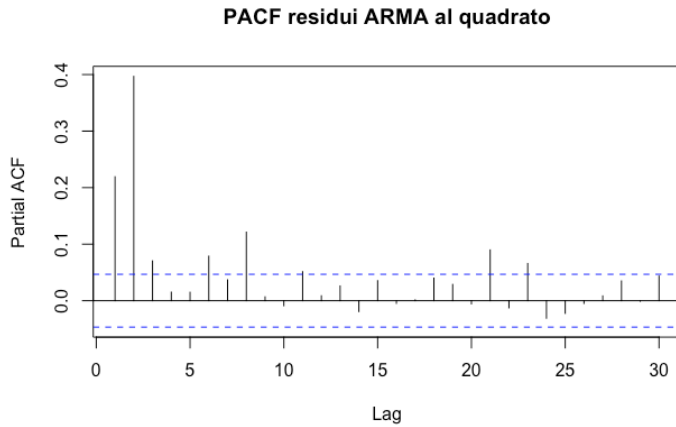
```
ARCH LM-test; Null hypothesis: no ARCH effects
```

```
data: arima$residuals
```

```
Chi-squared = 405.81, df = 12, p-value < 2.2e-16
```

Entrambi i test portano a rigettare l'ipotesi nulla di assenza di effetti ARCH, visti i p-value molto vicini a zero, pertanto procederemo a specificare dei modelli ARCH, GARCH ed EGARCH per descrivere la varianza condizionata.

Partendo dal modello ARCH, è necessario prima di tutto trovare l'ordine  $p$  ottimale per la serie. Per farlo tracciamo la funzione di autocorrelazione parziale dei residui del modello per la media condizionata specificato precedentemente, al quadrato.



**Figura 7:** Funzione di autocorrelazione parziale dei residui del modello ARMA(3,1) precedentemente stimato.

Dal grafico della PACF possiamo notare correlazioni significative ai *lag* 1, 2, 3, 6, 8, 11, 21 e 23. Possiamo verificare quindi la stessa problematica evidenziata nel capitolo 3: spesso i modelli ARCH richiedono ordini abbastanza elevati, portando il modello ad assumere una complessità maggiore rispetto ai suoi affini. Per tenere il modello più semplice possibile quindi, considereremo, almeno inizialmente, un modello ARCH(11).

Attraverso la libreria *fGarch* e la funzione *garchFit* provvediamo quindi alla stima dei parametri del modello appena specificato.

Call:

```
garchFit(formula = ~arma(3, 1) + garch(11, 0), data = r1, Trace = F)
```

Mean and Variance Equation:

```
data ~ arma(3, 1) + garch(11, 0)
```

Conditional Distribution:

```
norm
```

Std. Errors:

```
based on Hessian
```

Error Analysis:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )	
mu	5.337e-05	2.331e-05	2.290	0.022024	*
ar1	9.090e-01	3.538e-02	25.697	< 2e-16	***
ar2	5.864e-02	3.591e-02	1.633	0.102440	
ar3	-4.236e-02	2.582e-02	-1.641	0.100844	
ma1	-9.581e-01	2.248e-02	-42.622	< 2e-16	***
omega	2.161e-05	2.340e-06	9.235	< 2e-16	***
alpha1	1.129e-01	3.134e-02	3.603	0.000315	***
alpha2	1.827e-01	3.421e-02	5.340	9.3e-08	***
alpha3	7.258e-02	2.989e-02	2.429	0.015159	*
alpha4	7.430e-02	3.199e-02	2.323	0.020200	*
alpha5	1.859e-02	2.129e-02	0.873	0.382453	
alpha6	6.122e-02	2.482e-02	2.467	0.013622	*
alpha7	5.775e-02	2.349e-02	2.458	0.013963	*
alpha8	5.307e-02	2.624e-02	2.022	0.043169	*

```
alpha9 5.349e-02 3.146e-02 1.700 0.089078 .
alpha10 3.210e-02 2.537e-02 1.265 0.205774
alpha11 1.688e-02 2.527e-02 0.668 0.504113
---
```

Rimuovendo i parametri non significativi che il software ci permette arriviamo a specificare un modello ARMA(1,1)-ARCH(8):

```
Call:
garchFit(formula = ~arma(1, 1) + garch(8, 0), data = r1, Trace = F)
```

```
Mean and Variance Equation:
data ~ arma(1, 1) + garch(8, 0)
<environment: 0x114b74468>
[data = r1]
```

```
Conditional Distribution:
norm
```

```
Std. Errors:
based on Hessian
```

```
Error Analysis:
      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
mu      4.578e-04 1.556e-04 2.942 0.00326 **
ar1     3.768e-01 1.709e-01 2.205 0.02744 *
ma1    -4.253e-01 1.723e-01 -2.468 0.01359 *
omega   2.368e-05 2.274e-06 10.416 < 2e-16 ***
alpha1  1.272e-01 2.988e-02 4.256 2.08e-05 ***
alpha2  1.806e-01 3.345e-02 5.397 6.77e-08 ***
alpha3  9.322e-02 3.131e-02 2.977 0.00291 **
alpha4  8.755e-02 3.229e-02 2.711 0.00670 **
alpha5  2.797e-02 2.136e-02 1.310 0.19034
alpha6  7.183e-02 2.602e-02 2.760 0.00578 **
alpha7  6.401e-02 2.403e-02 2.664 0.00772 **
alpha8  6.063e-02 2.530e-02 2.397 0.01655 *
```

```
---
Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

```
Log Likelihood:
5989.496 normalized: 3.403123
```

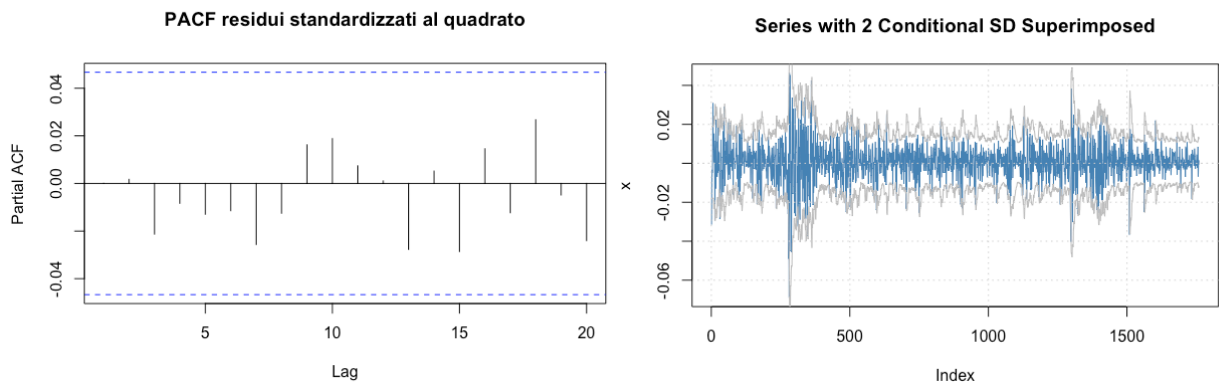
```
Standardised Residuals Tests:
      Statistic p-Value
Jarque-Bera Test R Chi^2 233.666 0
Shapiro-Wilk Test R W 0.9798294 4.842885e-15
Ljung-Box Test R Q(10) 10.59954 0.389556
Ljung-Box Test R Q(15) 17.12606 0.3113848
Ljung-Box Test R Q(20) 23.39964 0.2696001
Ljung-Box Test R^2 Q(10) 4.046077 0.9452444
Ljung-Box Test R^2 Q(15) 7.104009 0.954699
Ljung-Box Test R^2 Q(20) 10.00085 0.9681565
LM Arch Test R TR^2 3.774833 0.9871652
```

Information Criterion Statistics:

AIC	BIC	SIC	HQIC
-6.792609	-6.755293	-6.792702	-6.778819

Per prima cosa analizziamo i risultati dei test statistici presentati per verificare l'adeguatezza di questo specifico modello. Il primo, il test di Jarque-Bera, è un test statistico per la verifica dell'ipotesi di normalità e la effettua attraverso la verifica dell'indice di asimmetria e di curtosi; il risultato è in linea col secondo test, Shapiro-Wilk, che verifica la stessa ipotesi nulla.

Tutti i test di Ljung-Box eseguiti, con ordini differenti, hanno risultati coerenti tra loro, escludendo la presenza di autocorrelazione tra i residui standardizzati del modello. È possibile verificare questo anche attraverso la PACF:



**Figura 8:** (a) Funzione di autocorrelazione parziale dei residui standardizzati al quadrato del modello ARMA-ARCH stimato. (b) Deviazione standard calcolata attraverso il modello.

Attraverso la funzione `plot(r1)` è possibile ottenere alcuni altri grafici interessanti: proponiamo qui, ad esempio, il grafico della deviazione standard calcolata dal modello proposto sovrapposto al grafico della serie già mostrato in Figura 8.

Nel complesso quindi, analizzando i risultati dei test dati, i residui standardizzati del modello, le stime dei parametri e i grafici dati il modello sembra risultare adeguato alla serie considerata. È necessario notare d'altra parte che questo modello considera la componente  $z_t$  - vedi formula (3.6) - distribuita come una normale (opzione di default della funzione `garchFit()`); è possibile, specificandolo adeguatamente, utilizzare un'altra distribuzione quali, ad esempio, la t-Student, GED o una distribuzione asimmetrica. Per semplicità in questa analisi utilizzeremo solo le distribuzioni normali per ogni modello; un'analisi più



dettagliata, d'altra parte, potrebbe considerare tutti i tipi di distribuzione e considerare solo i modelli con AIC inferiore per le previsioni.

Constatata l'adeguatezza del modello, a questo punto, possiamo analizzarne i risultati. Il rendimento giornaliero atteso risulta innanzitutto essere abbastanza ridotto (0,046%); per quanto riguarda le caratteristiche distributive del modello, il momento quarto non condizionato risulta esistere ed essere ampiamente maggiore di 3 (circa 4.9161), riuscendo a catturare l'eccesso di curtosi analizzato inizialmente. La varianza non condizionata risulta essere pari a  $8.2498 \cdot 10^{-5}$ , molto vicina alla varianza della serie (pari a  $8.6388 \cdot 10^{-5}$ ).

Il prossimo modello analizzato sarà il modello GARCH(1,1). In questo caso, sia per semplicità e sia per il supporto di diversi studi, non effettueremo alcuna analisi sull'ordine più adatto del modello per descrivere la serie. Ad esempio, Hansen e Lunde (2001) hanno confrontato un ampio numero di modelli di previsione della volatilità in uno studio empirico estensivo, provando come il modello GARCH(1,1) riesca spesso a portare a previsioni più accurate. In generale, comunque, solo i modelli GARCH con ordini bassi sono utilizzati nelle applicazioni empiriche. Attraverso la stima dei parametri in R otteniamo quanto segue:

```
Call:
garchFit(formula = ~arma(1, 1) + garch(1, 1), data = r1, Trace = F)
```

```
Std. Errors:
based on Hessian
```

```
Error Analysis:
      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
mu      2.530e-04  9.150e-05    2.765  0.00569 **
ar1      6.334e-01  1.136e-01    5.577  2.45e-08 ***
ma1     -6.830e-01  1.109e-01   -6.156  7.47e-10 ***
omega    4.382e-06  8.250e-07    5.312  1.08e-07 ***
alpha1   1.518e-01  2.294e-02    6.620  3.60e-11 ***
beta1    7.942e-01  2.679e-02   29.651 < 2e-16 ***
```

```
---
Log Likelihood:
5983.53    normalized: 3.399733
```

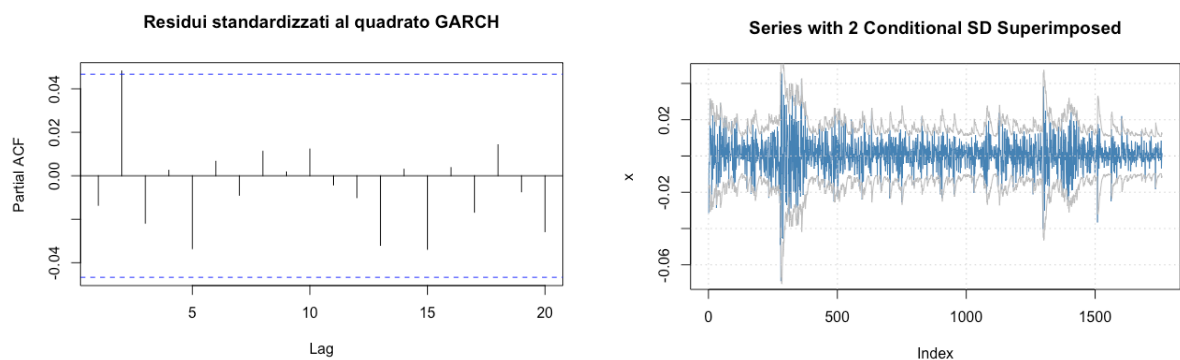
```
Standardised Residuals Tests:
```

			Statistic	p-Value
Jarque-Bera Test	R	Chi^2	266.4343	0
Shapiro-Wilk Test	R	W	0.9781565	9.705781e-16
Ljung-Box Test	R	Q(10)	9.934641	0.4462461
Ljung-Box Test	R	Q(15)	15.92438	0.3870953
Ljung-Box Test	R	Q(20)	21.47854	0.3694629
Ljung-Box Test	R^2	Q(10)	8.839603	0.5473906
Ljung-Box Test	R^2	Q(15)	13.55041	0.5598631
Ljung-Box Test	R^2	Q(20)	15.89954	0.7228367
LM Arch Test	R	TR^2	8.710391	0.7274476

Information Criterion Statistics:

AIC	BIC	SIC	HQIC
-6.792648	-6.773990	-6.792671	-6.785753

Innanzitutto, tutte le stime risultano essere ampiamente significative. Per quanto riguarda i valori delle statistiche dei test già analizzati in precedenza, i risultati sono simili a quelli del modello ARCH, notando l'assenza di autocorrelazione e normalità nei residui standardizzati. Analogamente a quanto svolto per il modello ARCH, mostreremo ora il grafico della funzione di autocorrelazione parziale dei residui standardizzati al quadrato e il grafico delle deviazioni standard condizionate rispetto al grafico della serie:



**Figura 9:** (a) Funzione di autocorrelazione parziale dei residui standardizzati al quadrato del modello ARMA-GARCH stimato. (b) Deviazione standard calcolata attraverso il modello.

Escludendo una correlazione marginale leggermente significativa al *lag* 2, il modello si conferma essere adeguato a descrivere la media e varianza condizionata della serie analizzata. La varianza non condizionata risulta essere pari a  $8.1238 \cdot 10^{-5}$ , leggermente inferiore sia rispetto a quella calcolata dal modello ARCH visto in precedenza sia alla varianza della serie. La curtosi rimane sempre ampiamente in eccesso e leggermente superiore rispetto al modello ARCH(8).

L'ultimo modello analizzato, invece, è il modello EGARCH(1,1). Il risultato della specificazione del modello in R è quanto segue:

```
GARCH Model : eGARCH(1,1)
Mean Model  : ARFIMA(1,0,1)
Distribution  : norm
```

Optimal Parameters

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
mu	0.000289	0.000138	2.0918	0.036452
ar1	0.533655	0.047193	11.3079	0.000000

ma1	-0.570408	0.045439	-12.5534	0.000000
omega	-0.487217	0.004644	-104.9219	0.000000
alpha1	-0.203543	0.015885	-12.8137	0.000000
beta1	0.949085	0.000169	5621.1949	0.000000
gamma1	0.133224	0.009360	14.2337	0.000000

Robust Standard Errors:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
mu	0.000289	0.000179	1.6111	0.10716
ar1	0.533655	0.012920	41.3040	0.00000
ma1	-0.570408	0.012821	-44.4909	0.00000
omega	-0.487217	0.008747	-55.6988	0.00000
alpha1	-0.203543	0.022454	-9.0647	0.00000
beta1	0.949085	0.000234	4047.5841	0.00000
gamma1	0.133224	0.012508	10.6509	0.00000

LogLikelihood : 6036.194

Information Criteria

-----

Akaike	-6.8514
Bayes	-6.8296
Shibata	-6.8514
Hannan-Quinn	-6.8433

Weighted Ljung-Box Test on Standardized Residuals

-----

	statistic	p-value
Lag[1]	0.1743	0.6764
Lag[2*(p+q)+(p+q)-1][5]	2.3516	0.8504
Lag[4*(p+q)+(p+q)-1][9]	4.8516	0.4877

d.o.f=2

H0 : No serial correlation

Weighted Ljung-Box Test on Standardized Squared Residuals

-----

	statistic	p-value
Lag[1]	0.6125	0.4339
Lag[2*(p+q)+(p+q)-1][5]	1.8058	0.6650
Lag[4*(p+q)+(p+q)-1][9]	2.2041	0.8793

d.o.f=2

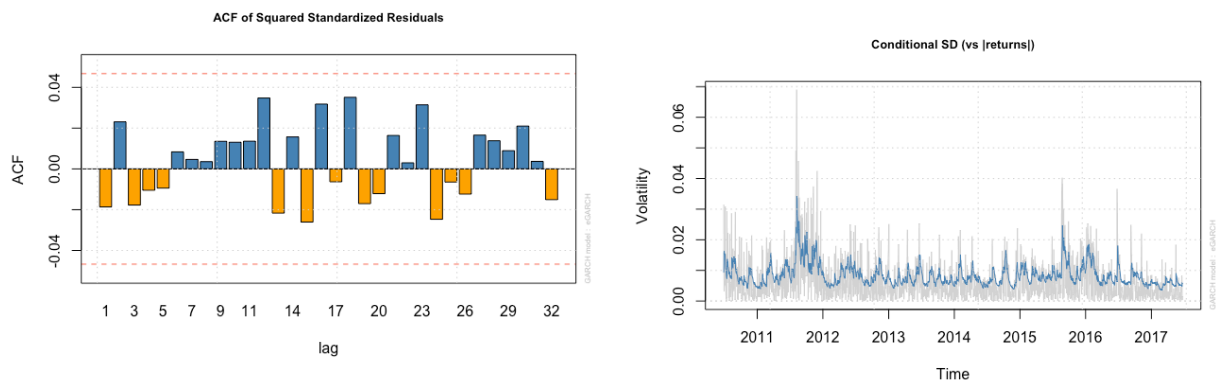


Figura 10: (a) Funzione di autocorrelazione dei residui standardizzati al quadrato del modello ARMA-EGARCH stimato. (b) Deviazione standard calcolata attraverso il modello.

Anche in questo caso tutti i parametri risultano essere ampiamente significativi e il rendimento giornaliero atteso risulta essere abbastanza simile al valore trovati nel modello GARCH(1,1) visto precedentemente. Tutti i test di Ljung-Box svolti sia sui residui standardizzati sia sui residui standardizzati al quadrato accettano l'ipotesi nulla di assenza di correlazione seriale, confermando l'adeguatezza anche di questo modello.

Per questo modello è interessante valutare l'ampiezza della risposta asimmetrica a shock positivi e negativi, ovvero il modo attraverso cui è modellato il fenomeno dell'effetto leva, analizzato nel capitolo 1 e 3. Per farlo, scriviamo la formula del modello appena ottenuto per la varianza condizionata, combinando le formule (3.14) e (3.15) e inserendo i valori appena ottenuti:

$$\ln(\sigma_t^2) = -0.4872 - 0.2035(|z_{t-1}| + 0.1332z_{t-1}) + 0.9490\ln(\sigma_{t-1}^2)$$

da cui si ha:

$$\sigma_t^2 = \sigma_{t-1}^{2 \times 0,9490} e^{-0,4872} \times \begin{cases} e^{-0,2306z_{t-1}} & \text{se } z_{t-1} \geq 0 \\ e^{+0,1764z_{t-1}} & \text{se } z_{t-1} < 0 \end{cases}$$

Questa equazione evidenzia la risposta asimmetrica a diversi tipi di shock. Considerando  $|z_{t-1}| = 2$ , ad esempio, si avrà quanto segue:

$$\frac{\sigma_t^2(z_{t-1} = -2)}{\sigma_t^2(z_{t-1} = 2)} = \frac{\exp(0,1764 \times (-2))}{\exp(-0,2306 \times 2)} = e^{0,1084} = 1,1145$$

Quindi, l'impatto di uno shock negativo sulla volatilità condizionata con una dimensione di due volte la deviazione standard risulta essere più ampio del 11,45% rispetto ad uno shock positivo delle stesse dimensioni in valore assoluto.

### 4.2.3 Parte 3: Previsione

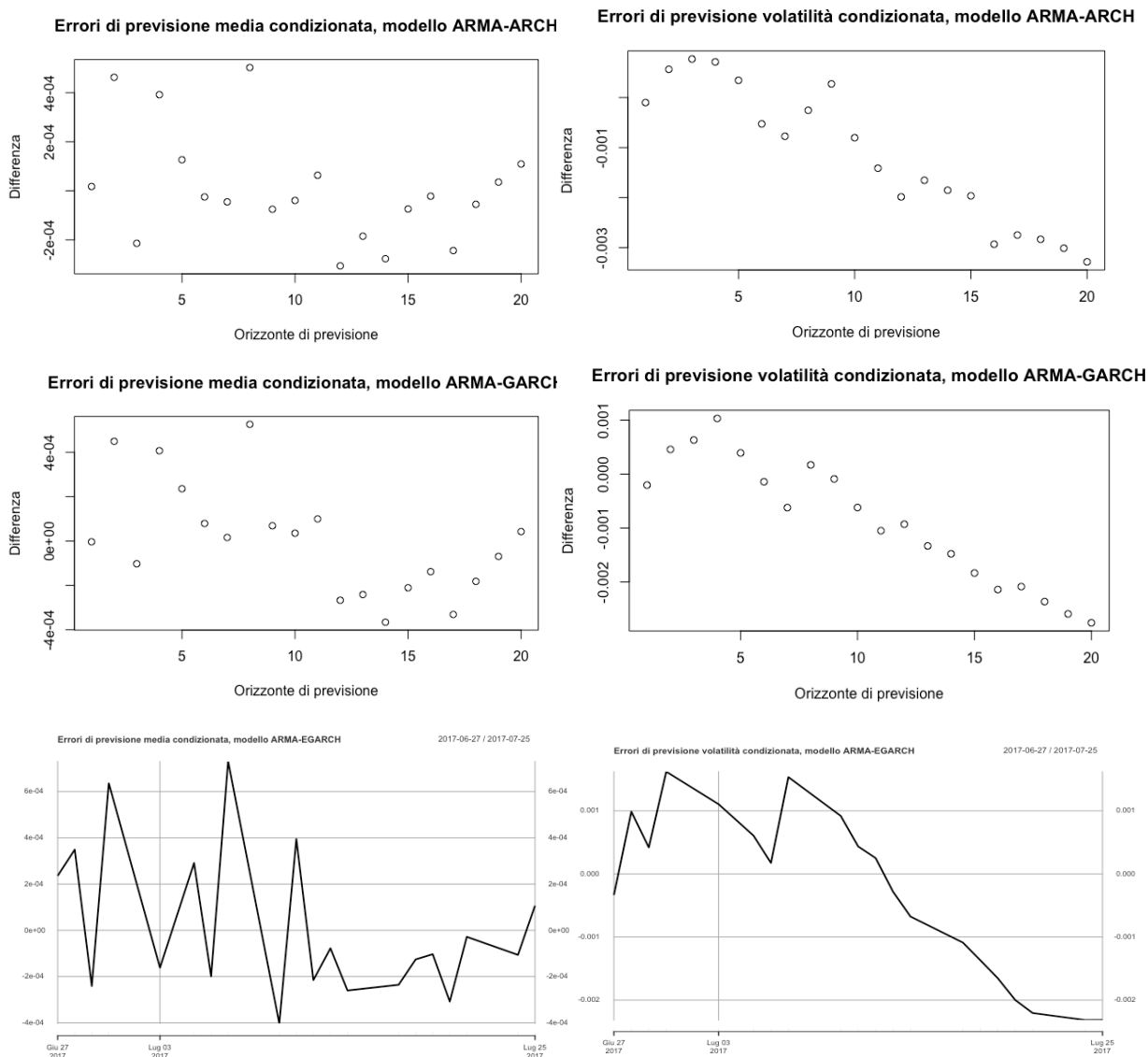
Per calcolare le previsioni dei modelli su media e varianza condizionata abbiamo scelto arbitrariamente un intervallo di 20 giorni, equivalenti ai 20 rendimenti giornalieri successivi alla data di chiusura della serie analizzata, ovvero il 26 giugno 2017. Per verificare l'accuratezza di queste previsioni abbiamo quindi allungato la serie considerata fino al 26 luglio 2017, in modo da includere esattamente altri 20 valori.

Per svolgere le previsioni abbiamo utilizzato la funzione `predict()` a partire dai modelli precedentemente specificati. Utilizzando gli stessi parametri calcolati precedentemente,

quindi, si immaginerà di spostare la serie e il rispettivo processo fino ad arrivare a calcolare  $\sigma_{t+20}^2$ .

Come già accennato, il paragone tra le diverse previsioni dei modelli sarà effettuato confrontando i risultati delle previsioni con i valori della media e della varianza condizionata calcolati utilizzando gli stessi modelli, ma applicati alla serie finanziaria fino al 26 luglio. Per confrontare i modelli tra loro calcoleremo e confronteremo l'errore quadratico medio di previsione, ovvero la media tra le differenze al quadrato dei valori osservati coi valori previsti. Applicando questo semplice metodo, quindi, saremo portati a preferire il modello che minimizza tale valore

**Figura 11:** Andamento delle differenze tra valori osservati e valori previsti per la media condizionata e per la varianza condizionata dei modelli analizzati.



I grafici appena presentati mostrano l'andamento degli errori di previsione di ogni modello sia per la media sia per la varianza rispetto al valore atteso di 0. In generale si può notare come gli andamenti per tutti e tre i modelli siano abbastanza simili. Sia per la media sia per la varianza condizionata in tutti i grafici si può notare come gli errori tendano ad essere positivi prima del lag 11 mentre, tendenzialmente, questi sono negativi dal lag 11 al lag 20. Queste similitudini fanno sì che ci si aspetti leggere differenze nei valori dell'errore quadratico medio tra i modelli. Di seguito riportiamo i valori calcolati dei diversi errori quadratici medi:

<b>Modello</b>	<b>Errore quadratico medio – media condizionata</b>	<b>Errore quadratico medio – varianza condizionata</b>
<b>ARMA-ARCH</b>	$4.915568 \times 10^{-8}$	$3.162184 \times 10^{-6}$
<b>ARMA-GARCH</b>	$6.041553 \times 10^{-8}$	$2.042481 \times 10^{-6}$
<b>ARMA-EGARCH</b>	$9.81085 \times 10^{-8}$	$1.742563 \times 10^{-6}$

Per quanto riguarda la media condizionata il modello migliore risulta essere il primo analizzato, ovvero ARMA-ARCH. La varianza dell'errore del termine di previsione risulta essere vicina a quella del modello ARMA-GARCH ma quasi la metà di quella osservata col modello ARMA-EGARCH, pur considerando che si parla di ordini di grandezza abbastanza ridotti.

Per quanto riguarda invece la varianza condizionata, il modello che sembra aver avuto risultati di previsione migliori è il modello EGARCH.

In conclusione, quindi, questo paragrafo ha cercato di raggiungere lo scopo di presentare un semplice modo di analisi e confronto dei modelli visti nel terzo capitolo in una serie reale. Ulteriori approfondimenti e considerazioni che potrebbero allargare le considerazioni già fatte in questo capitolo potrebbero considerare distribuzioni differenti per quanto riguarda il termine  $z_t$ , confrontare e analizzare anche i risultati di altri modelli già descritti quali GARCH-M e SV o utilizzare metodi diversi di verifica dell'accuratezza delle previsioni. Per quanto riguarda il primo elemento, infatti, si è notato come la serie qui considerata è caratterizzata da una leggera asimmetria verso destra: è da considerare quindi la possibilità che utilizzando una distribuzione di  $z_t$  asimmetrica si sarebbe potuto arrivare ad ottenere un modello ARCH o GARCH capace di descrivere meglio la serie. Per quanto riguarda invece

L'utilizzo di altri metodi di verifica dell'accuratezza delle previsioni, è necessario notare come quello utilizzato sia quello più immediato e intuitivo ma non l'unico disponibile: eventuali analisi più dettagliate possono includere diversi tipi di analisi sulle previsioni con le relative considerazioni che ne conseguono.





# Conclusioni

In questo lavoro si sono presi in considerazione diversi aspetti relativi alle serie storiche finanziarie. Innanzitutto, abbiamo analizzato le principali caratteristiche e i principali fatti stilizzati delle serie finanziarie, dei rendimenti e della volatilità, rivedendo i principali studi che nel tempo hanno permesso di determinarli. Successivamente abbiamo svolto un'analisi più economica, rivedendo le principali teorie che descrivono l'andamento dei prezzi e dei rendimenti nei mercati finanziari, per poi arrivare ad un'analisi più tecnica dei principali modelli per prevedere le serie finanziarie, sia dal punto di vista teorico sia dal punto di vista pratico/applicativo.

È risultato chiaro fin da subito come gli studi sulle caratteristiche delle serie finanziarie guidino il successivo sviluppo di nuovi modelli per descriverle e prevederle. Non c'è da stupirsi, quindi, vedendo il proliferare di diversi modelli man mano che la disponibilità di studi e analisi su queste serie è cresciuta.

Dopo aver ben analizzato ognuno di questi temi la domanda più spontanea da porsi è: fino a che punto e in che misura è possibile prevedere l'andamento di una serie finanziaria? Certamente, come già mostrato in questo lavoro, i modelli analizzati riescono a dare stime abbastanza precise dell'andamento di diverse serie finanziarie; d'altra parte, non è stato possibile presentare un modello chiaramente migliore rispetto agli altri. Infatti, sia nella applicazione reale svolta, sia analizzando gli studi empirici presenti nella letteratura, sono stati presentati risultati spesso discordanti in base a diverse variabili considerate: ad esempio, alcuni modelli tendono ad avere previsioni migliori in determinati intervalli di tempo o a determinate frequenze, senza escludere l'effetto dell'ampiezza dell'orizzonte previsionale o delle variabili e metodi utilizzati per calcolare l'errore della previsione.

È necessario considerare, come sottolineano Poon e Granger (2003), che molti tra gli studi riportati sono svolti per ragioni differenti, utilizzando diversi insiemi di dati provenienti da titoli spesso molto diversi e con vari intervalli di tempo e tecniche di valutazione, rendendo difficile avere una stima sui costi e benefici di utilizzare un modello rispetto ad un altro.

Si può considerare quindi la volatilità dei mercati finanziari come prevedibile, lasciando invece aperto un importante dibattito su fino a che orizzonte temporale questa sia prevedibile e che modello o combinazione di modello sia più adatto ad una determinata serie e intervallo temporale. Questa considerazione, però, come sottolineato da Timmermann e Granger (2004), non necessariamente viola l'ipotesi dei mercati efficienti in quanto la difficoltà nella scelta del miglior modello previsionale implica una certa incertezza nelle previsioni. Non esiste, infatti, un metodo unico ed universale attraverso cui avere previsioni precise delle serie finanziarie ma, al massimo, è possibile sfruttare un certo modello che sembra funzionare in un determinato titolo e per un periodo limitato di tempo, fino a che tale meccanismo è scoperto e utilizzato da un ampio numero di investitori.

Viste le considerazioni fatte, quindi, il tema dei modelli per prevedere le serie finanziarie rimane ancora aperto a futuri sviluppi, soprattutto per quanto riguarda i metodi di valutazione delle previsioni e l'effetto che hanno determinate variabili tipiche della serie considerata sui risultati dei modelli considerati. Ad ogni modo, vista l'importanza della stima della volatilità e le questioni importanti e complesse che ne stanno alla base, questo ambito di studi rimarrà sicuramente oggetto di studi sempre più dettagliati e accurati.

# Riferimenti bibliografici

AKAIKE, H., 1973. *Maximum likelihood identification of Gaussian autoregressive moving average models*. Biometrika, 60(2), pp. 255-265.

AKGIRAY, V., 1989. *Conditional Heteroskedasticity in Time Series of Stock Returns: Evidence and Forecasts*, J. Bus. 62, pp. 55–80.

BAILLIE, R. T., BOLLERSLEV, T., E MIKKELSEN, H.O., 1996. *Fractionally integrated generalized autoregressive conditional heteroskedasticity*. Journal of Econometrics, forthcoming.

BLACK, F., 1976. *Studies of stock price volatility changes*. In Proceedings of the 1976 Meetings of the American Statistical Association, Business and Economics Section, pp. 177–181, Chicago.

BLACK, F., E SCHOLES, M., 1973. *The pricing of options and corporate liabilities*. Journal of political economy, 81(3), pp. 637-654.

BOLLERSLEV, T., 1986. *Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity*. Journal of econometrics, 31(3), pp. 307-327.

BOUCHAUD, J. P., E POTTERS, M., 2001. *More stylized facts of financial markets: leverage effect and downside correlations*. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 299(1), pp. 60-70.

BOX, G. E., E PIERCE, D. A., 1970. *Distribution of residual autocorrelations in autoregressive-integrated moving average time series models*. Journal of the American statistical Association, 65(332), pp. 1509-1526.

BRAILSFORD, T. J., 1994. *Stock market volatility: A review essay*. Accounting Research Journal, 7, pp. 40-60.

BREALEY, R.A., MYERS, S.C. E ALLEN, F., 2005. *Corporate Finance: 8 Edition*. New York: McGraw-Hill Irwin.

BREIDT, F. J., CRATO, N., E DE LIMA, P. J. F., 1993. *Modeling long-memory stochastic volatility*. Iowa State University Discussion paper.

BROOKS, C., 1998. *Predicting Stock Market Volatility: Can Market Volume Help*. J. Forecasting 17:1, pp. 59–80.

CAMPBELL, J. Y., E KYLE, A. S., 1993. *Smart money, noise trading and stock price behaviour*. The Review of Economic Studies, 60(1), pp. 1-34.

CONT, R. 2001, *Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues*. Quantitative Finance, vol. 1, no. 2, pp. 223-236.

- CUMBY, R.; FIGLEWSKI, S. E HASBROUCK, J., 1993. *Forecasting Volatilities and Correlations with EGARCH Models*, J. Derivatives 1, pp. 51–63.
- DAMODARAN, A., 2012. *Investment valuation: Tools and techniques for determining the value of any asset* (Vol. 666). John Wiley & Sons.
- DING, Z., GRANGER, C. W., E ENGLE, R. F., 1993. *A long memory property of stock market returns and a new model*. Journal of empirical finance, 1(1), pp. 83-106.
- DUNIS, C. L., LAWS, J. E CHAUVIN, S., 2000. *The Use of Market Data and Model Combination to Improve Forecast*.
- DUPERNEX, S., 2007. *Why might share prices follow a random walk*. Student Economic Review, 21(1), pp. 167-179.
- ENGLE, R. F., 1982. *A general approach to Lagrange multiplier model diagnostics*. Journal of Econometrics, 20(1), pp. 83-104.
- ENGLE, R. F., 1982. *Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation*. Econometrica: Journal of the Econometric Society, pp. 987-1007.
- ENGLE, R. F., E BOLLERSLEV, T., 1986. *Modelling the persistence of conditional variances*. Econometric reviews, 5(1), pp. 1-50.
- ENGLE, R. F., LILIEN, D. M., E ROBINS, R. P., 1987. *Estimating time varying risk premia in the term structure: the ARCH-M model*. Econometrica: Journal of the Econometric Society, pp. 391-407.
- FAMA, E. F., 1965. *The behavior of stock-market prices*. The journal of Business, 38(1), pp. 34-105.
- FAMA, E.F. E FRENCH, K.R., 1995. *Size and Book-to-Market Factors in Earnings and Returns*. Journal of Finance. 50, pp. 131-155.
- FAMA, EUGENE F., 1970. *Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work*, J. Finance, 25(2), pp. 383-417
- FIELDS, M. J., 1931. *Stock prices: A problem in verification*, The Journal of Business of the University of Chicago 4(4), pp. 415–418.
- FRENCH, K. R., SCHWERT, G. W., E STAMBAUGH, R. F., 1987. *Expected stock returns and volatility*. Journal of financial Economics, 19(1), pp. 3-29.
- GALLANT, A. R., ROSSI, P. E., E TAUCHEN, G., 1992. *Stock prices and volume*. The Review of Financial Studies, 5(2), pp. 199-242.
- GERLACH, R., CHEN, C. W., LIN, D. S., E HUANG, M. H., 2006. *Asymmetric responses of international stock markets to trading volume*. Physica A: Statistical Mechanics and its applications, 360(2), pp. 422-444.
- GIOVANNI, A. E JORION.P., 1989. *The time variation of risk and return in the foreign exchange and stock markets*. Journal of Finance, 44. pp. 307-325

- GOPIKRISHNAN, P., PLEROU, V., LIU, Y., AMARAL, L. A. N., GABAIX, X. E STANLEY, H. E., 2000. Scaling and correlation in financial time series, *Physica A* 287(3–4), pp. 362–373.
- GRANGER, C. W. J., SPEAR, S. E DING, Z., 2000, *Stylized facts on the temporal and distributional properties of absolute returns: An update*, in W.-S. Chan, W. K. Li and H. Tong (eds.), Proceedings of the Hong Kong International Workshop on Statistics and Finance: An Interface, Imperial College Press, London, pp. 97–120.
- GUO, D., 1999. *A test of efficiency for the currency option market using stochastic volatility forecasts*. Quantitative Analysis in Financial Markets: Collected Papers of the New York University Mathematical Finance Seminar. World Scientific.
- HAMILTON, J. D., 1988. *Rational-expectations econometric analysis of changes in regime: An investigation of the term structure of interest rates*. Journal of Economic Dynamics and Control, 12(2-3), pp. 385-423.
- HANSEN, P. R., E LUNDE, A., 2001. *A comparison of volatility models: Does anything beat a GARCH (1, 1)*. Unpublished manuscript. Department of Economics, Brown University.
- HARVEY, A., RUIZ, E., E SHEPHARD, N., 1994. *Multivariate stochastic variance models*. The Review of Economic Studies, 61(2), pp. 247-264.
- HEYNEN, R. C. E KAT, H. M., 1994. *Volatility Prediction: A Comparison of Stochastic Volatility, GARCH(1,1) and EGARCH(1,1) Models*, J. Derivatives, pp. 50–65.
- HEYNEN, R. C., 1995. *Essays on Derivatives Pricing Theory*. Amsterdam: Thesis Publishers.
- HULL, J., E WHITE, A., 1987. *The pricing of options on assets with stochastic volatilities*. The journal of finance, 42(2), pp. 281-300.
- KARPOFF, J. M., 1987. *The relation between price changes and trading volume: A survey*. Journal of Financial and quantitative Analysis, 22(1), pp. 109-126.
- KING, M., SENTANA, E., E WADHWANI, S., 1990. *Volatility and links between national stock markets* (No. w3357). National Bureau of Economic Research.
- KIRMAN, A. E TEYSSIÈRE, G., 2002, *Microeconomic models for long memory in the volatility of financial time series*, Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics 5(4), pp. 281–302.
- LEE, B. S., E RUI, O. M., 2002. *The dynamic relationship between stock returns and trading volume: Domestic and cross-country evidence*. Journal of Banking & Finance, 26(1), pp. 51-78.
- LEROY, S. F., 1989. *Efficient capital markets and martingales*. Journal of Economic literature, 27(4), pp. 1583-1621.
- LJUNG, G. M., E BOX, G. E., 1978. *On a measure of lack of fit in time series models*. Biometrika, 65(2), pp. 297-303.

- LO, A. E MACKINLAY, A., 1999. *A Non-Random Walk Down Wall Street*. Princeton: Princeton University Press.
- MANDELBROT, B., 1963. *The variation of certain speculative prices*, *The Journal of Business* 36(4), pp. 394–419.
- MCMILLAN, D., SPEIGHT, A. H. E GWILYM, O., 2000. *Forecasting U.K. Stock Market Volatility*, *J. Applied Econ.* 10, pp. 435–48.
- NAU, R., 2017. *Random Walk Model*. [online] Disponibile su: <https://people.duke.edu/~rnau/411rand.htm> [10 Maggio 2017].
- NELSON, D. B., 1991. *Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach*. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pp. 347-370.
- PAGAN, ADRIAN, R. E SCHWERT, G. W., 1990. *Alternative Models for Conditional Stock Volatility*, *J. Econometrics* 45:1–2, pp. 267–90.
- PALOMBA, G., 2004. *Modelli ARCH*.
- PETERS, E. E., 1996. *Chaos and order in the capital markets: a new view of cycles, prices, and market volatility* (Vol. 1). John Wiley & Sons.
- POON, S. H., 2005. *A practical guide to forecasting financial market volatility*. John Wiley & Sons.
- POON, S. H., E GRANGER, C. W., 2003. *Forecasting volatility in financial markets: A review*. *Journal of economic literature*, 41(2), pp. 478-539.
- POTERBA, J. M., E SUMMERS, L. H., 1984. *The persistence of volatility and stock market fluctuations*. *American Economic Review*, 76, pp. 1141-1151.
- SAMUELSON, P. A., 1973. *Proof that properly discounted present values of assets vibrate randomly*. *The Bell Journal of Economics and Management Science*, pp. 369-374.
- SATCHELL, S. E KNIGHT, J., 2011. *Forecasting Volatility in the Financial Markets*. 3rd ed. Burlington: Elsevier Science.
- SEWELL, M., 2011. *Characterization of Financial Time Series*. UCL Department of Computer Science.
- SHARPE, W. F., 1964. *Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk*. *The journal of finance*, 19(3), pp. 425-442.
- SHLEIFER, A., 2000. *Inefficient Markets: An Introduction to Behavioural Finance*. Oxford: Oxford University Press.
- TAYLOR, S. J., 1986. *Modelling Financial Time Series*. Wiley.
- TIMMERMANN, A., E GRANGER, C. W., 2004. *Efficient market hypothesis and forecasting*. *International Journal of forecasting*, 20(1), 15-27.
- TSAY, R., 2005. *Analysis of financial time series*. 2nd ed. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons.

- TSAY, R., 2010. *Analysis of financial time series*. 3rd ed. Hoboken, N.J.: Wiley.
- TSAY, R., 2014. *An Introduction to Analysis of Financial Data with R*. Somerset: Wiley.
- TYSSDAL, J. S., E TJOSTHEIM, D., 1988. *An autoregressive model with suddenly changing parameters and an application to stock market prices*. *Applied Statistics*, pp. 353-369.
- VILASUSO, J., 2002. *Forecasting Exchange Rate Volatility*, *Econ. Letters*, 76, pp. 59–64.
- WEST, K. D. E CHO, D., 1995. *The Predictive Ability of Several Models of Exchange Rate Volatility*, *J. Econometrics*, 69:2, pp. 367–91.
- YIN, W., 2010. *An empirical research on China's stock market's volume-volatility relationship*. *World Economic Ourlook* 3, pp. 66-79.
- ZHAO, L. E Y. WANG, 2003. *Hushen stock markets' volume, return and volatility correlations: evidence from empirical data analysis*. *Economic Science* 2, pp. 57-67.
- ZHOU, B., 1996. *High-frequency data and volatility in foreign-exchange rates*, *Journal of Business & Economic Statistics*. 14(1), pp. 45–52.
- ZUMBACH, G., 2002. *Volatility Processes and Volatility Forecast with Long Memory*, work. paper, Olsen Associates.